1 基本定义

本文中拟合能谱的方法基于 Forward-Unfolding 法，依赖模拟. 定义某个小天区 $\mathrm{d}\Omega$ 中的 γ 辐射强度为单位时间，单位能量，垂直穿过面元 $\mathrm{d}A$ 的光子数:

$$I = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t\mathrm{d}E\mathrm{d}A\mathrm{d}\Omega} \tag{1}$$

需要看到 (1) 式中 I 是时间、能量、面积与立体角的函数。比较难以处理的是立体角，对于点源，I 在方向上的分布是一个脉冲函数:

$$I(\alpha, \delta) = I_0 \Delta(\alpha, \delta; \alpha_0, \delta_0) \tag{2}$$

$$I_0 = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t\mathrm{d}E\mathrm{d}A} \tag{3}$$

为了区分脉冲函数 δ 以及赤纬符号 δ，上式的脉冲函数用 Δ 表示，脉冲函数在点源位置 (α_0, δ_0) 处值为 ∞, 包含点源的任意有限区域 D 中的积分有：

$$\int_D \Delta(\alpha, \delta; \alpha_0, \delta_0)\mathrm{d}\Omega = 1$$

对于伽马辐射的实验观测量，通常是指在某一个天区，经过一段时间后，在某个能段观测到的光子计数 N_{obs}，如果暂时不考虑探测器的点扩展函数（理想探测器），那么 N_{obs} 可以表示为

$$N_{obs} = \int I(\alpha, \delta)\, \cos\theta\, \varepsilon(\theta, \boldsymbol{x}, E) S(t) V(t; \alpha, \delta) \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \mathrm{d}A \mathrm{d}E \tag{4}$$

上式中 $\varepsilon(\theta, \boldsymbol{x}, E)$ 是探测效率，与天顶角 θ，事例入射位置 $\boldsymbol{x}$ 以及事例的能量有关；$S(t)$ 是探测器运行状态函数，在某个时刻 t，如果探测器正常工作，则 $S(t) = 1$，否则取 0；$V(t; \alpha, \delta)$ 是视场选择函数，只有某个时刻 t 对应的源（这里指点源或者弥散源的某个小天区）处于视场 FOV 之中，那么取 1，否则取 0.

2 模拟

探测效率函数需要通过模拟得到。KM2A 的模拟是全天各向同性投点，其投点的强度定义为

$$M = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E\mathrm{d}A\mathrm{d}\Omega} = \alpha_0 \left(\frac{E}{TeV}\right)^{-\beta_0} \tag{5}$$

相比于真实的源的辐射场强度，模拟投点强度少了时间量 t。在拟合能谱的时候需要对时间单独处理，有两个不同的途径：(1) 消除 N_{obs} 积分中的时间项；(2) 在模拟中加入时间项.

2.1 消除 N_{obs} 时间项

由于 $V(t;\alpha,\delta)$ 是与位置 (α,δ) 相关的，所以这个方法通常在点源情形应用，对于点源，位置是固定且唯一的，$V(t;\alpha,\delta)$ 可以简写为 $V(t)$. 将点源的辐射场强度分布 (3) 代入 (4) 式，得到：

$$N_{obs} = \int I_0 \cos\theta\, \varepsilon(\theta, \boldsymbol{x}, E) S(t) V(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}A \mathrm{d}E \tag{6}$$

在地平坐标系上看，源在一条赤纬线上运动，天顶角是时间的函数：$\theta(t,\alpha,\delta)$，这个函数的反函数有很多分支：$t_i(\theta,\alpha,\delta)$，这样可以将积分中的时间表示为 θ 的函数:

$$\sum_i S(t_i) V(t_i;\alpha,\delta) \mathrm{d}t_i = T(\theta;\alpha,\delta)\mathrm{d}\theta$$

其中 $T(\theta;\alpha,\delta)$ 的量纲是 $s \cdot deg^{-1}$，是单位天顶角上在点 (α,δ) 的累积观测时间。

一般地，可以给出来 N_{obs} 的计算式：

$$N_{obs} = \int I(\alpha,\delta) \cos\theta\, \varepsilon(\theta, \boldsymbol{x}, E) T(\theta;\alpha,\delta) \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\theta \mathrm{d}A \mathrm{d}E \tag{7}$$

特别地，对于一个幂律能谱为 $\alpha E^{-\beta}$ 的点源：

$$N_{obs} = \int \alpha E^{-\beta} \cos\theta\, \varepsilon(\theta, \boldsymbol{x}, E) T(\theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}A \mathrm{d}E \tag{8}$$

对于点源的模拟，我们希望它在某个体积元 $\mathrm{d}\theta\mathrm{d}A\mathrm{d}E$ 给出来的事例数计算公式与上式的被积函数一致，然而实际上模拟在该体积元给出的事例数是：

$$\mathrm{d}N_{sim} = 2\pi\alpha_0 E^{-\beta_0} \sin\theta \cos\theta\, \varepsilon(\theta, \boldsymbol{x}, E) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}A \mathrm{d}E \tag{9}$$

因此，我们可以在该体积元赋予一个权重:

$$\frac{T(\theta)}{T\sin\theta} \cdot E^{-(\beta-\beta_0)}$$

T 是总观测时间，即

$$T = \int T(\theta)\mathrm{d}\theta$$

这样，我们在同样的积分区域下有模拟的事例数:

$$N_{sim} = \frac{2\pi}{T}\int \alpha_0 E^{-\beta}\ \cos\theta\,\varepsilon(\theta,\boldsymbol{x},E)T(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}A\mathrm{d}E \tag{10}$$

N_{obs} 和 N_{sim} 是正比关系：$N_{obs} = kN_{sim}$，于是：

$$\alpha = \frac{2\pi k}{T}\alpha_0 \tag{11}$$

实际拟合过程中，数据样本是不同能量段的实验观测值 $N_{obs,i}$，以及对应的模拟事例数 $N_{sim,i}$，模拟的积分过程实际上就是一个利用蒙特卡洛模拟进行数值计算的过程。经过探测器响应后的模拟，每个事例（也就是每个体积元）的权重是：

$$w_i = 2\pi\alpha_0 E_i^{-\beta_0}\ \sin\theta_i\cos\theta_i\,\varepsilon(\theta_i,\boldsymbol{x_i},E_i)$$

就是说某个积分区间的加权事例数综合，就是进行积分：

$$\sum_j w_j = 2\pi\int \alpha_0 E^{-\beta_0}\ \sin\theta\cos\theta\,\varepsilon(\theta,\boldsymbol{x},E)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}A\mathrm{d}E$$

那么为了计算模拟的积分，就是求加权和:

$$N_{sim,i}(\beta) = \sum_j \frac{T(\theta_{ij})}{T\sin\theta_{ij}}\cdot E_{ij}^{-(\beta-\beta_0)}w_{ij}$$

最后，我们构建的 χ^2 公式为：

$$\chi^2 = \sum_i \frac{\left(N_{obs,i} - kN_{sim,i}(\beta)\right)^2}{\sigma^2(N_{obs})}$$

其中 k,β 是拟合的参数

2.2 在模拟中加入时间项

模拟其实没有时间的概念，但是可以进行抽样，赋予事例一个时间. 方案如下回顾计算 N_{obs} 的一般式 (仍旧假设探测器的 PSF 是脉冲函数)：

$$N_{obs} = \int \alpha E^{-\beta}\ \cos\theta\,\varepsilon(\theta,\boldsymbol{x},E)S(t)V(t;\alpha,\delta)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\mathrm{d}A\mathrm{d}E$$

模拟为

$$N_{sim} = \int\left(\frac{\alpha_0}{T}\right)E^{-\beta}\ \cos\theta\,\varepsilon(\theta,\boldsymbol{x},E)S(t)V(t;\alpha,\delta)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\mathrm{d}A\mathrm{d}E$$

$$M_{sim} = \int \left(\frac{\alpha_0}{T}\right) E^{-\beta_0} \, \cos\theta \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \mathrm{d}A \mathrm{d}E$$

$$M_{sim} = \int \left(\frac{\alpha_0}{T}\right) E^{-\beta_0} \, \cos\theta \, \varepsilon(\theta, \boldsymbol{x}, E) \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \mathrm{d}A \mathrm{d}E$$

$$M_{sim} = \int \left(\frac{\alpha_0}{T}\right) E^{-\beta_0} \, \cos\theta \, \varepsilon(\theta, \boldsymbol{x}, E) S(t) V(t; \alpha, \delta) \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \mathrm{d}A \mathrm{d}E$$