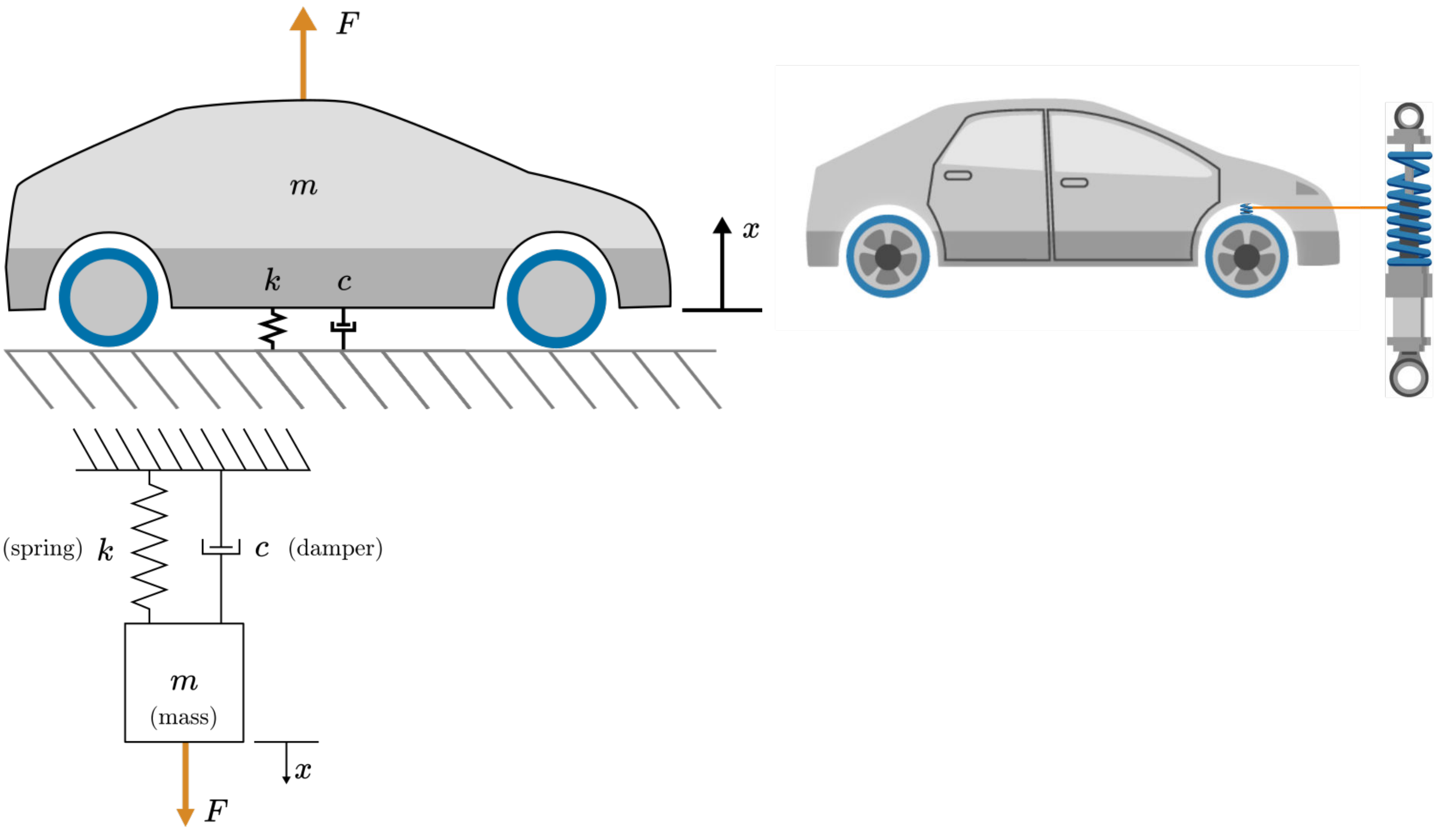
W systemach dynamicznych wartości sygnałów wyjściowych zależą zarówno od chwilowych wartości sygnałów wejściowych, jak i od przeszłego zachowania systemu.

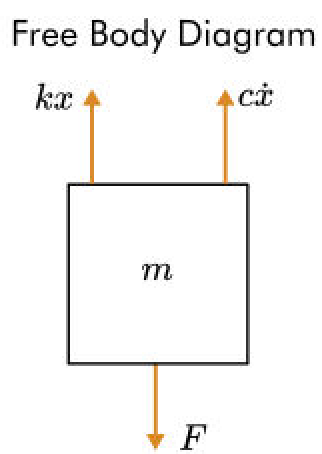
Na przykład fotel samochodowy to system dynamiczny — kształt fotela (pozycja ustalona) zależy zarówno od aktualnej wagi pasażera (wartość chwilowa), jak i od tego, jak długo pasażer przebywa w samochodzie (zachowanie przeszłe).



Rys 1 Schemat układu masa-tłumik-sprężyna

Rys. 2 Przykład modelowanego układu stosowany na okrętach MW (producent OBR CTM)

Modelowany układ jest przykładem stosowanego na okretach MW amortyzatorów przeciwudarowych.



Newton's 2nd law application

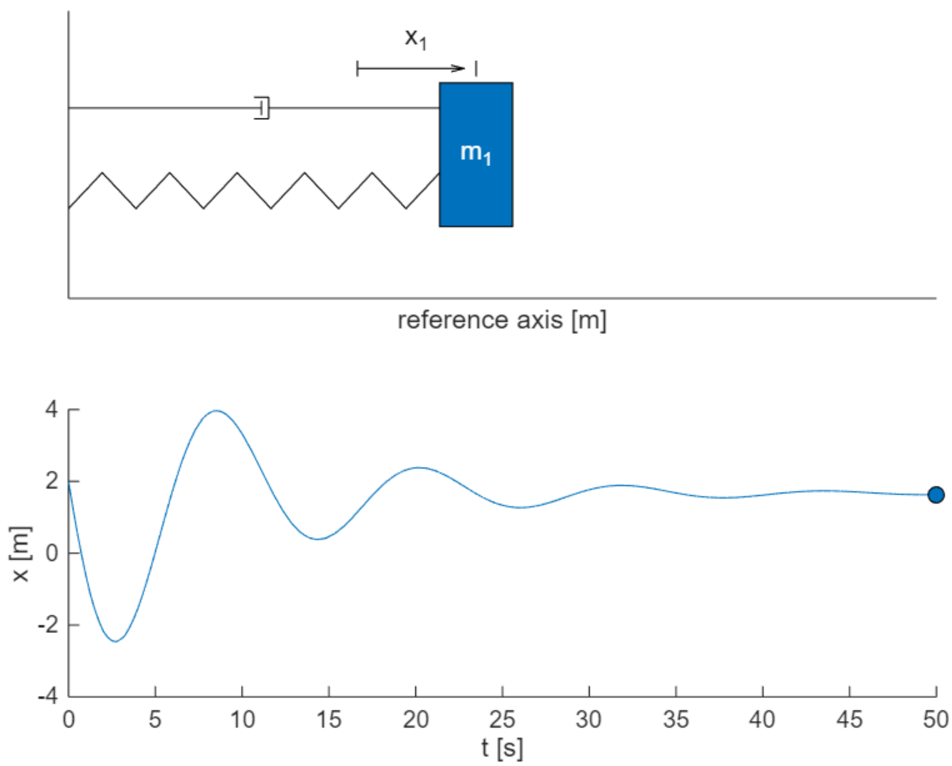
$$m\ddot{x} = \sum \text{Forces}$$

$$m\ddot{x} = F - kx - c\dot{x}$$

or

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

```
warning off
n = 200; % The number of steps used in the visualization
visualize = true; % Click the checkbox to show the visualization
if(visualize)
    simOut = sim("msdSimulationOutput_PP"); % Run the Simulink model
    animateMSD(simOut.tout,simOut.yout,0.5,n)
end
```



Model to matematyczna relacja między zmiennymi wejściowymi i wyjściowymi systemu. Modele systemów dynamicznych są zazwyczaj opisywane za pomocą:

- równań różniczkowych lub różnicowych,
- równań w przestrzeni stanów,

Modele dynamiczne mogą być reprezentowane zarówno w formie czasu ciągłego, jak i dyskretnego.

Często wykorzystywanym przykładem modelu dynamicznego jest równanie ruchu układu sprężyna-masa-tłumik. W takim systemie masa porusza się w odpowiedzi na siłę F(t), która działa na podstawę połączoną z masą. Sygnałem wejściowym systemu jest siła F(t), a sygnałem wyjściowym przemieszczenie x(t).

$$m\ddot{x} = \sum F$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F$$

Typowy przykład dynamicznego modelu to równanie ruchu dla układu masy, sprężyny i tłumika:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t) \qquad (1)$$

gdzie:

m to masa,

k to stała sztywności sprężyny,

c to współczynnik tłumienia.

Rozwiązanie tego równania pozwala wyznaczyć przemieszczenie masy y(t) w funkcji siły zewnętrznej F(t).

Model z wykorzystaniem ODE

ODE (ordinary differential equation), czyli zwyczajne równanie różniczkowe, to równanie matematyczne, które opisuje relacje między zmienną niezależną t (zazwyczaj czasem) a jedną lub więcej funkcji zależnych y(t), oraz ich pochodnymi.

```
% Parametry układu
m = 1.0;       % masa (kg)
k = 10;       % współczynnik sprężystości sprężyny (N/m)
b = 1;        % współczynnik tłumienia (Ns/m)

% Warunki początkowe
x0 = 10;        % początkowe przemieszczenie (m)
v0 = 1;        % początkowa prędkość (m/s)

% Czas symulacji i krok czasowy
t0 = 0;        % czas początkowy
tf = 10;       % czas końcowy
```

Definiujemy tylko czas początku i końca symulacji, gdyż model jest ciągły w czasie.

Równanie różniczkowe **drugiego** rzędu (1) można przekształcić na dwa równania różniczkowe **pierwszego** rzędu, wprowadzając nowe zmienne pomocnicze. Ten proces jest szczególnie przydatny w analizie systemów dynamicznych oraz podczas implementacji numerycznej w MATLAB-ie.

Wprowadzajac dodatkowe zmienne:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx}{dt},$$

otrzymujemy układ równań:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{m}F(t) - \frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1.$$

Następnie, otrzymany układ dwóch równań **pierwszego** rzędu, definiujemy anonimową funkcję dwóch argumentów:

```
% Definicja równań różniczkowych
odefun = @(~, x) [x(2); (-k * x(1) - b * x(2)) / m];
```

Pierwszy argument (~) reprezentuje czas (t), ale nie jest używany w obliczeniach, dlatego zastąpiono go znakiem ~.

Drugi argument (x) to wektor, który zawiera zmienne stanu układu.

x_2 reprezentuje $\frac{dx_1}{dt} = x_2$, czyli pochodną pierwszej zmiennej stanu y_1.

$(-k * x(1) - b * x(2))/m$: reprezentuje $\frac{dx_2}{dt}$, czyli pochodną drugiej zmiennej stanu (x_2).

```
% Rozwiązanie równań różniczkowych
[T, X] = ode45(odefun, [t0, tf], [x0, v0]);

% Obliczamy przyspieszenie
X(:,3) = (1/m) * (-k * X(:,1) - b * X(:,2));

% Rysowanie wyników
figure;
subplot(3,1,1);
plot(T, X(:,1));
title('Przemieszczenie (x)');
xlabel('Czas [s]');
ylabel('Przemieszczenie [m]');

subplot(3,1,2);
```

```
    plot(T, X(:,2));
    title('Prędkość (v)');
    xlabel('Czas [s]');
    ylabel('Prędkość [m/s]');

    subplot(3,1,3);
    plot(T, X(:,3));
    title('Przyspieszenie (a)');
    xlabel('Czas [s]');
    ylabel('Przyspieszenie [m/s^2]');
    % Wyświetlenie wyników
    sgtitle('Symulacja z wykorzystaniem równań różniczkowych');
```

Model z wykorzystaniem równań różnicowych

(bardzo popularna metoda dla modelowania obiektu nieliniowgo opracowana dla przez **Fossen** dla układu o kilku stopniach swobody).

```
    m = 1.0;        % masa (kg)
    k = 10;        % współczynnik sprężystości sprężyny (N/m)
    b = 1;         % współczynnik tłumienia (Ns/m)

    % Warunki początkowe
    x0 = 10;         % początkowe przemieszczenie (m)
    v0 = 1;         % początkowa prędkość (m/s)

    % Czas symulacji i krok czasowy
    t0 = 0;         % czas początkowy
    tf = 10;        % czas końcowy
    dt = 0.05;      % krok czasowy
    t = t0:dt:tf;   % wektor czasu

    % Inicjalizacja wektorów do przechowywania wyników
    x = zeros(size(t)); % przemieszczenie
    v = zeros(size(t)); % prędkość
    a = zeros(size(t)); % przyspieszenie

    % Ustawienie warunków początkowych
    x(1) = x0;
    v(1) = v0;

    % Symulacja układu  masa-sprężyna-tłumik
    for i = 1:length(t)-1
        % Obliczenie przyspieszenia
        a(i) = (-k * x(i) - b * v(i)) / m;
        % Obliczenie prędkości
        v(i+1) = v(i) + a(i) * dt;
        % Obliczenie przemieszczenia
        x(i+1) = x(i) + v(i+1) * dt;
    end
```

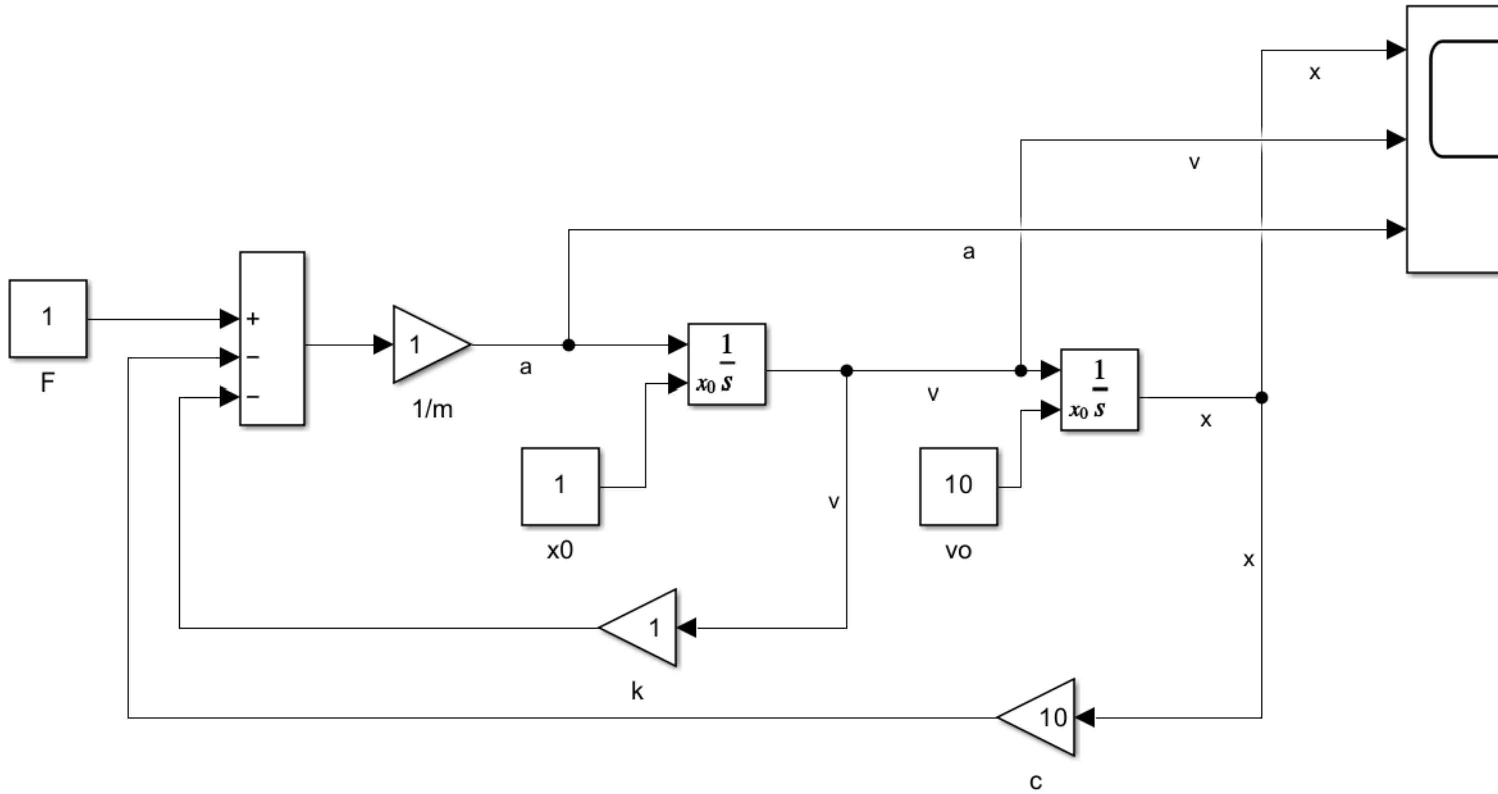
```
% Rysowanie wyników
figure;
subplot(3,1,1);
plot(t, x);
title('Przemieszczenie (x)');
xlabel('Czas [s]');
ylabel('Przemieszczenie [m]');

subplot(3,1,2);
plot(t, v);
title('Prędkość (v)');
xlabel('Czas [s]');
ylabel('Prędkość [m/s]');

subplot(3,1,3);
plot(t, a);
title('Przyspieszenie (a)');
xlabel('Czas [s]');
ylabel('Przyspieszenie [m/s^2]');

% Wyświetlenie wyników
sgtitle('Symulacja z wykorzystaniem równań różnicowych');
```

Model w Matlab-Simulink

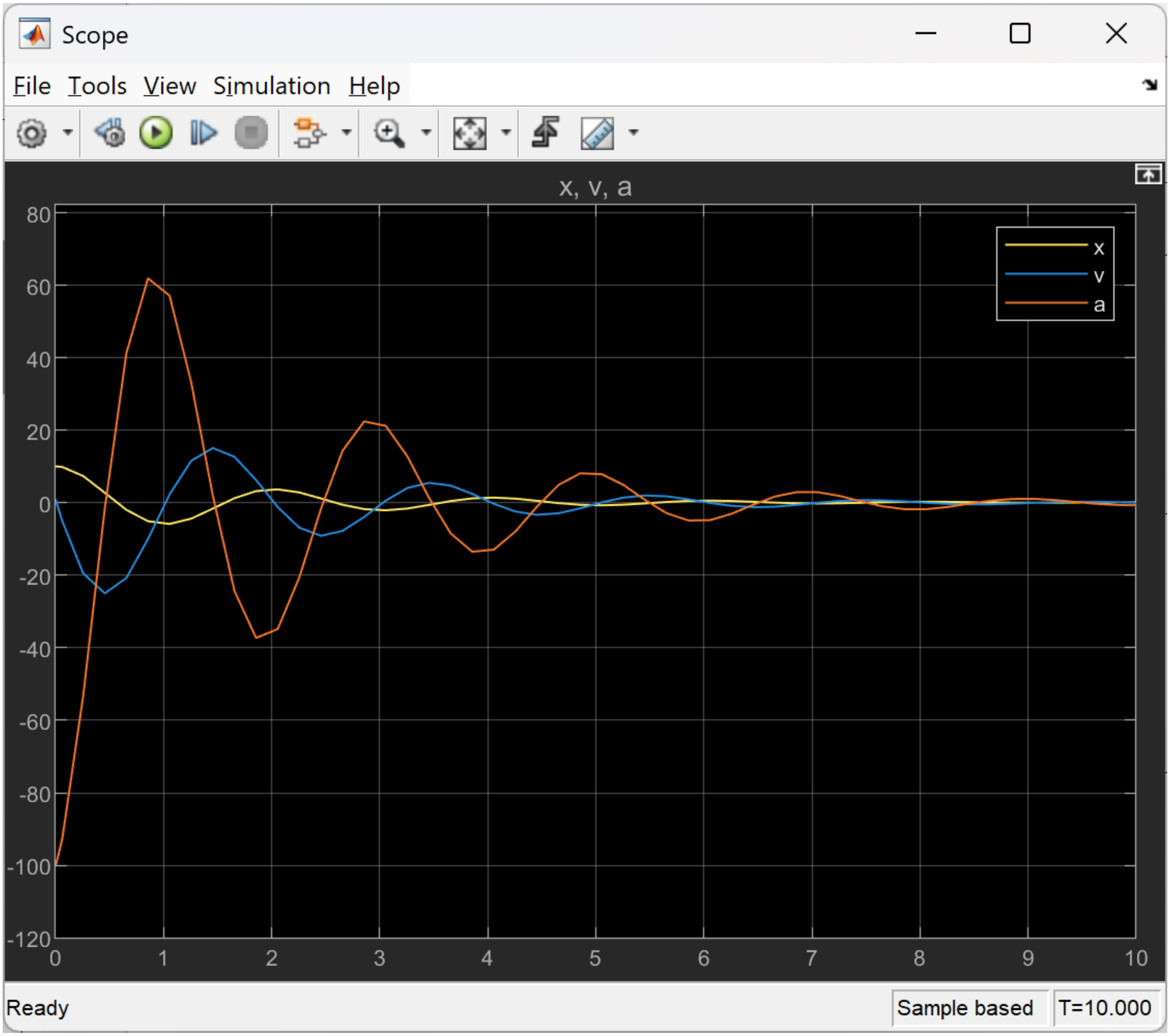
Przekształcając rónanie (1):

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(t) - c\frac{dx(t)}{dt} - kx(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{(F(t) - c\frac{dx(t)}{dt} - kx(t))}{m}$$

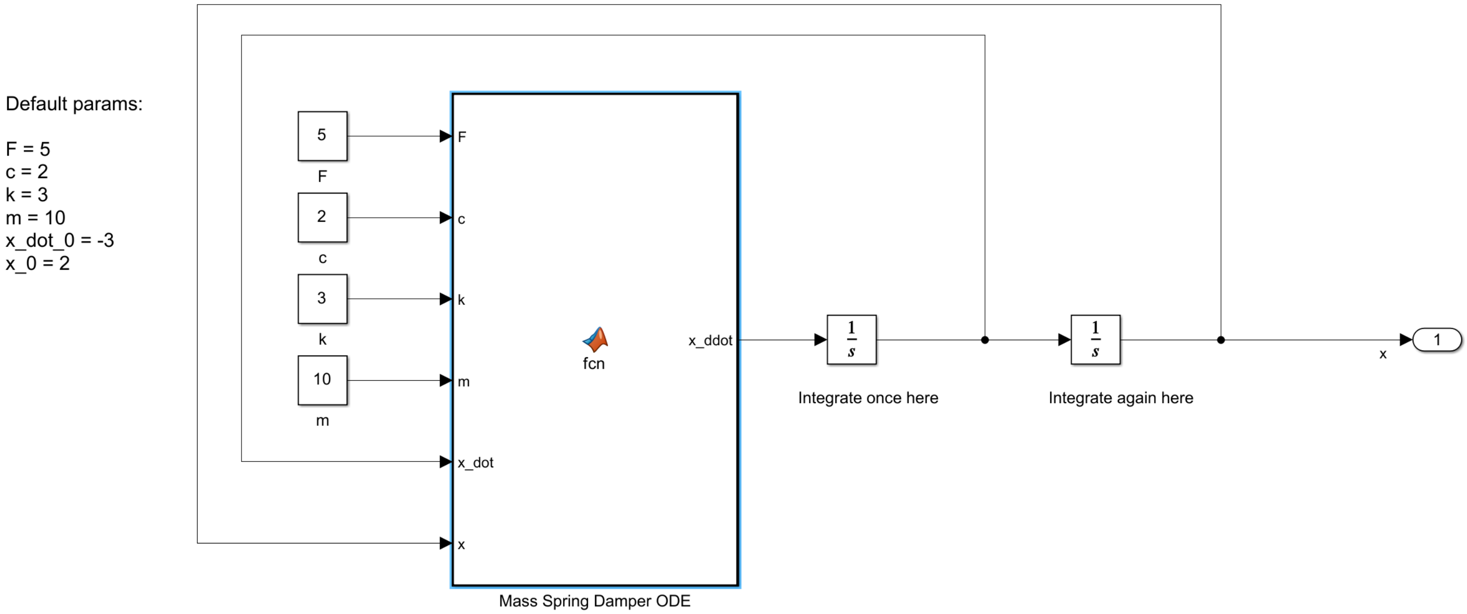


Rys. 5 Schemat blokowy dla układu masa - tłumik - sprężyna w Matlab-Simulink



Rys. 6 Wynik symulacji dla układu masa - tłumik - spreżyna w Matlab-Simulink

Druga metoda na zamodelowanie układu w Matlab - Simulink to wykorzystanie równanie w bloku:



Rys. 7 Scemat blokowy w Matlab-Simulink z wykorzystaniem bloku funkcyjnego

Gdzie blok funkcyjny fcn zawiera równanie ODE:

msdSimulationOutput ▶ Mass Spring Damper ODE

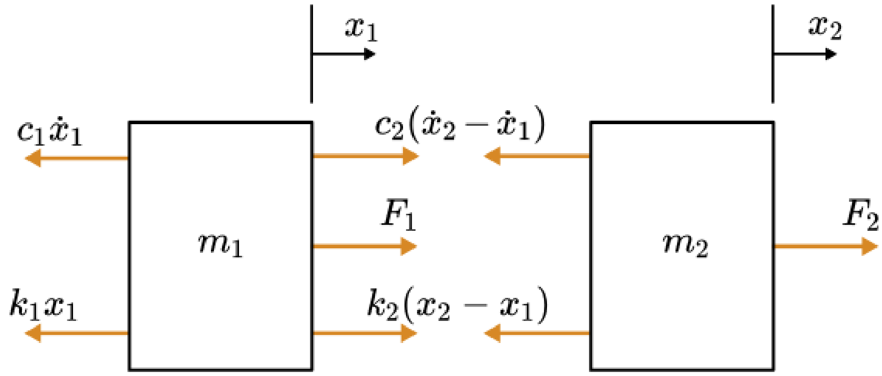
```
function x_ddot = fcn(F,c,k,m,x_dot,x)

   % Write your expression for x_ddot here in terms of the inputs
   x_ddot = -(-F+c.*x_dot+k.*x)./m;
end


```

Rys. 8 Równanie ODE zapisane wewnątrz bloku fcn.

Przykłądowe zadanie laboratoryjne

Zamodelować układ z o dwóch stopniach swobody:

Free body diagram:



Applying Newton's second law:

$$m_1\ddot{x}_1 = F_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 x_1 - c_1\dot{x}_1$$
$$m_2\ddot{x}_2 = F_2 - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

PYT: Jak zamodelować, ile stopni swobody ma okręt, pojazd nawodny, pojazd podwodny?