Lecture 27

一、复数矩阵与复数向量

1. 复数向量 z=$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{bmatrix}$，其中每个元素都输复数，z∈$C^n$。
2. 向量的模

   对于实数向量，|x|=$\sqrt{x^T x}$，如果对于复数向量$z^T z$=$z_1{}^2 + z_2{}^2 + \cdots + z_n{}^2$，这里$z_i$是复数，平方后虚部为负数，如向量(1,i)，平方后为 1-1=0，向量的长度显然不是 0。

   上一讲说过，对于复数向量|z|=$\sqrt{\overline{z}^T z}$，即用向量共轭的转置乘以原来的向量。

   将$\overline{z}^T$记为z^H，即|z|=$\sqrt{z^H z}$，H 读作埃尔米特
3. 内积

   根据模的计算公式，x 与 y 的内积为$x^H y$
4. 复数矩阵对称性

   对于实数矩阵，有$A^T = A$，对于复数矩阵，同样要去共轭的转置，即$\overline{A}^T = A$，记为$A^H = A$，对称矩阵称作埃尔米特矩阵
5. 正交性

   对于实数向量，$q_i{}^T q_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$，称$q_i$、$q_j$正交，对于复数矩阵，要对矩阵求共轭

   即$\overline{q_i}^T q_j = q_i{}^H q_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$。复数向量构成的正交矩阵 Q=$[q_1 \quad \cdots \quad q_n]$，有

   $\mathbf{Q}^H\mathbf{Q} = \mathbf{I}$，正交矩阵在复数的情况下，称为酉(unitary)矩阵。

二、傅里叶矩阵

n 阶傅里叶$F_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$，对于每个元素$(F_n)_{ij} = \omega^{ij}$，

i j=0⋯n-1。其中ω^n=1，$\omega = e^{\frac{i\,2\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$，说明 n 个单位复数跟均匀的分布在以复平面为圆心的单位半径的圆上。即ω=$e^{\frac{2\pi}{6}}$位于单位圆 60°角处，平方位于 120°角处。从开方的角度看，它们是 1 的六个六次方根，一次的ω称为原根。

我们看一个四阶傅里叶矩阵

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^{2(n-1)} \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

可以发现矩阵的四列正交，我们来验证一下$c_2{}^H c_4 = 1 - 0 + 1 - 0 = 0$，F 中向量的模为 0，不是标准正交矩阵，除以向量的模，得到标准正交矩阵

$$F_4=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{bmatrix}\qquad F^HF=I$$

三、快速傅里叶变换

不同的傅里叶矩阵之间存在某种关系，F_{64}与F_{32}，F_{32}与F_{16}等。

对于F_{64}，一般情况，用一个列向量右乘F_{64}，需要64^2次计算，我们希望分解F_{64}从而减少计算量。

$$F_{64}=\begin{bmatrix}I&D\\I&-D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{32}&0\\0&F_{32}\end{bmatrix}\mathrm{P}$$

其中 $P=\{p_{2i,i}=1, 0\le i<N/2,\ p_{2\left(i-\frac{N}{2}\right)+1,i}=1, N/2\le i<N\}$，是一个置换矩阵，其作用是将前一个矩阵中的奇数列提到偶数列之前。

对于 8 阶矩阵，$P_8=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$

其中 D=$\begin{bmatrix}1&\cdots&0&0\\0&\omega^2&\vdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&\omega^n\end{bmatrix}$,我们称这个矩阵为修正矩阵，显然计算量来自 D 矩阵，对角矩阵的计算量为 32，单位矩阵的计算量忽略不计。

第二个矩阵是两个F_{32}与零矩阵组成的，计算量约为 2×32^2。

于是我们将64^2复杂度的计算化简为 $2\times32^2+32$。

进一步将F_{32}化简与F_{16}相关

$$\begin{bmatrix}I_{32}&D_{32}\\I_{32}&-D_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{16}&D_{16}&&\\I_{16}&-D_{16}&&\\&&I_{16}&D_{16}\\&&I_{16}&-D_{16}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{32}&0\\0&P_{32}\end{bmatrix}\mathrm{P}_{64}$$

32^2的平方进一步分解为 $2\times16^2+16$，总的计算复杂度为：$2\times(2\times16^2+16)+32$，如此递推，最后的复杂度为：2(2(2(2(2(2(1)+1)+2)+4)+8)+16)+32，约为 $6\times32=\frac{64}{2}\times log_2 64$

于是原来需要n^2的运算现在只需要$\frac{n}{2}\times log_2 n$就可以实现了。