

第十二周作业讲评

一扶苏一
山东大学计算机科学与技术学院
上海洛谷网络科技有限公司

本周作业分布

前四题：改编自近期的 AtCoder/Codeforces 比赛中的套路试题

中四题：选自洛谷近期月赛的基础题，相对灵活

后四题：NOIP/CSP 的基础题，感受真题的难度以及部分分

题号	题目名称
T523703	【第十二周】卡牌问题 I
T523704	【第十二周】卡牌问题 II
T523705	【第十二周】卡牌问题 III
T523706	【第十二周】切树游戏
P10510	进制
P10607	物理实验 (hard)
P9688	Colo.
P10246	Exciting Days
P9868	[NOIP2023] 词典
P5682	[CSP-J2019 江西] 次大值
P2239	[NOIP2014 普及组] 螺旋矩阵
P1351	[NOIP2014 提高组] 联合权值

卡牌问题 I

题意

有一组卡牌，一共 n 张，它们的力量值分别为 a_1, a_2, \dots, a_n 。

你获得了一个机会（可以不使用）：选择一个连续的区间 $[l, r]$ ，使得 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r 的力量值乘以一个给定的整数 c 。

你希望你手上的卡牌的力量值之和最大。请输出这个最大值。

对于所有数据， $1 \leq n \leq 3 \times 10^5$ ， $|c|, |a_i| \leq 10^6$ 。

卡牌问题 I

思路

当 $c > 0$ 的时候，对 a_i 的最大子段和所对应的子段进行一次乘法。

当 $c \leq 0$ 的时候，对 a_i 的最小子段和所对应的子段进行一次乘法。

(思考一下： $c_i = 0$ 的情况为什么是这样做？)

最大/最小子段和：假设当前正在处理以 a_i 为结尾的最大/最小子段和，则有：

$$f_i = \max(f_{i-1}, 0) + a_i$$

$$g_i = \min(g_{i-1}, 0) + a_i$$

卡牌问题 II

题意

给定两个位数相等的正整数 x, y （各位上仅由 $1 \sim 9$ 构成）

可以进行任意多次（可以为 0 次）操作：交换 x 和 y 的第 i 个数位。

要求得到的新的正整数 x', y' 乘积最大。输出这个 x' 和 y' 。

对于所有数据， $1 \leq x, y \leq 10^{100}$ 。

卡牌问题 II

思路

对于两个数位进行交换，两个数的和是不变的。

使用“和一定，差小积大”的数学结论进行贪心，证明原理为：

假设两个正整数为 $a, b(a > b)$ ，则有：

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

即：当 $a + b$ 不变的时候， $a - b$ 越小， $4ab$ 越大， ab 也就越大。

卡牌问题 II

思路

从高位到低位依次遍历两个数的每一位：

- 遍历到第一个不同的数字时：决定两数的相对大小；
- 遍历到后续不同的数字时：要把所有大的数字换到较小数。

从而实现了让较大的数字尽可能变小，让较小的数字尽可能变大。

卡牌问题 III

题意

有一组卡牌，一共 n 张，它们的力量值分别为 a_1, a_2, \dots, a_n 。

你获得了 k 个机会（可以不使用）：选择一个连续的区间 $[l, r]$ ，在任意位置插入一张卡牌，这张卡牌拥有 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r 之和的力量值。

你希望你手上的卡牌的力量值之和最大。请输出这个最大值。

对于所有数据， $1 \leq n \leq 3 \times 10^5$ ， $|c|, |a_i| \leq 10^6$ 。

卡牌问题 III

思路

贪心地考虑找到最大子段和 $[l, r]$ ，将结果 s 插入原最大子段和区间，便形成了新的最大子段和。

假设原数组的和是 s' ，经过 k 次操作之后，数组的和为：

$$s \times (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1}) + s'$$

$$\text{化简得: } s \times (2^k - 1) + s'$$

2^k 可以使用快速幂计算，也可以预处理 2 的幂计算。

切树游戏

题意

你有一棵有 n 个结点的树。

你需要在树上删除 k 条边，形成一个森林，使得每个连通块中含有结点数的最小值最大。

你需要输出这个最大值。

对于所有数据， $1 \leq k < n \leq 3 \times 10^5$ 。

切树游戏

思路

最大值最小的提示可以联想到二分答案，且可以发现，若当前答案得到满足，更小的答案也能得到满足，符合可二分性。

使用贪心算法进行答案 x 的检验：遍历这棵树，若以某结点为根的子树的大小大于等于 x 则贪心地切除。

假设这样的切除将树分为了 c 块。则若 $c \geq k + 1$ ，则意味着在右侧区间继续二分，否则在左侧区间二分。

进制

题意

给定一个十进制数 V ，将其转化为从左到右书写的三进制数。

进行 q 次操作，每次操作为：

- 一：将第 i 位上的数进行操作：0 变为 1，1 变为 2，2 变为 0。
- 二：将第 i 位上的数进行操作：0 变为 2，1 变为 0，2 变为 1。
- 三：将第 i 位上的数进行操作：1 变为 2，2 变为 1，0 不变。

每次操作结束后输出三进制数的值。

对于所有数据，保证 $0 \leq V \leq 10^{18}$ ， $1 \leq q \leq 10^5$ ，任意获取到的答案不超过 2×10^{18} 。

进制

思路

本题考察进制转换。要求答案不超过 2×10^{18} ，可得数字串长度应不超过 39 ($\log_3(2 \times 10^{18}) = 38.35$)。

其余部分只需根据操作直接做模拟即可。

物理实验 (hard)

题意

有一个初始在数轴 0 点并向数轴正方向移动的小球。在数轴的 1 到 n 这 n 个点上设置了装置，当小球经过点 i 时，可以花费 a_i 的代价让其改变移动方向。

有 m 个需要满足的条件，第 i 个条件形如“小球需要从点 x_i 移动到点 y_i 至少 k_i 次”，其中 x_i 大于 y_i 。

请问完成所有条件的最小代价是多少。

对于所有数据， $1 \leq n, m \leq 2 \times 10^5$ ， $1 \leq a_i \leq 10^8$ ，
 $1 \leq y_i < x_i \leq n \leq 2 \times 10^5$ ， $1 \leq k_i \leq 10^8$ 。

物理实验 (hard)

思路

以 k 为关键字降序排序，找到边界改变方向的最小代价。小球应当进行两次反转，一次是在 y_i 的最小值之前找代价最低的，一次是 x_i 的最大值之后找代价最低的。

可以通过维护 a 数组的前后缀最小值， y_i 的最小值和 x_i 的最大值快速计算该代价。

Colo.

题意

有一个长度为 n , 宽度为 1 的网格图, 从左往右第 i 个方格被涂成了一种颜色 a_i 。每种颜色有价值。

要保留恰好 k 种颜色, 删掉其他颜色的网格, 使得在这些网格从左到右颜色的编号是单调不下降的情况下, 保证价值和最大。

对于所有数据, $1 \leq n \leq 500$, $1 \leq k \leq 500$, $1 \leq a_i \leq n$,
 $1 \leq b_i \leq 10^9$ 。

Colo.

思路

如果我们保留了大于等于 2 种颜色，设这两个颜色出现过的最左边的下标和最右边的下标分别为 x_1, y_1 和 x_2, y_2 ，则必然有 $y_1 < x_2$ 或者 $y_2 < x_1$ 。

因此需要记录一种颜色最左边和最右边出现的位置 l_i 和 r_i 。使用动态规划，设 $f(i, k)$ 表示当前选择到第 i 种颜色，保留 k 种颜色时的最大价值和，则有：

$$f(i, k) = \max_{l_i > r_j} \left(f(i, k), f(j, k - 1) + b_i \right)$$

Exciting Days

题意

一年有 n 个月，其中第 i 个月有 a_i 天。

定义 m 月 d 日的特征值为将 m, d 的十进制写出（不含前导 0）后，直接拼接的结果。

如果一个日期的特征值是 k 的自然数次幂，则称这个日期是广义程序员节。问整个历法下有多少个广义程序员节。

数据保证， $1 \leq T \leq 10^4$ ， $1 \leq n \leq 3 \times 10^5$ ， $1 \leq \sum n \leq 3 \times 10^5$ ， $1 \leq a_i, k \leq 10^9$ 。

Exciting Days

思路

枚举每一天过于复杂，且时间复杂度较高。而广义程序员节是很少的，因此考虑枚举广义程序员节。

接着枚举广义程序员节应当如何划分为月和日，难点在于拆位，可以使用字符串函数如 `stoll`, `to_string` 辅助解决。

[NOIP2023] 词典

题意

小 S 的词典里有 n 个两两不同的、长度均为 m 的单词 w_1, w_2, \dots, w_n 。每个单词都是一个小写字母构成的字符串。

小 S 可以做以下操作任意多次（可以不做）：选择词典中的任意一个单词，交换其中任意两个字符。

对于每个 $1 \leq i \leq n$ ，小 S 想知道，是否可以通过以上操作得到新的 n 个单词 w'_1, w'_2, \dots, w'_n ，使得对于每个 $j \neq i$ ， w'_i 的字典序比 w'_j 都要小。

对于所有测试数据，保证： $1 \leq n \leq 3000$ ， $1 \leq m \leq 3000$ ， w_i 为长度为 m 的小写字母字符串且两两不同。

[NOIP2023] 词典

思路

不限次数地交换任意两个字符，可知可以进行如下变换：

- 将当前字符串达到字典序最小的情况，其他字符串达到字典序最大的情况。

当前字符串字典序最小，必然是将最小的字符交换到开头；其他字符串将最大的字符交换到开头。

因此只需记录每个字符串最小和最大的字符是什么，使用二重循环 $O(n^2)$ 判断是否第 i 个字符串的最小字符都小于其他所有字符串的最大字符。

[CSP-J2019 江西] 次大值

题意

有 n 个正整数，数字从 $1 \sim n$ 编号，分别为 a_1, a_2, \dots, a_n 。

现在有所有的

$a_i \bmod a_j (1 \leq i, j \leq n \wedge i \neq j)$

的值，其中 \bmod 表示取模运算。

求所有的结果中，严格次大值是多少。相同的结果只保留一个。

数据保证， $3 \leq n \leq 2 \times 10^5$ ， $1 \leq a_i \leq 10^9$ 。

[CSP-J2019 江西] 次大值

思路

由于是严格次大值，相同的结果只保留一个，因此先对序列做排序和去重。假设得到的升序序列为 a_1, a_2, \dots, a_n 。

$a \bmod b$ 的值必然小于 b ，且小于等于 a 。

最大值必然为 $a_{n-1} \bmod a_n$ 。

次大值有两种情况：

- $a_{n-2} \bmod a_n$
- $a_n \bmod a_{n-1}$

比较这两者即可。

[NOIP2014 普及组] 螺旋矩阵

题意

一个 n 行 n 列的螺旋矩阵可由如下方法生成：

从矩阵的左上角（第 1 行第 1 列）出发，初始时向右移动；如果前方是未曾经过的格子，则继续前进，否则右转；重复上述操作直至经过矩阵中所有格子。根据经过顺序，在格子中依次填入 $1, 2, 3, \dots, n^2$ ，便构成了一个螺旋矩阵。

现给出矩阵大小 n 以及 i 和 j ，请求出该矩阵中第 i 行第 j 列的数是多少。

数据保证， $1 \leq n \leq 30000$ ， $1 \leq i \leq n$ ， $1 \leq j \leq n$ 。

[NOIP2014 普及组] 螺旋矩阵

思路

若根据题目含义模拟填数的过程会超时。但是如果我们把螺旋矩阵分为若干层，我们只需要知道这一层最左上角是什么元素即可。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

第 i 层有 $4(n - 2i + 1)$ 个元素。所以只需确定 (i, j) 在第几层，即可暴力模拟得到数字或者使用数学公式计算该层。

[NOIP2014 提高组] 联合权值

题意

无向连通图 G 有 n 个点， $n - 1$ 条边。点从 1 到 n 依次编号，编号为 i 的点的权值为 W_i ，每条边的长度均为 1。图上两点 (u, v) 的距离定义为 u 点到 v 点的最短距离。对于图 G 上的点对 (u, v) ，若它们的距离为 2，则它们之间会产生 $W_v \times W_u$ 的联合权值。

请问图 G 上所有可产生联合权值的有序点对中，联合权值最大的是多少？所有联合权值之和是多少？

数据保证， $1 < n \leq 2 \times 10^5$ ， $0 < W_i \leq 10000$ 。

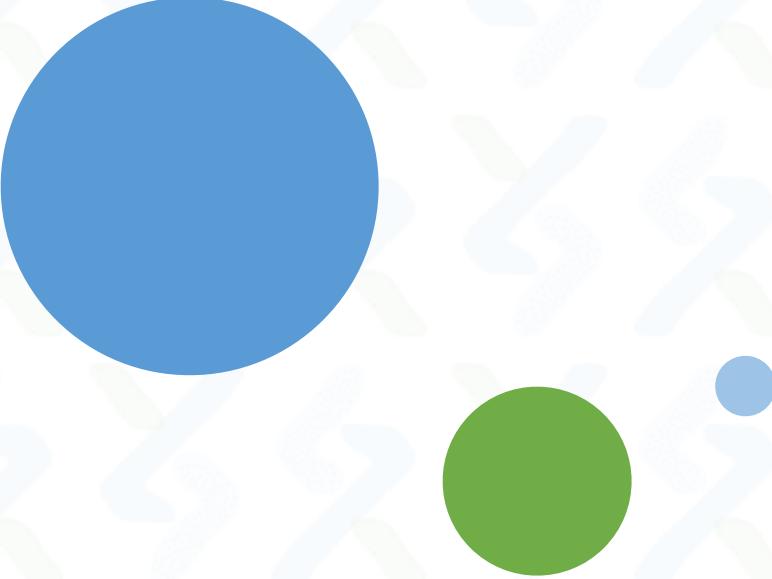
[NOIP2014 提高组] 联合权值

思路

枚举点对 (u, v) 的时间复杂度为 $O(n^2)$, 无法接受。考虑优化枚举，枚举点对的中点。

这样问题一是简单的：对于每个中点 t , 找到它相邻结点中，权值最大和第二大的结点，以获取问题 1 的答案。

对于问题 2, 可以使用乘法结合律，记录 sum 为已经扫过的相邻结点的权值和，每次遇到新的结点 s , 直接让 s 的权值 W_s 乘上 sum 作为结点权值的贡献。结果需要乘上 2 (因为 (a, b) 和 (b, a) 算作两个点对)



End.

