Rozwiązywanie równań różniczkowych

Równania różniczkowe to równania przedstawiające zależność między funkcją a pochodnymi tej funkcji.

Przykład: Należy znaleźć rozwiązanie równania:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x = 0$$

z warunkami początkowymi:

$$x(0) = 0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 2.$$

Równanie jest liniowe, jednorodne i o stałych współczynnikach, więc można rozwiązać, stosując równanie charakterystyczne.

Przyjmujemy, że rozwiązanie ma postać:

$$x(t) = e^{\lambda t},$$

gdzie λ jest wartością, którą należy znaleźć.

Podstawiając tę postać do równania różniczkowego, otrzymujemy równanie charakterystyczne:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Równanie charakterystyczne jest kwadratowe, więc rozwiązujemy je za pomocą wzoru na pierwiastki równania kwadratowego:

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego

Ponieważ pierwiastki są rzeczywiste i różne, ogólne rozwiązanie równania to:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Podstawiając wartości:

$$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -2:$$

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

Stosujemy warunki początkowe, aby wyznaczyć wartości C_1 i C_2:

Pierwszy warunek początkowy:

$x(0) = 0$:

$$x(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 0$$

Zatem:

$C_1 = -C_2$.

Drugi warunek początkowy:

$\frac{dx}{dt}(0) = 2$:

Najpierw obliczamy pochodną $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$$

Podstawiamy $t = 0$:

$$\frac{dx}{dt}(0) = -C_1 - 2C_2 = 2$$

Wstawiając

$C_1 = -C_2$

$-(-C_2) - 2C_2 = 2$

$C_2 - 2C_2 = 2$

$-C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = -2$

Zatem $C_1 = 2$.

Rozwiązanie końcowe

Podstawiając wartości:

$C_1 = 2; C_2 = -2,$

otrzymujemy rozwiązanie analityczne:

$$x(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

To samo równanie zostanie obliczone za pomocą Symbolic Math Toolbox w Matlab.

Symbolic Math Toolbox

Wykorzystując Symbolic Math Toolbox należy zadklarować zmienne.

```
syms x y(t);
```

Używamy funkcji *dsolve* do rozwiązania równania:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0,$$

przy warunkach początkowych:

x(0) = 0,

$$\frac{dx}{dt}(0) = 2$$

```
y1 = dsolve('D2x + 3*Dx + 2*x = 0', 'x(0) = 0', 'Dx(0) = 2')
```

```
Warning: Support for character vector or string inputs will be removed in a future release. Instead, use
syms to declare variables and replace inputs such as dsolve('Dy = -3*y') with syms y(t); dsolve(diff(y,t) ==
-3*y).
```

y1 = $2\,e^{-2\,t}\,(e^{t} - 1)$

lub inny zapis tej samej zależności:

$$y1 = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

To rozwiązanie jest sumą dwóch wykładniczych funkcji malejących, co jest zgodne z charakterystycznym rozwiązaniem równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach, gdzie charakterystyki równania mają rzeczywiste, ujemne pierwiastki.

Rozwiązanie pokazuje, że y maleje do zera, gdy:

$$t \to \infty,$$

co jest zgodne z układem tłumionym, gdzie wartości początkowe zanikają w miarę upływu czasu.

W przyszłych wersjach MATLAB-a zostanie usunięte wsparcie dla przekazywania równań różniczkowych jako tekstu (ciągów znaków lub wektorów znakowych) do funkcji takich jak `dsolve`. Obecnie można jeszcze używać równań w formacie tekstowym, np. `dsolve('Dy = -3*y')`, ale ten sposób będzie przestarzały i przestanie działać w przyszłych wersjach.

Zamiast przekazywać równania różniczkowe jako tekst, MATLAB zaleca korzystanie z podejścia symbolicznego przy użyciu funkcji `syms`.

Oto kroki:

Użyj `syms` do zadeklarowania zmiennej funkcji zależnej od czasu.

Na przykład:

```
syms y(t)
```

Tutaj `y(t)` definiuje y jako funkcję zależną od `t`, co pozwala na bardziej precyzyjne manipulacje matematyczne.

Definiowanie równania różniczkowego:

Zamiast `Dy` (pierwszej pochodnej) jako tekstu, należy użyć `diff(y, t)` do wyrażenia pochodnej w stosunku do `t`. Następnie można przekazać to równanie bezpośrednio do `dsolve`.

Na przykład:

```
dsolve(diff(y, t) == -3 * y)
```

ans = $C_1\,e^{-3\,t}$

Definiowanie zmiennych symbolicznych bezpośrednio przy użyciu `syms` umożliwia bardziej precyzyjną kontrolę nad funkcjami i ich pochodnymi.

Podejście symboliczne eliminuje potencjalne błędy i niejasności związane z interpretacją tekstowych wyrażeń.

Operacje symboliczne są optymalizowane przez MATLAB do przetwarzania symboli, co umożliwia efektywniejsze obliczenia i mniej błędów związanych z różnymi wersjami oprogramowania.

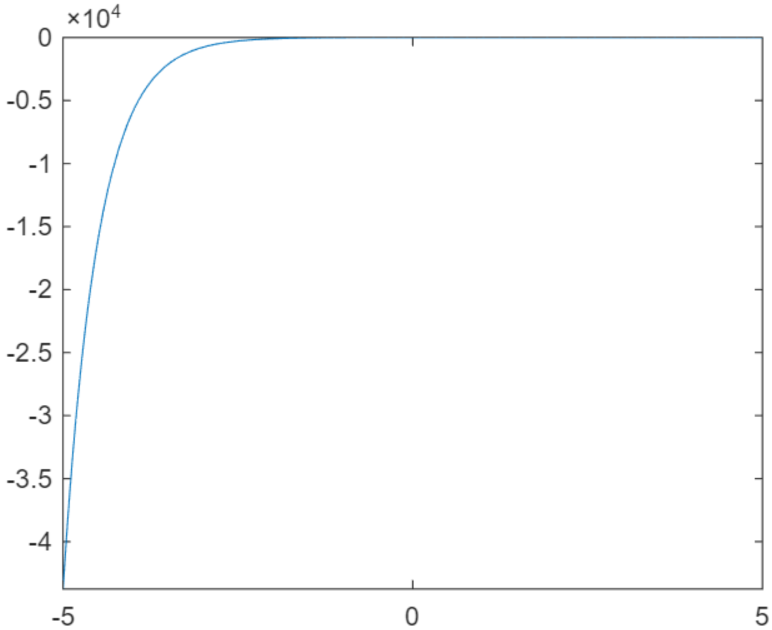
```
syms x(t)             % Definicja x jako funkcji symbolicznej zależnej od t

Dx = diff(x, t);      % Pierwsza pochodna x względem t
D2x = diff(x, t, 2);  % Druga pochodna x względem t

% Równanie różniczkowe oraz warunki początkowe
y2a = dsolve(diff(x, t, 2) + 3*diff(x, t) + 2*x == 0, x(0) == 0, Dx(0) == 2)
```

y2a = $2\,e^{-2\,t}\,(e^t - 1)$

```

% Jeszcze raz to samo równanie różniczkowe oraz warunki początkowe

y2b = dsolve(D2x + 3*Dx + 2*x == 0, x(0) == 0, Dx(0) == 2)
```

y2b = $2\,e^{-2\,t}\,(e^t - 1)$

```
fplot(y2b)
```



Zastosowanie funkcji *dsolve* domyślnie różniczkuje po zmiennej czasu. Powyższe rozwiązanie korzysta z metody symbolicznej, w związku z czym rozwiązanie przedstawione jest również w formie symbolicznej.

Metoda Numeryczna

Alternatywną metodą rozwiązania równania różniczkowego jest metoda numeryczna.

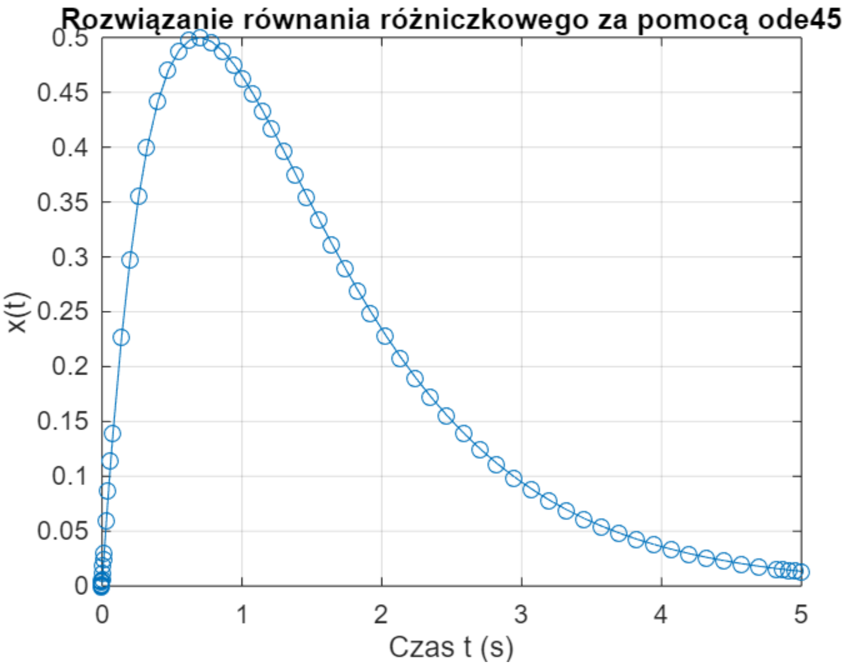
Pierwszym krokiem będzie określenie przedziału czasowego na którym wyznaczymy funkcję, oraz określenie warunku początkowego.

```
% Definiowanie przedziału czasu i warunków początkowych
przedz_cz = [0 5]; % Przedział czasowy od 0 do 5 sekund
y0 = [0; 2]; % Warunki początkowe: x(0) = 0 i Dx(0) = 2

% Definiowanie układu równań różniczkowych pierwszego rzędu
% y(1) reprezentuje x(t), a y(2) reprezentuje dx/dt.

dydt = @(t, y) [y(2); -3*y(2) - 2*y(1)];

% Rozwiązywanie układu równań za pomocą ode45
[t, y] = ode45(dydt, przedz_cz, y0);
```

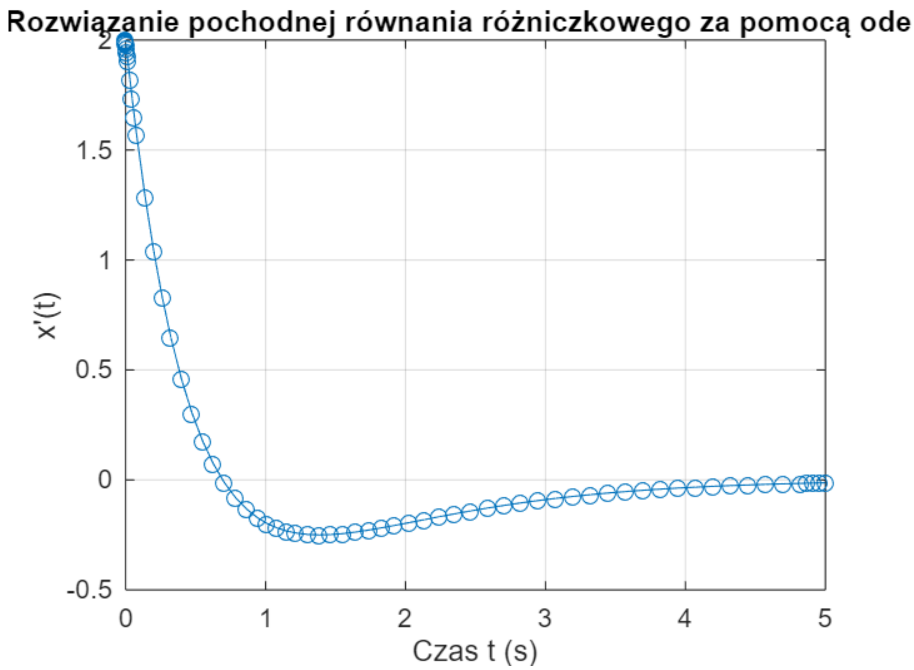
Po wykonaniu powyższego obliczenia, przedstawimy rozwiązanie w formie wykresu, jako że metoda numeryczna nie generuje równania, a jedynie powiązane wartości numeryczne.

```
% Rysowanie wykresu dla x(t)
figure;
plot(t, y(:,1), '-o') % Wykres zależności x(t)
xlabel('Czas t (s)')
ylabel('x(t)')
```

```
title('Rozwiązanie równania różniczkowego za pomocą ode45')
grid on;
```




```
%drawnow;

% Rysowanie wykresu dla pochodnej x'(t)
figure;
%set(gcf, 'Renderer', 'painters');
plot(t, y(:,2), '-o') % Wykres zależności x'(t)
xlabel('Czas t (s)')
ylabel('x''(t)')
title('Rozwiązanie pochodnej równania różniczkowego za pomocą ode45')
grid on;
```



Metoda rozwiązywania równań różniczkowych ODE45 (metoda Rungego-Kutty 4/5 rzędu) jest najczęściej stosowaną metodą dla ogólnych układów równań różniczkowych o umiarkowanej dokładności i szybkości. Adaptacyjny krok czasu umożliwia uzyskanie wysokiej dokładności.

Szybsza, ale mniej dokładna jest metoda `ode23 (metoda` Rungego-Kutty 2/3 rzędu).

Inne metody to:

- ode15s zalecana dla równań sztywnych, jest bardziej stabilna w takich przypadkach i często szybsza.

- `ode23s` metoda Rosenbrocka 2/3 rzędu, również dla równań sztywnych;

- ode113 przydatna do równań wymagających bardzo dużej dokładności

Podsumowując metody rozwiązwania ODE:

- **`ode45`**: uniwersalna, dobra dla większości problemów.
- **`ode23`**: szybsza, ale mniej dokładna, stosowana do mało sztywnych problemów.
- **`ode15s`**: zalecane do równań sztywnych.
- **`ode113`**: najlepsza dla wysokiej dokładności w przypadku mało sztywnych układów.

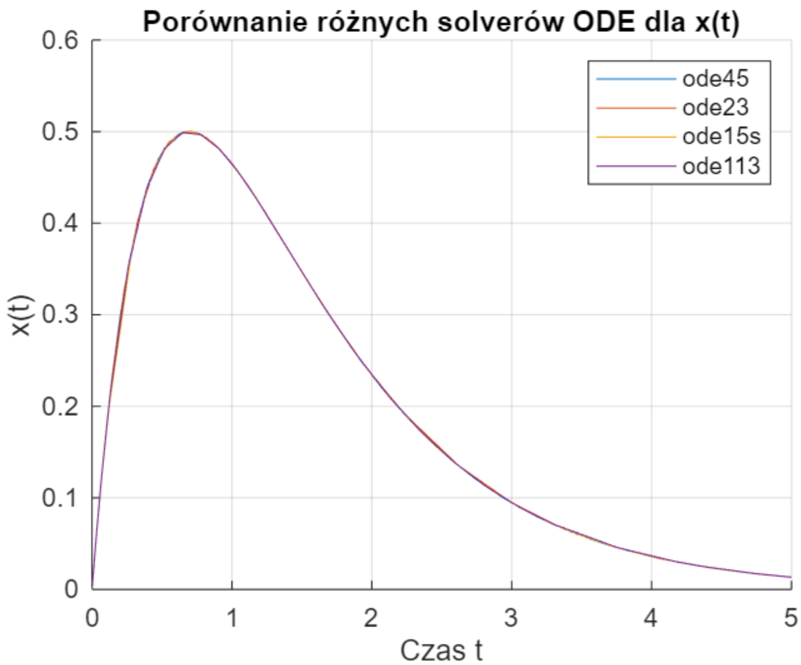
Każdą z tych metod można wybrać w zależności od dokładności i sztywności układu równań różniczkowych.

Równania różniczkowe są nazywane **sztywnymi**, gdy ich rozwiązanie wymaga bardzo różnych skal czasowych, co oznacza, że potrzebują bardzo małych kroków czasowych, aby zachować stabilność numeryczną, mimo że nie zawsze jest to konieczne dla dokładności.

W kontekście numerycznym, sztywność równań różniczkowych objawia się tym, że standardowe metody rozwiązywania (jak Rungego-Kutty, np. `ode45` w MATLAB-ie) stają się bardzo wolne, ponieważ muszą używać wyjątkowo małych kroków czasowych, aby nie doprowadzić do rozbieżności.

Sztywność występuje często w systemach fizycznych, chemicznych lub biologicznych, w których różne procesy zachodzą z różnymi szybkościami. Na przykład w reakcjach chemicznych jedna reakcja może przebiegać bardzo szybko, podczas gdy inna zachodzi wolniej, co prowadzi do konieczności stosowania bardzo małych kroków w symulacji.

```
% Definiowanie przedziału czasu i warunków początkowych
przedz_cz = [0 5]; % Przedział czasowy od 0 do 5 sekund
y0 = [0; 2]; % Warunki początkowe: x(0) = 0 i Dx(0) = 2

% Definiowanie układu równań różniczkowych pierwszego rzędu
% y(1) reprezentuje x(t), a y(2) reprezentuje dx/dt.
dydt = @(t, y) [y(2); -3*y(2) - 2*y(1)];

% Lista solverów do porównania
solvers = {@ode45, @ode23, @ode15s, @ode113};
solver_names = ["ode45", "ode23", "ode15s", "ode113"];

% Kolory do wykresów (opcjonalnie, dla czytelności)
colors = lines(length(solvers));

% Tworzenie figury do porównania wyników
figure;
hold on;

% Iteracja po każdym solverze i rozwiązanie układu równań
for i = 1:length(solvers)
    solver = solvers{i};
    [t, y] = solver(dydt, przedz_cz, y0); % Rozwiązanie układu równań

    % Rysowanie wyników dla x(t) z każdego solvera
    plot(t, y(:, 1), 'DisplayName', solver_names(i), 'Color', colors(i, :)); % x(t)
end

% Ustawienia wykresu
xlabel('Czas t');
ylabel('x(t)');
title('Porównanie różnych solverów ODE dla x(t)');
legend('show'); % Wyświetlenie legendy z nazwami solverów
grid on;
hold off;
```


Porównanie różnych solverów ODE dla x(t)
x(t)
Czas t
ode45
ode23
ode15s
ode113
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5