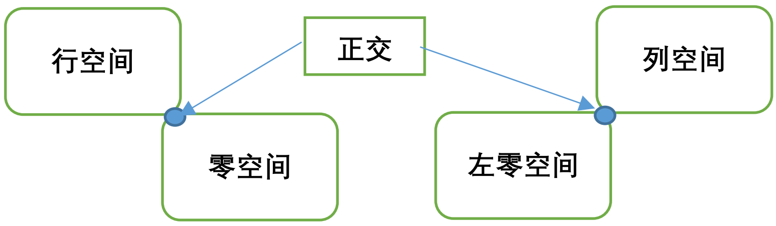
Lecture 14

一、四个子空间的关系

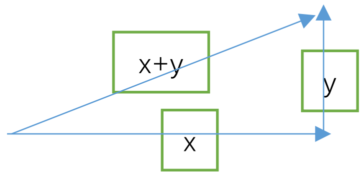
我们先画出子空间的图，并给出它们之间的关系



二、正交向量

正交就是垂直。

我们先考虑二维空间中的正交



若果向量 x 和 y 正交，则$x^Ty=0$。

下面我们从另个一角度考虑：

根据勾股定理可知$\|x\|^2+\|y\|^2=\|x+y\|^2$

$=>x^Tx+y^Ty=x^Tx+x^Ty+y^Tx+y^Ty$

$=>x^Ty+y^Tx=0$

$=>x^Ty=0$

所以当两个向量正交时，我们有$x^Ty=0$。

若两个向量中有一个是零向量，则两个向量一定正交。

三、空间正交

1. 假设子空间 S 和子空间 T 正交，则 S 中的任何一个向量与 T 中的任何一个向量都正交。

   在R^2中，我们共有三个子空间：

   1) 整个平面 D
   2) 过原点的直线 L
   3) 原点 0

   L 和 D 永远不可能正交，因为 S 和 D 共面

   L 与原点 0 永远正交

2. 行空间和零空间

   行空间和零空间的关系类似于将一个空间一分为二的两个子空间，并且这两个子空间是正交的。

   若 Ax=0，我们有

$$\begin{bmatrix} row_1 \\ \dots \\ row_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} row_1(x_1,\dots,x_n) \\ \dots \\ row_n(x_1,\dots,x_n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

   所以矩阵 A 的每一行都与 x 正交。

   x 代表的是零空间中的任意向量，不难证明 x 与行向量的线性组合也正交，符合空间正交的定义，所以行空间和零空间正交。

零空间与行空间正交，并且零空间的维度与行空间的维度和正好是 n，合成整个$\boldsymbol{R}^n$空间。我们将这两个空间称为 n 维空间的正交补。

四、求解无解方程 Ax=b 的解

若右侧某一个数据出现偏差时，Ax=b 就可能没有解，用消元法可以检测有没有解。

解决方法：

a) 去掉一些不好的方程

问题：无法决定方程的好坏

b) 方程左乘$\boldsymbol{A}^T$

Ax =b 变为$\boldsymbol{A}^T$Ax=$\boldsymbol{A}^T$b。

矩阵$\boldsymbol{A}^T\mathbf{A}$不一定总为可逆矩阵，与矩阵 A 有关。当且仅当矩阵 A 的列向量线性无关时，$\boldsymbol{A}^T\mathbf{A}$才可逆。

我们将在下一节学习具体的方法。