§6 二阶常系数非齐次线性微分方程

一、二阶常系数非齐次线性方程的解的结构

二、二阶常系数非齐次线性方程的解法

定理1 设 y_1与y_2是二阶非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

的两个解，则 $y_1 - y_2$是对应齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的解.

二阶非齐次线性方程的解的结构:

定理2 设 y^* 是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

的一个特解，Y 是与(2)对应的齐次方(1)的通解，则 $y = Y + y^*$ 是二阶非齐次线性微分方程(2)的通解.

定理3 设二阶非齐次线性方程$f(x)$是两个函数之和，即

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

而$y_1^*(x)$，$y_2^*(x)$分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

和

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的解，则$y_1^*(x)+y_2^*(x)$是原方程的解.

一、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$$

对应齐次方程 $y''+py'+qy=0,$

通解结构 $y=Y+y^*,$

$Y\Rightarrow$ 对应齐次方程的通解;

$y^*\Rightarrow$ 非齐次方程的特解.

下面我们用**待定系数法**研究 y^* 的求法

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

设非齐次方程特解为 $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$ 代入原方程

$$Q''(x) + \underline{(2\lambda + p)}Q'(x) + \underline{(\lambda^2 + p\lambda + q)}Q(x) = P_m(x)$$

(1) 若λ不是特征方程的根，$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$,

可 设 $Q(x) = Q_m(x)$, $y^* = Q_m(x)e^{\lambda x}$;

(2) 若 λ是 特 征 方 程 的 单 根 ,

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, $2\lambda + p \neq 0$,

可设 $Q(x) = xQ_m(x)$, $y^* = xQ_m(x)e^{\lambda x}$;

(3) 若λ是特征方程的重根，

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad 2\lambda + p = 0,$$

可设 $Q(x) = x^2 Q_m(x)$, $\quad y^* = x^2 Q_m(x) e^{\lambda x}$.

综上讨论 $\quad y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$

设 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$， $k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根,} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$

记住此公式

上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程（k是重根次数）.

例1　求方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解　特征方程　$r^2-3r+2=0,$

特征根　$r_1=1,\ r_2=2,$

对应齐次方程通解　$Y=C_1e^x+C_2e^{2x},$

$\because \lambda=2$ 是单根, 设 $y^*=x(Ax+B)e^{2x},$

代入方程, 得　$2Ax+B+2A=x$　$\therefore \begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=-1 \end{cases}$

于是 $y^*=x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$

原方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}.$

例2.写出下列微分方程的特解的形式

(1) $y'' - y' - 2y = xe^{x}$;

解 对应齐次方程的特征方程为:

$$r^2 - r - 2 = 0, \quad \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 2.$$

$\lambda = 1$不是特征方程的根, 故$k = 0$

故 $y^* = (Ax + B)e^{x}$.

(2) $y'' + y' - 2y = xe^x$;

解　对应齐次方程的特征方程为:

$$r^2 + r - 2 = 0, \quad \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -2.$$

$\lambda = 1$是特征方程的单根, 故$k = 1$,

故 $y^* = x(Ax + B)e^x$.

(3) $y'' - 2y' + y = xe^{x}$.

解　对应齐次方程的特征方程为:

$$r^2 - 2r + 1 = 0, \Rightarrow r_{1,2} = 1.$$

$\lambda = 1$是特征方程的二重根, 故$k = 2$,

故 $y^* = x^2(Ax + B)e^{x}$.

例3(练习) 写出微分方程 $y''-4y'+4y=6x^2+8e^{2x}$

的待定特解的形式.

解 设 $y''-4y'+4y=6x^2$ 的特解为 y_1^*

设 $y''-4y'+4y=8e^{2x}$ 的特解为 y_2^*

则所求特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$

$\because r^2-4r+4=0$ $\therefore$ 特征根 $r_{1,2}=2$

$\therefore y_1^*=Ax^2+Bx+C$ $y_2^*=Dx^2e^{2x}$

$y^*=y_1^*+y_2^*=Ax^2+Bx+C+Dx^2e^{2x}.$

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 型

利用欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta + i\sin\theta,\quad e^{-i\theta}=\cos\theta - i\sin\theta.$

可得非齐次微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$

的特解形式为

$$\boxed{y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]}$$

其中 $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式， $m=\max\{l,n\}$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda + i\omega \text{不是根,}\\ 1 & \lambda + i\omega \text{是根.}\end{cases}$$

记住此公式

例4 求微分方程 $y''-4y'+3y=xe^{2x}\cos 3x$ 的通解.

解 对应齐次方程 $y''-4y'+3y=0$

$$\Rightarrow r^2-4r+3=0, \quad \Rightarrow r_1=1,\ r_2=3.$$

齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

$\lambda=2, \omega=3$, $\lambda+i\omega=2+3i$不是特征方程的根.

$$\therefore \quad y^*=e^{2x}\left[(ax+b)\cos 3x+(cx+d)\sin 3x\right]$$

将$y^*,(y^*)',(y^*)''$代入原方程并消去e^{2x}可得:

$$(-10ax-10b+bc)\cos 3x+(-10cx-6a-10d)\sin 3x=x\cos 3x.$$

$$(-10ax-10b+bc)\cos 3x+(-10cx-6a-10d)\sin 3x=x\cos 3x.$$

比较系数可得 $\begin{cases}-10a=1,\\ -10b+bc=0,\\ -10c=0,\\ -6a-10d=0.\end{cases} \xrightarrow{\text{解得}} \begin{cases}a=-\dfrac{1}{10}\\ b=0,\\ c=0,\\ d=\dfrac{3}{50}.\end{cases}$

$$\therefore\ y^{*}=e^{2x}\left[-\frac{x}{10}\cos 3x+\frac{3}{50}\sin 3x\right].$$

通解: $y=Y+y^{*}=C_1e^{x}+C_2e^{3x}+e^{2x}\left[-\dfrac{x}{10}\cos 3x+\dfrac{3}{50}\sin 3x\right].$

例5 求微分方程 $y'' + y = (3x+1)\cos 2x$ 的一个特解.

解 此方程属 $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 型.

$(\lambda=0,\ \omega=2,\ P_l(x) = (3x+1), P_n(x) = 0)$.

其特征方程为 $r^2 + 1 = 0, \xrightarrow{\text{特征方程的根}} r_{1,2} = \pm i$.

$\lambda + i\omega = 2i$ 不是特征根, $\Rightarrow k = 0$.

$\Rightarrow y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x$.

将 y^* 代入原方程并比较系数可得其特解:

$$y^* = -\left(x + \frac{1}{3}\right)\cos 2x + \frac{4}{3}\sin 2x.$$

例6 写出微分方程 $y''+9y=2\cos 3x$ 的特解形式.

解 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型.

$$\left(\lambda=0, P_l(x)=2, P_n(x)=0.\right)$$

对应齐次方程为 $y''+9y=0.$

其对应特征方程为 $r^2+9=0.\xrightarrow{\text{特征根}} r_{1,2}=\pm 3i.$

由于 $\lambda+i\omega=3i$是特征方程的根, $\Rightarrow k=1.$

故原方程的特解形式为:

$$y^*=x\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right).$$

例7　求微分方程$y''-y=\sin x+\cos 2x$的通解.

解　$y''-y=0 \Rightarrow r^2-1=0 \Rightarrow r=\pm 1,$

$$\Rightarrow Y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}.$$

因为$\sin x+\cos 2x$的ω不相等, 故非齐次方程的特解必须分成两个方程来求解.

(1)　$y''-y=\sin x,\quad \lambda=0, \omega=1,$

$\lambda+\omega i=i$不是特征方程的根　$\Rightarrow k=0.$

$$y_1^*=A\cos x+B\sin x;$$

$(2)\quad y'' - y = \cos 2x,\quad \lambda = 0, \omega = 2,\quad (r = \pm 1)$

$\lambda + \omega i = 2i$不是特征方程的根 $\Rightarrow k = 0.$

$y_2^* = C\cos 2x + D\sin 2x;$

原方程$y'' - y = \sin x + \cos 2x$的特解为

$y^* = y_1^* + y_2^* = A\cos x + B\sin x + C\cos 2x + D\sin 2x.$

将y^*代入原方程$\Rightarrow A = 0, B = -\dfrac{1}{2}, C = -\dfrac{1}{5}, D = 0,$

$$y^* = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{5}\cos 2x,$$

原方程$y'' - y = \sin x + \cos 2x$的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{5}\cos 2x.$$

例7　已知$y_1=3, y_2=3+x^2, y_3=3+x^2+e^x$

都是微分方程

$$\left(x^2-2x\right)y''-\left(x^2-2\right)y'+\left(2x-2\right)y=6\left(x-1\right)$$

的解,求此方程的通解.

分析:此方程为二阶线性非齐次微分方程,由线性微分方程解的结构定理有可能解决此类问题.

解　$\because y_1, y_2, y_3$二阶线性非齐次微分方程的解,

则　$y_2-y_1=3+x^2-3=x^2$及

$$y_3-y_2=3+x^2+e^x-\left(3+x^2\right)=e^x$$

是对应齐次方程的解.

又因为$\dfrac{y_3-y_2}{y_2-y_1}=\dfrac{e^x}{x^2}\neq C$(常数)

所以 x^2, e^x线性无关.

对应齐次方程的通解为:

$$Y=C_1x^2+C_2e^x.$$

又$y_1=3$为二阶线性非齐次微分方程的一个特解,

所以, 二阶线性非齐次微分方程的通解为:

$$y=Y+y_1=C_1x^2+C_2e^x+3.$$