Lecture 31

一、线性变换

线性变换需要满足两个要求：

1) $\mathbf{T}(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{T}(\mathbf{v})+\mathbf{T}(\mathbf{w})$

2) $\mathbf{T}(\mathbf{cv})=\mathbf{cT}(\mathbf{v})$

即线性变换必须满足加法和数乘不变的性质，可以将上面的式子合写称一个：

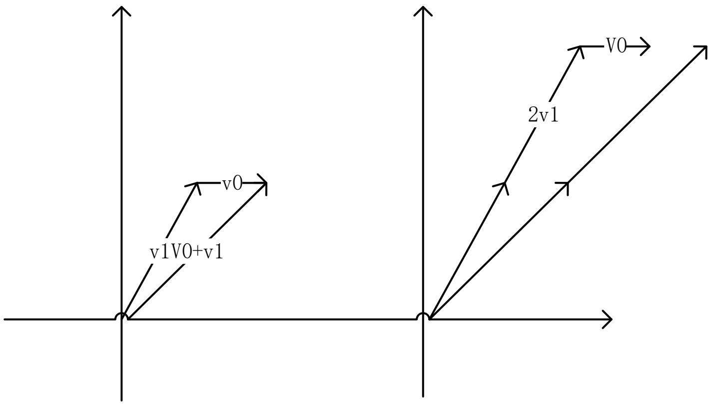
$$\mathbf{T}(\mathbf{cv}+\mathbf{dw})=\mathbf{cT}(\mathbf{v})+\mathbf{dT}(\mathbf{w})$$

例 1：

投影变换，$\boldsymbol{R}^2\rightarrow\boldsymbol{R}^2$，将某向量投影到特定的直线上，投影操作满足线性变换的两个要求，所以投影变换是一个线性变换。

例 2：

平面平移



可以看出，向量长度翻倍，再做平移，明显与向量平移后再翻倍的结果不一致，所以平面平移不是线性变换

例 3：

求模运算 T(v)=$\|\boldsymbol{v}\|$，T：$\boldsymbol{R}^3\rightarrow\boldsymbol{R}$，这样不是线性变换，因为 T(-v)!=-T(v)。

例 4：

旋转 45°操作，T: $\boldsymbol{R}^2\rightarrow\boldsymbol{R}^2$，也就是将平面内一个向量映射为平面内另一个向量。检查可知，如果向量翻倍，则旋转后同样翻倍；两个向量先旋转后相加，与这两个向量先相加后旋转得到的结果一样。

例 5：

矩阵乘以向量，T(v)=Av，这是一系列的线性变换，不用矩阵代表不同的线性变换，根据矩阵的运算法则有$\mathbf{A}(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{A}(\mathbf{v})+\mathbf{A}(\mathbf{w}),\mathbf{A}(\mathbf{cv})=\mathbf{cA}(\mathbf{v})$，取

$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{bmatrix}$，作用在向量 v 上，会导致 v 的 x 分量不变，y 分量取反，就是图像沿着 x 轴翻转。

线性变换的核心，就是该变换使用的相应的矩阵。

比如我们需要一个线性变换，将一个三维向量降至二维，T：$\boldsymbol{R}^3\rightarrow\boldsymbol{R}^2$，在$\mathbf{T}(\mathbf{v})=\mathbf{Av}$中，v 是一个三维向量，T(v)是一个二维向量，则 A 是一个 2×3 的矩阵我们已经知道了对任意一个向量的线性变换的结果，现在希望知道对一个空间进行线性变换的影响，我们可以找到空间的一组基$\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_n$，对每一个基向量进行 T 变换，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}_1)\cdots\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}_n)$。输入空间的任意向量都可以表示为：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{c}_n\boldsymbol{v}_n \tag{1}$$

可以得到对任意一个向量进行线性变换的结果：

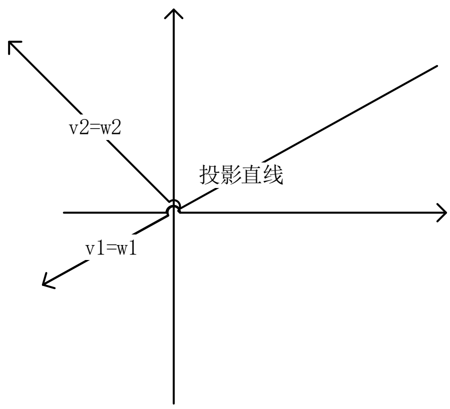
$$T(v)=c_1T(v_1)+\cdots+c_nT(v_n)$$

现在我们需要考虑，如何把一个与坐标无关的线性变换变成一个与坐标有关的矩阵，在(1)中，$c_1\cdots c_n$就是向量 v 在基$v_1\cdots v_n$上的坐标，比如:

$$v=\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

将向量 v 分解咋一组标准正交基上，这只是一种分解方法，基的选择是不唯一的。

我们打算构造一个矩阵 A 用以表示线性变换 T：$R^n\rightarrow R^m$。我们需要两组基，一组用以表示输入向量，一组用以表示输出向量。令$v_1\cdots v_n$为输入向量的基，这些向量来自R^n，$w_1\cdots w_m$作为输出向量的基，这些向量来自R^m。我们用二维空间的投影矩阵作为例子：



设输入向量的基为v_1、v_2，v_1在投影上，v_2垂直投影方向，输出向量的基为w_1、w_2，并且$v_1=w_1$、$v_2=w_2$，输入向量 v=$c_1v_1+c_2v_2$，则输出为c_1v_1，所以输入向量的坐标为(c_1,c_2)，输出向量的坐标为$(c_1,0)$，所以有:A$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\0\end{bmatrix}$，可以求出 A=$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$。

本例中我们选取的基极为特殊，一个沿投影方向，另一个沿投影法线方向，其实这两个向量都是投影矩阵的特征向量，所以我们得到的线性变换矩阵是一个对角矩阵，这是一组很好的基。

继续这个例子，我们不再选取特征向量作为基，而使用标准基$v_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$、$v_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，我们继续使用相同的基作为输出空间的基，即$v_1=w_1$、$v_2=w_2$。此时投影矩阵为$P=\frac{aa^T}{a^Ta}=\begin{bmatrix}0.5&0.5\\0.5&0.5\end{bmatrix}$，这个矩阵明显没有上一个矩阵“好”，不过这个矩阵也是一个不错的对称矩阵。

总结一下已知变换求解矩阵 A 的方法：

1) 确定输入空间的基$v_1\cdots v_n$，确定输出空间的基$w_1\cdots w_n$。
2) T(v_i)=$a_{1i}w_1+a_{2i}w_2+\cdots+a_{mi}w_m$， $a_{1i}\cdots a_{mi}$即为矩阵 A 的第二列，重复计算所有的基变量，即可以计算出 A。