Lecture 22

一、对角化

上一讲我们学习了矩阵的特征值，这节课我们来学习如何用矩阵的特征值，将矩阵对角化

有矩阵 A，它的特征向量为$x_1 \cdots x_n$，构成特征向量矩阵 S=$[x_1 \quad \cdots \quad x_n]$，我们可以写出

$$S^{-1}AS = \Lambda$$

其中Λ是由矩阵特特征值构成的对角矩阵。

注意到 S 一定是可逆矩阵，即矩阵 A 由 n 个线性无关的特征向量。

下面我们来写一下推导的过程：

AS=A$[x_1 \quad \cdots \quad x_n]$=$[Ax_1 \quad \cdots \quad Ax_n]$带入特征方程 Ax=$\lambda x$ $[\lambda_1 x_1 \quad \cdots \quad \lambda_n x_n]$

$$=[x_1 \quad \cdots \quad x_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}=S\Lambda$$

我们得到了 AS= S Λ，左乘S^{-1}，我们有：

$$S^{-1}AS = \Lambda$$

右乘S^{-1}，我们有

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

下面我们来看一下应用这个公式求解A^2的特征向量与特征方程：

1) 根据我们之前的知识，有 $Ax=\lambda x$，左乘 A，得到A^2x=λ^2x，所以 A 的特征值是λ^2，特征向量不变。
2) 根据公式 $A=S\Lambda S^{-1}$，$A^2=S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1}= S\Lambda^2 S^{-1}$，同样，矩阵的特征值变为原来的平方，特征向量不变。

推广到矩阵的幂，可以得出：

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

可以看出，当矩阵所有特征值的绝对值均小于 1，k→∞时，$A^k \to 0$

注意我们上述的操作一定是在矩阵由 n 个线性无关的特征向量的情况下，这时候 S 才存在逆矩阵。

S 可逆的情况：

1) 如果矩阵所有的特征向量均不相同，这时候 A 一定有 n 线性无关的特征向量，即 S 一定可逆。
2) 如果有重复的特征值，可能但不一定有 n 个线性无关的特征向量。若 A 是单位阵，A 的特征值均相同，但是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

二、$u_{k+1} = Au_k$

在开始时，给定u_0，我们希望求解u_{k+1}

根据$u_{k+1} = Au_k$，我们有$u_1 = Au_0$，$u_2 = A^2u_0$

因为 A 的维度与 u 的维度相同，且 S 中有 n 个无关的特征向量，所以 S 中的列向量构成了一组基

首先我们先将u_0展开为矩阵 A 的特征向量线性组合的形式：

$$u_0 = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

左乘 A，有：

$$Au_0 = c_1Ax_1 + \cdots + c_nAx_n = c_1\lambda_1x_1 + \cdots + c_n\lambda_nx_n$$

写成矩阵的形式，有：

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{S}\,\Lambda\mathbf{c} \qquad (1)$$

如果要计算u_{k+1}，带入(1)中，有$u_{k+1} = A^k u_0 = \mathbf{S}\,\Lambda^k\mathbf{c}$。即可求出$u_{k+1}$。

例子：求斐波那契数列的第 100 项。

$$0,1,1,2,3,5,8,13\cdots\cdots F_{100}?$$

递推公式为$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$，我们希望用到$u_{k+1} = Au_k$，而我们只有一个方程，所以我们加一个方程$F_{k+1} = F_{k+1}$构成一个方程组：

$$\begin{cases} F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \\ F_{k+1} = F_{k+1} \end{cases}$$

将方程组写成矩阵的形式：

$$\begin{bmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix}$$

于是我们构造出$u_{k+1} = Au_k$，其中 A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，A 是一个对称矩阵，根据之前的知识，A 的特征值一定是实数。接下来我们求解 A 的特征值与特征向量。

$$|\mathrm{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

求出特征值为：$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \ \ 1.618 \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618 \end{cases}$的到两个 不同的特征值，一定存在线性无关的特征向量，则矩阵可以对角化。

接下来求解特征向量：$\mathrm{A} - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$，观察矩阵$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，因为$\lambda^2 - \lambda - 1$，所以特征向量为$x_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$x_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$

最后计算$u_0 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，用特征向量表示$u_0$=$c_1x_1 + c_2x_2$，可以求出：

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{5}/5 \\ c_2 = -\sqrt{5}/5 \end{cases}$$

套入到公式$u_{k+1} = \mathbf{S}\,\Lambda^k\mathbf{c}$：

$$u_{99} = \begin{bmatrix} F_{100} \\ F_{99} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 \\ -\sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

$$F_{100} = c_1{\lambda_1}^{100} + c_2{\lambda_2}^{100}$$