School of Data and Computer Science, Sun Yat-sen University

数值计算方法

四次样条插值

17341190 叶盛源

2019 年 5 月 29 日

Contents

1 定义分段四次样条

Definition 1 假设$\{(x_k,y_k)\}_{k=0}^{N}$是*N+1*个点。函数$S(x)$被称为四次样条函数，当存在N个四次多项式$S_k(x)$具有系数$s_{k,0},s_{k,1},s_{k,2},s_{k,3},and,s_{k,4}$,并且满足以下的六条性质:

(1) $S_k(x)=s_{k,0}+s_{k,1}(x-x_k)+s_{k,2}(x-x_k)^2+s_{k,3}(x-x_k)^3+s_{k,4}(x-x_k)^4$ 对所有$x\in[x_k,x_{k+1}]$和$k=0,1,...,N-1$成立

(2) $S(x_k)=y_k$ 对所有 $k=0,1,...,N$成立

(3) $S_k(x_{k+1})=S_{k+1}(x_{k+1})$ 对所有 $k=0,1,...,N-2$成立

(4) $S'_k(x_{k+1})=S'_{k+1}(x_{k+1})$ 对所有 $k=0,1,...,N-2$成立

(5) $S''_k(x_{k+1})=S''_{k+1}(x_{k+1})$ 对所有 $k=0,1,...,N-2$成立

(6) $S'''_k(x_{k+1})=S'''_{k+1}(x_{k+1})$ 对所有 $k=0,1,...,N-2$成立

要想确定$S_K(x)$就必须求解出它的四个参数，于是我们可以利用上述的性质列出方程组。和三次样条相同，我们会发现方程数量为$5n-3$而未知数的数量有$5n$个，于是我们需要增加一些端点的限制条件来求解出一个确定的解，这个会在后文详述。

2 化简方程组

仿照书本三次样条的化简方法，我们可以定义$m_i=S'''x_i$。为了简便我们假设所有点间距是相同的，于是有$h=x_{i+1}-x_i\quad$ 对$i=0,1,2...n-1$成立。于是由拉格朗日插值多项式可以得到:

$$S'''_i(x)=\frac{m_{i+1}}{h}(x-x_i)+\frac{m_i}{h}(x_{i+1}-x) \tag{1}$$

然后我们对上面的式子做积分，仿照三次样条的格式，我们引入三个变量，积分结果可以被写为:

$$\begin{aligned}S_i(x)=&\frac{m_{i+1}}{24h}(x-x_i)^4+\frac{m_i}{24h}(x_{i+1}-x)^4\\&+p_i(x-x_i)(x_{i+1}-x)+q_i(x-x_i)+r_i(x_{i+1}-x)\end{aligned} \tag{2}$$

我们分别代入$x=x_i$和$x=x_{i+1}$进入上面式子，就可以解出q_i和r_i的值:

$$\begin{aligned}q_i&=-\frac{m_{i+1}}{24}h^2+\frac{y_{i+1}}{h}\quad i=0,1,2...n-1\\r_i&=\frac{m_i}{24}h^2+\frac{y_i}{h}\quad i=0,1,2...n-1\end{aligned} \tag{3}$$

课本上的三次样条只有两个系数，到这里就已经全部解完了，而四次样条到这里还有一个系数没有被求解出来。接着对(2)式求一阶导数，我们可以得到:

$$S_i'(x) = \frac{m_{i+1}}{6h}(x-x_i)^3 + \frac{m_i}{6h}(x_{i+1}-x)^3 + p_i(x_{i+1}+x_i-2x) + q_i + r_i \tag{4}$$

仿照书本的定义方法，我们定义 $d_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h}$ $(i = 0, 1, 2...n-1)$ 来帮助化简表达式，利用定义中的第四个性质$S_{i-1}'(x_i) = S_i'(x_i)$和上面求解出来的$q_k$和$r_k$我们可以化简出一条表达式:

$$\frac{h^2}{24}m_{i-1} - \frac{h^2}{24}m_{i+1} + p_i h + p_{i-1}h = d_{i-1} - di \tag{5}$$

但这个时候我们仍然无法直接求解出p_i具体的值是多少，也没办法构造求解的方程组，所以我们继续对式子(4)求导，得到:

$$S_i''(x) = \frac{m_{i+1}}{2h}(x-x_i)^2 - \frac{m_i}{2h}(x_{i+1}-x)^2 - 2p_i \tag{6}$$

和上面一样，我们利用定义中的性质(5)消去未知量$S_i''(x)$，得到方程:

$$p_{i-1} = p_i + \frac{h}{2}m_i \tag{7}$$

联想到老师之前有一节课提示过的三次样条的规律，我想到(5)中只有3个未知量，应该还需要再引入一个。于是将(5)式下标i加1错开后再和原式做差，这样也刚好会出现$p_i - p_{i-1}$这样的关系，就正好可以利用(7)式来消去所有p的值并构建一个方程，经过化简可以得到:

$$m_{i-1} + 11m_i + 11m_{i+1} + m_{i+2} = \frac{24}{h^2}(d_{i-1} - 2d_i + d_{i+1}) \tag{8}$$

我们进一步把d_i展开，这样就可以得到和课堂上PPT中的式子类似的公式，并可以用它得到一个矩阵来求解一个线性的方程组。展开d_i得到:

$$m_{i-1} + 11m_i + 11m_{i+1} + m_{i+2} = \frac{24}{h^3}(-y_{i-1} + 3y_i - 3y_{i+1} + y_{i+2}) \tag{9}$$

于是有了这个式子我们就可以把它写成一个矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 11 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 11 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 11 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 11 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 11 & 11 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{24}{h^3} \begin{bmatrix} -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3 \\ -y_1 + 3y_2 - 3y_3 + y_4 \\ -y_2 + 3y_3 - 3y_4 + y_5 \\ \vdots \\ -y_{n-3} + 3y_{n-2} - 3y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

可以看到我们需要解出$n+1$个未知数，但我们只有$n-2$个方程，这是欠定的情况，所以我们需要增加一些端点的限制来构造一个有唯一解的方程组进行求解。

3 构造四次样条函数

因为四次样条需要再增加三个条件才能解出上面的线性方程组，我在这里尝试了两种端点限制的方式。

3.1 Natural Splines

模仿三次样条中的自然类型构建了关系式$m_0 = m_n = 0$,还有一个条件就是令$S_0''(x_0) = 0$或者$S_{n-1}''(x_n) = 0$。根据上面的(6)式，我们把这个条件带入后可以解出:

$$\frac{m_0 h}{4} = p_0 \tag{11}$$

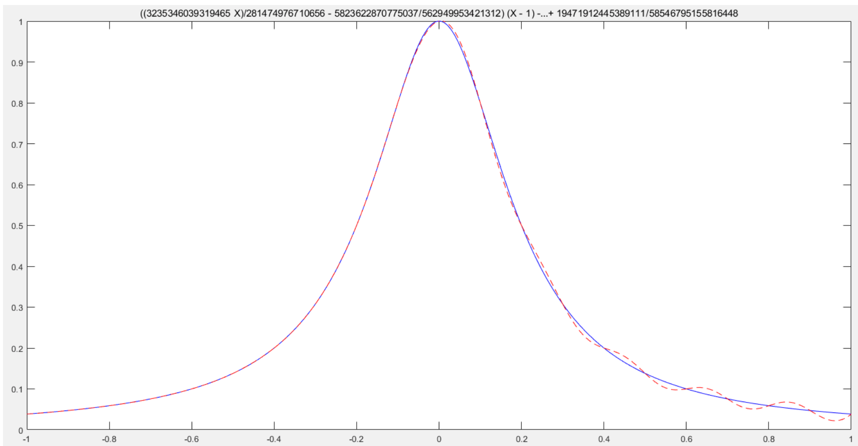
然后我们根据(5)和(7)式化简可以求出p_k和m_k的关系式:

$$\frac{h^2}{3} m_{i-1} + 4h^2 m_i - \frac{h^2}{3} m_{i+1} + 16hp_i = 8(d_{i-1} - di) \tag{12}$$

将(11)式代入(7)式中求得m_1的值，再在(12)式中将i取1并把m_1的值带入化简，这样可以得到一条新的方程:

$$13m_0 - 12m_1 - m_2 = \frac{24}{h^3}(-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3) \tag{13}$$

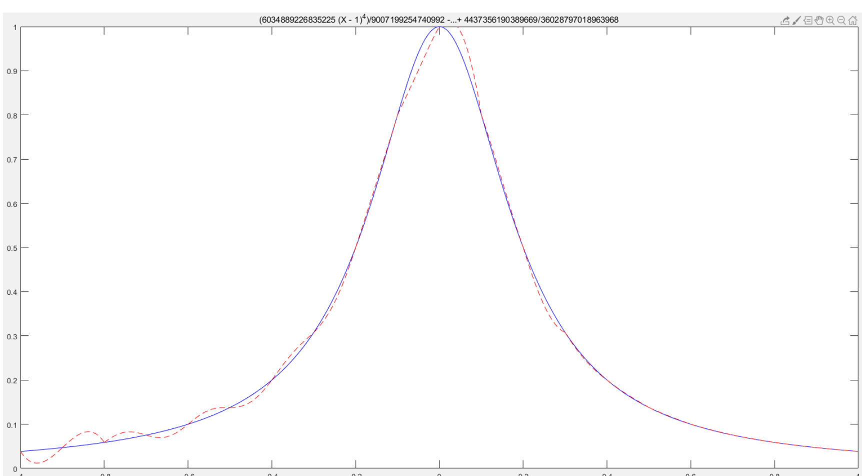
这个方程再加上$m_0 = m_n = 0$一共三个条件，我们就可以解决上面那个方程组。我这里用了龙格函数$1/(1+25x^2)$来进行拟合，从-1开始到1结束每隔0.1取一个样本点。结果如下图：



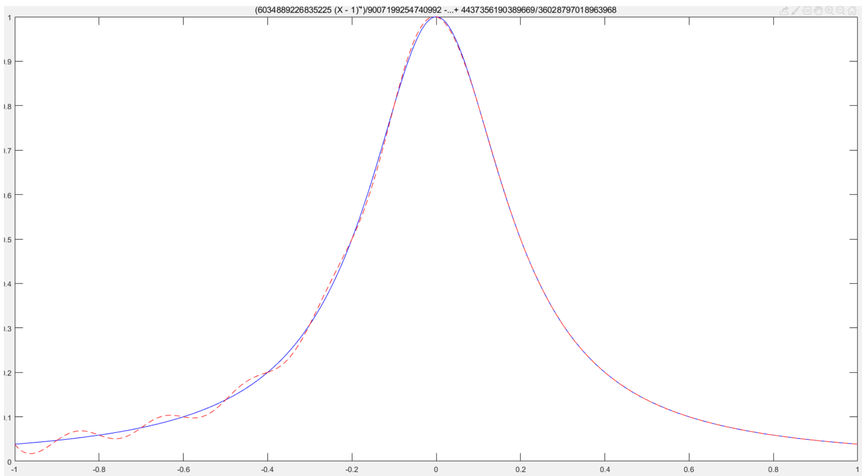
3.2 Parabolic Runout

同样的，模仿三次样条的Parabolic Runout构建关系式。我选择了用$m_0 = m_1$ & $m_n = m_{n-1} = m_{n-2}$或者$m_0 = m_1 = m_2$ & $m_n = m_{n-1}$来构建关系式。这个构建就不需要再进行别的运算，直接像三次样条那样合并矩阵的列即可，同样用龙格函数检验。

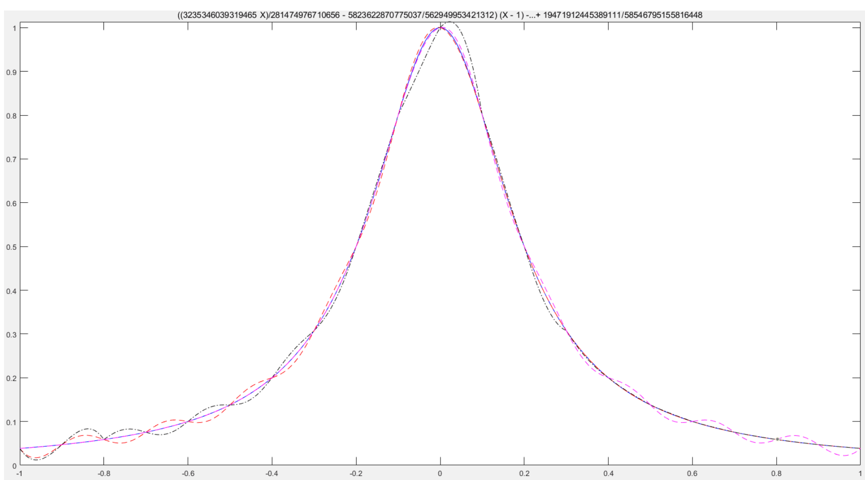
$m_0 = m_1$ & $m_n = m_{n-1} = m_{n-2}$结果如下图：



换一种方法$m_0 = m_1 = m_2 \ \& \ m_n = m_{n-1}$结果如下图：

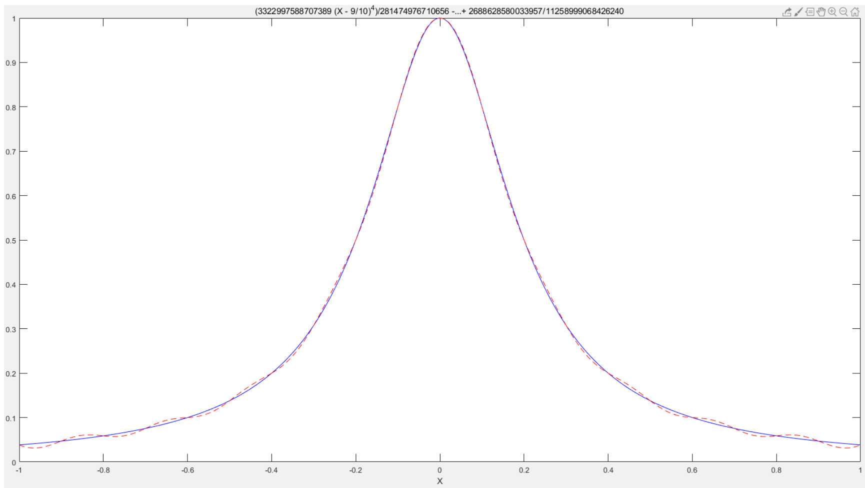


最后三幅图合在一起看：



3.3 伪逆法

在老师的提醒下，我还尝试了使用伪逆法来求解(10)式中的目标线性方程，结果如下图：



4 matlab代码示例

```
% x=[-1  -0.8   -0.6   -0.4  -0.2  0  0.2  0.4   0.6   0.8   1];
% y=[0.0385  0.0588   0.1   0.2  0.5   1   0.5  0.2   0.1
%       0.0588  0.0385];
x=[-1:0.1:1]
y=1./(1+25.*x.*x)

h=0.1;% 固定的间隔
N=size(x); % 取的点的数量
q=[1,11,11,1];% 四次样条的系数
A=[];
for i=1:length(x)-3
    A=[A;zeros([1,i-1]),q,zeros([1,length(x)-i-3])];
end
B=[];
for i=1:length(x)-3
    B=[B;3*y(i+1)-y(i)-3*y(i+2)+y(i+3)];
end

% 加入端点限制M0=M1   mn=mn-1=mn-2
tem1 = sum(A(:,[1,2]),2);
tem2 = sum(A(:,[end,end-1,end-2]),2);
```

```
A_1=[tem1 A(:,3:end-3) tem2];
B_1=B;
M=A_1\(24/h/h/h*B_1);
M1=[M(1,1);M;M(end,end);M(end,end)]

% 加入端点限制M0=M1=M2  mn=mn-1
tem1 = sum(A(:,[1,2,3]),2);
tem2 = sum(A(:,[end,end-1]),2);
A_3=[tem1 A(:,4:end-2) tem2];
B_3=B;
M=A_1\(24/h/h/h*B_3);
M2=[M(1,1);M(1,1);M;M(end,end)]加入端点限制

%M0=MN=0 的二阶导数为x00
A_2=[[13,-12,-1],zeros([1,length(x)-3]);A]
A_2=[A_2(:,2:end-1)]
B_2=[3*y(2)-y(1)-3*y(3)+y(4);B]
M=A_2\(24/h/h/h*B_2);
M3=[0;M;0];伪逆法

%:
M4=pinv(A)*(24/h/h/h*B)绘制原图

%
syms Q
T=1/(1+25*Q*Q);
H=ezplot(T,[x(1),x(end)]);
set(H,'color','b');
hold on绘图



%
M=M3
%M=M2
%M=M1
%M=M4
for i=1:length(x)-1
    if i==1
```

```
        Ci=(8*(-y(1)+2*y(2)-y(3))/h...
        -4*h*h*M(2)+h*h/3*M(3)-h*h/3*M(1))/(16*h)+h/2*M(2);
    else
        Ci=(8*(-y(i-1)+2*y(i)-y(i+1))/h...
        -4*h*h*M(i)+h*h/3*M(i+1)-h*h/3*M(i-1))/(16*h);
    end
    Di=-(M(i+1)/24)*h*h+y(i+1)/h;
    Ei=M(i)/24*h*h+y(i)/h;
    Si=(M(i+1)/(24*h))*((X-x(i))^4)...
    -(M(i)/(24*h))*((x(i+1)-X)^4)+Ci*(X-x(i))*(x(i+1)-X)
    ...+Di*(X-x(i))+Ei*(x(i+1)-X);
    H=ezplot(Si,[x(i),x(i+1)]);
    set(H,'color','m','LineStyle','--');
    xlim([-1,1])
    ylim([0,1])
    hold on
end
```