Lecture 9

这节课我们学习线性相关、基、维度的概念

一、线性相关与线性无关

1. 概念

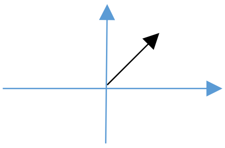
   对于向量x_1、$x_2 \cdots x_n$,如果存在不全为 0 的实数$k_1 \cdots k_n$使得

   $$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=0$$

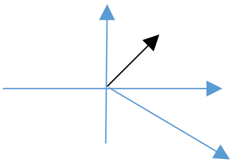
   则我们称向量x_1、$x_2 \cdots x_n$线性相关，否则为线性无关。

2. 例子

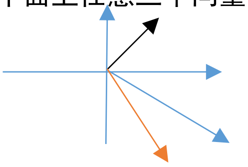
   a) 黑色向量为v_1,蓝色向量为$v_2=2v_1$, $2v_1-v_2=0$，所以v_1与v_2线性相关

   b) 黑色向量为v_1,蓝色向量为v_2, v_1与v_2线性无关

   c) 平面上任意三个向量一定线性相关

3. 矩阵表示

   假设我们有矩阵 A=$[v_1 \quad v_2 \quad v_3]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2.5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

   假设我们求矩阵 A 的零空间，我们令 Ax=0,有:

   $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2.5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   所以，由$v_1 \cdots v_n$构成的矩阵中，当零空间只有$\vec{0}$时，A 的各列线性无关，当零空间内有其它向量时，A 的各列线性相关

二、生成空间

1. 定义

   由$v_1 \cdots v_n$生成的向量空间，意味着这个空间包含这些向量的所有的线性组合。

2. 基

   基由一组向量$v_1 \cdots v_d$定义，这些向量线性无关并且能生成整个 n 维空间

   下面我们举个例子:

   三维空间的一组基 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   每个空间的基不唯一,比如$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ e \end{bmatrix}$也是三维空间的一组基,不过我们可以发现,

一个空间中的同基，向量的个数都是相同的。如果 A 是R^n空间的一组基，则 A 中的向量的个数一定是 n

并且由基向量构成的矩阵，一定是个方针并且可逆。

3. 维数

给定一个空间，基向量的个数称为这个空间的维数

下面我们举一个例子，假设有矩阵 A=$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\1 & 1 & 2 & 1\\1 & 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$，可以看出矩阵的 A 的列空间为矩阵 A 的前两列，C(A)=$\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$,rank A=2=#主元的个数=列空间的维度

零空间的维度=自由变量的个数=n-rank(A)