Lecture 17

一、正交向量

1. 有向量$q_1, q_2 \cdots q_n$,若满足$q_i{}^T q_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$，则称$q_1, q_n \cdots q_n$为标准正交基。

二、正交矩阵

1. 将标准正交基写成一个矩阵 Q=$[q_1 \quad \cdots \quad q_n]$，我们有：

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} q_1{}^T \\ \cdots \\ q_n{}^T \end{bmatrix} [q_1 \quad \cdots \quad q_n] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

我们称 Q 为标准正交矩阵，当 Q 为方阵时，我们称 Q 为正交矩阵。

由之前学过的若当 Q 为可逆矩阵时，$Q^{-1}Q = \mathrm{I} = Q^T Q$，所以有：$Q^{-1} = Q^T$

假如矩阵 Q=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，可以求出$Q^T = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. 单位化矩阵：

假设有矩阵 A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，矩阵 A 的两列是正交的，但矩阵 A 并不是正交矩阵，要将矩阵单位化，除以每一列的模即可得到正交矩阵：${}^1/_{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$。

3. 正交矩阵的优点

之前学过的投影矩阵 P= $A(A^T A)^{-1}A^T$，当矩阵 A 是正交矩阵时

P= $Q(Q^T Q)^{-1}Q^T$= QQ^T

特别的，当 Q 为正交矩阵时，P=I。

当 A=Q 时，带入之前的 Qx=b，有：

$$Q^T Q\hat{x} = Q^T b$$
$$=>\hat{x} = Q^T b$$
$$=>\hat{x}_i = q^T{}_i b$$

即 b 在第 i 个基上的投影为$q^T{}_i b$，可以看出，当矩阵为标准正交矩阵时，可以化简投影操作中的矩阵。

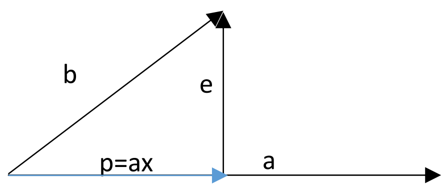
三、正交化法

1. 二维

将两个线性无关的向量 a、b，我们希望从中得的标准正交向量q_1, q_2。

首先假设 A，B 是与q_1, q_2共线的正交向量，则q_1=${}^{\mathrm{A}}/_{\|\mathrm{A}\|}$，$q_2$=${}^{\mathrm{B}}/_{\|\mathrm{B}\|}$.

画出 a、b 向量



令 A=a，根据之前的知识，令 b 向 A 投影，得到误差向量 e 和投影向量 p

即$B=e=b-Ax=b-A\frac{A^Tb}{A^TA}$，所以正交化的向量为$A=a$，$B=b-A\frac{A^Tb}{A^TA}$

2. 三维

有向量 a、b、c，希望求出正交向量 A、B、C。

由二维的结果，可知：$A=a$，$B=b-A\frac{A^Tb}{A^TA}$，而 C 通过 c 减去 c 在在 A，B 上的即可：$\mathrm{C}=\mathrm{c}-A\frac{A^Tc}{A^TA}-B\frac{B^Tc}{B^TB}$ 。

3. 例子

假设 a=$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$、b=$\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，按照之前的方法 A=$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}-\frac{3}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$，将 A、B 单位化，写出正交矩阵 Q=$[q_1 \quad q_2]$=$\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 0\\1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$。矩阵 A=$[a \quad b]$=$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$，可以看出正交化后，矩阵 A 与 Q 的列空间没有发生变化，可以看成将 A 分解为 QR，其中 R 为上三角矩阵。R=$\begin{bmatrix}a_1{}^Tq_1 & a_2{}^Tq_1\\a_1{}^Tq_2 & a_2{}^Tq_2\end{bmatrix}$，其中$a_1{}^Tq_2$为 0。