Lecture 8

这节课我们来学习如何求解 Ax=b

一、Ax=b 的解

1. 在之前的课程中，提到过只有当右侧向量 b 在矩阵 A 的列中间中，方程才有解

假设我们有方程组:

$$\begin{cases} x1 + 2x2 + 2x3 + 2x4 = b_1 \\ 2x1 + 4x2 + 6x3 + 8x4 = b_2 \\ 3x1 + 6x2 + 8x3 + 10x4 = b_3 \end{cases}$$

可以发现，行 1 的系数与行 2 的系数和等于行 3 的系数，如果方程组有解，b_3=b_1+b_2，即如果左侧各行的线性组合为 0，右侧相同系数的线性组合也一定为 0。

2. 求解过程

我们写出上面例子的增广矩阵[A | b]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{bmatrix}$$

下面对增广矩阵进行消元

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b3 \end{bmatrix} \quad => \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} \quad =>$$

$$\begin{bmatrix} \color{red}{1} & 2 & 2 & 2 & b1 \\ 0 & 0 & \color{red}{2} & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$ (标红的元素为主元)

观察最后一行，可以得到$b_3 - b_2 - b_1 = 0$即$b_3 = b_2 + b_1$，验证了我们之前的结论。

接下来我们来求解方程组所有的解，我们令上面例子中的 b=$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$。

首先我们求矩阵的特解，特解的定义就是令所有自由变量为 0，求解主变量的值。在本例中，我们令x_2、x_4为 0，我们有

$$\begin{cases} x1 + 2x3 = 1 \\ 2x3 = 0 \end{cases}$$

可以求解出 x1=-2,x3=$\frac{3}{2}$，所以该方程的特解$x_p = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

下面我们介绍方程的通解，通解的定义就是满足这个方程的所有的解，对于 Ax=b，通解=特解+矩阵零空间向量，上一讲我们学过怎么求解零空间，加上本节介绍的特解，就可以完成的求解 Ax=b 的解。

在本例中，根据上面所求的特解和上一讲求得零空间向量，我们可以得出

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

二、矩阵的秩与解的关系

1. 列满秩（$r=n<m$）

   没有自由变量，方程组有 1 个解(特解)或无解。

2. 行满秩（$r=m<n$）

   有无穷多解，恒有自由变量。

3. 方阵满秩

   有唯一解 $x=A^{-1}b$

4. 不满秩

   无解(b 不在 A 的列空间中)或者无穷多解