9 Geometry & Camera Model(几何和相机模型)

射影几何基础

一 齐次坐标

1 点和直线

欧几里得平面上的一条直线可以表示为：

ax+by+c=0

同时乘以一个不为0的系数同样表示相同的一条直线，

(ka)x + (kb) +kc = 0，任意k不等于0

齐次坐标表示一条直线：（a,b,c）^T~k（a,b,c）^T

欧几里得平面上的点可以表示为：X = （x,y)^T

点的齐次坐标表示：

X = （x,y,1)^T,　　　(x,y,1)^T ~ k（x,y,1)^T, 任意K不等于0

点的其次坐标（x1,x2,x3）^T，但是自由度为2

点在直线上：点X，直线l

当且仅当，X^T*l = (x,y,1)^T*(a,b,c) = ax+bx+c=0

齐次坐标系的优点：

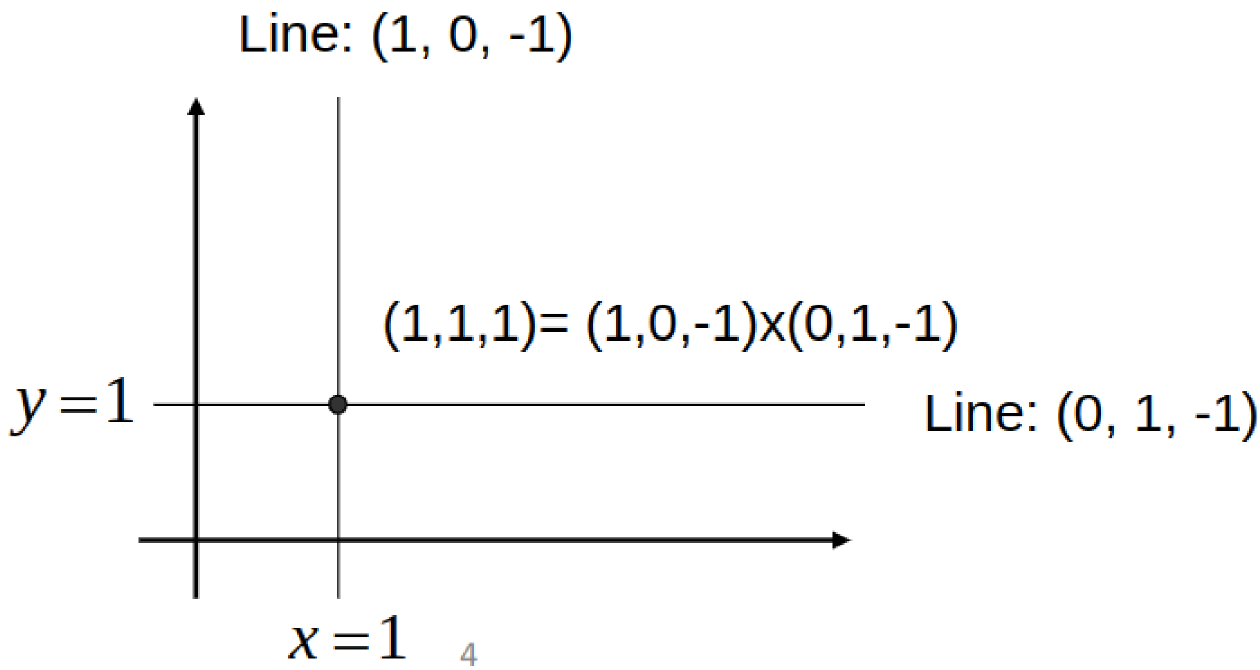
1. 两条直线的交点等于两条直线齐次坐标的叉乘

X = l' × l

2. 两个点齐次坐标的叉乘等于过这两点的直线的齐次坐标：

l = X × X'

可以发现点和直线是对偶的关系。

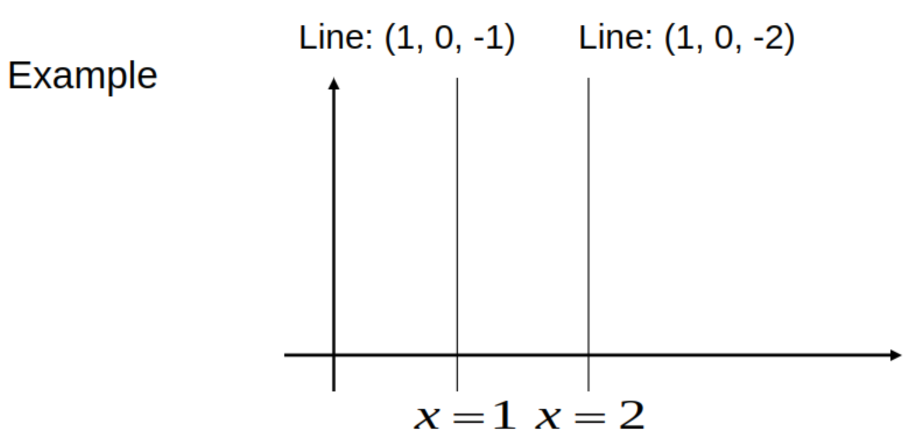


平行线的交点：

l = (a,b,c)^T l'=(a,b,c')^T   l×l' = (b,−a,0)^T

平行线的交点可以表示为（x,y,0）^T表示无穷远点（除以0表示无穷远），无穷远点有无数个。

无穷原点所在直线可以表示为：（0，0，1）^T



$\mathbf{P}^2 = \mathbf{R}^2 \cup l_\infty$ Note that in P^2 there is no distinction between ideal points and others

2 椭圆

欧几里得平面的椭圆表示：

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

齐次表示：

$$x \mapsto x_1 / x_3 \, , y \mapsto x_2 / x_3$$

$$a{x_1}^2 + bx_1x_2 + c{x_2}^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0$$

用矩阵定义齐次表示：

natrix form

$$\mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{C} \mathbf{x} = 0 \quad \text{with} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

该式子一共有五个自由度，因此五个点定义一个二次曲线：

每个通过曲线的点都可以表示为：

$$ax_i^2 + bx_iy_i + cy_i^2 + dx_i + ey_i + f = 0$$

也可以表示为：

$$\left(x_i^2, x_iy_i, y_i^2, x_i, y_i, 1\right)\mathbf{c} = 0 \qquad \mathbf{c} = (a, b, c, d, e, f)^\mathrm{T}$$

联立，有：

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{c} = 0$$

二 射影变换

1 定义

定义：一个射影是从P^2域到P^2域的可逆变换，这个可逆映射必须满足：三个点在一条直线上当且仅当三个点的映射也在同一条直线上。

可逆映射成立当且仅当存在一个3*3的可逆矩阵H，满足H(x)=HX

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x}$$

8DOF

可逆矩阵H有八个自由度，需要四个点才能求出。

2 变换的层次结构

射影变换：只保持相对关系不变，比如三个点在一条直线上，转变后三个点仍然在一条直线上

仿射变换（3*3的矩阵，且最后一行为（0，0，1））：可以保留平行关系

欧几里得变换（左上角2*2的矩阵是正交的）：可以保留角度关系

定向欧几里得变换（左上角的2*2的矩阵的行列式det为1）

3 射影变换的分解

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_S \mathbf{H}_A \mathbf{H}_P = \begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathrm{t} \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathrm{v}^{\mathrm{T}} & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathrm{t} \\ \mathrm{v}^{\mathrm{T}} & v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = s\mathbf{R}\mathbf{K} + \mathrm{t}\mathrm{v}^{\mathrm{T}} \qquad \mathbf{K} \text{ upper-triangular, } \det \mathbf{K} = 1$$

Hs（相似变换）：R表示旋转，t表示平移，s表示缩放

Ha（仿射变换）

Hp（射影变换）

例子：

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1.707 & 0.586 & 1.0 \\ 2.707 & 8.242 & 2.0 \\ 1.0 & 2.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2\cos 45^{\circ} & -2\sin 45^{\circ} & 1.0 \\ 2\sin 45^{\circ} & 2\cos 45^{\circ} & 2.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4 仿射变换的性质

仿射变换可以保留平行关系，即无穷远线在仿射变换下保持不变，此时有：

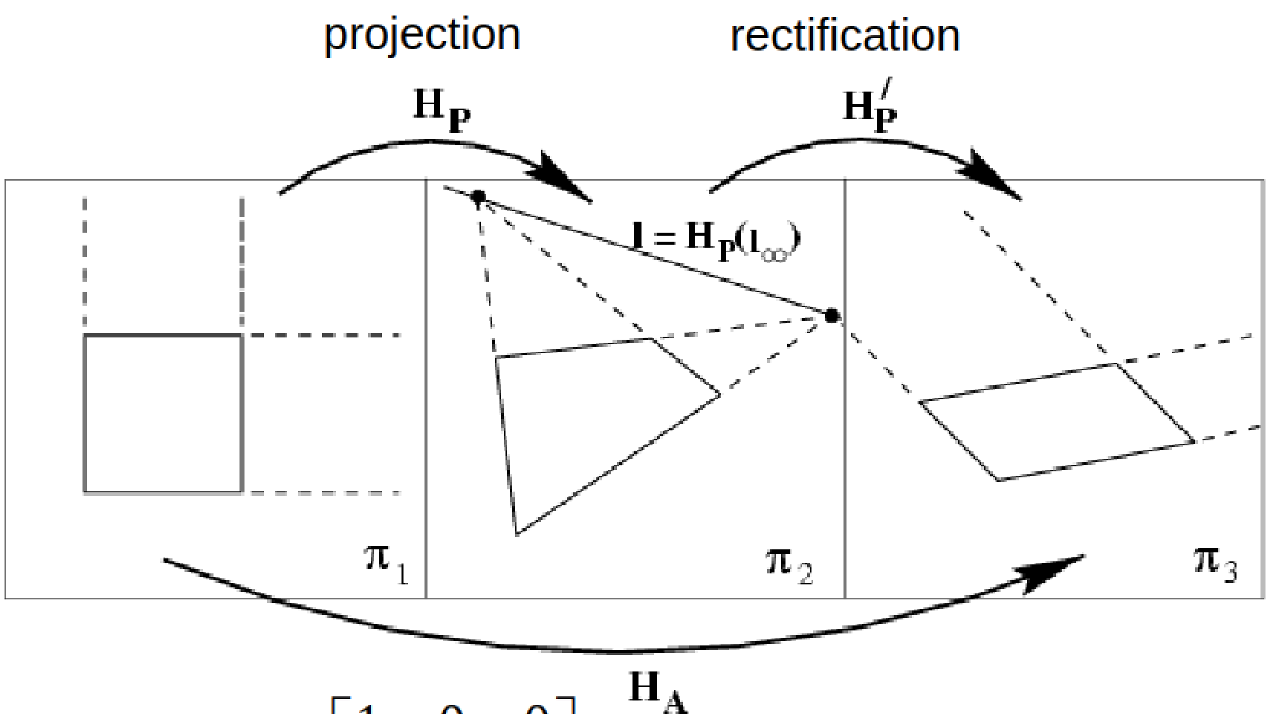
$$\mathbf{l}'_{\infty} = \mathbf{H}_A^{-\mathsf{T}}\,\mathbf{l}_{\infty} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-\mathsf{T}} & 0 \\ -\mathbf{A}\,\mathrm{t} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{l}_{\infty}$$

其中，H(−T,A)表示的是直线的变换方程（作用于点也相当于作用于平面上的线）

直线作为整体保持不变，但线上的点可能会互相交换位置。

5 仿射变换的应用

如果要恢复一张照片中的平行关系，可以先找到这种相片的无穷远线，通过仿射变换将这条线映射回无穷远处得到变换关系，平行线的关系可以通过这个仿射变换即可求出。



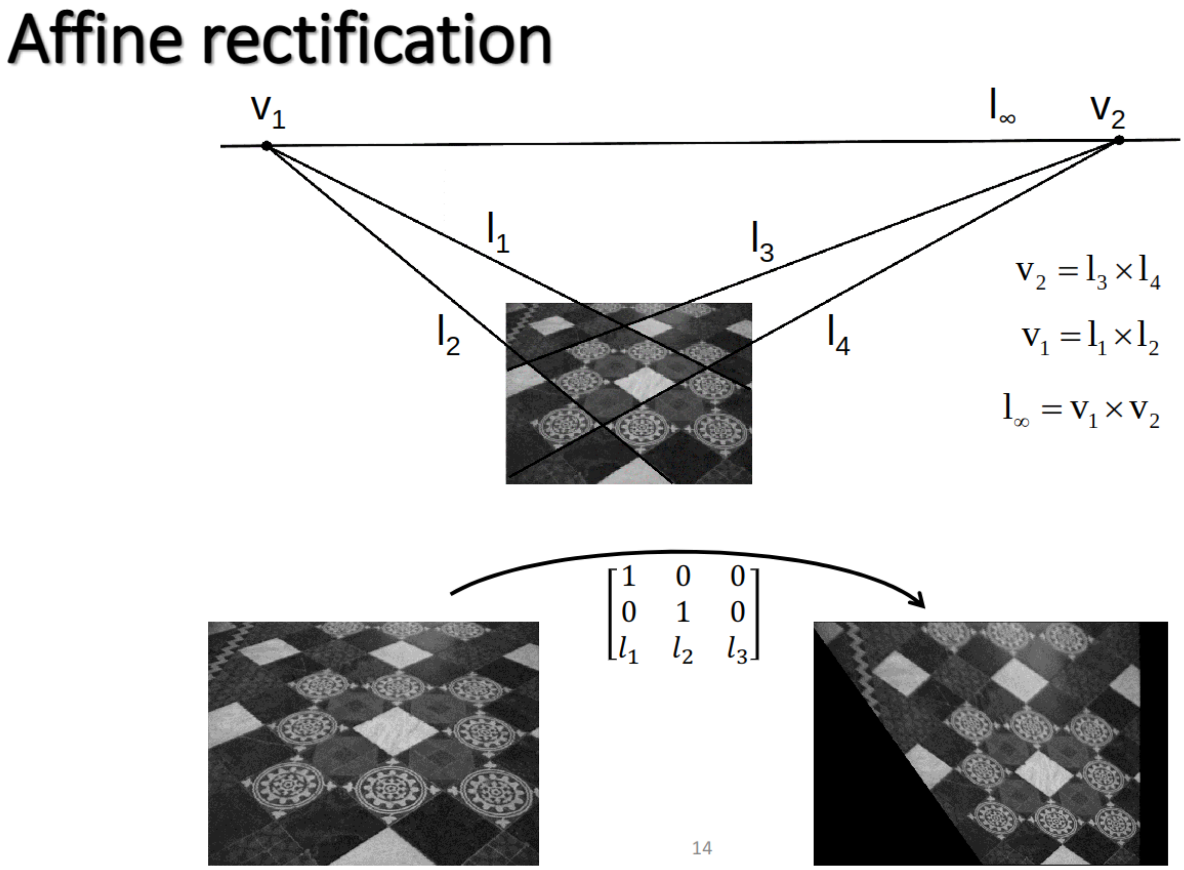
$$\mathbf{H}'_P = \mathbf{H}_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{l}_\infty = [l_1 \quad l_2 \quad l_3]^{\mathsf{T}}, l_3 \neq 0$$

H'_p maps the l_∞ back to its canonical position (0,0,1)

It can be easily verified by checking $H'_p{}^{-T} l_\infty = [0,0,1]'$

这里的HA是任意的彷射矩阵，可以视为单元矩阵，消去。第二张图的无穷线的齐次坐标表示为(l1,l2,l3)。

恢复图中平行关系的例子：



三 三维空间射影几何

1 三维点

三维点的齐次坐标可以表示为：

$$(X, Y, Z)^{\mathrm{T}} \text{ in } \mathrm{R}^3$$

$$\mathrm{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^{\mathrm{T}} \text{ in } \mathrm{P}^3$$

$$\mathrm{X} = \left(\frac{X_1}{X_4}, \frac{X_2}{X_4}, \frac{X_3}{X_4}, 1\right)^{\mathrm{T}} = (X, Y, Z, 1)^{\mathrm{T}} \quad (X_4 \neq 0)$$

齐次坐标除以最后一维便变成欧几里得坐标。

三维空间的射影变:

$$\mathrm{X}' = \mathbf{H}\mathrm{X} \quad \text{(4x4-1=15 dof)}$$

2 二次曲线

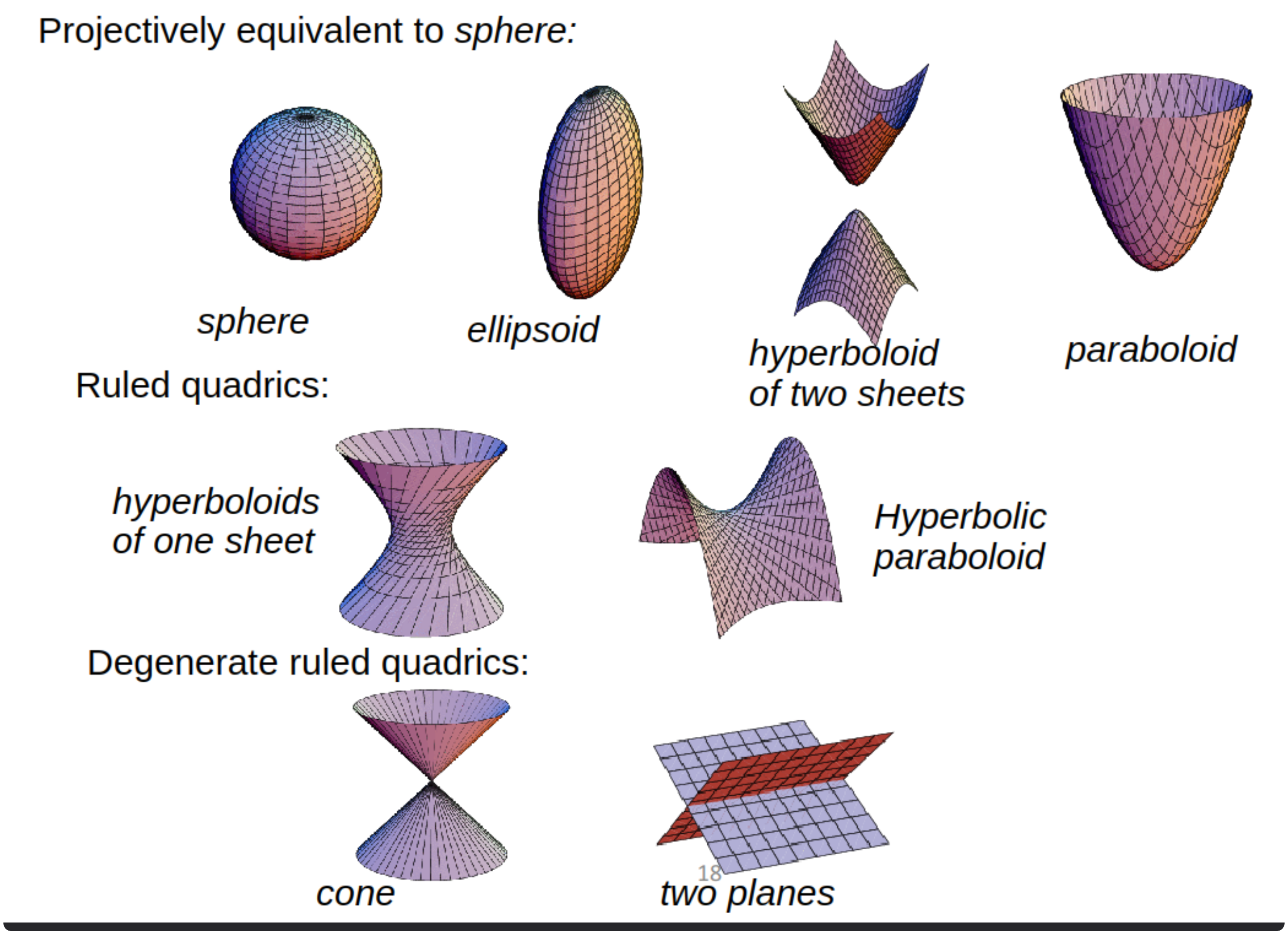
$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\mathrm{X} = 0$$

Q是一个对称矩阵，即二次曲面可以用一个对称矩阵表示。

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ & \bullet \end{bmatrix}$$

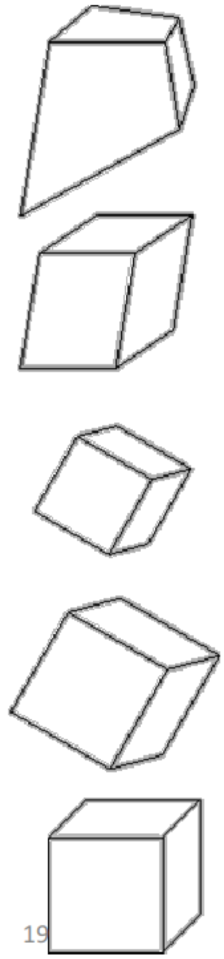
Q有9个自由度，9个点定义一个二次曲面，直线和二次曲面相交得到一个椭圆。

二次曲面例子:


Projectively equivalent to *sphere:*
sphere
ellipsoid
hyperboloid of two sheets
paraboloid
Ruled quadrics:
hyperboloids of one sheet
Hyperbolic paraboloid
Degenerate ruled quadrics:
cone
two planes
18

二次曲线变换层次：

Projective 15dof	$\begin{bmatrix} A & t \\ v^{\mathsf{T}} & v \end{bmatrix}$	Intersection and tangency
Affine 12dof	$\begin{bmatrix} A & t \\ 0^{\mathsf{T}} & 1 \end{bmatrix}$	Parallellism of planes, Volume ratios, centroids, The plane at infinity π_∞
Similarity 7dof	$\begin{bmatrix} sR & t \\ 0^{\mathsf{T}} & 1 \end{bmatrix}$	The absolute conic Ω_∞
Euclidean 6dof	$\begin{bmatrix} R & t \\ 0^{\mathsf{T}} & 1 \end{bmatrix}$	Volume



19

欧几里得变换可以恢复原来形状的大小，（可以恢复尺寸）

三维空间内存在一个无穷点面

$$\pi'_\infty = \mathbf{H}_A^{-\mathsf{T}}\pi_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-\mathsf{T}} & 0 \\ -\mathbf{A}\,\mathrm{t} & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pi_\infty$$

三位平面里点和平面对偶，线和线对偶

相机模型

一 相机数学模型

1 把针孔成像模型转换成数学模型

1. 相机是从左向右看的，由于小孔成像的图片是倒置的，为了便于建模，将成像平面放在小孔前面。
2. 光学中心置于原点
3. 焦距为d

2 物体投影到成像平面

物体点（x,y,z）在成像平面上的投影点，由相似三角形的性质可以得到：

$$(x, y, z) \rightarrow (-d\frac{x}{z}, \ -d\frac{y}{z}, \ -d)$$

由于成像平面在焦距上，去掉最后一维，得到最后投影到成像平面的坐标：

$$(x, y, z) \rightarrow (-d\frac{x}{z}, -d\frac{y}{z})$$

由于该转换除以z，因此不是线性转换。

3 将投影变成线性变换

引入齐次坐标可以把上述投影变成线性变换：

$$(x, y) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x, y, z) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

homogeneous image coordinates   homogeneous scene coordinates

齐次坐标转为欧几里得坐标：

Converting *from* homogeneous coordinates

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w, z/w)$$

引入齐次坐标将投影变成线性变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z/d \end{bmatrix} \Rightarrow \left(-d\frac{x}{z}, \ -d\frac{y}{z}\right)$$

divide by third coordinate

这是一个射影变换，得到的齐次坐标变换得到欧几里得坐标系的结果。投影矩阵系数变换，不改变投影点的结果：

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z/d \end{bmatrix} \Rightarrow (-d\frac{x}{z}, \quad -d\frac{y}{z})
$$

$$
\begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dx \\ -dy \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow (-d\frac{x}{z}, \quad -d\frac{y}{z})
$$

4 正交投影（也叫平行投影）

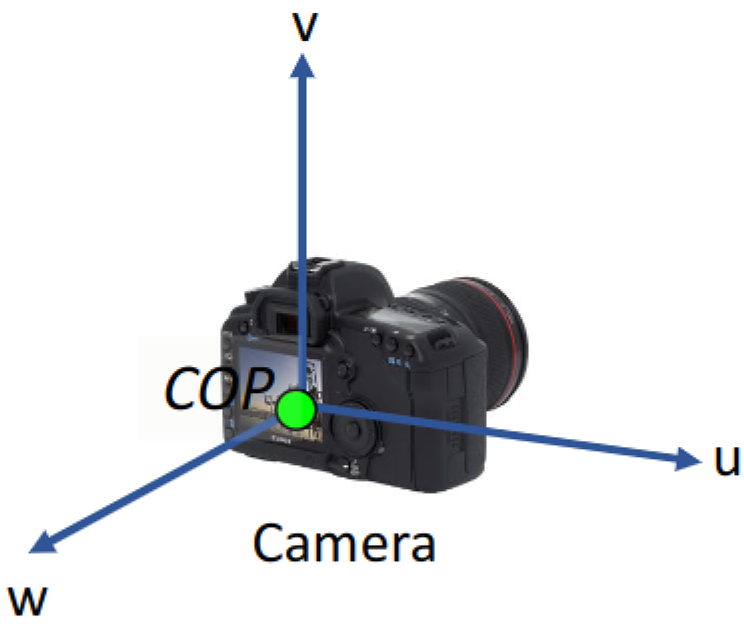
当小孔在无穷远处，小孔和物体点的连线和成像平面垂直：（x,y,z）–>（x，y）。

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (x, y)
$$

二 相机参数

1 相机坐标系和世界坐标系

相机坐标系：



世界坐标系：

2 将世界坐标的点投影到相机成像平面

步骤：

1. 需要相机的位置（世界坐标系下），相机的朝向（摄像机的方向），然后将世界坐标系下的点投影到相机坐标系下。
2. 需要知道相机的一些参数，从而将世界坐标系下的点投影到成像平面上。
3. 上述整个过程都可以用矩阵表示。

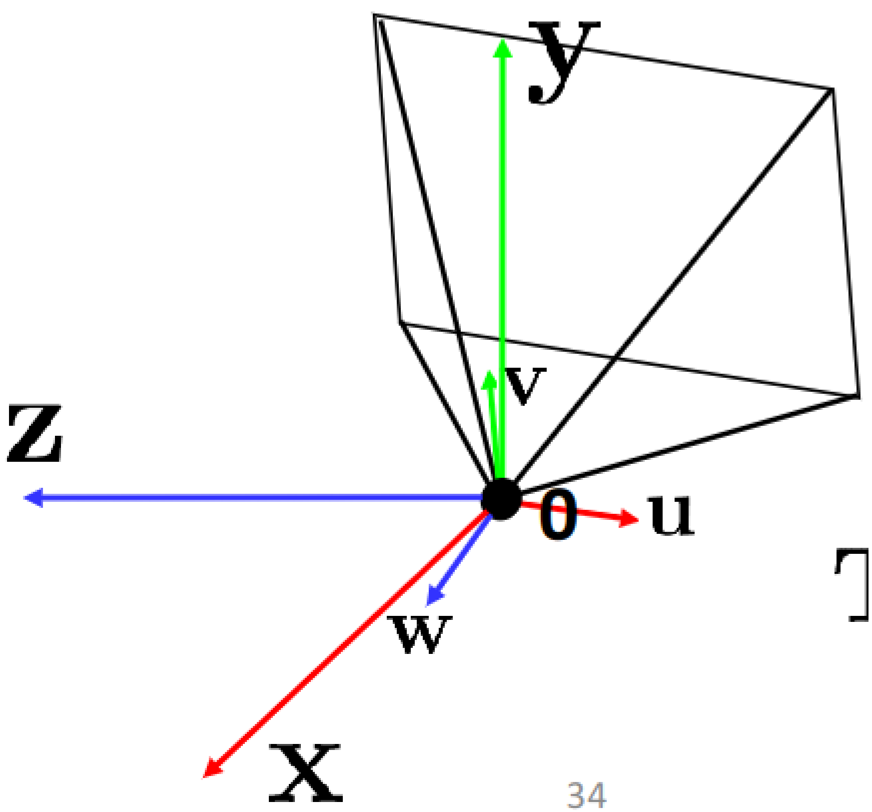
旋转平移介绍：https://zhuanlan.zhihu.com/p/96717729

将世界坐标投影到相机坐标：

1. 先将世界坐标系原点平移到相机坐标系原点，这一步需要一个平移矩阵T，假设相机坐标系原点在世界坐标系的坐标为C。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times 3} & -\mathbf{c} \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

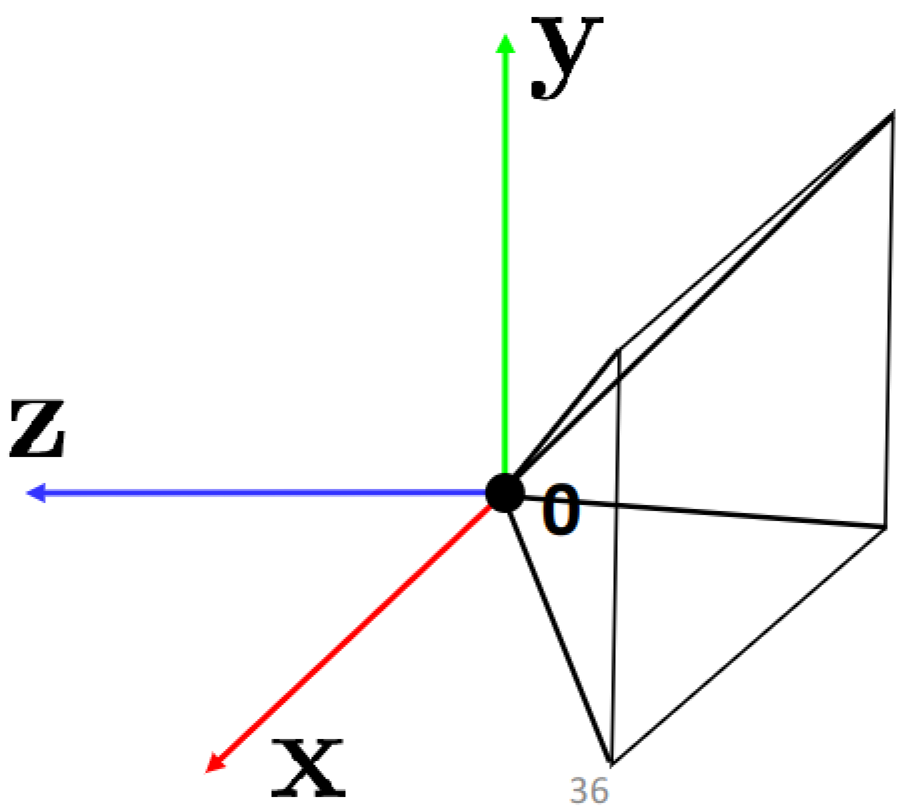
世界坐标系，x轴向右，y轴向上，z轴向后，平移之后的结果为：



2. 将世界坐标旋转，使世界坐标的轴和相机坐标系重合，这里需要一个旋转矩阵R。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \\ \mathbf{v}^T \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix}$$

旋转之后的结果为：



相机内参：

将相机坐标系投影到成像平面的投影矩阵拆分：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -f & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{K} \\ \text{(intrinsics)}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(converts from 3D rays in camera coordinate system to pixel coordinates)

上述的K矩阵里面表示的是相机的一些参数，考虑到其他参数，有：

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -f & s & c_x \\ 0 & -\alpha f & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

α：当像素点为正方形时为1，如果为长方形则不为1

S：当像素的两个轴垂直时为0，如果不垂直如菱形，平行四边形则不为0

（Cx,Cy）：当成像中心在原点时为（0，0）

上述参数在数码相机里面都是理想值。

由上所述，世界坐标系的点到相机成像平面的投影矩阵为：

$$\Pi = \underset{\text{intrinsics}}{\mathbf{K}} \underbrace{\underset{\text{projection}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{\text{rotation}}{\begin{bmatrix} & \mathbf{R} & & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\text{translation}}{\begin{bmatrix} & \mathbf{I}_{3\times 3} & & -\mathbf{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}_{\left[\ \mathbf{R}\ \middle|\ \underbrace{-\mathbf{R}\mathbf{c}}_{\text{(t in book's notation)}}\ \right]}$$

$$\Pi = \mathbf{K}\left[\ \mathbf{R}\ \middle|\ -\mathbf{R}\mathbf{c}\ \right]$$

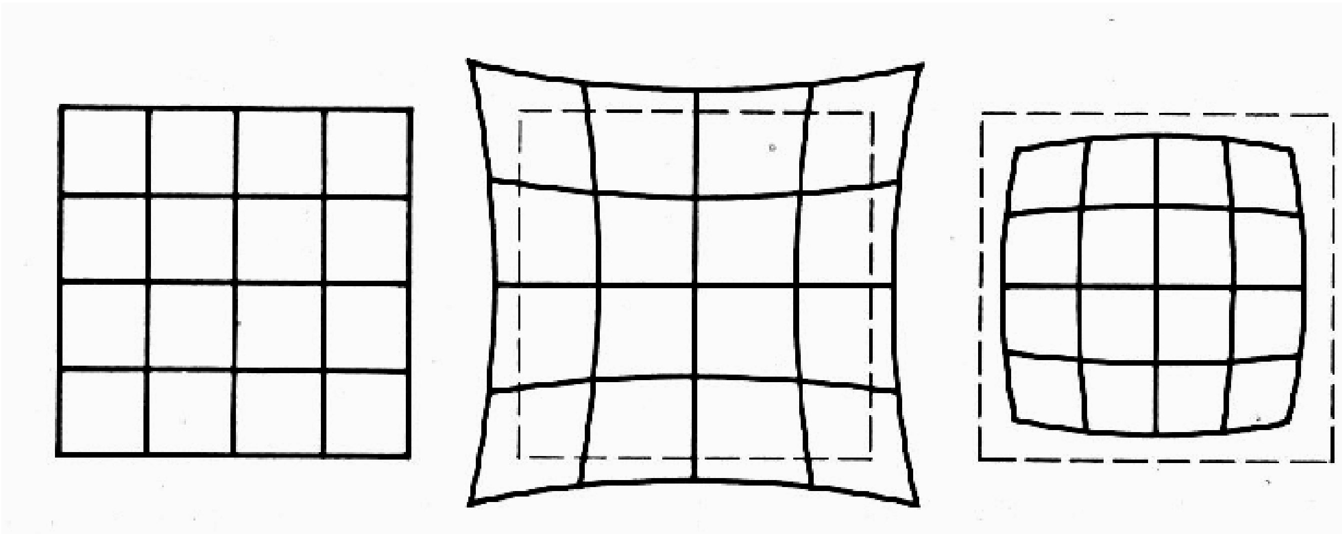
identity matrix

$$\Pi = \underset{\color{red}{\text{intrinsics}}}{\begin{bmatrix} -fs_x & 0 & x'_c \\ 0 & -fs_y & y'_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\text{projection}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{\color{cyan}{\text{rotation}}}{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3x3} & \mathbf{0}_{3x1} \\ \mathbf{0}_{1x3} & 1 \end{bmatrix}} \underset{\color{cyan}{\text{translation}}}{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3x3} & \mathbf{T}_{3x1} \\ \mathbf{0}_{1x3} & 1 \end{bmatrix}}$$

三 相机的畸变

1 相机畸变

图像的畸变是由于镜头不完美造成的，透镜边缘的光线产生的畸变最明显。



No distortion　　Pin cushion　　Barrel

2 畸变模型

由于图像的畸变，原有的投影矩阵已经不适用，需要对畸变进行矫正。

先把世界坐标系的点根据投影矩阵投影到成像平面得到：

$$\mathrm{t}\left(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}\right)$$

然后根据畸变模型将得到的坐标进行矫正（畸变模型的一些参数需要估计）

Project $(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})$ to “normalized” image coordinates

$$\begin{aligned} x'_n &= \widehat{x}/\widehat{z} \\ y'_n &= \widehat{y}/\widehat{z} \end{aligned}$$

Apply radial distortion

$$\begin{aligned} r^2 &= {x'_n}^2 + {y'_n}^2 \\ x'_d &= x'_n(1 + \kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4) \\ y'_d &= y'_n(1 + \kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4) \end{aligned}$$

Apply focal length translate image center

$$\begin{aligned} x' &= f x'_d + x_c \\ y' &= f y'_d + y_c \end{aligned}$$

四 由相机的数学模型（投影矩阵）估算出相机的参数信息

1 相机中心

假设相机投影矩阵为P（3*4维度），设相机中心点为Y，则满足关系：

P*Y=0

证明：1.另外取一个点A，AY两个点确定一条直线，这点直线上任取一点X，可以表示为：

$$X = \lambda A + (1 - \lambda) Y$$

2.X点在成像平面上的投影x为：

$$x = PX = \lambda PA + (1 - \lambda) PY = \lambda PA$$

对于任取一点与Y形成的直线在成像平面的投影都是一个点，因此Y是相机中心。

假设P被分成一个M(3*3)和P4(3*1)

$$P = \begin{bmatrix} M & p_4 \end{bmatrix}$$

那么相机中心可以表示为：

$$C = \begin{pmatrix} -M^{-1} p_4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 投影矩阵列向量的几何含义

假设投影矩阵P为：

$$P = [p_1 p_2 p_3 p_4]$$

点X = [0 1 0 0]^T表示，沿着y方向上的无穷原点。

[P2]=[P1P2P3P4][x]

因此第2列是沿着Y轴无穷远点在成像平面上的投影。

同理：

第一列是沿着X轴无穷远点在成像平面上的投影

第三列是沿着Z轴无穷远点在成像平面上的投影

第四列是世界坐标系原点在成像平面上的投影。

3 投影矩阵行向量的几何意义

假设投影矩阵的列向量为：

$$P = \begin{bmatrix} {p^1}^T \\ {p^2}^T \\ {p^3}^T \end{bmatrix}$$

第三行（1*4）在齐次坐标系中表示一个平面，假设平面有一点X，则有：

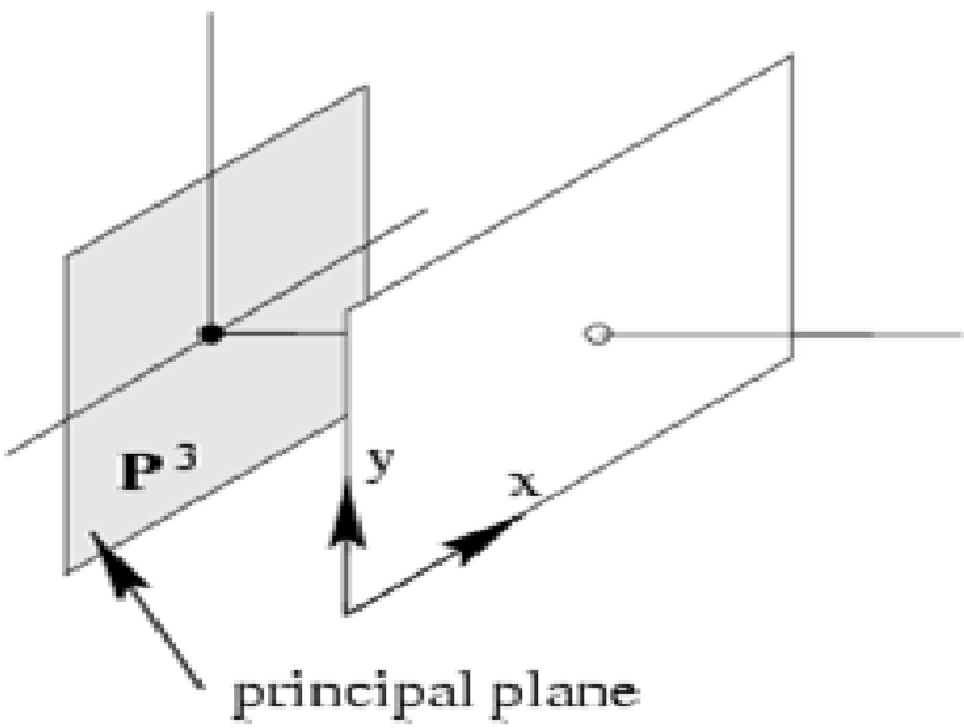
$${p^3}^T X = 0$$

则平面上这点X投影到成像平面上有：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{p}^{1\mathsf{T}} \\ \mathrm{p}^{2\mathsf{T}} \\ \mathrm{p}^{3\mathsf{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

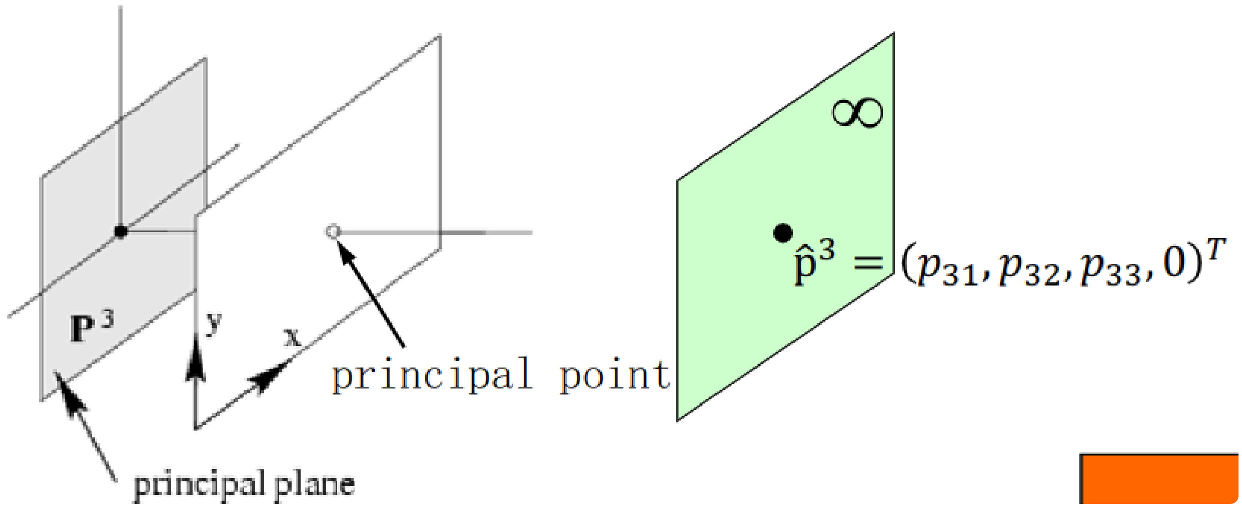
平面上的点投影到成像平面是无穷远点，说明：

1. 投影矩阵第三行所代表的平面和成像平面平行且经过投影中心（相机中心）。
2. 平面的法向量，也就是第三行向量的前三位给了相机的朝向。



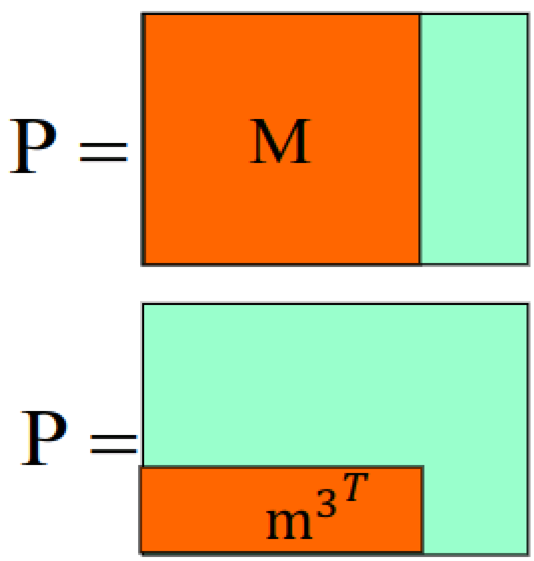
4 图像中心点（光心）

将投影矩阵第三列所代表的平面的法线方向上的无穷远点（p31,p32,p33,0）^T投影到成像平面上得到光心。

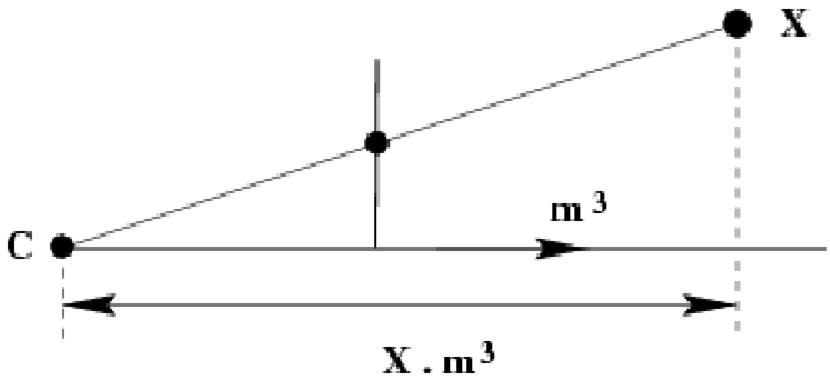


光心：

$$\mathrm{x}_0 = \mathrm{P}\hat{\mathrm{p}}^3 = \mathrm{Mm}^3$$



5 点到principal平面的距离



m3表示相机朝向，这里要归一化把m3变成单位向量。

所以点X=(x,y,z,1)=(X^T,1)到principal的距离可以表示为：

$$w = \mathrm{m}^{3\,\mathrm{T}}(\mathrm{X} - \mathrm{C}) \quad \text{(dot product)}$$

通常情况下，如果m3没有归一化且方向指向正方向，需要额外操作：

$$\mathrm{depth}(\mathrm{X};\mathrm{P}) = \frac{\mathrm{sign}(\det \mathrm{M})\,w}{\|\mathrm{m}^3\|}$$