第三周 作业讲评

基础-提高衔接计划

览遍千秋

2025-08-02

洛谷

www.luogu.com.cn

课前提示

- 上课的时候专心听讲解，**不要跟着老师抄代码**，下课后独立完成。
- 不使用 AI 做题，AI 会做不等于自己会。
- 不抄袭题解（含对照题解抄一遍），抄对不等于会做。
- 看完题解后，关闭题解独立练习。
- 练习中途遇到问题，应当分析题目及自己的思路，而非回忆题解或再次参考题解。

异或

复习：前缀和及其原理

- 一维前缀和
- $S[i] = S[i-1] + a[i]$
- $\sum_{i=l}^{r} a[i] = S[r] - S[l-1]$

异或

- 异或自反性
- $x \text{ xor } x = 0$

- $X[i] = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_i$
- $X[0] = 0$
- $X[r] \oplus X[l-1]$

我写前缀和!

我写前缀和!

- 问有多少子矩阵中关键点的数目超过 k
- 二维前缀和求子矩阵和

复习：二维前缀和

- 二维前缀和
- $S[i][j] = a[i][j] + S[i-1][j] + S[i][j-1] - S[i-1][j-1]$
- 左上角 (l_1, r_1)，右下角 (l_2, r_2)
- $S[l_2][r_2] - S[l_2][r_1 - 1] - S[l_1 - 1][r_2] + S[l_1 - 1][r_1 - 1]$

我写前缀和?

我写前缀和?

- 子矩阵由 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 可以确定
- 本质上确定了四条线
- $x = x_1$（上线）
- $x = x_2$（下线）
- $y = y_1$（左线）
- $y = y_2$（右线）

我写前缀和?

- 单调性
- 枚举 $x = x_1$ 和 $x = x_2$
- 假设，现在确定左线 $y = y_1$ 和右线 $y = y_2$
- 恰好构成一个符合要求的子矩阵
- 那么左线 $y = p(p \le y_1)$ 都符合条件

- 右移右线
- 左线亦右移
- 可以用双指针

区间

复习：差分

- $b[i] = a[i] - a[i-1]$
- 对 $b[i]$ 做前缀和得到原数组

- 明确原数组的实际含义

区间

- 区间 i 覆盖范围 $[l_i, r_i]$
- 原数组：$a[x]$ 表示 x 被覆盖的次数
- 转化为，对于 $x \in [l_i, r_i]$，$a[x]$ 增加 1

- 区间加
- $b[l_i] + 1$
- $b[r_i + 1] - 1$

P10233 dx 分计算

- https://www.luogu.com.cn/problem/P10233

P10233 dx 分计算

- 给字符串 s，$s[i]$ 表示第 i 次击打的结果
- 求第 $l \sim r$ 次击打的得分和

- 根据 $s[i]$ 可以得到第 i 次击打的得分 $a[i]$
- 前缀和 $S[i] = a[1] + a[2] + \cdots + a[i]$
- $S[r] - S[l-1]$

P10233 dx 分计算

- 多测清空问题

本题单个测试点内有多组测试数据，输入的第一行是一个正整数，表示数据组数 T。对每组测试数据：

第一行是一个字符串 s（$1 \le |s| \le 10^7$），表示一首歌各个音符的判定结果。保证 s 中只含字符 `P`，`p`，`G`，`g`，`m`。
第二行有一个整数 q（$1 \le q \le 10^4$），表示询问的数量。
接下来 q 行，每行两个整数 l, r（$1 \le l \le r \le |s|$），表示一组询问。

数据保证单个测试点内 s 的长度之和不超过 10^7，q 之和不超过 10^4。

- 保证 $\sum|s| \le 10^7$，$\sum q \le 10^4$
- 不保证 T
- memset 时间复杂度 $O(\text{size})$
- for 循环清空

P9325 Symmetric Mountains

- https://www.luogu.com.cn/problem/P9325

P9325 Symmetric Mountains

- 考虑朴素做法
- 枚举区间 $[L, R]$（两重循环）
- 再双指针计算不对称值（一重循环）
- 时间复杂度为 $O(n^3)$

P9325 Symmetric Mountains

- 利用计算出的信息进一步降低时间复杂度
- 假设我们已经计算出了 $[l, r]$ 的不对称值 v
- 如何得到 $[l-1, r+1]$ 的不对称值 w

- $w = v + \text{abs}(a[l-1] - a[r+1])$

- 枚举对称中心 i / $[i, i+1]$
- $[i, i]$ 和 $[i, i+1]$ 的不对称值很容易计算
- 向两侧拓展 根据区间长度更新答案

P3909 异或之积

- https://www.luogu.com.cn/problem/P3909

P3909 异或之积

$$6\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{k=j+1}^{N} A_i \cdot A_j \cdot A_k$$

$$= 6\sum_{i=1}^{N} A_i \sum_{j=i+1}^{N} A_j \sum_{k=j+1}^{N} A_k$$

- 用 $S[i]$ 表示 A 的前缀和

$$= 6\sum_{i=1}^{N} A_i \sum_{j=i+1}^{N} A_j(S[N]-S[j])$$

$$= 6\sum_{i=1}^{N} A_i\left(\sum_{j=i+1}^{N} A_j S[N] - \sum_{j=i+1}^{N} A_j S[j]\right)$$

P3909 异或之积

$$= 6\sum_{i=1}^{N} A_i\left(\sum_{j=i+1}^{N} A_j S[N] - \sum_{j=i+1}^{N} A_j S[j]\right)$$

$$= 6\sum_{i=1}^{N} A_i\left(S[N]\sum_{j=i+1}^{N} A_j - \sum_{j=i+1}^{N} A_j S[j]\right)$$

$$= 6\sum_{i=1}^{N} A_i\left(S[N](S[N] - S[i]) - \sum_{j=i+1}^{N} A_j S[j]\right)$$

- 用 $M[i]$ 表示 $A_i S[i]$ 的前缀和

$$= 6\sum_{i=1}^{N} A_i\big((S[N])^2 - S[N]S[i] - (M[N] - M[i])\big)$$

P3909 异或之积

- What's a better practice?

$$= 6\sum_{i}^{N} A_i \sum_{j=i+1}^{N} A_j \sum_{k=j+1}^{N} A_k$$

$$= 6\sum_{i}^{N} A_i \sum_{j=i+1}^{N} A_j(S[N] - S[j])$$

$$= 6\sum_{i}^{N} A_i(B[N] - B[i])$$

P2697 宝石串

- https://www.luogu.com.cn/problem/P2697

P2697 宝石串

- 给定字符串 S，求其中 GR 数量相同的最长子串
- 假设 G 为 1，R 为 -1
- 用 $w[i]$ 表示前 i 个字符中 GR 串的权值
- 如果 $S[l] \sim S[r]$ 中 GR 字符数量相等，$w[r] = w[l-1]$

- 对于每个 w，维护其出现的最小位置
- w 可能是负数，偏置

P1083 借教室

- https://www.luogu.com.cn/problem/P1083

P1083 借教室

- 考虑朴素做法
- 枚举每一个订单，暴力地在订单时间范围内，从库存中减去订单所需要的教室
- 时间复杂度 $O(nm)$

- 注意到区间减问题可以应用差分
- 但是每个订单都需要对差分数组做一次前缀和进行检查
- 时间复杂度仍然是 $O(nm)$
- 但如果只需要在某一个订单检查，时间复杂度即可下降

P1083 借教室

- 注意到单调性
- 存在 p_0，对于编号 $\le p_0$ 的订单都可以满足，$> p_0$ 的订单无法全部满足
- 二分答案

- check 过程中对 $\le mid$ 的订单做差分
- 最后一次前缀和
- 时间复杂度 $O(n \log m)$

P2671 求和

- https://www.luogu.com.cn/problem/P2671

P2671 求和

- 题设条件
- ① x, y, z 为整数且 $y - x = z - y$
- ② $col(x) = col(z)$
- (x, y, z) 对答案的贡献为 $(x + z)\big(num(x) + num(z)\big)$

- ① 移项即为 $2y = x + z$，y 是整数，则 $x + z$ 为偶数
- x, z 奇偶性相同
- 答案贡献项和 y 无关
- 答案的贡献全部来自于奇偶性相同、颜色相同的颜色对！

P2671 求和

- 按照颜色+奇偶性分 $2m$ 组
- $(x+z)\big(num(x)+num(z)\big)$
- $x\cdot num(x)+z\cdot num(z)+x\cdot num(z)+z\cdot num(x)$
- 认为 (x,z) 中 x 的贡献为 $x\cdot num(x)+x\cdot num(z)$

- 假设这一组一共 w 个数
- x 和其他数一共构成 $w-1$ 对
- 每一对中 $x\cdot num(x)$ 都计算一次，一共是 $(w-1)\cdot x\cdot num(x)$
- 假设这一组中 $num(\quad)$ 的和为 S
- $x\cdot num(z)$ 的总贡献为 $x\cdot\big(S-num(x)\big)$

P12597 穿睡衣军训

- https://www.luogu.com.cn/problem/P12597

P12597 穿睡衣军训

- 如何判断 a 是否是 b 的子序列

- two-pointer
- p_a 表示正在匹配 a 的第 p_a 个字符
- p_b 表示正在匹配 b 的第 p_b 个字符
- 由于子序列可以不连续
- 如果 $a[p_a] = b[p_b]$ 就一起右移
- 不然只右移 p_b
- 时间复杂度为 $O(|b|)$

P12597 穿睡衣军训

- 考虑朴素做法
- 枚举 s 中的每一个子串（先枚举长度再枚举起点；枚举起终点；很多种枚举方法，但实质都是枚举子串）
- 将枚举出的子串，到 t 中做子序列匹配

- 时间复杂度 $O\left(|s|^2|t|\right)$

P12597 穿睡衣军训

- 对于起点相同的两个子串，与 t 匹配的过程实质上是相同的
- 都需要 p_t 向后移动，区别是 p_s 允许移动的距离

- 对 p_s 不设限，直接对从 $s[i]$ 开始到 s 末尾的串做子序列匹配
- 得到能够匹配的最长长度
- 和当前的答案做比较
- 时间复杂度 $O(|s||t|)$