Lecture 1

一、知识概要

1. 求解线性方程组
2. 介绍矩阵乘法

二、线形方程组

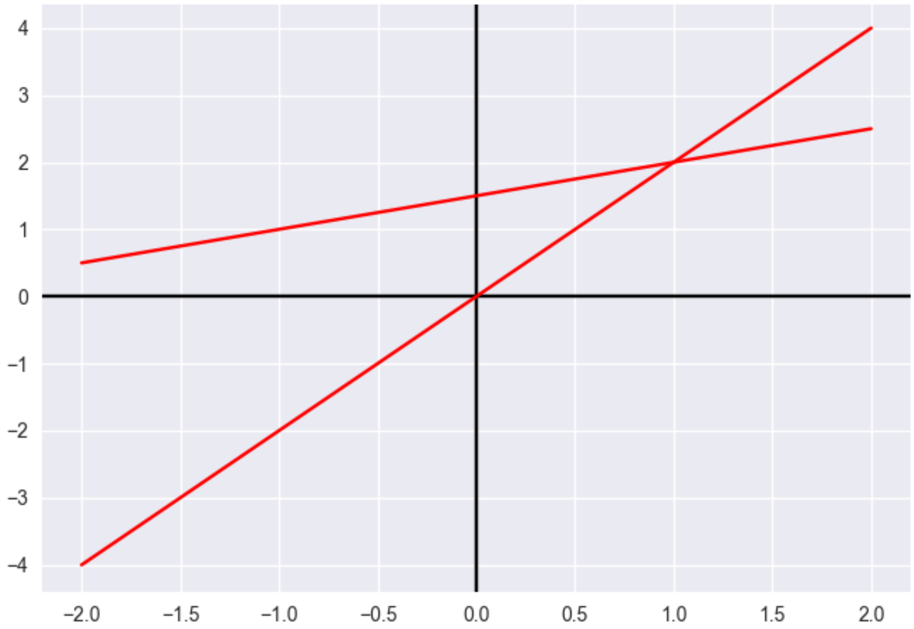
我们从求解线行程乘组开始这门课的学习,举一个普通的例子：$\begin{cases} 2x-y=0 \\ -x+2y=3 \end{cases}$，方程组共有两个未知数和两个方程,先将方程写成矩阵的形式 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$称为系数矩阵 A $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$称为未知向量 x $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$称为矩阵向量 b

所以方程可以写成 Ax=b 的形式

1. 行图像

首先看矩阵的行图像，行图像就是在系数矩阵 A 中，每次取一行，在坐标系中作图



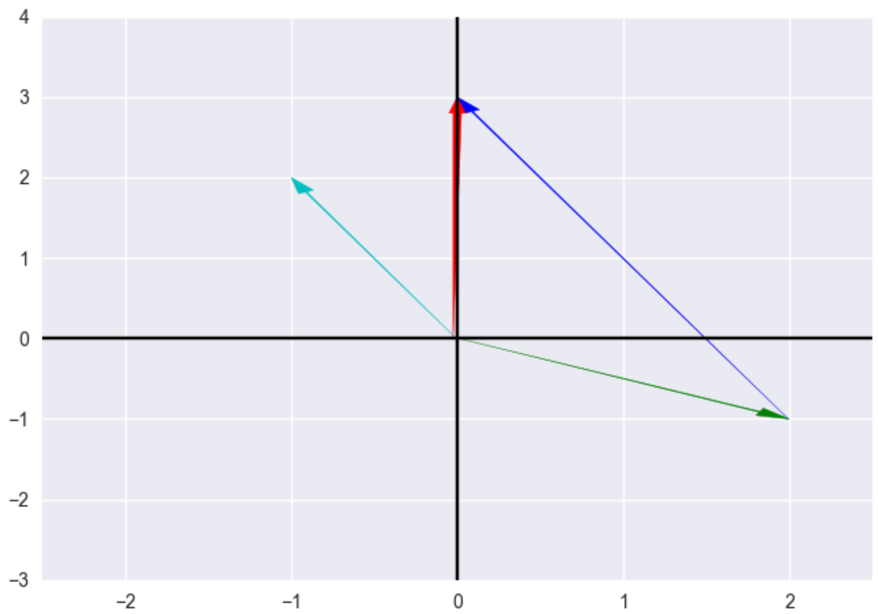
图中两条直线的交点(2,1)就是方程组的解

2. 列图像

下面我们来看列图像，列图像就是按列提取，将两个方程一起考虑，构成如下形式

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

将$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$称为 col_1，将$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$称为 col_2,上面等式的含义就是将向量 col_1 和 col_2 正确组合构成$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$,坐标系中画出 col_1 和 col_2,由之前的行图像可以得出 x=1,y=2，在列向量中，就是 1 倍的 col_1 和 2 倍 col_2 合成向量$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$,列图像如图所示



col_1 col_2 的某种线性组合构成向量 b,那么 col_1 和 col_2 的所有线性组合能够得到什么结果？他们将构成一个平面。

3. 三个未知数的方程组

下面我们看一个高维的例子$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x+2y-z=-1 \\ -3y+4z=4 \end{cases}$,将矩阵 A 写作$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$,

b=$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

在三维坐标系中,每个方程确定一个平面,本例子中的三个平面会交于一点,交点即为方程的解

同样,按照之前的方法,将三维方程组写成列向量的线性组合

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

可以看出,最后一个分量恰好等于等式右侧的 b,所以方程组的解为 x=0,y=0,z=1

4. 何时有解

下面我们考虑,是否对任意的向量 b,方程组都能有解,即在三维例子中,所有列的线性组合是否能够覆盖整个三维空间,对于上面的例子,答案是肯定的,这个例子中矩阵 A 有非常重要的性质：可逆(后面会学到)

那么在什么情况下，三个向量的线性组合得不到 b?---如果三个向量在同一个平面上。比如 col_3=col_2+col_1，那么不管怎么组合，这三个向量一个在这个平面中，因此如果 b 在这个平面中,方程有解,否则无解,这种情况称矩阵 A 为奇异,不可逆。

三、矩阵乘法介绍

Ax=b 中，A 是矩阵，x 是向量，这里就涉及到了矩阵和向量的相乘，举一个简单的例子，

我们令 A= $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, x= $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 下面我们介绍两种方法.

1. 一次取一列，采用线性组合的形式

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$$

2. 一次取一行，采用向量内积的形式，向量做乘法

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(2\ 5) * \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\(1\ 2) * \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$$