第六章　微分方程

考点	常见题型
1.可分离变量	填空、选择
2 齐次方程	
3 一阶线性线性微分方程	大题
4 二阶齐次线性微分方程	
5 二阶非齐次线性微分方程	填空、选择

定义：微分方程的阶：微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫微分方程的阶.

例 $x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$　　3 阶

$(7x-6y)dx+(x+y)dy=0$　　1 阶

$y^{(n)}+1=0$,　　n 阶

一、可分离变量的微分方程

方程形式： $g(y)\,dy=f(x)\,dx$（或写成 $y'=\varphi(x)\,\psi(y)$）

解法 ：两边同时求积分

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解：　此方程为可分离变量方程，分离变量后得

$$\frac{1}{y}dy=2xdx,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{y}dy=\int 2xdx,$$

即

$$\ln|y| = x^2 + C_1,$$

从而

$$y = \pm e^{x^2+C_1} = \pm e^{C_1} e^{x^2}.$$

因为$\pm e^{C_1}$仍是任意常数, 把它记作 C, 便得所给方程的通解

$$y = Ce^{x^2}.$$

二 齐次方程

1 形式: $f(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})$,

2 解法:

（1）变换方程$\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ （1）

（2）令$u = \frac{y}{x}$, 即 $y = ux$,

（3）变换方程成含 u 的方程 $u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$,

（4）利用分离变量, 得

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

两端积分, 得 $\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$

求出积分后, 再用$\frac{y}{x}$代替 u, 便得所给齐次方程的通解.

例 2 解方程$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$.

解 原方程可写成 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x} - 1}$,

因此原方程是齐次方程. 令$\frac{y}{x} = u$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$,

于是原方程变为 $$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1},$$

即 $$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}.$$

分离变量，得 $$(1-\frac{1}{u})du=\frac{dx}{x}.$$

两边积分，得 $$u-\ln|u|+C=\ln|x|,$$

或写成 $$\ln|xu|=u+C.$$

以 $\frac{y}{x}$ 代上式中的 u，便得所给方程的通解 $$\ln|y|=\frac{y}{x}+C$$

例 3 解方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$.

令 $x+y=u$，则原方程化为

$\frac{du}{dx}-1=\frac{1}{u}$，即 $\frac{du}{dx}=\frac{u+1}{u}$.

分离变量，得

$$\frac{u}{u+1}du=dx,$$

两端积分得

$$u-\ln|u+1|=x-\ln|C|.$$

以 $u=x+y$ 代入上式，得

$y-\ln|x+y+1|=-\ln|C|$，或 $x=Ce^y-y-1$.

若方程中出现 $f(xy), f(x+y), f(x-y), f(x^2+y^2)$ 等形式的项时，通常用变量代换 $u=xy, u=x+y, (u=x-y), u=x^2+y^2$ 等可使原方程化简。

三 一阶线性微分方程

1 形式 $\boldsymbol{y'+P(x)y=Q(x)}$

2 解法 通解公式 $y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$

例 4 设 $P(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则下列表达式中哪一个不能表示微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 的通解。（其中 C 是任意常数）

A. $y=Ce^{-\int P(x)dx}$　B. $y=Ce^{-\int_0^x P(x)dx}$　C. $y=e^{-\int P(x)dx+C}$　D. $y=-Ce^{-\int P(x)dx}$

答案：C

例 5　求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解法 1　这是一个非齐次线性方程.

先求对应的齐次线性方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0$ 的通解.

分离变量得　$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1}$,

两边积分得　$\ln y=2\ln(x+1)+\ln C$,

齐次线性方程的通解为　$y=C(x+1)^2$.

用常数变易法. 把 C 换成 u, 即令 $y=u\cdot(x+1)^2$, 代入所给非齐次线性方程, 得

$$u'\cdot(x+1)^2+2u\cdot(x+1)-\frac{2}{x+1}u\cdot(x+1)^2=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$u'=(x+1)^{\frac{1}{2}},$$

两边积分, 得　$u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$.

再把上式代入 $y=u(x+1)^2$ 中, 即得所求方程的通解为

$$y=(x+1)^2[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C].$$

解法 2: 这里 $P(x)=-\frac{2}{x+1}$, $Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$.

因为　$\int P(x)dx=\int(-\frac{2}{x+1})dx=-2\ln(x+1)$,

$$e^{-\int P(x)dx}=e^{2\ln(x+1)}=(x+1)^2,$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int(x+1)^{\frac{5}{2}}(x+1)^{-2}dx=\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}},$$

所以通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]=(x+1)^2[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C].$$

四 二阶常系数齐次线性微分方程

1 形式 $y''+py'+qy=0$

2 解法

特征方程: 方程 $r^2+pr+q=0$ 叫做微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程

特征根 r1,r2	通解
$r_1 \neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
$r_1=r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$
$r_{1,2}=\alpha \pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 6 求微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

解 所给方程的特征方程为 $r^2+1=0$.

特征方程的根为 $r_1=i$, $r_2=-i$, 是一对共轭复根,

因此所求通解为 $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

例 7 求方程 $y''+2y'+y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=4$、$y'|_{x=0}=-2$ 的特解.

解 所给方程的特征方程为

$r^2+2r+1=0$, 即 $(r+1)^2=0$.

$r_1=r_2=-1$ 是两个相等的实根, 因此所给微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}.$$

将条件 $y|_{x=0}=4$ 代入通解, 得 $C_1=4$, 从而

$$y=(4+C_2x)e^{-x}.$$

将上式对 x 求导, 得

$y'=(C_2-4-C_2x)e^{-x}$.

再把条件 $y'|_{x=0}=-2$ 代入上式, 得 $C_2=2$. 于是所求特解为

$x=(4+2x)e^{-x}$.

五 二阶常系数非齐次线性微分方程

1 形式 $y''+py'+qy=f(x)$ I

2 解法

二阶常系数非齐次线性微分方程的通解是对应的齐次方程

的通解 $y=Y(x)$ 与非齐次方程本身的一个特解 $y=y^*(x)$ 之和:

$y=Y(x)+ y^*(x)$.

① $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

则特解可设为 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ 由λ决定 k=0, 1, 2

② $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$

则特解可设为

$y^*=x^k e^{\lambda x}[R^{(1)}{}_m(x)\cos\omega x+R^{(2)}{}_m(x)\sin\omega x]$,

其中 $R^{(1)}{}_m(x)$、$R^{(2)}{}_m(x)$ 是 m 次多项式, $m=\max\{l, n\}$, 而 k 按$\lambda+i\omega$ (或$\lambda-i\omega$)不是特征方程的根或是特征方程的单根依次取 0 或 1.

例 8 求微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

解 这是二阶常系数非齐次线性微分方程, 且函数 $f(x)$ 是 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 型(其中 $P_m(x)=3x+1$, $\lambda=0$).

与所给方程对应的齐次方程为 $y''-2y'-3y=0$,

它的特征方程为 $r^2-2r-3=0$.

由于这里 $\lambda=0$ 不是特征方程的根, 所以应设特解为 $y^*=b_0x+b_1$.

把它代入所给方程, 得 $-3b_0x-2b_0-3b_1=3x+1$,

比较两端 x 同次幂的系数, 得 $\begin{cases}-3b_0=3\\-2b_0-3b_1=1\end{cases}$, $-3b_0=3$, $-2b_0-3b_1=1$.

由此求得 $b_0=-1$, $b_1=\frac{1}{3}$. 于是求得所给方程的一个特解为

$$y^*=-x+\frac{1}{3}.$$

例 9 求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解.

解 所给方程是二阶常系数非齐次线性微分方程,

且 $f(x)$ 属于 $e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型(其中 $\lambda=0$, $\omega=2$, $P_l(x)=x$, $P_n(x)=0$).

与所给方程对应的齐次方程为 $y''+y=0$,

它的特征方程为 $r^2+1=0$.

由于这里 $\lambda+i\omega=2i$ 不是特征方程的根, 所以应设特解为

$$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x.$$

第七章　向量代数与空间解析几何

考点	常见题型
1.向量的点乘	填空、选择
2 向量的叉乘	
3 空间平面方程、直线方程	大题
4 空间曲面的切平面和法线方程（第八章）	
5 空间曲线的切线和法平面方程（第八章）	
6 曲面方程	填空、选择

一、 向量的点乘

$$\vec{a}=a_x i+a_y j+a_z k=\{a_x,a_y,a_z\},\ \vec{b}=b_x i+b_y j+b_z k=\{b_x,b_y,b_z\},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$e_{\vec{a}}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

$$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$$

例 1 设

$$|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=2,\ \left(\vec{a}\overset{\wedge}{\cdot}\vec{b}\right)=\frac{\pi}{3},\ \text{则}\ |2\vec{a}-3\vec{b}|=2\sqrt{19}$$

解：

$$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=4|\vec{a}|^2-|2\vec{a}\cdot\vec{b}|+9\vec{b}^2=76$$

$$\therefore\quad |2\vec{a}-3\vec{b}|=2\sqrt{19}$$

例 2　已知 $\vec{a}=(4,0,2)$, $\vec{b}=(\lambda,2,2)$ 相互垂直，则 $\lambda=$

解：$\because \vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow 4\lambda+4=0$

$\therefore\quad \lambda=-1$

(2) 向量积

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$$

$$|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a}\overset{\wedge}{,}\vec{b}\right)$$

$\vec{c}\perp\vec{a}$,　$\vec{c}\perp\vec{b}$ 即 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$,　$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$,

右手定则

即 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0$,　$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=0$

注意 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

应用（i）$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

（ii）$\vec{a}/\!/\vec{b}\leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$

（iii）如 $\vec{a}\perp\vec{c}$,　$\vec{b}\perp\vec{c}$,　则 $\vec{c}/\!/(\vec{a}\times\vec{b})$ 即经常用于求平面的法向量。

三、平面及其方程

已知平面π过点 M_0（x_0、y_0、z_0），$\vec{n}=\{A,B,C\}$ 为π的法向量。

1> 点法式：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

2> 一般式：Ax+By+Cz+D=0，A、B、C 不全为零。

3> 截 距 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{c}{z}=1$ 式：，a，b，分别为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距。

4> 点 $M_0(x_0$、y_0、$z_0)$ 到平面 Ax+By+Cz+D=0 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

例 2 求通过点 P（2,-1,-1），Q（1,2,3）且垂直于平面 2x+3y-5z+6=0 的平面方程。

解：$\overrightarrow{QP}=\{1,-3,-4\}$，已知平面的法矢量 $\vec{n}_1=\{2,3,-5\}$

$$\overrightarrow{QP}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & -4\\ 2 & 3 & -5\end{vmatrix}=27\vec{i}-3\vec{j}+9\vec{k}$$

取 $\vec{n}=\{-9,-1,3\}$

所求平面为：9(x-2)-(y+1)+3(z-1)=0

即：9x-y+3z-16=0

例 3 求过点（1,2,4）且平行于平面的 3x+2y+z-7=0 的平面方程。

解:n=(3,2,1) ,P(1,2,4)

由点法式方程可得： 3(x-1)+2(y-2)+(z-4)=0

例 4 求点(2, 1, 1)到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离.

解 $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\times2+1\times1-(-1)\times1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

四、 直线及其方程

<1> 空间直线的一般方程

L：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

<2> 点向式（对称式）

直线过点 $M_0(x_0、y_0、z_0)$，$\bar{s}=\{m,n,p\}$为 L 方向向量

则 L：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

<3> 参 数 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=x_0+pt \end{cases}$ 式 L：　　　t 为参数

（4）直线与平面关系

<1> $L//\pi \Leftrightarrow s\perp n$即$s\cdot n=0$

<2> $L\perp\pi \Leftrightarrow s//n$即$\dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$

例 5 求过点(1, −2, 4)且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线的方程.

解　平面的法线向量(2, −3, 1)可以作为所求直线的方向向量. 由此可得所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}.$$

五、 **空间曲面及其方程**

旋转曲面、 柱面、球面

例 6 方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面？

例 7 将 zOx 坐标面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解　绕 x 轴旋转所在的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1;$$

绕 z 轴旋转所在的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

六、 空间曲面的切平面和法线

法向量和方向向量的求法

①找到 F

②求 F_x, F_y, F_z

③n=s=(F_x, F_y, F_z）

例 8 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程。

解 $F(x, y, z)= x^2+y^2+z^2-14$,

$F_x=2x$, $F_y=2y$, $F_z=2z$,

$F_x(1, 2, 3)=2$, $F_y(1, 2, 3)=4$, $F_z(1, 2, 3)=6$.

法向量为 $\boldsymbol{n}=(2, 4, 6)$, 或 $\boldsymbol{n}=(1, 2, 3)$.

所求切平面方程为 $2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$, 即 $x+2y+3z-14=0$.

法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$.

七、 空间曲线的切线和法平面

空间曲线 Γ 的参数方程为 $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$,

切线方程为： $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程为： $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$.

例 9 求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在点（1，1，1）的切线方程。

解 因为 $x_t'=1$, $y_t'=2t$, $z_t'=3t^2$, 而点(1, 1, 1)所对应的参数 $t=1$, 所以

$\boldsymbol{T}=(1, 2, 3)$.

于是, 切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3},$$

法平面方程为

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0, \text{ 即 } x+2y+3z=6.$$

第八章　多元函数微分法及其应用

<table>
<tr><th>考点</th><th>常见题型</th></tr>
<tr><td>1.多元函数的定义域，多元函数的极限</td><td>填空、选择</td></tr>
<tr><td>2 偏导数、高阶导数、全微分</td><td rowspan="2">三种类型</td></tr>
<tr><td>3 偏导、连续、可微间的关系</td></tr>
<tr><td>4 复合函数求导、隐函数求导</td><td rowspan="2">大题</td></tr>
<tr><td>5 多元函数的极值（拉格朗日乘数法）</td></tr>
</table>

一、多元函数的极限

例 1 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}y=1\times2=2.$

例 2　二重极限存在，$P\to P_0$ 必须以任何方式趋向，否则极限不存在。反例：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0.0)\\ 0,(x.y)=0\end{cases}$$

当点 $P(x, y)$沿 x 轴趋于点(0, 0)时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,0)=\lim_{x\to0}0=0;$$

当点 $P(x, y)$沿 y 轴趋于点(0, 0)时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{y\to0}f(0,y)=\lim_{y\to0}0=0.$$

当点 $P(x, y)$沿直线 $y=kx$ 有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

二、 偏导数、高阶导数、全微分

例 3 求 $z = x^2 \sin 2y$ 的偏导数。

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sin 2y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cos 2y$

例 4 求 $z = e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 的全微分。

解 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=e^2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=2e^2,$$

所以 $dz=e^2dx+2e^2dy$.

三、 偏导、可微、连续之间的关系

$$偏导连续 \Rightarrow 可微 \Rightarrow \begin{cases} 偏导数存在 \\ \\ 连续 \end{cases}$$ （偏导存在和连续之间无任何关系）

四、 复合函数求导、隐函数求导

例 5 设 $\omega = f(x+y+z, xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial \omega}{\partial x}$，

解 令 $u=x+y+z$, $v=xyz$，则 $w=f(u, v)$.

令 $f_1'=\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}$，$\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=f_1'+yzf_2'$，

隐函数存在定理 2 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

例 6 设 $x^2+y^2+z^2=4z$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　设 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-4z$, 则 $F_x=2x$, $F_z=2z-4$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x}{2z-4}=\frac{x}{2-z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-x)+x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-x)+x(\dfrac{x}{2-z})}{(2-z)^2}=\frac{(2-x)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

五、多元函数的极值

几个概念一定要清晰

（1）驻点一定是极值点　　×

（2）极值点一定是驻点　　×

(3)　可导函数的极值点一定是驻点　　√

拉格朗日乘数法

第九章　　二重积分

考点	常见题型
1.交换积分次序	填空、选择
2 直角坐标系下二重积分计算	大题
3 极坐标下二重积分计算	

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

把握原则：1）画出区域 D

　　　　　2）在确定积分限

例 1. 计算$\iint\limits_D xyd\sigma$, 其中 D 是由直线 y=1、x=2 及 y=x 所围成的闭区域.

解: 画出区域 D.

方法一.　可把 D 看成是 X--型区域: $1\le x\le 2$, $1\le y\le x$. 于是

$$\iint\limits_D xyd\sigma=\int_1^2[\int_1^x xydy]dx=\int_1^2[x\cdot\frac{y^2}{2}]_1^x dx=\frac{1}{2}\int_1^2(x^3-x)dx=\frac{1}{2}[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}]_1^2=\frac{9}{8}.$$

注: 积分还可以写成$\iint\limits_D xyd\sigma=\int_1^2 dx\int_1^x xydy=\int_1^2 xdx\int_1^x ydy$.

解法 2. 也可把 D 看成是 Y--型区域: $1\le y\le 2$, $y\le x\le 2$. 于是

$$\iint\limits_D xyd\sigma=\int_1^2[\int_y^2 xydx]dy=\int_1^2[y\cdot\frac{x^2}{2}]_y^2 dy=\int_1^2(2y-\frac{y^3}{2})dy=[y^2-\frac{y^4}{8}]_1^2=\frac{9}{8}$$

例 2. 计算$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, 其中 D 是由中心在原点、半径为 a 的圆周所围成的闭区域.

解　在极坐标系中, 闭区域 D 可表示为

$0\le\rho\le a$, $0\le\theta\le 2\pi$.

于是　$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint\limits_D e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}[\int_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho]d\theta=\int_0^{2\pi}[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}]_0^a d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-a^2})\int_0^{2\pi}d\theta=\pi(1-e^{-a^2})$$

例 3. 计算$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, 其中 D 是由中心在原点、半径为 *4* 的圆周所围成的闭区域.

解　在极坐标系中, 闭区域 D 可表示为

$0\le\rho\le 2$，　$0\le\theta\le 2\pi$.

于是　$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2e}\ dxdy=\iint\limits_D \rho\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}[\int_0^2\rho^2 d\rho]d\theta=2\pi\cdot\frac{1}{3}\rho 3\ \Big|_0^2=\frac{16\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-a^2})\int_0^{2\pi}d\theta=\pi(1-e^{-a^2})$$

第十章　　级数

考点	常见题型
1.级数的比较审敛法、比值审敛法	填空、选择
2 交错级数	三种类型
3 绝对收敛、条件收敛	
4 收敛域、和函数	大题
5 幂级数展开	大题填空