Lecture 4

这节课我们主要学习矩阵的 LU 分解

一、AB 的逆

$$BAA^{-1}B^{-1} = I$$
$$A^{-1}B^{-1}BA = I$$

二、矩阵的转置

矩阵的转置的定义:交换一个矩阵 A 的行和列,的到一个新的矩阵,记为A^T

$$(AA^{-1})^T = I^T$$
$$(A^{-1})^T A^T = I$$

由此可以推出:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

所以,对一个矩阵来说,如果同时求逆和转置,求逆和求转置的顺序并不影响最后的结果.

三、A 的 LU 分解

矩阵的 LU 分解就是将矩阵 A 分解为一个下三角矩阵 L 和一个上三角矩 U 乘积的形式.

1. 二维的例子

令矩阵 A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$, 我们矩阵 A 进行消元操作,由于矩阵是二维的,所以只需要E_{21}即可.

$$E_{21}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

等式两边同时乘${E_{21}}^{-1}$我们有

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = {E_{21}}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

根据第二讲的只是, ${E_{21}}^{-1}$的就是消元的逆过程,我们可以直接写出

$${E_{21}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{L}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}\underset{U}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

2. 三维的例子

我们直接写出$A_{3\times 3}$的过程(假设没有发生行交换)

$$E_{32}E_{31}E_{21}A = U$$
$$=> A = {E_{32}}^{-1}{E_{31}}^{-1}{E_{21}}^{-1}U$$

假设我们有矩阵E_{32}=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$和$E_{21}$=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

我们有$E_{32}E_{21} = \mathrm{E}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

将$E_{32}E_{21} = \mathrm{E}$左右两端同时取逆,我们有${E_{21}}^{-1}{E_{32}}^{-1} = E^{-1} = \mathrm{L}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

我们可以看出,在 L 中,非对角线上非零元素的值为 2,5,正好是消元过程中的系数

所以求解 L 的方法就是将消元过程中的系数,写入对应的位置即可(在不存在行交换的情况下)

3. 复杂度

假设我们有矩阵$A_{100\times100}$,下面们进行消元的第一步

$\begin{bmatrix} x & \cdots & y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z & \cdots & u \end{bmatrix}$--------->$\begin{bmatrix} x & \cdots & y \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \end{bmatrix}$,在这一步中,共进行了 100*99≈$100^2$次操作,在下一步中,共有约 99*98≈$99^2$次操作.

所以,整个消元过程中,共有$100^2+99^2+\cdots+1^2$,次,由微积分的知识可知,对于 n 来说,一共的次数大约为$\frac{1}{3}n^3$

四、置换矩阵

置换矩阵是用来交换矩阵的行或者列的矩阵

1. 对于 3×3 的矩阵,共有六个置换矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

置换矩阵右三条性质

1) 任何两个矩阵相乘都在置换矩阵中
2) 置换矩阵的逆是置换矩阵
3) $P^{-1}=P^T$

2. N 维的矩阵共有 n!个置换矩阵