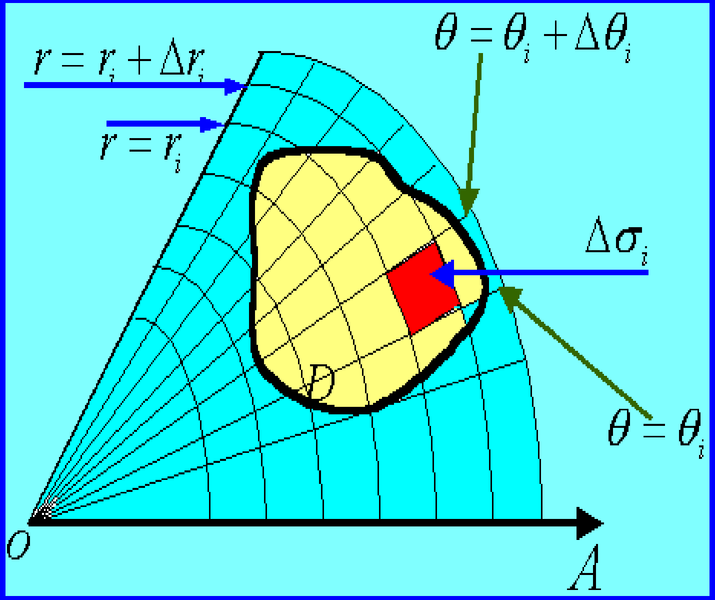
§8.3利用极坐标计算二重积分



由二重积分的定义可知

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

现在用一族同心圆 $r=$常数以及从极点出发的一族射线 $\theta=$常数将D划分为任意的n个小闭区域。

小闭区域的面积 $\Delta\sigma_i$ 为：

$$\boxed{\Delta\sigma_i=\frac{1}{2}(r_i+\Delta r_i)^2\cdot\Delta\theta_i-\frac{1}{2}r_i^2\cdot\Delta\theta_i}=r_i\cdot\Delta r_i\cdot\Delta\theta_i+\frac{1}{2}(\Delta r_i)^2\Delta\theta_i,$$

当Δr_i与$\Delta\theta_i$充分小时，$\Delta\sigma_i\approx r_i\Delta r_i\Delta\theta_i.$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \approx \sum_{i}^{n} f\left(r_i\cos\theta_i, r_i\sin\theta_i\right) r_i \Delta r_i \Delta\theta_i .$$

设 $f(x,y)$在 D上连续，所以二重积分存在，又 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$

上式两端令 $\lambda \to 0$，取极限，得

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta .$$

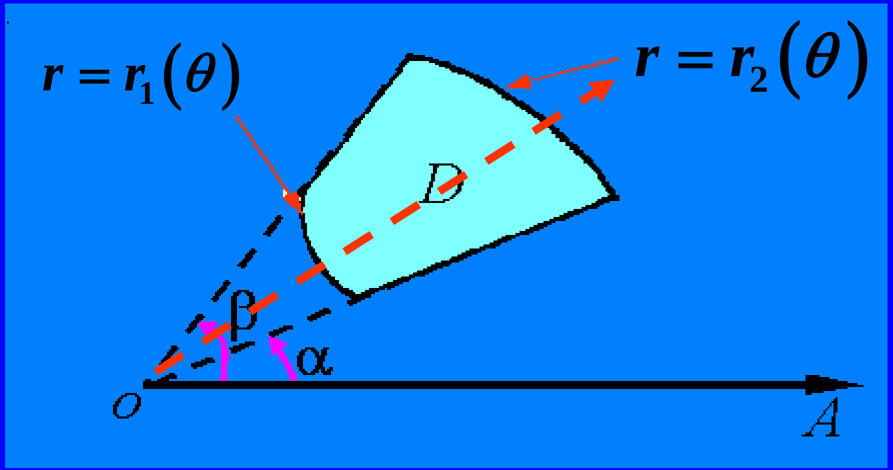
这就是直角坐标系的二重积分变换到极坐标系的二重积分的公式。

注：面积元素$d\sigma = dxdy = rdrd\theta.$

下面研究在极坐标系中，二重积分化为二次积分。

1 极点在积分区域D的外部时

$$D=\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta,\\ r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta).\end{cases}$$

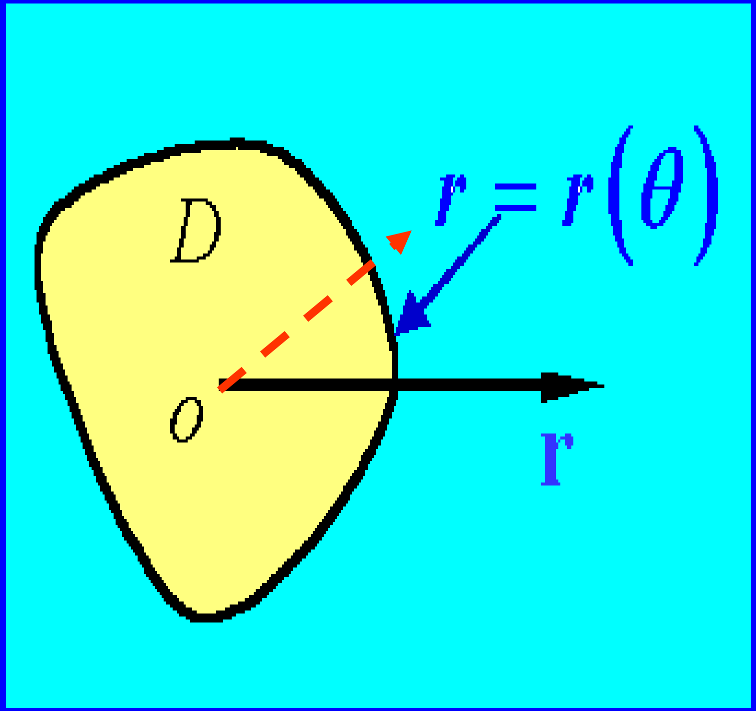


$$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

2 极点在积分区域D的内部时

$$D=\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi,\\ 0\le r\le r(\theta).\end{cases}$$

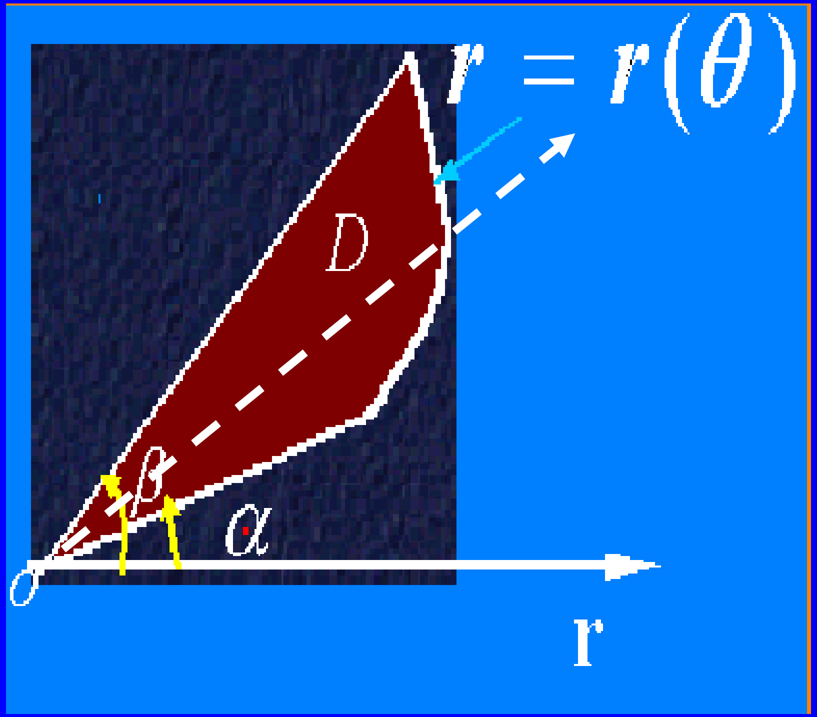


$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$$

3 极点在积分区域D的边界时

$$D=\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta,\\ 0\le r\le r(\theta).\end{cases}$$



$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$$

极坐标系下区域的面积 $\sigma=\iint_D rdrd\theta.$

例 求$I=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$,其中D：$x^2+y^2=1$与$x^2+y^2=4$所围成的环。

解1 在直角坐标下

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = 4\iint\limits_{D_1} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=4[\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy]$$

解2：在极坐标系下 D:$1\le r\le 2,0\le\theta\le\pi$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi} d\theta\int_1^2 r\cdot rdr = \frac{14}{3}\pi.$$

例　求$I=\iint_D \arctan\frac{y}{x}dxdy$,其中D：$x^2+y^2=1$与$x^2+y^2=4$及$y=0, y=x$所围成第一象限的区域。

解：在极坐标系下　　$D:1\le r\le 2, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

$$\iint_D \arctan\frac{y}{x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2\arctan\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}rdr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2 rdr$$

$$=\frac{3}{64}\pi^2.$$

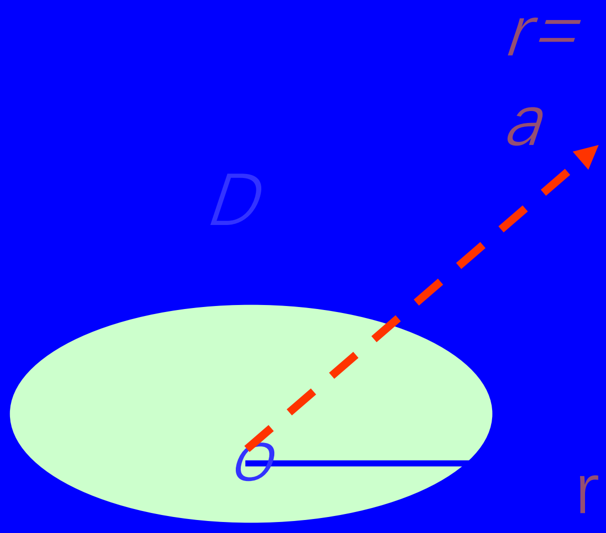
例　计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中D是由中心在原点，半径为a的圆周所围成的闭区域.

解　在极坐标系下

$$D:\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le a$$

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-r^2}rdr=\pi(1-e^{-a^2}).$$



注: 极坐标系下能解决直角坐标系下某些“积不出来”的二重积分.

例　利用上例和二重积分的性计算工程常用的反常积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

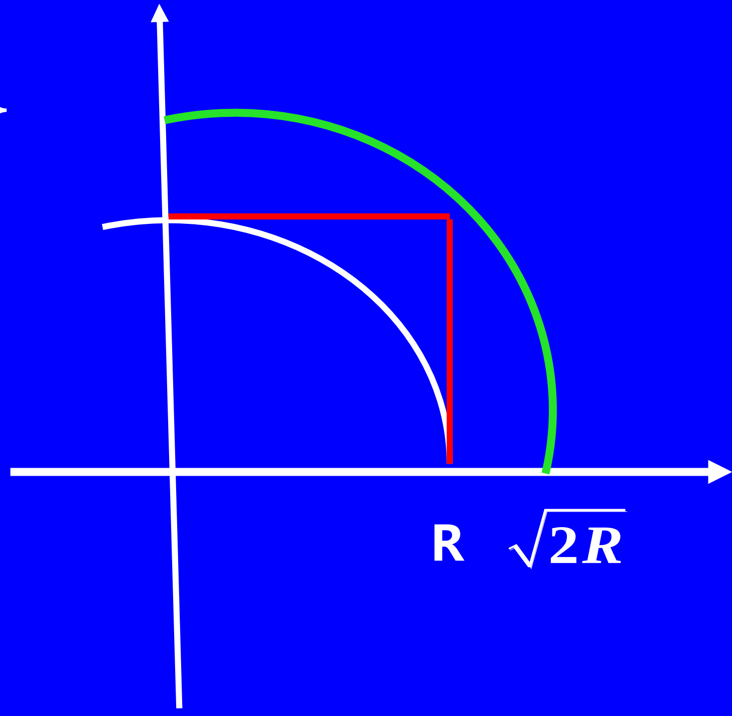
解　D_1:$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0\}$

D_2:$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2R^2, x \ge 0, y \ge 0\}$

S:$\{(x,y) \mid 0 \le x \le R, 0 \le y \le R\}$

显然：$D_1 < S < D_2$,由性质得

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma \le \iint_{S} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma \le \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$$



$$\iint_S e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^R dx\int_0^R e^{-x^2-y^2}dy=(\int_0^R e^{-x^2}dx)^2$$

由以上两式可得:

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma\le(\int_0^R e^{-x^2}d\sigma)^2\le\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$$

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}),\qquad \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})\le(\int_0^R e^{-x^2}d\sigma)^2\le\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})\xrightarrow{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}d\sigma=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

例： 求圆柱体$x^2+y^2\le Rx\left(R>0\right)$被球面$x^2+y^2+z^2=R^2$所割下的立体(称为维维安尼)（Viviani体）体积.

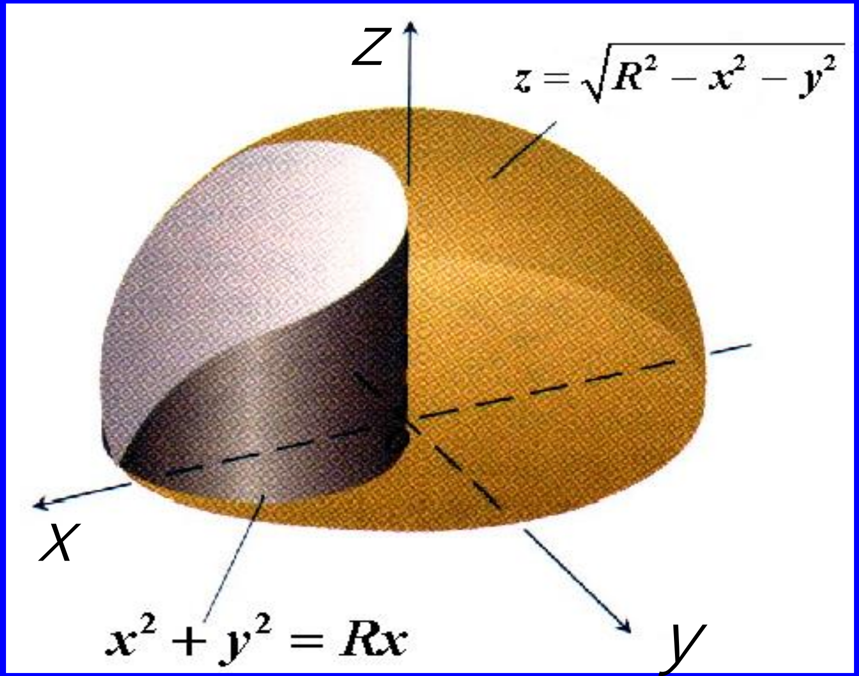
解 由于所求立体关于

xoy面、zox面对称，其体积

为第一卦 限部分体积的4倍。

第一卦限部分是一个曲顶柱

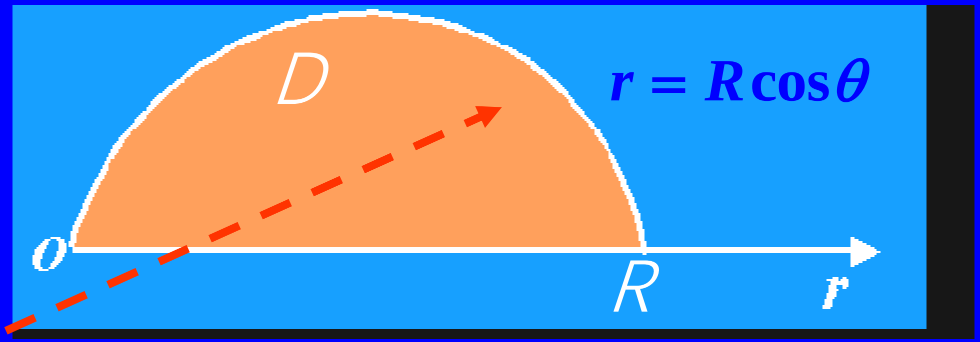
体，其顶为上半球面



$$D=\begin{cases} x^2+y^2\le Rx, \\ 0\le y. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$D=\begin{cases} 0\le r\le R\cos\theta, \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$



$$V=4\iint\limits_D\sqrt{R^2+x^2+y^2}\,dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,rdr$$

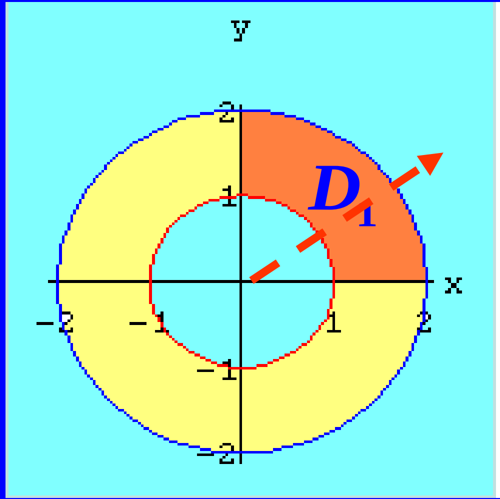
$$=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3\theta\right)d\theta=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)R^3.$$

例3 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$

其中积分区域为 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

解 由对称性

$$\iint\limits_D = 4\iint\limits_{D_1} \quad D_1: 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 1\le r\le 2.$$



$$\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 4\iint\limits_{D_1}\frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{\sin\pi r}{r}rdr \quad = -4.$$

若二重积分由如下三种特征，可考虑用极坐标计算:

（1）积分区域为圆域、圆环、或其中一部分。

（2）积分区域的边界用极坐标表示表示较简单或积分区域不易画出或分割。

（3）被积函数由如下形式$f(x^2+y^2), f(\frac{y}{x}), f(\frac{x}{y})$

例：根据所给不同的积分区域，将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化为极坐标下的二次积分。其中D分别为：

$$(1) D:\{x^2+y^2\le ax, a>0\}$$

$$(2) D:\{(x,y)\mid y=x, y=2x, x^2+y^2=4x, x^2+y^2=8x\}$$

$$(3) D:\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$$

解：

$$(1)\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

$$(2)\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}d\theta\int_{4\cos\theta}^{8\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

$$(3)\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$