Lecture 10

我们已经介绍过矩阵的零空间，列空间，接下来我们来介绍行空间和左零空间。

一、四个基本子空间

1. 定义

 1） 列空间

 由矩阵的所有列的线性组合构成的空间，对于一个矩阵$A_{m\times n}$，矩阵的每一列$\in R^m$,所以列空间是R^m的子空间

 2） 零空间

 有 Ax=0 的解构成的空间，对于一个矩阵$A_{m\times n}$，x$\in R^n$，所以零空间是R^n的子空间

 3） 行空间 C(A^T)

 行空间就是矩阵$A_{m\times n}$各行的线性组合构成的空间,也可以理解为A^T的列空间,矩阵每一行的维度是R^n，所以行空间是R^n的子空间

 4） 左零空间

 是A^T的零空间，是R^m的子空间。

2. 基、维度

 假设我们有矩阵$A_{m\times n}$，矩阵的秩是 r。

 1） 列空间

 列空间的一组基就是矩阵的主列，列空间的维度就是 r

 2） 零空间

 零空间的一组基是依次令自由变量为 1，其余为 0，带入到元方程中，求解出 x,自由变量的个数就是零空间中基的个数，所以维度=自由变量的个数=n-r。

 3） 行空间

 行空间的一组基是行最简形的前 r 行，行空间的维度是 r。

 4） 左零空间

 左零空间是A^T的零空间,即A^Ty=0，我们不希望处理A^T，所以将方程两侧同时取转置，得$y^TA=0$,即对 A 的行向量进行线性组合，得到零向量。

 下面我们举一个例子来学习矩阵的零空间。

 假设有矩阵 A=$\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}$，将化简为行最简形 R=$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，消元矩阵

 E=$\begin{bmatrix}-1&2&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$。我们有:

$$EA=\begin{bmatrix}-1&2&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

 R 的最后一行元素均为 0，所以就找到了零空间的一组基=$[-1\quad 0\quad 1]$

 正是 m-r=3-2=1 个，即计算左零空间基的方法是将矩阵 A 化简为行最简形，找到其中的 0 行，对应找到 E 中的线性组合方式。

3. 图像

R^n子空间：

行空间，维度 r

零空间，维度 n-r

R^m子空间:

列空间，维度 r

左零空间，维度 m-r

二、矩阵空间

线性空间的元素不一定是向量，也可以是矩阵，我们可以将所有 3×3 的矩阵当成矩阵空间的一个向量，只要满足向量空间的定义即可。

我们将 3×3 矩阵当成一个线性空间，它的子空间有上三角矩阵，对角阵等。