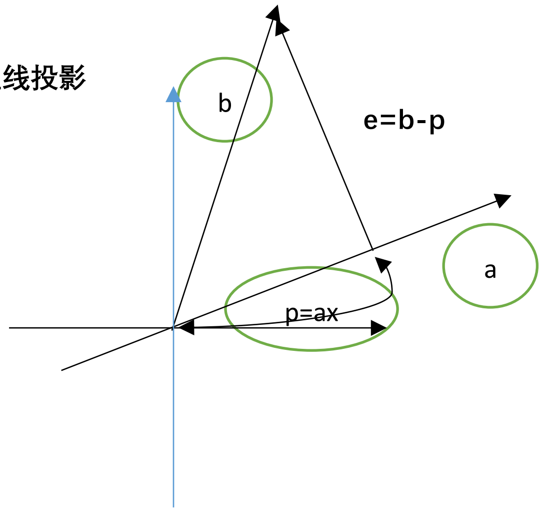
Lecture 15

一、投影

1. 直线投影



将 b 投影到直线 a 上，找到 a 上距离 b 最近的点,令 b 在 a 上的为 p，可知 p 与 a 共线，所以我们有 p=ax，根据向量的减法，可以求出 b 与 p 的差值 e=b-p

因为 a 与 e 垂直，我们有：

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$$

$$p=ax=a\frac{a^Tb}{a^Ta}$$

我们引入投影矩阵 P，令 p=Pb，有：

$$p= Pb =a\frac{a^T}{a^Ta}b$$

所以投影矩阵 P=$\frac{aa^T}{a^Ta}$

投影矩阵右如下的性质：

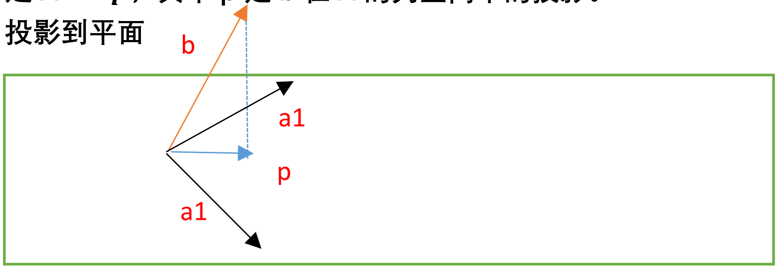
1) $\boldsymbol{P}^T=\boldsymbol{P}$
2) $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{P}$，因为对 b 在 a 上的投影继续头像，得到的向量不变。

2. 平面投影

1) 为什么需要投影

Ax=b 可能无解，若将 b 投影到矩阵 A 的列中间中，就可以求一个近似解，满足 A$\hat{x}=\boldsymbol{p}$，其中 p 是 b 在 A 的列空间中的投影。

2) 投影到平面



a1、a2 是平面的一组基，A=$[\boldsymbol{a1}\quad \boldsymbol{a2}]$

误差 e=b-p 与平面垂直

投影 p 是平面基向量的线性组合 p=$\hat{x}_1\boldsymbol{a1}+\hat{x}_x\boldsymbol{a2}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}$

我们希望求出$\hat{x}$，满足$\mathrm{A}\hat{x}=p$

根据 e 与平面垂直，即 e 锤神平面的任意一个向量，我们有：

$$\begin{cases} a1^T(b-\mathrm{A}\hat{x})=0 \\ a2^T(b-\mathrm{A}\hat{x})=0 \end{cases}$$

写成矩阵的形式：

$$\begin{bmatrix} a1^T \\ a2^T \end{bmatrix}[b-\mathrm{A}\hat{x}]=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=>A^T(b-\mathrm{A}\hat{x})=0$$

$$=>A^Tb-A^T\mathrm{A}\hat{x}=0$$

$$=>\hat{x}=(A^T\mathrm{A})^{-1}A^Tb$$

因为$A^T(b-\mathrm{A}\hat{x})=0$，所以 e 在$A^T$的零空间中。

p 在 A 的列空间中。

我们将$\hat{x}$带入 p=$\mathrm{A}\hat{x}$，有：

$$p=A(A^TA)^{-1}A^Tb$$

找到了向量 p 与 b 的关系，可以看出投影矩阵 P= $A(A^TA)^{-1}A^T$

多维投影矩阵同样满足两个性质：

1) $P^T=P$
2) $P^2=P$

二、最小二乘

例子：有三个点 A(1,1)，B(2,2)，C(3,2)，希望求出经过这三个点的直线。

我们令直线为 y=C+Dt，带入直线：

$$\begin{cases} C+D=1 \\ C+2D=2 \\ C+3D=2 \end{cases}$$

可以发现找不到 Ax=b 无解，上一讲讲过令方程左乘A^T，变成A^TAx=A^Tb就可以求出最优解。