Lecture 24

一、马尔科夫矩阵

1. 有矩阵 A=$\begin{bmatrix}0.1 & 0.01 & 0.3\\0.2 & 0.99 & 0.3\\0.7 & 0 & 0.4\end{bmatrix}$，观察这个矩阵，可以发现满足两条性质：
    i. 所有元素均为非负数
    ii. 每一列求和为 1

    我们称这样的矩阵为马尔科夫矩阵

   马尔科夫矩阵在矩阵的幂中，有重要的作用，上一讲的微分方程中，矩阵的稳态是λ=0，在矩阵的幂中，稳态是λ=1。

    给出两个推论：
    i. 必有一个特征值为 1
    ii. 其余的特征值的绝对值均小于 1

    回顾之前的矩阵的幂的计算公式$u_k = S\Lambda^k c = c_1{\lambda_1}^k x_1 + \cdots + c_n{\lambda_n}^k x_n$。

   我们取$\lambda_1 = 1$，其余的特征值的绝对值均小于 1，当 k->∞是，我们有$u_k = c_1 x_1$。

    对于矩阵 A，有 A-I=$\begin{bmatrix}-0.9 & 0.01 & 0.3\\0.2 & -0.01 & 0.3\\0.7 & 0 & -0.6\end{bmatrix}$。发现矩阵 A-I 的每一列求和为 0，可以推断出 A-I 各行线性相关(每一行都等于 0-其他行的求和)，所以 A-I 是一个奇异阵，并且 x=$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$在 A-I 的左零空间中，即$(A-I)^T$列向量线性相关，而 A 特征值 1 所对应的特征向量将在 A–I 的零空间中，因为 Ax=x->(A-I)x=0

2. 下面我们来看一个马尔科夫矩阵的应用

   以加州和麻省的人口迁移为例，

$$\begin{bmatrix}u_{cal}\\u_{mass}\end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{cal}\\u_{mass}\end{bmatrix}_k$$

有 90%的人留在加州，10%的人搬去麻省

   矩阵中的元素均大于 0，代表迁移概率，并且每一列求和为 1，代表所有的人。

   并且$\begin{bmatrix}u_{cal}\\u_{mass}\end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix}0\\1000\end{bmatrix}$，根据公式，由$\begin{bmatrix}u_{cal}\\u_{mass}\end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{cal}\\u_{mass}\end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix}200\\800\end{bmatrix}$。

   随着时间的推移，有越来越多的人迁移到加州，并且有人从加州迁移回麻省。

   $\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}$是一个马尔科夫矩阵，有$\lambda_1 = 1$，根据矩阵的迹：0.9+0.8=$\lambda_1 + \lambda_2$，可以求出$\lambda_2$=0.7。

   接下来计算特征相连与特征值：

$$(\mathrm{A} - \lambda_1 I)x_1 = 0$$
$$(\mathrm{A} - \lambda_2 I)x_2 = 0$$

   求出x_1=$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$x_2$=$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，所以递推公式为$u_k = c_1{\lambda_1}^k x_1 + c_2{\lambda_2}^k x_2$，带入$u_0$，可以计算出$\begin{cases}c_1 = \frac{1000}{3}\\ c_2 = \frac{2000}{3}\end{cases}$

二、傅里叶级数

1. 先回顾一下正交矩阵 Q，有$q_1 \cdots q_n$为标准正交向量组，则向量v=$x_1 q_1 + \cdots + x_n q_n$，我们希望求出$x_1$，让等式两边同时乘${q_1}^T$，有：

$$ {q_1}^T v = x_1 {q_1}^T q_1 + 0 + \cdots + 0 \qquad => x_1 = {q_1}^T v $$

写成矩阵的形式有：

$$ \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = v \qquad => \mathrm{Q}x = v \qquad => x = Q^{-1} v $$

因为 Q 为正交矩阵，有$Q^{-1} = Q^T$，所以$x = Q^T v$。

2. 傅里叶级数

傅里叶级数的展开式为：

$$ f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin x2 + \cdots $$

与向量展开相似，在函数空间中，也可以将$f(x)$投影在一系列相互正交的函数中。函数空间中的$f(x)$就是向量空间中的 v，函数空间中的 1、$\cos x$、$\sin x \cdots$对应向量空间中的$q_1 \cdots q_n$，不同的是，函数空间是无限维度的。

函数正交：参考向量正交，由于函数是连续的，所以函数f和g的内积为：

$$ f^T g = \int f(x) g(x)\, dx $$

本例中，傅里叶级数使用正余弦函数，它们的周期都可以算作 2π，所以本例的函数内积可以写作$\int_0^{2\pi} f(x) g(x)$，让我们检验一个内积：

$$ \int_0^{2\pi} \cos x \sin x\, dx = \frac{1}{2} sin^2 x|_0^{2\pi} = 0 $$

最后我们来确定$\cos x$的系数，同向量空间中的情形一样，我们在等式两边同时做$\cos x$的内积，有：

$$ \int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, dx = a_1 \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx $$

$$ => a_1 \pi = \int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, dx $$

$$ => a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, dx $$