# Rozwiązywanie Układów Równań Liniowych

Równanie liniowe zawiera jedynie dwie kategorie składników:

**Stałe** - liczby niezmienne, które mogą występować samodzielnie w równaniu.

**Zmienne przemnożone przez stałe** - wyrażenia, w których zmienne występują pomnożone przez stałe współczynniki.

**Układy równań liniowych**

Równanie liniowe zawiera jedynie składniki, które są albo wielokrotnościami zmiennych, albo stałymi.

Można je zapisać w postaci:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots = b$$

$a_i$ - są stałymi;

$x_i$ - są zmiennymi;

**Przykład równania liniowego:**

$$2 \cdot x + 5 - y = 0$$

Aby rozwiązać równanie, należy wyznaczyć jedną ze zmiennych (np. y) w zależności od pozostałych.

Przekształcamy je do postaci, w której wyrażamy y:

$$y = 2 \cdot x + 5$$

Jest to rozwiązanie równania dla zmiennej y jako funkcji x.

Rozwiązanie można wyznaczyć dla jednej wartości x, lub zbioru wartości x.

Można również interpretować jako równanie prostej na płaszczyźnie, gdzie współczynnik kierunkowy wynosi 2, a wyraz wolny wynosi 5.

**Rozwiązanie układu równań liniowych**

Aby rozwiązać **układ** równań **liniowych** w MATLAB, należy najpierw przekształcić go do postaci macierzowej.

Zapisujemy układ w postaci równań:

$$Ax = b$$

gdzie:

**A** to macierz współczynników,

**x** to wektor niewiadomych,

**b** to wektor wartości po prawej stronie równań.

W MATLAB-ie operator \ pozwala rozwiązać równanie macierzowe Ax = b dla wektora niewiadomych **x**.

**Przykład 1.**

Rozwiązywanie układów równań liniowych.

Podstawową metodą jest przedstawienie układu jako macierzy, gdzie poszczególne kolumny odpowiadają wartością przy tych samych zmiennych w każdym równaniu.

Przykładowo, układ równań:

3a +2b - c = 1

2a - 2b + 4c = -1

a + c = 0,5

zapiszemy w postaci macierzy w poniższy sposób:

```
A = [3 2 -1;2 -2 4;1 0 1];
```

Następnie należy utworzyć wektor zawierający wartości stałych z powyższych równań

```
b = [1;-1;0.5];
```

Przyjmując wektor X = [a;b;c], wiemy, że:

X = A^-1 * B

zatem możemy uzyskać wektor rozwiązań w poniższy sposób:

```
X = inv(A) * b
```

```
X = 3×1
   -0.7500
    2.2500
    1.2500
```

Alternatywnie, ten sam efekt możemy uzyskać za pomocą znaku "\"

```
X2 = A\b
```

```
X2 = 3×1
   -0.7500
    2.2500
    1.2500
```

**Przykład 2**

Należy rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_3 - 6 &= 2x_2 \\ x_3 &= x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Definiowanie macierzy współczynników i wektora stałych**

Najpierw zdefiniuj macierz współczynników **A** oraz wektor **b** w MATLAB:

```
A = [1 0 7; 3 -2 5; 0 -1 1];
b = [2; 6; 0];
```

**A** to macierz współczynników równania.

**b** to wektor wartości po prawej stronie równań.

**Rozwiązywanie układu równań**

Aby obliczyć wartość wektora **x**, wystarczy użyć operatora `\`:

```
x = A\b
```

```
x = 3×1
     2
     0
     0
```

Należy zwrócić uwagę, czy macierz **A** jest kwadratowa dla układów z dokładnym rozwiązaniem.

W przypadku problemów z zbieżnościami wyników, należy zwrócić uwagę, czy układ równań jest układem przeciążonym lub niedookreślonym.

Iterpretacja fizyczna lub matematyczna wyników – nalęzy sprawdzić czy są zgodne z oczekiwaniami i teorią układów równań.

**Przykład 3 (SYMS)**

Zdefiniujmy przykładowy układ równań liniowych:

```
syms x y z
eqn1 = y + z == -1;
eqn2 = y - 2*z == 2;
eqn3 = -x + 3*z == 1;
```

Wyświetl równania

```
disp("Układ równań liniowych:")
```

```
Układ równań liniowych:
```

```
disp([eqn1; eqn2; eqn3])
```

$$\begin{pmatrix} y + z = -1 \\ y - 2\,z = 2 \\ 3\,z - x = 1 \end{pmatrix}$$

Przedstawienie macierzowe układów liniowych

```
% Aby przedstawić układ w postaci macierzowej, zdefiniuj macierz współczynników
```

```
% `A` oraz wektor stałych `b`. W tej postaci:
%     A * x = b
% gdzie `x` jest wektorem kolumnowym zmiennych, `b` to wektor stałych, a `A`
% to macierz współczynników.
```

Definicja macierzy współczynników A i wektora b

```
A = [-1 0 3; 0 1 1; 0 1 -2];
b = [1; -1; 2];
```

Wyświetlenie postaci macierzowej

```
disp("Postać macierzowa:")
```

```
Postać macierzowa:
```

```
disp("A = ")
```

```
A =
```

```
disp(A)
```

```
    -1     0     3
     0     1     1
     0     1    -2
```

```
disp("b = ")
```

```
b =
```

```
disp(b)
```

```
     1
    -1
     2
```

Rozwiązywanie układu za pomocą redukcji wierszy

```
% MATLAB udostępnia funkcje do bezpośredniego rozwiązywania układów równań.
% Możemy użyć funkcji `linsolve` lub dzielenia macierzy, aby rozwiązać równanie
% Ax = b.
```

Rozwiązywanie za pomocą operatora lewostronnego dzielenia (backslash)

```
x_sol = A\b;
```

Wyświetlenie rozwiązania

```
disp("Rozwiązanie (x, y, z) = ")
```

```
Rozwiązanie (x, y, z) =
```

```
disp(x_sol)
```

```
    -4
     0
    -1
```

Metoda macierzy odwrotnej

```
% Dla układów, gdzie `A` jest odwracalna, możemy także użyć macierzy odwrotnej
% do rozwiązania równania:
%     x = A^(-1) * b
```

Obliczmy rozwiązanie przy użyciu macierzy odwrotnej.

```
A_inv = inv(A);  % Oblicz odwrotność macierzy A
x_sol_inverse = A_inv * b;
```

Wyświetlenie rozwiązania

```
disp("Rozwiązanie przy użyciu odwrotności (x, y, z) = ")
```

```
Rozwiązanie przy użyciu odwrotności (x, y, z) =
```

```
disp(x_sol_inverse)
```

```
   -4.0000
   -0.0000
   -1.0000
```

Wyznacznik i odwracalność macierzy.

Wyznacznik macierzy pozwala określić, czy układ posiada jednoznaczne rozwiązanie. Macierz jest odwracalna, jeśli jej wyznacznik jest różny od zera.

```
detA = det(A);  % Oblicz wyznacznik macierzy A
disp("Wyznacznik macierzy A:")
```

```
Wyznacznik macierzy A:
```

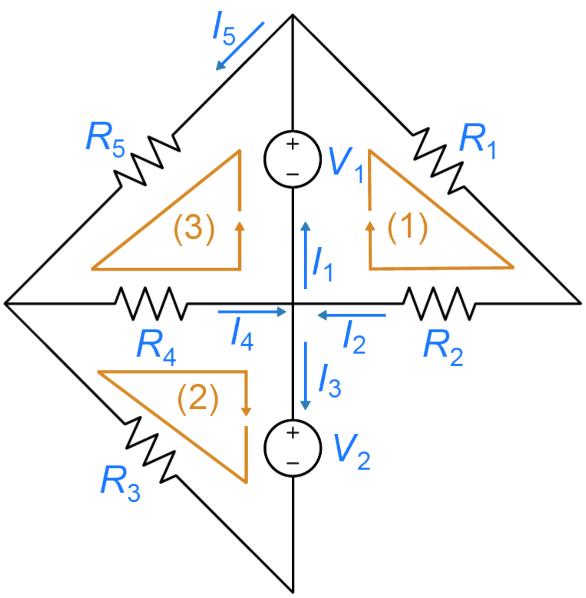
```
disp(detA)
```

```
     3
```

```
% Sprawdź, czy układ ma jednoznaczne rozwiązanie
if detA ~= 0
    disp("Układ ma jednoznaczne rozwiązanie.")
else
    disp("Układ nie ma jednoznacznego rozwiązania.")
end
```

```
Układ ma jednoznaczne rozwiązanie.
```

## Przykład wykorzystania układu równań liniowych




Rysunek 1. Przykładowy schemat obwodu elektrycznego

Na Rysunku 1 są trzy zamknięte pętle obwodu oznaczone (1), (2) i (3).

Poszczególne prądy w obwodzie są oznaczone I1, I2, I3, I4.

Zastosowanie prawa Kirchhoffa prądu do węzła centralnego daje:

$$I_2 + I_4 = I_1 + I_3$$

Zastosowanie drugiego prawa Kirchhoffa (napięciowego) do trzech pętli powoduje dodanie trzech dodatkowych równań:

$$\begin{aligned} V_1 - I_2R_1 - I_2R_2 &= 0 \\ -V_2 - I_3R_3 - I_4R_4 &= 0 \\ V_1 - I_5R_5 - I_4R_4 &= 0 \end{aligned}$$

Jest pięć nieznanych prądów, ale tylko cztery równania. Aby dokończyć reprezentację, wymagane jest kolejne zastosowanie prawa prądów Kirchhoffa. Dla górnego węzła:

$I_1 = I_2 + I_5$

Należy pamiętać, że istnieją dodatkowe pętle i węzły, do których można zastosować prawo Kirchhoffa – jednak wszystkie one spowodują wystąpienie powtarzających się warunków.

Na podstawie Prawa Kirchhoffa definiujemy układ równań liniowych, gdzie każdy węzeł i gałąź są reprezentowane przez równanie, a rezystancje i napięcia stanowią współczynniki w macierzy.

**Wyprowadzenie postaci macierzowej równań**

Aby zapisać te równania w postaci macierzowej $\mathbf{AI} = \mathbf{b}$, należy zdefiniować wektor rozwiązania:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}$$

Przeniesienie wszystkich zmiennych wyrazów na lewą stronę, a stałych wyrazów na prawą stronę otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I_2R_1 + I_2R_2 &= V_1 \\ I_3R_3 + I_4R_4 &= -V_2 \\ I_5R_5 + I_4R_4 &= V_1 \\ I_1 - I_2 + I_3 - I_4 &= 0 \\ I_1 - I_2 - I_5 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Powyższy układ równań (1) nalezy przekształcic do postaci macierzowej $\mathbf{AI} = \mathbf{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & R_1 + R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} V_1 \\ -V_2 \\ V_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Należy obliczyć iloczyn macierzy, aby sprawdzić, czy forma macierzy jest zgodna z oryginalnym systemem (1).

Poniższy skrypt przekształca układ równań do postaci macierzowej i oblicza prądy w każdej gałęzi obwodu, wykorzystując funkcje MATLAB do rozwiązywania układów równań.

```
% Parametry obwodu (rezystancja w omach, napięcie w woltach)
R1 = 10; R2 = 200; R3 = 10000; R4 = 2000; R5 = 330;
V1 = 1.5; V2 = 12;
```

```
% Macierz współczynników i wektor stałych
A = [
        0,  R1+R2, 0,   0,  0;
        0,  0,     R3,  R4, 0;
        0,  0,     0,   R4, R5;
        1,  -1,    1,   -1, 0;
        1,  -1,    0,   0,  -1;
    ];

b = [
     V1;
    -V2;
     V1;
     0;
     0
    ];

% Rozwiązanie równania prądów w każdej gałęzi
I = A\b;

% Wyświetlanie wyników
disp('Natężenie prodów w gałęziach obwodu wynosi:');
```

```
Natężenie prodów w gałęziach obwodu wynosi:
```

```
disp(I);
```

```
    0.0089
    0.0071
   -0.0013
    0.0005
    0.0018
```

Podczas cwiczeń laboratoryjnych należy wyznaczyć wartości prądów w każdej gałezi dla zadanego obwodu elektrycznego.