第七章

向量代数与空间解析几何

第一部分 向量代数

第二部分 空间解析几何

在三维空间中：

空间形式 — 点，线，面

$\downarrow\uparrow$

数量关系 — 坐标，方程（组）

基本方法 — 坐标法；向量法

7.1 向量及其线性运算

一、向量的概念

二、向量的线性运算

一、向量的概念

向量：既有大小, 又有方向的量称为向量 (又称矢量).

表示法：有向线段 $\overrightarrow{M_1 M_2}$, 或 $\vec{a}$, 或$\mathbf{a}$.

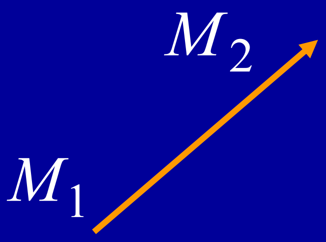
向量的模 ：向量的大小, 记作 $|\overrightarrow{M_1 M_2}|$, 或 $|\vec{a}|$, 或 $|\mathbf{a}|$.

向径 (矢径)：起点为原点的向量.

自由向量：与起点无关的向量.

单位向量：模为 1 的向量,记作 $\vec{a}^{\circ}$ 或 $\mathbf{a}^{\circ}$.

零向量：模为 0 的向量，记作 $\vec{0}$,或 $\mathbf{0}$.



定义： 若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$大小相等, 方向相同,

则称$\vec{a}$与$\vec{b}$相等, 记作$\vec{a}=\vec{b}$;

$\vec{a}=\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ 分别连接 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的起点与终点的两条线段连同向量本身构成一个平行四边形。

定义： 与$\vec{a}$的模相同, 但方向相反的向量称为

$\vec{a}$ 的负向量, 记作$-\vec{a}$;

定义： 若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相同或相反，

则称$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，记作$\vec{a} // \vec{b}$；

规定：零向量与任何向量平行；

定义： 因平行向量可平移到同一直线上，

故两向量平行又称两向量共线 .

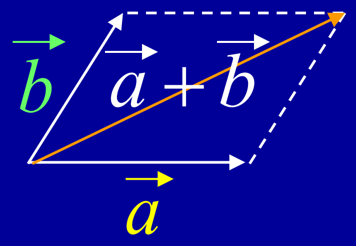
平行与同一平面的一组向量叫做共面向量。

若 $k\,(\geq 3)$个向量经平移可移到同一平面上，则称此 k 个向量共面 .

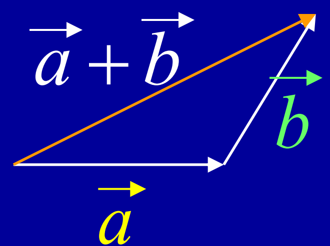
二、 向量的加减运算

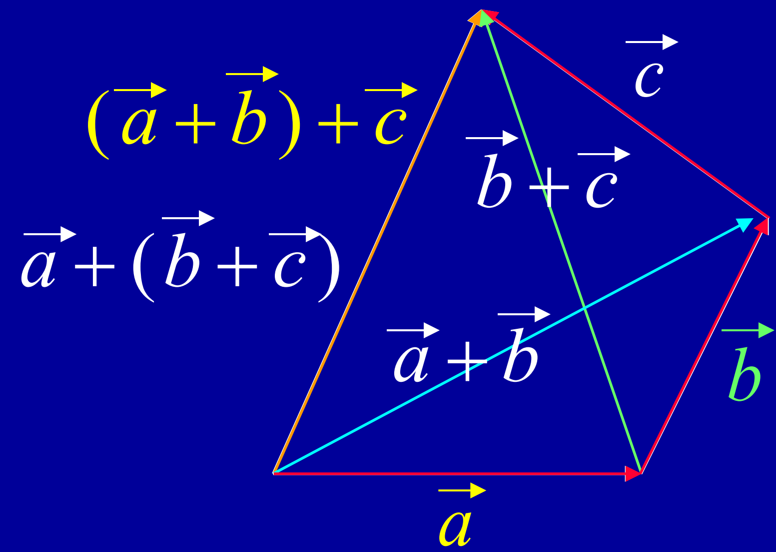
定义： 向量的加法

平行四边形法则:



三角形法则:



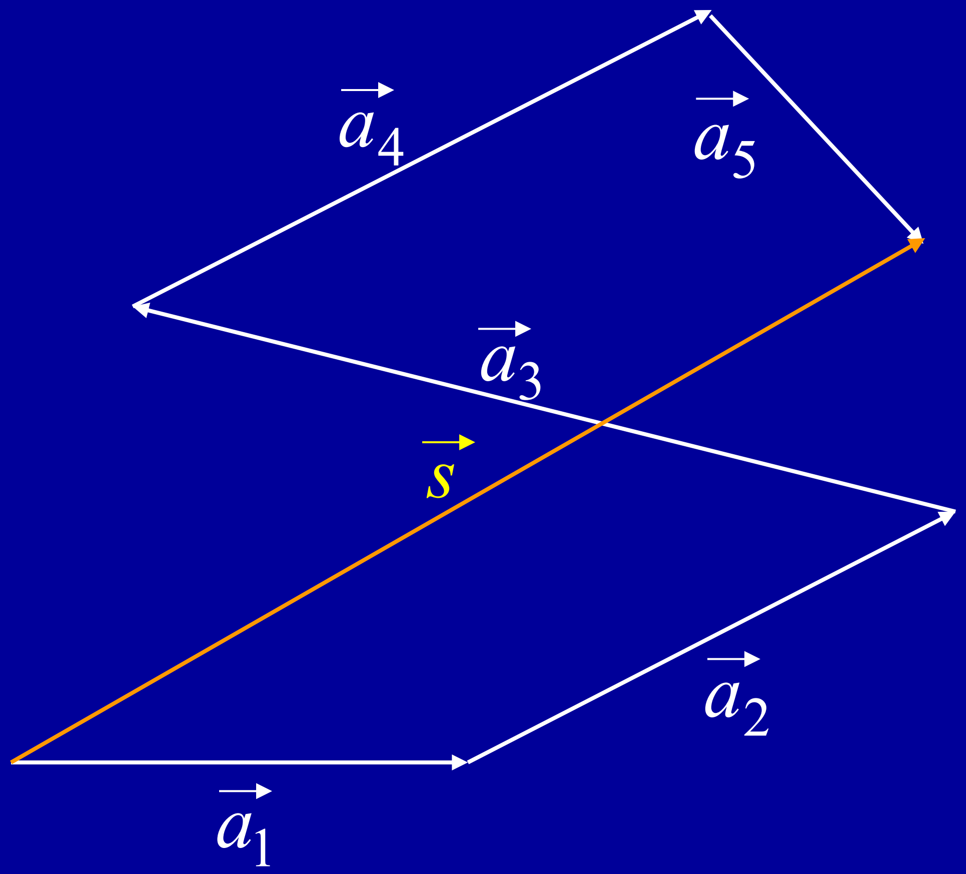


运算规律：交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

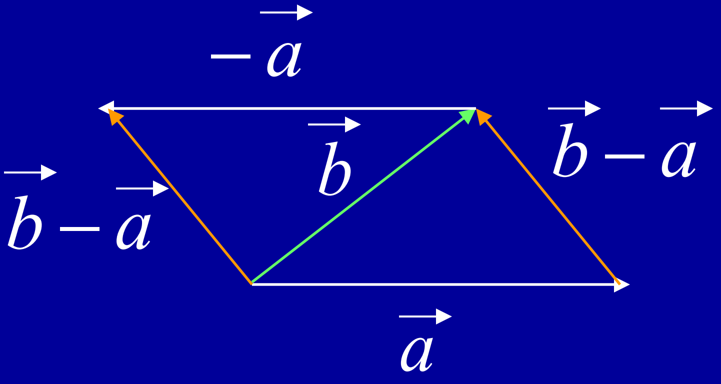
三角形法则可推广到多个向量相加 .

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$$



定义：　向量的减法

$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$$



特别当$\vec{b}=\vec{a}$时,有

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

三角不等式

$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

三、 向量与数的乘法

定义: λ 是一个数 , λ 与 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量, 记作 $\lambda\vec{a}$.

规定 : $\lambda>0$时, $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向, $|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda<0$时, $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向, $|\lambda\vec{a}|=-\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda=0$时, $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

总之: $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\,|\vec{a}|$

若$\vec{a}\neq\vec{0}$, 则有单位向量 $\vec{a}^{\circ}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 因此

$$\boxed{\vec{a}=|\vec{a}|\,\vec{a}^{\circ}}$$

运算律：

结合律 $\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

向量的加减及数乘运算统称为向量的线性运算。

定理　若$\vec{e}\neq 0$，$\vec{r}$和$\vec{e}$共线（平行）$\Leftrightarrow \vec{r}=x\vec{e}$ 且 x 被 $\vec{r}$ 和 $\vec{e}$ 唯一确定。此时的$\vec{e}$称为用线性组合表示共线向量的基底(base)

证：($\Leftarrow$)　由定义可知

($\Rightarrow$)　设 $\vec{r}\,/\!/\,\vec{e}$，则：

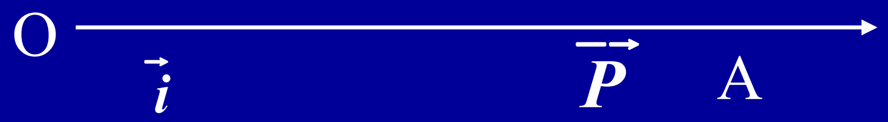
$$\left.\begin{array}{l}\vec{r},\vec{e}\text{ 反向}\Rightarrow\text{取 } x=-\dfrac{|\vec{r}|}{|\vec{e}|}\\[2ex] \vec{r},\vec{e}\text{ 共向}\Rightarrow\text{取 } x=\dfrac{|\vec{r}|}{|\vec{e}|}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{r}=x\vec{e}$$

唯一性 $\vec{r}=x\vec{e}=\mu\vec{e}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(x-\mu)\vec{e}=0\\ \vec{e}\neq\vec{0}\end{array}\right\}\Rightarrow x=\mu$$

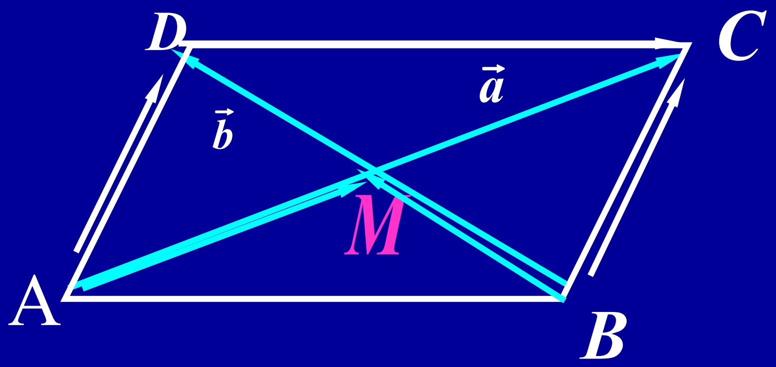
上述定理是建立数轴的理论依据。

点P $\leftrightarrow$ 向量$\overrightarrow{OP}=xi\leftrightarrow$ 实数x



数轴上点P的坐标为$x\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=xi$

例1 试用向量方法证明：对角线互相平分的四边形必是平行四边形.



证 $\because \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$

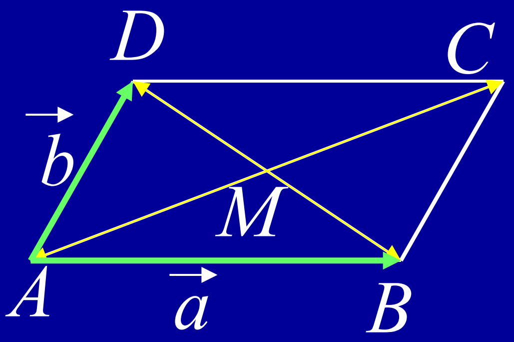
$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行且相等，结论得证.

例2. 设 M 为 $\square ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$.

解: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MA}$

$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{MB}$



$\therefore\ \overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\qquad \overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\qquad \overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

例3. 设 AM 是ΔABC的中线，求证：$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

解：

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$$

$$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MB}=0$$

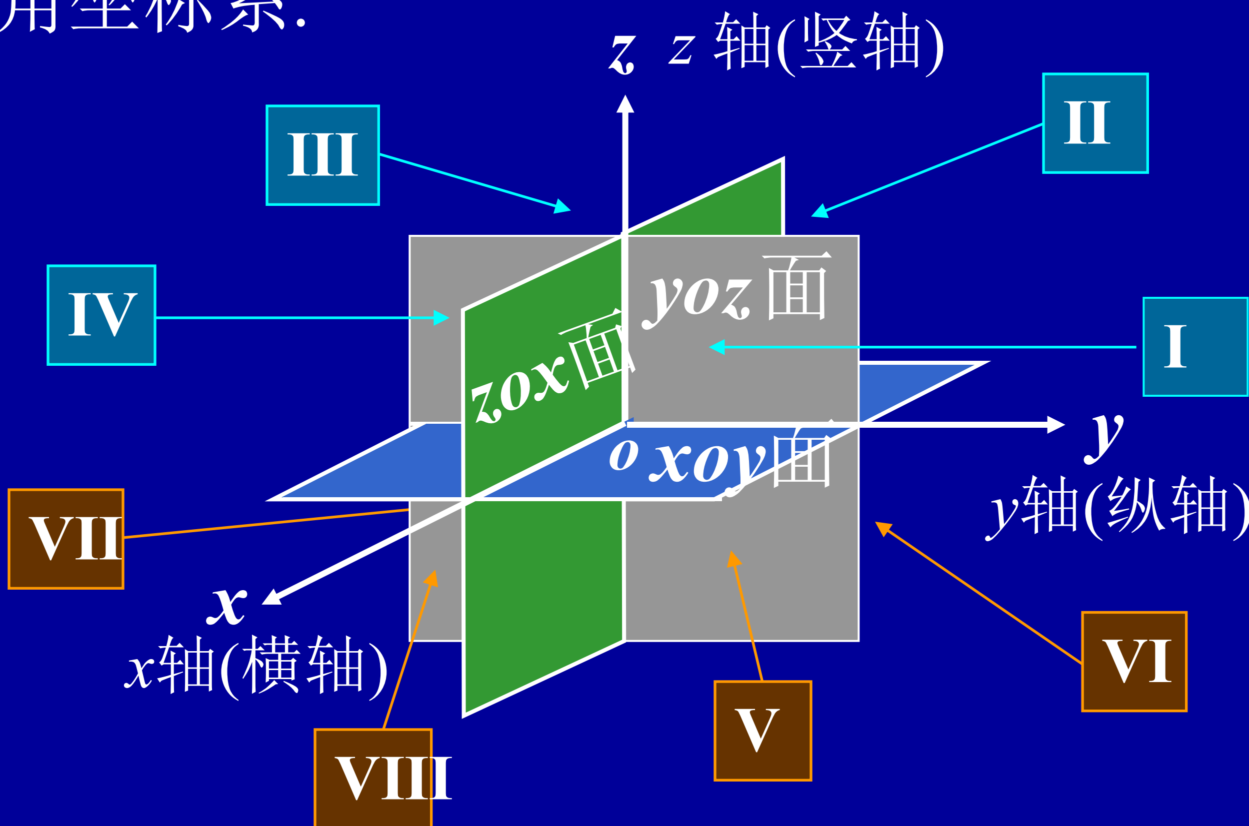
$$\therefore 2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

7.2 点的坐标与向量的坐标

一、 空间直角坐标系的基本概念

过空间一定点 o ,由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个空间直角坐标系.

- 坐标原点
- 坐标轴
- 坐标面
- 卦限(八个)



在直角坐标系下

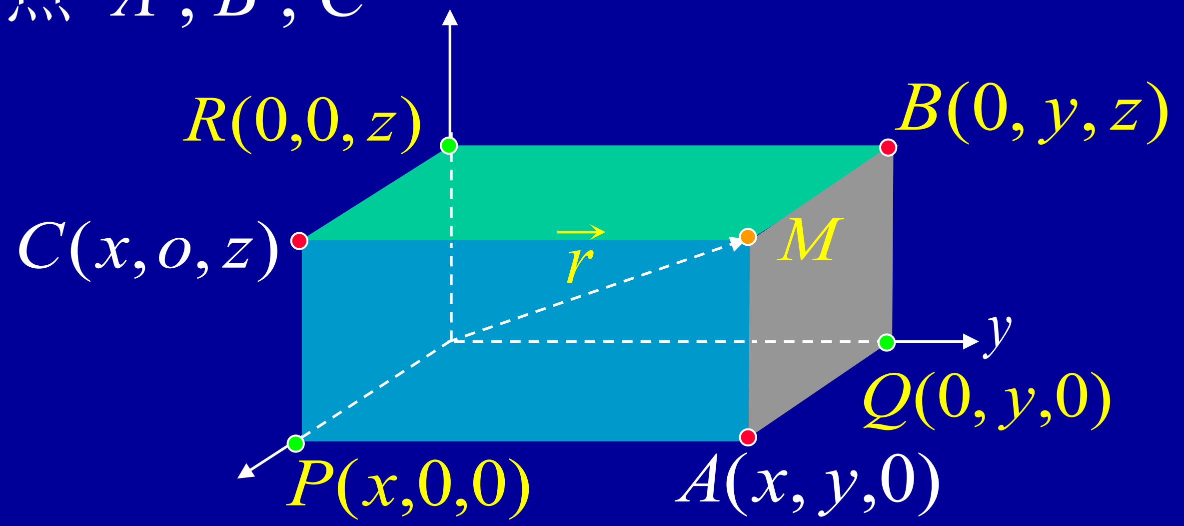
点 $M \xleftrightarrow{\text{1--1}}$ 有序数组 $(x, y, z) \xleftrightarrow{\text{1--1}}$ 向径 $\vec{r}$

(称为点 M 的**坐标**)

特殊点的坐标 ：

原点 $O(0,0,0)$ ； 坐标轴上的点 P, Q, R ;

坐标面上的点 A, B, C



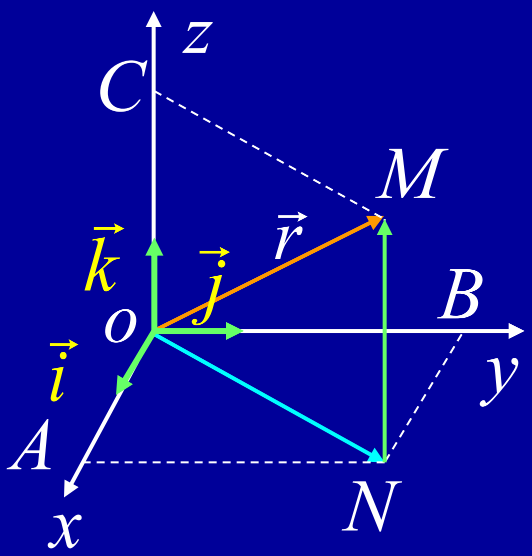
在空间直角坐标系下，任意向量 $\vec{r}$ 可用向径 $\overrightarrow{OM}$ 表示.

以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别表示 x, y, z 轴上的单位向量，设点 M 的坐标为 $M(x, y, z)$，则

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

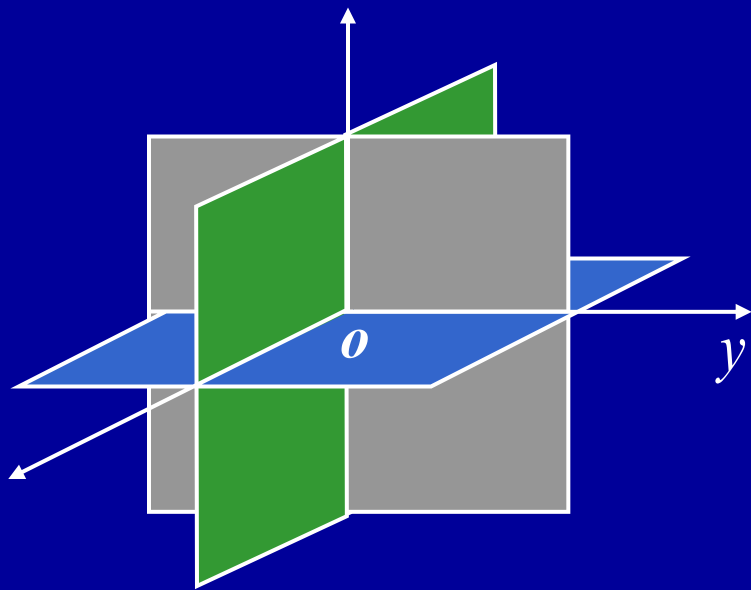
$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i},\ \overrightarrow{OB} = y\vec{j},\ \overrightarrow{OC} = z\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$



此式称为向量 $\vec{r}$ 的**坐标分解式**，

$x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.



坐标轴：

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

坐标面：

$$xoy\text{面} \leftrightarrow z = 0$$

$$yoz\text{面} \leftrightarrow x = 0$$

$$zox\text{面} \leftrightarrow y = 0$$

定理 向量的坐标等于其终点的坐标减去起点的坐标。

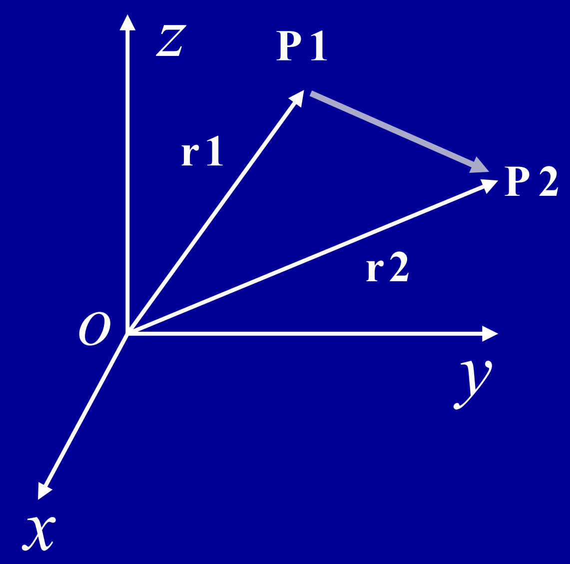
设P1(x_1, y_1, z_1), P2(x_2, y_2, z_2)为空间任意两点

r1=$\overrightarrow{OP_1} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$

$r2 = \overrightarrow{OP_2} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$

$\overrightarrow{P1P2} = \overrightarrow{OP2} - \overrightarrow{OP1}$

$= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$



***两个向量相等的充要条件是其坐标对应相等

二、 向量的线性运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, λ 为实数，则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

平行向量对应坐标成比例:

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,

$$\vec{b}\,/\!/\,\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_x&=\lambda a_x\\ b_y&=\lambda a_y\\ b_z&=\lambda a_z \end{aligned}}$$

例1. 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a} & ① \\ 3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b} & ② \end{cases}$$

其中 $\vec{a}=(2,1,2), \vec{b}=(-1,1,-2)$.

解: $2\times$① $-3\times$②，得

$$\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}=(7,-1,10)$$

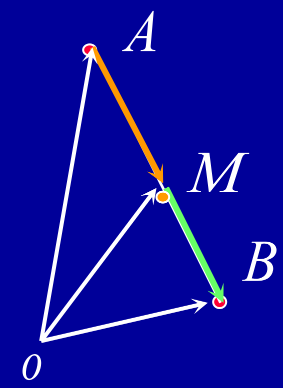
代入②得

$$\vec{y}=\frac{1}{2}(3\vec{x}-\vec{b})=(11,-2,16)$$

例2. 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 及实数 $\lambda \neq -1$,

在 AB 直线上求一点 M, 使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

解: 设 M 的坐标为(x, y, z), 如图所示

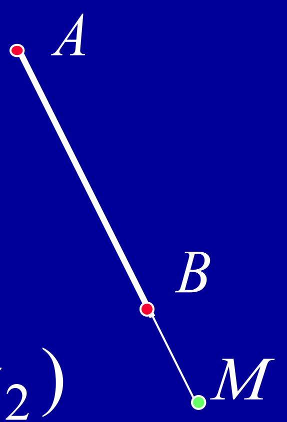


$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$



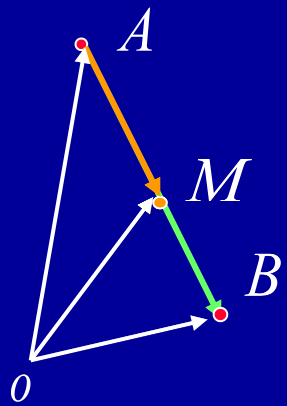
得 $$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

即 $$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

说明: 由

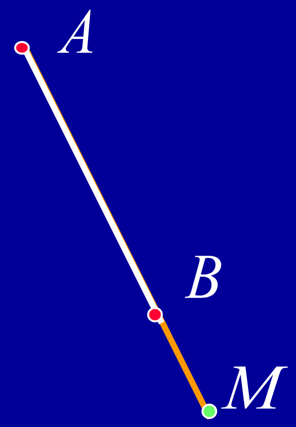
$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}\,(x_1+\lambda x_2\,,y_1+\lambda y_2\,,z_1+\lambda z_2)$$

得**定比分点公式:**



$$x=\frac{x_1+\lambda\,x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda\,y_2}{1+\lambda},$$

$$z=\frac{z_1+\lambda\,z_2}{1+\lambda}$$



当 $\lambda=1$ 时, 点 M 为 AB 的中点 ,于是得

中点公式:

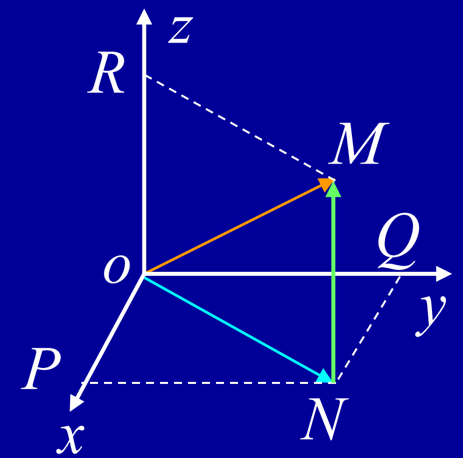
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

三、向量的模、方向角、投影

(1) 向量的模与两点间的距离公式

设 $\vec{r} = (x, y, z)$, 作 $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, 则有

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

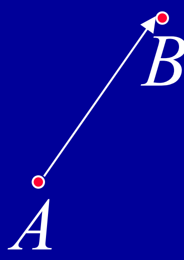


由勾股定理得

$$|\vec{r}| = |OM| = \sqrt{|OP|^2 + |OQ|^2 + |OR|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

对两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$, 因

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



得两点间的距离公式:

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例3. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 及 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 .

解: 设该点为 $M(0,0,z)$, 因为 $|MA|=|MB|$,

$$\sqrt{(-4)^2+1^2+(7-z)^2}=\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}$$

解得 $z=\frac{14}{9}$, 故所求点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

思考:

(1) 如何求在 xoy 面上与 A , B 等距离之点的轨迹方程?

(2) 如何求在空间与 A , B 等距离之点的轨迹方程 ?

提示:

(1) 设动点为 $M(x, y, 0)$, 利用 $|MA| = |MB|$, 得

$$14x + 8y + 28 = 0, \text{ 且 } z = 0$$

(2) 设动点为 $M(x, y, z)$, 利用 $|MA| = |MB|$, 得

$$7x + 4y - 9z + 14 = 0$$

例4. 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$, 求方向和 $\overrightarrow{AB}$ 相同的单位向量。

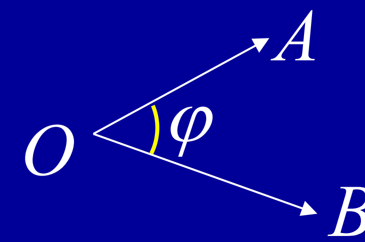
解: $$\overrightarrow{AB}^{\circ} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2)$$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

四、向量的 方向角与方向余弦

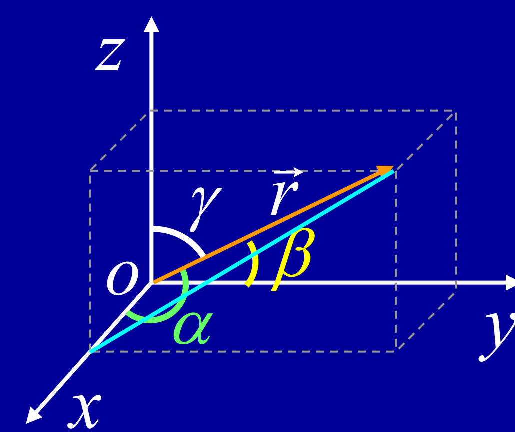
设有两非零向量 $\vec{a},\vec{b}$, 任取空间一点 O, 作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 称 $\varphi=\angle AOB\ (0\le\varphi\le\pi)$ 为向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角.

记作 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\varphi$ 或 $(\widehat{\vec{b},\vec{a}})=\varphi$



类似可定义向量与轴, 轴与轴的夹角 .

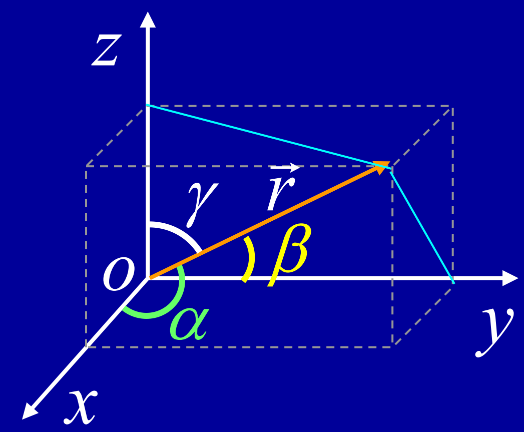
给定 $\vec{r}=(x,y,z)\ne\vec{0}$, 称 $\vec{r}$ 与三坐标轴的夹角 α,β,γ 为其**方向角**.



方向角的余弦称为其**方向余弦**.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}\,|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}\,|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}\,|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

方向余弦的性质：$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

向量 $\vec{r}$ 的单位向量：

$$\vec{r}^{\circ} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

例5. 设点 A 位于第一卦限, 向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$,且 $|\overrightarrow{OA}|=6$, 求点 A 的坐标 .

解: 已知 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, 则

$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\frac{1}{4}$$

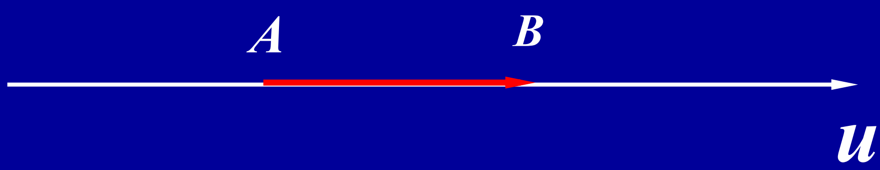
因点 A 在第一卦限 , 故 $\cos\gamma=\frac{1}{2}$, 于是

$$\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OA}^{\circ}=6\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)=(3,3\sqrt{2},3)$$

故点 A 的坐标为 $(3,3\sqrt{2},3)$.

五、向量在轴上的投影

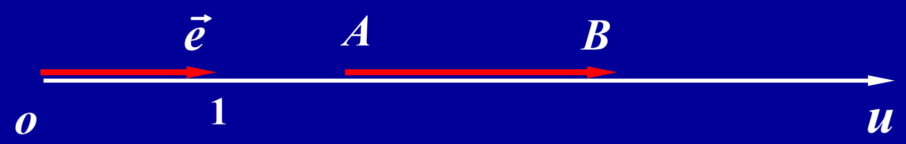
设有一轴 u，AB 是轴 $\vec{u}$ 上的有向线段.



如果数 λ 满足 $|\lambda| = |\overrightarrow{AB}|$，且当 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{u}$ 轴同向时 λ 是正的，当 AB 与 u 轴反向时 λ 是负的，那末数 λ 叫做轴 $\vec{u}$ 上有向线段 AB 的值，记作 AB，即 $\lambda = AB$.

设 $\vec{e}$ 是与 u 轴同方向的单位向量，

$$\overrightarrow{AB} = (AB)\vec{e}.$$



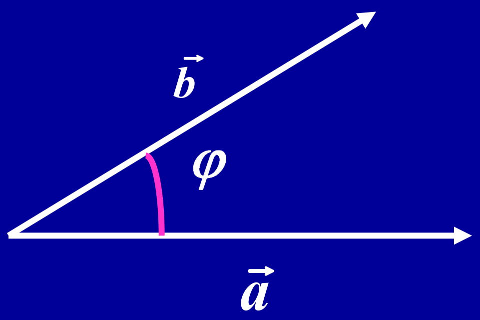
设 A, B, C 是 u 轴上任意三点，不论这三点的相互位置如何，

$$\because \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC},$$

即 $(AC)\vec{e} = (AB)\vec{e} + (BC)\vec{e} = (AB + BC)\vec{e},$

$$\therefore \quad AC = AB + BC.$$

空间两向量的夹角的概念：



$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$,

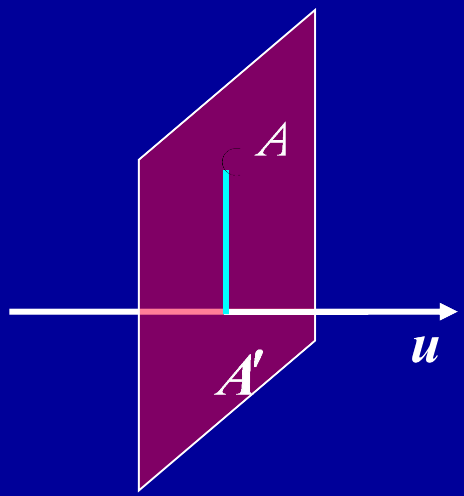
向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角

$$\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = (\widehat{\vec{b},\vec{a}}) \quad (0 \le \varphi \le \pi)$$

类似地，可定义**向量与一轴**或**空间两轴**的夹角.

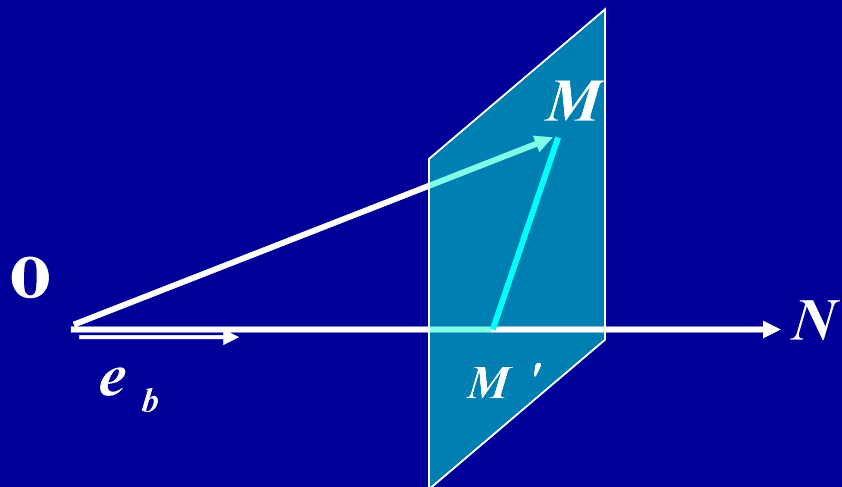
特殊地，当两个向量中有一个零向量时，规定它们的夹角可在0与π之间任意取值.

空间一点在轴上的投影



过点A作轴u的垂直平面，交点A’即为点A在轴u上的投影。

空间一向量在轴上的投影



设 a= $\vec{OM}$, $b = \vec{ON}$, $b \neq 0$, 且 $(\hat{a, b}) = \varphi$,

过点M作平面垂直于b所在的直线炳并交该直线于点M′,

则称有向线段 $\vec{OM'}$ 为向量a在向量b上的**投影向量**。

关于向量的投影定理

向量$\vec{OM}$在$\vec{b}$的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角余弦

投影向量 $\vec{OM}'=(|\vec{OM}|\cos\varphi)e_b=(|a|\cos\varphi)e_b$

投影 $\mathrm{Prj}_b\,\vec{OM}=|\vec{OM}|\cos\varphi$

(1) $0\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 投影为正；

(2) $\dfrac{\pi}{2}<\varphi\le\pi$ 投影为负；

(3) $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 投影为零；

(4) 相等向量在同一轴上投影相等；