1999年 第17卷 第3期　　长春邮电学院学报　　1999 Vol.17 No.3
OMMUNICATION INSTITUTE

文章编号: 1000-1794 (1999) 03-0069-02

引力场中行星轨道的对称性及其周期的求解°

The symmetry of planetary orbits in gravitation field and the solution to orbits period

刘志明

LIU Zhi-ming

(长春水利电力高等专科学校 基础部, 吉林 长春 130012)

(Institute of Changchun Water Conservancy and Electric Power, Changchun 130012, China)

摘要: 利用微分递推关系展开行星在引力场中的束缚运动轨道方程, 证明了其轨道关于极值点的角对称性, 并引用欧拉极限定理, 求解了其周期。该方法回避了复杂的方程求解过程, 对不易求解的微分方程具有较强的实用性。

关键词: 引力场; 对称性; 周期　　**Key words**: Gravitational field; Period; Symmetry

中图分类号: O412.1　　**文献标识码**: B

行星近日点的进动, 是近代物理学中可观测现象之一。由于其运动方程是非线性的, 不易完全求解, 因而诸如轨道的对称性、运动周期的大小等特征参数只能在原微分方程的基础上累进近似计算[1]。笔者将原方程直接展开, 证明了行星轨道关于极值点的角对称性, 并求解了其周期。

根据引力理论, 行星的运动轨道方程[2]为

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{h^2}{r^4} = \alpha^2 - \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{1}$$

式 (1) 中极径 r 为行星与日球间的距离, φ为极角, M 为日球的长度质量, h 为"Kepler 等面积定律"常数, α为常数。

作 $u=\frac{1}{r}$ 变换, 式 (1) 化为

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{\alpha^2 - 1}{h^2} + \frac{2Mu}{h^2} + 2Mu^3 \tag{2}$$

微分上式可得

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{M}{h^2}(1 + 3h^2u^2) \tag{3}$$

在轨道极值点将 u 展开, 则

$$u(\varphi) = u_{(0)} + u'_{(0)}\varphi + \frac{u''_{(0)}}{2!}\varphi^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}_{(0)}}{n!}\varphi^n \tag{4}$$

式 (4) 中的 $u^{(n)}_{(0)}$ 由式(3) 递推求得 $u^{(n+2)} = 3M(u^2)^{(n)} + (M/h^2 - u)^{(n)}$。

1　u 关于极值点的对称性

取展开中心为轨道的极值点 (近日点), 并选取坐标系, 使某一极值点位于 $\varphi=0$位置, 则 $u'_{(0)}=0$。在 $(0, u_{(0)})$ 点展开 u, 此时

$$u'_{(0)} = 0$$

° 收稿日期: 1999-03-04
作者简介: 刘志明 (1965—), 男, 吉林集安人, 长春水利电力高等专科学校工程师, 主要从事数学物理方法研究。

$$u^{(3)}_{(0)} = 6M u_{(0)} u'_{(0)} - u'_{(0)} = 0$$

$$\vdots$$

$$u^{(2k+3)}_{(0)} = 3M\left(u^{2}_{(0)}\right)^{(2k+1)} - u^{(2k+1)}_{(0)} = 3M\sum_{i=0}^{2k+1}\binom{i}{2k+1} u^{i}_{(0)} u^{(2k+1-i)}_{(0)} - u^{(2k+1)}_{(0)} \tag{5}$$

利用数学归纳法，设 $k \leq l$ 时，$u^{(2k+1)}_{(0)} = 0$，由式 (5) 可知，当 $k = l+1$时，$u^{(i)}_{(0)} u^{(2l+1-i)}_{(0)} = 0$ (因 $i + 2l + 3 - i = 2l + 3$为奇数，且 $i \leq 2l+3$，故乘积两项中必有一项微分指数为小于等于$2l+1$的奇数，由设定知，该项应为零)，因此 $u^{(2l+3)}_{(0)} = 0$。

原展开式为

$$u(\varphi) = u_{(0)} + \frac{u^{(2)}_{(0)}}{2!}\varphi^{2} + \frac{u^{(4)}_{(0)}}{4!}\varphi^{4} + \cdots + \frac{u^{(2n)}_{(0)}}{(2n)!}\varphi^{2n} \tag{6}$$

因而可以归纳得出结论，u 在极点的展开式只有偶次项，换言之，u 关于极点是对称的。

2 运动轨道周期的求解

由于该轨道的对称性，从一个极值点沿正向、反向到达相邻极值点的角位移相等，该角位移为半周期 $T_{1/2}$，且$\pm nT_{1/2}$处均有 $u'_{(\pm nT_{1/2})} = 0$。

将式 (6) 微分一次，并令其等于零，得

$$u^{(2)}_{(0)}\varphi\left[1 + \frac{u^{(4)}_{(0)}}{3!}\varphi^{2} + \frac{u^{(6)}_{(0)}}{5!}\varphi^{4} + \cdots + \frac{u^{(2n)}_{(0)}}{(2n-1)!}\varphi^{2n-2}\right] = 0 \tag{7}$$

该无穷级数方程的解限定于轨道的极值点，因此，$\pm nT_{1/2}$, $n = 0, 1, 2\cdots$，构成式 (7) 的完全解集[3]，则式(7) 可因式分解为

$$u^{(2)}_{(0)}\varphi\left(1 + \frac{\varphi}{T_{1/2}}\right)\left(1 - \frac{\varphi}{T_{1/2}}\right)\left(1 + \frac{\varphi}{2T_{1/2}}\right)\left(1 - \frac{\varphi}{2T_{1/2}}\right)\cdots\left(1 + \frac{\varphi}{nT_{1/2}}\right)\left(1 - \frac{\varphi}{nT_{1/2}}\right) = 0$$

将乘积展开，则得

$$\left[1 - \left(1 + \frac{1}{2^{2}} + \frac{1}{3^{2}} + \cdots + \frac{1}{n^{2}}\right)\frac{\varphi^{2}}{T^{2}_{1/2}} + \cdots\right]\varphi u''_{(0)} = 0 \tag{8}$$

对式 (7) 与式(8) 的同幂项进行比较，则得 $\frac{u^{(4)}_{(0)}}{3!} = -\frac{u''_{(0)}}{T^{2}_{1/2}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{2}}$，引用欧拉定理[3]，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}} = \frac{\pi^{2}}{6}$，可得半周期表达式 $T_{1/2} = \pi\sqrt{\frac{u''_{(0)}}{u^{(4)}_{(0)}}} = \pi\sqrt{\frac{1}{1-6Mu_{(0)}}}$，此式与累进近似方法所计算的结果是完全符合的。

3 结束语

本文采用的方法，限定于束缚轨道的递推展开，并且仅当 r 关于 φ对称的情况下，才可以通过展开系数比较，利用特殊极限，进行求解微分方程的原函数特征数值；对于其他多极点问题，尚需仔细考察极点间的等距性和对称性，才可以确定能否运用此法进行分析。

参考文献：

[1] 王正行. 近代物理学 [M]. 北京：北京大学出版社，1995. 512～514.

[2] 吴大猷. 理论物理（第四册）[M]. 北京：科学出版社，1983. 213.

[3] W Dunham. JOURNEY THROUGH GENIUS [M]. Washington: John Wiley & Sons, Inc, 1990. 241.