Lecture 16

一、投影矩阵

我们先回顾一下投影矩阵的几个公式

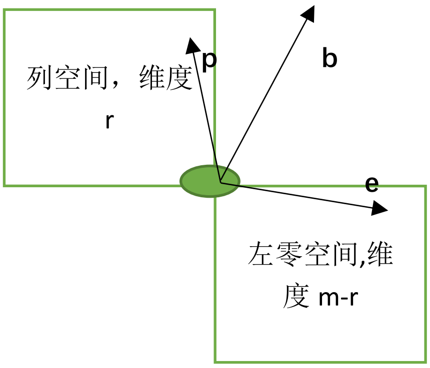
投影矩阵 P= $A(A^TA)^{-1}A^T$

Pb 将向量 b 投影到矩阵 A 的列空间中

如果 b 在矩阵 A 的列空间中，Pb=b

如果 b 垂直矩阵 A 的列空间，Pb=0

可以看出，一个向量 b 总有两个分量，一个在 A 的列空间中，一个垂直 A 的列空间，我们之前学习过四个基本子空间的关系，矩阵 A 的左零空间与列空间垂直，所以 b 的另一个分量，在矩阵 A 的左零空间中。



上图中　b=p+e

p=Pb

e=b-p=b-Pb=(I-P)b

二、最小二乘

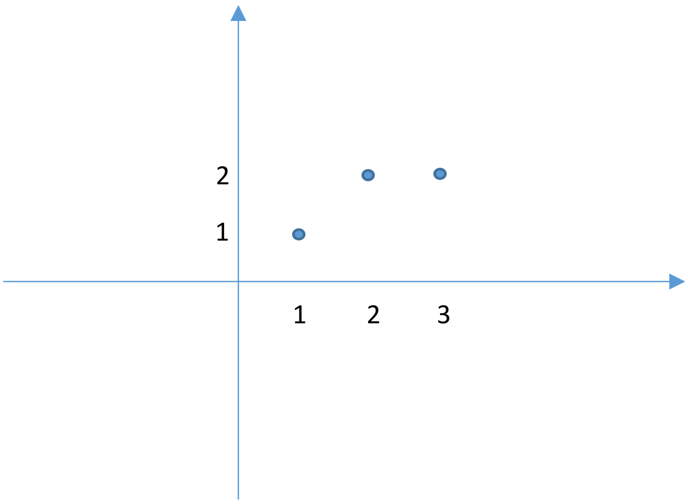
继续我们上节课的例子

有三个点 A(1,1)，B(2,2)，C(3,2)，希望求出经过这三个点的直线。

我们令直线为 y=C+Dt，带入直线：

$$\begin{cases} C+D=1 \\ C+2D=2 \\ C+3D=2 \end{cases}$$

很明显，方程无解，将三个点在坐标系中画出



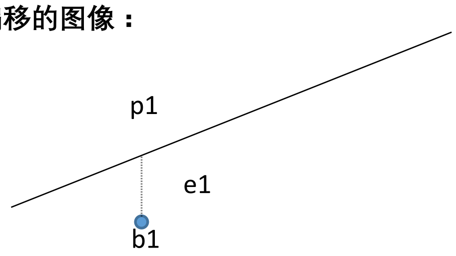
写成矩阵的性质 A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$(Ax=b)

因为无法求出一条经过三点的直线，所以我们可以求出一条直线，使得三点到直线的误差和最小，即：

$$\text{Min } \|Ax-b\|$$

为了便于计算，我们将误差取平方，有$\|Ax-b\|^2$=$\|e\|^2$=$e_1{}^2+e_2{}^2+e_3{}^2$

画出偏移的图像：



b 代表真实位置，p 代表在直线上的位置，且向量$\vec{p}$在矩阵 A 的列空间中，e 代表误差。

接下来我们来求解$\hat{x}$=$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}$

1) 使用上节课介绍的方程，即在$Ax=b$的基础上，左乘A^T，有：

$$A^TAx=A^Tb$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

我们可以求出$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2) 我们还可以根据误差来计算

$$e_1{}^2+e_2{}^2+e_3{}^2=(C+D-1)^2+(C+2D-2)^2+(C+3D-2)^2$$

根据微积分的知识可求出$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

我们已经求出 C 和 D，直线为 y=$\frac{2}{3}$+$\frac{1}{2}D$可以求出 p=$\begin{bmatrix} 7/6 \\ 5/3 \\ 13/6 \end{bmatrix}$，则 e=b-p=$\begin{bmatrix} -1/6 \\ 3/3 \\ -1/6 \end{bmatrix}$

可以看出，误差向量 e 与 p 正交，验证了我们前面说明的 e 在 A 的左零空间中的说法。

三、A^TA

如果矩阵 A 各列线性无关，则A^TA是一个可逆矩阵。

证明：

假设我们有$A^TAx=0$，我们想求出 x。

如果 x 只有为 0 是，A^TA一定是可逆矩阵。

下面我们讲方程左乘x^T，我们有：

$$x^TA^TAx=0$$

$$=>(Ax)^TAx=0$$

$$=>||Ax||=0$$

所以$\mathbf{Ax}$一定为$\mathbf{0}$，又因为 A 各列线性无关，所以 x 一定为 0 向量。所以A^TA可逆。

四、互相垂直的单位向量，一定线性无关，这一组向量称为标准正交向量组。

比如$\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}$是一组标准正交向量组。