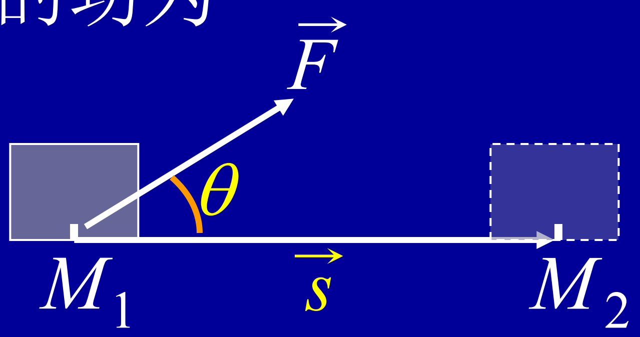
7.3 数量积、向量积

一、 数量积

引例. 设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下, 沿与力夹角为 θ 的直线移动, 位移为 $\vec{s}$, 则力 $\vec{F}$ 所做的功为

$$W = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$$



$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{s}}$$

定义1

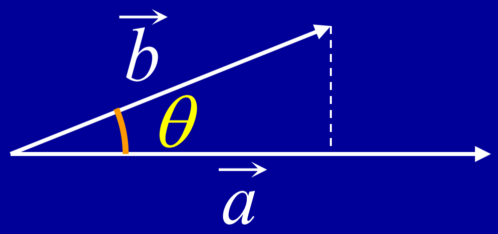
设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ, 称

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \vec{a}\cdot\vec{b}$$

为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积 (点积) .

当$\vec{a}\neq\vec{0}$时, $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为

$$|\vec{b}|\cos\theta \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$



故 $$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$

同理, 当 $\vec{b}\neq\vec{0}$ 时,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$$

2. 性质

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

(2) $\vec{a}, \vec{b}$为两个非零向量, 则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$

则 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$$\Updownarrow$$

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$$

3. 运算律

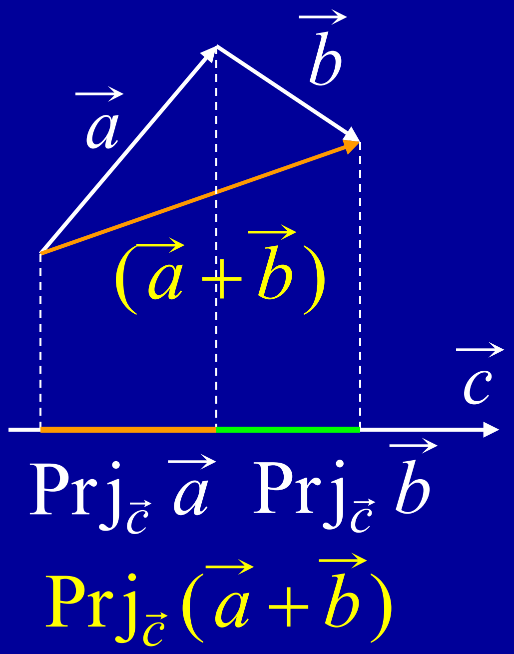
(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) 结合律 $(\lambda,\mu$为实数$)$

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot(\mu\vec{b}))$$

$$=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$$



(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

事实上, 当$\vec{c}=\vec{0}$ 时, 显然成立 ; 当$\vec{c}\neq\vec{0}$时

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|(\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b})$$

$$=|\vec{c}|\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+|\vec{c}|\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

4. 数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$\Bigg\downarrow\ \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

两向量的夹角公式

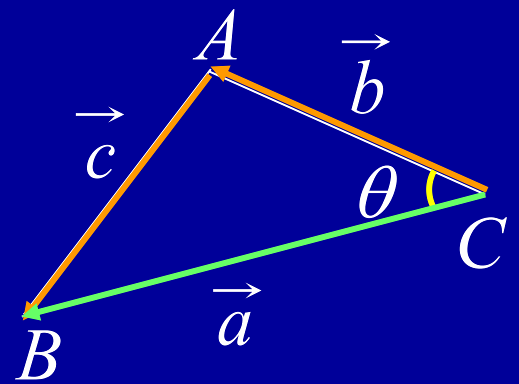
当 $\vec{a},\ \vec{b}$ 为非零向量时, 由于 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, 得

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

例1. 证明三角形余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

证: 如图 . 设



$$\overrightarrow{CB} = \vec{a},\quad \overrightarrow{CA} = \vec{b},\quad \overrightarrow{AB} = \vec{c}$$

则 $\qquad \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

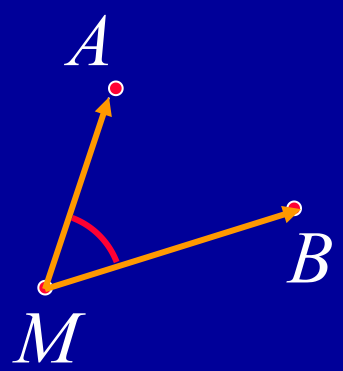
$$|\vec{c}\,|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}\,|^2 + |\vec{b}\,|^2 - 2|\vec{a}\,||\vec{b}\,|\cos\theta$$

$$a = |\vec{a}\,|,\ b = |\vec{b}\,|,\ c = |\vec{c}\,|$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

例2. 已知三点 $M(1,1,1), A(2,2,1), B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$.



解: $\overrightarrow{MA}=(1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{MB}=(1,\ 0,\ 1)$

则 $$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}$$

$$=\frac{1+0+0}{\sqrt{2}\ \sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

故 $$\angle AMB=\frac{\pi}{3}$$

例3. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角 $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$, 且 $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 3$,

求 $|\vec{a} - \vec{b}|$.

解： $\because \ |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta + |\vec{b}|^2$$

$$= (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} + 3^2$$

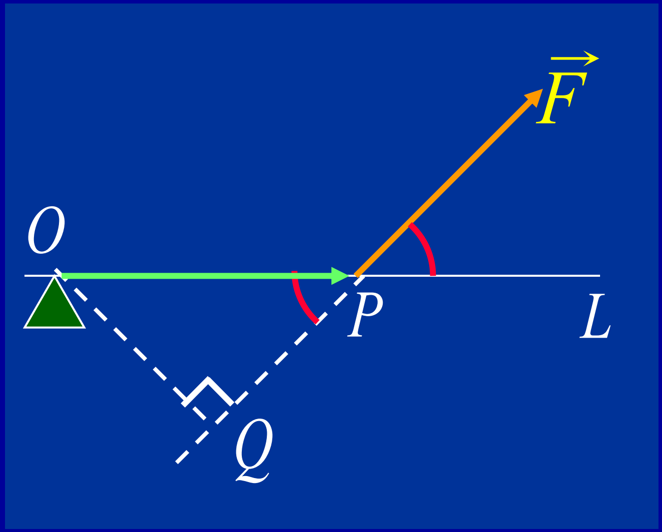
$$= 17$$

$\therefore \ |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$

二、两向量的向量积

引例. 设O为杠杆L的支点，有一个与杠杆夹角为θ的力$\vec{F}$作用在杠杆的P点上，则力$\vec{F}$作用在杠杆上的力矩是一个向量$\vec{M}$：

$$|\vec{M}| = |OQ||\vec{F}| = |\overrightarrow{OP}||\vec{F}|\sin\theta$$

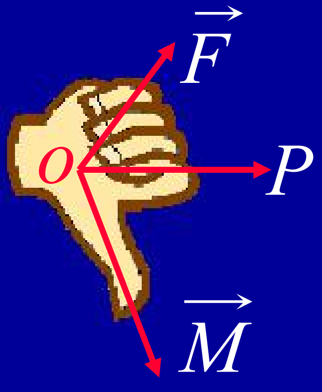


$$|OQ| = |\overrightarrow{OP}|\sin\theta$$

$\overrightarrow{OP} \Rightarrow \vec{F} \Rightarrow \vec{M}$ 符合右手规则

$\vec{M} \perp \overrightarrow{OP}$

$\vec{M} \perp \vec{F}$



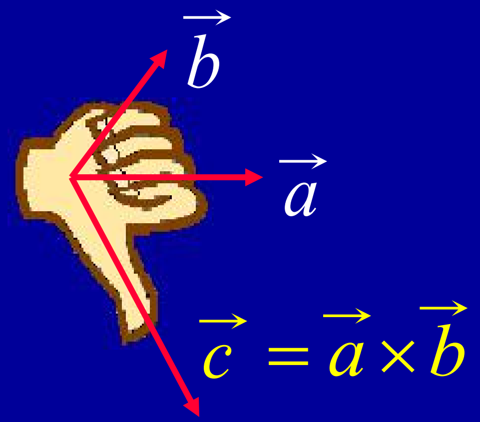
定义

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ, 定义

$$\text{向量 } \vec{c} \begin{cases} \text{方向}: \vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b} \text{ 且符合右手规则} \\ \text{模}: |\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta \end{cases}$$

称 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**向量积**, 记作

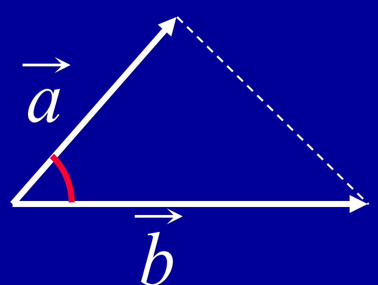
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (\text{叉积})$$



引例中的力矩 $\vec{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$

思考: 右图三角形面积

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$



2. 性质

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{a},\vec{b}$为非零向量, 则 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

证明: 当$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$时,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0$$

$$\Longleftrightarrow \sin\theta=0, \text{即}\ \theta=0\ \text{或}\ \pi \Longleftrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

3. 运算律

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(2) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

(3) 结合律 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

(证明略)

4. 向量积的坐标表示式

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

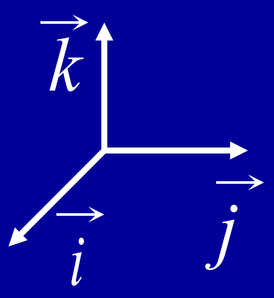
$$=\cancel{a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})}+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})$$

$$+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+\cancel{a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})}+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+\cancel{a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}$$

$$+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$



向量积的行列式计算法

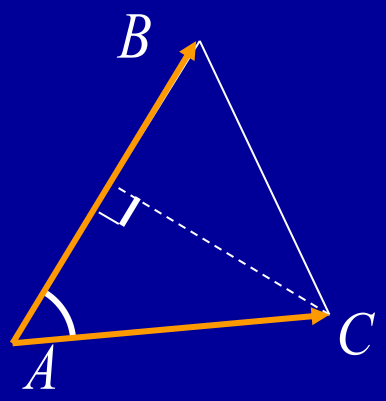
$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\,\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\,\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}&=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k}\\ \vec{b}&=b_x\,\vec{i}+b_y\,\vec{j}+b_z\,\vec{k}\end{aligned}}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

例4. 已知三点 $A(1,2,3), B(3,4,5), C(2,4,7)$, 求三角形 ABC 的面积.



解: 如图所示,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$$

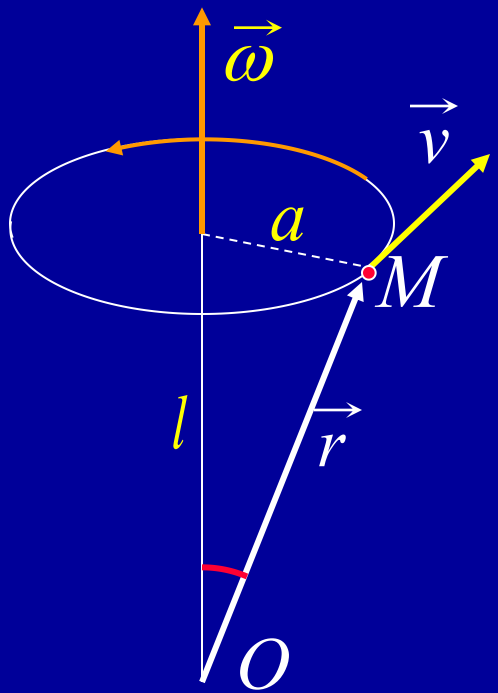
$$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(4,-6,\ 2)|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2} = \sqrt{14}$$

例8. 设刚体以等角速度 ω 绕 l 轴旋转, 导出刚体上一点 M 的线速度 $\vec{v}$ 的表示式 .

解: 在轴 l 上引进一个角速度向量 $\vec{\omega}$, 使 $|\vec{\omega}| = \omega$, 其方向与旋转方向符合右手法则 , 在 l 上任取一点 O, 作向径 $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, 它与 $\vec{\omega}$ 的夹角为 θ, 则点 M 离开转轴的距离 $a = |\vec{r}|\sin\theta$,



$$\because \quad |\vec{v}| = \omega a = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\theta$$

且 $\vec{\omega} \Rightarrow \vec{r} \Rightarrow \vec{v}$ 符合右手法则

$$\therefore \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$