9 Geometry & Camera Model(几何和相机模型)

射影几何基础

一 齐次坐标

1 点和直线

欧几里得平面上的一条直线可以表示为：

$$ax+by+c=0$$

同时乘以一个不为0的系数同样表示相同的一条直线，

$$(ka)x + (kb) +kc = 0，任意k不等于0$$

齐次坐标表示一条直线：（a,b,c）^T~k（a,b,c）^T

欧几里得平面上的点可以表示为：X = （x,y)^T

点的齐次坐标表示：

X＝（x,y,1)^T,　　　(x,y,1)^T ~ k（x,y,1)^T, 任意K不等于0

点的其次坐标（x1,x2,x3）^T，但是自由度为2

点在直线上：点X，直线l

当且仅当，X^T*l = (x,y,1)^T*(a,b,c) = ax+bx+c=0

齐次坐标系的优点：

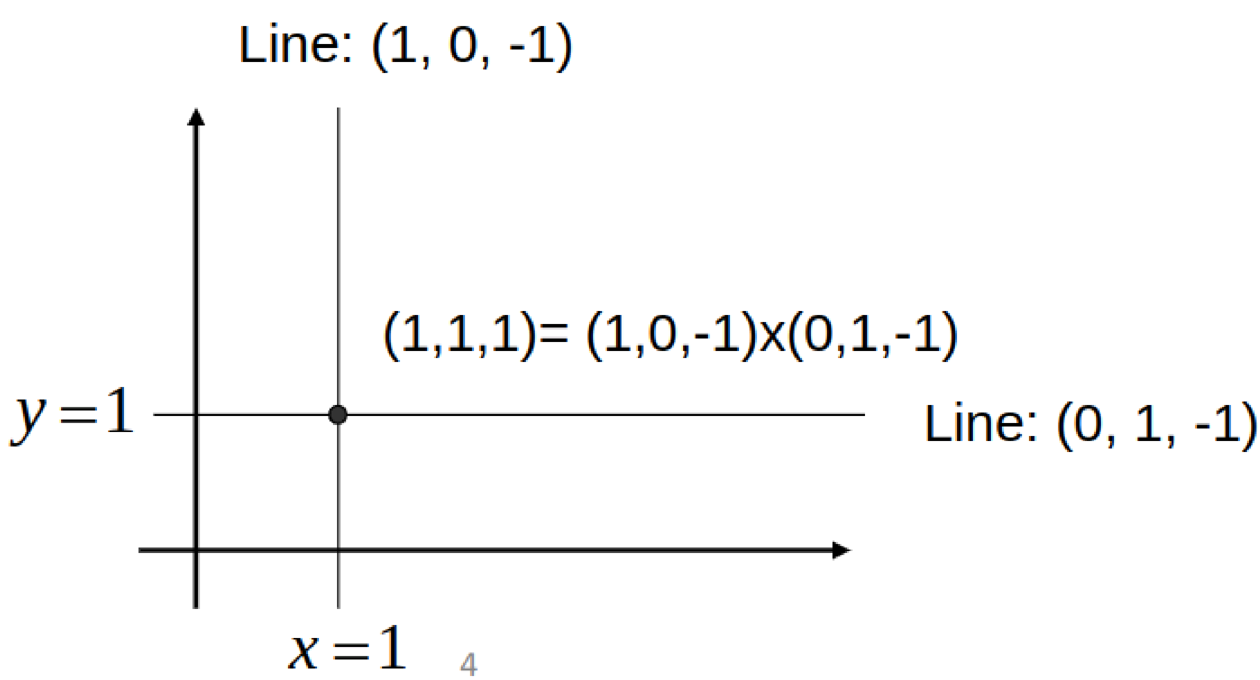
1. 两条直线的交点等于两条直线齐次坐标的叉乘

X = l' × l

2. 两个点齐次坐标的叉乘等于过这两点的直线的齐次坐标：

l = X × X'

可以发现点和直线是对偶的关系。



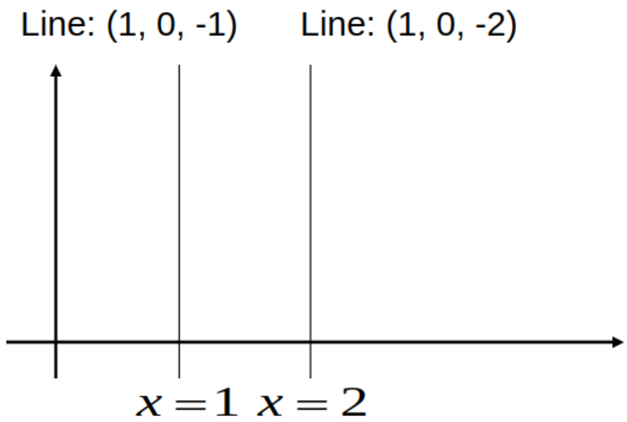
平行线的交点：

l = (a,b,c)^T　l'=(a,b,c')^T　　l×l' = (b,−a,0)^T

平行线的交点可以表示为（x,y,0）^T表示无穷远点（除以0表示无穷远），无穷远点有无数个。

无穷原点所在直线可以表示为：（0，0，1）^T

Example



$\mathbf{P}^2 = \mathbf{R}^2 \cup \mathrm{l}_\infty$ Note that in P^2 there is no distinction between ideal points and others

2 椭圆

欧几里得平面的椭圆表示：

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

齐次表示：

$$x \mapsto x_1 / x_3 , y \mapsto x_2 / x_3$$

$$ax_1{}^2 + bx_1x_2 + cx_2{}^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0$$

用矩阵定义齐次表示：

natrix form

$$\mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{C} \mathbf{x} = 0 \text{ with } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

该式子一共有五个自由度，因此五个点定义一个二次曲线：

每个通过曲线的点都可以表示为：

$$ax_i^2 + bx_iy_i + cy_i^2 + dx_i + ey_i + f = 0$$

也可以表示为：

$$\left(x_i^2, x_iy_i, y_i^2, x_i, y_i, 1\right)\mathbf{c} = 0 \qquad \mathbf{c} = (a, b, c, d, e, f)^{\mathrm{T}}$$

联立，有：

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{c} = 0$$

二 射影变换

1 定义

定义：一个射影是从P^2域到P^2域的可逆变换，这个可逆映射必须满足：三个点在一条直线上当且仅当三个点的映射也在同一条直线上。

可逆映射成立当且仅当存在一个3*3的可逆矩阵H，满足H(x)=HX

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{H}\,\mathbf{x}$$

8DOF

可逆矩阵H有八个自由度，需要四个点才能求出。

2 变换的层次结构

射影变换：只保持相对关系不变，比如三个点在一条直线上，转变后三个点仍然在一条直线上

仿射变换（3*3的矩阵，且最后一行为（0，0，1））：可以保留平行关系

欧几里得变换（左上角2*2的矩阵是正交的）：可以保留角度关系

定向欧几里得变换（左上角的2*2的矩阵的行列式det为1）

3 射影变换的分解

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_S \mathbf{H}_A \mathbf{H}_P = \begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^\mathsf{T} & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^\mathsf{T} & v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = s\mathbf{R}\mathbf{K} + \mathbf{t}\mathbf{v}^\mathsf{T} \qquad \mathbf{K} \text{ upper-triangular, } \det \mathbf{K} = 1$$

Hs（相似变换）：R表示旋转，t表示平移，s表示缩放

Ha（仿射变换）

Hp（射影变换）

例子：

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1.707 & 0.586 & 1.0\\ 2.707 & 8.242 & 2.0\\ 1.0 & 2.0 & 1.0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}2\cos 45^{\circ} & -2\sin 45^{\circ} & 1.0\\ 2\sin 45^{\circ} & 2\cos 45^{\circ} & 2.0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

4 仿射变换的性质

仿射变换可以保留平行关系，即无穷远线在仿射变换下保持不变，此时有：

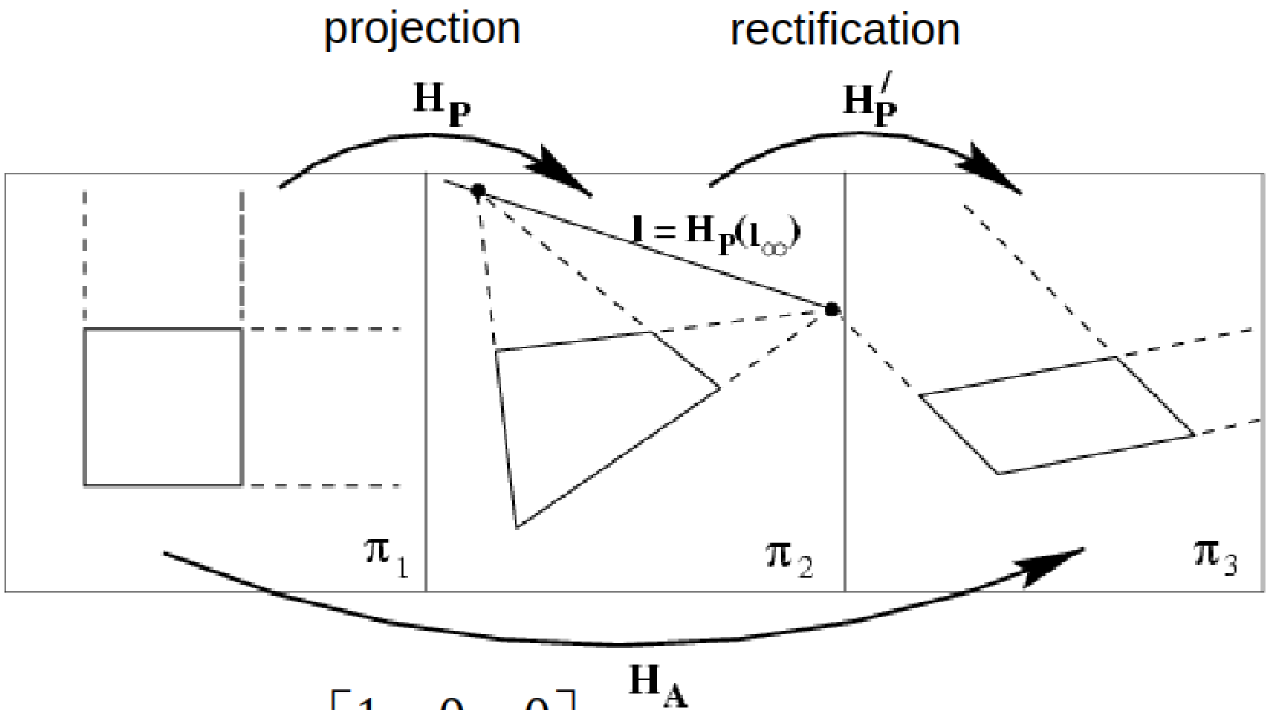
$$\mathbf{l}'_{\infty}=\mathbf{H}_A^{-\mathsf{T}}\mathbf{l}_{\infty}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-\mathsf{T}} & 0\\ -\mathbf{A}\mathbf{t} & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\mathbf{l}_{\infty}$$

其中，H(–T,A)表示的是直线的变换方程（作用于点也相当于作用于平面上的线）

直线作为整体保持不变，但线上的点可能会互相交换位置。

5 仿射变换的应用

如果要恢复一张照片中的平行关系，可以先找到这种相片的无穷远线，通过仿射变换将这条线映射回无穷远处得到变换关系，平行线的关系可以通过这个仿射变换即可求出。



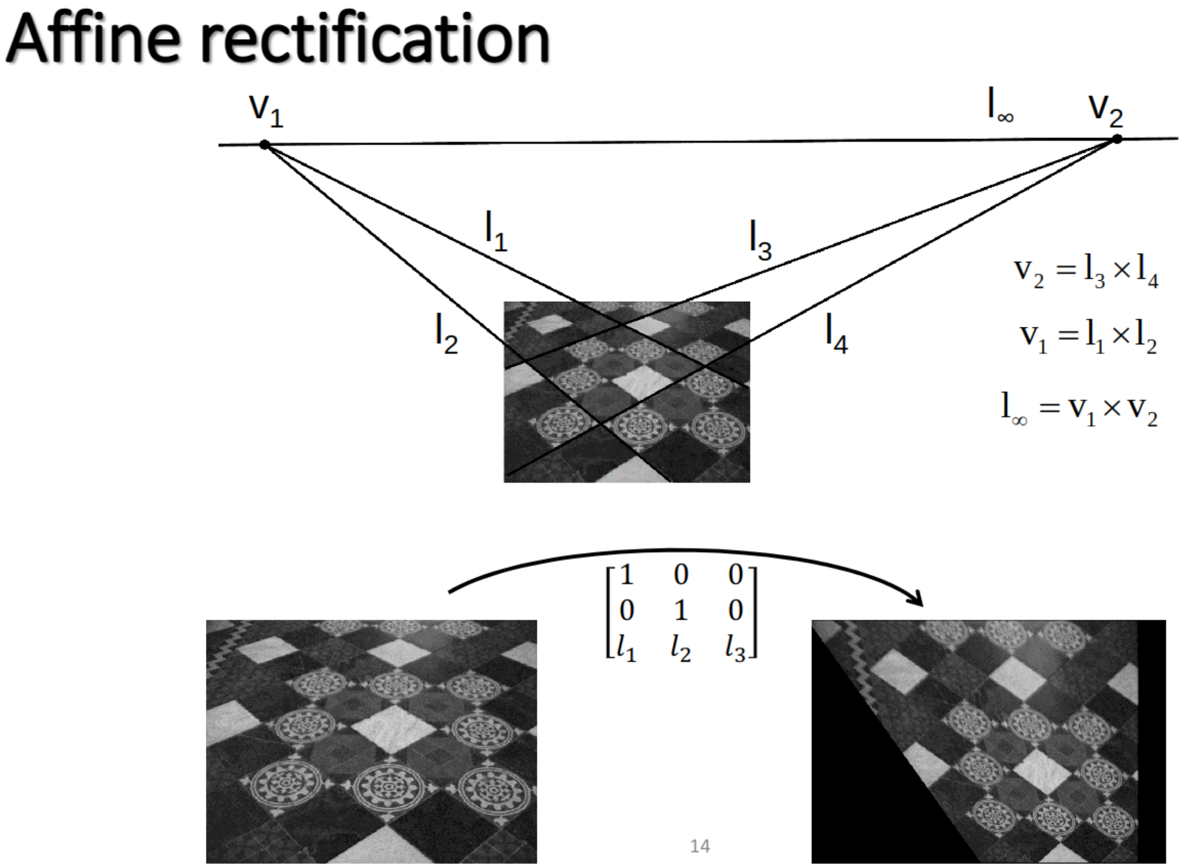
$$\mathbf{H}'_P = \mathbf{H}_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{l}_\infty = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, l_3 \neq 0$$

H'_p maps the l_∞ back to its canonical position (0,0,1)

It can be easily verified by checking $H'_p{}^{-T} l_\infty = [0,0,1]'$

这里的HA是任意的彷射矩阵，可以视为单元矩阵，消去。第二张图的无穷线的齐次坐标表示为(l1,l2,l3)。

恢复图中平行关系的例子：



三 三维空间射影几何

1 三维点

三维点的齐次坐标可以表示为：

$$(X, Y, Z)^{\mathsf{T}} \text{ in } \mathrm{R}^3$$

$$\mathrm{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^{\mathsf{T}} \text{ in } \mathrm{P}^3$$

$$\mathrm{X} = \left(\frac{X_1}{X_4}, \frac{X_2}{X_4}, \frac{X_3}{X_4}, 1\right)^{\mathsf{T}} = (X, Y, Z, 1)^{\mathsf{T}} \qquad (X_4 \neq 0)$$

齐次坐标除以最后一维便变成欧几里得坐标。

三维空间的射影变：

$$\mathbf{X}' = \mathbf{H}\,\mathbf{X} \quad (4x4\text{-}1=15\ \mathrm{dof})$$

2 二次曲线

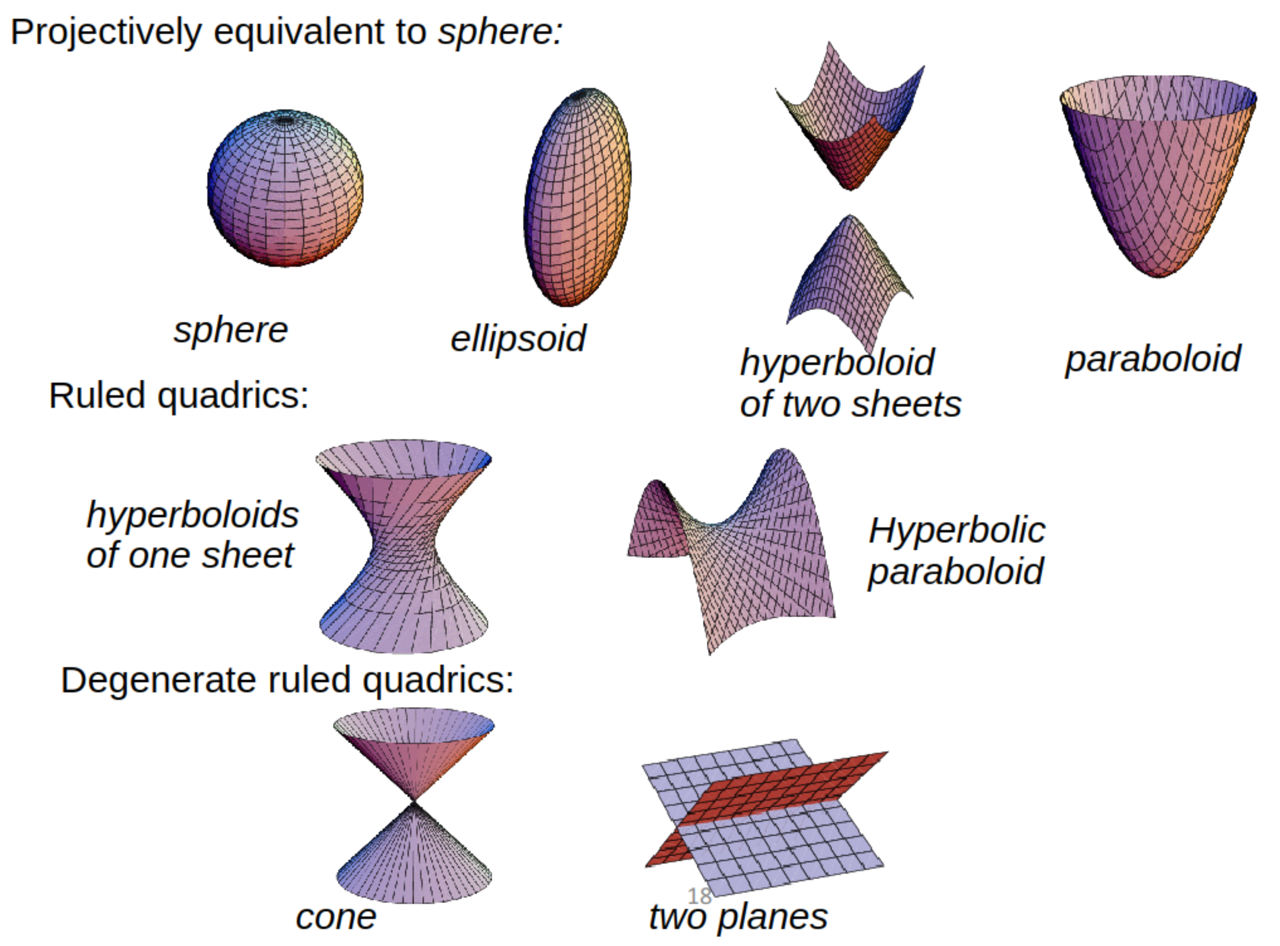
$$X^{T}QX = 0$$

Q是一个对称矩阵，即二次曲面可以用一个对称矩阵表示。

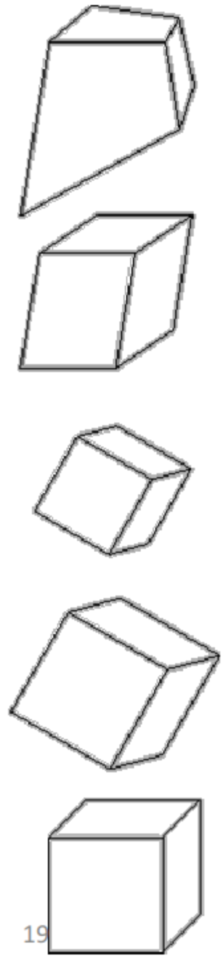
$$Q = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ & \bullet \end{bmatrix}$$

Q有9个自由度，9个点定义一个二次曲面，直线和二次曲面相交得到一个椭圆。

二次曲面例子：


Projectively equivalent to sphere:
sphere
ellipsoid
hyperboloid
of two sheets
paraboloid
Ruled quadrics:
hyperboloids
of one sheet
Hyperbolic
paraboloid
Degenerate ruled quadrics:
cone
two planes
18

二次曲线变换层次：

Projective 15dof	$\begin{bmatrix} A & t \\ v^{T} & v \end{bmatrix}$		Intersection and tangency
Affine 12dof	$\begin{bmatrix} A & t \\ 0^{T} & 1 \end{bmatrix}$		Parallellism of planes, Volume ratios, centroids, The plane at infinity π_∞
Similarity 7dof	$\begin{bmatrix} sR & t \\ 0^{T} & 1 \end{bmatrix}$		The absolute conic Ω_∞
Euclidean 6dof	$\begin{bmatrix} R & t \\ 0^{T} & 1 \end{bmatrix}$		Volume

19

欧几里得变换可以恢复原来形状的大小，（可以恢复尺寸）

三维空间内存在一个无穷点面

$$\pi'_\infty = \mathbf{H}_A^{-T}\pi_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-T} & 0 \\ -\mathbf{A}\,t & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pi_\infty$$

三位平面里点和平面对偶，线和线对偶

相机模型