第五节

空间直线及其方程

一、空间直线方程

二、线面间的位置关系

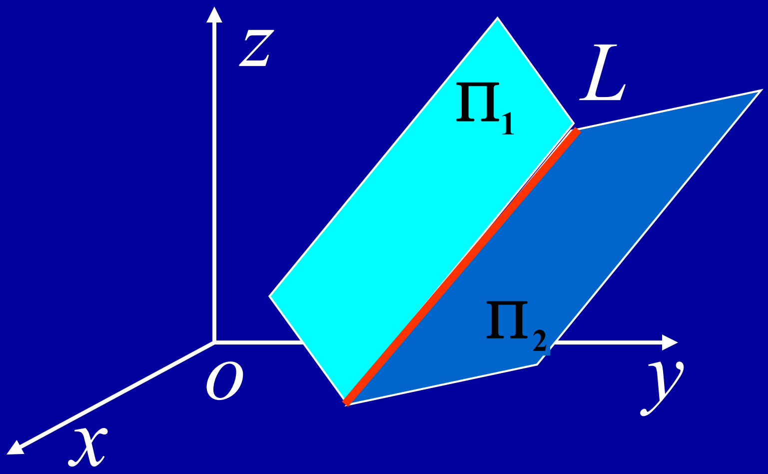
一、空间直线方程

1. 一般式方程

直线可视为两平面交线，因此其一般式方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

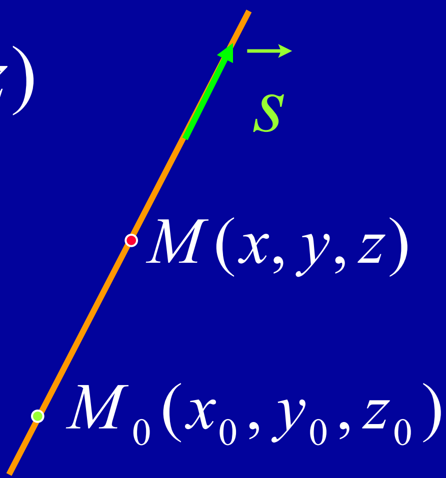
（不唯一）



2. 对称式方程

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$, 设直线上的动点为 $M(x, y, z)$

则 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$



故有

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

此式称为直线的**对称式方程**(也称为**点向式方程**)

说明: 某些分母为零时, 其分子也理解为零.

例如, 当 $m = n = 0,\ p \neq 0$ 时, 直线方程为

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

3. 参数式方程

设 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$

得参数式方程 :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + m\,t \\ y = y_0 + n\,t \\ z = z_0 + p\,t \end{cases}}$$

例1　求过点 $M(1,0,-2)$ 且与两直线

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1} \text{ 和 } \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{0}$$

垂直的直线方程

解： 由题意所求直线的方向向量是

$$(1,1,-1)\times(1,-1,0)=(-1,-1,-2)$$

因此所求直线的方程是

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{2}$$

例2. 用对称式及参数式表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

解: 先在直线上找一点.

令 $x=1$, 解方程组 $\begin{cases} y+z=-2 \\ y-3z=6 \end{cases}$, 得 $y=0,\ z=-2$

故 $(1,0,-2)$ 是直线上一点 .

再求直线的方向向量 $\vec{s}$.

交已知直线的两平面的法向量为

$$\vec{n}_1=(1,1,1), \qquad \vec{n}_2=(2,-1,3)$$

$$\because \quad \vec{s}\perp\vec{n}_1,\ \vec{s}\perp\vec{n}_2 \qquad \therefore \quad \vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$$

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (4, -1, -3)$$

故所给直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{-3}$

参数式方程为 $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$

解题思路: 先找直线上一点;

再找直线的方向向量.

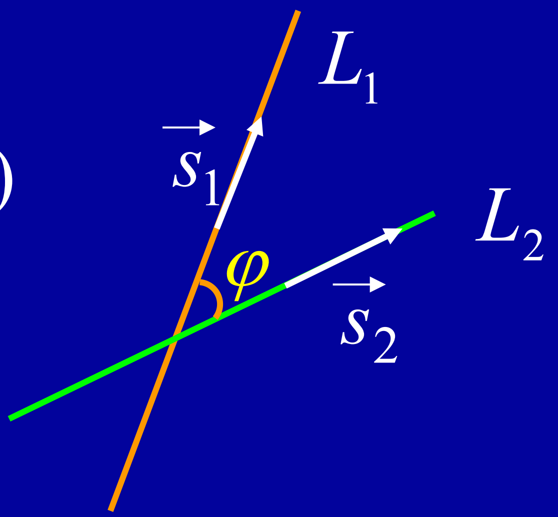
二、线面间的位置关系

1. 两直线的夹角

两直线的夹角指其方向向量间的夹角(通常取锐角)

设直线 L_1 , L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s_1}=(m_1,\,n_1,\,p_1),\ \vec{s_2}=(m_2,\,n_2,\,p_2)$$



则两直线夹角 φ 满足

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}|\,|\vec{s_2}|}$$

$$=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

特别有:

(1) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$

$\Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$

(2) $L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2$

$\Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$

例3　一直线过点A（2，-3，4），且和y 轴垂直相交，求其方程。

解　因为直线和y轴垂直相交

所以交点为 $B(0,-3,0)$,

取 $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=(2,0,4)$,

所求直线方程

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{4}.$$

例4. 求以下两直线的夹角

$$L_1:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1} \qquad L_2:\begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

解: 直线 L_1 的方向向量为 $\vec{s}_1=(1,-4,1)$

直线 L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(2,-2,-1)$

二直线夹角 φ 的余弦为

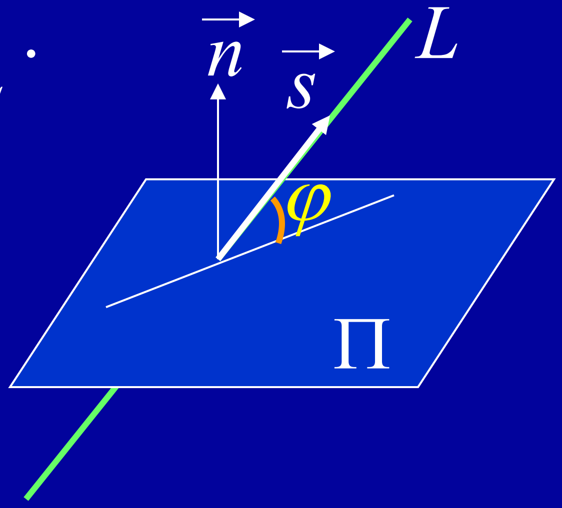
$$\cos\varphi=\frac{|1\times 2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

从而 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

2. 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线所夹锐角 φ 称为直线与平面间的夹角；

当直线与平面垂直时，规定其夹角 $\pi/2$.



设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$

平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$

则直线与平面夹角 φ 满足

$$\sin\varphi=\cos(\widehat{\vec{s},\vec{n}})$$

$$=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

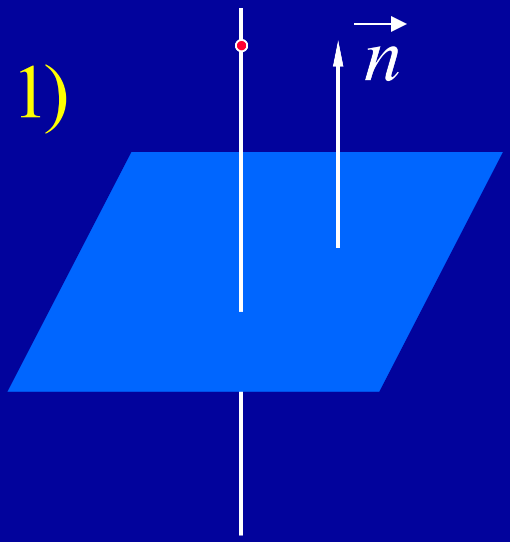
特别有：

(1) $L \perp \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \,/\!/\, \vec{n} \Longleftrightarrow \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$

(2) $L \,/\!/\, \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Longleftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$

例3. 求过点(1,－2 , 4) 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线方程.

解： 取已知平面的法向量 $\vec{n} = (2, -3, 1)$ 为所求直线的方向向量.



则直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$$

内容小结

1. 空间直线方程

一般式 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

对称式 $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x = x_0 + m\,t \\ y = y_0 + n\,t \\ z = z_0 + p\,t \end{cases}$

$(m^2 + n^2 + p^2 \neq 0)$

2. 线与线的关系

直线 L_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\vec{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$

直线 L_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\vec{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$

$$L_1 \perp L_2 \iff \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$L_1 \,//\, L_2 \iff \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \iff \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

夹角公式: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

3. 面与线间的关系

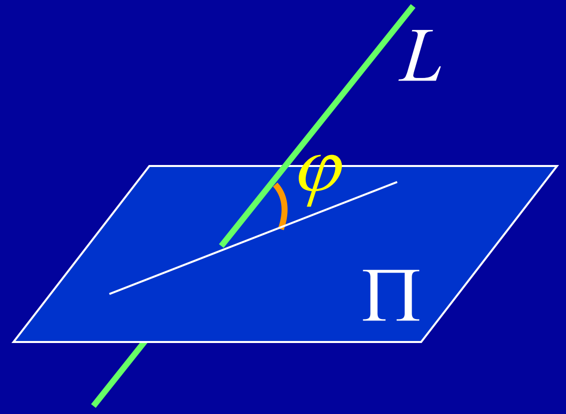
平面 Π： $Ax+By+Cz+D=0,\ \vec{n}=(A,B,C)$

直线 L： $\dfrac{x-x}{m}=\dfrac{y-y}{n}=\dfrac{z-z}{p},\quad \vec{s}=(m,n,p)$

$$L\perp\Pi \Longleftrightarrow \vec{s}\times\vec{n}=\vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$$

$$L\,//\,\Pi \Longleftrightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}=0 \Longleftrightarrow mA+nB+pC=0$$

夹角公式： $$\sin\varphi=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}$$



例5 求过点M（-3,2,5）且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程。

解一 因所求直线与两平面的交线平行，即直线的方向向量s一定同时与两平面的法向量n1和n2 垂直

$$S=n1\times n2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}=-(4i+3j+k)$$

因此所求的直线方程为

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}$$

解二　过点（-3,2,5）且与平面$x-4z=3$平行的平面方程为

$$(x+3)-4(z-5)=0$$

过点（-3,2,5）且与平面$2x-y-5z=1$平行的平面方程为

$$2(x+3)-(y-2)-5(z-5)=0$$

即：$$2x-y-5z+33=0$$

所求直线方程为

$$\begin{cases} 2x-y-5z+33=0 \\ x-4z+23=0 \end{cases}$$

例6 求过点M（2,1,3）且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$

垂直相交的直线方程。

解 先作一过点M 且与已知直线垂直的平面Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点N,

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

代入平面方程得 $t=\dfrac{3}{7}$， 交点 $N(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=\{\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\}=\{-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}\},$$

所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

综合题

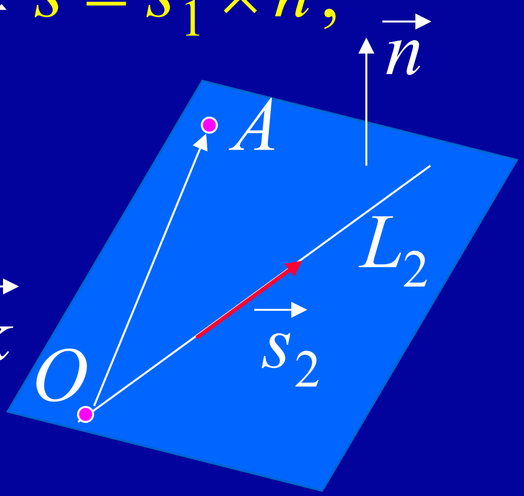
一直线过点$A(1,2,1)$且垂直于直线$L_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$, 又和直线$L_2:\frac{x}{2}=y=\frac{z}{-1}$相交, 求此直线方程 .

解： 方法1 利用叉积.

设直线L_i的方向向量为$\vec{s}_i\,(i=1,2)$, 过A点及L_2的平面的法向量为$\vec{n}$, 则所求直线的方向向量$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{n}$,

因原点O在L_2上, 所以

$$\vec{n}=\vec{s}_2\times\overrightarrow{OA}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=3\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$$



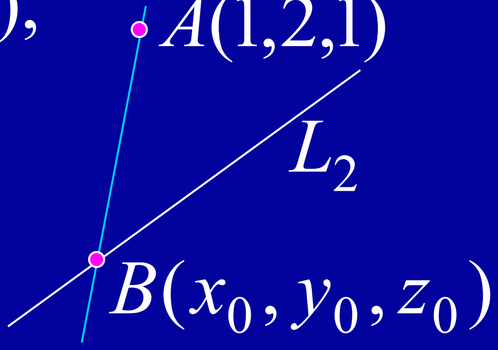
待求直线的方向向量

$$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3(3\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k})$$

故所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{-5}$

方法2 利用所求直线与L_2的交点.

设所求直线与L_2的交点为$B(x_0, y_0, z_0)$,



则有 $\dfrac{x_0}{2} = y_0 = \dfrac{z_0}{-1}$

即 $x_0 = 2y_0,\ z_0 = -y_0$

而 $\overrightarrow{AB}=(x_0-1, y_0-2, z_0-1)\perp L_1$

$$\therefore\quad 3(x_0-1)+2(y_0-2)+(z_0-1)=0$$

将 $x_0=2y_0, z_0=-y_0$ 代入上式，得

$$y_0=\frac{8}{7}, x_0=\frac{16}{7}, z_0=-\frac{8}{7}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AB}=(\frac{9}{7}, \frac{-6}{7}, -\frac{15}{7})=\frac{3}{7}(3, -2, -5)$$

由点法式得所求直线方程

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-5}$$