Lecture 29

一、正定矩阵的补充

1. 正定矩阵的逆

   若矩阵 A 是正定矩阵，则 A 的逆也一定是正定矩阵，A^{-1}的特征值等于 A 的特征值的倒数，也一定是正数。

2. A、B 均为正定矩阵，A+B？

   因为 A、B 为正定矩阵，有$x^TAx>0$、$x^TBx>0$，可以推出$x^T(A+B)x>0$。

3. 假设$A_{m\times n}$，A^TA

   之前投影的知识可知，A^TA是对称的方针，$x^TA^TAx=(Ax)^T(Ax)$，相当于 Ax 的模，所以有$x^TA^TAx=(Ax)^T(Ax)\geq 0$，若保证 A 的零空间中只有 0 向量，即 A 的各列线性无关，rank (A)=n，即可说明A^TA是正定矩阵。

4. 在矩阵数值计算中，正定矩阵消元不需要进行"行交换"操作，也不必担心主元过小或为零，它们是容易计算的矩阵。

二、相似矩阵

1. 定义

   若矩阵 A 与 B 相似，则存在某可逆矩阵，满足 B=$M^{-1}AM$时，称 A 与 B 互为相似矩阵

   在对角化中，学习过$\Lambda=S^{-1}AS$，则 A 与Λ相似

   例 1：

   A=$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，计算对角阵为$\Lambda$=$\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$，取 M=$\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix}$，则有：

   $$\mathrm{B}=\mathrm{M}^{-1}A\mathrm{M}=\begin{bmatrix}1&-4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-15\\1&-6\end{bmatrix}$$

   称 A、B、Λ均为相似矩阵，计算 A、B、Λ的特征值，发现均为 3、1，即相似矩阵有相同的特征值。

   在这个例子中，有特征值 3、1 的这一族矩阵都是相似矩阵，如$\begin{bmatrix}3&7\\0&1\end{bmatrix}$，其中最特殊的就是$\Lambda$。

   对于相似矩阵来说，特征值相同，特征向量的数目一定相同。

2. 证明

   $$Ax=\lambda x$$
   $$=>AMM^{-1}x=\lambda x$$
   $$=>M^{-1}AMM^{-1}x=\lambda M^{-1}x$$
   $$=>M^{-1}AMM^{-1}x=\lambda M^{-1}x$$
   $$=>BM^{-1}x=\lambda M^{-1}x$$

   可以将$BM^{-1}x=\lambda M^{-1}x$看做是特征值为λ，特征向量为$M^{-1}x$

3. 特征值重复

   令$\lambda_1=\lambda_2=4$，具有这样的特征值的具有为：$\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}4&1\\0&4\end{bmatrix}$。其中$\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$只与自己相似：$M^{-1}\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}M=4\mathrm{I}=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$，所以$\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}4&1\\0&4\end{bmatrix}$并不相似，将这一族矩阵分为两类，$\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$自己为一类，其余的为一类，其中$\begin{bmatrix}4&1\\0&4\end{bmatrix}$为最"好"的矩阵，称为若尔当形。

三、若尔当标准型

我们在看一个例子：A=$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，计算出矩阵 A 的特征值为四个 0，矩阵的秩为 2，所以无关的特征向量的个数为 2。矩阵 B=$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，同样四个特征值均为 0，无关的特征向量的个数为 2，从特征值和特征向量看 A 与 B 矩阵相似，其实不然。

若尔当认为第一个矩阵是由一个 3×3 的块与一个 1×1 的块组成的：$\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right]$，

而第二个矩阵由由一个 2×2 的块与一个 2×2 的块组成的：$\left[\begin{array}{cc|cc}0&1&0&0\\0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$，其中这些分块称为若尔当快，只有当分块大小相同时，两个矩阵才可以认为相似。

若尔当块的定义形为：$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i&1&&&\\&\lambda_i&1&&\vdots\\&&\lambda_i&&\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\&&&&\lambda_i\end{bmatrix}$，对角线行均为同一个数，仅有一个特征向量。所以每一个矩阵 A 都相似一个若尔当矩阵$J=\begin{bmatrix}J_1&&&&\\&J_2&&&\\&&J_3&&\\&&&\ddots&\\&&&&J_d\end{bmatrix}$。若尔当块的个数就是特征值的个数。

对于一个“好”矩阵，n 阶矩阵有 n 个不同的特征值，可以对角化，若尔当矩阵就是Λ，n 个特征向量，n 个若尔当块。