Lecture 6

这节我们来学习矩阵中的向量空间

一、向量空间

1. 向量空间的定义

   对于加法和数乘封闭,即加法和数乘的结果仍在此空间中

2. 子空间的定义

   子空间是向量空间内的一个空间,并且这个子空间仍然是封闭的.

3. 推论：假设我们有子空间 S 和 T

   S∩T 一定是一个子空间

   S∪T 可能不是一个子空间

二、列空间

一个矩阵的列空间,是矩阵所有列的线性组合所构成的空间,记为 C(A).

1. Ax=b,在什么情况下有解

   A=$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}$, x=$\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\end{bmatrix}$, b=$\begin{bmatrix}b1\\b2\\b3\\b4\end{bmatrix}$, 令 Ax=b

   矩阵 A 只有三列,这三列的线性组合没有办法生成整个四维空间,所以不是对于任意 b,方程都会有解.

   我们有 Ax=x_1*A_{col1}+x_2*A_{col2}+x_3*A_{col3},等式左边是 A 的一个线性组合,所以只有当 b∈C(A)时,方程才有解.

2. 线性相关的定义

   若向量$v_1\cdots v_n$,若存在不全为 0 的$\gamma_1\cdots\gamma_n$,使得$\gamma_1 v_1$+⋯+$v_n v_n$=0,则我们称量$v_1\cdots v_n$线性相关

   对于矩阵 A 来说,我们可以发现A_{col1}+A_{col2}−A_{col3}=0,所以矩阵中的三列线性相关

三、零空间

1. 定义

   对于矩阵 A 来说,Ax=0 的所有解的集合构成的空间,称为矩阵 A 的零空间.记为 N(A).

   假如我们有矩阵 A=$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}$, x=$\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\end{bmatrix}$, x∈$R^3$

   Ax=0 我们有=$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$,由之前的例子可以得出$A_{col1}$+$A_{col2}$−$A_{col3}$=0,所以

   当 x=c$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, Ax=0,所以 N(A) = c$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$

   X 是三维空间中过原点的一条直线

2. 检验 Ax=0 的解是否构成一个空间

   If Av=0 Au=0

   Then A(xu+yv)=0

   所以 v u 在零空间中,xu+yv 也在零空间中,所以 Ax=0 的解构成一个向量空间.

四、Ax=b 的解

Ax=b 的解不构成一个向量空间,因为解中不包含零向量,向量空间中必须包含零向量.

五、总结

求一个矩阵列空间的方法:取出矩阵 A 中线性无关的向量,使它们进行线性组合,构成列空间

求一个矩阵零空间的方法:从一个方程组中,让 x 满足特定的条件,得到零空间.