第八章　多元函数微分法及其应用

一元函数微分学

$\downarrow$

多元函数微分学

注意: 善于类比, 区别异同

§ 8.1 多元函数的基本概念

一.多函数概念、区域

二.多元函数的极限

三.多元函数的连续性

一元函数的定义域是实轴上的点集，二元函数的定义域是坐标平面上的点集，因此先介绍平面点集的一些基本概念。

一.平面点集：　n维空间　$R^1 \rightarrow R^2$

平面点集：坐标平面上具有某种性质P的点的集合E，称为平面点集，

记作：

$$E=\{(x,y) \mid (x,y)\text{具有性质}P\}.$$

例：坐标平面：二元有序实数（x, y）的全体

$$R^2=R\times R=\left\{(x,y)\,\middle|\,x\in R, y\in R\right\}$$

邻域：设点$P_0\left(x_0,y_0\right)\in R^2$，$\delta>0$,与点$\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$的距离小于$\delta$

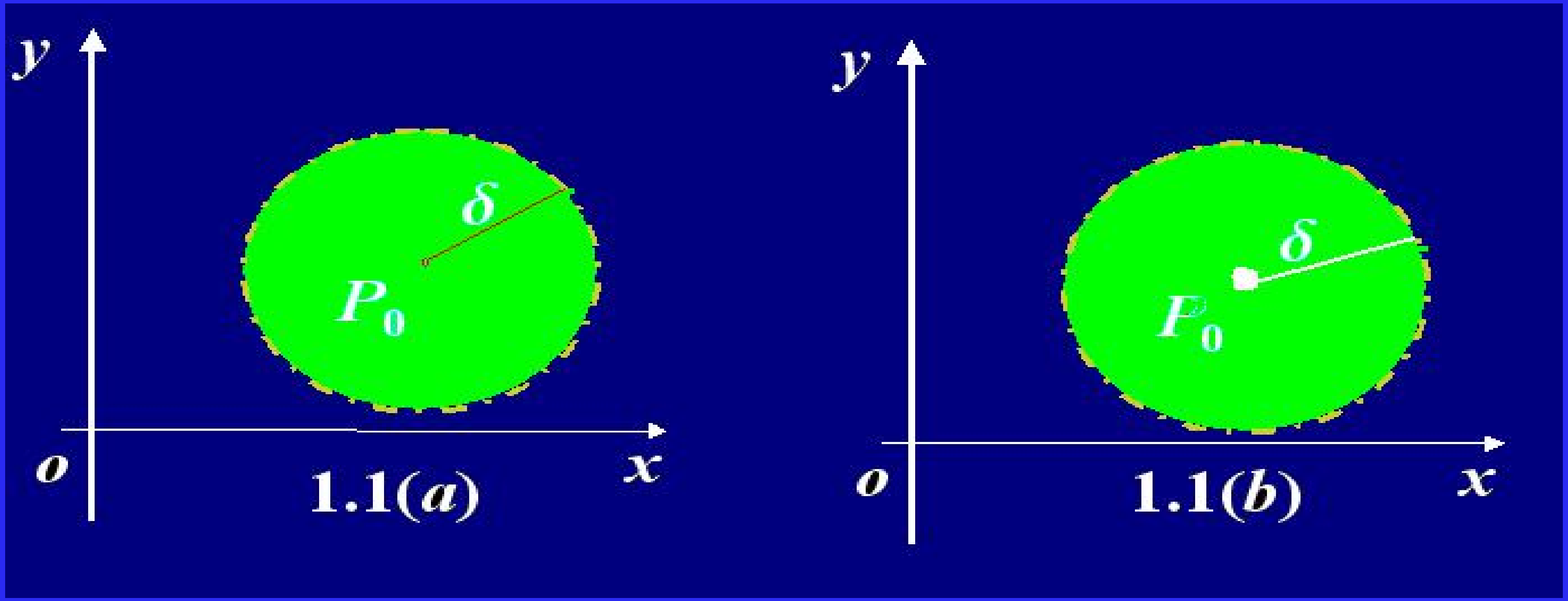
的点 $P(x,y)$ 全体称为$P_0(x_0,y_0)$ 的邻域，记为 $U(P_0,\delta)$

即 $$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$

或 $$U(P_0,\delta)=\{P|\ |PP_0|<\delta\}$$

P_0的去心邻域：点P_0不包含在该邻域内，则称该邻域

为点P_0的去心邻域 记作：$\overset{o}{U}\left(P_0,\delta\right)$



如图所示1.1(a)是包含点P_0的邻域 $U(P_0,\delta)$

1.1 (b)是不包含点P_0的空心邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

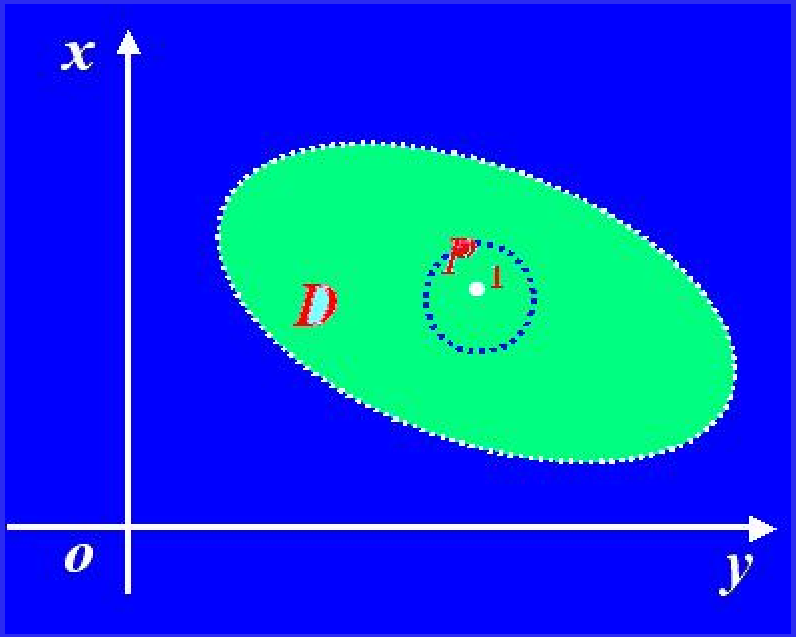
点和点集的关系

（1）**内点**　设 D 是平面点集. 如果存在点 P_1 的某一邻域 $U(P_1,\delta)\subset D$，则称 P_1 为 D 的内点.

例如:

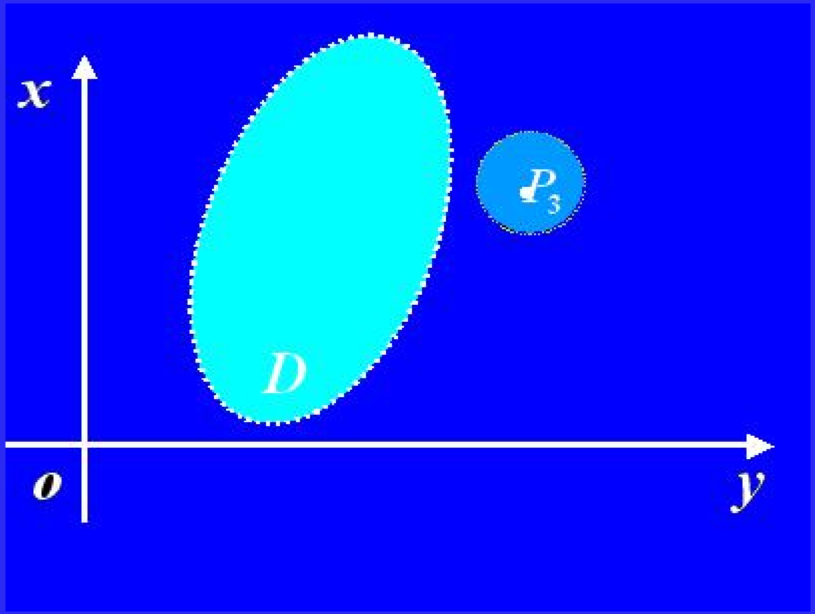
$$D^* = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

内的每个点都是D^*的内点

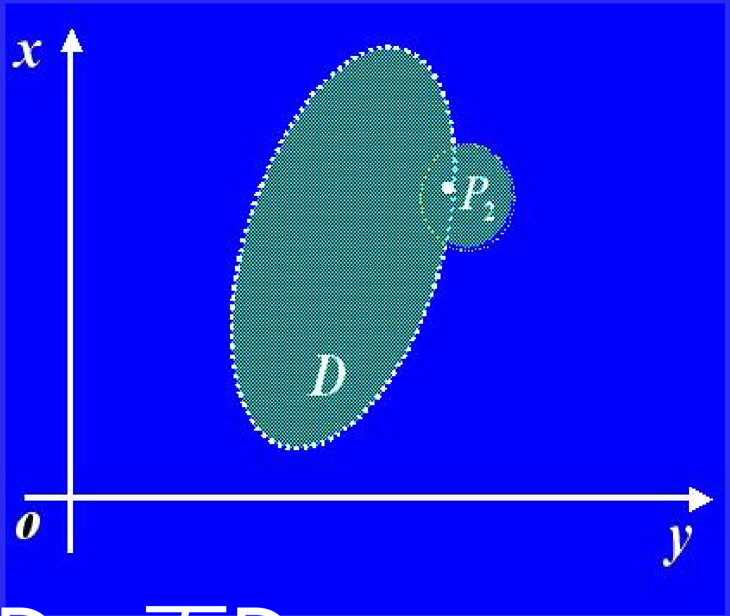


(2) 外点：设$P_3 \notin D$,并且存在P_3的一个邻域$U(P_3,\delta)$,

使$U(P_3,\delta) \cap D = \phi$,则称$P_3$为$D$的一个外点.



(3)边界点 如果点P_2的任一邻域内既有属于D的点，也有不属于D的点（点P_2本身可以属于D,也可以不属于D），则称P_2为D 的边界点。



（4） 边界 D的边界点的集合称为D的边界。记作 ∂D

注：D的内点必属于D，D的外点必不属于D，而D的边界点可能属于D，也可能不属于D。

(5) 聚点 如果在点$P_0(x_0,y_0)$的去心邻域$\mathring{U}(P_0,\delta)$总含有D中的点. 则称点P_0是D的一个**聚点**.

从定义可知D的内点一定是聚点。

点集D的聚点可以属于D，也可以不属于D.

例：D：$\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\le 1\}$,(0, 0) 点是什么点？

(0,0)既是边界点也是聚点.

例：D:$\{(x,y)\mid 0\le x^2+y^2\le 1\}$,(0, 0) 点是什么点？

(0,0) 是内点也是聚点.

例： D:$\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$,边界点的特点。

边界上的点都是聚点也都属于集合.

开集 设D是平面点集，如果点集D中每一个点都是D的内点，则称D为**开集**。

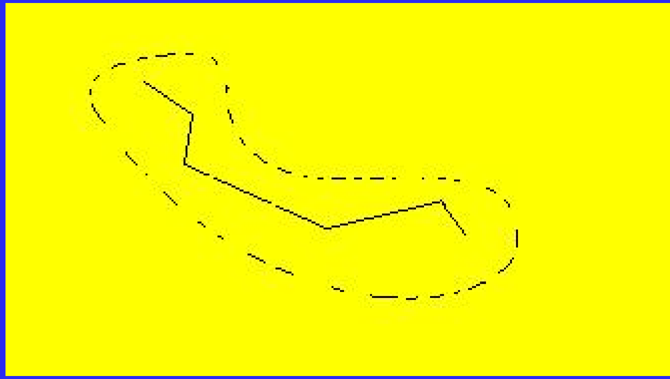
例 $D=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 即为开集.

闭集 如果D的边界$\partial D\subset D$，则称D为**闭集**。

例 $D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$ 即为闭集.

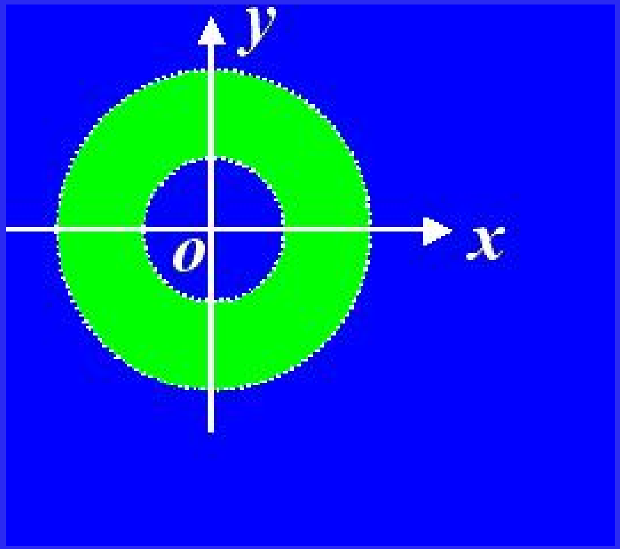
例 $D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2<4\}$ 即非开集也非闭集.

连通集　若对于D内任何两点，都可用完全在D中的折线连接起来，则称开集D为连通集。



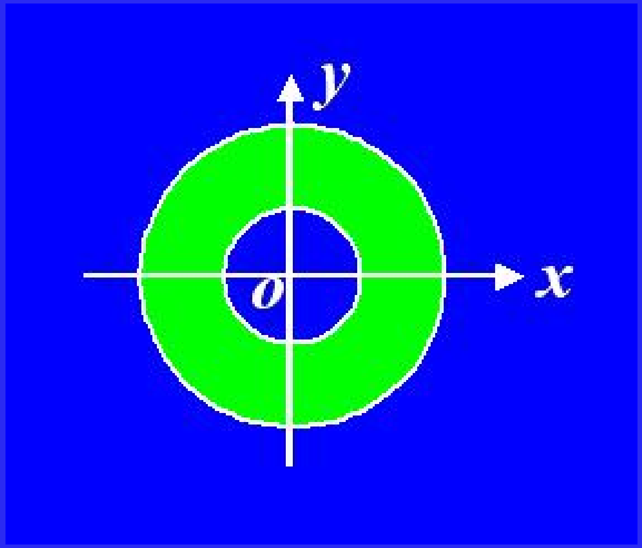
区域　连通的开集称为区域或开区域.

例如 $\{(x,y)\,|\,1 < x^2 + y^2 < 4\}$ 为区域.

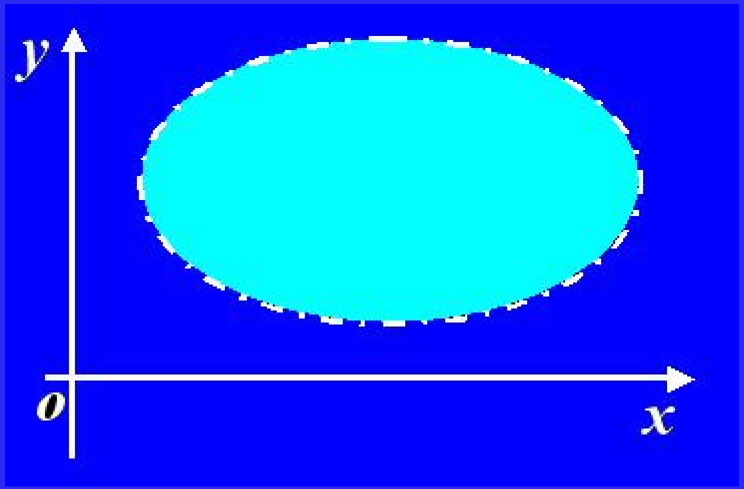


开区域连同其边界称为闭区域.

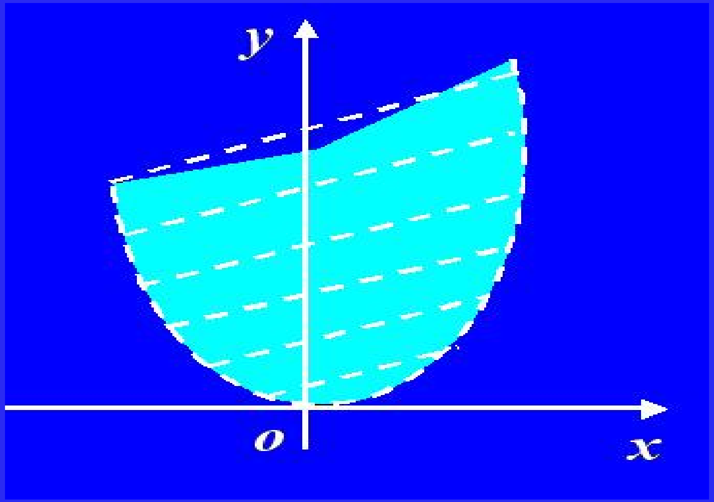
例如 $\{(x,y)\,|\,1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$. 为闭区域.



3有界区域 对于一个区域D，如果∃M，使得D内任何点到原点的距离都小于M，则称这个区域为有界区域，否则称为无界区域.



有界区域



无界区域

二、多元函数概念

定义1　设D是平面上的一个点集.如果对于每个点P=(x,y)∈D,变量z按照一定法则总有确定的值和它对应，则称z是变量x、y的二元函数(或点P的函数)，记为

$$z = f(x, y) \text{或} z = f(P)$$

点集D称为该函数的定义域，x、y称为自变量，z也称为因变量，数集

$$\{z \mid z = f(x,y),(x,y) \in D\}$$

称为该函数的值域.

把定义1中的平面点集D换成n维空间内的点集D.则可类似的定义n元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.当n=1时，n元函数就是一元函数.当n$\geqslant$2时n元函数统称为多元函数.

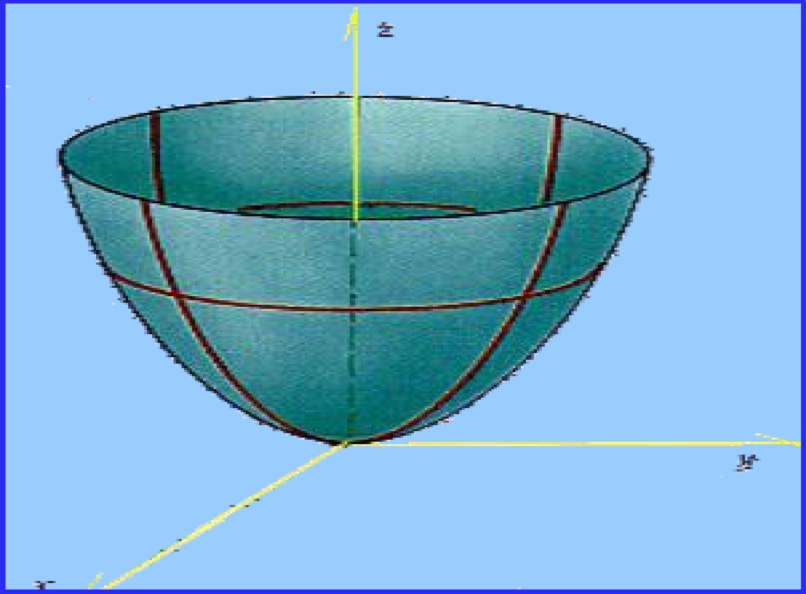
多元函数三要素：定义域，值域，法则（对应的依赖关系）

二元函数 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$的图象：

$$\left\{(x,y,z)\,\middle|\, z=f(x,y),\ (x,y)\in D_f\right\}$$

在几何上表示一张**曲面**.

例 $z=x^2+y^2$ 的图象是旋转抛物面.



与一元函数类似，对于多元函数的定义域，我们约定：如果一个用算式表示的函数没有明确指出定义域，则该函数的定义域理解为所有使算式有意义的自变量所组成的点集，也称作该函数的自然定义域。

例：求下列函数的定义域：

（1） $z=\arcsin(x^2+y^2-1)$

(2) $z=\ln(y^2-2x+1)$

（1） $z=\arcsin(x^2+y^2-1)$

解 （1）为使算式有意义，必须满足:

$$-1 \le x^2+y^2-1 \le 1 \Rightarrow$$

所以该函数的定义域为 $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2\}$

$$(2)\quad z=\ln(y^2-2x+1)$$

解 （2）为使算式有意义，必须满足:

$$y^2-2x+1>0$$

所以该函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid y^2>2x-1\}$

注：一元函数的单调性、奇偶性、周期性等性质的定义在多元函数中不再适用，但有界性仍然成立。

表达式的变换:

例2 若 $f(x,y)=e^{x}+xy$,求$f(xy,x+y)$

解: 令 $f(\mathrm{u},v)=e^{u}+uv$,

故: $f(xy,x+y)=e^{xy}+xy(x+y)$。

例3　若 $f(x+y, x-y) = x^2y^2$，求$f(x,y)$

解：　令 $u = x+y, v = x-y$

$$f(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2\left(\frac{u-v}{2}\right)^2$$

故：$f(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

二、多元函数的极限

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D_f，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D_f 的聚点，$P(x,y)\in D_f$，若存在常数 A，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \text{时},$$

有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，

记为：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$

为了区别于一元函数的极限，称二元函数的极限为**二重极限**。

注： （1）若二重极限存在，是指P（x,y）以任意方式趋于$P_0(x_0,y_0)$ $f(x,y)$都无限接近于A.

(2)通过判定沿不同的路径的极限的方法判定极限不存在。

例4 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 是否存在.

解 当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

当 $P(x,y)$ 沿不同的直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，

f 有不同的极限.

所以，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

例 5 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

试讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 是否存在.

解 当点 $P(x,y)$ 沿直线 $x=ky$ 趋于 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=ky\to 0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{ky^3}{k^2y^2+y^4}=0;$$

（2）若点$P(x,y)$沿抛物线$x=y^2$趋于$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=y^2\to 0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2},$$

所以,极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在.

二元函数的极限概念可相应的推广到n 元函数上去，多元函数的极限定义在形式上与一元函数的极限定义相同，因此多元函数的极限有与一元函数极限类似的性质，如唯一性、四则运算法则、等价无穷小等。

例 6 求 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解： 设 $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x}$ 的定义域为 $D = \left\{(x,y) \middle| x \neq 0,\ \mathrm{y} \in R\right\}$

$P_0(0,2)$ 为 $f(x,y)$ 的聚点

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{xy \to 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \bullet \lim_{y \to 2} y = 1 \bullet 2 = 2$$

例 7 求 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$

解: $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}$$

例 8 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy^2)^{\frac{1}{x}}$.

解：原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy^2)^{\frac{1}{xy^2}y^2}=e^0=1.$

四则运算、重要极限、夹逼准则、等价无穷小极限均可运用。

例 9　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}$.

解　$\because x\to 0$ 时,

$$e^{-\frac{1}{x^2}}\to 0,\ \left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le 1,$$

由无穷小与有界函数之积仍为无穷小得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

注. 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与二次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)\text{和}\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)\text{不同}$$

如果它们都存在, 则三者相等.

仅知其中一个存在,推不出其它二者存在.即二次极限存在不能推出二重极限存在，二重极限存在亦不能推出二次极限存在。

例　函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在（0,0）点极限不存在。

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

二重极限和二次极限不同

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

例　函数 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x})=0$

由夹逼准则:$0<|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}|<|x|+|y|$

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x})\text{不存在。}$$

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x})\text{不存在。}$$

四、多元函数的连续性

定义： 设二元函数$f(x,y)$的定义域为D， 点$P_0(x_0,y_0)$是D的聚点， 且$P_0(x_0,y_0)\in D$， 如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数$f(x,y)$在点（x_0,y_0）连续。否则称为不连续。

$P_0(x_0,y_0)$称为间断点。

例10　判断函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$在（0,0）点的连续性。

解：由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$,

知 $f(x,y)$在$(0,0)$不连续。

例11　判断函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$在（0,0）点连续。

证：当（x, y）$\neq$（0，0）时

$$0\le |f(x,y)|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

由夹逼准则可知：　而$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$

$\therefore f(x,y)$在$(0,0)$处连续。

如果函数$f(x,y)$在开区域（或闭区域）D内每一点连续，则称函数$f(x,y)$在D内连续. 或称$f(x,y)$是D内的连续函数

如果函数$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$不连续，则称函数$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$是间断的。

间断点的集合也可能形成一条曲线，称其为间断线。

注：二元函数的间断点可以是孤立的点，也可以形成一条或几条曲线.

例如　$z=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$,在圆周$x^2+y^2=1$上各点都间断.

1)多元函数的连续性及运算法则与一元函数有类似的结果.

2)多元初等函数：由常数及基本初等函数经过

有限次的四则运算与复合且用一个式子表示的函数。

例如 $\dfrac{x-y}{1+x^2}, \ln\left(x^2+y^2\right)$ 等都是二元初等函数.

3）多元初等函数在其定义区域内都是连续的.

(定义区域 是指包含在定义域内的区域或闭区域)

例如 $z=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$在开圆域$x^2+y^2<1$内连续.

4）初等函数在其定义区域上求极限，其极限值等于函数值.

$$\lim_{P\to P_0} f\left(P\right)=f\left(P_0\right).$$

例12　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解：函数 $\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在（1,0）处连续

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(1,0) = \ln 2$$

例 1 3 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{x+y}{xy}$

解： 函数$f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$是初等函数，

其定义域为：$D=\{(x,y)\mid x\neq 0, y\neq 0\}$

因$P_0(1,2)\in D$，在P_0连续

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{x+y}{xy} = f(1,2) = \frac{3}{2}$$

性质1(最大值和最小值定理)　在有界闭区域D上的多元连续函数，

在D上一定有最大值和最小值.

性质2(介值定理)　　在有界闭区域D上的多元函数，如果在D上取得两个不同的函数值，则它在D上取得介于这两个值之间的任何值至少一次。

如果 μ 是函数在D上的最小值m和最大值M之间的一个数，则在D上至少有一点Q，使得f(Q)= μ