

## Lecture 10

我们已经介绍过矩阵的零空间，列空间，接下来我们来介绍行空间和左零空间。

### 一、四个基本子空间

#### 1. 定义

##### 1) 列空间

由矩阵的所有列的线性组合构成的空间，对于一个矩阵 $A_{m \times n}$ ，矩阵的每一列 $\in R^m$ ，所以列空间是 $R^m$ 的子空间

##### 2) 零空间

有 $Ax=0$ 的解构成的空间，对于一个矩阵 $A_{m \times n}$ ， $x \in R^n$ ，所以零空间是 $R^n$ 的子空间

##### 3) 行空间 $C(A^T)$

行空间就是矩阵 $A_{m \times n}$ 各行的线性组合构成的空间，也可以理解为 $A^T$ 的列空间，矩阵每一行的维度是 $R^n$ ，所以行空间是 $R^n$ 的子空间

##### 4) 左零空间

是 $A^T$ 的零空间，是 $R^m$ 的子空间。

#### 2. 基、维度

假设我们有矩阵 $A_{m \times n}$ ，矩阵的秩是 $r$ 。

##### 1) 列空间

列空间的一组基就是矩阵的主列，列空间的维度就是 $r$

##### 2) 零空间

零空间的一组基是依次令自由变量为1，其余为0，带入到元方程中，求解出 $x$ ，自由变量的个数就是零空间中基的个数，所以维度=自由变量的个数 $=n-r$ 。

##### 3) 行空间

行空间的一组基是行最简形的前 $r$ 行，行空间的维度是 $r$ 。

##### 4) 左零空间

左零空间是 $A^T$ 的零空间，即 $A^T y=0$ ，我们不想处理 $A^T$ ，所以将方程两侧同时取转置，得 $y^T A=0$ ，即对 $A$ 的行向量进行线性组合，得到零向量。

下面我们举一个例子来学习矩阵的零空间。

假设有矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ，将化简为行最简形 $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，消元矩阵

$E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。我们有：

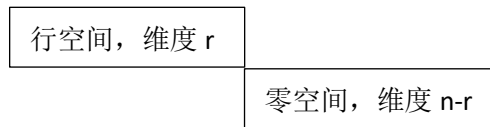
$$EA = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R$ 的最后一行元素均为0，所以就找到了零空间的一组基 $[-1 \ 0 \ 1]$

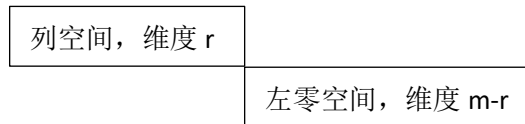
正是 $m-r=3-2=1$ 个，即计算左零空间基的方法是将矩阵 $A$ 化简为行最简形，找到其中的0行，对应找到 $E$ 中的线性组合方式。

### 3. 图像

$R^n$ 子空间:



$R^m$ 子空间:



## 二、矩阵空间

线性空间的元素不一定是向量，也可以是矩阵，我们可以将所有  $3 \times 3$  的矩阵当成矩阵空间的一个向量，只要满足向量空间的定义即可。

我们将  $3 \times 3$  矩阵当成一个线性空间，它的子空间有上三角矩阵，对角阵等。