

# 小行星主带上单个行星的质量上限\*

李培俊<sup>†</sup> 周济林

(南京大学天文系 南京 210093)

**摘要** 介绍了 N 体模拟的 Hermite 算法, 并利用该算法研究了不同质量行星在小行星主带上轨道的演化情况. 采用的演化模型是太阳系 N 体模型 ( $N=7$ ), 即把水星、金星、地球的质量加到太阳上, 忽略冥王星, 同时在小行星主带附近增加一个假想行星, 系统演化时间为 1 亿年. 数值模拟显示能够稳定存在于小行星主带上的单个天体的质量上限其量级为  $10^{25}$  kg. 模拟同时还显示在某些情况下, 假想行星与木星之间的低阶共振可以增强系统的稳定性.

**关键词** 天体力学; 数值算法; N 体模拟; 行星系统; 太阳系

**中图分类号** P 134; **文献标识码** A

## 1 引言

自 1801 年 Piazzi 发现第一个小行星 Ceres 以来, 至今已发现的小行星超过数十万颗, 估计小行星的总数将超过百万颗. 这些小行星大多集中在火星与木星轨道之间, 其中大约有 95% 的小行星轨道半长径在 2.17—3.64 天文单位, 该区域称为小行星的主环带, 位于主环带里的小行星称为“主带小行星”. 最大的主带小行星 Ceres 直径达 1000 公里左右, 而微型小行星只有鹅卵石一般大小, 所有主带小行星的质量之和预计为  $(16 \pm 2) \times 10^{-10} M_{\odot}$  (小行星 Ceres 的质量占了其中的三分之一多)<sup>[1]</sup>. 这些主带小行星可能保留了太阳系形成早期的一些信息, 所以研究它们的化学组成和动力学演化情况对于人们了解太阳系的起源和演化很有意义.

如果对主带小行星的轨道根数进行统计, 则会发现轨道倾角在  $5^{\circ}$  左右和偏心率在 0.17 左右的小行星数目最多. 主带小行星有一个著名的分布特征: Kirkwood 空隙, 它是 Kirkwood 于 1867 年对主带小行星的数目按轨道半长径统计发现的. Kirkwood 空隙处所对应的小行星轨道周期跟木星的轨道周期之间存在简单的整数比, 例如 4:1、7:2、3:1、5:2、2:1. 对于小行星主带上的空隙和聚集现象, 至今没有完整的解释, 有关这方面的一个著名工作是 Wisdom<sup>[2]</sup> 对 3:1 共振起源的解释.

究竟小行星主带是如何形成的, 迄今为止还没有统一的说法. 1770 年左右提出的

2005-09-06 收到原稿, 2006-03-14 收到修改稿

\* 国家自然科学基金 (No.10233020, 10403004)、教育部博士点基金 (No.20020284011) 和新世纪优秀人才支持计划 (NCET-04-0468) 资助项目

<sup>†</sup>E-mail: peijun\_lee@yahoo.com.cn

Titius-Bode 法则认为, 行星轨道大小若用天文单位来计算, 由内而外各行星的日地平均距离  $d_n(\text{AU})$  可以由下列经验公式表达:

$$d_n = 0.4 + 0.3 \times 2^{n-2}, n = -\infty, 2, 3, 4, \dots$$

该法则能比较精确地表示出各大行星到太阳距离的关系. 按此公式, 在  $n = 5$  的地方缺一颗行星, 后来在此处发现了小行星带. 对于小行星的起源, 主要有 3 种看法: 大行星爆炸说、半成品说和彗星形成说<sup>[3]</sup>. 大行星爆炸说是由 Olbers 提出的, 他认为这些小行星是一颗爆炸了的行星所留下的残余碎片. 布基林 (П у т и л и н И.) 发展了此学说, 认为小行星带可能是某个大行星经过多次爆炸后形成的产物. 半成品说则认为, 小行星很可能是一颗未形成的行星的前身. 在太阳系形成初期时, 小行星带附近的气体和尘埃受木星引力摄动, 使行星形成过程停留在星子阶段, 最后演化为今天的小行星带. 小行星由彗星形成说最早是由 Herschel 提出的, 他认为当彗星经过长时间的消耗后, 其彗发变短, 成为小行星, 最近有观测证据表明某些彗星可能演变成小行星<sup>a</sup>.

虽然现已发现的小行星数目众多, 但是其中最大的主带小行星 Ceres 的质量也只有  $8.7 \times 10^{20} \text{ kg}$ , 仅相当于地球质量的万分之一多. 我们研究的问题是在小行星主带上一个较大质量的行星是否可以稳定存在, 如果可以那么其质量上限量级是多少?

为此, 我们将采用 N 体数值积分的方法, 研究小行星主带上假想行星在太阳与其他大行星引力作用下的演化情况.

## 2 Hermite 算法

Hermite 算法是由 Makino<sup>[4,5]</sup> 等发展起来的一种预估—校正算法, 它的优点是兼顾运算速度和精度. 相对于 NBODY5 算法<sup>[6]</sup>, Hermite 算法需要的机器内存更少, 且在同样精度下, 时间步长可以更大, 尤其重要的一点是该算法适合于并行计算, 因此被广泛应用于 N 体模拟中.

假设有  $N$  个质点, 其  $t_0$  时刻的速度和位置矢量分别为  $\mathbf{x}_i(t_0), \mathbf{v}_i(t_0) (i = 1 \cdots N)$ . 对于其中某个质点  $i$ , 有  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ , 其所受的加速度为  $\mathbf{a}_0$ , 加速度的时间导数为  $\dot{\mathbf{a}}_0$ .

$$\mathbf{a}_0 = \sum_j Gm_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3}; \quad \dot{\mathbf{a}}_0 = \sum_j Gm_j \left[ \frac{\dot{\mathbf{r}}_j}{r_j^3} - 3(\dot{\mathbf{r}}_j \cdot \mathbf{r}_j) \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^5} \right], \quad (1)$$

其中  $\mathbf{r}_j = \mathbf{x} - \mathbf{x}_j, \dot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{v} - \mathbf{v}_j, r_j = |\mathbf{r}_j|, j \neq i$

首先通过低阶近似对  $t_1$  时刻的速度和位置进行预估:

$$\mathbf{v}_p(t) = \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 \dot{\mathbf{a}}_0 + (t_1 - t_0) \mathbf{a}_0 + \mathbf{v}_0, \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_p(t) = \frac{1}{6}(t_1 - t_0)^3 \dot{\mathbf{a}}_0 + \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 \mathbf{a}_0 + (t_1 - t_0) \mathbf{v}_0 + \mathbf{x}_0. \quad (3)$$

<sup>a</sup>NASA NEWS (Sep. 5, 2005): NASA Finds Evidence Some Comets May Have Become Asteroids. see <http://www.nasa.gov/centers/ames/research/exploringtheuniverse/comets.html>

把上述两式代入 (1) 式后可以把  $t_1$  时刻的加速度  $\mathbf{a}_1$  和加速度的时间导数  $\dot{\mathbf{a}}_1$  确定下来. 由此对  $t_1$  时刻的速度和位置进行矫正, 最后得到 Hermite 算法<sup>[7-9]</sup>:

$$\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1)\Delta t - \frac{1}{12}(\dot{\mathbf{a}}_1 - \dot{\mathbf{a}}_0)\Delta t^2, \quad (4)$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)\Delta t - \frac{1}{12}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)\Delta t^2, \quad (5)$$

其中  $\Delta t = t_1 - t_0$ .

(4) 式的局部截断误差是  $O(\Delta t^5)$ , (5) 式的局部截断误差是  $O(\Delta t^6)$ , (4) 式和 (5) 式的全局误差均为  $O(\Delta t^4)$ . 由 (4) 式和 (5) 式的形式可见 Hermite 算法是时间对称的.

Aarseth<sup>[6]</sup> 给出了计算步长的经验公式:

$$\Delta t = \sqrt{\eta \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{a}^{(2)}| + |\dot{\mathbf{a}}|^2}{|\dot{\mathbf{a}}||\mathbf{a}^{(3)}| + |\mathbf{a}^{(2)}|^2}} \quad (6)$$

误差可以通过  $\eta$  来控制, 在实际应用中经常将  $\eta$  取在 0.01—0.04 之间.

标准的时间步长公式 (6) 在 N 体模拟中有着广泛的应用, Sweatman<sup>[10]</sup> 对此作了比较和讨论. 理论上认为 Hermite 算法可以广泛应用于自引力系统中: 从行星系统的演化到宇宙学模拟, 以下的讨论主要针对行星系统.

Hermite 算法在长时间的两体演化中会引入系统误差, 虽然可以通过缩小步长来控制误差范围, 但是这样比较耗费计算时间. 对于步长的选取通常有两种做法, 一种是取固定步长, 另外一种方法就是通过经验公式计算步长. 事实上对于时间对称的 Hermite 算法, 如果选用固定步长, 轨道半长径不会有长期变化<sup>[11]</sup>. Kokubo 等<sup>[12]</sup> 提出了多次校正的 Hermite 算法 ( $P(EC)^n, n = 1, 2, 3, 4$ ), 可以有效地提高精度. 对于  $P(EC)^n$  算法, 校正次数越多, 时间对称性越好.

根据 Kokubo 等<sup>[12]</sup> 的结果, 采用  $P(EC)^3$  算法计算二体轨道的演化时, 系统能量的相对误差在初始偏心率比较小 ( $e_0 < 0.1$ ) 时几乎一直保持在  $10^{-13}$  以内; 随着偏心率的增大, 误差也随之有明显增长. 当  $e_0 = 0.3$  时, 积分  $10^8$  轨道周期后能量的相对误差是  $10^{-6}$  的量级; 当  $e_0 = 0.5$  时, 能量的相对误差是  $10^{-4}$  的量级. 我们的模拟验证了该结果, 基于该结果, 本文中假想行星的初始偏心率小于 0.3.

### 3 模型与方法

类似 Laskar<sup>[13]</sup> 的做法, 将水星、金星、地球的质量加到太阳上, 忽略冥王星, 而在火星和木星之间增加一个天体, 讨论其演化情况. 若此假想行星的轨道与火星或者木星的轨道产生交叉, 则认为该系统是不稳定的, 反之则认为是稳定的, 即稳定轨道的半长径  $a$  和偏心率  $e$  要满足条件:

$$a_{\text{Mars}}(1 + e_{\text{Mars}}) < a(1 - e) \leq a(1 + e) < a_{\text{Jup}}(1 - e_{\text{Jup}})$$

积分器选择四阶 Hermite 算法, 采用的是 Rainer<sup>[7]</sup> 的程序, 根据我们的问题做了一些修改, 积分时间为一亿年.

已知的太阳系天体的初始位置和速度值采用 DE405(JED 2440400.5) 所给数据, 假想行星的轨道半长径  $a_0$  和偏心率  $e_0$  的初值随机选取 ( $a_0$  的取值范围在 2.0 AU—4.0 AU 之间,  $e_0$  的取值范围是 0—0.3), 共 20 对 (即 20 条轨道). 其他轨道根数取轨道倾角  $i_0 = 0^\circ$ , 升交点经度  $\Omega_0 = 0^\circ$ , 近点角距  $\omega_0 = 0^\circ$ , 初始平近点角  $M_0 = 0^\circ$ . 对假想行星不同质量

$$M = 2.0 \times 10^j \text{ kg} \quad (j = 20, 20.5, 21, 21.5, 22, 24, 25, 26),$$

分别研究了其轨道稳定性<sup>b</sup>.

## 4 数值结果

采用 Hermite 算法  $P(EC)^3$  作为积分器, 我们研究了上述系统的动力学演化情况, 积分步长固定 (约为火星轨道周期的 1/200).

图 1 是初始时刻和最后时刻的半长径和偏心率分布, 对应的假想行星质量为  $2 \times 10^{25}$  kg. 图中的两条曲线为假想行星的轨道与火星或者木星轨道发生交叉的分界曲线.

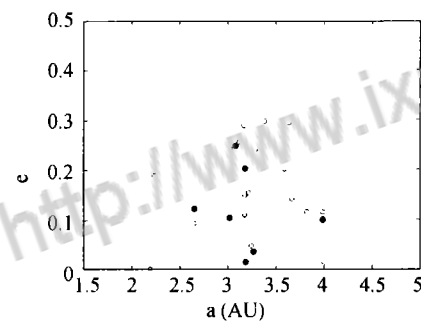


图 1 初始和最后时刻的半长径和偏心率, 假想行星的质量为  $2 \times 10^{25}$  kg, 空心圈表示初始值, 实心圈表示最后时刻的值, 图中虚线之上部分是不稳定区域.

Fig.1 the initial and final values of the semi-major axis and eccentricity. hollow circles: the initial values; solid circles: the final values. The region above the dashed line is unstable. The mass of the imaginary planet is  $2 \times 10^{25}$  kg.

表 1 假想行星的质量与对应的稳定系统比例

Table 1 The ratio of stable systems for different imaginary planets

质量 (kg)	比例
Mass (kg)	ratio
$2.0 \times 10^{20}$	70.0%
$2.0 \times 10^{20.5}$	75.0%
$2.0 \times 10^{21}$	65.0%
$2.0 \times 10^{21.5}$	57.5%
$2.0 \times 10^{22}$	57.5%
$2.0 \times 10^{24}$	35.0%
$2.0 \times 10^{25}$	35.0%
$2.0 \times 10^{26}$	0

表 1 是不同质量假想行星所对应的稳定系统比例, 由表可见, 随着假想行星质量的增加, 稳定的轨道越来越少, 最终当其质量达到  $2 \times 10^{26}$  kg 时, 没有系统能够稳定存在.

图 2 显示的是当系统稳定时系统总能量以及假想行星和火星的轨道半长径和偏心率随时间的变化. 由图可见, 这么大质量的行星对火星轨道的影响不大. 该系统能够稳定存在, 可能的原因是假想行星与木星之间存在 3 : 2 平运动共振, 图 2(f) 是共振角

<sup>b</sup> 数据分开在两台机器上计算, 同一机器上的初始  $a$  和  $e$  是一样的, 也就是说初始的轨道半长径和偏心率一共有两组.

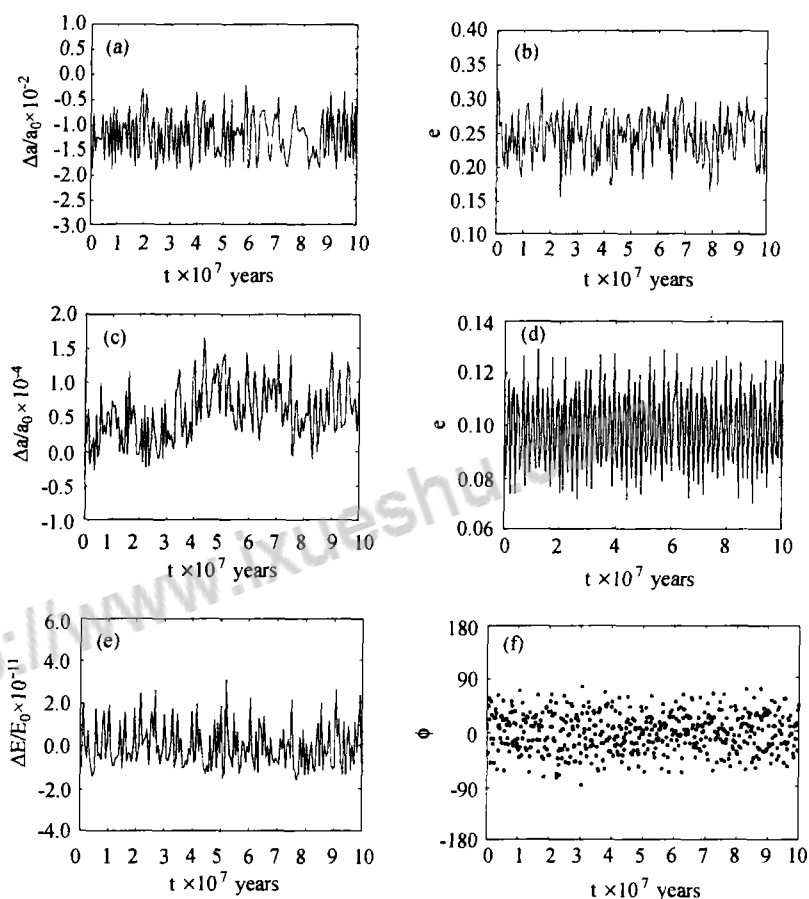


图 2 假想行星和火星的轨道半长径相对误差、偏心率以及系统能量相对误差随时间的变化, 假想行星的质量为  $2 \times 10^{25}$  kg, 初始轨道根数  $a_0 = 3.9951367$  AU,  $e_0 = 0.015642095$ . (a) 假想行星轨道半长径相对误差的变化, (b) 假想行星轨道偏心率的变化, (c) 火星轨道半长径相对误差的变化, (d) 火星轨道偏心率的变化, (e) 系统能量相对误差的变化, (f) 共振角  $\phi = 3\lambda' - 2\lambda - \omega$  随时间的变化.

Fig. 2 The variation of the energy and the imaginary planet's and Mars' orbital elements for  $10^8$  years. The mass of the imaginary planet is  $2 \times 10^{25}$  kg, and  $a_0 = 3.9951367$  AU,  $e_0 = 0.015642095$ . The plots illustrate (a) the relative errors of the imaginary planet's semi-major axis, (b) the variation of the imaginary planet's eccentricity, (c) the relative errors of Mars' semi-major axis, (d) the variation of Mars' eccentricity, (e) the relative errors of the energy, and (f) the variation of the resonant argument  $\phi = 3\lambda' - 2\lambda - \omega$ .

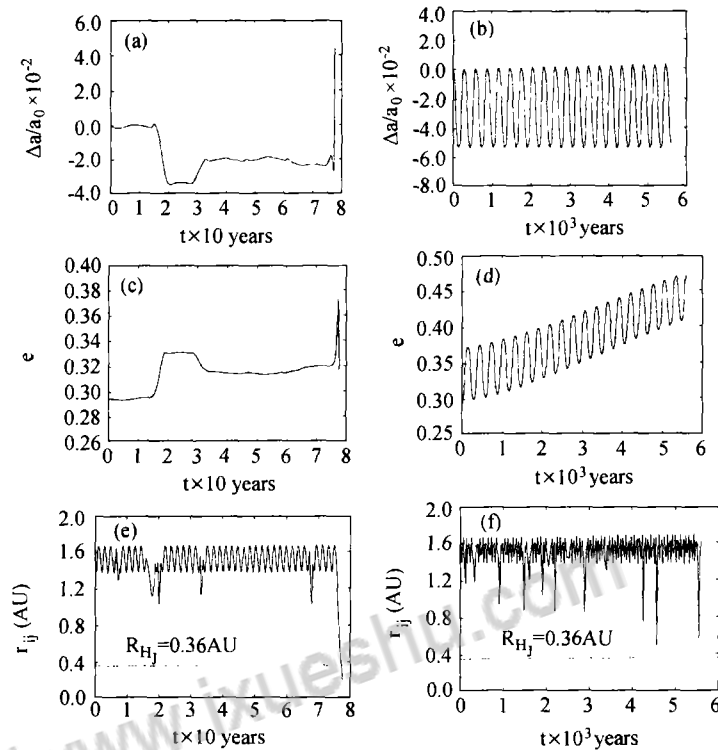


图 3 系统失稳时, 假想行星轨道半长径的相对误差、偏心率, 以及天体间最短距离  $r_{ij}$  随时间的变化, 假想行星的质量为  $2 \times 10^{25}$  kg. 图 (a)、(c) 和 (e) 对应的假想行星的初始轨道根数  $a_0 = 3.6348682$  AU,  $e_0 = 0.29474554$ ; 图 (b)、(d) 和 (f) 对应的初始轨道根数  $a_0 = 3.3810912$  AU,  $e_0 = 0.29862654$ . 图 (e)、(f) 中的虚线表示的是木星的 Hill 半径  $R_{HJ}$ .

Fig. 3 The errors of orbital elements  $a$ ,  $e$  and the minimum distance  $r_{ij}$  between particles  $i$  and  $j$  against time. The mass of the imaginary planet is  $2 \times 10^{25}$  kg. The initial orbital elements of the imaginary planet are  $a_0 = 3.6348682$  AU,  $e_0 = 0.29474554$  in (a),(c),(e), and  $a_0 = 3.3810912$  AU,  $e_0 = 0.29862654$  in (b),(d),(f). The dashed lines in (e),(f) represent  $r_{ij}$  equal to the Hill radius of Jupiter ( $R_{HJ}$ ).

$\phi = 3\lambda' - 2\lambda - \varpi$  随时间的变化 (其中  $\lambda'$  是木星的平黄经,  $\lambda$  是假想行星的平黄经,  $\varpi$  是其近日点黄经), 其变化范围在  $-90^\circ$  到  $90^\circ$  之间. 由此可见, 平运动共振可以使得大质量的天体在主带上稳定存在. 但是对于其他的稳定系统研究则发现, 绝大多数情况下, 假想行星的轨道并没有得到低阶共振的保护. 如此大质量的行星必将会对主带上其他小行星产生较强的摄动 (甚至强于木星的摄动), 从而会影响主带小行星的分布, 并将导致部分小行星被散射出太阳系或者被向内散射, 进而可能穿越地球轨道.

图 3 是系统失稳时, 假想行星轨道半长径的相对误差、偏心率, 以及天体间最小距离  $r_{ij}$  随时间的变化图. 由图可见, 系统失稳的原因可能是天体间发生紧密交会或者是天体间的摄动效应. 图 3(a)、(c) 和 (e) 显示了天体间的紧密交会使得假想行星的轨道半长径和偏心率发生变化, 从而导致系统不稳定 (例图中对应的是假想行星和木星发生交

会 ( $r_{ij} < R_{HJ} = (\frac{M_{Jup}}{3M_{\odot}})^{1/3} a_{Jup} = 0.36 \text{ AU}$ ,  $R_{HJ}$  是木星的 Hill 半径)). 图 3(b)、(d) 和 (f) 则显示了当假想行星受到其他天体摄动时, 其轨道偏心率变大, 从而使系统失去稳定性.

可以对表 1 的数值结果做个估算, 假设在小行星主带上放置多个质量类似于 Ceres 的小天体, 根据行星形成的数值模拟结果<sup>[14]</sup>, 行星胚胎形成后两两之间的间隔约为  $10r_H$ ,  $r_H \sim 2.6(\frac{2M_a}{3M_{\odot}})^{1/3}$ , 其中  $M_a$  是小天体的质量,  $r_H$  是两个小天体共有的 Hill 半径. 假设  $M_a \approx 9 \times 10^{20} \text{ kg}$  (Ceres 的质量), 小行星带宽度为 2.0 AU. 则可加的天体数目约为  $\frac{2}{10r_H} \approx 115$ , 故总质量约为  $115 \times (9 \times 10^{20}) \text{ kg} \approx 1.0 \times 10^{23} \text{ kg}$ . 数值模拟结果显示此质量比能够稳定存在于主带的单个假想行星质量低两个量级.

另外, 我们还模拟了当小行星主带上存在另外一个天体 (小行星 Ceres) 时系统的演化情况, 此时模型中的  $N = 8$ . 计算结果显示质量较大的假想行星在主带上仍然可以稳定存在. 例如初值为  $a_0 = 3.3857 \text{ AU}$ ,  $e_0 = 0$ , 质量  $M = 2 \times 10^{23} \text{ kg}$  的假想行星, 其稳定时标超过  $10^8$  年.

## 5 结论

本文介绍了 N 体模拟的 Hermite 算法, 并且利用该算法研究了太阳系小行星主带上稳定存在一颗大质量行星的可能性, 演化模型是太阳、火星、4 个类木行星以及一个假想行星. 对于不同质量的假想行星计算最后能稳定存在的系统的比例, 发现当假想行星质量增加时, 能够稳定存在的系统比例随之减少, 最后得到主带上假想行星能够稳定存在的质量上限, 其量级为  $10^{25} \text{ kg}$ . 数值模拟还显示在某些情况下, 假想行星与木星之间的低阶共振可以增强系统的稳定性.

## 参 考 文 献

- 1 Pitjeva E. The Dynamic Estimation of the Mass of the Main Asteroid Belt. *Physical Properties and Morphology of Small Solar System Bodies*, 2003, 25th meeting of the IAU, Joint Discussion 19
- 2 Wisdom J. AJ, 1982, 87: 577
- 3 戴文赛, 胡中为, 阎林山, 等. 太阳系演化学 (下册). 上海: 上海科学技术出版社, 1986. 180
- 4 Makino J. ApJ, 1991, 369: 200
- 5 Makino J, Aarseth S J. PASJ, 1992, 44: 141
- 6 Aarseth S J. Direct methods for N-body simulations in Multiple Time Scales ed. J U Brackbill & B I Cohen. New York: Academic Press, 1985. 377
- 7 Rainer S. The Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999, 109: 407
- 8 Hut P, Makino J, Mcmillan S. ApJ, 1995, 443: 93
- 9 Makino J, et al. ApJ, 1997, 480: 432
- 10 Sweatman W. Journ Comp Phys, 1994, 111: 110
- 11 Quinlan D, Tremaine S. AJ, 1990, 100(5): 1694
- 12 Kokubo E, Yoshinaga K, Makino J. MNRAS, 1998, 297: 1067
- 13 Robutel P, Laskar J. Icarus, 2001, 152: 4
- 14 Kokubo E, Ida S. Icarus, 1998, 131: 171

## The Upper Boundary of Mass for An Imaginary Planet in the Main Asteroid Belt

LI Pei-jun ZHOU Ji-lin

(*Department of Astronomy, Nanjing University, Nanjing 210093*)

**ABSTRACT** The stability of an imaginary planet located in the present main asteroid belt is studied, with a 7-body model (the Sun, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune and an imaginary planet). The fourth order Hermite scheme  $P(EC)^3$  is used, which has very little secular energy error for the integration of periodic orbits with constant time-step. The evolution of orbits are followed up to  $10^8$  years. Numerical results show that, the lower order resonances with Jupiter can enhance the stability of the imaginary planet in some cases. The survival probability of the imaginary planet decreases with the planet mass. The upper boundary of the imaginary planet's mass that can be survived in the main belt is around  $10^{25}$  kg, near Earth's mass.

**Key words** celestial mechanics: numerical method, N-body simulation, planetary systems: solar system





知网查重限时 7折 最高可优惠 120元

本科定稿，硕博定稿，查重结果与学校一致

立即检测

免费论文查重: <http://www.paperyy.com>

3亿免费文献下载: <http://www.ixueshu.com>

超值论文自动降重: [http://www.paperyy.com/reduce\\_repetition](http://www.paperyy.com/reduce_repetition)

PPT免费模版下载: <http://ppt.ixueshu.com>

---