马尔可夫链

以下讨论状态与时间都离散的马尔可夫链。

马尔可夫性
下一个状态仅仅与现在状态有关。

$$P(X_{t+1}=a_{t+1}|X_t=a_t)=P(X_{t+1}=a_{t+1}|X_t=a_t,X_{t-1}=a_{t-1},\ldots,X_1=a_1)$$

齐次的马尔可夫链

$$P(X_{t+1}=a|X_t=b)=P(X_2=a|X_1=b)$$

用白话说，如果转移矩阵始终不变，则称此转移矩阵具有平稳性。同时称此链是齐次的（时齐的、时不变的）马尔可夫链（time-homogeneous Markov chain）或平稳的马尔可夫链（stationary Markov chain）。

马尔可夫链的平稳分布
任意时刻每个状态的概率可以构成一个分布（分布律），记为π。初始分布可记为π_0。若该分布在任意次转移后仍不变，即$\pi=\pi P$，则称其为平稳分布。我们可以看出，如果一个齐次的马尔可夫链某一时刻的状态分布服从平稳分布，那么之后都会服从这个分布。

平稳随机过程
平稳过程是一种重要的随机过程，其主要的统计特性不会随时间推移而改变。具体来说，如果随机变量序列的任意有限子集的联合分布不随时间变化，即对于每个n和t,均满足：

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n)=P(X_{1+t}=x_1,X_{2+t}=x_2,\ldots,X_{n+t}=x_n)$$

则称此随机过程是平稳的。也就是说，随机过程中出现某一序列的概率是和时间无关的。

服从平稳分布的齐次马尔可夫链是平稳随机过程
我们用一个简单的例子说明：
首先，因为该链服从平稳分布，则依据该分布，任一时刻取到状态x_1的概率相同：

$$P(X_1=x_1)=P(X_{1+t}=x_1) \tag{1}$$

又因为该链是齐次的，有：

$$P(X_2=x_2|X_1=x_1)=P(X_{2+t}=x_2|X_{1+t}=x_1) \tag{2}$$

由(1)和(2)可得：

$$P(X_1=x_1)P(X_2=x_2|X_1=x_1)=P(X_{1+t}=x_1)P(X_{2+t}=x_2|X_{1+t}=x_1)$$

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2)=P(X_{1+t}=x_1,X_{2+t}=x_2) \tag{3}$$

证明了长度为2的序列是平稳过程，推广到更长序列：
再次利用齐次性质：

$$P(X_3=x_3|X_2=x_2)=P(X_{3+t}=x_3|X_{2+t}=x_2) \tag{4}$$

由马尔可夫性：

$$P(X_3=x_3|X_2=x_2)=P(X_3=x_3|X_1=x_1,X_2=x_2) \tag{5}$$

$$P(X_{3+t}=x_3|X_{2+t}=x_2)=P(X_{3+t}=x_3|X_{1+t}=x_1,X_{2+t}=x_2) \tag{6}$$

由$(3),(4),(5),(6)$可得：

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,X_3=x_3)=P(X_{1+t}=x_1,X_{2+t}=x_2,X_{3+t}=x_3)$$

证明了长度为3的序列是平稳过程，同理可以推广到更长的序列。
综上，服从平稳分布的齐次马尔可夫链是平稳随机过程。

极限分布
若能找到一正整数m,使m步转移概率矩阵P^m无零元，则该链存在一极限分布，当时间趋于无穷时，状态分布总会收敛到该分布。极限分布也是马尔可夫链的平稳分布。因此，对于一个存在平稳分布的齐次的（平稳的）马尔可夫链，初始分布若不是平稳分布，则此时此随机过程不是平稳随机过程；当时间趋于无穷时，该链必将收敛于平稳分布，此时是平稳随机过程。

In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [5]:
```
# 设 P 为马尔可夫链的转移矩阵
P = np.array(
    [
        [0.3, 0.7],
        [0.8, 0.2]
    ]
)
# 设 pi_0 为任意初始分布
pi_0 = np.array([0.4, 0.6])

# 第一步后转移分布为 pi_1
pi_1 = pi_0 @ P
pi_1
```

Out[5]:
```
array([0.6, 0.4])
```

对于一个两状态的马尔可夫链，其概率矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

设向量$\mu = (\mu_1, \mu_2), (\mu_1 + \mu_2 = 1)$表示其平稳分布，则通过解矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix} = 0$$

可得：

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \mu_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

本题中，$\alpha = 0.7$,$\beta = 0.8$。因此求得，$\mu_1 = \frac{8}{15} \approx 0.5333$,$\mu_2 = \frac{7}{15} \approx 0.4666$。

In [8]:
```
# 函数 transit(pi_i, P, n) 求马尔可夫链从分布 pi_i 转移 n 步后的分布
def transit(pi_i, P, n):
    for i in range(n):
        pi_i = pi_i @ P
    return pi_i

transit(pi_0, P, 1)
```

Out[8]:
```
array([0.6, 0.4])
```

In [15]:
```
print("pi_0:" + str(pi_0))

# 输出 1-30 次转移
pi_i = pi_0
for i in range(30):
    pi_i = transit(pi_i, P, 1)
    print("pi_" + str(i+1) + ":" + str(pi_i))
```

```
pi_0:[0.4 0.6]
pi_1:[0.6 0.4]
pi_2:[0.5 0.5]
pi_3:[0.55 0.45]
pi_4:[0.525 0.475]
pi_5:[0.5375 0.4625]
pi_6:[0.53125 0.46875]
pi_7:[0.534375 0.465625]
pi_8:[0.5328125 0.4671875]
pi_9:[0.53359375 0.46640625]
pi_10:[0.53320312 0.46679688]
pi_11:[0.53339844 0.46660156]
pi_12:[0.53330078 0.46669922]
pi_13:[0.53334961 0.46665039]
pi_14:[0.5333252 0.4666748]
pi_15:[0.5333374 0.4666626]
pi_16:[0.5333313 0.4666687]
pi_17:[0.53333435 0.46666565]
pi_18:[0.53333282 0.46666718]
pi_19:[0.53333359 0.46666641]
pi_20:[0.53333321 0.46666679]
pi_21:[0.5333334 0.4666666]
pi_22:[0.5333333 0.4666667]
pi_23:[0.53333335 0.46666665]
pi_24:[0.53333333 0.46666667]
pi_25:[0.53333334 0.46666666]
pi_26:[0.53333333 0.46666667]
pi_27:[0.53333333 0.46666667]
pi_28:[0.53333333 0.46666667]
pi_29:[0.53333333 0.46666667]
pi_30:[0.53333333 0.46666667]
```

In [ ]: