Lecture 21

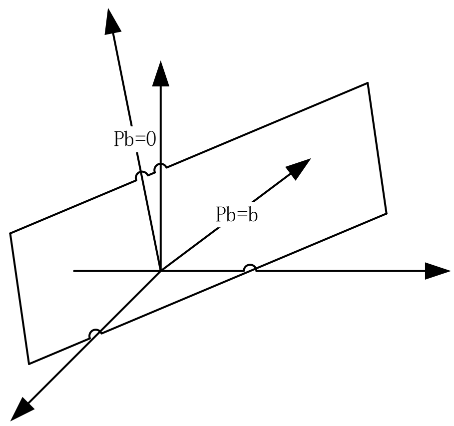
一、特征值与特征向量

给定一个矩阵 A，用矩阵 A 乘以向量 x，得到 Ax，如果 Ax 与 x 平行，则我们将 x 称为特征向量，用方程表示就是：

$$Ax=\lambda x$$

其中的γ称为特征值。

1) 如果特征值为 0，此时 Ax=0，就是特征值为 0 对应的特征向量，应该在矩阵的零空间中，也就是，如果矩阵是奇异的，则一定有特征值 0。
2) 对于投影矩阵 P，平明中的任意向量 x，Px=x，任意垂直于平面的向量，有 Px=0。我们画出一个三维的图示：



即在平面中的向量均是 P 的特征向量，特征值为 0。，任何垂直平面的向量也是 P 的特征向量，Px=0x，特征值为 0。

3) 置换矩阵 AA=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，任何向量左乘这个矩阵，会交换向量的行向量。

所以有特征向量$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，即交换后向量不变，特征值为 1。

特征向量$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，交换行后，向量变为$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，特征值为-1。

在介绍一个矩阵的性质：

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (1)$$

即矩阵特征值的和等于矩阵对角线元素的和，其中，对角线元素的和称为矩阵的迹。

二、$Ax=\lambda x$

我们将 $Ax=\lambda x$改写成：

$$(A-\lambda I)x=0$$

相当于将矩阵 A 平移了λ个单位，方程若有非 0 解，平移后的矩阵一定是奇异矩阵，根据奇异矩阵的性质，有：

$$det\ (A-\lambda I)=0$$

这样，方程中就只有未知数λ，这个方程也叫特征方程，求出特征值后，带回到 $(A-\lambda I)x=0$ 求出零空间即可

例 1：

矩阵 A=$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，求出矩阵的特征值和特征向量。

计算$det\ (A-\lambda I)=0$ => $\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+8$ => $\begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_2=4\end{cases}$

可以看出一次系数-6 与矩阵的迹有关，常数项是矩阵的行列式。

带回λ，求解特征向量：

$A-2I=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，求解出$x_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$A-4I=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$， 求解出$x_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$

矩阵 A 是对称矩阵，特征值一定是实数。

可以看出矩阵 A 与上面例子的置换矩阵 AA，特征向量相同，特征值正好差 3，而矩阵 A=AA+3I，对任意矩阵 A，A+kI 的特征向量与 A 相同，特征值变为λ+k

例 2：旋转矩阵 Q=$\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，我们来求这个矩阵的特征值与特征向量。

现在我们给出特征值的第二个性质：

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=det\ A \qquad (2)$$

根据性质(1)(2)，可以写出$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1\lambda_2=1\end{cases}$

根据$det\ (A-\lambda I)=0$，可以写出$\lambda^2+1=0$，可以求出$\begin{cases}\lambda_1=i\\ \lambda_2=-i\end{cases}$，满足之前的方程组。

我们可以发现 $Q^T=-Q$，我们称这样的矩阵为反对称矩阵。

本例中，矩阵是实数矩阵，而特征值的纯虚数。

我们可以说，矩阵越接近对称，特征值就是实数，越不对称，特征值就是虚数。

例 3：

我们来看一个更糟糕的例子 A=$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

根据$det\ (A-\lambda I)=0$我们可以写出(3- λ) (3- λ)=0，得出矩阵的特征值为λ_1=λ_2=3，将$\lambda_1=3$带入到$(A-\lambda I)x=0$，有$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$x=0，可以看出 x=$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

将λ_2=3 带入，无法找到与 x 线性无关的特征向量了。

本例中，A 是一个退化矩阵，重复的特征值导致特征向量的缺失。

这一讲讲了“不好”的矩阵，下一讲会介绍一般情况的特征值与特征向量。