Lecture 26

一、实对称矩阵

$A^T = A$

先介绍实对称矩阵的两条性质

1) 特征值都是实数
2) 特征向量正交

我们可以将特征向量化为长度为 1 的单位向量，得到一组标准正交的特征向量$q_1 \cdots q_n$，正交矩阵 Q=$[q_1 \quad \cdots \quad q_n]$。

对于一般的矩阵，正交化有：$\mathrm{A} = \mathrm{S}\Lambda S^{-1}$，对于对称矩阵，有$\mathrm{A} = \mathrm{Q}\Lambda Q^{-1}$，又因为正交矩阵 Q 满足$Q^{-1} = Q^T$,所以有：

$$\mathrm{A} = \mathrm{Q}\Lambda Q^T \qquad (1)$$

对$\mathrm{Q}\Lambda Q^T$取转置，$(\mathrm{Q}\Lambda Q^T)^T$= $\mathrm{Q}\Lambda Q^T$，这个分解自身就具有对称性。

(1)式叫做谱定理，谱就是指矩阵特征值的集合，在力学上称之为主轴定理。

下面我们证明性质 1：

Ax=λx，对这个式子取共轭，有$\overline{A}\overline{x}$=$\overline{\lambda}\overline{x}$，因为矩阵 A 是实数矩阵，所以A$\overline{x}$=$\overline{\lambda}\overline{x}$

将A$\overline{x}$=$\overline{\lambda}\overline{x}$取转置，有$\overline{x}^T A^T$=$\overline{x}^T\overline{\lambda}$，右乘 x，有 $\overline{x}^T A^T x$=$\overline{x}^T x\overline{\lambda}$。Ax=λx左乘$\overline{x}^T$，有

$\overline{x}^T$Ax=λ$\overline{x}^T$x，可以看出画下划线的两个式子左侧相同，所以有$\overline{\lambda}\overline{x}^T x = \lambda\overline{x}^T$x。

对于$\overline{x}^T x$，$[\overline{x}_1 \quad \cdots \quad \overline{x}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \overline{x}_1 x_1 + \cdots + \overline{x}_n x_n$，令$x_1 = a - bi$，$\overline{x}_1 = a + bi$。

$\overline{x}_1 x_1$=$a^2 + b^2 > 0$，所以$\overline{x}^T x > 0$，$\overline{x}^T x$是 x 长度的平方。对于$\overline{\lambda}\overline{x}^T x = \lambda\overline{x}^T$x，消去

$\overline{x}^T x$，可以得出$\overline{\lambda} = \lambda$，所以特征值是实数。

根据上面推导，若 A 为复矩阵，矩阵必须满足 A=$\overline{A}^T$,才能有性质 1 和 2 成立。

对于$\mathrm{A} = \mathrm{Q}\Lambda Q^T$=$[q_1 \quad \cdots \quad q_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1{}^T \\ \vdots \\ q_n{}^T \end{bmatrix} = \lambda_1 q_1 q_1{}^T + \cdots + \lambda_n q_n q_n{}^T$。$q_i$是单位向量，所以$q_i{}^T q_i$=1。$q_1 q_1{}^T = \frac{q_1 q_1{}^T}{q_1{}^T q_1}$，这个矩阵是投影矩阵，将其他向量投影到矩阵$q_1$上。所以每一个对称矩阵都是一系列相互垂直的投影矩阵的组合。

接下来我们考虑特征值的正负，给出结论：

特征值正负的数量分别于消元后主元的正负数量相同。

二、正定矩阵

正定矩阵的性质：

1) 一定是对称矩阵
2) 所有特征值均为正数
3) 所有主元均为正数
4) 所有子行列式是正数

根据正定矩阵的性质可以看出，正定矩阵将消元主元、行列式、特征值结合到了一起。