Lecture 20

一、求解A^{-1}

先写出二维矩阵 A 的逆$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

可以看出，系数恰好是A的行列式，观察矩阵中的元素，由一系列的代数余子式构成。总结出公式：

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A}C^T \qquad (1)$$

$$=> AC^T = det\ A \cdot I \qquad (2)$$

将(2)写成矩阵的形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} = Rs$$

观察两个矩阵的乘积的矩阵 Rs，Rs_{11}=$a_{11}C_{11} + a_{1n}C_{1n}$，恰好是将矩阵 A 按照第一行展开的结果，对于$Rs_{ii}$都有这个结果，即$Rs_{ii}$=det A。

下面观察非对角线元素，以二阶为例子，第一行乘以第二行的代数余子式

$$a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} = \mathrm{a}(-\mathrm{b}) + \mathrm{ab} = 0$$

再以矩阵的角度来看这个问题$\mathrm{a}(-\mathrm{b}) + \mathrm{ab}$=0 也是矩阵$A_s = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$的行列式，将$A_s$按照第二行展开，det A_s= $\mathrm{a}(-\mathrm{b}) + \mathrm{ab}$=0。

推广到 n 阶的情况，如果用第一行与最后一行的代数余子式相乘，写成矩阵的形式，即:

$$A_s = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

矩阵的第一行与最后一行相同，行列式为 0。

所以在 Rs 中，非对角线元素均为 0，Rs=$\begin{bmatrix} det\ A & \dots & \dots & 0 \\ 0 & det\ A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & det\ A \end{bmatrix}$

二、Ax=b

若 A 是满秩方阵，由 Ax=b 可得出 x=A^{-1}b，将(1)带入，我们有：

$$\mathrm{x} = \frac{1}{det\ A}C^T\mathrm{b}$$

其中$x_1 = \frac{{C_1}^T\mathrm{b}}{det\ A}$=$\frac{C_{11}b_1 + C_{12}b_2 + \cdots + C_{1n}b_n}{det\ A}$可以看出，分子是数字与代数余子式乘积的形式，可以看做是行列式，记为$det\ \ B_1$ ，有$x_1 = \frac{det\ \ B_1}{det\ A}$，同理，$x_n = \frac{det\ \ B_n}{det\ A}$

B_1是一个形为$[b \quad \dots \quad a_n]$，即用 b 代替矩阵 A 中的第一列，构成$B_1$矩阵，我们沿着第一列对矩阵$B_1$展开，有 det B_1=$C_{11}b_1 + C_{12}b_2 + \cdots + C_{1n}b_n$

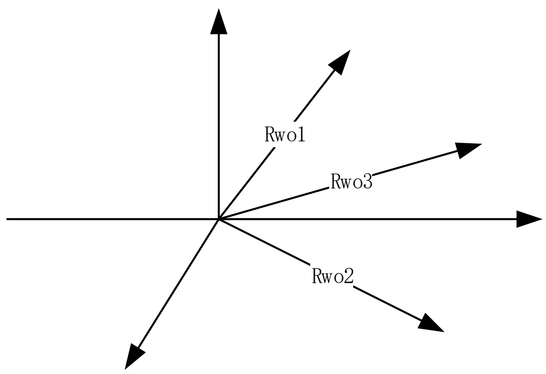
所以对于任意分量x_j=$\frac{det\ \ B_j}{det\ A}$，其中$B_j$是用 b 代替矩阵 A 中的第$j$列所构成的矩阵。

三、多面体体积与行列式的关系

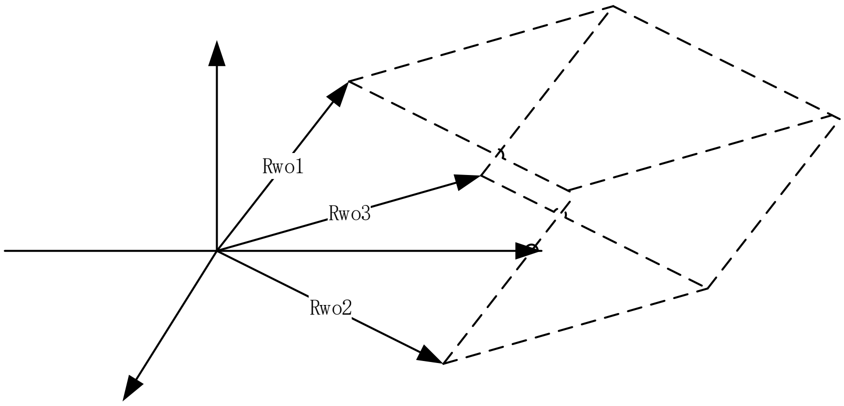
先给出命题，行列式的绝对值等于一个箱子的体积。

1. 三维情况

假设有矩阵$A_{3\times3}$，分别取矩阵的每一行，在坐标系中画图向量

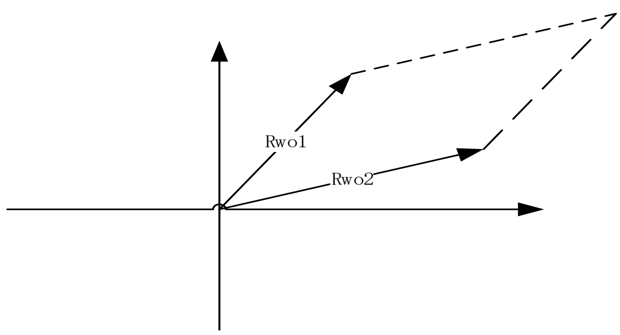


矩阵 A 行列式恰好是由 Row1 Row2 Row3 这三条边展开得到的平行六面体的体积。



2. 二维情况

对于二维矩阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，向量恰好构成一个平面，即行列式的值等于面积



$A_{2\times2}$的行列式的绝对值是上图所示的平行四边形面积，S=|det A|=ad-bc，也就是说，如果知道了顶点坐标，求面积(二维)、体积(三维)，不需要再开方、求角度，只需要计算行列式即可。