Lecture 19

一、行列式的计算

回顾一下上一讲行列式的性质，主要是性质 1-3

1) 单位矩阵的行列式为 1　　det I= 1
2) 交换矩阵的任意两行，行列式变号。
3) a. 用一个数字 t 乘以其中的一行，行列式变为原来的 t 倍.

以二维为例：$\begin{vmatrix} \mathrm{ta} & \mathrm{tb} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{vmatrix} = \mathrm{t} \begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{vmatrix}$

b. 用对其中的一行进行线性变换，行列式整体线性变换。

以二维为例：$\begin{vmatrix} \mathrm{a}+\mathrm{a}' & \mathrm{b}+\mathrm{b}' \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{a}' & \mathrm{b}' \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{vmatrix}$

1. 二维情况

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \overbrace{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}}^{\text{根据性质 3 拆分第一行}} = \overbrace{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix}}^{\text{根据性质 3 拆分第二行}}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

=ad-bc

行列式为 0，因为有一列全为 0

2. 三维情况

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{vmatrix}$ 按照上述的方法拆分，共有 27 种情况（3×3×3）

我们只考虑不为 0 的情况，只有当各行各列均有元素时，行列式才不为 0

写出不为 0 的情况：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & c_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & c_{12} & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & b_{13} \\ c_{11} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{12} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & b_{12} & 0 \\ c_{11} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= a_{11}b_{12}c_{13} - a_{11}b_{13}c_{12} - a_{12}b_{11}c_{13} + a_{12}b_{13}c_{11} + a_{13}b_{11}c_{12} - a_{13}b_{12}c_{11}$

3. N 阶公式

det A=$\sum_{n!} \pm a_{1i} b_{1j} \ldots n_{1k}$　　　　　　　　(1)

其中(i,j,···k)是(1,2,···,n)的一种排列，(1,2,···n)是单位矩阵 I

4. 例子

$$\begin{vmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}=\underset{A}{\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}}+\underset{B}{\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}}$$

上面的公式还不完整，需要确定每一部分的符号

观察 A 中的元素，下标分别为(4,3,2,1),变为(1,2,3,4)共需要两步操作，所以取 +

观察 B 中的元素，下标分别为(3,2,1,4),变为(1,2,3,4)共需要一步操作，所以取 -

我们无法找到其他的排列方式，于是该矩阵的行列式为 0，是一个奇异矩阵。

二、代数余子式

求解代数余子式的过程就是将 n 阶行列式化为 n-1 阶行列式。

1. 三维例子

回顾我们上面用到的例子

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\b_{11}&b_{12}&b_{13}\\c_{11}&c_{12}&c_{13}\end{vmatrix}=a_{11}b_{12}c_{13}-a_{11}b_{13}c_{12}-a_{12}b_{11}c_{13}+a_{12}b_{13}c_{11}+a_{13}b_{11}c_{12}-a_{13}b_{12}c_{11}$$

$$=a_{11}(b_{12}c_{13}-b_{13}c_{12})-a_{12}(b_{11}c_{13}-b_{13}c_{11})+a_{13}(b_{11}c_{12}-b_{12}c_{11})$$

括号内的元素就是括号前系数的余子式

$$=a_{11}\begin{vmatrix}b_{22}&b_{13}\\c_{22}&c_{13}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{13}\\c_{11}&c_{13}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\c_{11}&c_{12}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0\\0&b_{12}&b_{13}\\0&c_{12}&c_{13}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&a_{12}&0\\b_{11}&0&b_{13}\\c_{11}&0&c_{13}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0&a_{13}\\b_{11}&b_{12}&0\\c_{11}&c_{12}&0\end{vmatrix}$$

根据上面的过程，可以总结出：

a_{ij}的代数余子式 $C_{ij}=(-1)^{i+j}det$（去掉i行和j列的$n-1$维矩阵）

上面的例子是使用第一行展开的，即 i=1

2. det A=$a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+\cdots+a_{1n}C_{1n}$
3. 目前我们学过了三种计算行列式的方法
   i. 消元，det A=主元的乘积
   ii. 使用(1)式展开
   iii. 使用代数余子式