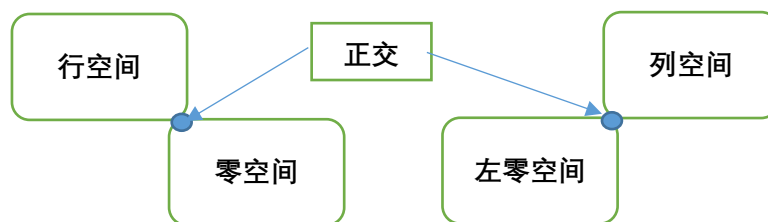


Lecture 14

一、四个子空间的关系

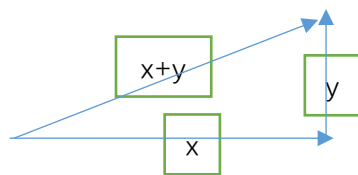
我们先画出子空间的图，并给出它们之间的关系



二、正交向量

正交就是垂直。

我们先考虑二维空间中的正交



若果向量 x 和 y 正交，则 $x^T y = 0$ 。

下面我们从另一个角度考虑：

根据勾股定理可知 $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$

$$\Rightarrow x^T x + y^T y = x^T x + x^T y + y^T x + y^T y$$

$$\Rightarrow x^T y + y^T x = 0$$

$$\Rightarrow x^T y = 0$$

所以当两个向量正交时，我们有 $x^T y = 0$ 。

若两个向量中有一个是零向量，则两个向量一定正交。

三、空间正交

1. 假设子空间 S 和子空间 T 正交，则 S 中的任何一个向量与 T 中的任何一个向量都正交。

在 R^2 中，我们共有三个子空间：

- 1) 整个平面 D
- 2) 过原点的直线 L
- 3) 原点 0

L 和 D 永远不可能正交，因为 S 和 D 共面

L 与原点 0 永远正交

2. 行空间和零空间

行空间和零空间的关系类似于将一个空间一分为二的两个子空间，并且这两个子空间是正交的。

若 $Ax=0$ ，我们有

$$\begin{bmatrix} \text{row}_1 \\ \vdots \\ \text{row}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{row}_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \text{row}_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以矩阵 A 的每一行都与 x 正交。

x 代表的是零空间中的任意向量，不难证明 x 与行向量的线性组合也正交，符合空间正交的定义，所以行空间和零空间正交。

零空间与行空间正交，并且零空间的维度与行空间的维度和正好是 n ，合成整个 R^n 空间。我们将这两个空间称为 n 维空间的正交补。

四、求解无解方程 $Ax=b$ 的解

若右侧某一个数据出现偏差时， $Ax=b$ 就可能没有解，用消元法可以检测有没有解。

解决方法：

a) 去掉一些不好的方程

问题：无法决定方程的好坏

b) 方程左乘 A^T

$Ax=b$ 变为 $A^T Ax=A^T b$ 。

矩阵 $A^T A$ 不一定总为可逆矩阵，与矩阵 A 有关。当且仅当矩阵 A 可逆时， $A^T A$ 才可逆。我们将在下一节学习具体的方法。