数学复习表

1 Vector Space

1. Vector Space

向量空间 V 是一个由向量组成的集合, 对向量加法和乘法运算封闭, 也就是

- 对任意 $v_1, v_2 \in V$, 有 $v_1 + v_2 \in V$.
- 对任意向量 $v \in V$, 数字 $c \in R$, 有 $cv \in V$.

2. Subspace

如果一个向量空间的子集也对加法和乘法封闭, 则这个子集被称为子空间. 【两个子空间的交集也构成子空间, 并集则不一定】

—————————— Problem 1(a) ——————————

3. The Cartesian product of two vector spaces

对两个向量空间 V_1, V_2, 他们的笛卡尔积是一个新的向量空间, 定义为

$$V_1 \times V_2 = \{(a, b) : a \in V_1, b \in V_2\}.$$

4. Linear combination

$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ 被称为 $v_1, \ldots, v_n$ 的线性组合.

5. Linear dependence and linear independence of vectors

如果 $v_1, \ldots, v_n$ 中的其中某个向量可以表示为其他向量的线性组合, 则称他们是线性相关的. 反之则线性独立.

如果 $v_1, \ldots, v_n$ 线性独立, 当且仅当

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$$

时必定有 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

6. Subspace spanned by vectors

一组向量的所有线性组合构成一个子空间. (事实上此时已经把所有的向量加法和数乘都涵盖进去了, 所以肯定是对加法和乘法封闭的.)

7. Basis of a vector space

如果一组向量张成的子空间恰好就是整个向量空间 V, 就称这组向量为 V 的一组基. 换言之, 要证明 $v_1, \ldots, v_n$ 是一组基, 只需要证明 V 中的任何一个向量都可以写成 $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ 的形式.

8. Dimension of a vector space, dimension of a subspace, codimension, hyperplane

向量空间或子空间的维数是指它的一组基中含有多少个向量，记作 $\dim V$.

子空间 W 的余秩是指 $\dim V - \dim W$.

n 维向量空间的超平面是指它的 $n-1$ 维子空间. 因为平时我们看到的空间一般是 3 维空间, 平面就是 2 维的, 所以这里被称为超平面.

Problem 1(b)

2 Linear maps between vector spaces and matrices

1. Linear maps

从向量空间 V 到 W 的映射 f 如果被称为线性映射, 是指

- 对任意 $v_1, v_2 \in V$, 有 $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.
- 对任意向量 $v \in V$, 数字 $c \in R$, 有 $f(cv) = cf(v)$. (取 $c = 0$, 这意味着总有 $f(0) = 0$).

2. Endomorphism, automorphism, isomorphism

对 V 上的线性映射 f 来说, 如果它的像依旧在 V 上, 则称 f 是自同态 Endomorphism. 进一步地, 如果它的像恰好也是 V, 则称为自同构 automorphism, V 中的向量两两成对一一对应.

如果 V 到 W 的映射 f 是一一对应, 则称为同构 isomorphism.

3. Null space, kernel

$\ker f = \{v \in V : f(v) = 0\}$.

4. Image, range of a linear map

$\text{Im } f = \{w \in W : \exists v \in V, s.t. f(v) = w\}$.

5. Rank and nullity. The rank-nullity theorem

秩和零度:

- **秩（Rank）：** 线性映射 $T : V \to W$ 的秩，表示为 $\text{Rank}(T)$，是该线性映射值域（像）的维度。
- **零度（Nullity）：** 映射 T 的零度，表示为 $\text{Nullity}(T)$，是该线性映射核（零空间）的维度。

秩-零度定理: 秩-零度定理表明对于任意线性映射 $T : V \to W$，其中 V 和 W 是向量空间：

$$\text{Rank}(T) + \text{Nullity}(T) = \dim(V)$$

Problem 2

6. **可逆线性映射（Invertible Linear Maps）：**

- **定义：** 一个线性映射 $T : V \to W$ 被称为可逆，如果存在另一个线性映射 $S : W \to V$，使得 $S \circ T$ 和 $T \circ S$ 都是恒等映射。
- **符号表示：** 如果 T 可逆，则称 T 的逆映射为 T^{-1}。

7. **核的特征（Characterization with the Kernel）：**

- 一个线性映射 $T : V \to W$ 是单射（一对一）当且仅当其核（零空间）只包含零向量，即 $\text{Ker}(T) = \{0\}$。
- 一个线性映射 $T : V \to W$ 是满射（到上）当且仅当其核的维度为零，即 $\text{Nullity}(T) = 0$。

8. **正规与奇异线性映射（Regular and Singular Linear Maps）：**

- **正规映射：**如果线性映射 $T: V \to W$ 可逆，即存在逆映射 T^{-1}，则 T 被称为正规映射。
- **奇异映射：**如果线性映射 $T: V \to W$ 不可逆，即不存在逆映射 T^{-1}，则 T 被称为奇异映射。

9. **矩阵可以被看作线性映射的表示：**

- **定义：**对于一个线性映射 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，可以用矩阵 A 来表示。
- **表示方法：**考虑 T 将 $\mathbb{R}^n$ 中的向量映射到 $\mathbb{R}^m$ 中的向量，其中 T 的标准基是 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$。这里，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基向量。矩阵 A 的列向量是 T 对应于标准基向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 的像。因此，矩阵 A 的第 j 列是 T 对应于 $\mathbf{e}_j$ 的像。

矩阵可以被看作线性映射的表示例子：

考虑一个线性映射 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，其矩阵表示为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

这个线性映射将二维欧几里得空间中的向量映射到自身。矩阵 A 的列向量是映射的结果，其中第一列是 T 对标准基向量 $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的映射，而第二列是 T 对 $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的映射。

这个映射的具体效果是：

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

我们可以计算矩阵乘法，得到：

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ -y \end{bmatrix}$$

这个例子说明了矩阵 A 如何表示一个从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的线性映射。通过将输入向量与矩阵相乘，我们得到了映射后的结果向量。这种表示法在线性代数和计算机图形学等领域中具有广泛的应用。

这个定义说明了同一个线性变换在不同基下对应的矩阵不同。

10. **可逆性（Invertibility）：** 一个 $n \times n$ 的矩阵 A 被称为可逆矩阵，如果存在另一个 $n \times n$ 的矩阵 B，使得 $AB = BA = I$，其中 I 是 $n \times n$ 的单位矩阵。

11. **行列式（Determinant）：** 一个 $n \times n$ 的矩阵 A 的行列式，表示为 $\det(A)$。如果 $\det(A) \neq 0$，则 A 可逆。

12. **矩阵和线性映射对应的例子： 旋转算子（Rotation Operator）：** 一个 2×2 的旋转矩阵可以表示为：

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

可以把一个向量映射为它绕原点旋转 θ 角度后的向量.

向量投影到 x-y 平面：

$$\mathrm{proj}_{\text{x-y}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

其矩阵形式:

$$P_{\text{x-y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problem 6

微分算子和积分算子

13. **矩阵的秩（Rank）：** 矩阵的秩可以定义为矩阵中线性无关的行向量（或列向量）的最大数量。

14. **特征值和特征向量（Eigenvalues and Eigenvectors）：** 对于线性映射 $T : V \to V$，一个数 λ 被称为 T 的特征值，如果存在一个非零向量 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$。特征向量 $\mathbf{v}$ 是与特征值 λ 相关联的非零向量。

15. **特征方向和特征空间（Eigendirection and Eigenspace）：** 特征方向是指特征向量所在的方向。特征空间是由所有与特征值 λ 相关联的特征向量所生成的子空间。

16. **矩阵的谱（Spectrum）、特征多项式（Characteristic Polynomial）：** 矩阵 A 的谱是由所有特征值组成的集合，记作 $\sigma(A)$。矩阵 A 的特征多项式是一个关于变量 λ 的多项式，表示为 $\det(A - \lambda I)$。

17. **代数重数（Algebraic Multiplicity）：** 特征值 λ 在矩阵或线性映射的特征多项式中的重数称为代数重数。代数重数等于特征多项式中 λ 的幂的最高次数, 也就等于 λ 作为几重根.

18. **几何重数（Geometric Multiplicity）：** 特征值 λ 对应的特征空间的维度称为几何重数。几何重数表示由特征值生成的特征空间的维度。**计算几何重数的步骤：** 1. 找到特征值 λ 对应的特征空间，解 $(A-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 来找到特征向量 $\mathbf{v}$。 2. 特征空间的维度即为几何重数，可以通过线性无关特征向量的个数来确定。

19. **投影矩阵的特征值（Eigenvalues of a projection）：** 投影矩阵 P 是一个满足 $P^2 = P$ 的方阵。其特征值是0或1。【一个矩阵 A 的特征值如果是λ, 则 $a_n A^n + \cdots + A + I$ 的特征值是 $a_n\lambda^n + \cdots + \lambda + 1$。在这里 $P^2 = P$ 意味着 P 的特征值 λ 必须满足 $\lambda^2 = \lambda$。】

20. **矩阵迹和特征值的关系：** 矩阵的迹 $\mathrm{tr}(A)$ 是矩阵主对角线上元素的和，即 $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$。

其中，a_{ii} 是矩阵 A 的主对角线上的元素。

与矩阵的迹相关的是特征值（Eigenvalues）。对于一个矩阵 A，其特征值通过解以下特征方程得到：

$\det(A - \lambda I) = 0$

特征值 λ 与矩阵的迹有着紧密的联系。事实上，矩阵的迹等于其特征值的和。

$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

其中，λ_i 是矩阵 A 的特征值。

21. **矩阵的行列式：** 矩阵的行列式 $\det(A)$ 表示为：

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特征值与行列式： 矩阵 A 的特征值与其行列式有关，通过解以下特征方程得到：

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

特征值 λ 与矩阵的行列式有紧密的联系。

转置与行列式： 矩阵的转置 A^T 与其行列式的关系为：

$$\det(A^T) = \det(A)$$

即，矩阵的转置不改变其行列式的值。

逆矩阵与行列式： 矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 与其行列式的关系为：

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

逆矩阵的行列式等于原矩阵行列式的倒数。所以 $\det(A)$ 不等于0才可逆.

22. **相似矩阵：** 两个矩阵 A 和 B 被称为相似矩阵，如果存在可逆矩阵 P 使得 $B = P^{-1}AP$。

基变换: 假设有两组基底 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n]$ 和 $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n]$，满足

$$[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n]P$$

这一变换主要用于计算同一线性变换在不同基下对应的不同矩阵。

如线性变换 $f[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n]B$, 在基 $\mathbf{B}$ 下的矩阵为B. 如要把基 $\mathbf{B}$ 换成基 $\mathbf{C}$, 则对应矩阵变为

$$f[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n] = f[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n]PB$$

Problem 7

不变量： 相似矩阵拥有相同的一些不变量，包括特征值、迹和行列式。

特征值： 相似矩阵有相同的特征值。特征值是线性变换中不变的标志，反映了变换的特定性质。

迹： 相似矩阵有相同的迹。迹是矩阵主对角线上元素的和，也是线性变换中的不变量。

行列式： 相似矩阵有相同的行列式。行列式是线性变换导致体积缩放的度量，也是不变的特性。

这些不变量使得相似矩阵在矩阵理论和线性代数中具有重要的应用，特别是在变换矩阵的不同基之间切换时。

23. **Cayley–Hamilton定理：** 对于任意一个矩阵 A，其特征多项式 $\det(A - \lambda I)$ 满足以下关系：

$$\det(A - \lambda I) = \mathrm{char}_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{tr}(A^k) \lambda^{n-k}$$

其中，$\mathrm{char}_A(\lambda)$ 是矩阵 A 的特征多项式，n 是矩阵的阶数，$\mathrm{tr}(A)$ 是矩阵的迹，I 是单位矩阵。

Cayley–Hamilton定理说明，将矩阵 A 的特征多项式代入其自身，得到零矩阵。

$$\mathrm{char}_A(A) = \mathbf{0}$$

这个定理在控制理论、信号处理等领域有广泛的应用，为矩阵的多项式表示提供了一个重要的理论基础。

24. **伴随矩阵：** 对于一个 $n \times n$ 的矩阵 $A = [a_{ij}]$，其伴随矩阵（也称为伴随阵或附属矩阵）记作 $\mathrm{adj}(A)$ 或 A^*，其中元素由代数余子式组成：

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

其中，C_{ij} 是矩阵 A 的代数余子式，计算方式为 $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$，$M_{ij}$ 是剔除第 i 行和第 j 列后的子矩阵。

逆矩阵的伴随矩阵法： 对于一个可逆矩阵 A，其逆矩阵 A^{-1} 可以通过伴随矩阵法表示：

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)$$

其中，$\det(A)$ 是矩阵 A 的行列式，$\mathrm{adj}(A)$ 是 A 的伴随矩阵。

25. **行列式乘积公式：** 对于两个矩阵 A 和 B，它们的乘积矩阵的行列式等于它们各自的行列式的乘积：

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

26. **多项式矩阵：** 对于一个一元多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$ 和一个 $n \times n$ 的矩阵 A，我们定义多项式矩阵 $p(A)$ 如下：

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_k A^k$$

其中，I 是单位矩阵，指数表示矩阵的幂。注意，多项式中的每一项都是一个矩阵乘以多项式中的相应系数。

27. **矩阵函数：** 对于一个函数 $f(x)$，以及一个 $n \times n$ 的矩阵 A，我们可以通过泰勒级数展开定义矩阵函数 $f(A)$：

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + \frac{a_2}{2!} A^2 + \frac{a_3}{3!} A^3 + \dots$$

其中，系数 a_k 由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的 k 阶导数值除以 k 阶阶乘得到。

这个定义允许我们将一个函数应用于矩阵，通过将矩阵替换为该函数在泰勒级数中的相应项。

28. **通过Hermite–Lagrange插值计算矩阵函数：** 对于一个函数 $f(x)$ 和一个 $n \times n$ 的矩阵 A，我们可以使用Hermite–Lagrange插值计算矩阵函数 $f(A)$。

Hermite–Lagrange插值公式： 对于一个函数 $f(x)$，我们可以通过以下插值公式在点 $x = a$ 处计算 $f(A)$：

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n} f(a_k) L_k(A)$$

其中，$L_k(A)$ 是Lagrange插值基函数, $L_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - a_j}{a_k - a_j}$ ，a_k 是选定的插值点。

例子： 以下是一些常见矩阵函数的例子：

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

$$\sin(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}$$

这些例子中使用了Hermite–Lagrange插值公式来计算矩阵函数，通过泰勒级数展开的方式。

Problem 11-14

29. **交换子的性质：** 如果 $AB = BA$, 那么 $f(AB) = f(BA)$.

特征值的性质：

$$\text{如果 } A \text{ 有特征值 } \lambda, \text{ 那么 } f(A) \text{ 有特征值 } f(\lambda).$$

30. **投影矩阵的关系：** 对于任何有限维度的投影矩阵 P，其中 e 是投影矩阵 P 的秩，有以下关系：

$$eP = I + (e-1)P$$

其中，I 是单位矩阵。

31. **可交换性与指数：** 如果矩阵 A 和 B 可交换（即，$AB = BA$），则：

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

Problem 10

32. e^{At} **在一阶线性常微分方程组中的应用：** 考虑一阶线性常微分方程组：

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

其中，A 是常系数矩阵。方程的解可以通过矩阵指数 e^{At} 表示，具体形式为：

$$x(t) = e^{At}x_0$$

其中，x_0 是初始条件。

Liouville 公式： 如果 A 是对称矩阵，那么 Liouville 公式表达为：

$$\det(e^{At}) = e^{\mathrm{tr}(At)}$$

其中，det 表示行列式，tr 表示迹（矩阵的主对角线上元素之和）。

这个公式在矩阵指数的背景下具有一定的应用，特别是在描述线性常微分方程组的解和对称矩阵的指数运算时。

—— Problem 16 ——