Lecture 3

这一讲我们详细介绍矩阵的乘法和矩阵的逆

一、矩阵乘法

1. 行列内积

   矩阵$A_{m\times n}$与矩阵$B_{n\times k}$相乘得到矩阵$C_{m\times k}$,要求矩阵 A 的行数必须等于矩阵 B 的列数.对于 C 中的任意一个元素C_{ij}=$A_{row_i}\cdot B_{col_j}$=$\sum_{p=1}^{n} row_{ip} * col_{pj}$

   $$\begin{bmatrix} row_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad col_j \quad \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \quad C_{ij} \quad \end{bmatrix}$$

2. 列相乘

   下面我们单独考虑矩阵 C 中的一列C_{col_k}

   上一讲我们讲过如何计算矩阵右乘一个向量,这里我们也利用这种思想,矩阵 C 中的第 k 列,就相当于矩阵 A*矩阵 B 的第 k 列所对应的向量 $C_{col_k} = A * B_{col_k}$. 即 C 的第 k 列就是矩阵 A 的各列以 B 的第 k 列的元素作为系数进行线性组合.所以矩阵 C 的各列是 A 的线性组合,矩阵 B 的每一列表明线性组合的方式.

   $$[col_1 \quad \dots \quad col_n]\cdot\begin{bmatrix} row_{1k} \\ \\ row_{nk} \end{bmatrix}=row_{1k}*col_1+\cdots+row_{nk}*col_n=C_{col_k}$$

3. 行相乘

   下面我们单独考虑矩阵 C 中的一行C_{row_k}

   行相乘与列相乘同理,只不过行相乘中,C 种的各行是 B 中每一行的线性组合,而矩阵 A 中的一行,对应与线性组合的系数.

   $$[row_{k1} \quad \dots \quad row_{kn}]\cdot\begin{bmatrix} row_1 \\ \dots \\ row_n \end{bmatrix}=row_{k1}*row_1+\cdots+row_{kn}*row_n=C_{row_k}$$

4. 分块矩阵

   $$\begin{bmatrix} A1 & A2 \\ A3 & A4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} B1 & B2 \\ B3 & B4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A1*B1+A2*B3 & A1*B2+A2*B4 \\ A3*B1+A4*B3 & A3*B2+A4*B4 \end{bmatrix}$$

   每一块的大小不是必须相等,只要符合矩阵乘法的规则就可以.

二、矩阵的逆

1. 矩阵逆的定义

   对于一个方阵来讲,如果矩阵 A 的逆存在,则有 $A\cdot A^{-1}=I$

   对于方阵来讲,矩阵的左逆和右逆相等.

2. 不存在逆的矩阵---奇异阵

   下面我们从一个例子中观察,什么情况矩阵不存在逆

   令矩阵 A=$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$,判断一个矩阵是否可逆,就是判断能否找到一个矩阵 B,使得 A·B=I

   假设我们用矩阵 B 与 A 相乘,得到矩阵 C,矩阵 C 中的每一列,都是矩阵 A 中各列的线性组合,由于矩阵 A 中的两列共线,即无论怎么组合,都无法得到$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,即证明矩阵不可逆

   还可以用方程组的形式来证明矩阵不存在逆

   如果存在非零的 x 使得 Ax=0,则矩阵 A 不可逆.

3. 如何求解矩阵的逆

我们先考虑用方程组的形式求解矩阵的逆

假设有矩阵 A=$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}$,我们希望求$A^{-1}$,令$A^{-1}$=$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$,根据 $A{\cdot}A^{-1} = I$, 我们可以得到两个方程组:

$$\begin{cases}a+3b=1\\2a+7b=0\end{cases}\quad\begin{cases}c+3d=1\\2c+7d=0\end{cases}$$ 这样就可以求出A^{-1}

下面我们来介绍高斯-若尔当（Gauss-Jordan）方法,我们希望能同时处理上面的两个方程,首先我们将写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

接下来我们构造这样一个矩阵$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\2 & 7 & 0 & 1\end{bmatrix}$,接下来用消元的方法,将左侧变为单位阵$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\2 & 7 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{row_2-2row_1}\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{row_1-3row_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 7 & -3\\0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$

我们就将$[A \quad I]$得到了$[I \quad A^{-1}]$

这种方法的本质是利用消元矩阵 E 对 A 进行操作,E$[A \quad I]$,消元后,我们有 EA=I,所以 E 就是矩阵 A 的逆,我们使用右侧矩阵将 E 保存了下来,就得到了矩阵 A 的逆.