Lecture 7

这一讲我们主要来学习如何求得矩阵的零空间。

一、零空间

假设我们有矩阵
$$A_{3\times 4}=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$$
求矩阵零空间的方法就是令 Ax=0,解 x 的集合

就是矩阵 A 的零空间,记为 N(A),下面我们来对矩阵 A 进行消元。

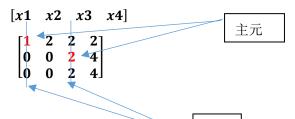
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} - \cdots > \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \cdots > \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

上图标红的两个元素为主元,在本例子中,共有两个主元,主元的个数被称为矩阵的秩 (rank),记为 r。

在矩阵消元过程中,行交换并不会修改矩阵的零空间。

在消元后的矩阵中,主元所对应的列称为主列(pivot column),其余为自由列(free column)。

自由列所对应的的变量称为自由变量,含义就是在回代过程中,可以任意赋值。



主列

在本例中, x1、x3 称为主变量, x2、x4 称为自由变量。

下面我们来进行回代。

因为自由变量可以为任意值,我们令 x2=1,x4=0。回代到方程

$$\begin{cases}
x1 + 2x2 + 2x3 + 2x4 = 0 \\
2x3 + 4x4 = 0
\end{cases}$$

中,我们可以解出
$$x_1 = \begin{bmatrix} -2\\1\\0\\0 \end{bmatrix}$$

我们再令 x2=0,x4=1,可以求出
$$x_2$$
=d $\begin{bmatrix} -2\\0\\-2\\1 \end{bmatrix}$

我们解出的 x_1 、 x_2 称为特解,矩阵的零空间为所有特解的线性组合,所有我们有

$$N(A) = c \begin{bmatrix} -2\\1\\0\\0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -2\\0\\-2\\1 \end{bmatrix}$$

下面我们总结一下求解零空间的过程:

- 1. 对矩阵进行消元
- 2. 确定主元的个数 r
- 3. 确定自由变量的个数为 n-r,我们共得到 n-r 个由自由变量组成的向量,依次令它们取单位向量 e_i ,并依次将它们回代到方程组中,即可求出没个自由变量的所对应特解,所有特解进行线性组合,就得到矩阵的零空间。

二、行阶梯矩阵

我们消元过后,得到矩阵 U,称为上三角矩阵,在 U 的基础上,我们继续消元,使得主元所在的列中,除主元之外的元素均为零,我们就得到了行阶梯矩阵 R。

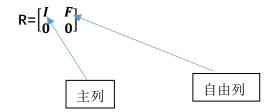
我们以上面的矩阵 U 为例:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \textbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \cdots > \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \textbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \cdots > 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \textbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

下面进行列交换,使左上角变为单位阵 $2\begin{bmatrix}1&0&2&-2\\0&1&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$,倍数 2 并不影响我们求

解,所以我们有
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以矩阵 $A_{m \times n}$ 被简化成:



假设我们有零空间矩阵 N, 我们可以得出:

$$\mathsf{Ax} \!\!=\! \mathsf{Rx} \!\!=\!\! \begin{bmatrix} I & F \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_{non-p} \end{bmatrix} \!\!=\! \mathsf{RN} \!\!=\!\! \mathbf{0}$$

$$N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$