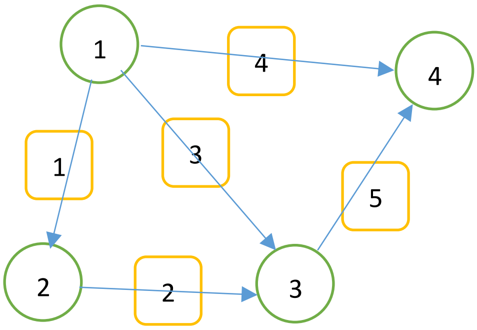
Lecture 12

一、图和关联矩阵

给定一个有向图



写出关联矩阵 $A =$

$$\begin{array}{cc} \text{节点 1-4} & \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \text{边 1-5} \end{array}$$

矩阵的每一行代表一条边，每一列代表一个节点，若一条边 1 的起点的节点 1，终点是节点 2，则$A_{11} = -1$，$A_{12} = 1$

矩阵中-1 代表一条边的起点，1 代表一条边的终点。

二、实际应用

假设我们有 x，令 x 中的分量为每一个节点的电势 x=$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

1. Ax=0

$$Ax=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可以求出 x=c$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

当 Ax=0 时，各点的电势必须相等，所以当 b=0 时，边上没有电流产生。

2. $A^T y = 0$

$$A^T y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

线性组合A^T的列，A^T的每一列列代表一条边，每一个变量y_i就是边上的电流

我们有：

$$\begin{cases} -y_1 - y_3 - y_4 = 0 \\ y_1 - y_2 = 0 \\ y_2 + y_3 - y_5 = 0 \\ y_4 + y_5 = 0 \end{cases}$$

上面的方程表述了基尔霍夫定律。

最后求出的$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$就是满足这个定律的边上的电流。

3. Ax=$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix}$ 表示了的电势差

$\boldsymbol{A^T y}$，其中的 y 代表边上的电流，根据欧姆定律，电流和电势差之间存在一个系数关系，假设矩阵 C 表示这个系数，我们有$\mathrm{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$=C$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix}$ =CAx

之前介绍的$\boldsymbol{A^T y}$是无外加电源的情况，若有外加电源$\boldsymbol{f}$，可以写作$\boldsymbol{A^T y = f}$
所以我们有$\boldsymbol{A^T}$CAx= $\boldsymbol{f}$。