Lecture 2

一、高斯消元

1. 消元成功

对于一些有良好性质(可逆、非奇异)的矩阵,我们可以通过消元法来求解方程 Ax=b 的解,下面举一个简单的例子

有三元方程组:$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+8y+z=12 \\ 4y+z=2 \end{cases}$,写出对应的矩阵形式 Ax=b 为 $\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\12\\2\end{bmatrix}$

按照以前的只是消元

第一步:消去第二个方程和第三个方程中的 x 变量,将这个操作体现在矩阵 A 中

$\begin{bmatrix}\color{red}{1}&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}$,标红的元素为第一步对应的主元(pivot),我们利用主元,使第一列中主元以外的其他元素,都变为 0.$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{row_2-3row_1}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}$

这里我们先忽略向量 b

第二部:消去第三个方程的 y $\begin{bmatrix}1&2&1\\0&\color{red}{2}&-2\\0&4&1\end{bmatrix}$,标红的'2'是第二步消元所使用的主元,重复第一步的工作$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&\color{red}{2}&-2\\0&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{row_3-2row_2}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&0&5\end{bmatrix}$

第三行只有一个非零元素,做为主元,到此,校园结束,得到的 U=$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&0&5\end{bmatrix}$就是消元后的结果.

2. 消元失败

接下来我们讨论一下消元失败的情况

主元一定不能为 0,主元为 0,就应该进行行交换,使主元不为 0.

如果在消元过程中,某一行的元素全部为 0,消元就停止,这就是以后我们所说的不可逆的情况.

3. 增广矩阵

我们学习一个新的矩阵的概念,称为增广矩阵.就是在矩阵 A 中,增加一列 b ,就写成了增广矩阵的形式$[A \quad b]$

对 b 重复上面的消元操作,得到$c=\begin{bmatrix}2\\6\\-10\end{bmatrix}$

写成增广矩阵的形式为$\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&0&5&-10\end{bmatrix}$

我们将矩阵写成方程组的形式$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2y-2z=6 \\ 5z=-10 \end{cases}$,可以很容易看出 z=-2,回代到方程组

中,可以求出 x=2 ,y=1.

二、矩阵表述消元

矩阵左乘向量,可以看做是列向量的线性组合$[v1 \quad v2 \quad v3]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=v1+2v2+3v3$

矩阵右乘向量,可以看做是行向量的线性组合$[1 \quad 2 \quad 3]\begin{bmatrix}r1\\r2\\r3\end{bmatrix}=1r1+2r2+3r3$

下面我们将消元操作的过程写成矩阵的形式,消元的过程实际上是对行向量进行线性组合.

第一步是row_2-3row_1,其余两行不变,则有

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}$$ 等价于用$-3row_1$加上$1row_2$

用E_{21}表示使 2 行 1 列发生变换的矩阵

第二步是row_3-2row_2

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&0&5\end{bmatrix}$$ 等价用$-2row_2$加上 1row2

用E_{32}表示使 3 行 2 列发生变换的矩阵

最后,将 1、2 综合写成矩阵乘法的形式 $E_{32}(E_{21}$ A)=U 并且,在矩阵乘法中的括号,可以移动,即满足结合律.

三、置换矩阵

是一种交换矩阵行或列的矩阵,将置换矩阵记做 P

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\a&b\end{bmatrix}$$ 左乘 P 代表交换矩阵的行

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&a\\d&c\end{bmatrix}$$ 由乘 P 代表交换矩阵的列

四、逆变换

我们通过消元操作将 A 变成了 U,我们接下来学习,如何将 U 变为 A,也就是消元的逆过程.

我们以上面消元的第一步为例

$$\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

我们希望找到一个矩阵,取消这一步所发生的行变换,这次的变换是 1 倍的第二行-3 倍的第一行,逆操作就是第二行+三倍的第一行,写成矩阵的形式就是$\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,所以逆矩阵就是$\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$我们将矩阵 A 的逆记做$A^{-1}$