Lecture 23

一、微分方程

我们从一个例子来学习求解的具体过程

有方程组：

$$\frac{\mathbf{d}u_1}{\mathbf{dt}} = -u_1 + 2u_2$$

$$\frac{\mathbf{d}u_2}{\mathbf{dt}} = u_1 - 2u_2$$

则系数矩阵 A=$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$，我们设初始状态$u_0$=$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。

- 我们首先求出系数矩阵 A 的特征值与特征向量

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ - & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3)0$$

特征值$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 3$

特征向量$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- 则方程组的通解为：

$$u_t = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2$$

通解的前后两部分为方程组的纯解，即通解就是两个特征值与特征向量相关的纯解的线性组合。让我们带入检验，我们令 u=$e^{\lambda_1 t}x_1$，带入$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}$=Au，有：

$$\lambda_1 e^{\lambda_1 t} x_1 = A e^{\lambda_1 t} x_1$$
$$=> \lambda_1 x_1 = A x_1$$

- 继续求线性组合系数 c

$u_t = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2$带入特征值、特征向量与初值，得到

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} => \begin{cases} c_1 = \frac{1}{3} \\ c_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

- 可以求出

$$u_t = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

稳定性：随着时间，初始值的一部分 1 流入到 0，在 t→∞时，得到稳定态$u_\infty = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$。

所以要使得u_t →0，要存在负的特征值，如果特征值为虚数，如λ=-3+6i，计算|$e^{-3t+6it}$|=|e^{-3t}|，因为|e^{6ti}|=|$\cos 6t + i \sin 6t$|=1，所以只有实数部分有作用，是需要特征是实数部分为负数即可。

稳态：某个特征值为 0，其余特征值实数部分均为负数

发散态：某个特征值的实数部分为正数

对于 2×2 矩阵，如何知道特征值是否为负？

如矩阵为：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，矩阵的迹为$\lambda_1$+$\lambda_2$<0，并且 det A=$\lambda_1\lambda_2$>0，同时满足这两个条件，矩阵的特征值一定是负数。

总结：原方程组有两个通过系数矩阵 A 相互耦合的变量u_1、u_2而特征值和特征向量的作用就是解耦合，也就是对角化。回到初始方程组，$\frac{du}{dt}$=Au，令 u=Sv，即将 u 表示为特征向量的线性组合带入原方程，我们有$S\frac{dv}{dt}$=ASv，两边同时乘上S^{-1}，得到$\frac{dv}{dt}$=Λv，得到关于 v 的对角化方程组，其中v_t=$e^{\Lambda t}v_0$，则原方程组的解为：u_t=$e^{At}u_0$=$S^{-1}e^{\Lambda t}Su_0$
下面我们就来证明$e^{At}u_0$=$S^{-1}e^{\Lambda t}Su_0$，这里引入了指数矩阵。

二、指数矩阵

e^{At}是一个指数矩阵，指数部分带有矩阵，我们称为指数矩阵。

使用泰勒级数将e^{At}展开，其中$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$，对数指数矩阵也同样使用，我们有：

$$
\begin{aligned}
e^{Ax} &= I + Ax + \frac{(Ax)^2}{2!} + \cdots + \frac{(Ax)^n}{n!} + \cdots \\
&= SS^{-1} + S\Lambda S^{-1}x + \cdots + \frac{S\Lambda^n S}{n!}x^n + \cdots \\
&= S\left(= I + \Lambda x + \frac{(\Lambda x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\Lambda x)^n}{n!} + \cdots\right)S^{-1} \\
&= Se^{\Lambda t}S^{-1}
\end{aligned}
$$

在我们的证明中e^{Ax}是恒可以展开的，唯一的要求就是 S 可逆，即 A 要有 n 个线性无关的特征向量。

方程组$\begin{cases}\frac{dv_1}{dt}=\lambda_1 v_1\\ \frac{dv_2}{dt}=\lambda_2 v_2\\ \cdots\end{cases}$，各个方程之间没有耦合，$v_t$=$e^{\Lambda t}v_0$，其中$e^{\Lambda t}$是一个对角矩阵

$$
e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}
$$

u_t=$S^{-1}e^{\Lambda t}Su_0$，当 t->∞，特征值实数部分均为负数时，$e^{\Lambda t}$收敛到 0。

我们来看二阶情况如何计算，有$y``+by`+k=0$，我们构造方程组：

$$
\begin{cases} y`` = -by` - k \\ \quad y` = y` \end{cases}
$$

写成矩阵形式$\begin{bmatrix} y`` \\ y` \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y` \\ y \end{bmatrix}$，令 u'=$\begin{bmatrix} y`` \\ y` \end{bmatrix}$，u=$\begin{bmatrix} y` \\ y \end{bmatrix}$，接下来就是求特征值与特征向量了。

对于五阶方程$y````` + by```` + cy``` + dy`` + ey`` + f = 0$，写作：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y'''''} \\ \boldsymbol{y''''} \\ \boldsymbol{y'''} \\ \boldsymbol{y''} \\ \boldsymbol{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{b} & -\boldsymbol{c} & -\boldsymbol{d} & -\boldsymbol{f} & -\boldsymbol{f} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y''''} \\ \boldsymbol{y'''} \\ \boldsymbol{y''} \\ \boldsymbol{y'} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

将一个五阶微分方程化为 5×5 一阶方程组，按照上面的步骤，求解特征向量与特征方程即可。