7.6 曲面及其方程

一、点的轨迹、方程的概念

二、柱面

三、旋转曲面

四、二次曲面

一、点的轨迹、方程的概念

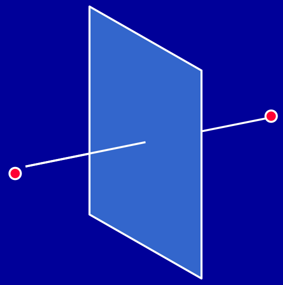
引例：求到两定点$A(1,2,3)$ 和$B(2,-1,4)$等距离的点的轨迹方程.

解： 设轨迹上的动点为$M(x,y,z)$，则$|AM|=|BM|$，即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$
$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

化简得 $2x-6y+2z-7=0$

说明： 动点轨迹为线段 AB 的垂直平分面.



显然在此平面上的点的坐标都满足此方程，

不在此平面上的点的坐标不满足此方程.

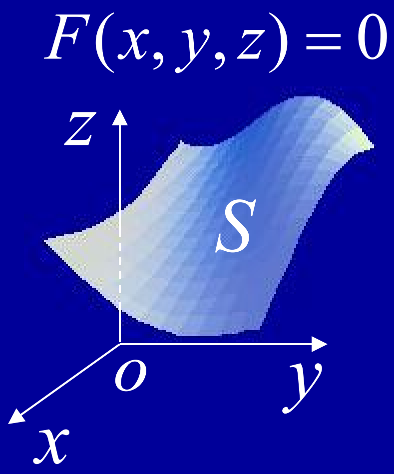
定义 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z)=0$ 有下述关系:

(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程,

则 $F(x, y, z)=0$ 叫做**曲面 S 的方程**,

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z)=0$ 的**图形**.



两个基本问题:

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时,
求曲面方程.

(2) 已知方程时,研究它所表示的几何形状
(必要时需作图).

例1. 求动点到定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 距离为 R 的轨迹方程.

解: 设轨迹上动点为 $M(x, y, z)$, 依题意 $|M_0M| = R$

即 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$

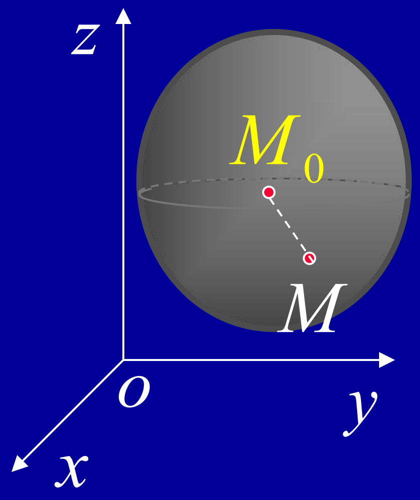
故所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

特别,当 M_0 在原点时,球面方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

$z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上(下)球面 .



例2. 研究方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面.

解: 配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

此方程表示: 球心为 $M_0(1,-2,0)$,

半径为 $\sqrt{5}$ 的球面.

说明: 如下形式的三元二次方程 ($A\neq 0$)

$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0$$

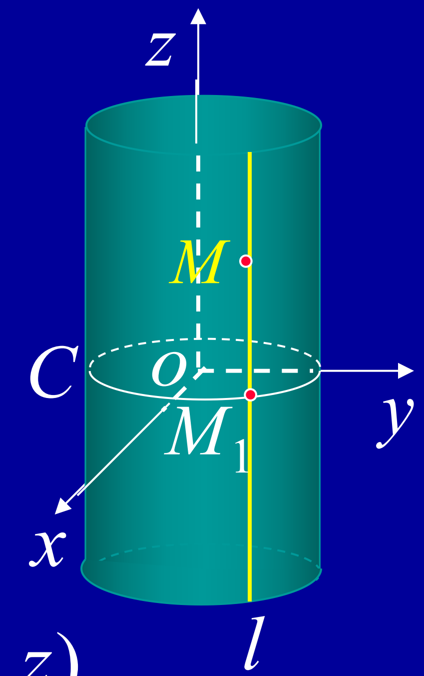
都可通过配方研究它的图形. 其图形可能是

一个**球面**, 或**点**, 或**虚轨迹**.

二、柱面

引例 分析方程 $x^2+y^2=R^2$

表示怎样的曲面 .



解: 在 xoy 面上, $x^2+y^2=R^2$ 表示圆C,

在圆C上任取一点 $M_1(x,y,0)$, 过此点作

平行 z 轴的直线l , 对任意z , 点$M(x,y,z)$

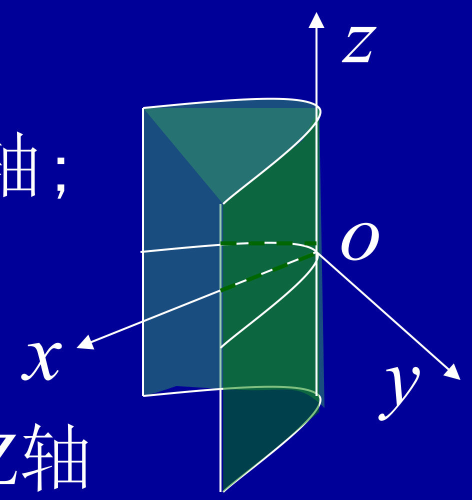
的坐标也满足方程 $x^2+y^2=R^2$

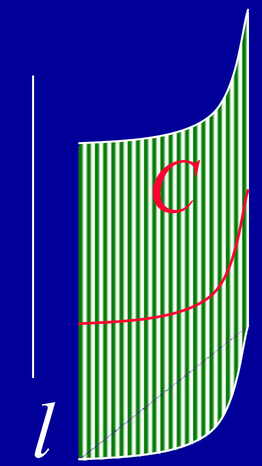
沿曲线C 平行于 z 轴的一切直线所形成的曲面称为**圆柱面**. 其上所有点的坐标都满足此方程, 故在空间

$x^2+y^2=R^2$ 表示**圆柱面**

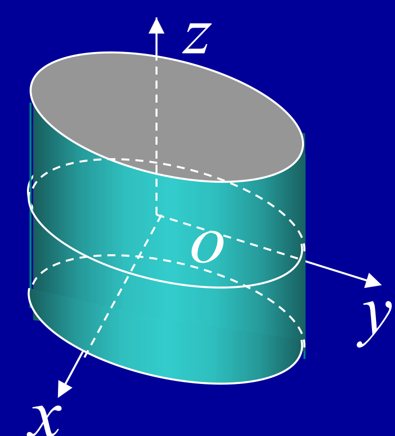
定义 平行定直线并沿定曲线C 移动的直线 l 形成的轨迹叫做**柱面**. C 叫做**准线**, l 叫做**母线**.

- $y^2 = 2x$ 表示**抛物柱面**,
  母线平行于 z 轴;
  准线为xoy 面上的抛物线.

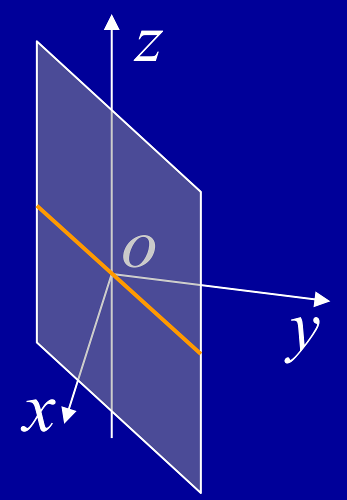




- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于Z轴的椭圆柱面.



- $x - y = 0$ 表示母线平行于 z 轴的**平面**.
  (且 z 轴在平面上)

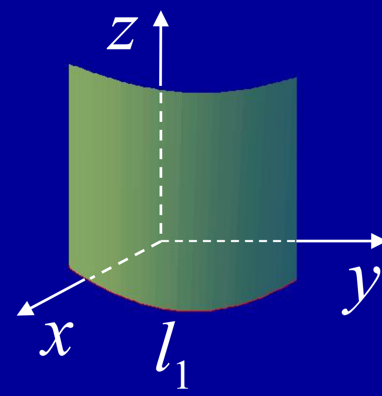


一般地,在三维空间

方程 $F(x,y)=0$ 表示柱面,

母线 平行于 z 轴;

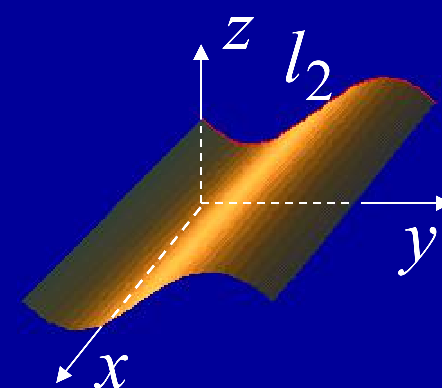
准线 xoy 面上的曲线 l_1.



方程 $G(y,z)=0$ 表示柱面,

母线 平行于 x 轴;

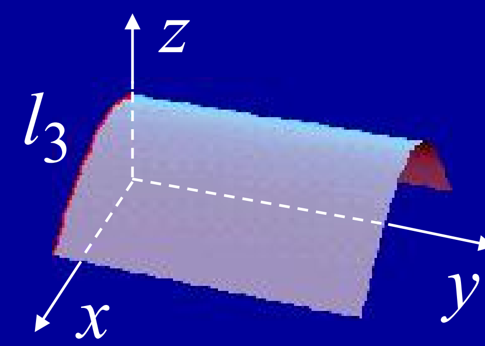
准线 yoz 面上的曲线 l_2.



方程 $H(z,x)=0$ 表示柱面,

母线 平行于 y 轴;

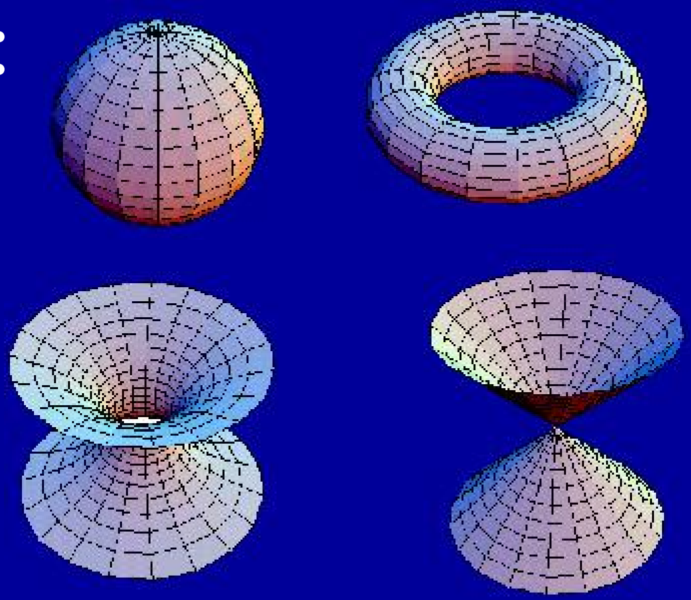
准线 xoz 面上的曲线 l_3.

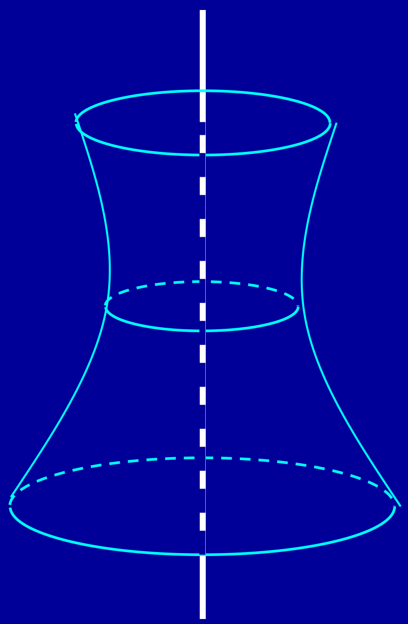


三、 旋转曲面

定义. 一条平面曲线 绕其平面上一条**定直线**旋转一周所形成的曲面叫做**旋转曲面**. 该定直线称为**旋转轴。**

例如：



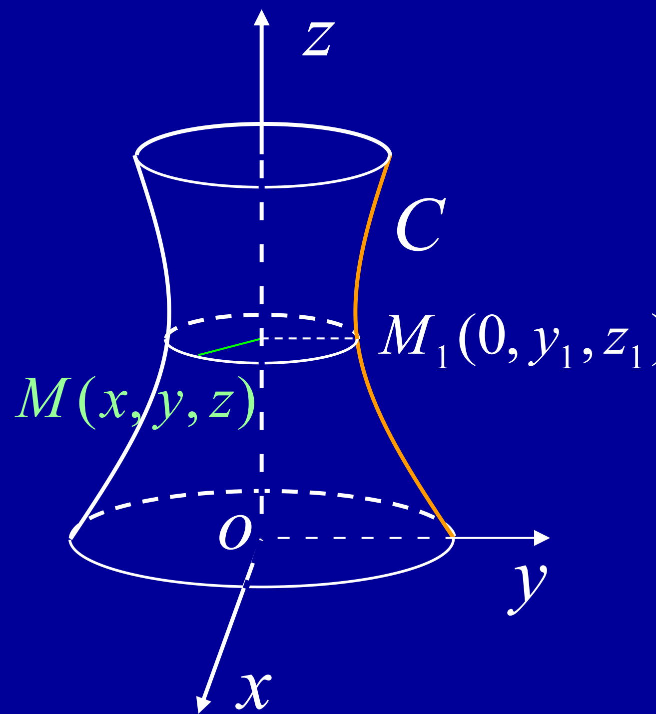


建立yoz面上曲线C 绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

给定 yoz 面上曲线 C: $f(y,z)=0$

若点 $M_1(0,y_1,z_1)\in C$, 则有

$$f(y_1,z_1)=0$$



当绕 z 轴旋转时, 该点转到 $M(x,y,z)$, 则有

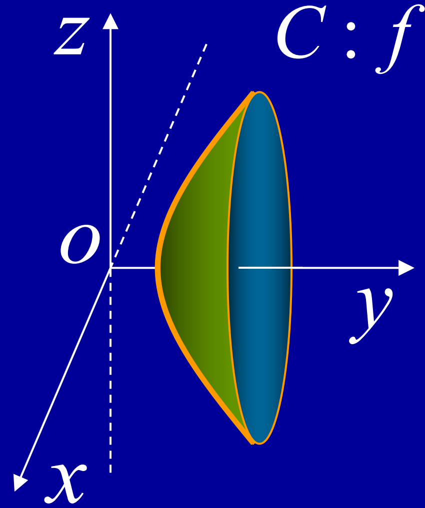
$$z=z_1,\quad \sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

故旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

思考： 当曲线 C 绕 y 轴旋转时，方程如何？

$$C: f(y,z)=0$$



$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

例3. 试建立顶点在原点, 旋转轴为z 轴, 半顶角为α的圆锥面方程.

解: 在yoz面上直线L 的方程为

$$z = y\cot\alpha$$

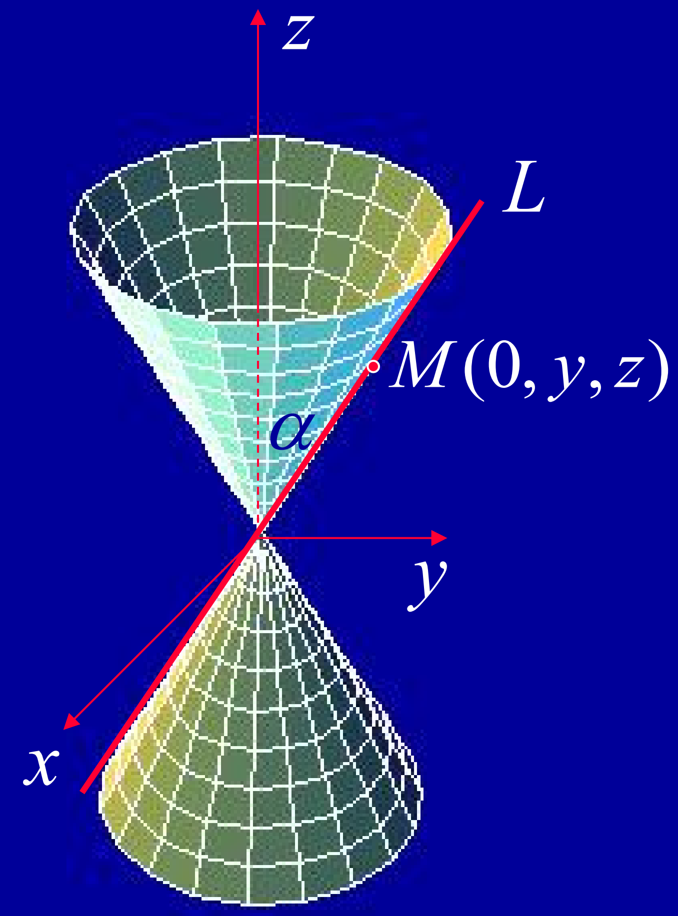
绕z 轴旋转时,圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\cot\alpha$$

令 $a = \cot\alpha$

两边平方

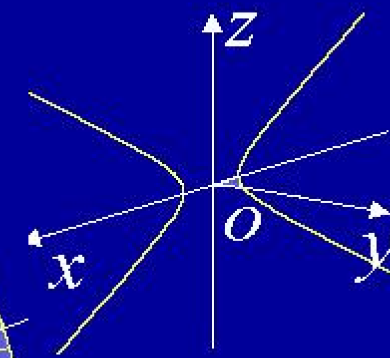
$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

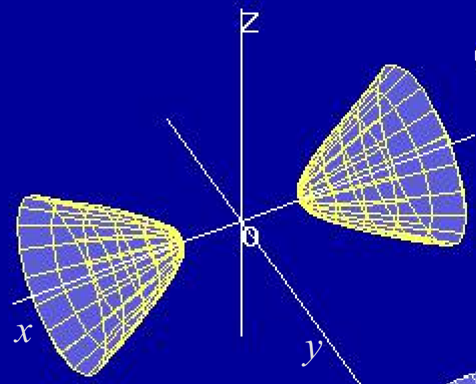


例4. 求坐标面 xoz 上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

解： 绕 x 轴旋转所成曲面方程为

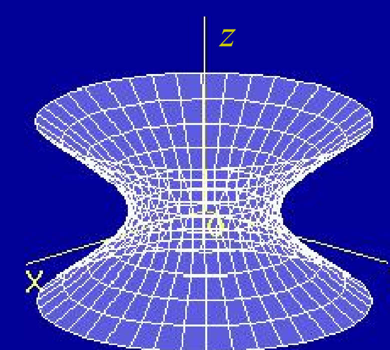
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$





绕 z 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



这两种曲面都叫做旋转双曲面.

四、二次曲面

三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyx + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)

的图形通常为**二次曲面**. 其基本类型有:

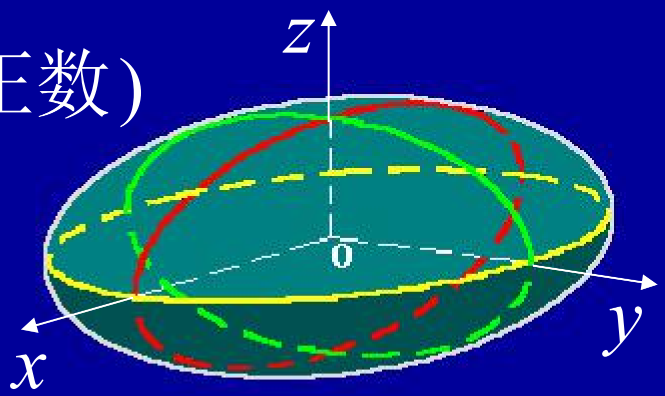
椭球面、抛物面、双曲面、锥面

适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍 .

研究二次曲面特性的基本方法: **截痕法**

1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$



(1) 范围：

$$|x|\le a,\quad |y|\le b,\quad |z|\le c$$

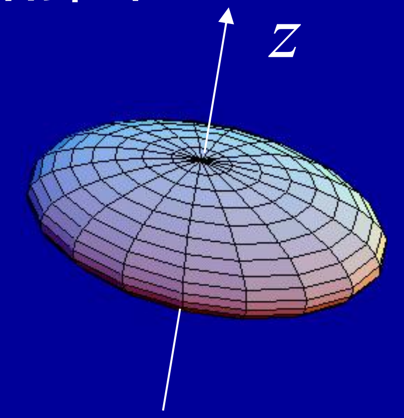
(2) 与坐标面的交线：椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

(3) 截痕: 与 $z=z_1\ (|z_1|<c)$ 的交线为椭圆:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1{}^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1{}^2)}=1 \\ z=z_1 \end{cases}$$



同样 $y=y_1\ (|y_1|\le b)$ 及 $x=x_1\ (|x_1|\le a)$ 的截痕也为椭圆

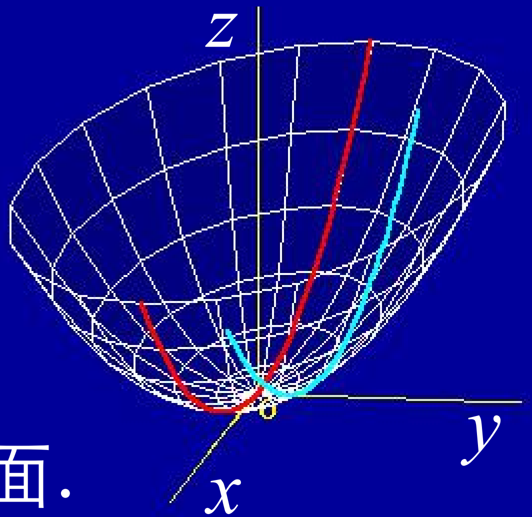
(4) 当 $a=b$ 时为旋转椭球面;

当 $a=b=c$ 时为球面.

2. 抛物面

(1) 椭圆抛物面

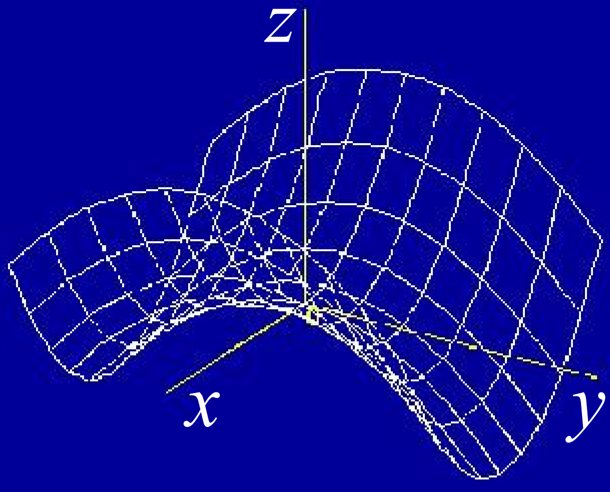
$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p\,,q\ \text{同号})$$



特别,当 $p=q$ 时为绕 z 轴的旋转抛物面.

(2) 双曲抛物面（鞍形曲面）

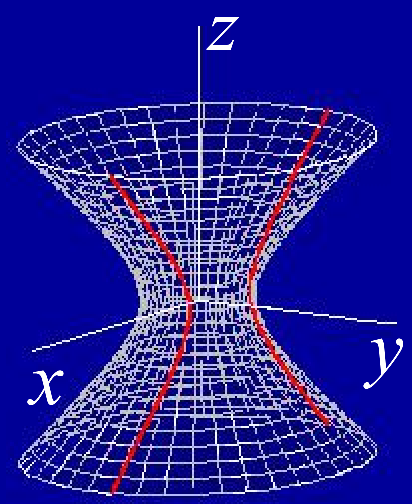
$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p\,,q\ \text{同号})$$



3. 双曲面

(1)单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$



平面 $z=z_1$ 上的截痕为椭圆.

平面 $y=y_1$ 上的截痕情况:

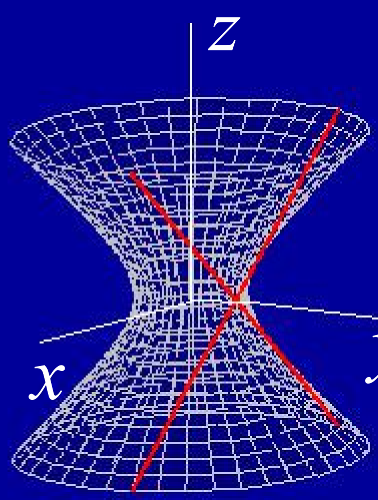
1) $|y_1|<b$ 时, 截痕为双曲线:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^2}{b^2}\\ y=y_1\end{cases}$$

(实轴平行于x轴;
虚轴平行于z轴)

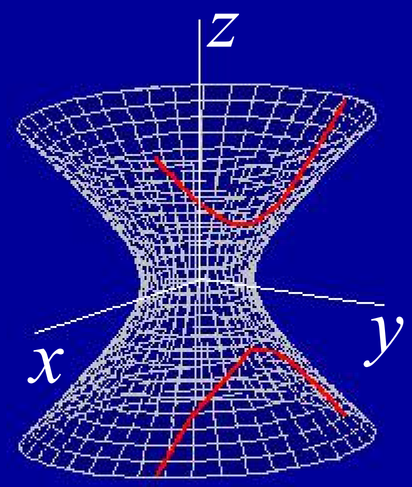
2) $|y_1| = b$ 时，截痕为相交直线:

$$\begin{cases} y = b\,(\text{或} -b) \\ \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases}$$



3) $|y_1| > b$ 时, 截痕为双曲线:

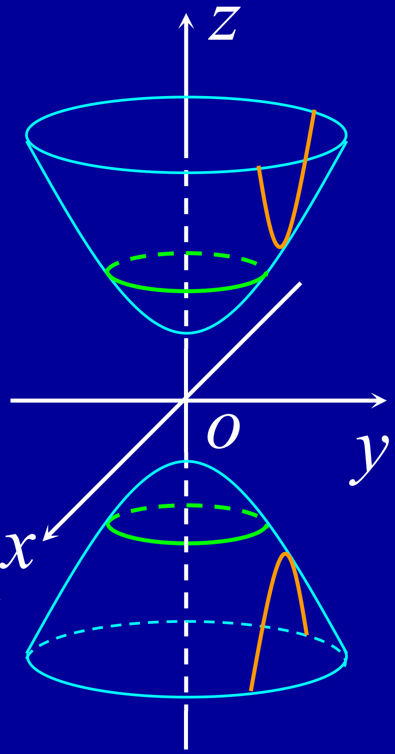
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \underline{1 - \dfrac{y_1^{\,2}}{b^2}} \quad < 0 \\ y = y_1 \end{cases}$$



(实轴平行于z轴; 虚轴平行于x轴)

(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$



平面 $y=y_1$ 上的截痕为 双曲线

平面 $x=x_1$ 上的截痕为 双曲线

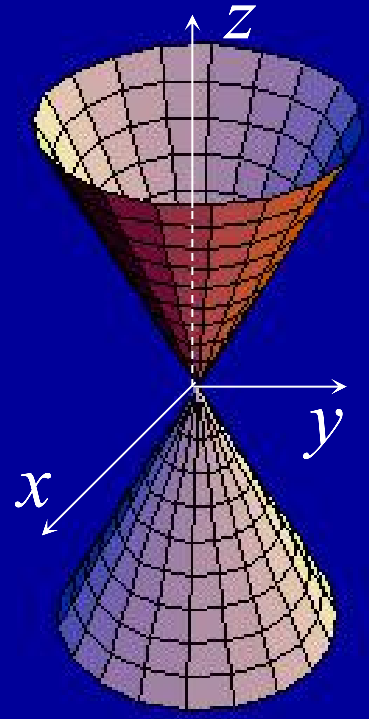
平面 $z=z_1$ $(|z_1|>c)$上的截痕为 椭圆

注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases} 1 & \text{单叶双曲面} \\ -1 & \text{双叶双曲面} \end{cases}$$

4. 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad (a,b\text{ 为正数})$$



在平面 $z=t$ 上的截痕为 椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1,\ z=t \qquad ①$$

在平面 $x=0$ 或 $y=0$ 上的截痕为过原点的两直线 .

可以证明, 椭圆①上任一点与原点的连线均在曲面上.

曲面小结

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x, y, z)=0$

- 球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- 旋转曲面

如, 曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

- 柱面

如,曲面 $F(x, y)=0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

又如,椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等 .

2. 二次曲面 $\longleftrightarrow$ 三元二次方程

- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 抛物面：椭圆抛物面 双曲抛物面

$(p,q$ 同号$)$ $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$ $-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$

- 双曲面：单叶双曲面 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

- 椭圆锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

思考与练习

1. 指出下列方程的图形:

方　程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=5$	平行于 y 轴的直线	平行于 yoz 面的平面
$x^2+y^2=9$	圆心在(0,0) 半径为 3 的圆	以 z 轴为中心轴的圆柱面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于 z 轴的平面

7.7 空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程

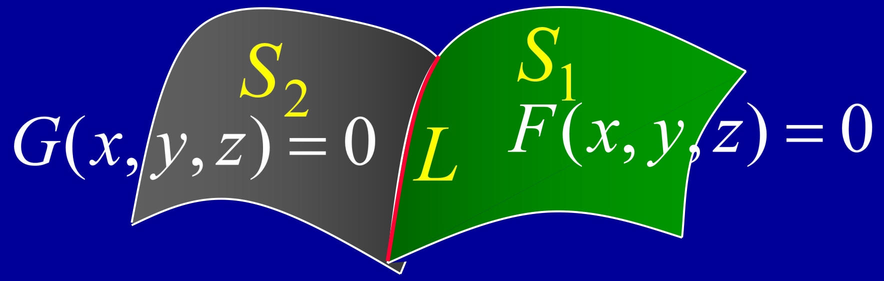
二、空间曲线的参数方程

三、空间曲线在坐标面上的投影

一、空间曲线的一般方程

1. 空间曲线可视为两曲面的交线, 其一般方程为方程组

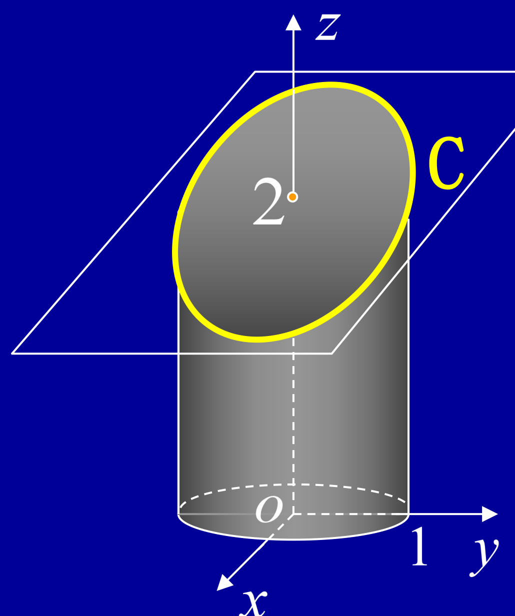
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



例如, 方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

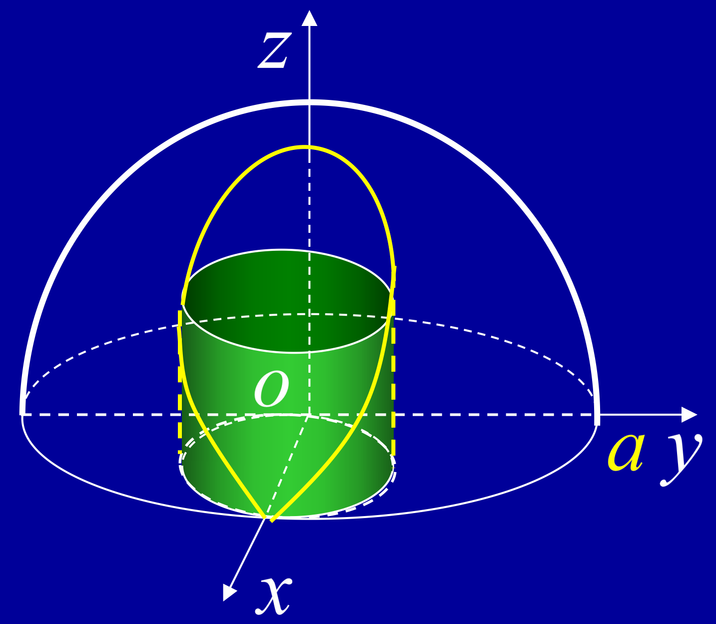
表示圆柱面与平面的交线 C.

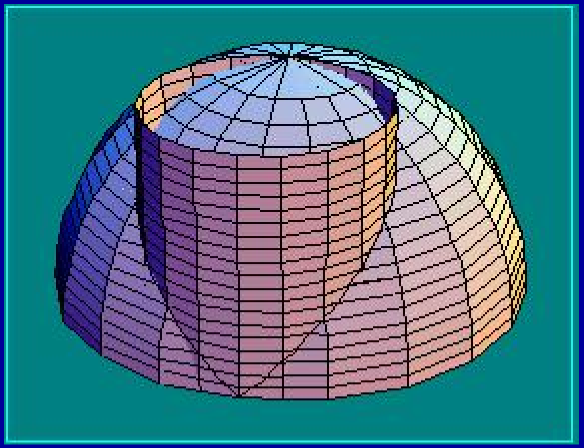


又如, 方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

表示上半球面与圆柱面的交线C.



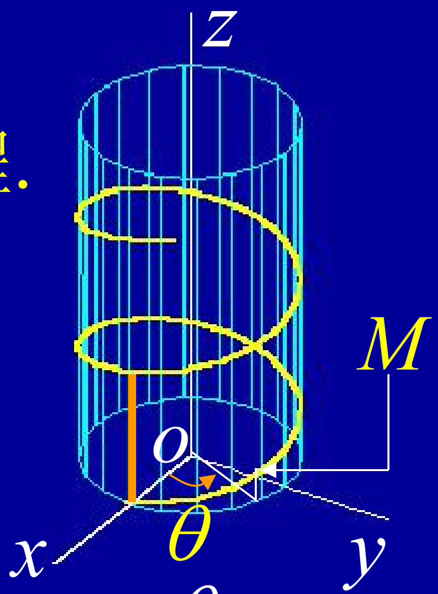


二、空间曲线的参数方程

将曲线C上的动点坐标x, y, z表示成参数t 的函数:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

称它为空间曲线的参数方程.



例如, 圆柱螺旋线 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{令}\,\theta = \omega t,\, b = \frac{v}{\omega}} \quad \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

当$\theta = 2\pi$时, 上升高度 $h = 2\pi b$， 称为**螺距** .

例1. 将下列曲线化为参数方程表示:

$$(1)\ \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$$

解: (1) 根据第一方程引入参数,得所求为

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\frac{1}{3}(6-2\cos t) \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

(2) 将第二方程变形为 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, 故所求为

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \\ z=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t} \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

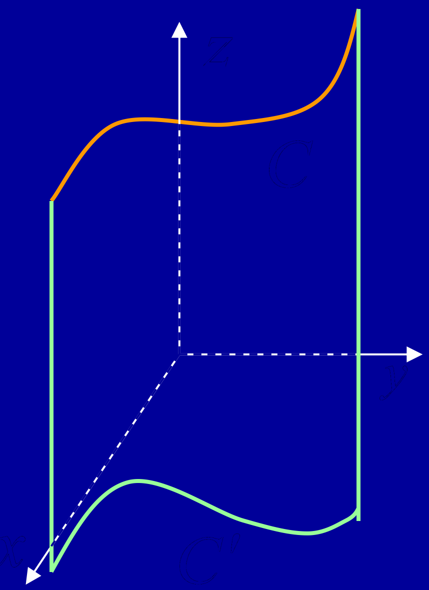
三、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去 z 得投影柱面 $H(x,y)=0$，

则C 在xoy 面上的投影曲线 C' 为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$



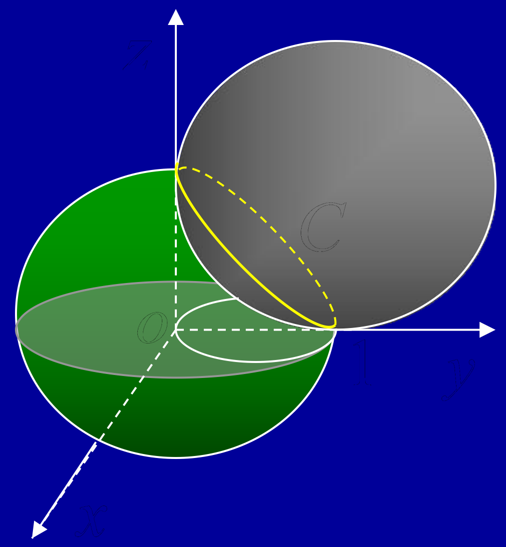
消去 x 得C 在yoz 面上的投影曲线方程

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

消去y 得C 在zox 面上的投影曲线方程 $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

例如,

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$$



在 xoy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

内容小结

- 空间曲线 ⟷ 三元方程组
  或参数方程（如, 圆柱螺线)
- 求投影曲线