Lecture 28

一、正定矩阵

判定正定矩阵的方法，对于二阶矩阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

1) 特征值大于零， λ_1>0、λ_2>0
2) 矩阵的所有顺序主子阵的行列式大于零则矩阵正定，a>0, ac−b^2 >0
3) 消元后，矩阵的主元>0，a>0、$\frac{\mathrm{ac}-b^2}{a}$>0
4) 任取非零 x，满足x^TAx>0

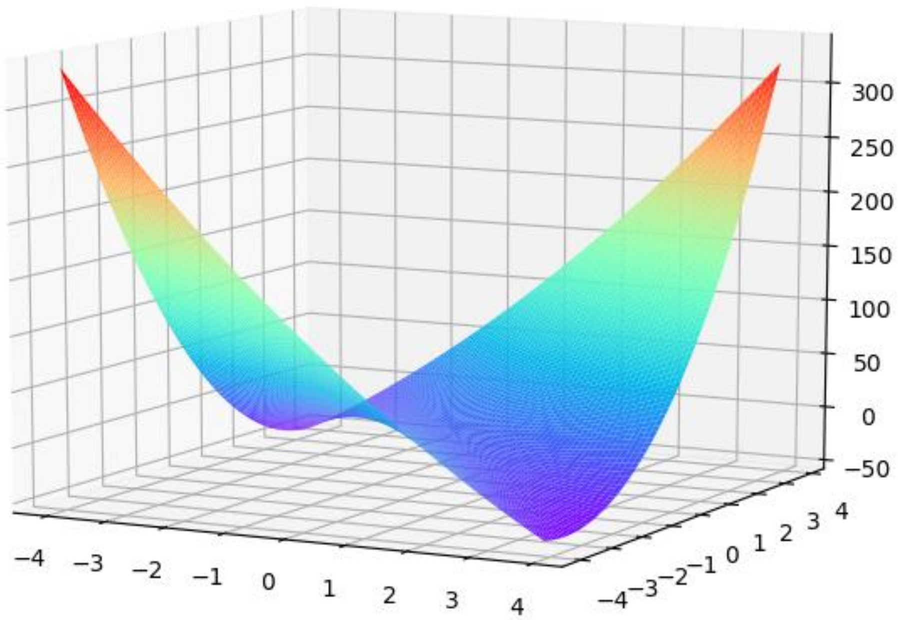
用第四条定义正定矩阵，用第一到第三条验证第四条。

例 1：给定矩阵 A=$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & * \end{bmatrix}$，在*处填写合适的数使得矩阵正定

a) *=18，带入 A=$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$，计算 det A=0，称这个矩阵为半正定矩阵，矩阵 A 是奇异阵，所以一定有特征值λ_1=0，根据矩阵的秩，可以计算出λ_2=20。矩阵的主元 2，只有一个主元，秩为 1。

   $x^TAx=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$=$2{x_1}^2+12x_1x_2$+$18{x_2}^2$=$2({x_1}^2+3{x_2}^2)^2$，成这个函数是纯二次型的，没有线性 部分，没有常数项，没有高次项。

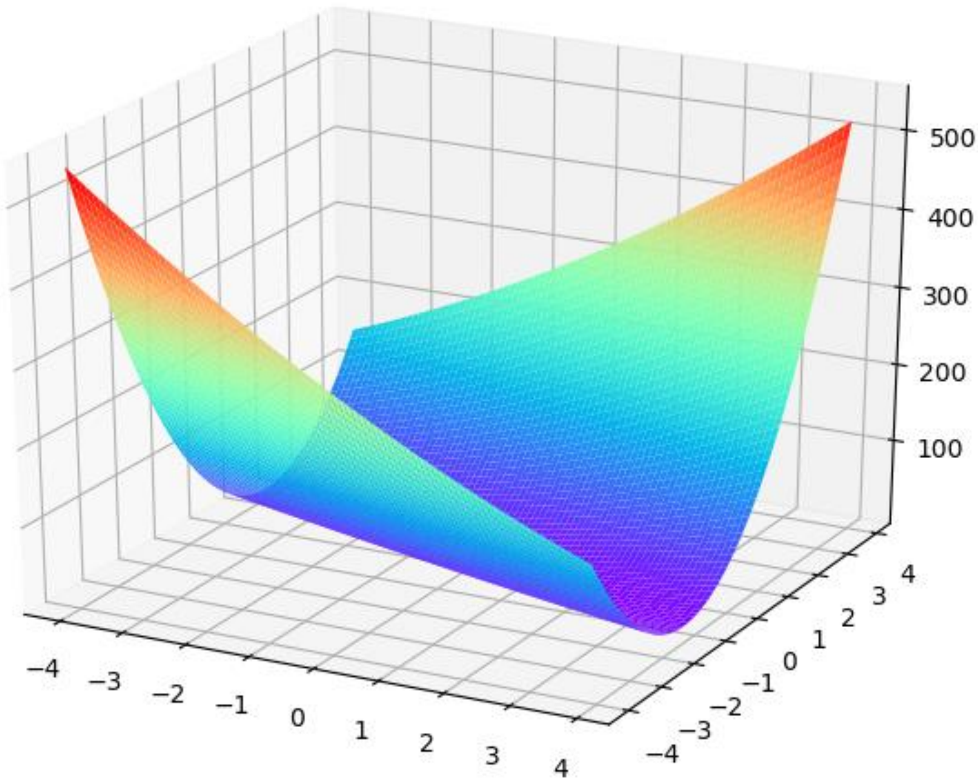
b) *=7，带入 A=$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$，计算 det A=-22，显然矩阵不是正定的，此时的函数为x^TAx=$2{x_1}^2+12x_1x_2$+$7{x_2}^2$,存在$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,带入有$x^TAx$=2-12+9=-1，画出 f($x_1,x_2$)= x^TAx=$2{x_1}^2+12x_1x_2$+$7{x_2}^2$=$2({x_1}^2+3{x_2}^2)^2$ $-11{x_2}^2$的图像，这个函数经过原点，并且有负数的函数值



c) *=20，带入 A=$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$，det A=4，trace =22，所以$\lambda_1$>0、$\lambda_2$>0。

   x^TAx=$2{x_1}^2+12x_1x_2$+$20{x_2}^2$=$2({x_1}^2+3{x_2}^2)^2$ +$2{x_2}^2$，在 0 点，一阶导数为

0，二阶偏导数均为正，所以函数在改点取极小值，只在 0 点，函数值为 0，其余函数值均为正数。



在微积分中，函数取得极小值，要一阶导数为 0，二阶导数大于 0，在线性代数中，函数取得极小值，二阶导数矩阵是正定的。

假设我们令函数值为 1，在 c)中，得到一个椭圆，在 b)中，得到一个双曲线。

对 A=$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$进行消元，$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，可以发现矩阵 L 中的项与配平方中未知数的系数有关，而主元则与两个平方项外的系数有关

二阶导数矩阵$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$，显然，矩阵中的主对角线元素（纯二阶导数）必须为正，并且主对角线元素必须足够大来抵消混合导数的影响。同时还可以看出，因为二阶导数的求导次序并不影响结果，所以矩阵必须是对称的。

例 2：A=$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) 矩阵的顺序主子式，分别为 2,3,4；再来计算主元，分别为 2,$\frac{3}{2}$,$\frac{4}{3}$计算特征值，λ_1=$2-\sqrt{2}$、λ_2=2、λ_3 $2+\sqrt{2}$

b) 计算x^TAx=$2{x_1}^2+2{x_2}^2+2{x_3}^2-2x_1x_2-2x_2x_3$，在$x^TAx=1$处截取将=得到一个椭圆体。一般椭圆体有三条轴，特征值的大小决定了三条轴的长度，而特征向量的方向与三条轴的方向相同。

A=$Q\Lambda Q^T$是特征值相关章节中最重要的公式。