第四节
平面及其方程

一、平面的点法式方程

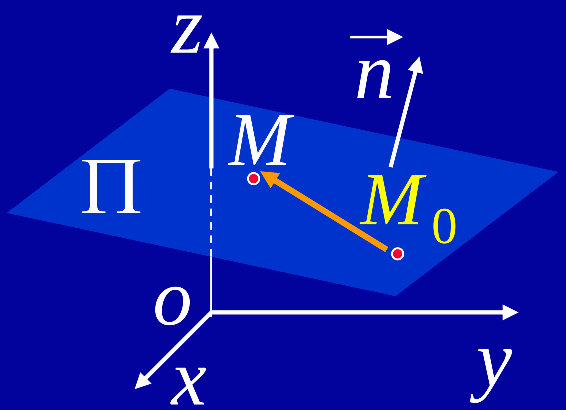
二、平面的一般方程

三、两平面的夹角

HIGH EDUCATION PRESS

一、平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 目垂直于非零向量 $\vec{n}=(A, B, C)$, 求该平面Π的方程.



任取点 $M(x, y, z) \in \Pi$, 则有

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

故

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad ①$$

称①式为平面Π的**点法式方程**, 称 $\vec{n}$ 为平面 Π 的**法向量**.

例1. 已知两点 $M_1(1,-2,3)$, $M_2(3,0,-1)$,

求线段 M_1M_2 的垂直平分平面 Π 的方程.

解: 已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(2,2,-4)=2(1,1,-2)$ 垂直平面 Π

因此所求平面的一个法向量为 $\vec{n}=(1,1,-2)$

所求平面又通过 M_1M_2 的中点 $M_0=(2,-1,1)$

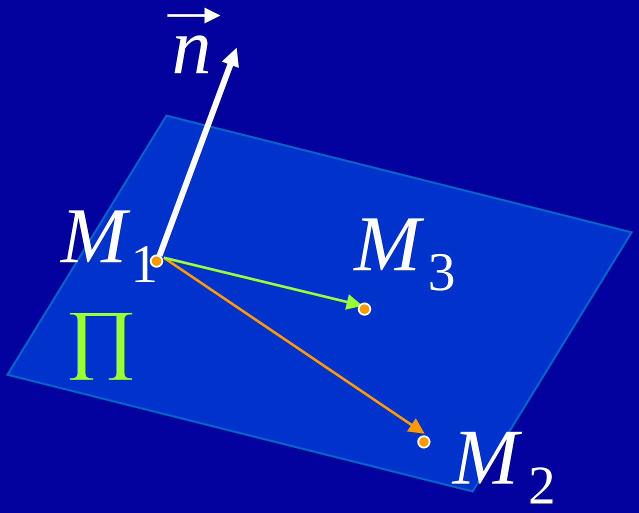
因此平面的点法式方程为

$$1(x-2)+1(y+1)-2(z-1)=0$$

即 $\qquad x+y-2z+1=0$

例2.求过三点 $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2), M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.

解: 取该平面Π 的法向量为



$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (14, 9, -1)$$

又 $M_1 \in \Pi$, 利用点法式得平面 Π 的方程

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$$

即 $$14x+9y-z-15=0$$

说明： 此平面的**三点式方程**也可写成

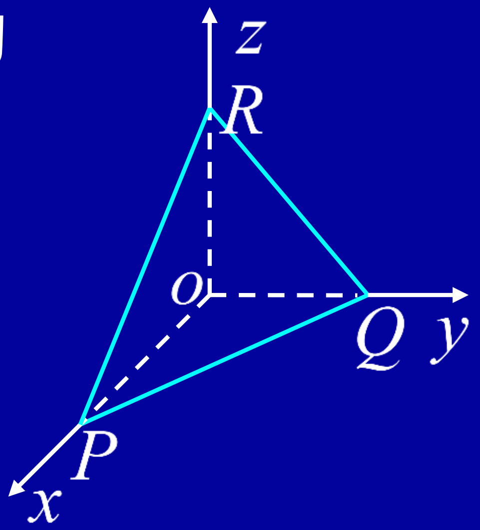
$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

一般情况： 过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)\ (k=1,2,3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

特别, 当平面与三坐标轴的交点分别为

$$P(a,0,0),\ Q(0,b,0),\ R(0,0,c)$$



时, 平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (a,b,c\neq 0)$$

此式称为平面的**截距式方程**.

分析:利用三点式

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0$$

按第一行展开得 $(x-a)bc-y(-a)c+zab=0$

即 $bcx+acy+abz=abc$

二、平面的一般方程

设有三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \qquad ②$$

任取一组满足上述方程的数 x_0, y_0, z_0, 则

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

以上两式相减 , 得平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

显然方程②与此点法式方程等价,因此方程②的图形是法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$的平面, 此方程称为**平面的一般方程**.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

特殊情形

- 当 $D = 0$ 时, $Ax + By + Cz = 0$ 表示**通过原点**的平面;
- 当 $A = 0$ 时, $By + Cz + D = 0$ 的法向量

  $\vec{n} = (0, B, C) \perp \vec{i}$, 平面平行于 x 轴;
- $Ax+Cz+D = 0$ 表示 平行于 y 轴的平面;
- $Ax+By+D = 0$ 表示 平行于 z 轴的平面;
- $Cz + D = 0$ 表示平行于 xoy 面 的平面;
- $Ax + D = 0$ 表示平行于 yoz 面 的平面;
- $By + D = 0$ 表示平行于 zox 面 的平面.

例3. 求通过 x 轴和点$(4, -3, -1)$ 的平面方程.

解: 因平面通过 x 轴，故 $A = D = 0$

设所求平面方程为

$$By + Cz = 0$$

代入已知点$(4, -3, -1)$得 $C = -3B$

化简,得所求平面方程

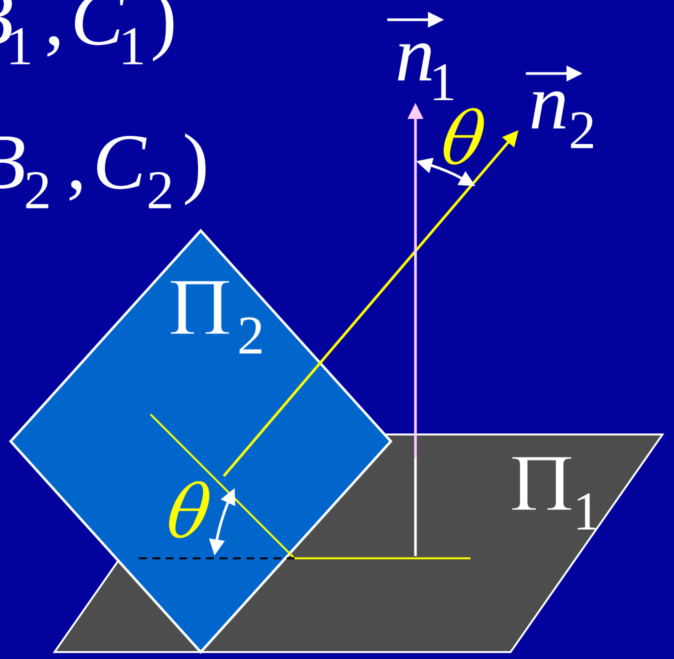
$$y - 3z = 0$$

三、两平面的夹角

两平面法向量的夹角(常为锐角)称为**两平面的夹角**.

设平面Π_1的法向量为 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面Π_2的法向量为 $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$



则两平面夹角θ的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

即

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}\;\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+C_2^{\,2}}}$$

$\Pi_1: \; n_1 = (A_1, \; B_1, \; C_1)$

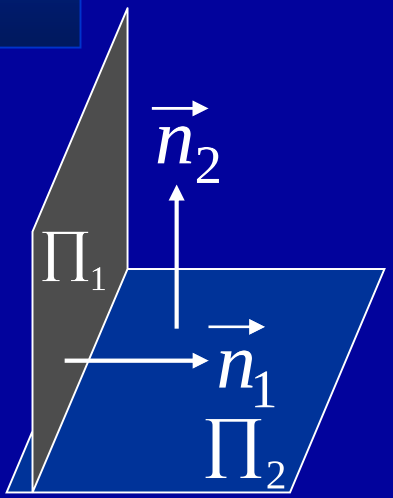
$\Pi_2: \; n_2 = (A_2, B_2, C_2)$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

特别有下列结论：

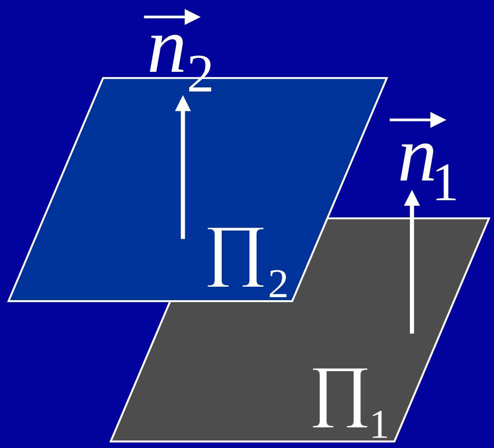
(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$\Longleftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$



(2) $\Pi_1 \,//\, \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \,//\, \vec{n}_2$

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$



例4. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面∏: $x+y+z=0$, 求其方程 .

解: 设所求平面的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$,则所求平面方程为 $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2} \Longrightarrow -A+0\cdot B-2C=0,\text{ 即 } A=-2C$$

$$\vec{n}\perp\Pi\text{ 的法向量} \Longrightarrow A+B+C=0\text{, 故}$$

$$B=-(A+C)=C$$

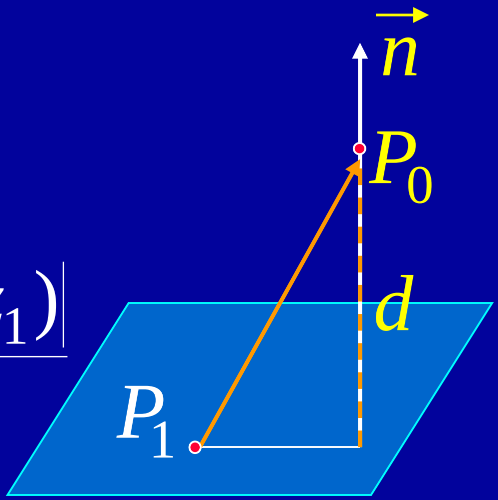
因此有 $-2\cancel{C}(x-1)+\cancel{C}(y-1)+\cancel{C}(z-1)=0 \quad (C\neq 0)$

约去C , 得 $-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

即 $2x-y-z=0$

例5. 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点,求 P_0 到平面的距离 d .

解: 设平面法向量为 $\vec{n}=(A, B, C)$, 在平面上取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$,则 P_0 到平面的距离为



$$d = \left|\text{Prj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{P_1P_0}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\Big\downarrow\ Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(点到平面的距离公式)

内容小结

1. **平面**基本方程:

一般式 $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

点法式 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (abc \neq 0)$

三点式 $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

2.平面与平面之间的关系

平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\quad \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

垂直: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \iff A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平行: $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \iff \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

练习题

求过点$(1,1,1)$且垂直于二平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解: 已知二平面的法向量为

$$\vec{n}_1=(1,-1,1),\qquad \vec{n}_2=(3,2,-12)$$

取所求平面的法向量

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(10,15,5)$$

则所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0$$

化简得 $2x+3y+z-6=0$