Lecture 7

这一讲我们主要来学习如何求得矩阵的零空间。

一、零空间

假设我们有矩阵$A_{3\times4}$=$\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$求矩阵零空间的方法就是令 Ax=0，解 x 的集合就是矩阵 A 的零空间，记为 N(A)，下面我们来对矩阵 A 进行消元。

$$\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}\text{------>}\begin{bmatrix}\color{red}{1}&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&2&4\end{bmatrix}\text{------>}\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&0&\color{red}{2}&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\text{U}$$

上图标红的两个元素为主元，在本例子中，共有两个主元，主元的个数被称为矩阵的秩(rank)，记为 r。

在矩阵消元过程中，行交换并不会修改矩阵的零空间。

在消元后的矩阵中，主元所对应的列称为主列(pivot column)，其余为自由列(free column)。

自由列所对应的的变量称为自由变量，含义就是在回代过程中，可以任意赋值。

$$\begin{array}{c}[x1\quad x2\quad x3\quad x4]\\ \begin{bmatrix}\color{red}{1}&2&2&2\\0&0&\color{red}{2}&4\\0&0&2&4\end{bmatrix}\end{array}$$

主元

主列

在本例中，x1、x3 称为主变量，x2、x4 称为自由变量。

下面我们来进行回代。

因为自由变量可以为任意值，我们令 x2=1,x4=0。回代到方程

$$\begin{cases}x1+2x2+2x3+2x4=0\\ \qquad\quad 2x3+4x4=0\end{cases}$$

中，我们可以解出x_1=c$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

我们再令 x2=0,x4=1，可以求出x_2=d$\begin{bmatrix}-2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$

我们解出的x_1、x_2称为特解，矩阵的零空间为所有特解的线性组合，所有我们有

$$\text{N(A)}=\text{c}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\text{d}\begin{bmatrix}-2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

下面我们总结一下求解零空间的过程:

1. 对矩阵进行消元
2. 确定主元的个数 r
3. 确定自由变量的个数为 n-r，我们共得到 n-r 个由自由变量组成的向量，依次令它们取单位向量e_i，并依次将它们回代到方程组中，即可求出没个自由变量的所对应特解，所有特解进行线性组合，就得到矩阵的零空间。

二、行阶梯矩阵

我们消元过后，得到矩阵 U，称为上三角矩阵，在 U 的基础上，我们继续消元，使得主元所在的列中，除主元之外的元素均为零，我们就得到了行阶梯矩阵 R。

我们以上面的矩阵 U 为例:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{---->} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{---->} 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

下面进行列交换，使左上角变为单位阵 $2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，倍数 2 并不影响我们求解，所以我们有 R=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以矩阵$A_{m\times n}$被简化成:

$$R=\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主列

自由列

假设我们有零空间矩阵 N，我们可以得出:

$$Ax=Rx=\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_p \\ x_{non-p} \end{bmatrix}=RN=0$$

$$N=\begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$