Lecture 11

一、矩阵空间

1. 矩阵空间是一种向量空间的延伸，只不过空间中的每个元素都是矩阵。
   假设 M 是由所有 3×3 矩阵构成的集合，矩阵之间的加法和数乘都是封闭的，所以集合 M 是一个矩阵空间。
   对称矩阵 S 和上三角矩阵 U 都是 M 的一个子空间，S 与 U 的交集，可以得到另一个子空间：对角阵 D。
2. 基于维度
   我们来写出 M 的基：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

   类似于R^9的一组基，不过每一个基元素是一个 3×3 的矩阵，可以看出 M 的维度是 9。
   下面我们来考虑 S 和 U 的基和维度：
   对称矩阵 S 的一组基：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

   上三角矩阵 U 的一组基：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

   S 和 U 的维度都是 6
   我们来看一下 S 的基和 U 的基的交集：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

   恰好是对角矩阵 D 的一组基，dim(S∩U)=dim(D)=3
   之前我们介绍过向量空间的并集不一定是向量空间，对矩阵空间也是同样成立。
   下面我们介绍一个新的符　“+”
   S+U 的所包含的集合是包含了所有 S+U 的线性组合，可以看出 S+U=M。dim(S+U)=9。
   根据以上所求得的维度可以得到：

   dim(U)+dim(S)=dim(S∩U)+dim(S+U)

3. 微分方程
   “空间”的概念还可以应用到微分方程中，即空间中的元素不是矩阵和向量，而是方程的解。
   假设我们有方程：

$$\frac{d^2y}{d^2x}+y=0$$

   只考虑实数范围内，方程有两个特解 y=$\sin x$和 y=$\cos x$, 而所有的解就是这两个特解的线性组合 y=$c_1\sin x+c_2\cos x$。
   从空间的角度出发，y 构成一个解空间，解空间的一组基是$\sin x$和$\cos x$，空间的维度是 2。

二、秩一矩阵

1. 假设我们有矩阵 A=$\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\2 & 8 & 10\end{bmatrix}$

   很明显矩阵秩等于 1，并且矩阵 A 可被分解为$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\end{bmatrix}$

   矩阵 A 列空间的一组基是$\mathrm{u}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

   矩阵 A 行空间的一组基是$\mathrm{v}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\end{bmatrix}$
   所有秩为一的矩阵都可以写成 uv 的形式。
2. 所有 r=4 的矩阵构成一个向量空间么？
   很明显，无法构成一个向量空间，一个不包含零向量
   对于任意两个矩阵都有这样的性质：

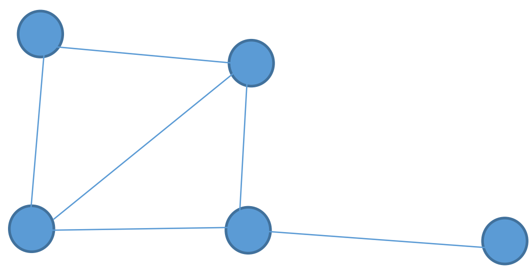
   R(A+B)≤R(A)+R(B)

   说明两个 r=4 的矩阵相加后的矩阵的 r 可能是 5，对加法不封闭，所以不是一个向量空间。
3. 例子
   假设 v=$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{bmatrix}$，设 S 是一个集合，其中的元素都满足$v_1+v_2+v_3+v_4=0$，请问 S 构成向量空间吗？
   很明显 S 是一个向量空间，因为其对于加法和数乘都封闭，并且包含零向量。
   令矩阵 A=$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，Av=$v_1+v_2+v_3+v_4$=0，我们构造了一个 Ax=0 的方程，将 S 空间转化为矩阵 A 的零空间。可以看出矩阵 R(A)=1，由之前学过的可知：

   dim N(A)=n-r=4-1

   所以空间 S 的维度是 3。

三、小世界地图



图的定义是由一组顶点和边构成的集合，在下节课我们将学习，如何用矩阵的形式将上面的图表示出来