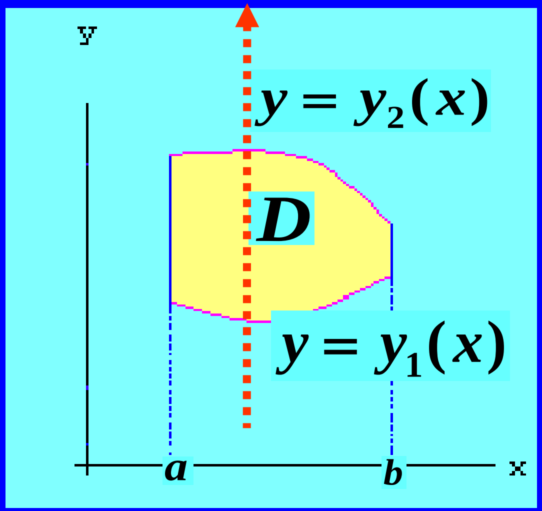
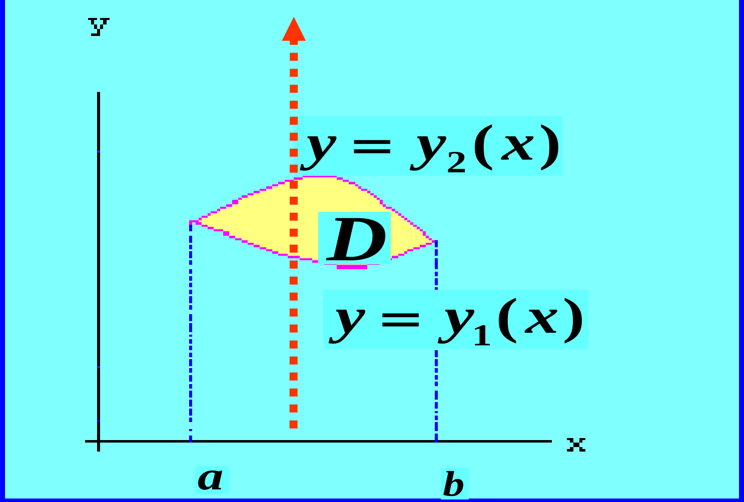
# §8.2二重积分的计算（直角坐标）

首先讨论二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 中积分区域D的表示法。

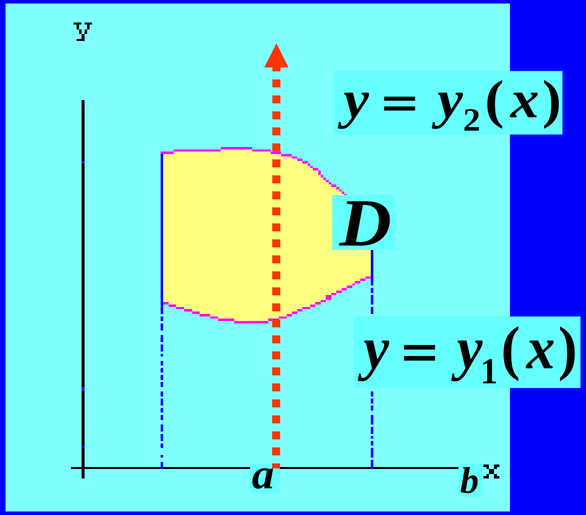
1. 如果积分区域D可以表示为：$D=\begin{cases} y_1(x)\le y\le y_2(x), \\ a\le x\le b \end{cases}.$



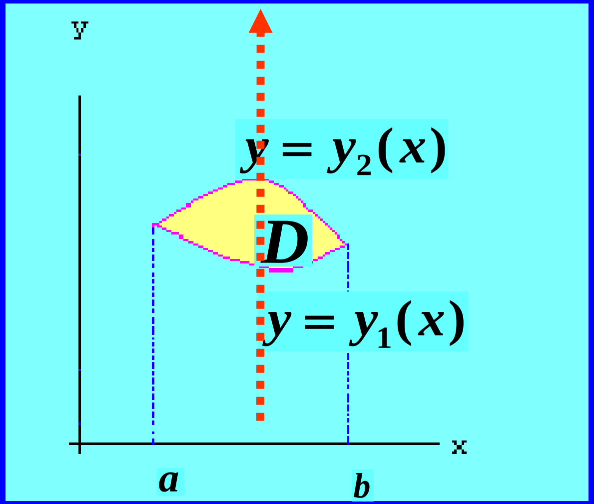

[X－型]




其中函数$y_1(x),y_2(x)$在$[a,b]$上连续.

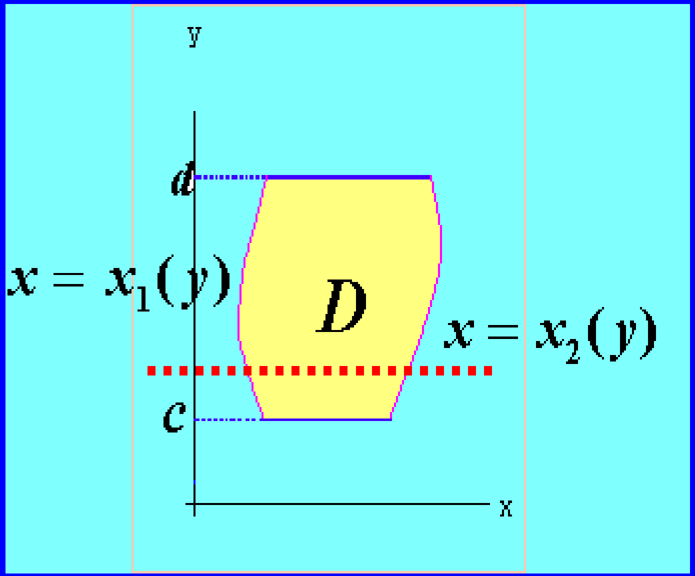



［X—型］

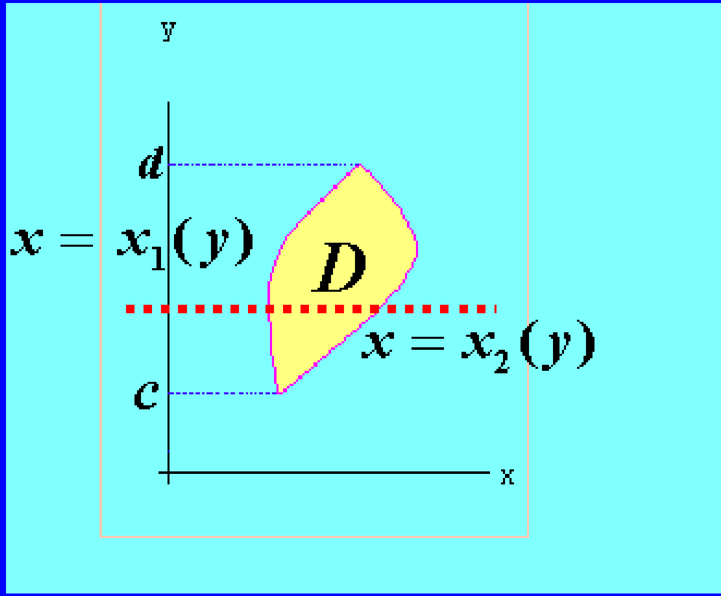



**X型区域的特点**：穿过区域且平行于$y$轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

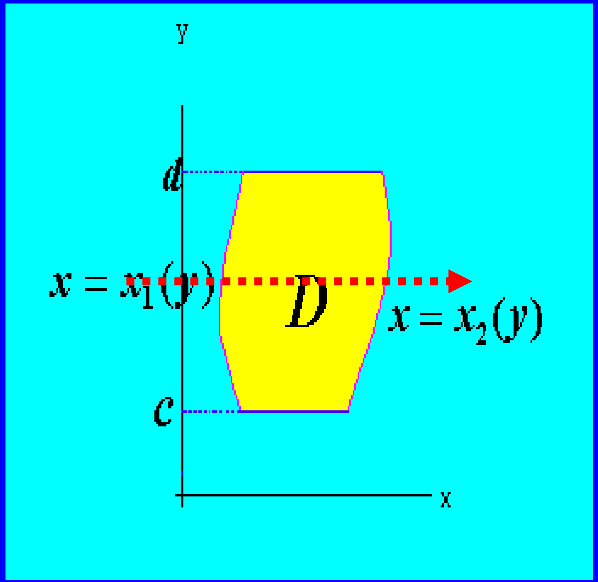
2. 如果积分区域$D$为：$D=\begin{cases} x_1(y)\le x\le x_2(y), \\ c\le y\le d \end{cases}.$



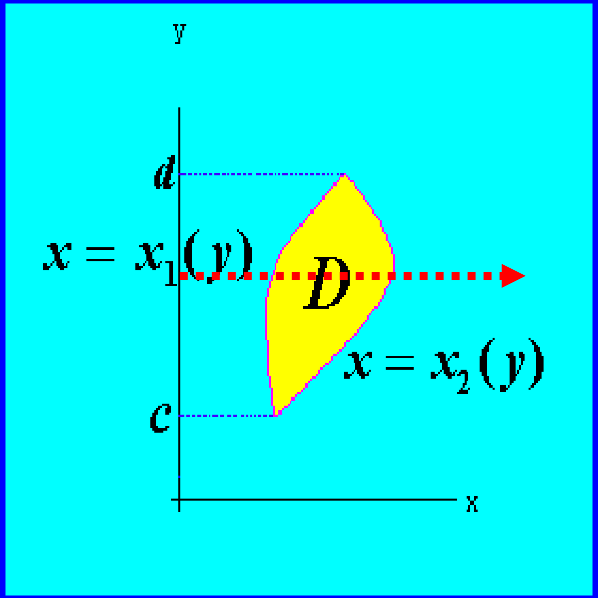

[Y—型]




其中函数$x_1(y)$,$x_2(y)$在区间$[c,d]$上连续.




［Y—型］




**Y型区域的特点**：穿过区域且平行于$x$轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

下面我们通过曲顶柱体体积的计算来说明二重积分

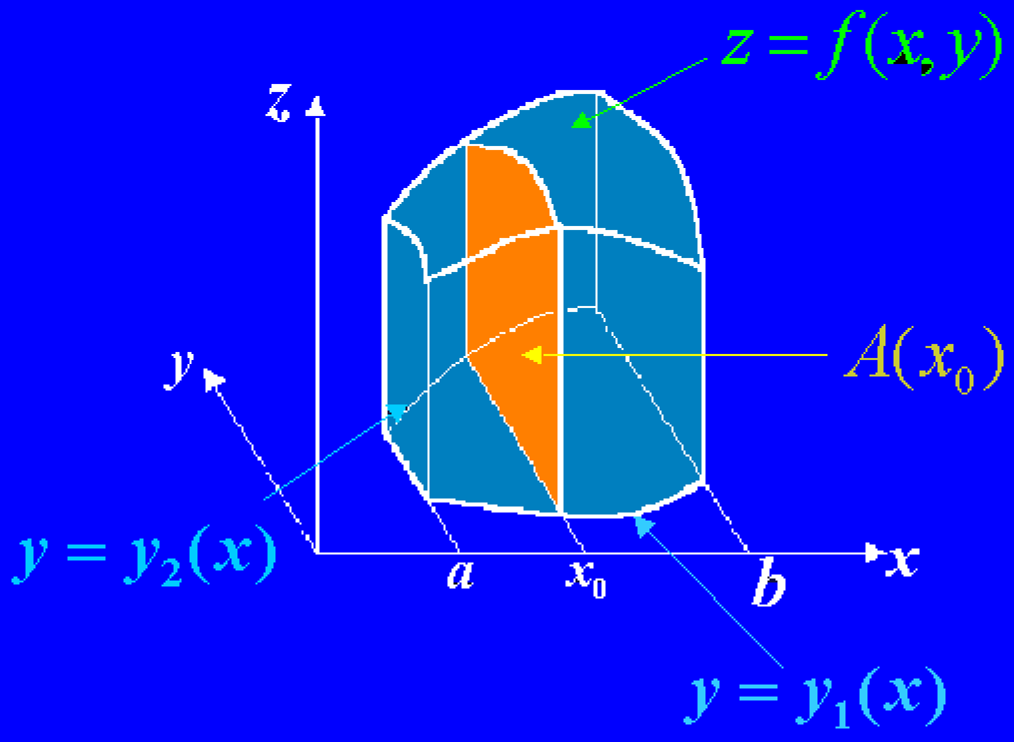
$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$ 化为二次积分的方法，在讨论中

假定$f(x,y)\geq 0, D$为$X-$型。

在$[a,b]$上任取一点的平面$x=x_0$

此平面截曲顶柱体所得截面是

一个以区间 $x_0$ 作平行于$yoz$面



$[y_1(x_0), y_2(x_0)]$为底边，以曲线$z=f(x_0, y)$为曲边

的曲边梯形，此截面面积为

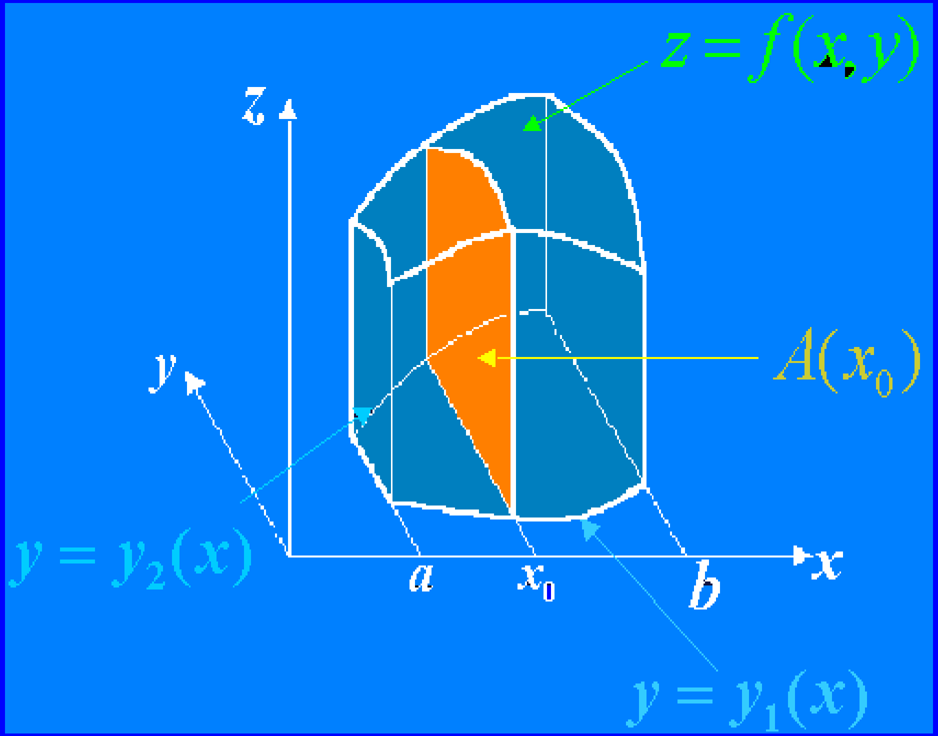
$$A(x_0)=\int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f(x_0, y)dy.$$

任取$x\in[a,b]$,过点$x$且

平行$yoz$面的平面截曲顶柱体所得

截面面积为

$$A(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy.$$



应用定积分中计算已知平行截面面积的立体“体积”的方法，

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx,$$

这个体积的值，就是二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 的值。

因此，二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx.$$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx.$$

上式右端的积分称为先对 $y$ 后对 $x$ 的二次积分，

其中括号内的积分 $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ 是将 $x$ 看作常数，

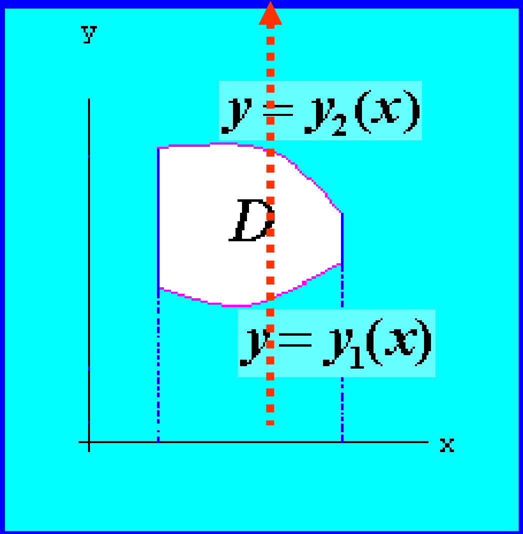
把$y$ 看作变量对$y$ 积分，其积分结果是$x$的函数，

再对 $x$ 计算在区间$[a,b]$上的定积分。

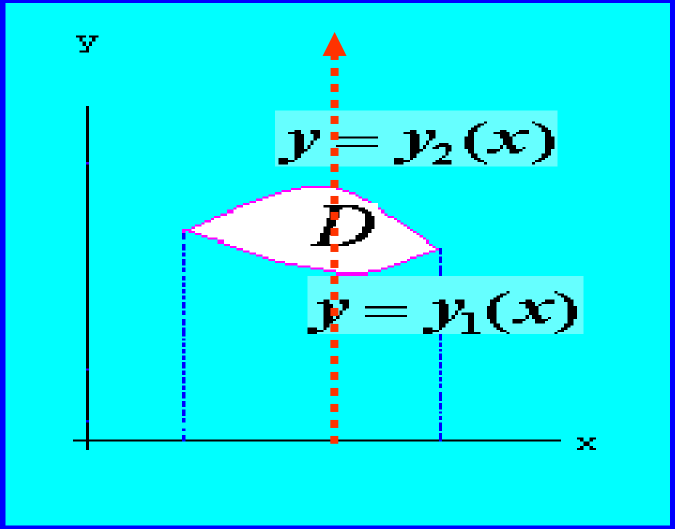
先对$y$后对 $x$ 的二次积分通常又记为：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

确定积分顺序时，应注意积分区域$D$为X-型的特点：




[X—型]



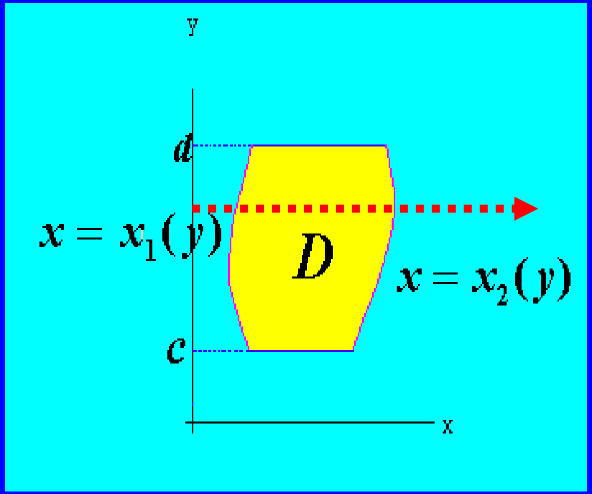
$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

注 上面的公式当$f(x,y)>0$不满足时，上述公式仍然成立.

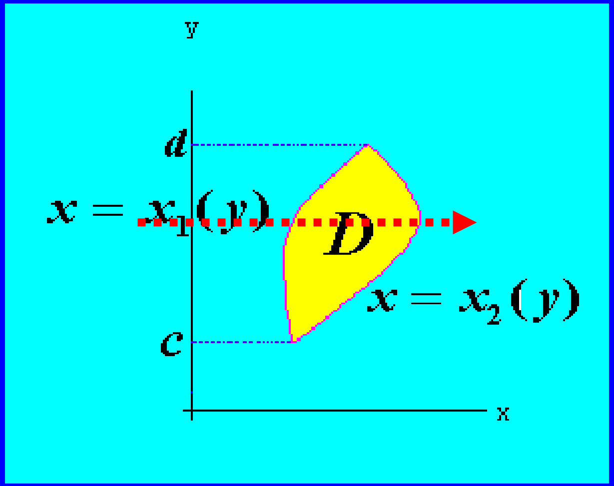
类似地，当积分区域$D$为Y-型时，可得公式：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

确定积分顺序时，应注意积分区域$D$为Y-型的特点：




[Y－型]



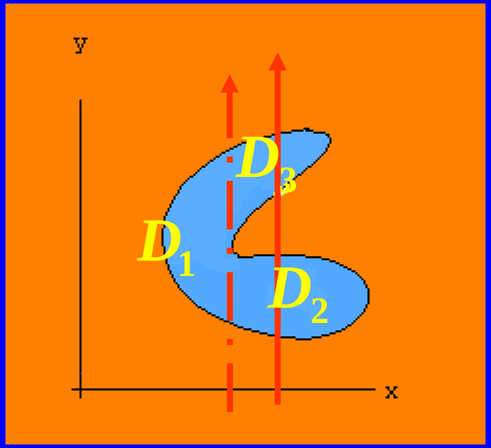
**注** 当积分区域 $D$ 既是X-型又是Y-型区域时，

上述两个不同顺序的二次积分的值相等.即

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

**注** 如果积分区域 $D$ 既不是X-型又不是Y-型，则可将 $D$ 分成几部分，使得每个部分是X-型或Y-型。

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} + \iint\limits_{D_3}.$$



例1. 求$\iint\limits_D (1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})dxdy$, 其中D:-1 $\le x \le 1, -2 \le y \le 2$.

解法1：X型

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-2}^{2}(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})dy=\int_{-1}^{1}(y-\frac{x}{3}y-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_{-2}^{2}dx$$

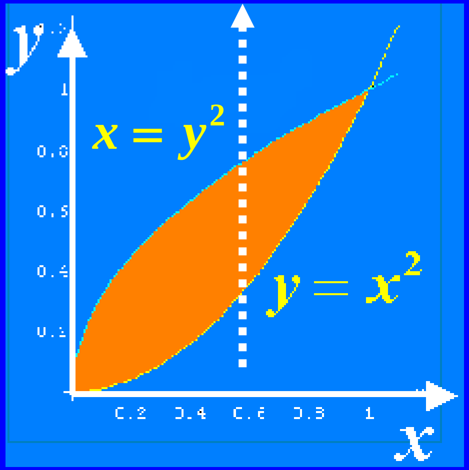
$$=\int_{-1}^{1}(4-\frac{4}{3}x)dx=8$$

解法2：Y型

$$I=\int_{-2}^{2}dy\int_{-1}^{1}(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})dx=\int_{-2}^{2}(1-\frac{y}{4})dy=8$$

例2. 求$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$，其中D是由抛物线$y=x^2$和$x=y^2$所围成的平面闭区域。

解：两曲线的交点 $\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0)\ ,\ (1,1),$




$$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)dy$$

$$= \int_0^1 [x^2(\sqrt{x}-x^2)+\frac{1}{2}(x-x^4)]dx$$

$$= \frac{33}{140}.$$

例3. 计算$\iint\limits_D xy^2 d\sigma$，其中$D$是由$y=x$与$y=x^2$围成闭区域.

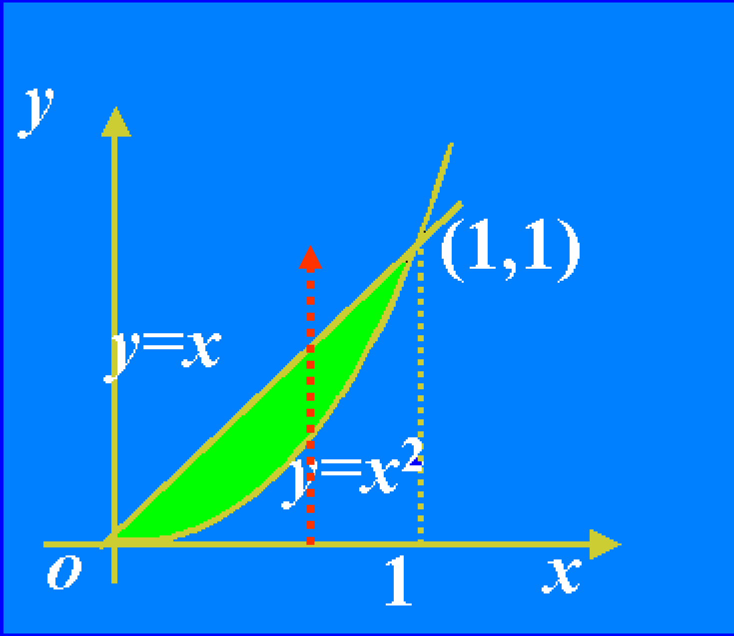
解 先画出积分区域$D$. 它既是X-型，又是Y-型.

(1) 先对$y$后对$x$的二次积分，$D$应表示为：

$$D=\begin{cases} x^2\le y\le x, \\ 0\le x\le 1. \end{cases}$$

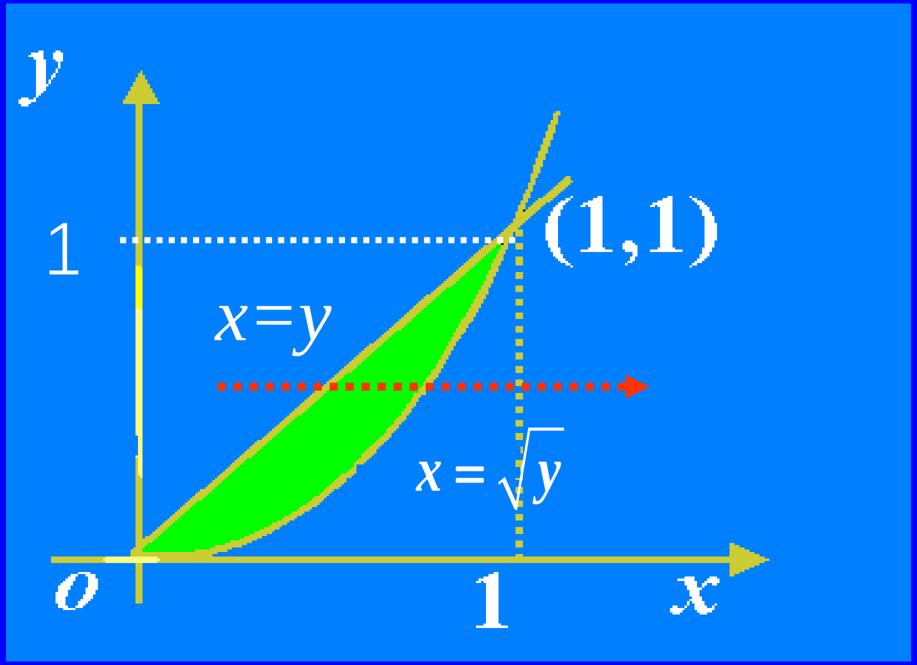
$$\iint\limits_D xy^2 dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2 dy = \int_0^1 x\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 x\left(x^3-x^6\right)dx = \frac{1}{40}$$



(2) 将$D$作为Y-型区域，$D$可表示为：

$$D=\begin{cases} y\le x\le \sqrt{y}, \\ 0\le y\le 1. \end{cases}$$




$$\iint_D xy^2dxdy=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} xy^2dx$$

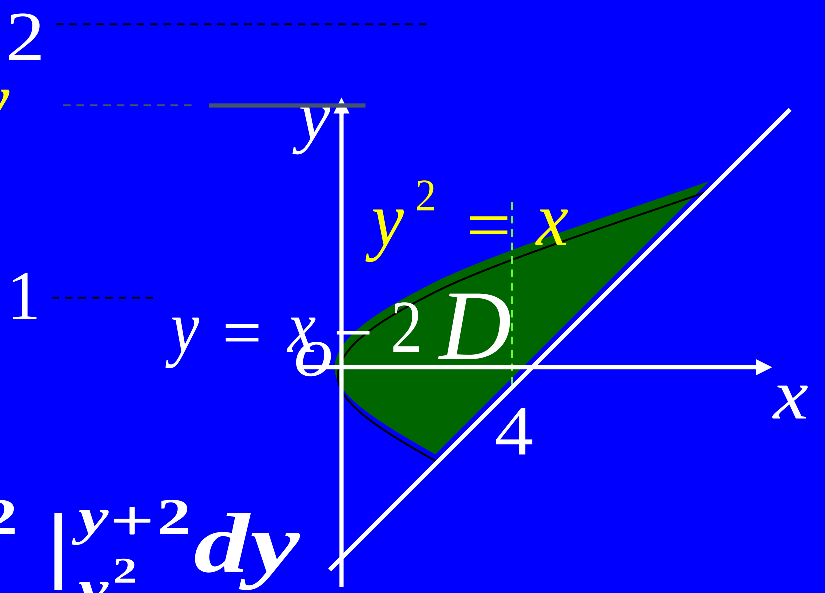
$$=\int_0^1 y^2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 y^2\left(y-y^2\right)dy=\frac{1}{40}.$$

例4. 计算$\iint\limits_D xy\,d\sigma$， 其中$D$是由$y^2 = x$与$y = x-2$ 围成闭区域.

解 先画出积分区域$D$. 它既是X-型，又是Y-型.

(1) 先对x后对 $y$的二次积分，$D$应表示为:




$$D=\begin{cases} y^2 \le x \le y+2, \\ -1 \le x \le 2. \end{cases}$$

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} xy\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{2} yx^2 \Big|_{y^2}^{y+2} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} (y(y+2)^2 - y\cdot y^4)dy = \frac{45}{8}$$

（2）作先对$y$后对$x$ 的二次积分.

因为在[0,1]和[1，4]上边界曲线$y(x)$表达式不同，

必须有直线$x$=-1将$D$分成$D_1$和$D_2$两部分，其中

$$D_1=\begin{cases}-\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x},\\ 0\le x\le 1.\end{cases}\qquad D_2=\begin{cases}x-2\le y\le\sqrt{x},\\ 1\le x\le 4.\end{cases}$$

$$\iint_D xyd\sigma=\iint_{D_1} xyd\sigma+\iint_{D_2} xyd\sigma=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xydy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xydy$$

**注1 在二重积分中适当选择积分秩序，积分可以简化.**

例5. 计算$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y} d\sigma$，其中$D$是由$y^2 = x$与$y = x$围成闭区域.

**解:** 由被积函数可知, 先对 $y$积分不行,

因此取$D$为$Y-$型域：

$$D: y^2 \le x \le y, 0 \le y \le 1$$

$$\Rightarrow \iint\limits_D \frac{\sin y}{y} d\sigma = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y - y^2) dy = \int_0^1 \sin y dy - \int_0^1 y \sin y dy$$

$$= -\cos y \Big|_0^1 + \int_0^1 y d\cos y = 1 - \cos 1 + y \cos y \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos y dy = 1 - \sin 1$$

注: 本题若先对y积分，后对x积分，则有

$$\iint_D \frac{\sin y}{y} d\sigma = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$$

由于$\dfrac{\sin y}{y}$的原函数不能以初等函数表示，其积分难以求出。

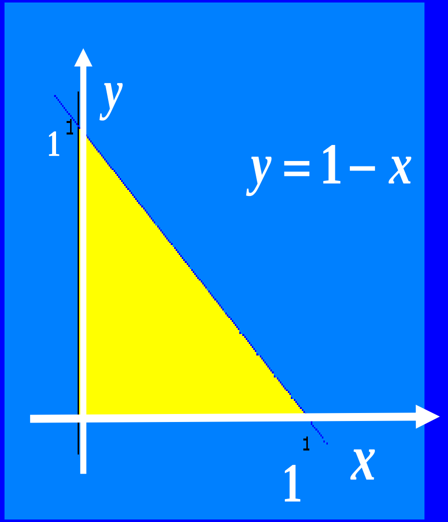
由此可见，在二重积分化为二次积分时，要根据被积函数和积分区域的不同情况选择对哪个变量先积分。以使计算简便。

例6 计算积分$\int_0^1 dx\int_y^1 e^{-y^2}dy$.

解 由于积分$\int e^{-y^2}dy$无法用初等函数表示出来，

所以该积分不能采用先对$y$后对$x$的积分顺序.

现改为先对$x$后对$y$的积分.




首先，根据所给积分确定积分区域 $D=\begin{cases} x\le y\le 1, \\ 0\le x\le 1. \end{cases}$

改变积分顺序时，将$D$表示为： $D=\begin{cases} 0\le y\le 1, \\ 0\le x\le y. \end{cases}$

所以

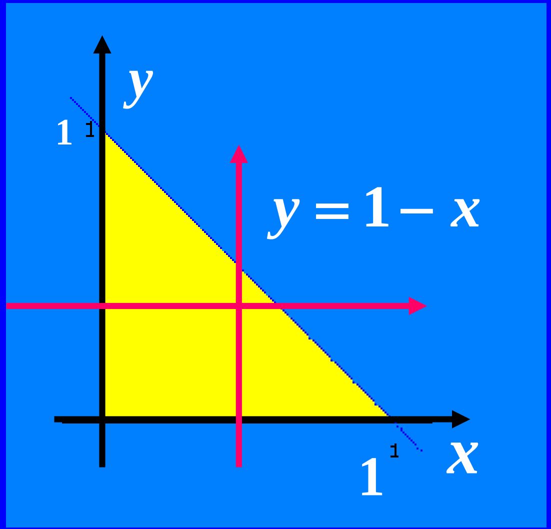
$$\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy=\iint\limits_D e^{-y^2}d\sigma$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right).$$

注2 在二重积分中适当选择积分先后秩序，对某些积分可以解决“积得出来”与“积不出来”的问题。

例7　改变积分$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$的次序.

解　积分区域如图

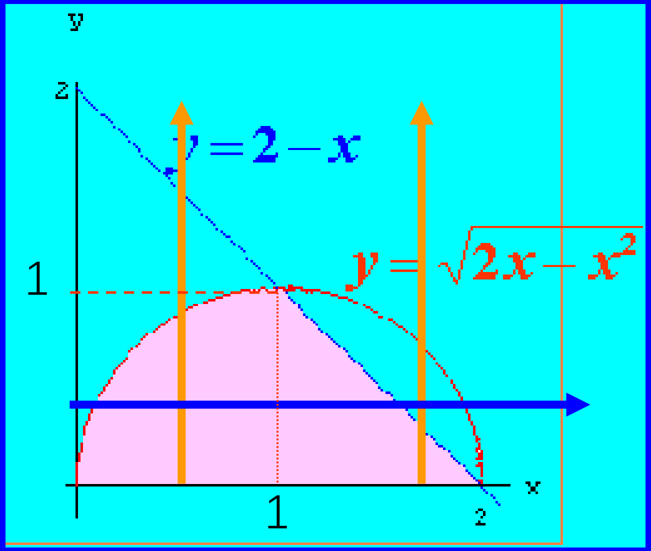



$$\text{原式} = \int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$$

## 例8 改变积分次序

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$$

解　积分区域如图




$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$$

交换积分次序的放法:

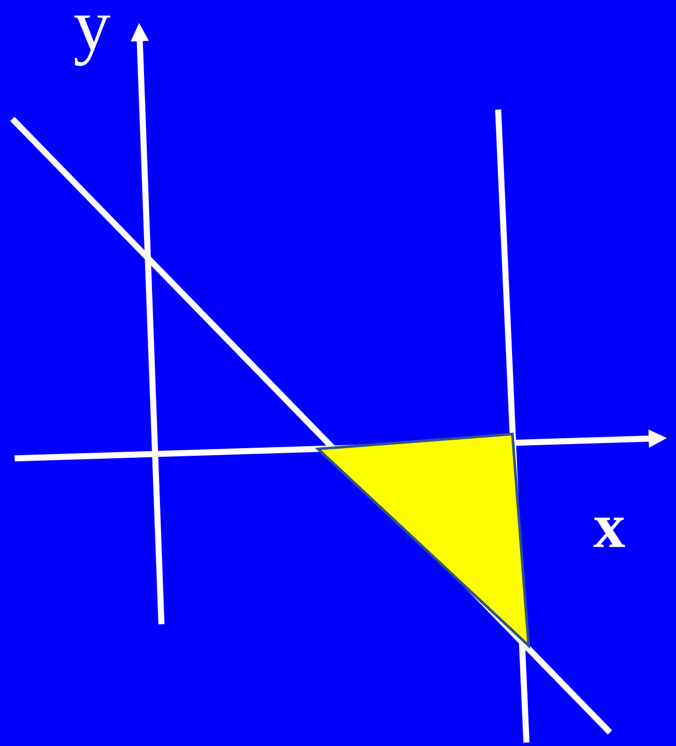
1.先依次给定二次积分限写出区域D的不等式。

2.画图依D的图形按前面的方法确定。

## 例9 改变积分次序

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{1-y}^{2} f(x,y)dx$$

解　积分区域如图 $D:\begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ 1-y \le x \le 2 \end{cases}$




$$原式 = \int_{1}^{2} dx \int_{1-x}^{0} f(x,y)dy$$

## 例10 改变积分次序

$$(1)I=\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1+y^2} f(x,y)dx \qquad (2)\ I=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3-y} f(x,y)dx$$

解：(1)积分区域如图 $D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ 1-y\le x\le 1+y^2\end{cases}$

$X$型： $D_1: 1-x\le y\le 1,\quad 0\le x\le 1$

$D_2: \sqrt{x-1}\le y\le 1,\ 1\le x\le 2$

$$I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x-1}}^{1} f(x,y)dy$$

例10 改变积分次序 (2) $I=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3-y} f(x,y)dx$

解：(2)积分区域 $D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ 1-\sqrt{1-y^2}\le x\le 3-y\end{cases}$

$X$型： $D_1: 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le \sqrt{1-(x-1)^2},$

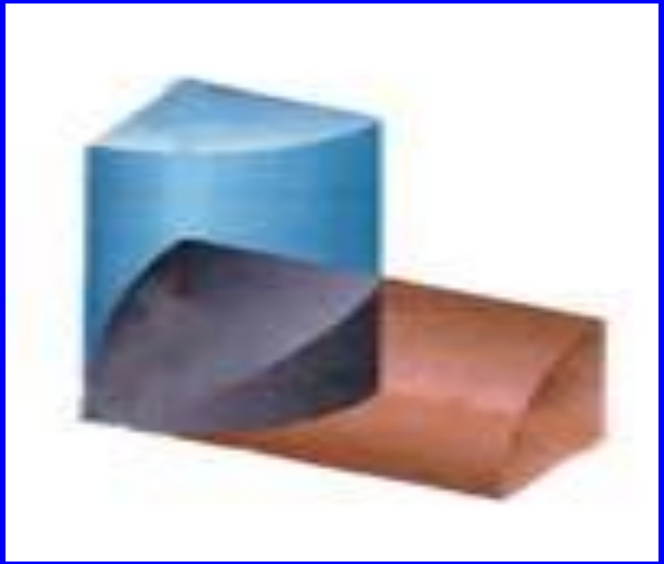
$D_2: 1\le x\le 2,\quad 0\le y\le 1,$

$D_3: 2\le x\le 3,\quad 0\le y\le 3-x,$

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} fdy+\int_1^2 dx\int_0^1 fdy+\int_2^3 dx\int_0^{3-x} fdy$$

例10 求由柱面$x^2+y^2=R^2$及$x^2+z^2=R^2$所围成的立体体积.

解　由对称性知，其体积为第一卦限部分的8倍.

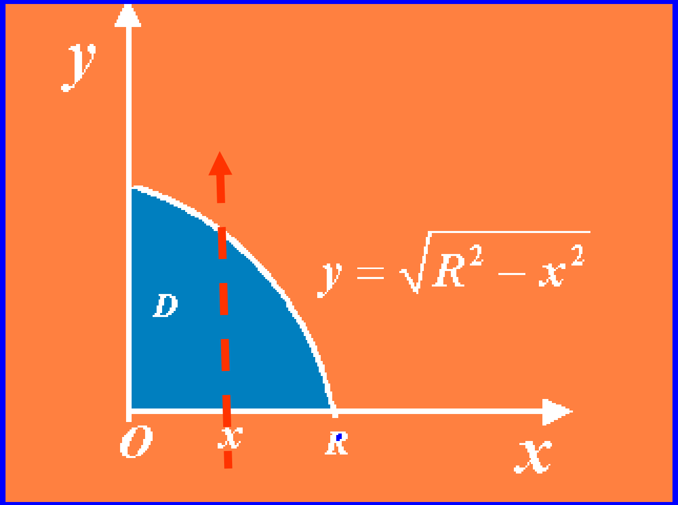


$$D\begin{cases}0\le y\le\sqrt{R^2-x^2},\\ 0\le x\le R.\end{cases}$$

$$V=8\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma$$

$$=8\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy$$

$$=8\int_0^R\left(R^2-x^2\right)dx=\frac{16}{3}R^3$$



## 二重积分的对称性：

（1）D关于y轴对称：

$$(i)\quad f(-x,y)=-f(x,y)\Rightarrow\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0$$

$$(ii)\quad f(-x,y)=f(x,y)\Rightarrow\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$$

$$\mathrm{D}_1:\{(x,y)\mid(x,y)\in D,x\geq 0\}$$

# 二重积分的对称性：

（2）D关于x轴对称：

$$(i)\quad f(x,-y)=-f(x,y)\Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma=0$$

$$(ii)\quad f(x,-y)=f(x,y)\Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

$$\mathrm{D}_1:\{(x,y)\,|\,(x,y)\in D, y\geq 0\}$$

## 二重积分的对称性：

（1）D关于原点对称：

$$(i)\quad f(-x,-y)=-f(x,y)\Rightarrow\iint_D f(x,y)d\sigma=0$$

$$(ii)\quad f(-x,-y)=f(x,y)\Rightarrow\iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

$$=4\iint_{D_3} f(x,y)d\sigma$$

$$D_3:\{(x,y)\mid(x,y)\in D,x\geq 0,y\geq 0\}$$

例 9　计算 $\iint\limits_D (\sqrt{2}-x-y)d\sigma$. 其中 $D:\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

解　$\iint\limits_D (\sqrt{2}-x-y)d\sigma$

$$=\iint\limits_D \sqrt{2}d\sigma-\iint\limits_D xd\sigma\iint\limits_D yd\sigma=\sqrt{2}\pi$$

例 10　计算 $\iint\limits_D (x^3+2y)d\sigma$. 其中 $D:\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$

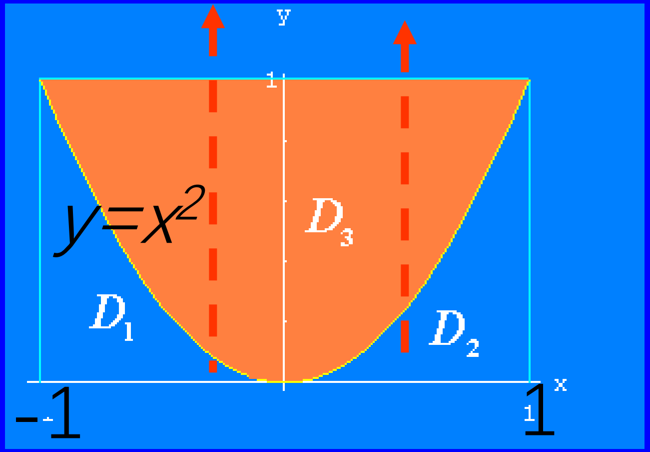
解　$$\iint\limits_D x^3+2yd\sigma=\iint\limits_D x^3 d\sigma+\iint\limits_D 2yd\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_1} 2yd\sigma=4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy$$

$$=\frac{4}{3}$$

**例11** 计算 $\iint\limits_D |y-x^2| d\sigma$. 其中 $D: -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

**解** 先去掉绝对值符号，如图




$$\iint\limits_D |y-x^2| d\sigma$$

$$= \iint\limits_{D_1+D_2} (x^2-y)d\sigma + \iint\limits_{D_3} (y-x^2)d\sigma$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} (x^2-y)dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (y-x^2)dy = \frac{11}{15}.$$