数学与考场策略

洛谷算法竞赛秋令营

览遍千秋

2024-10-07

www.luogu.com.cn

排列组合

组合：C_n^m，表示从 n 个物品中选出 m 个物品的方案数，并且选出的顺序无关，只和选出了哪些物体有关。

排列：A_n^m，表示从 n 个物品中选出 m 个物品的方案数，选出的顺序有关。

例如，C_5^2 表示从 5 个物品中选 2 个。依次选出 A, B 与 B, A 是同一种方案。

A_5^2 表示从 5 个物品中选 2 个，但 A, B 与 B, A 是不同的方案。

排列组合

- $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
- $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
- $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$ （去序）
- $C_n^m = C_n^{n-m}$

排列组合

- 杨辉三角

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1\ 1 \\
1\ 2\ 1 \\
1\ 3\ 3\ 1 \\
1\ 4\ 6\ 4\ 1
\end{array}
$$

- 第 i 行第 j 列对应 C_{i-1}^{j-1}
- $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$
- 利用杨辉三角计算组合数

P2822 [NOIP2016 提高组] 组合数问题

https://www.luogu.com.cn/problem/P2822

- $1 \le n, m \le 2000$，$1 \le t \le 10^4$

P2822 [NOIP2016 提高组] 组合数问题

- 根据杨辉三角，递推计算组合数
- 计算过程对 k 取模，保证值不会过大

- $s[i][j]$ 表示 $n=i,m=j$ 的答案
- 二维前缀和
- $s[i][j]=s[i][j-1]+s[i-1][j]-s[i-1][j-1]+f(i,j)$

埃氏筛

- 一种用于筛选质数的算法
- i 自 2 向上枚举至 MAXN
- 若枚举到 i 时，i 未被标记，则说明 i 是质数
- 标记掉 $2i \sim MAXN$ 中全部 i 的倍数

P1621 集合

https://www.luogu.com.cn/problem/P1621

P1621 集合

- 若两个数同时具有 $>p$ 的质因数，则一定属于同一个集合
- 考虑埃氏筛的过程，当枚举到 $i>p$ 且 i 是质数，i 的倍数均属于同一集合。
- 可以使用并查集维护每一集合内有多少数

快速幂

- 快速幂可以在 $O(\log n)$ 的时间复杂度计算 x^n 的值
- $n = a_0 \times 2^0 + a_1 \times 2^1 + \cdots + a_w \times 2^w$
- $x^n = x^{a_0\times 2^0+a_1\times 2^1+\cdots+a_w\times 2^w} = x^{a_0\times 2^0} \cdot \ldots \cdot x^{a_w\times 2^w}$
- $a_i \in \{0,1\}$，a 是 n 的二进制表示

- $x^{2^0}, x^{2^1}, x^{2^2}, \cdots, x^{2^w}$ 的值很容易计算
- 计算过程注意溢出与取模问题

P8813 [CSP-J 2022] 乘方

https://www.luogu.com.cn/problem/P8813

P8813 [CSP-J 2022] 乘方

- 使用快速幂计算 a^b 的值
- 计算过程中若中间结果超过 10^9，直接返回 -1

关于分数取模

- 可能存在答案可以表示为 $\frac{p}{q}$ 形式，但题目要求对 mod 取模的情况
- 模意义下不可以进行除法运算
- 若 mod 为质数（998244353，10^9+7 均为质数），取模的结果为 $p \times q^{mod-2}$，q^{mod-2} 可以用快速幂计算。

整数唯一分解定理

- 任意给定整数 n，可以被唯一的分解为
$$n = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_k^{c_k}$$
- p_i 为质因数，c_i 为其指数

P10580 [蓝桥杯 2024 国 A] gcd 与 lcm

https://www.luogu.com.cn/problem/P10580

P10580 [蓝桥杯 2024 国 A] gcd 与 lcm

- $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的 gcd 为 x，lcm 为 y
- 同时除 x，转化为 gcd 为 1，lcm 为 $k = \frac{y}{x}$ 的数列个数
- $k = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_w^{c_w}$
- a_i 必然是 k 的因数
- a_i 也可以表示为 $p_1^{z_1} p_2^{z_2} \cdots p_w^{z_w} (z_i \le c_i)$
- 即，质因数种类相同，指数不超过 k 对应的指数

P10580 [蓝桥杯 2024 国 A] gcd 与 lcm

- 研究质因数 p_j，$k = \cdots p_j^{c_j} \cdots$
- 对于 $1 \le i \le n$，a_i 在质因数 p_j 的指数上可以取 $0 \sim c_j$
- 根据乘法原理，p_j 对答案的贡献为 $\left(c_j + 1\right)^n$
- 若对于所有的 $1 \le i \le n$，指数均不为 0？
- 若对于所有的 $1 \le i \le n$，指数均不为 c_j？

P10580 [蓝桥杯 2024 国 A] gcd 与 lcm

- 若对于所有的 $1 \le i \le n$，指数均不为 0?

- 若对于所有的 $1 \le i \le n$，指数均不为 c_j?

- 除去上述两种不合法情况，考虑其重复情况后
- p_j 对于答案的贡献为
- $f(j) = \left(c_j + 1\right)^n - 2 \times c_j^n + \left(c_j - 1\right)^n$

P10580 [蓝桥杯 2024 国 A] gcd 与 lcm

$$f(j) = \left(c_j + 1\right)^n - 2 \times c_j^n + \left(c_j - 1\right)^n$$

- 最终的答案则由各质因子根据乘法原理结合
- $ans = \prod_{i=1}^{w} f(i)$

前缀和

- 数列 a_i，$S_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$
- 利用前缀和，可以计算数列 a 中 $[l,r]$ 的和
- $\sum_{i=l}^{r} a_i = S_r - S_{l-1}$

数学推导

- 多尝试
- 式子变形
- 分离变量
- 向方便统计的方向变换

P2671 [NOIP2015 普及组] 求和

https://www.luogu.com.cn/problem/P2671

P2671 [NOIP2015 普及组] 求和

- 特殊的三元组 (x,y,z) 要求满足 $x<y<z, y-x=z-y, color_x=color_z$
- $y-x=z-y \to 2y=x+z$
- y 是 x,z 的平均数，且 x,z 颜色相同，分数与 y 无关
- y 要求是整数，因此 $x+z$ 要是偶数，x,z 奇偶性相同即可

- 按照颜色和奇偶性，分为 $2m$ 类

P2671 [NOIP2015 普及组] 求和

- 考虑已经按颜色和奇偶性分组完毕，x, z 已经具有相同的颜色与奇偶性
- (x, y, z) 贡献 $(x+z)\cdot(val_x+val_z)$
- 展开，$x\cdot val_x+z\cdot val_z+x\cdot val_z+z\cdot val_x$
- 假设这一组一共有 w 个数
- x 会与其他 $w-1$ 个数配对
- x 对答案的贡献为 $(w-1)x\cdot val_x+x\cdot(S-val_x)$
- S 为这一组所有 val 的和

P5686 [CSP-S 2019 江西] 和积和

https://www.luogu.com.cn/problem/P5686

注：本题系 2019 年 CSP 江西省代码丢失后补赛试题

P5686 [CSP-S 2019 江西] 和积和

$$S(l,r)=\sum_{i=l}^{r}a_i\times\sum_{i=l}^{r}b_i$$

- 两个 $\sum$ 显然可以用前缀和表示
- 用 $A(i)$ 表示 a_i 的前缀和，$B(i)$ 表示 b_i 的前缀和
- $S(l,r)=[A(r)-A(l-1)]\times[B(r)-B(l-1)]=A(r)B(r)+A(l-1)B(l-1)-A(r)B(l-1)-A(l-1)B(r)$

P5686 [CSP-S 2019 江西] 和积和

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=l}^{n}S(l,r)$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=l}^{n}A(r)B(r)+A(l-1)B(l-1)-A(r)B(l-1)-A(l-1)B(r)$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=l}^{n}A(r)B(r)+\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=l}^{n}A(l-1)B(l-1)-\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=l}^{n}A(r)B(l-1)-\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=l}^{n}A(l-1)B(r)$$

P5686 [CSP-S 2019 江西] 和积和

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=l}^{n}A(r)B(r)$$

- 仅和 r 有关
- 用 $SAB(i)$ 表示 $A(r)B(r)$ 的前缀和

$$=\sum_{l=1}^{n}SAB(n)-SAB(l-1)$$

- $O(n)$ 的时间复杂度可计算出

P5686 [CSP-S 2019 江西] 和积和

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=l}^{n}A(l-1)B(l-1)$$

- 仅和 l 有关

$$=\sum_{l=1}^{n}(n-l+1)A(l-1)B(l-1)$$

- $O(n)$ 的时间复杂度可计算出

P5686 [CSP-S 2019 江西] 和积和

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=l}^{n}A(r)B(l-1)$$

- B 仅和 l 有关

$$=\sum_{l=1}^{n}B(l-1)\sum_{r=l}^{n}A(r)$$

- 用 $SA(i)$ 表示 $A(r)$ 的前缀和

$$=\sum_{l=1}^{n}B(l-1)[SA(n)-SA(l-1)]$$

- $O(n)$ 的时间复杂度可计算出

P5686 [CSP-S 2019 江西] 和积和

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=l}^{n}A(l-1)B(r)$$

- A 仅和 l 有关

$$=\sum_{l=1}^{n}A(l-1)\sum_{r=l}^{n}B(r)$$

- 用 $SB(i)$ 表示 $B(r)$ 的前缀和

$$=\sum_{l=1}^{n}A(l-1)[SB(n)-SB(l-1)]$$

- $O(n)$ 的时间复杂度可计算出

P5686 [CSP-S 2019 江西] 和积和

- 答案的四个组成部分，均可以以 $O(n)$ 的时间复杂度计算
- 时间复杂度 $O(n)$ 可解决本题。

P9236 [蓝桥杯 2023 省 A] 异或和之和

https://www.luogu.com.cn/problem/P9236

P9236 [蓝桥杯 2023 省 A] 异或和之和

- 将 x 表示为二进制 $x_n x_{\{n-1\}} \cdots x_1 x_0$
- $x = x_0 \times 2^0 + x_1 \times 2^1 + \cdots + x_n \times 2^n$
- $x \oplus y = (x_0 \oplus y_0) \times 2^0 + (x_1 \oplus y_1) \times 2^1 + \cdots + (x_n \oplus y_n) \times 2^n$

- 异或是位独立的，我们可以把它按位拆分
- 研究第 p 位时，b_i 为 a_i 二进制第 p 位的值

P9236 [蓝桥杯 2023 省 A] 异或和之和

- 通过按位拆分，研究第 p 位，得到了只有 0,1 的数列
- 类比前缀和，记 $S_i = b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots b_i$，那么 $[l,r]$ 内的数的异或值则为 $S_r \oplus S_{l-1}$
- 如果这个区间 $[l,r]$ 对最终的答案有贡献，那么，$S_r \oplus S_{l-1} = 1$
- 即 S_r, S_{l-1} 这两个数不同
- 任意两个 0,1 都将构成一个这样的区间。
- 记 Z 为 $S[0 \cdots N]$ 中 0 的个数，O 为 $S[0 \cdots N]$ 中 1 的个数，贡献即为 $Z \times O \times 2^p$

考场策略概述

- 自我认知
- 竞赛目标
- 调整心态

自我认知

- 我的水平究竟怎么样?
- 是熟练掌握了很多算法，能力足以去挑战 J 组满分?
- 还是语法没有问题，对于基本的循环枚举、暴力搜索比较得心应手?
- 亦或，才开始学没多久，因为运气比较好/本省分数线比较低，成功混入第二轮?

- 明确自己的水平定位

竞赛目标

- 参加比赛的目标是什么？
- 冲击 AK？一等奖？刷经验？

- 比赛的目标与个人水平相符合

考场心态

- 无论竞赛目标，考场心态只应该是
- 尽力得分

试卷结构

- 以昨天的模拟赛为例

- Zip 包 – 加密
- 内含 pdf 试题（pdf 第二层加密）
- 四道题的附加样例文件

部分分

- 以 CSP-J 2023 为例

小苹果

- 满分做法
- 每天取走的都是编号模 3 余 1 的
- 可以计算出 n 的新编号
- 每天计算取走的苹果数目与 n 是否被取走
- 时间复杂度 $O(\log n)$

小苹果

对于所有测试数据有：$1 \leq n \leq 10^9$。

测试点	$n \leq$	特殊性质
$1 \sim 2$	10	无
$3 \sim 5$	10^3	无
$6 \sim 7$	10^6	有
$8 \sim 9$	10^6	无
10	10^9	无

特殊性质：小苞第一天就取走编号为 n 的苹果。

小苹果

- $n \leq 10$
- 某种神秘指数复杂度做法

小苹果

- $n \le 1000$
- 暴力模拟每一天取走的苹果
- $O(n^2)$

小苹果

- 特殊性质
- 告诉你第二问答案为 1
- 防止存在只会第一问不会第二问的考生

公路

- 满分做法
- 带反悔贪心
- 从左到右考虑，如果行驶到某个加油站，缺油的时候，从之前经过的最便宜的加油站加油

公路

对于所有测试数据保证：$1 \le n \le 10^5$，$1 \le d \le 10^5$，$1 \le v_i \le 10^5$，$1 \le a_i \le 10^5$。

测试点	$n \le$	特殊性质
$1 \sim 5$	8	无
$6 \sim 10$	10^3	无
$11 \sim 13$	10^5	A
$14 \sim 16$	10^5	B
$17 \sim 20$	10^5	无

- 特殊性质 A：站点 1 的油价最低。
- 特殊性质 B：对于所有 $1 \le i < n$，v_i 为 d 的倍数。

公路

- $n \le 8$
- 指数复杂度暴力
- 枚举在每一个加油站是否加油
- 计算每个加油站需要加多少油
- 时间复杂度 $O(n2^n)$

公路

- 特殊性质 A：站点 1 的油价最低
- 全部在站点 1 加
- 引导正解：从前面价格最低的加油站加油

公路

- 特殊性质 B：v_i 是 d 的倍数
- 代码实现细节点：一段油跨过不同加油站的处理方式
- 保证代码写挂的选手不会爆零

一元二次方程

- 满分思路
- 按照题意模拟

一元二次方程

- $M \leq 1$
- 符合该条件的方程个数非常少，可以穷举并特判

一元二次方程

- 特殊性质 A：保证 $b = 0$
- $\Delta = b^2 - 4ac = -4\mathrm{ac}$
- 只需要判断 a, c 的同号性

一元二次方程

- 特殊性质 B：保证 $c = 0$
- $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 \geq 0$
- 方程一定有解
- $\sqrt{\Delta} = b$
- 方程一定有实数解

一元二次方程

- 特殊性质 C：有解一定为整数
- 如果不会处理有理数/无理数
- 这个部分分依然可以拿

旅游巴士

对于所有测试数据有：$2 \le n \le 10^4$，$1 \le m \le 2 \times 10^4$，$1 \le k \le 100$，$1 \le u_i, v_i \le n$，$0 \le a_i \le 10^6$。

测试点编号	$n \le$	$m \le$	$k \le$	特殊性质
$1 \sim 2$	10	15	100	$a_i = 0$
$3 \sim 5$	10	15	100	无
$6 \sim 7$	10^4	2×10^4	1	$a_i = 0$
$8 \sim 10$	10^4	2×10^4	1	无
$11 \sim 13$	10^4	2×10^4	100	$a_i = 0$
$14 \sim 15$	10^4	2×10^4	100	$u_i \le v_i$
$16 \sim 20$	10^4	2×10^4	100	无

旅游巴士

- 测试点 $1 \sim 5$
- n, m 非常小，搜索

旅游巴士

- $a_i = 0$
- 单源最短路径模板

旅游巴士

- $k = 1$
- 每一时刻都有车出发
- 只需要知道最短到终点的时间

部分分总结

- 部分分是提高试题区分度的重要手段
- 类似数学的过程分
- 常见的部分分设置
- 高时间复杂度算法
- 特殊性质

- 高时间复杂度保证低水平选手也能拿一定的分数
- 特殊性质引导正解
- 打满部分分通常可以拿到一题 70% 的分数

部分分组合技巧

- 命名空间 namespace

对拍

- 算法竞赛检验程序正确性的方式
- 黑盒测试

- 数据生成器生成一些输入
- 标准程序得到输出
- 你的程序得到输出

- 比对输出

对拍

- 一种在考场上检验程序正确性的方式
- 编写数据生成器
- 没有标准程序
- 写一个暴力程序，确保他是对的

数据生成器

- 依赖于随机
- 随机数的生成：mt19937

```
mt19937 gen(time(0));
int rnd(int l, int r) {
    int p = gen(); p = abs(p);
    return p % (r - l + 1) + l;
}

```

要测试的程序

- 往往是一份刚编写好的，你觉得可能是正解的程序
- 样例都过了
- 但你不放心

“标准程序”

- 写一个有把握的暴力

- 什么？我这题只会暴力？
- 没有任何对拍的意义和可行性

对拍流程

- 启动对拍脚本
- 对拍脚本调用数据生成器
- 对拍脚本调用“标准程序”
- 对拍脚本调用要测试的程序
- 对拍脚本比对两份结果

以 A+B Problem 为例

- 数据范围：$1 \le a, b \le 200$
- 要测试的程序在 $a > 150$ 时会出现问题
- 但样例不存在这种情况
- 该程序已通过样例