张宇

考研数学一 1000 题题本

目 录

高数基础篇

第 1 章　函数极限与连续

1. 设 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(1-x)=x^2$, 则 $f(x)=$ __________.

2. 求函数 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 的反函数.

3. 设 $f(x)=2x+\sqrt{x^2+2x+1}$, $g(x)=\begin{cases} x+2 & ,x\geqslant 0 \\ x-1 & ,x<0 \end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$ __________.

4. 设 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(1-x)=x^2$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 ( )

A. 单调函数　　B. 奇函数　　C. 周期函数　　D. 无界函数

5. 设 $f(x)=x\sqrt{x^2},x\in\mathbf{R}$.

(1) 判别 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 计算 $\int_{-1}^{1}\left(x\sqrt{x^2}+2\right)\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}, x\in\mathbf{R}$.

(1) 判别 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{2^x+1}\mathrm{d}x$.

7. 设某项目用于研发和宣传的总成本为 a 万元, 当研发和宣传所用成本分别为 x 万元和 y 万元时, 收益为 $R = 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$ 万元, 则收益最大时, 研发所用成本为 ________.

8. 设 $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

(1) 证明 $f(x)$ 以 2π 为周期;

(2) 求 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$ 上的多项式并作图.

9. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 且函数 $f(x)=\ln(1+x)+2x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$ ________.

10. 当 $x \to -1$ 时, 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的极限为 ________.

11. 设 $f(x)=2x+\sqrt{x^2+2x+1}$, $g(x)=\begin{cases} x+2 & ,x\geqslant 0 \\ x-1 & ,x<0 \end{cases}$, 则 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} g[f(x)]=(\quad)$

A. -1　　B. 2　　C. -1 或 2　　D. 不存在

12. 使函数 $f(x)=\dfrac{x(e^x-1)}{(x-1)^2|x-2|}$ 有界的区间为 (　)

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=$ ________.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\right]=$ __________.

15. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=$ ________.

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^x - 1}{1 - \cos x} =$ ____________.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-f(x)}{\sin x}=1$, 则 (　)

A. $f(0)=0$

B. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

D. 当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小

18. 设 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $a+bx+cx^2$, 则 (　)

A. $a=1, b=-1, c=1$　B. $a=1, b=1, c=\frac{1}{2}$　C. $a=-1, b=1, c=1$　D. $a=-1, b=1, c=\frac{1}{2}$

19. $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $\underline{\qquad\qquad}$.

20. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

第 2 章　数列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]^{n}=$ ________.

2. 当 $n \to \infty$ 时, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e$ 与 $\dfrac{a}{n}$ 是等价无穷小量, 则 $a =$ __________.

3. 当 $n \leqslant x < n+1$ 时, $2n \leqslant f(x) < 2(n+1)$, 则 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$ ____________.

4. 当 $0 < a < b$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}\right)^{\frac{1}{n}} =$ __________.

5. 当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin^n x + \cos^n x} =$ __________.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}} =$ ________.

7. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \ln x_n + 1, x_n > 0, n = 1, 2, \cdots$, 则 $\{x_n\}$ (　)

A. 单调不减　　B. 单调不增　　C. 严格单增　　D. 严格单减

8. 若对于数列 $\{x_n\}$, 存在常数 $k(0 < k < 1)$, 使得 $|x_{n+1} - a| \leqslant k\,|x_n - a|\,, n = 1, 2, \cdots$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

9. 若对于数列 $\{x_n\}$, $x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \cdots$, $f(x)$ 可导, a 是 $f(x) = x$ 的唯一解, 且对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 有 $|f'(x)| \leqslant k < 1$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

10. 设 $a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 且 $e^{a_n} + a_n = e^{b_n}, n = 1, 2, \cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

11. 设 $c = 2\ln(1+b), b > a > 0$, 且 a 是方程 $x - 2\ln(1+x) = 0$ 的唯一非零解, 证明 $c > a$.

12. 设单调递减数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = 2\ln(1+x_n), n = 1, 2, \cdots, x_1 > a > 0$, 且 a 是 $x - 2\ln(1+x) = 0$ 的唯一非零解, 证明 $\{x_n\}$ 收敛.

13. 设正项数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1}^2 = 2^{x_n}, n = 1, 2, \cdots$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

第 3 章　一元函数微分学的概念

1. 设 $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x), -1 < x < 1$, 则 $f''(0) =$ __________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}, x\in\mathbf{R}$, 则 $f^{(4)}(0)=$ __________.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{2}{n}, n=1,2,\cdots$, 则 $f'(0)=$ __________.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, $f(0)=f'(0)=\sqrt{2}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)-2}{x}=$ __________.

5. 设 $f(x)=\dfrac{1}{n^2},\dfrac{1}{n^2+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n^2},n=1,2,\cdots,f(0)=0$, 则 $f'_+(0)=$ ________.

6. 设可导函数 $f(x) > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{f(0)} =$ ____________.

7. 设函数 $f(x)$ 可导, $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处不可导, 则 (　)

A. $f(0)=0, f'(0)=0$　　B. $f(0)=0, f'(0)\neq 0$　　C. $f(0)\neq 0, f'(0)=0$　　D. $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$

8. 设函数 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-1}{\ln x} = 2$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的切线方程为 $\underline{\qquad\qquad}$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $\Delta f(1)$ 是 $f(x)$ 在增量为 Δx 时的函数值增量, 则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(1) - \mathrm{d} f(1)}{\Delta x} = (\quad)$

A. $f'(1)$　　B. 1　　C. ∞　　D. 0

第 4 章　一元函数微分学的计算

1. 设 $f(x)=x^2, h(x)=f[1+g(x)]$, 其中 $g(x)$ 可导, 且 $g'(1)=h'(1)=2$, 则 $g(1)=(\quad)$

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 0　　D. 2

2. 设 $f(x)=(\ln x-1)(\ln^2 x-2)\cdots(\ln^n x-n)$, $n\geqslant 2$, 则 $f'(e)=$ __________.

3. 设函数 $f(x)$ 可导, $f(0) = -1$, $f'(0) = 1$, 若 $y(x) = |f(x-1)|$, 则 $y'(1) =$ ________.

4. 设函数 $f(x)$ 可导, $f(1)=f'(1)=\frac{1}{4}$, 若 $y(x)=e^{\sqrt{f(2x-1)}}$, 则 $y'(1)=(\quad)$

A. $\sqrt{e}$　　B. $\frac{1}{4}\sqrt{e}$　　C. $\frac{1}{2}\sqrt{e}$　　D. $2\sqrt{e}$

5. 已知函数 $y=y(x)$ 满足 $(x+y^2)y'=1, y(-1)=0$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=$ ____________.

6. 设 $y=f(x)$ 由方程 $|x|y^3+y-1=0$ 确定, 求 $y=f(x)$ 的极大值.

7. 设 $\begin{cases} x = t - t^2 \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} =$ ____________.

8. 设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x=2t+|t| \\ y=|t|\tan t \end{cases}$ 所确定, 则在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内 (　)

A. $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 不存在

B. $f'(0)$ 存在, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

C. $f'(x)$ 连续, $f''(0)$ 不存在

D. $f''(0)$ 存在, $f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

9. 设可导的奇函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = f^2(x)$, 且 $f(-1) = 1$, 则 $f'''(1) =$ ________.

10. 设可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = f^2(x)$, 且 $f(0) = -1$, 则在 $x = 0$ 处的三阶导数 $f'''(0) = (\quad)$

A. -6　　B. -4　　C. 4　　D. 6

11. 已知函数 $f(x) = x^2\ln(2-x)$, 则当 $n \geqslant 3$ 时, $f^{(n)}(0) =$ __________.

第 5 章　一元函数微分学的应用 (一)—几何应用

1. 函数 $y = e^x + \frac{e^{-x}}{2}$ 的最小值为 __________.

2. 若函数 $f(x) = e^{-ax} - ex$ 的极值点小于零, 则常数 a 的取值范围为 __________.

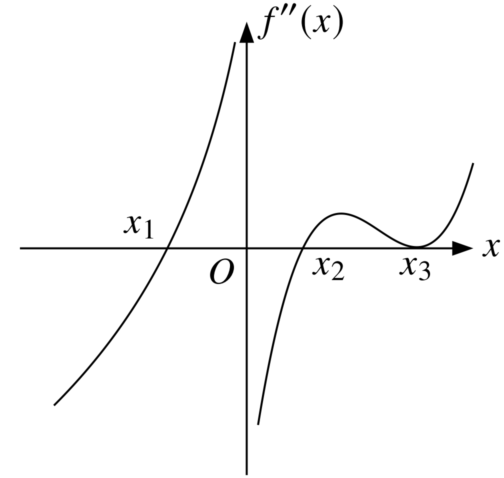
3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos|x|-1 & ,x\leqslant 0\\ x\ln x & ,x>0\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (　)

A. 可导点, 极值点　B. 不可导点, 极值点　C. 可导点, 非极值点　D. 不可导点, 非极值点

4. 已知 $x^2 + ax^{-3} \geqslant \dfrac{10}{3}(x > 0)$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 ＿＿＿＿＿＿.

5. 已知函数 $y=f(x)$ 连续, 其二阶导函数的图像如图所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



6. 设函数 $f(x) > 0$ 且二阶可导, 曲线 $y = \sqrt{f(x)}$ 有拐点 $(1, \sqrt{2})$, $f'(1) = 2$, 则 $f''(1) =$ __________.

7. 曲线 $y(x)=\ln\left|e^{2x}-1\right|$ 的斜渐近线为 (　)

A. $y=2x+\frac{1}{e}$　　B. $y=2x$　　C. $y=-2x+\frac{1}{e}$　　D. $y=-2x$

8. 曲线 $y = x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$ 的斜渐近线为 (　)

A. $y = x + e$　　B. $y = x - e$　　C. $y = x + \frac{1}{e}$　　D. $y = x - \frac{1}{e}$

9. 曲线 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率为 __________.

10. 已知曲线 $y = f(x)$ 在其点 $(0,1)$ 处的曲率圆方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 2$, 且当 $x \to 0$ 时, 二阶可导函数 $f(x)$ 与 $a + bx + cx^2$ 的差为 $o(x^2)$, 则 (　)

A. $a = 0, b = 1, c = \dfrac{3}{2}$　　B. $a = 1, b = 0, c = 1$　　C. $a = 1, b = 1, c = -1$　　D. $a = 1, b = 0, c = -1$

第 6 章　一元函数微分学的应用 (二)—中值定理、微分等式与微分不等式

1. 设函数 $f(x)=x(2x-3)(4x-5)$, 则方程 $f'(x)=0$ 的实根个数为 (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 若方程 $x - e\ln x - k = 0$ 在 $(0,1]$ 上有解, 则 k 的最小值为 (　)

A. -1　　B. $\frac{1}{e}$　　C. 1　　D. e

3. 设函数 $f(x) = ae^x - bx(a > 0)$ 有两个零点, 则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是 ( )

A. $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ B. $(0, e)$ C. $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$ D. $(e, +\infty)$

4. 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+a(x>0)$ 有两个零点, 则 a 的取值范围是 ( )

A. $(-1,0)$ B. $(0,1)$ C. $(-\infty,0)$ D. $(0,+\infty)$

5. 设存在 $0<\theta<1$, 使得 $\arcsin x=\dfrac{x}{\sqrt{1-(\theta x)^2}}, -1 \leqslant x \leqslant 1$, 则 $\lim\limits_{x \to 0} \theta=$ ____________.

6. 设 $x > 0$, 证明 $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

7. 设 $x>0$, 证明 $\dfrac{1}{1+x}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$.

8. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $|f'(x)| \leqslant 1, f(0)=1$, 证明 $|f(x)| \leqslant 1+x, 0<x<1$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上一阶导数连续, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, 则 ( )

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(2x)+f(x)]=0$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(2x)-f(x)]=0$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0$

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)+f(x)]=0$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处一阶导数连续, 且 $f'(1)=2$, 则 $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{\ln x} =$ __________.

11. 设 $f'(1)=2$, 计算 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{\ln x}$, 并指出与第 10 题的区别.

12. (1) 将 $\sin x$ 在 $x = 0$ 处展开成一阶带拉格朗日余项的泰勒公式.

(2) 证明 $\left|\dfrac{\sin x}{x} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}|x|, x \neq 0$.

13. 求曲线 $y = e^{-\frac{x}{2}}$ 与曲线 $y = x^3 - 3x$ 的交点个数.

14. (1) 当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时, 证明 $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$;

(2) 设数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \sin x_n, y_{n+1} = y_n^2, n = 1, 2, 3, \cdots, x_1 = y_1 = \dfrac{1}{2}$, 当 $n \to \infty$ 时, 证明 y_n 是比 x_n 高阶的无穷小量.

15. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $0 < x_n < \dfrac{\pi}{2}, x_n \cos x_{n+1} = \sin x_n, n = 1, 2, \cdots$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

第 7 章　一元函数微分学的应用 (三)—物理应用

1. 一动点 P 在曲线 $9y = 4x^2$ 上运动, 设坐标轴的单位长度是 1cm, 若 P 点横坐标的变化率是 30cm/s, 则当 P 点经过点 $(3, 4)$ 时, P 点到原点距离的变化率为 __________.

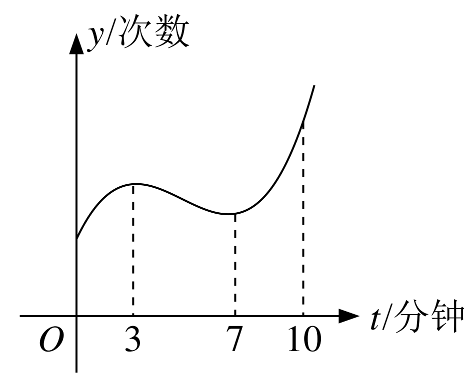
2. 设二阶可导函数 $y = f(t)$ 表示某人在 10 分钟内心跳次数的变化曲线, 如图所示. 则关于此人心跳次数的增长速度, 说法正确的是 (　)

A. 0 ~ 3 分钟增速变小; 7 ~ 10 分钟增速变大

B. 0 ~ 3 分钟增速变大; 7 ~ 10 分钟增速变小

C. 0 ~ 3 分钟增速变大; 7 ~ 10 分钟增速变大

D. 0 ~ 3 分钟增速变小; 7 ~ 10 分钟增速变小



3. 已知一容器中水增加的速率为 $1\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$, 且水的体积与水面高度 y 满足 $V=\dfrac{\pi}{2}y^2$, 当水面上升到高为 1m 时, 求水面高度上升的速率.

4. 已知某圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 2cm/s, −3cm/s, 且圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为 $-100\pi \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$, $40\pi \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$, 则圆柱体的底面半径与高分别为 (　)

A. 5cm, 5cm　　B. 10cm, 5cm　　C. 5cm, 10cm　　D. 10cm, 10cm

第 8 章　一元函数积分学的概念与性质

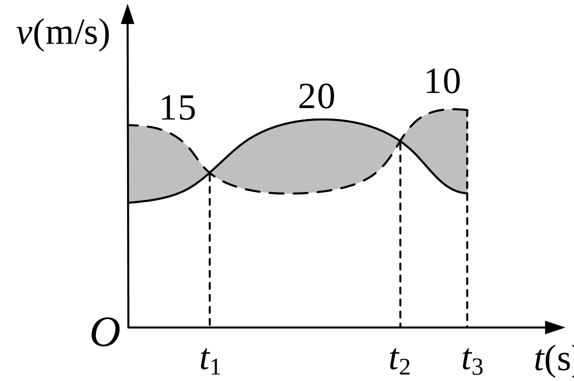
1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(\quad)$

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k-1}{3n}\right)\frac{1}{3n}$　B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k-1}{3n}\right)\frac{1}{n}$　C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n} f\left(\frac{k-1}{3n}\right)\frac{1}{n}$　D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n} f\left(\frac{k}{3n}\right)\frac{3}{n}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[\ln(3n-2i)-\ln(n+2i)]=$ __________.

3. 甲、乙两人赛跑, 图中实线和虚线分别为甲和乙的速度曲线 (单位: m/s), 三块阴影部分面积依次为 15, 20, 10, 且当 $t=0$ 时, 甲在乙前面 10m 处, 则在 $[0, t_3]$ 上, 甲、乙相遇的次数为 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



4. 设 $M=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x, N=\int_0^1\frac{(1+x)\ln^2(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x, K=\int_0^1\frac{e^x}{1+x}\mathrm{d}x$, 则 (　)

A. $M>N>K$　　B. $N>K>M$　　C. $K>M>N$　　D. $K>N>M$

5. 设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的正值连续函数, 且 $f'(x)<0, g(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $g\left(\frac{1}{2}\right)$ 和 $g\left(\frac{3}{2}\right)$ 的可能取值是 (　)

A. $-2,1$　　B. $-2,3$　　C. $2,-1$　　D. $2,-3$

6. 设 $f(x)=\begin{cases} x\ln x & ,x>0 \\ x^2+x & ,x\leqslant 0 \end{cases}$ 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x(a<b)$ 取得最小值, 则 $(a,b)=($　$)$

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(0,1)$　　D. $(1,2)$

7. 设函数 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 若在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内 $g'(x) \geqslant 0$, 则对任意的 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 有 (　)

A. $\int_x^{\frac{\pi}{2}} g(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{\frac{\pi}{2}} g(\sin t)\mathrm{d}t$

B. $\int_x^{1} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{1} g(\sin t)\mathrm{d}t$

C. $\int_x^{1} g(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{1} g(\sin t)\mathrm{d}t$

D. $\int_x^{\frac{\pi}{2}} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{\frac{\pi}{2}} g(\sin t)\mathrm{d}t$

8. 若 $\sqrt{1-x^2}$ 是 $xf(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=(\quad)$

A. -1　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $-\frac{\pi}{4}$　　D. 1

9. 已知函数 f 是 $\int_1^{e^x}\frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t$ 的反函数, 则 $f'(0)=$ __________.

10. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上可导的奇函数, 任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 均有 $f(x+1)-f(x)=f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 则以下是偶函数的是 (　)

A. $\int_0^x [\sin f(t)+f(t+1)]\mathrm{d}t$

B. $\int_0^x [\sin f'(t)+f'(t+1)]\,\mathrm{d}t$

C. $\int_0^x [\cos f(t)+f(t+2)]\mathrm{d}t$

D. $\int_0^x [\cos f'(t)+f'(t+2)]\,\mathrm{d}t$

11. 设 $f(x)$ 是实数集上连续的偶函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上有唯一零点 $x_0 = -1$, 且 $f'(x_0) = 1$, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的严格单调增区间是 (　)

A. $(-\infty, -1)$　　B. $(-1, 0)$　　C. $(-1, 1)$　　D. $(1, +\infty)$

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调连续, $f(0)=1, f(2)=2$, 且对任意 $x_1, x_2 \in [0,2]$ 总有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, $P=\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x$, 则 (　)

A. $3<P<4$　　B. $2<P<3$　　C. $1<P<2$　　D. $0<P<1$

13. 下列反常积分中, 发散的是 (　)

A. $\int_{0}^{+\infty} x e^{-x} \mathrm{d}x$　　B. $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} \mathrm{d}x$　　C. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x$　　D. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x$

14. 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)x^{1-p}} \mathrm{d}x$ 收敛, 则 (　)

A. $p < 1$　　B. $p > 1$　　C. $0 < p < 1$　　D. $0 \leqslant p < 1$

第 9 章　一元函数积分学的计算

1. 计算下列不定积分.

(1) $\int \cos^3 x \mathrm{d}x$

(2) $\int \sin^3 x \mathrm{d}x$

(3) $\int \sec x \mathrm{d}x$

(4) $\int \sec^3 x \mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} \mathrm{d}x (a \neq 0)$;

(6) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} \mathrm{d}x (a \neq 0)$;

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x(a \neq 0)$;　　(8) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+(x+b)^2}\mathrm{d}x(a \neq 0)$;

(9) $\int \frac{1}{a^2-(x+b)^2}\mathrm{d}x(a>0)$; (10) $\int \frac{1}{(x+b)^2-a^2}\mathrm{d}x(a>0)$

(11)$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x(a>0)$

(12)$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x(a>0)$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$;　　(14) $\int \csc^3 x\,\mathrm{d}x$

(15) $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$

(16) $\int \tan^3 x\mathrm{d}x$

(17) $\int \tan^4 x\mathrm{d}x$;

(18) $\int \cot^3 x\mathrm{d}x$

(19) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$

(20) $\int \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$

(21) $\int \frac{1}{\sin 2x}\mathrm{d}x$

(22) $\int \frac{1}{\cos 2x}\mathrm{d}x$

(23) $\int \frac{1}{a+b\cos x}\mathrm{d}x(a>0,b>0)$

(24) $\int \frac{1}{a+b\sin x}\mathrm{d}x(a>0,b>0)$

2. 计算不定积分 $\int \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\mathrm{d}x$.

3. 计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\,(x>0)$.

4. 计算不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} \mathrm{d}x$.

5. 定积分 $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = (\quad)$

A. 2　　B. $2-\dfrac{4}{e}$　　C. $1-\dfrac{2}{e}$　　D. $1-\dfrac{1}{e}$

6. $\int_0^1 \frac{4x-3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x =$ __________.

7. $\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x =$ __________.

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta \mathrm{d}\theta =$ __________.

9. 设连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x+1)-f(x)=x\ln x$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=$ __________.

10. 设 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} xy\mathrm{d}y=$ ________.

11. 若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^{2}} f(\ln x) \mathrm{d} x=(\quad)$

A. $-\frac{1}{4}$　B. -1　C. $\frac{1}{4}$　D. 1

12. 若函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^{2x} f\left(x+\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$, 则当 $x\to 0^+$ 时, $g(x)$ 是 $\sqrt{x}$ 的 (　)

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小　　C. 等价无穷小　　D. 同阶非等价无穷小

13. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 在 $x=0$ 可导, 且 $f(0)=0,\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ 则 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处 (　)

A. 不连续　　B. 连续但不可导

C. 可导但 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续　　D. 可导且 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

14. 若连续周期函数 $y=f(x)$ (不恒为常数) 对任何 x, 恒有 $\int_{-1}^{x+6} f(t)\mathrm{d}t+\int_{x-3}^{4} f(t)\mathrm{d}t=14$ 成立, 则 $f(x)$ 的周期是 (　)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

15. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是连续的偶函数, $a>0, g(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|\cdot f(t)\mathrm{d}t$, 则在 $[-a,a]$ 上 (　)

A. $g(x)$ 是单调递增函数　B. $g(x)$ 是单调递减函数　C. $g(x)$ 是偶函数　D. $g(x)$ 是奇函数

16. 若 $F(x)=\int_{-\pi}^{\pi}|x-t|\sin t\,\mathrm{d}t$, 则 $F'(0)=(\quad)$

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

17. 若函数 $y(x)=\int_{2}^{x^2} e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, 则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2[y(x)]}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=-1}=(\quad)$

A. 0　　B. 1　　C. $4e^{-1}$　　D. $4e$

18. 已知函数 $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$, 则 $\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x=$ ________.

19. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xe^x$, 则 $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x =$ ____________.

20. 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x (n=0,1,2,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n-2}}\right)^n =$ __________.

21. $\int_{\sqrt{5}}^{5} \frac{1}{\sqrt{\left|x^2-9\right|}} \mathrm{d}x =$ __________.

22. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2} \mathrm{d}x =$ ____________.

第 10 章　一元函数积分学的应用 (一)—几何应用

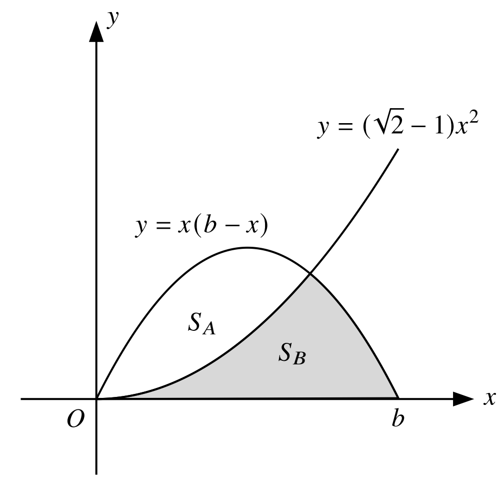
1. 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$ 与 x 轴在区间 $(0,+\infty)$ 上所围成图形的面积为 ________.

2. 曲线 $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 在 $\left[1,e^2\right]$ 上与 x 轴所围图形的面积是 ________.

3. 如图所示, 抛物线 $y=(\sqrt{2}-1)x^2$ 把 $y=x(b-x)(b>0)$ 与 x 轴所围成的闭区域分为面积为 S_A 与 S_B 的两部分, 则 (　)

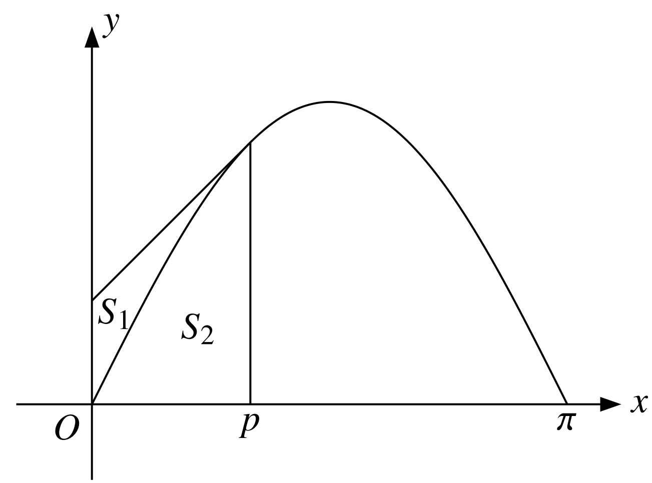
A. $S_A<S_B$　　B. $S_A=S_B$

C. $S_A>S_B$　　D. S_A 与 S_B 大小关系与 b 的数值有关



4. 过点 $(p, \sin p)$ 作曲线 $y = \sin x$ 的切线 (见图), 设该曲线与切线及 y 轴所围成图形的面积为 S_1, 曲线与直线 $x = p$ 及 x 轴所围成图形的面积为 S_2, 则 (　)

A. $\lim\limits_{p\to 0^+} \dfrac{S_2}{S_1+S_2} = \dfrac{1}{3}$　　B. $\lim\limits_{p\to 0^+} \dfrac{S_2}{S_1+S_2} = \dfrac{1}{2}$　　C. $\lim\limits_{p\to 0^+} \dfrac{S_2}{S_1+S_2} = \dfrac{2}{3}$　　D. $\lim\limits_{p\to 0^+} \dfrac{S_2}{S_1+S_2} = 1$



5. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 若曲线 $y_1 = f(x)$ 过点 $(0,0)$, 且与曲线 $y_2 = a^x(a > 1)$ 在点 $(1,a)$ 处相切, $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 2$, 则 $a =$ ________.

6. 设平面区域 D 由曲线段 $y = \sin \pi x (0 \leqslant x \leqslant 1)$ 与 x 轴围成, 则 D 绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积为 __________.

7. 已知函数 $f(x)=x\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t}\mathrm{d}t$, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的平均值为 __________.

8. 已知曲线 $L: y=e^{-x}(x \geqslant 0)$, 设 P 是 L 上的动点, V 是 L 上从点 $A(0,1)$ 到点 P 的一段弧绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积, 当 P 运动到点 $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$ 时, 沿 x 轴正向的速度为 1 , 求此时 V 关于时间 t 的变化率.

9. 曲线 $y = \ln \sin x \left(\dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}\right)$ 的弧长为 ___________.

10. 曲线 $r = e^{\theta}$ 从 $\theta = 0$ 到 $\theta = 1$ 的弧长为 __________.

11. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^4 - 6xy + 3 = 0(1 \leqslant y \leqslant 2)$ 所确定, 则曲线 $y = y(x)$ 从点 $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 到点 $\left(\frac{19}{12}, 2\right)$ 的长度为 ________.

第 11 章　一元函数积分学的应用 (二)—积分等式和积分不等式

1. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $\int_0^{\pi} f(x\sin x)\sin x\mathrm{d}x = 1$, 则 $\int_0^{\pi} f(x\sin x)x\cos x\mathrm{d}x = (\quad)$

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. π

2. 若函数 $f(x)$ 的二阶导数连续, 且满足 $f''(x)-f(x)=x$, 则 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x=(\quad)$

A. $f'(\pi)-f'(-\pi)$　B. $-\dfrac{f'(\pi)-f'(-\pi)}{2}$　C. $f(\pi)-f(-\pi)$　D. $-\dfrac{f(\pi)-f(-\pi)}{2}$

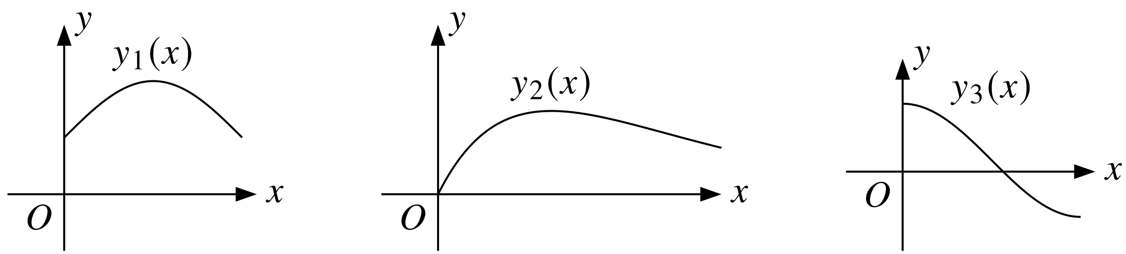
3. 设 $a>0$, 则在 $[0,a]$ 上方程 $\int_0^x \sqrt{4a^2-t^2}\mathrm{d}t+\int_a^x \frac{1}{\sqrt{4a^2-t^2}}\mathrm{d}t=0$ 方的个数为 (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 当 $x \geqslant 0$ 时, 函数 $f(x)$ 可导, 有反函数 $g(x)$, 且恒等式 $\int_1^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = x^2 - 1$ 成立, 则函数 $f(x) = (\quad)$

A. $2x+1$　　B. $2x-1$　　C. x^2+1　　D. x^2

5. 设某人在 $x=0$ 时, 从静止开始运动, 其速度曲线为 $f_1(x)$, 加速度曲线为 $f_2(x)$, 且速度函数在 $[x, x+1]$ 上的平均值函数曲线为 $f_3(x)$, x 表示时间, 则以下 3 条曲线对应关系正确的是 ( )



A. $f_1(x)=y_2(x), f_2(x)=y_1(x), f_3(x)=y_3(x)$

B. $f_1(x)=y_2(x), f_2(x)=y_3(x), f_3(x)=y_1(x)$

C. $f_1(x)=y_3(x), f_2(x)=y_2(x), f_3(x)=y_1(x)$

D. $f_1(x)=y_3(x), f_2(x)=y_1(x), f_3(x)=y_2(x)$

6. 已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}(x - e^{-x}\sin x)$, 则 $f(x) =$ ________.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶连续导数, 证明: $f''(x) \geqslant 0$ 的充分必要条件是对不同的实数 a, b,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

8. 已知函数 $f(x), g(x)$ 可导, 且 $f'(x) > 0, g'(x) < 0$, 则 ( )

A. $\int_{-1}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$

B. $\int_{-1}^{0} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x$

C. $\int_{-1}^{0} f[g(x)]\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} f[g(x)]\mathrm{d}x$

D. $\int_{-1}^{0} f[f(x)]\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} g[g(x)]\mathrm{d}x$

9. 设 $S(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 其中 $f(x)=|\arcsin(\sin x)|$.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的表达式;

(2) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

第 12 章　一元函数积分学的应用 (三)—物理应用

1. 设沿 y 轴上的区间 $[0,1]$ 放置一长度为 1 且线密度为 ρ 的均匀细杆, 在 x 轴上 $x=1$ 处有一单位质点, 则该细杆对此质点的引力 (G 为引力常量) 沿 x 轴正向的分力为 __________.

2. 有一内表面为旋转抛物面的水缸, 其深为 a (单位: 米), 缸口直径为 $2a$ (单位: 米), 缸内盛满了水, 设水的密度为 ρ (单位: 千克 / 立方米). 若以每秒 Q 立方米的速率将缸中的水全部抽出, 问:

(1) 共需多少时间?

(2) 需做多少功?

3. 在一个高为 1m 的圆柱形容器内储存某种液体, 并将容器横放. 底面圆的方程为 $x^2+y^2=1$(单位: m). 如果容器内储满了液体后, 以 $0.2\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速率将液体从容器顶端抽出.

(1) 当液面在 $y=0$ 时, 求液面下降的速率;

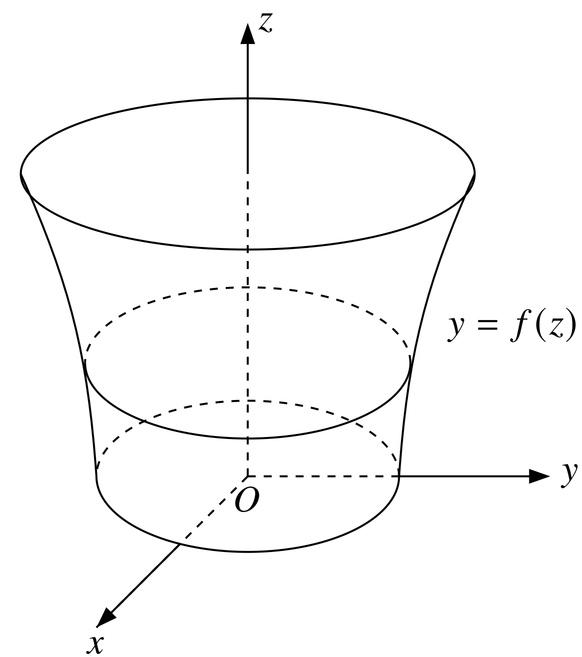
(2) 如果 $1\mathrm{m}^3$ 液体所受重力为 $1N$, 求抽完全部液体需做多少功?

4. 设有一个内表面为旋转抛物面的容器, 其深为 a 米, 容器口直径为 $2a$ 米, 若以每秒 Q 立方米的速率往容器内注水, 求:

(1) 容器的容积及内表面的面积;

(2) 当容器中水深为 $\frac{1}{2}a$ 米时, 水面上升的速率.

5. 以 yOz 面上的平面曲线段 $y = f(z)(z \geqslant 0)$ 绕 z 轴旋转一周所成旋转曲面与 xOy 面围成一个无上盖容器 (见图), 现以 $3\text{cm}^3/\text{s}$ 的速率把水注形容器内, 水面的面积以 $\pi\text{cm}^2/\text{s}$ 的速率增大. 已知容器底面积为 $16\pi\text{cm}^2$, 求曲线 $y = f(z)$ 的方程.



第 13 章　多元函数微分学

1. 设 $z = \arctan[xy + \cos(x + y)]$, 则 $\mathrm{d}z|_{(0,\pi)} =$ ____________.

2. 设函数 $f(u)$ 可导, $z = f(\cos y - \cos x) + xy$, 则 $\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\sin y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} =$ ____________.

3. 设函数 $f(u)$ 可导, $z = yf\left(x^{y^2}\right)$, 则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ __________.

4. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+2y\ln z-\arctan(xy)=1$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$ __________.

5. 设 $F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)e^t\mathrm{d}t$, 则 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=$ ________.

6. 设函数 $f(x,\sin x)=x+\sin x$, $f_x'(x,y)=1+2\cos x$, 则 $f_y'(x,y)\big|_{y=\sin x}=$ ________.

7. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内一阶偏导数连续, $f(0,1)=0$, $f'_y(0,1)=1$, 则 $f\left(x,\int_1^t \ln x\mathrm{d}x\right)=0$(　)

A. 在点 $(0,1)$ 附近可确定 $t=t(x)$, 且 $t'(0)=-f'_x(0,1)$

B. 在点 $(0,1)$ 附近可确定 $t=t(x)$, 且 $t'(0)=-1$

C. 在点 $(0,e)$ 附近可确定 $t=t(x)$, 且 $t'(0)=-f'_x(0,1)$

D. 在点 $(0,e)$ 附近可确定 $t=t(x)$, 且 $t'(0)=-1$

8. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x,y)=xy-f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$, 求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

9. 设函数 $z = xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 其中 $f(u)$ 可导, 且满足 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = y^2(\ln y - \ln x)$, 求:

(1) $f(x)$ 的表达式;

(2) $f(x)$ 与 x 轴所围图形的面积及该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

10. 设 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}, y>0, P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 是某二元函数的全微分, 则 $P(x,y)$ 可取为 (　)

A. $y^2-\dfrac{x^2}{y^3}$　　B. $x^2-\dfrac{1}{y}$　　C. $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{x^2}{y^3}$　　D. $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y}$

11. 函数 $z = x^y$ 在点 $(1, 2)$ 处的全微分为 $\mathrm{d}z =$ __________.

12. 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 内有一阶偏导数. 若 $f(x,y)$ 在 D 的边界 ∂D 上的值均为 0 , 且 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f(x,y)$, 则 $f(x,y)$(　)

A. 在 D 内有正的最大值

B. 在 D 内有负的最小值

C. 只在 D 的边界 ∂D 上取到最大值

D. 在 D 的边界 ∂D 上可以取到最小值

13. 求函数 $f(x, y) = (y - x)(y - x^2)$ 的极值.

14. 求函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 的极值.

15. 求函数 $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^2 - y - 9$ 的极值.

16. 求函数 $f(x,y)=xy$ 在约束条件 $x+y=2$ 下的极值.

17. 设 $e^x + y^2 + |z| = 3$, 其中 x, y, z 为实数, 若 $e^x y^2 |z| \leqslant k$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 __________.

18. 求 $g(x,y)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{9}(1-\pi x-2y)^2$ 在有界区域 $\{(x,y)\mid \pi x+2y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$ 上的最小值.

19. 设函数 $f(x,y)=2e^{x^2y}-e^{x}-e^{-x}$.

(1) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y)}{x^2}$;

(2) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否取得极值? 若是, 求出此极值, 若不是, 说明理由.

第 14 章　二重积分

1. $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_2^y \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} \mathrm{d}x =$ ________.

2. $\int_0^t \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{t}} \sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x =$ ________.

3. 设 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$, 曲线 $l_1: x^2+y^2-xy=1, l_2: x^2+y^2-xy=2$, 直线 $l_3: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x, l_4: y=\sqrt{3}x$. 区域 D_1 由 $l_1, l_2, x=0, y=0$ 围成, D_2 由 $l_1, l_2, l_3, y=0$ 围成, D_3 由 $l_1, l_2, l_4, x=0$ 围成, 则对于 $I_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{y-x}\,\mathrm{d}\sigma\,(i=1,2,3)$, 有 ( )

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_3<I_1<I_2$　　C. $I_2<I_3<I_1$　　D. $I_2<I_1<I_3$

4. 已知函数 $f(t)=\int_{1}^{t^{2}}\mathrm{d}x\int_{t}^{\sqrt{x}}\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}y$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ ________.

5. 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r=\sin 3\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$, D 为曲线 L 围成的区域, 则 $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________.

6. 已知平面区域 $D = \left\{(x, y) \mid |x| \leqslant y, (x^2 + y^2)^3 \leqslant y^4\right\}$, 则 $\iint\limits_D \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ __________.

7. 设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴所围成. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

8. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\right\}$, 计算 $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

9. 设 D 是由 $y=|x|$ 及 $y=1$ 围成的有界区域, 计算二重积分 $\iint\limits_{D} \frac{x^2-x\cos y-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

10. 计算二重积分 $\iint\limits_{D} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant y\right\}$.

11. 设平面区域 $D = \left\{(x, y) \mid x^3 \leqslant y \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant 1\right\}$, $f(x)$ 是定义在 $[-a, a](a \geqslant 1)$ 上的任意连续函数, 求 $\iint\limits_D [(x+1)f(x) + (x-1)f(-x)] \sin y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

12. 计算 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{2y-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x$.

13. 计算 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 2x\right\}$, $f(x,y)=\begin{cases} y & ,1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant x \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$.

14. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, 计算 $\iint\limits_D \frac{e^{-(x+y)}}{\sqrt{xy}}\mathrm{d}\sigma$.

15. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid 2x^2+y^2\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}, y\geqslant x\geqslant 0\right\}$, 若 $\iint\limits_D \frac{f(x,y)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\sigma=a>0$, $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

(1) 计算 $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\sigma$;

(2) 证明: 存在 $(\xi,\eta)\in D$, 使得 $|f(\xi,\eta)|\geqslant \frac{\sqrt{2}}{\pi}a$.

第 15 章 微分方程

1. 若 $f'(x)-f(x)=2xe^x$ 的积分曲线没有极值点但有拐点, 则 $f(x)=$ ( )

A. $e^x(x+C), 1\leqslant C<2$ B. $e^x(x^2+C), 1\leqslant C<2$ C. $e^x(x^2+C), 0\leqslant C<1$ D. $e^x(x+C), 0\leqslant C<1$

2. 微分方程 $y'\sec^2 y-\sec^2 y-1=0$ 的通解是 ________.

3. 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + \frac{1}{x^2}y = 2e^{\frac{1}{x}}$ 满足 $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 的解.

(1) 求 $y = y(x)$ 的表达式;

(2) 求曲线 $y(x)$ 的斜渐近线.

4. 已知微分方程 $e^y = t + \dfrac{1}{y'}$ 满足 $y(0) = 0$.

(1) 求该微分方程的特解 $y = y(t)$;

(2) 设 $\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = y(t) \end{cases}$ 计算 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$.

5. 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $2xy' - 4y = 2\ln x - 1$ 满足条件 $y(1) = \dfrac{1}{4}$ 的解, 求曲线 $y = y(x)$ 在 $[1, e]$ 上的平均值.

6. 设曲线 $y = y(x)(x > 0)$ 经过点 $(1, 0)$, 该曲线上任一点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 求 $y(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上与 x 轴所围平面图形的面积.

7. 设 $y=y(x)$ 满足 $y''-2y'+y=0$, 且 $y(0)=0, y'(0)=1$, 则 $\int_{-\infty}^{0} y(x)\mathrm{d}x=$ __________.

8. 已知某齐次线性微分方程的通解为 $y = C_1 + e^x (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$, 则该微分方程为 ________.

9. 欧拉方程 $x^2y'' + 3xy' + 3y = 0$ 满足条件 $y(1) = 0, y'(1) = \sqrt{2}$ 的解 $y =$ ____________.

第 16 章　无穷级数

1. 设一正方形边长为 1 , 作其内切圆, 以四个切点为顶点作第二个正方形, 对第二个正方形作其内切圆, 再以其四个切点为顶点作第三个正方形, 以此类推, 记第 n 个正方形的面积为 a_n, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=(\quad)$

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $+\infty$

2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

3. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, 则 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 绝对收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[u_n+(-1)^n]$ 条件收敛

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[u_n+(-1)^n]$ 绝对收敛

4. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{x_n}-\ln x_n\right)$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln x_n$ 绝对收敛是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{x_n}\right)$ 绝对收敛的 (　)

A. 充要条件　B. 必要不充分条件　C. 充分不必要条件　D. 既不充分也不必要条件

5. 设 $u_n = \sqrt{\arctan(n+k) - \arctan n}$, k 为正常数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$(　)

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 敛散性与 k 有关

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 收敛, 则下列级数中收敛的是 ( )

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$

D. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$

7. 设函数 $y=y(x)$ 满足 $(1-x)y'+2y=0, y(0)=1, a_n(x)=\int_0^x y(t)\sin^n t\mathrm{d}t, n=1,2,\cdots$.

(1) 求 $y(x)$ 的表达式;

(2) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(1)$ 收敛.

8. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^n$ 的收敛区间为 $(-3,1)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^{2n}$ 的收敛区间为 ＿＿＿＿＿＿.

9. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^{-nx}$ 的收敛域为 __________.

10. 已知 $\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| - \frac{1}{(1+x)^2} + 1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$, 求 a_n.

11. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^{\frac{n}{2}}}{n}$ 在 $(0,1]$ 内的和函数 $S(x)=$ __________.

12. 设 n 为正整数, $y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-ny=0$ 满足条件 $y_n(1)=(n+1)(n+3)$ 的解.

(1) 求 $y_n(x)$;

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

13. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n + 2}{2^n(2n+1)} x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

14. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = 1 + x, x \in [0,1]$. 若 $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} =$ __________.

15. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2} \\ x-1 & ,\dfrac{1}{2}<x<1 \end{cases}$，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$，则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$ (　)

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $-\dfrac{1}{8}$　　D. $-\dfrac{1}{4}$

16. 已知 $f(x) = |x|, -\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

(1) 将 $f(x)$ 展开成余弦级数;

(2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

17. 如果级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内的和函数是微分方程 $y'-\frac{y}{6}=\frac{xy^7}{6}$ 的一个解, 求该级数的和函数.

第 17 章　多元函数积分学的预备知识

1. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, $f(0,0)=0$, $f'_x(0,0)=1$, $f'_y(0,0)=-1$, 且 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$, 则
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(x,y,f(x,y))\cdot \boldsymbol{n}}{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1} =$ ________.

2. 设可微函数 $z = f(x,y)$ 的图形与 xOy 面的交线方程为 $y = \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t + x$，且 $f'_x(0,0) = 1$，则 $f'_y(0,0) =$ __________.

3. 过点 $(1,0,1)$ 与 $(0,1,1)$ 且与曲面 $z=1+x^2+y^2$ 相切的平面为 __________.

4. 曲面 $z = 2x + y + \ln(1 + x^2 + y^2)$ 在点 $(0, 0, 0)$ 处的切平面方程为 ________.

5. 求以 $M_0(1,1,1)$ 为顶点, 以曲线 C(C 是平面 $z=0$ 上 $y^2=x$ 被 $x=1$ 截下的有限部分) 为准线的锥面方程.

6. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=(1,1)$ 的方向导数是 __________.

7. 函数 $f(x,y)=2x^2+y^2$ 在点 $(0,1)$ 的最大方向导数为 __________.

8. 设 a, b 为实数, 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的方向导数中, 沿方向 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大, 最大值为 10. 求 a, b.

9. 设可微函数 $z = z(x, y)$ 在平面上任一点 (x, y) 处沿 x 轴正向 $\boldsymbol{i}$ 与 y 轴正向 $\boldsymbol{j}$ 的方向导数分别为 $[e^{-x} - f(x)]\,y$ 与 $f(x)$, 其中 $f(x)$ 的一阶导数连续, 且 $f(0) = 1$.

(1) 求 $z(x, y)$ 的表达式;

(2) 判断 $z(x, y)$ 是否有极值, 若有, 求之; 若无, 说明理由.

10. 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-y\cos z\boldsymbol{j}+z\sin x\boldsymbol{k}$, 则 $\mathbf{rot}\boldsymbol{F}(1,1,0)=$ ____________.

第 18 章　多元函数积分学

1. 设 $\Omega=\left\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1\right\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$ __________.

2. 设锥面 Σ 的顶点是 $A(0,1,1)$, 准线是 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 直线 L 过顶点 A 和准线上任一点 $M_1(x_1,y_1,0)$.Ω 是 $\Sigma(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 所围成的锥体.

(1) 求 L 和 Σ 的方程;

(2) 求 Ω 的形心坐标.

3. 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 则 $\oint_L (x+z)y\mathrm{d}s=(\quad)$

A. 2π　　B. $-\pi$　　C. $-\dfrac{\pi}{3}$　　D. $-\dfrac{2\pi}{3}$

4. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被抛物柱面 $z^2=2x$ 截下的曲面的面积为 __________.

5. 设 a, b 为实数, 函数 $z = 1 + ax^2 + by^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的方向导数中, 沿方向 $\boldsymbol{l} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大, 且最大值为 $2\sqrt{5}$.

(1) 求 a, b;

(2) 求曲面 $z = 1 + ax^2 + by^2$ 被曲面 $z = 2(x^2 + 3y^2)$ 所截部分的面积.

6. 设锥面 $\Sigma(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的顶点是 $A(0,0,1)$, 准线是 $\begin{cases} (x+1)^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 直线 L 过顶点 A 和准线上的一点 $M_1(x_1,y_1,0)$.

(1) 求直线 L 与锥面 Σ 的方程;

(2) 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+(z-1)^2}} \mathrm{d}S$.

7. 设平面曲线 $L: f(x,y)=1$ 过第一象限的点 A 和第三象限的点 B, $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数, $\mathit{\Gamma}$ 为 L 上从点 A 到点 B 的一段弧, 设 $I_1=\int_{\mathit{\Gamma}} f(x,y)\mathrm{d}x, I_2=\int_{\mathit{\Gamma}} f(x,y)\mathrm{d}s, I_3=\int_{\mathit{\Gamma}} f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y$, 则 (　)

A. $I_1>I_3>I_2$　B. $I_2>I_3>I_1$　C. $I_3>I_1>I_2$　D. $I_3>I_2>I_1$

8. 使得 $\oint_L (2y^3-3y)\mathrm{d}x - x^3\mathrm{d}y$ 的值最大的平面正向边界曲线 L 为 ( )

A. $3x^2+y^2=1$ B. $2x^2+y^2=1$ C. $x^2+3y^2=1$ D. $x^2+2y^2=1$

9. 设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界单连通闭区域, $I(D) = \iint\limits_{D} (1 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 取得最大值的积分域记为 D_1.

(1) 求 $I(D_1)$ 的值;

(2) 计算 $\oint_{\partial D_1} \dfrac{\left(xe^{x^2+2y^2} + y\right)\mathrm{d}x + \left(2ye^{x^2+2y^2} - x\right)\mathrm{d}y}{x^2 + 2y^2}$, 其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

10. 设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧, 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

11. 设 Σ 为空间区域 $\left\{(x, y, z) \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$ 表面的外侧, 则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ __________.

12. 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+2z^2=1(z \geqslant 0)$ 的上侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{1-x^2-2z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________.

13. 设 Σ 为平面 $x-y+z=1$ 介于三坐标平面间的有限部分, 法向量与 z 轴正向夹角为锐角, $f(x)$ 连续, 则 $\iint\limits_{\Sigma}[f(xz)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(xz)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(xz)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ＿＿＿＿＿＿.

14. 计算曲线积分 $I=\oint_{\Gamma} yz\mathrm{d}x-zx\mathrm{d}y+3xy\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ 2y-z+1=0 \end{cases}$ 从 z 轴正向往下看, Γ 为逆时针方向.

线代基础篇

第 1 章　行列式

1. 设 a, b, c 是方程 $x^3 - 2x + 4 = 0$ 的三个根, 则行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ 的值等于 (　)

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. -2

2. 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ 展开式中的常数项为 (　)

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. 0

3. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 2x & -x \\ 2 & x & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -x & -1 \\ -1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的常数项为 (　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

4. 不恒为零的函数 $f(x)=\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2+x & b_2+x & c_2+x \\ a_3+x & b_3+x & c_3+x \end{vmatrix}$ (　)

A. 没有零点　　B. 至多有 1 个零点　　C. 恰有 2 个零点　　D. 恰有 3 个零点

5. 若 $f(x)=\begin{vmatrix} 3x+1 & x+11 & x-2 \\ x+1 & x+4 & -1 \\ x & 7 & x-1 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 的拐点为 (　)

A. $(1,7)$　　B. $(-1,-1)$　　C. $(0,0)$　　D. $(-2,-2)$

6. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+n \end{vmatrix}$, 则 $f^{(n-1)}(0)=(\quad)$

A. $\frac{1}{2}n(n+1)$　　B. $\frac{1}{2}(n+1)!$　　C. $n!$　　D. $(n+1)!$

7. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ -3 & 9 & -6 & 7 \end{vmatrix}$, M_{3j} 表示 D 中第 3 行第 j 列元素的余子式 $(j = 1, 2, 3, 4)$, 则 $M_{31} + 3M_{32} - 2M_{33} + 2M_{34} =$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. -2　　D. -3

8. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}$, A_{ij} 表示元素 $a_{ij}(i, j = 1,2,3,4)$ 的代数余子式. 若 $A_{11} - A_{21} + A_{41} = 4$, 则 $a =$ __________.

第 2 章　矩阵

1. 已知矩阵方程 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 可以是 (　)

A. $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{3}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\sqrt{3}&\frac{2}{\sqrt{3}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{3}&\frac{2}{\sqrt{3}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\sqrt{3}&\frac{2}{\sqrt{3}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 则下列说法错误的是 (　)

A. 对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\xi}$, 有 $\boldsymbol{A\xi}=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

B. 对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\xi}$, 有 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=0$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

C. 对任意的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

D. 对任意的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均是 3 阶矩阵, 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{BC}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^5=$ ________.

4. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{B}^3$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ __________.

5. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, 若 $(\boldsymbol{PA})^2=\boldsymbol{PA}$, $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{P}=$ __________.

6. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 3 阶矩阵, 若 $|\boldsymbol{A}| = -3, |\boldsymbol{B}| = 4, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{A}^* & (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{C}| =$ __________.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵, $|\boldsymbol{A}| = 2, |\boldsymbol{B}| = 3, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C}^* = ($　$)$

A. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & -3\boldsymbol{A}^* \\ -2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & -2\boldsymbol{B}^* \\ -3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&1&5\\0&0&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\4&5&1\end{bmatrix}$, 则 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{*}-\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}^{-1}\right|=$ ________.

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, 则必有 (　)

A. 互换矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1,2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$

B. 互换矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1,2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$

C. 互换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$

D. 互换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列的 -1 倍加到第 1 列得到 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C}=(\quad)$

A. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$　　B. $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$　　C. $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$　　D. $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$

11. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 则下列结论正确的是 ( )

A. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$

B. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$

C. 若 $r(\boldsymbol{A})=2$, $\boldsymbol{A}$ 可经初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$

D. 若 $r(\boldsymbol{A})=3$, $\boldsymbol{A}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$

12. 将 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$, 将 3 阶方阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 3 列的 -3 倍加到第 1 列得到矩阵 $\boldsymbol{D}$. 若 $\boldsymbol{BD}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{AC}=(\quad)$

A. $\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\-9&0&3\end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\9&0&3\end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix}-3&0&0\\-6&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$

13. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 3 阶矩阵, $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵, 且满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2a & 1-a & 2a \\ a & -a & a^2-2 \end{bmatrix}$, 则 (　)

A. $a = -1$, 必有 $r(\boldsymbol{A}) = 1$　B. $a = 2$, 必有 $r(\boldsymbol{A}) = 2$　C. $a = -1$, 必有 $r(\boldsymbol{A}) = 2$　D. $a = 2$, 必有 $r(\boldsymbol{A}) = 1$

14. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 记矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \end{bmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3, 则 ( )

A. $r_1 = r_2 \geqslant r_3$　　B. $r_1 = r_2 \leqslant r_3$　　C. $r_1 = r_3 \geqslant r_2$　　D. $r_1 = r_3 \leqslant r_2$

第 3 章 向量组

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量组, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - 2\boldsymbol{\alpha}_1$, 则 $|\boldsymbol{A}| =$ __________.

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 若向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 则必有 (　)

A. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关

B. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关

C. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

D. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

3. 设 $\boldsymbol{x}_1 = [1, 2, 2, -4]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_2 = [1, k, -1, -4]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_3 = [-1, -3, 1, k+6]^{\mathrm{T}}$, 则 (　)

A. 对任意常数 $k, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性无关

B. 当 $k = 3$ 时, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性相关

C. 当 $k = -2$ 时, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性相关

D. 当 $k \neq 3$ 且 $k \neq -2$ 时, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性无关

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1, 1, 0, -2]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [1, k, -2, 0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [-1, -3, 2, k+4]^{\mathrm{T}}$, 则 (　)

A. 对任意常数 $k, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

B. 当 $k = 3$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关

C. 当 $k = -4$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关

D. $k \neq 3$ 且 $k \neq -4$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的充要条件

5. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, 则 $k \neq 1$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} + k\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关的 ( )

A. 充分必要条件

B. 充分条件, 但非必要条件

C. 必要条件, 但非充分条件

D. 既非充分条件也非必要条件

6. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1, 0, 2, a]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [2, 1, a, 4]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [0, a, 5, -6]^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 则其中 $a =$ (　)

A. -1　　B. 3　　C. -3　　D. 5

7. 已知 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A} = (\quad)$

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,a,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[a,3,6]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[0,2,2a]^{\mathrm{T}}$, 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不等价, 则 $a=(\quad)$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

9. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1, 2, -3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [3, 0, -3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [9, 6, -15]^{\mathrm{T}}$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = [0, 1, -1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = [3, a, 1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3 = [1, 1, b]^{\mathrm{T}}$ 等价, 则 a, b 的值分别为 (　)

A. $-4, 2$　　B. $4, -2$　　C. $-4, -2$　　D. $4, 2$

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$, 记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-k_1\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-k_2\boldsymbol{\beta}_1-k_3\boldsymbol{\beta}_2$, 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为正交向量组, 则 k_1,k_2,k_3 依次为 ( )

A. $-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}$

第 4 章　线性方程组

1. 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]$ 不可逆, 且元素 a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,k_1,k_2,k_3$ 为任意常数, 则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解为 (　)

A. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$　　C. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$　　D. $k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

2. 设 3 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, k,l 均为非零常数,

$$\boldsymbol{\beta}_1=k\boldsymbol{\alpha}_1+l\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=k\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=k\boldsymbol{\alpha}_3+l\boldsymbol{\alpha}_1,$$

记 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件为 (   )

A. $k-l=0$　　B. $k+l=0$　　C. $k-l\neq 0$　　D. $k+l\neq 0$

3. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = 0$ 的基础解系, 证明:

(1) $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 $n - r + 1$ 个线性无关解;

(2) 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的任一个解均可由 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n>2)$ 阶方阵, $r(\boldsymbol{A}^*)=1, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解, k 为任意常数, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 (　)

A. $(k-1)\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$　　B. $(k-1)\boldsymbol{\alpha}_1-k\boldsymbol{\alpha}_2$　　C. $(k+1)\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$　　D. $(k+1)\boldsymbol{\alpha}_1-k\boldsymbol{\alpha}_2$

5. 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$，有 3 个线性无关的解. 记该方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求该方程组的通解;

(3) 求齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

6. 设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$ 经过若干次初等行变换得 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有 (　)

A. 对应的任何部分行向量组具有相同的线性相关性

B. 对应的任何部分列向量组具有相同的线性相关性

C. 对应的任何 k 阶子式同时为零或同时不为零

D. 对应的非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{b}$ 是同解方程组

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$, 若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解, 则其线性无关解向量的个数为 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\xi}_1 = [1, 2, -2]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = [2, 1, -1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_3 = [1, 1, t]^{\mathrm{T}}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解向量, 其中 $\boldsymbol{b} = [1, 3, -2]^{\mathrm{T}}$, 则 (　)

A. $t = -1$ 时, 必有 $r(\boldsymbol{A}) = 1$

B. $t = -1$ 时, 必有 $r(\boldsymbol{A}) = 2$

C. $t \neq -1$ 时, 必有 $r(\boldsymbol{A}) = 1$

D. $t \neq -1$ 时, 必有 $r(\boldsymbol{A}) = 2$

9. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 3, 且齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有通解 $k_1[1,2,-2]^{\mathrm{T}}+k_2[2,1,2]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$, 其中 k_1,k_2 是任意常数.

(1) 证明: 对任意的一个 3 维列向量 $\boldsymbol{\beta}$, 向量 $\boldsymbol{A\beta}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关;

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}=[3,6,-3]^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A\beta}$.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3], \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2]$.

(1) a, b 为何值时, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 能同时由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 若能表示, 写出其表示式;

(2) a, b 为何值时, 矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解? 若有解, 求出其全部解.

11. 设 3 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价, 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3],\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$, 则下列结论, 所有正确结论的序号是 ( )

(1) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解

(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解

(3) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解

(4) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解

A. (1)(2)　B. (1)(3)　C. (2)(4)　D. (1)(2)(3)(4)

12. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 n 阶矩阵, 则下列说法中, 正确的是 (　)

A. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

B. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{CAB} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

C. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解

D. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{CAB} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{CB} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解

13. 设平面 $\pi_1 : x + ay = a, \pi_2 : ax + z = 1, \pi_3 : ay + z = 1$, 已知这三个平面没有公共交点, 则 $a =$ __________.

14. 设 $\boldsymbol{B}$ 是 3 阶矩阵, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 2, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&a&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

第 5 章　特征值与特征向量

1. 已知 $\boldsymbol{A}$ 有 0 特征值, $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 且 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=2$, 则 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=$ __________.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-4&0\\4&-5&0\\a&2&-1\end{bmatrix}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值 λ 对应两个线性无关的特征向量, 则 $a=(\quad)$

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

3. 已知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量, $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=3$ 的线性无关的特征向量, 则矩阵 $\boldsymbol{P}$ 不可以是 ( )

A. $[\boldsymbol{\alpha}_1,-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$
B. $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3]$
C. $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2]$
D. $[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维非零列向量, 且 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha} = 3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 __________.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k\end{bmatrix}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同但不相似, 则常数 k 的取值范围为 (　)

A. $k>0$ 且 $k\neq 2$　　B. $k>0$ 且 $k\neq 3$　　C. $k<0$ 且 $k\neq -2$　　D. $k<0$ 且 $k\neq -3$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 3 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 3 行的 -1 倍加到第 2 行得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$, 其中 a 为常数, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 (　)

A. $1, 2, a$　　B. $1, 2, -2$　　C. $1, -1, 2$　　D. $1, a, -a$

7. 下列矩阵中, 不能相似对角化的是 (　)

A. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解, 则矩阵 $\boldsymbol{A}=$ __________.

9. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵, 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{Q}=$ __________.

10. 1 与 -1 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ -a & -1 & a\\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix}$ 的特征值, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, 则 $a=(\quad)$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

11. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -a\\ 2 & a & -2\\ -a & -1 & 1\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 可否相似对角化.

12. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\2&1&0&-1\\-1&0&1&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{C}$;

(2) 计算 $\boldsymbol{A}^{10}$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, 已知 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 3 , 且有二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值、特征向量, 并求 $\boldsymbol{A}^n$.

第 6 章 二次型

1. $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 的正惯性指数为 ( )

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

2. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2-ax_3)^2+(ax_3+x_1)^2$ 的秩为 2，则 $a=$ __________.

3. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$ 经正交变换可化为标准形 $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$, 则 $a=($　$)$

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1y_2+ay_3^2$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

5. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=[x_1+(a-2)x_2-2x_3]^2+(x_1+ax_2+x_3)^2+[x_1+ax_2+(a-2)x_3]^2$. 求:

(1) 方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解;

(2) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&0&6\\4&4&4\\0&8&9\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

(1) 用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将其化为标准形, 并求出 $\boldsymbol{Q}$;

(2) 求 $g(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{f(x_1,x_2,x_3)}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ 的最大值, 并求出一个最大值点, 其中 $x_1^2+x_2^2+x_3^2\neq 0$.

7. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 且其在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

(1) 求 a 的值和正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$;

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\c&b&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 求 b,c 的值, 在此情形下, 是否存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$, 若存在, 求 $\boldsymbol{P}$, 若不存在, 请说明理由.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & a\end{bmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -5 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ 合同, 求 a, 并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n>1)$ 阶方阵, $i, j=1,2,\cdots,n, i \neq j$, 互换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$, 再互换 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列与第 j 列得到矩阵 $\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$(　)

A. 等价, 相似且合同　B. 等价, 合同但不相似　C. 合同, 相似但不等价　D. 等价, 相似但不合同

10. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, 与 $\boldsymbol{A}$ 合同但不相似的矩阵为 (　)

A. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

11. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 且 $(a\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=2\sqrt{2}-3a$, a 为常数.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 正定, 求 a 的取值范围.

12. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$, 向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\a\end{bmatrix}$, 若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 1.

(1) 求常数 a 的值及非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解;

(2) 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$, 将二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 化为标准形, 并写出该标准形.

13. $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0$ 是 ( )

A. 柱面 B. 单叶双曲面 C. 双叶双曲面 D. 锥面

14. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+ax_3^2-2x_1x_3$, 且二次曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 是柱面.

(1) 求 a 的值;

(2) 用正交变换将二次型 f 化为标准形, 并求所用的正交变换;

(3) 求此柱面母线的方向向量.

概率基础篇

第 1 章　随机事件与概率

1. 对任意事件 A, B, 下列结论正确的是 (　)

A. $P(A)P(B) \geqslant P(A \cup B)P(AB)$

B. $P(A) + P(B) \leqslant 2P(AB)$

C. $P(A) + P(AB) \geqslant P(A \cup B)$

D. $P(A) + P(B) \leqslant P(A \cup B)P(AB)$

2. 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$. 下列命题中为假命题的是 (　)

A. 若 $P(A \mid B) > P(A)$, 则 $P(\overline{A} \mid \overline{B}) > P(\overline{A})$

B. 若 $P(A \mid B) = P(A)$, 则 $P(A \mid \overline{B}) = P(A)$

C. 若 $P(A \mid B) > P(A \mid \overline{B})$, 则 $P(A \mid B) > P(A)$

D. 若 $P(A \mid A \cup B) > P(\overline{A} \mid A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$

3. 设事件 A, B 满足 $P(A \mid B)=P(B \mid A)=\dfrac{1}{3}, P(A-B)=\dfrac{1}{6}$, 则 $P(\overline{A}\,\overline{B})=$ __________.

4. 设 A, B 为随机事件, $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 且 $P(A-B) = 0$, 则 (　)

A. $\overline{A} \supset \overline{B}$　　B. $P(\overline{A}) < P(\overline{B})$　　C. $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0$　　D. $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1$

5. 从数 $1, 2, 3, 4$ 中有放回地取两次, 每次取一个数, 得到的两个数为 X_1, X_2, 记 $X = \min\{X_1, X_2\}$, 则 $P\{X = 2\} =$ __________.

6. 设 X,Y 为随机变量, 且 $P\{X \geqslant 0, Y \geqslant 0\} = \dfrac{3}{7}, P\{X \geqslant 0\} = P\{Y \geqslant 0\} = \dfrac{4}{7}$, 求下列事件的概率:

(1) $A = \{\max\{X,Y\} \geqslant 0\}$;

(2) $B = \{\max\{X,Y\} \geqslant 0, \min\{X,Y\} < 0\}$.

7. 设口袋中有 10 个球, 其中 6 个红球, 4 个白球, 每次不放回地从中任取一个, 取两次, 若取出的两个球中有 1 个是白球, 则两个都是白球的概率为 (　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

8. 对于下列命题说法正确的是 (　)

(1) 若事件 A, B 相互独立, 且 B, C 相互独立, 则 A, C 相互独立

(2) 若事件 A, B 相互独立, 且 $C \subset A, D \subset B$, 则 C, D 相互独立

A. (1) 正确,(2) 不正确　　B. (2) 正确,(1) 不正确　　C. (1)(2) 都正确　　D. (1)(2) 都不正确

9. 设 $P[A \mid (A \cup BC)] = \frac{1}{2}$, $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, 其中 A, B 互不相容, B, C 相互独立, 则 $P(A) = ($　$)$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

10. 设 A, B, C 是 3 个随机事件, 其中 A 与 B 相互独立, A 与 C 互不相容, $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{4}$, $P(B \mid C) = \frac{1}{8}$, 则 $P(C \mid A \cup B) =$ __________.

第 2 章　一维随机变量及其分布

1. 设随机变量 $X \sim B\left(n, \frac{1}{3}\right), Y \sim B\left(2n, \frac{1}{3}\right)$, 若 $P\{X \geqslant 1\} = \frac{5}{9}$, 则 $P\{Y \geqslant 1\} = (\quad)$

A. $\frac{5}{27}$　　B. $\frac{16}{81}$　　C. $\frac{64}{81}$　　D. $\frac{65}{81}$

2. 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3, 且三种结果发生的概率均为 $\dfrac{1}{3}$. 将试验 E 独立重复做 2 次, X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 $X+Y$ 服从 (　)

A. $B\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$　B. $B\left(2, \dfrac{2}{3}\right)$　C. $B\left(4, \dfrac{1}{3}\right)$　D. $B\left(4, \dfrac{2}{3}\right)$

3. 设随机变量 X,Y 分别服从正态分布 $N(\mu,9),N(\mu,4)$, 记 $p_1=P\{X\leqslant\mu-3\},p_2=P\{Y\geqslant\mu+4\}$, 则 (　)

A. 对于任何实数 μ, 都有 $p_1=p_2$

B. 对于任何实数 μ, 都有 $p_1<p_2$

C. 对于任何实数 μ, 都有 $p_1>p_2$

D. 对于 μ 的个别值, 有 $p_1=p_2$

4. 设随机变量 X 服从正态分布, 其概率密度 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有驻点, 且 $f(1)=1$, 则 X 服从分布 (　)

A. $N(1,1)$　B. $N\left(1,\dfrac{1}{2\pi}\right)$　C. $N\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$　D. $N(0,1)$

5. 某系统由两个相互独立工作的元件串联而成, 只要有一个元件不工作, 系统就不工作, 设第 i 个元件的工作寿命为 X_i, 已知 $X_i \sim E(\lambda_i), \lambda_i > 0, i = 1, 2$.

(1) 求该系统的工作寿命 X 的概率密度 $f(x)$;

(2) 证明: 对任意的 $t, s > 0$, 有 $P\{X > t + s \mid X > t\} = P\{X > s\}$.

6. 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为 $F(t) = \begin{cases} 1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} &, t \geqslant 0 \\ 0 &, 其他 \end{cases}$, 其中 θ, m 为大于零的参数. 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s+t \mid T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$.

7. 设随机变量 X 的绝对值不大于 1, $P\{X=-1\}=\dfrac{1}{8}$, $P\{X=1\}=\dfrac{1}{4}$. 在事件 $\{-1<X<1\}$ 发生的条件下, X 在 $(-1,1)$ 内任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比, 求 X 的分布函数 $F(x)$.

8. 设随机变量 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布, 则 $Y=-\ln X$ 服从 (　)

A. 几何分布　B. 标准正态分布　C. t 分布　D. 指数分布

9. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}|x| & ,|x|\leqslant 1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$ 求 $Y=X^2+1$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

第 3 章　多维随机变量及其分布

1. 设随机变量 X 服从区间 $[-3,2]$ 上的均匀分布, 令 $Y=\begin{cases}-1 & ,X\leqslant -1\\ 1 & ,X>-1\end{cases}$, $Z=\begin{cases}-1 & ,X\leqslant 1\\ 1 & ,X>1\end{cases}$ 则 $P\{Y+Z=0\}=$ __________.

2. 设随机变量 X 在区间 (a, b) 上随机取值, 当观察到 $X = x(a < x < b)$ 时, 随机变量 Y 在区间 (x, b) 上随机取值, 求:

(1) Y 的概率密度;

(2) $P\{X + Y < a + b\}$.

3. 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 均服从二项分布 $B\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, 则 $P\{X \geqslant Y\} =$ ________.

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B\left(1, \dfrac{1}{2}\right), Y \sim N(0,1)$, 则 $P\{XY \leqslant 0\} = (\quad)$

A. 0　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从二项分布 $B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, Y 服从指数分布 $E(1)$, 则 $P\{X+Y\geqslant 1\}=(\quad)$

A. $1+e^{-1}$　　B. $1-e^{-1}$　　C. $\dfrac{1}{2}(1+e^{-1})$　　D. $\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从正态分布 $N\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. 记随机变量 $Z=|X-Y|$ 的概率密度为 $f(z)$, 则 (　)

A. $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},-\infty<z<+\infty$

B. $f(z)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},-\infty<z<+\infty$

C. $f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} & ,z>0\\ 0 & ,z\leqslant 0\end{cases}$

D. $f(z)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} & ,z>0\\ 0 & ,z\leqslant 0\end{cases}$

7. 设二维正态随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 已知条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=Ae^{-\frac{2}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}$ 和 $f_{Y|X}(y|x)=Be^{-\frac{2}{3}\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}$. 求:

(1) 常数 A 和 B;

(2) 边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;

(3) $f(x,y)$.

8. 已知二维随机变量 (X,Y) 在以点 $(0,0),(1,-1),(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布.

(1) 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ 及条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$, 并判断 X 与 Y 是否相互独立;

(2) 计算概率 $P\left\{X > \dfrac{1}{2} \mid Y > 0\right\}, P\left\{X > \dfrac{1}{2} \mid Y = \dfrac{1}{4}\right\}$.

9. 已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+y)} & ,0<x<y\\ 0 & ,其他\end{cases}$，求 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$.

10. 设二维随机变量 (X,Y) 在矩形区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布, 求 $Z=XY$ 的概率密度.

11. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从二项分布 $B\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$, Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}4y^3 & ,0\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$, 记 $Z=X+Y$, 求:

(1) $P\left\{Z\leqslant\dfrac{5}{2}\mid X>1\right\}$;

(2) Z 的概率密度.

12. 设随机变量 X,Y 相互独立, 且 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1 & ,0<x<1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$, Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{ay} & ,y>0\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $Z=2X+aY$, 求 Z 的概率密度.

13. 设随机变量 $X \sim B\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ 和随机变量 $Y \sim N(0,1)$, 且 X 与 Y 相互独立. 令 $Z = (X-1)Y$, 记 (Y, Z) 的分布函数为 $F(y,z)$. 求:

(1) Z 的分布函数 $F_Z(z)$;

(2) $F(1,1)$ 的值, 已知 $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = 0.8413$.

第 4 章　随机变量的数字特征

1. 将 2 个红球和 1 个白球随机放入 3 个盒子中, 每个盒子可放任意多个球, 记 X 为没有红球的盒子个数, 则 $E(X) = (\quad)$

A. $\dfrac{17}{9}$　　B. $\dfrac{4}{9}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

2. 设随机变量 $X \sim E(1)$, 记 $Y = \max\{X, 1\}$, 则 $E(Y) = (\quad)$

A. 1　　B. $1 - e^{-1}$　　C. $1 + e^{-1}$　　D. e^{-1}

3. 设 X, Y 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$ 的随机变量, 则随机变量 $|X-Y|$ 的数学期望 $E(|X-Y|) = (\quad)$

A. $\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$　　B. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$　　C. $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$　　D. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

4. 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda = 2$ 的泊松分布, 则 $P\{X > D(X)\} =$ __________.

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x & ,0<x<1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$，$F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P\{F(X)>E(X)\}=$ __________.

6. 某人在超市里买了 10 节甲厂生产的电池, 又买了 5 节乙厂生产的电池. 这两种电池的寿命 (以小时计) 分别服从参数为 $\dfrac{1}{20}$ 和 $\dfrac{1}{40}$ 的指数分布. 他任取一节电池装在相机里. 求:

(1) 此电池寿命 X 的概率密度;

(2) $E(X)$;

(3) 若用了 40 小时电池仍有电, 还可以再用 20 小时以上的概率.

7. 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的指数分布, 则 X 落在数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 之间的概率为 __________.

8. 在 $(0,1)$ 线段上随机投掷两点, 该两点的距离为 X, 求:

(1) X 的分布函数 $F(x)$ 和概率密度 $f(x)$;

(2) X 的数学期望 $E(X)$.

9. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = Ae^{x(B-x)}(-\infty < x < +\infty), E(X) = 2D(X)$, 求:

(1) 常数 A, B 的值;

(2) $E(X^2 + e^X)$ 的值;

(3) $Y = |\sqrt{2}(X-1)|$ 的分布函数 $F(y)$.

10. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(0,2), Y \sim N(0,3)$, 则 $D(X^2+Y^2) =$ __________.

11. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 已知 X 服从二项分布 $B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, Y 服从泊松分布 $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 记 $Z=X+Y$. 求:

(1) Z 的分布律;

(2) $E(Z), D(Z)$.

12. 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3, 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$. 将试验 E 独立重复做 2 次, X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为 ( )

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

13. 设总体 X 的概率分布为 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 从总体中抽取 n 个简单随机样本, N_1 表示 n 个样本中取到 -1 的个数, N_2 表示 n 个样本中取到 0 的个数, N_3 表示 n 个样本中取到 1 的个数, 则 N_1 与 N_2 的相关系数为 __________.

14. 设随机变量 X,Y 均服从参数为 λ 的泊松分布, 且 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$, $U=2X+Y$, 则 U 与 X 的相关系数为 __________.

15. 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立且均服从标准正态分布, 记 $X = X_1 - X_2, Y = X_2 - X_3$, 求:

(1) (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$, 及它的两个边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(2) X 和 Y 的相关系数 ρ.

16. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且服从相同的分布, $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p+q = 1, 0 < p < 1$, 又 $Z = \begin{cases} 1 & , X+Y\text{为奇数} \\ 0 & , X+Y\text{为偶数} \end{cases}$.

(1) 求 XZ 的分布律;

(2) p 取何值时, X 和 Z 相关? 说明理由.

17. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的分布列为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p & p & 1-2p \end{pmatrix}$, Y 服从参数为 1 的指数分布, 令 $Z=XY$, 若 Y 与 Z 既不相关, 也不独立, 求:

(1) $Z(\neq 0)$ 的概率密度;

(2) p 的值.

第 5 章　大数定律与中心极限定理

1. 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则 $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于 __________.

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, X 服从 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布, 记 $Y_k = \cos(kX_k), k = 1, 2, \cdots, n$, 则 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k^2$ 依概率收敛于 ________.

3. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立且均服从 $U[1,4]$, $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数, 则

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i - 5n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = (\quad)$$

A. $\Phi(x)$　　B. $\Phi(\sqrt{3}x)$　　C. $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$　　D. $\Phi\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)$

4. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ 相互独立, 且均服从二项分布 $B\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, 若根据中心极限定理, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-X_{2i-1}) \leqslant \sqrt{n}x\right\} = \Phi(x)$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $a =$ __________.

5. 某保险公司接受了 10000 辆汽车的保险, 每辆汽车每年的保费为 1. 2 万元. 若汽车丢失, 则车主获得赔偿 100 万元. 设汽车的丢失率为 0. 006 , 对于此项业务, 利用中心极限定理, 则保险公司一年所获利润不少于 6000 万元的概率为 __________.

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n > 2)$ 是来自总体 $X \sim N(0,1)$ 的简单随机样本, 由切比雪夫不等式得 $P\left\{0 < \sum_{i=1}^{n} X_i^2 < 2n\right\}$ 不小于 __________.

第 6 章　数理统计

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自正态总体 $X \sim N(0, \sigma^2)(\sigma > 0)$ 的简单随机样本, $Y^2 = \dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=2}^{10} X_i^2$, 则 (　)

A. $X_1^2 \sim \chi^2(1)$　　B. $Y^2 \sim \chi^2(9)$　　C. $\dfrac{X_1}{|Y|} \sim t(9)$　　D. $\dfrac{X_1^2}{Y^2} \sim F(9, 1)$

2. 设总体 X 和 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 分别是来自总体 X 和 Y 且容量都为 n 的两个简单随机样本, 样本均值、样本方差分别为 $\overline{X},S_X^2$ 和 $\overline{Y},S_Y^2$, 则 (　)

A. $\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,\sigma^2)$　B. $S_X^2+S_Y^2\sim\chi^2(2n-2)$　C. $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}}\sim t(2n-2)$　D. $\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(n-1,n-1)$

3. 设 n 为正整数, 随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \dfrac{2}{5}$, 则 $P\left\{Y \leqslant c^2\right\} = (\quad)$

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 为来自标准正态总体 X 的简单随机样本, 记 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, Y = \overline{X} - S$, 则 $E(Y^2) = (\quad)$

A. $1 - \dfrac{1}{n}$　　B. $1 + \dfrac{1}{n}$　　C. $1 - \dfrac{1}{n-1}$　　D. $1 + \dfrac{1}{n-1}$

5. 设总体 $X \sim U[\theta, \theta+1], X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 求:

(1) 参数 θ 的矩估计量;

(2) 参数 θ 的最大似然估计量.

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本, X 的概率密度为 $f(x) = \dfrac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}, -\infty < x < +\infty, \lambda > 0$. 求:

(1) λ 的矩估计量;

(2) λ 的最大似然估计量.

7. 设某个试验有三种可能结果, 其发生的概率分别为 $p_1 = \lambda^2, p_2 = (1-\lambda)^2, p_3 = 2\lambda(1-\lambda)$, 其中参数 λ 未知, $0 < \lambda < 1$. 现做了 n 次独立重复试验, 观测到三种结果发生的次数分别为 $n_1, n_2, n_3 (n_1 + n_2 + n_3 = n)$, 则 λ 的最大似然估计值为 ________.

8. 设 X_1, X_2 为来自总体 $X \sim U[0, 2\theta]$ 的简单随机样本, Y_1, Y_2, Y_3 为来自总体 $Y \sim U[0, 4\theta]$ 的简单随机样本, 且两样本相互独立, 其中 $\theta(\theta > 0)$ 是未知参数. 利用样本 X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3, 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$, 并求 $D(\hat{\theta})$.

9. 设总体 X 的数学期望 $E(X)=0$, 方差 $D(X)=\sigma^2$, 而 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i, S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, 则下列属于 σ^2 的无偏估计量的是 (　)

A. $n\overline{X}^2+S^2$　B. $\dfrac{1}{2}(n\overline{X}^2+S^2)$　C. $\dfrac{1}{3}(n\overline{X}^2+S^2)$　D. $\dfrac{1}{4}(n\overline{X}^2+S^2)$

10. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^3	$3\theta^2(1-\theta)$	$3\theta(1-\theta)^2$	$(1-\theta)^3$

其中 $0<\theta<1$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 求 θ 的最大似然估计量, 并判定它是否为 θ 的无偏估计量, 说明理由.

11. 设连续型总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases} 0 & ,x\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2^\theta}(x-1)^\theta & ,1<x<3 \\ 1 & ,x\geqslant 3 \end{cases}$,其中 θ 为未知参数且 $\theta>0, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 求 θ 的矩估计量与最大似然估计量.

12. 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知, μ 未知. 现从中随机抽取 n 个零件, 测得样本均值为 $\overline{x}$, 则当置信度为 0. 90 时, μ 大于 μ_0 的接受条件为 (　)

A. $\overline{x} > \mu_0 - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.10}$　B. $\overline{x} > \mu_0 + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.05}$　C. $\overline{x} > \mu_0 + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.10}$　D. $\overline{x} > \mu_0 - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.05}$

13. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{x^2} & ,x\geqslant\theta\\ 0 & ,x<\theta\end{cases}$, 其中 $\theta>0$ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$, 并求常数 a, 使得 $a\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计;

(2) 对于原假设 $H_0:\theta=2$ 与备择假设 $H_1:\theta>2$, 若 H_0 的拒绝域为 $V=\{X_{(1)}\geqslant 3\}$, 求犯第一类错误的概率 α.

14. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值, $E(X) = \theta$. 检验 $H_0 : \theta = 0; H_1 : \theta \neq 0$, 且拒绝域 $W_1 = \{|\overline{X}| > 1\}$ 和 $W_2 = \{|\overline{X}| > 2\}$ 分别对应显著性水平 α_1 和 α_2, 则 (　)

A. $\alpha_1 = \alpha_2$

B. $\alpha_1 > \alpha_2$

C. $\alpha_1 < \alpha_2$

D. α_1 和 α_2 的大小关系不确定

15. 设 X_1, X_2 是来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 并设原假设 $H_0: \mu = 2$, 备择假设 $H_1: \mu = 4$, 若拒绝域为 $W = \{\overline{X} > 3\}, \overline{X} = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} X_i$, 记 α, β 分别为犯第一类错误和第二类错误的概率, 则 (　)

A. $\alpha = \beta = 1 - \Phi(\sqrt{2})$　B. $\alpha = 1-\Phi(\sqrt{2}), \beta = \Phi(\sqrt{2})$　C. $\alpha = \Phi(\sqrt{2}), \beta = 1-\Phi(\sqrt{2})$　D. $\alpha = \beta = \Phi(\sqrt{2})$

16. 设 X_1 是来自正态总体 $X \sim N(0, \sigma^2)(\sigma > 0)$ 的一个简单随机样本, x_1 为其样本值. 则 σ^2 的一个无偏估计量为 ________.

高数强化篇

第 1 章 函数极限与连续

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\csc x} =$ ____________.

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3}$. ________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\ln(e+x)}{\sin x}=$ __________.

4. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$. ________.

5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(e+x)-e^x}{\sqrt{1-\cos x}} =$ ________.

6. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$. __________.

7. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\tan\dfrac{\pi}{2}x =$ __________.

8. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{e}{x}} =$ __________.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\dfrac{(1+x)^3}{x}}-x\right]=$ ____________.

10. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\tan kx}}=e$, 则 $k=(\quad)$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_{\sin x}^{x}\sqrt{3+t^2}\mathrm{d}t}{x\left(e^{x^2}-1\right)}=$ ________.

12. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{x}=(\quad)$

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

13. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} =$ ___________.

14. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^{x+1}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}\right]$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)=$ __________.

16. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1+\int_0^x (1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right]$.

17. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内可导, 且 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2\displaystyle\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t}$.

18. 设存在 $0 < \theta < 1$, 使得 $\int_0^x e^t \mathrm{d}t = xe^{\theta x}, x > 0$, 则 $\lim\limits_{x \to 0^+} \theta =$ __________.

19. 已知 $f(x)=\begin{cases}1 & ,x\text{是整数}\\ -1 & ,x\text{不是整数}\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^{\frac{1}{x}} f(x)e^{-t^2}\mathrm{d}t=(\quad)$

A. e^{-1}　　B. e　　C. 0　　D. 1

20. 设当 $x \to 0$ 时, $f(x) = \int_0^x \sin(tx)^2 \mathrm{d}t$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则正整数 $n =$ ________.

21. 设 $\alpha(x)$ 是 $x \to 0$ 时的非零无穷小量, 且 $\alpha(2x) - \alpha(x) = o(x)$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{x}$ 的值是 (　)

A. 0　　B. 1　　C. ∞　　D. 0 或 ∞

22. 若二次多项式 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内与 $g(x)=\sec x$ 的差为 x^2 的高阶无穷小, 则 $f(x)=$ ________.

23. 当 $n \to \infty$ 时, $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ 与 $\dfrac{c}{n^k}$ 为等价无穷小, 则 (　)

A. $c = \dfrac{e}{3}, k = 2$　　B. $c = \dfrac{e}{2}, k = 2$　　C. $c = \dfrac{e}{3}, k = 1$　　D. $c = \dfrac{e}{2}, k = 1$

24. 当 $x \to 0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是非零且不相等的等价无穷小量, 以下 4 个结论, 所有正确结论的序号是 ( )

(1)$\alpha(x)+\beta(x)=2\alpha(x)$　　(2)$\alpha(x)+\beta(x)=2\beta(x)$

(3)$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$　　(4)$\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x))$

A. (1)(3)　　B. (3)(4)　　C. (1)(2)(3)(4)　　D. (2)(4)

25. 当 $x \to 0$ 时, $(3+2\tan x)^x - 3^x$ 是 $3\sin^2 x + x^3\cos\dfrac{1}{x}$ 的 (　)

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小　　C. 等价无穷小　　D. 同阶但非等价无穷小

26. 当 $x \to 0$ 时, 以下无穷小中, 阶数最高的是 ( )

A. $\int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{2}{t}} \mathrm{d}t$ B. $\int_0^{\ln(1+x^2)} \sqrt{\cos^3 t} \mathrm{d}t$ C. $\int_0^{x} \left(e^{\cos t} - e^{\sin t}\right) \mathrm{d}t$ D. $\int_0^{x-\tan x} \arctan t \mathrm{d}t$

27. 当 $x \to 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$ 与 $g(x) = 1 - \cos x$ 是等价无穷小, 则 $ab =$ __________.

28. 当 $x \to 0$ 时, $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} - \arctan x$ 与 $g(x) = ax^b$ 是等价无穷小, 则 $ab =$ __________.

29. 当 $x \to 0$ 时, $\ln(1+x) - \tan x$ 与 ax^b 是等价无穷小, 则 $(a, b) = (\quad)$

A. $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$　B. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$　C. $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$　D. $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$

30. 当 $x \to 0$ 时, $x - \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \sim ax^b$, 则 a, b 的值分别是 (　)

A. $\frac{1}{6}, 3$　　B. $\frac{1}{6}, 2$　　C. $\frac{1}{3}, 2$　　D. $\frac{1}{3}, 3$

31. 当 $x \to 0$ 时, $\arcsin x - x$ 与 ax^b 是等价无穷小, 则 $(a, b) = (\quad)$

A. $\left(-\frac{1}{6}, 2\right)$　B. $\left(\frac{1}{6}, 2\right)$　C. $\left(-\frac{1}{6}, 3\right)$　D. $\left(\frac{1}{6}, 3\right)$

32. 设函数 $f(x)=x-[x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

33. 设函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $a+bx+cx^2$, 则 (　)

A. $a=1, b=1, c=1$　　B. $a=1, b=1, c=\dfrac{1}{2}$　　C. $a=0, b=-1, c=\dfrac{1}{2}$　　D. $a=0, b=-1, c=1$

34. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在, 求 a 的值.

35. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_0^x t^2e^{x^2-t^2}\mathrm{d}t+ae^{x^2}}{x^b}=-\dfrac{1}{2}$, 求 a,b 的值.

36. 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{e^{x-1}-1}=1$, 则 (　)

A. $f(1)=0$　　B. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$　　C. $f'(1)=0$　　D. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

37. 设 $g(x)=e^{\sqrt{x^2-2x+1}}$, 则 (　)

A. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ 不存在

B. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ 存在, 但在 $x=1$ 处 $g(x)$ 不连续

C. 在 $x=1$ 处 $g(x)$ 导数存在

D. 在 $x=1$ 处 $g(x)$ 连续, 但不可导

38. 若 $f'(x)=1+x^2+x^3+o(x^3)(x\to 0)$, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{f(x)-f(0)} &, x\neq 0\\ a &, x=0\end{cases}$, 且 $g(x)$ 连续.

(1) 求 a 的值;

(2) 当 $x\to 0$ 时, 计算 $g(x)$ 到 3 阶的带佩亚诺余项的泰勒公式.

39. 要使函数 $f(x)=\dfrac{1}{x\arctan x}-\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处连续, 则应补充定义 $f(0)=$ ________.

40. 函数 $f(x)=\dfrac{x|x-1|}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 无穷多个

41. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2\ln|x|}{(x^2-1)\sin x}$ 的可去间断点的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

42. 函数 $f(x)=\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x-1}}-1\right)|x|}{(x+1)\ln|x-1|}$ 的第一类间断点的个数为 (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

43. 函数 $f(x)=\dfrac{(x^2-x)|x+1|}{e^{\frac{1}{x}}\displaystyle\int_1^x t|\sin t|\mathrm{d}t}$ 的第一类间断点的个数为 (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

44. 已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t+ax}{x-b\sin x}$ 的第一类间断点, 则 (a,b) 取值不可以是 ( )

A. $(1,1)$ B. $(-1,1)$ C. $(1,-1)$ D. $(-1,-1)$

第 2 章　数列极限

1. 已知数列 $\{x_n\}$, 其中 $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, 则 (　)

A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\cos x_n}$ 存在时, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在

B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\cos x_n}$ 存在时, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\cos x_n}$ 存在时, $\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n}$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在

D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\cos x_n}$ 存在时, $\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n}$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n+1} \sin \dfrac{1}{n} =$ ____________.

3. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \arctan x_n$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_n^2} - \dfrac{1}{x_{n+1}^2}\right)$. ________.

4. 设常数 $a>0, a \neq 1$, 则 $\lim\limits_{n \to \infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n+1}}-a^{\frac{1}{n}}\right)=$ __________.

5. 设 $0 \leqslant x_1 \leqslant \sqrt{c}, x_{n+1} = \dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}, n \in \mathbf{Z}^+, c > 1$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其值.

6. (1) 当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时, 证明 $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$;

(2) 设数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \sin x_n$, $y_{n+1} = y_n^2$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, $x_1 = y_1 = \dfrac{1}{2}$, 当 $n \to \infty$ 时, 证明 y_n 是比 x_n 高阶的无穷小量.

7. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_n < \dfrac{\pi}{2}, \cos x_{n+1} - x_{n+1} = \cos x_n, n = 1, 2, \cdots$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求其值;

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n^2}$.

8. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \dfrac{\pi}{4}, x_{n+1} + \tan x_n = 2x_n, n = 1, 2, \cdots$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求其值;

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_n^2} - \dfrac{1}{x_n x_{n+1}}\right)$.

9. 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x, b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\mathrm{d}t$, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)a_n}{b_n}\right]^n = (\quad)$

A. 0　　B. e　　C. e^{-1}　　D. $+\infty$

10. 设 $x_1 < 0, x_{n+1} = e^{x_n} - 1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_{n+1}}\right)$.

11. 已知 $a_n = \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t, n = 1, 2, \cdots$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 a_n)^n$.

12. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}, n = 2, 3, \cdots$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\ln(1+e^{2n})}$.

13. 设 $a_n = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}x, n = 1, 2, \cdots$.

(1) 证明 $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$；

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n^2$.

14. 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_0=\dfrac{1}{2}, a_{n+1}=a_n^2, n=0,1,2,\cdots; b_n=\tan b_{n+1}, 0<-b_n<\dfrac{\pi}{4}, n=0,1,2,\cdots$ 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

15. 已知 $f(x)$ 可导, 且 $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{e}$, 方程 $f(x)=x$ 有唯一解 $x=0$, 又 $x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\cdots$ 证明: 当 $n\to\infty$ 时, x_n 是 $e^{-\frac{n}{2}}$ 的高阶无穷小.

第 3 章　一元函数微分学的概念

1. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 (　)

A. $f(x)=|x|\tan|x|$　B. $f(x)=|x|\tan\sqrt{|x|}$　C. $f(x)=\sqrt{\cos|x|}$　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处三阶可导, 则下列命题中所有不正确命题的序号为 (　)

(1)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=2$　　(2)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=2$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$

(3)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=3$　　(4)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=3$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$

A. (1)(2)　　B. (1)(3)　　C. (2)(4)　　D. (3)(4)

3. 设 $f(x)>0, f'(x)>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}=(\quad)$

A. 0

B. ∞

C. $\ln f'(a)$

D. $\dfrac{f'(a)}{f(a)}$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x(1-|x|) & ,x\text{为有理数} \\ x(1+|x|) & ,x\text{为无理数} \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　）

A. 不连续　　B. 连续但不可导　　C. 可导且 $f'(0)=0$　　D. 可导且 $f'(0)=1$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^n\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)} &, x\neq 0 \\ 0 &, x=0 \end{cases}$, n 是整数 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则必须且只需满足 ( )

A. $n<-2$ B. $n<-1$ C. $n>0$ D. $n>1$

6. 已知 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续可导函数, $g(x)=f(x|x|)$.

(1) 求证: $g(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数;

(2) 计算 $g'(x)$.

7. 设 $g(0)=g'(0)=0, f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$，求 $f'(0)$.

8. 确定 a, b 的值, 使函数 $f(x)=\begin{cases} \sin ax & ,x \leqslant 0 \\ \ln(1+x)+b & ,x>0 \end{cases}$, 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内可导且 $f(a)=0$. 若其绝对值函数 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处也可导, 求 $f'(a)$ 的值, 并说明理由.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x} & ,x\neq 0\\ a & ,x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 二阶连续可导, $g(0)=1, g'(0)=-1$.

(1) a 为何值时 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续?

(2) 当 $f(x)$ 为连续函数时, $f(x)$ 是否可导? 若可导, 求 $f'(x)$.

11. 设 $f(x)$ 有二阶连续导函数, 且 $f(0)=0$, 令 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & ,x\neq 0 \\ f'(0) & ,x=0 \end{cases}$.

(1) 求 $g'(x)$;

(2) 讨论 $g'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

12. 设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x}} &, x>0 \\ \dfrac{\pi}{2}(e^{\sin x}-1) &, x\leqslant 0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性和可导性; 若可导, 讨论其导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

13. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分必要条件是 (　)

A. $f(a)=0, f'(a)=0$　　B. $f(a)=0, f'(a)\neq 0$　　C. $f(a)\neq 0, f'(a)=0$　　D. $f(a)\neq 0, f'(a)\neq 0$

14. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{x}-1 & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 (　)

A. 连续, 但 $f'(0)$ 不存在

B. $f'(0)$ 存在, 但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

C. $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 但 $f''(0)$ 不存在

D. $f''(0)$ 存在

15. 已知 $(1,0)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上, 且曲线在该点与 $y=\ln(2x^2-1)$ 有公共的切线, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{n+1}{n}\right)-f\left(\dfrac{n+2}{n}\right)\right]$ $=$ ________.

16. 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)\neq 0$, 计算 $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^{x}$.

17. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义, 在 $x=a$ 的某去心邻域内可导, 下述论断正确的是 (　)

A. 若 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=A$, 则 $f'(a)=A$

B. 若 $f'(a)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=A$

C. 若 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\infty$, 则 $f'(a)$ 不存在

D. 若 $f'(a)$ 不存在, 则 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\infty$

18. 设 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{2x^2-\ln|x|}$, 则 $f'(-1)=$ __________.

19. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos f(x)-\cos b}{x-a}=$ __________.

20. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=2$, 求 $f'(1)$.

21. 设 $f(x)$ 是非负连续函数, 且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^2(x)-a}{x^2-a^2}=1(a>0)$, 求 $f'(a)$.

22. 已知 $a_n = 1 - e^{\frac{1}{n}} - \sin\dfrac{1}{n^2}$, 可导函数 $y = f(x) - \sin x$ 在 $x = 0$ 处取得极值. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right) - f(a_n)\right]$.

第 4 章　一元函数微分学的计算

1. 设 $f(x)$ 为三次多项式, 且 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^2$ 整除, $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^2$ 整除, 则 $f(x)=$ ________.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有连续导数, 且 $f(0)=1, f'(x)=\frac{1}{2}f[f(x)-1]$, 求 $f''(0)$.

3. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^3+xy+x^2-2x+1=0$ 确定并且满足 $y(1)=0$ 的函数, 则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3}{\int_1^x y(t)\mathrm{d}t}=$ __________.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

5. 设 $y = 2x + \sin x$, 求其反函数 $x = x(y)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}$.

6. 若 $y=\sin\left(e^{-\sqrt{x}}\right)$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$ ______.

7. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 确定, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ __________.

8. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{d}t$ 确定, 则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$ __________.

9. 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t^2-2t+1 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ __________.

10. 设 $x=x(y)$ 由方程 $y=\int_{1}^{x-y}\cos^{2}\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 确定, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[nx\left(\frac{1}{n}\right)-n\right]=$ ________.

11. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x}{1-\cos x}=2$, 则 $f''(0)=$ __________.

12. 设 $f'(\ln x) = x\ln x$, 则 $f^{(n)}(x) =$ ____________.

13. 设函数 $f(x)$ 连续且满足 $x^2 f'(x) = f^2(x), f(1) = \dfrac{1}{3}$, 则 $f^{(n)}(x) =$ __________.

14. 设 $f(x) = \arctan \dfrac{1+x}{1-x}$, 整数 $n \geqslant 0$, 则 $f^{(2n+1)}(0) =$ __________.

15. 已知函数 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$, 则 $f^{(5)}(\pi)=$ __________.

16. 设 $f(x)=|x|\sin^2 x$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的阶数 n 的最大值为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

17. 设 $f_n(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}, n = 1, 2, \cdots, x \neq 0$, 则 $f_n^{(n)}(x) = (\quad)$

A. $\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}$ B. $\frac{(-1)^n}{x^n}e^{\frac{1}{x}}$ C. $\frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$ D. $\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$

18. 求函数 $f(x)=\sin(x^2+2\sqrt{\pi}x)$ 在 $x_0=-\sqrt{\pi}$ 处的带有佩亚诺余项的泰勒公式, 并求 $f^{(n)}(-\sqrt{\pi})$.

19. 设 $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - x - 2}$, 求 $y^{(n)}(x)$.

20. 设可导函数 $f(x)$ 是 $e^{-f(x)}$ 的一个原函数, 且 $f(0)=0$, 则 $f^{(10)}(0)=$ __________.

第 5 章 一元函数微分学的应用 (一)—几何应用

1. 设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(1+x)+2f(1-x)=\int_0^x(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t+\sin^2 x$, 则曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 ( )

A. $y=-ex+e$ B. $y=ex-e$ C. $y=ex+e$ D. $y=-ex-e$

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=2$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 __________.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且在点 $x=a$ 处取最小值, 在点 $x=b$ 处取最大值, 则 ( )

A. $f'_+(a) \leqslant 0, f'_-(b) \leqslant 0$　B. $f'_+(a) \leqslant 0, f'_-(b) \geqslant 0$　C. $f'_+(a) \geqslant 0, f'_-(b) \leqslant 0$　D. $f'_+(a) \geqslant 0, f'_-(b) \geqslant 0$

4. 设 $f(x)$ 是连续的奇函数, 若 $x=-1$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的唯一零点, 且 $f'(-1)=1$, 则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的严格单调增区间为 (　)

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-\infty,-1),(0,1)$　　D. $(-1,0),(1,+\infty)$

5. 已知 $x^2 - 2ax + 1 - e^x \geqslant 0(x < 0)$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 __________.

6. 求常数 a 的取值范围, 使不等式 $\ln x \leqslant a(x-1)$ 对于任何 $x>0$ 都成立.

7. 设函数 $f(x)=\int_0^1 |t(t-x)|\mathrm{d}t(0<x<1)$, 则 $f(x)$ 的单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间分别为 (　)

A. 单调增区间 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$; 单调减区间 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 在 $(0,1)$ 内曲线为凹

B. 单调减区间 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$; 单调增区间 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 在 $(0,1)$ 内曲线为凹

C. 单调增区间 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$; 单调减区间 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 在 $(0,1)$ 内曲线为凸

D. 单调减区间 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$; 单调增区间 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 在 $(0,1)$ 内曲线为凸

8. 求函数 $f(x) = \int_1^x (x^2 - t^2)\ln(1 + t^2)\mathrm{d}t$ 的极值.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义, 则以下结论正确的是 (　)

A. 若 $f(0)=0, f'(0)=0$, 则 $x=0$ 必不是极值点

B. 若 $f'(0)=0, f''(0)=0$, 则 $x=0$ 必是极值点

C. 若 $f(0)=0, f'(0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调递增

D. 若 $f'(0)=0, f''(0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调递减

10. 设 $f(x)$ 连续, 当 $x \to 0$ 时, $e^{f(x)}-1$ 与 $x-\ln(1+x)$ 是等价无穷小量, 以下结论正确结论的个数为 (　)

(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值

(2) $(0, f(0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点

(3) $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二次泰勒多项式为 $\frac{1}{2}x^2$

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11. 设函数 $f(x)$ 具有连续导数, 且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)+f(x)}{\sqrt{1+x}-1} = -1$, 则 ( )

A. 当 $f(0)=0$ 时, $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. 当 $f(0)=0$ 时, $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. 当 $f(0)>0$ 时, $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

D. 当 $f(0)<0$ 时, $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

12. 曲线 $y = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$ 的渐近线条数为 (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

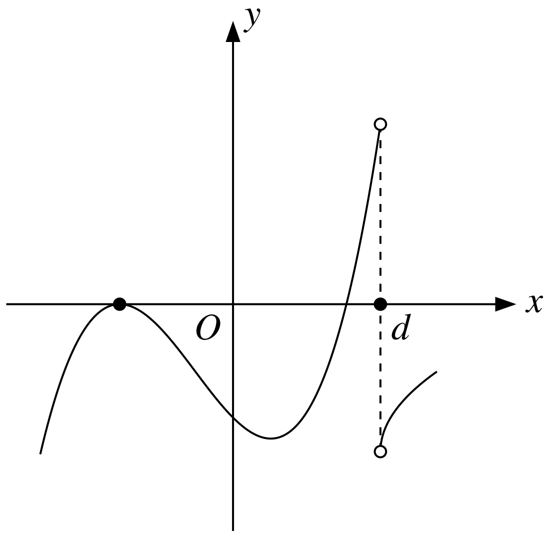
13. 设 $y=f(x)$ 为连续函数, 除点 $x=d$ 外, $f(x)$ 二阶可导, $y=f'(x)$ 的图形如图所示. 则 $y=f(x)$(　)

A. 有 1 个拐点, 1 个极小值点, 1 个极大值点

B. 有 2 个拐点, 1 个极小值点, 1 个极大值点

C. 有 1 个拐点, 1 个极小值点, 2 个极大值点

D. 有 1 个拐点, 2 个极小值点, 1 个极大值点



14. 曲线 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ 的渐近线条数为 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

15. 曲线 $f(x)=\dfrac{x^2\arctan x}{x-1}$ 的渐近线条数为 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

16. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^{-y}-y+\int_0^x\left(e^{-t^2}+1\right)\mathrm{d}t=1$ 所确定的隐函数.

(1) 证明 $y(x)$ 是单调增加函数;

(2) 当 $x\to+\infty$ 时, 曲线 $y'(x)$ 是否有水平渐近线, 若有, 求出其渐近线方程, 若没有, 说明理由.

17. 曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 沿 $x\to+\infty$ 方向的斜渐近线方程为 __________.

18. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 - y^3 - 3x - 3y + 2 = 0$ 确定, 求 $y = y(x)$ 的极值.

19. 设函数 $f(x)$ 满足等式 $f''(x)-[f'(x)]^2=x$, 且 $f'(0)=0$, 则 ( )

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. 在点 $(0,f(0))$ 附近曲线 $y=f(x)$ 是凹的

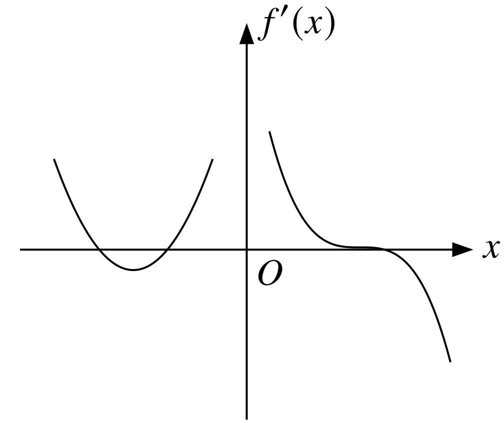
20. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 4xy + x^2 = 1$ 确定.

(1) $y(x)$ 在 $x = 0$ 处是否取得极值? 说明理由;

(2) 证明: $y(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调递减函数.

21. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其一阶导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示, 并设在 $f'(x)$ 存在处 $f''(x)$ 也存在, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

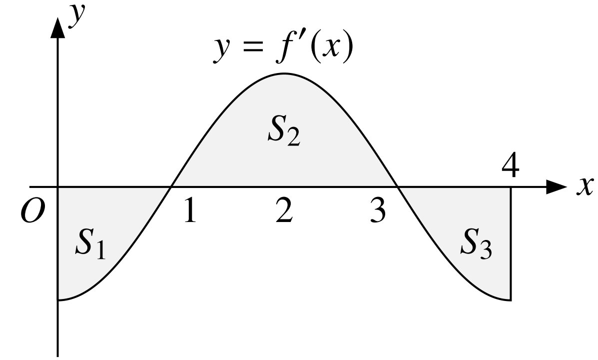


22. 设 $y=y(x)$ 满足 $y'+y=e^{-x}\cos x$, 且 $y(0)=0$, 求 $y(x^2)$ 的值域.

23. 函数 $f(x)=\int_0^x e^{-t}\cos t\mathrm{d}t$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值为 __________.

24. 设 $f'(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上连续, 曲线 $y=f'(x)$ 与直线 $x=0, x=4, y=0$ 围成如图所示的三个区域, 其面积分别为 $S_1=3, S_2=4, S_3=2$, 且 $f(0)=1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的最大值与最小值分别为 ( )

A. 2, −3 B. 4, −3 C. 2, −2 D. 4, −2



25. 设 $y=\tan^n x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线在 x 轴上的截距为 x_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y(x_n)=$ __________.

26. 曲线 $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 的拐点个数为 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

27. 曲线 $y = e^x + x^5$ 的极值点与拐点个数分别为 (　)

A. 0, 1　　B. 1, 1　　C. 0, 3　　D. 1, 5

28. 曲线 $y = x\ln\left(2+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为 (　)

A. $y = x\ln 2 + 1$　　B. $y = x\ln 2 + \dfrac{1}{2}$　　C. $y = x\ln 2 - 1$　　D. $y = x\ln 2 - \dfrac{1}{2}$

29. 曲线 $\sin x + y + e^{2xy} = 0$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程为 __________.

30. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+xy+y^3=3$ 确定, 判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

31. 已知曲线 $y = x^2 + a\ln x(a > 0)$ 在其拐点处的切线方程是 $y = 4x - 3$, 则 $a =$ ________.

32. 函数 $y = x\cos x - \sin x \left(-\frac{\pi}{2} < x < 2\pi\right)$ 的极值点是 (　)

A. $x = 0$　　B. $x = \pi$　　C. $x = \frac{\pi}{2}$　　D. $x = \frac{3}{2}\pi$

33. 曲线 $y=\ln^2 x-\dfrac{4x}{e^2}$ 的拐点为 __________.

34. 根据正整数 n 奇偶性的不同情况, 分别讨论函数 $f(x) = x^n e^{-x}$ 的单调性, 求函数在实数范围内的最值.

35. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, $f(0)=0$, 在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)$ 存在且单调递增. 证明: 当 $x>0$ 时, $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调递增.

36. (1) 设 $f(x) = x \cdot a^x(1-a), x > 0$. 当 $0 < a < 1$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值;

(2) 当 $x > 0, 0 < y < 1$ 时, 证明 $xy^x(1-y) < \dfrac{1}{e}$.

37. 确定函数 $f(x) = \ln(1 + x^2)$ 的单调区间、极值以及该函数图形的凹凸区间和拐点.

38. 在曲线 $y = x^2$ 上求一点 (x_0, y_0), 其中 $x_0 \in [0, 8]$, 使过此点的切线与直线 $x = 8, y = 0$ 所围成的位于第一象限的三角形面积最大.

39. 曲线 $y = x^{-\lambda}, x > 0$ ($\lambda > 0$ 是参数) 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个三角形, 记切点横坐标为 a. 求切线方程和上述三角形的面积. 当 $a \to +\infty$ 时, 该三角形的面积变化趋势如何?

40. 求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调区间, 极值和极值点, 函数图形的凹凸区间, 以及渐近线.

41. 已知 $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{2x}}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和该函数图形的凹凸区间;

(2) 求曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

42. 设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} te^x - xe^t + t + 1 = 0 \\ y = \int_0^t e^{u^2+1} \mathrm{d}u \end{cases}$ 所确定的函数, 则曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为 __________.

43. 曲线 $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{3\pi}{2}$ 对应点处的切线在 y 轴上的截距为 __________.

44. 设 $y=f(x)$ 是由方程 $\int_0^y e^{-t^2}\mathrm{d}t=2y-\ln(1+x)$ 所确定的二阶可导函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率半径为 __________.

45. 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{6}$ 对应点处的曲率为 __________.

46. 曲线 $x^2+xy+y^2=1$ 在点 $(1,-1)$ 处的曲率为 (　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

47. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $t = 0$ 对应点处的曲率为 ________.

48. 设 $y = f(x)$ 是由方程 $x(1+y) - e^y + 1 = 0$ 确定的隐函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率为 __________.

第 6 章 一元函数微分学的应用 (二)—中值定理、微分等式与微分不等式

1. 已知函数 $f(x)=a\left(\ln|x|+\dfrac{3}{2}\right)-bx^2$ 有 4 个不同的零点, 则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是 ( )

A. $\left(0,\dfrac{e}{2}\right)$ B. $\left(\dfrac{e}{2},+\infty\right)$ C. $\left(0,\dfrac{e^2}{2}\right)$ D. $\left(\dfrac{e^2}{2},+\infty\right)$

2. 求函数 $y = \ln x$ 在 $x = 2$ 处带拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式.

3. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0, f(1)=1$, 且 $f(x)$ 不恒等于 x. 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)>1$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导.

(1) 若 $f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 求证: 存在 $\xi\in(0,+\infty)$, 使 $f'(\xi)=0$;

(2) 若 $0\leqslant f(x)\leqslant \ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$, 求证: 存在 $\xi\in(0,+\infty)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{2}{2\xi+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$.

5. 设正值函数 $f(x)$ 二阶可导且满足 $[f'(x)]^2 > f(x)f''(x)$, 函数 $f(x)-x$ 在 $x=0$ 处取得极值 1 , 证明 $f(x) \leqslant e^x$.

6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导, 且 $f''(x) \geqslant 0$.

(1) 证明: 对于任意 $x_0, x \in (-\infty,+\infty)$, 有 $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$;

(2) 证明: 若存在常数 $M > 0$, 使得任意 $x \in (-\infty,+\infty)$, 均有 $|f(x)| \leqslant M$, 则 $f(x)$ 为常值函数.

7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在区间 (a,b) 上二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, 且存在一点 $c \in (a,b)$, 使得 $f(c) > 0$. 证明: 存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f''(\xi) < 0$.

8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导, 且 $f'(x)>2f(x)>0$, 则 (　)

A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$　B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e^2$　C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$　D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

9. 若可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) < 2f(x)$, 则当 $b > a > 0$ 时, 有 ( )

A. $b^2 f(a) > a^2 f(b)$ B. $b^2 f(\ln a) > a^2 f(\ln b)$ C. $b^2 f(a) < a^2 f(b)$ D. $b^2 f(\ln a) < a^2 f(\ln b)$

10. 设 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t, x>0$.

(1) 证明: $\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t = xf'[x\cdot\theta(x)]$, 且 $\theta(x)$ 唯一, 其中 $0<\theta(x)<1$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta(x)$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上一阶可导且 $f'(x) \geqslant M > 0, f(2) > 0$. 证明:

(1) 对任意的 $x \in [3,4]$, 均有 $f(x) > M$;

(2) 存在 $\xi \in (3,4)$, 使得 $f(\xi) > M \cdot \dfrac{e^{\xi-3}}{e-1}$.

12. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (α, β) 内二阶可导, 且其图像在 (α, β) 内有三个点满足关系 $y = ax^2 + bx + c$. 证明: 必然存在一个点 $\xi \in (\alpha, \beta)$, 使得 $f''(\xi) = 2a$.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 (　)

A. 当 $f'(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

B. 当 $f''(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

C. 当 $f'(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

D. 当 $f''(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(0)=f(1)=0$, 在 $(0,1)$ 内二阶可导且 $f''(x)<0$, 记 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f(x)\}$.

(1) 证明对任意正整数 n, 存在唯一的 $x_n\in(0,1)$, 使得 $f'(x_n)=\dfrac{M}{n}$;

(2) 对 (1) 中得到的 $\{x_n\}$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=M$.

15. 设函数 $f(x)=x-e\ln x$, 则 $f(x)$ 的零点个数为 (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

16. 确定常数 k 的取值范围, 使方程 $x - \arctan x = kx^3$ 在 $(0, 1]$ 内有实根.

17. 设方程 $\dfrac{\tan x}{x}=k$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 内有实根, 则常数 k 的取值范围为 (　)

A. $0<k<\dfrac{4}{\pi}-1$　　B. $\dfrac{4}{\pi}-1<k<\dfrac{4}{\pi}$　　C. $1<k<\dfrac{4}{\pi}$　　D. $\dfrac{4}{\pi}-1<k<1$

18. 已知方程 $\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=k$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内有实根, 求常数 k 的取值范围.

19. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{xe^{-x}-a}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续, 则常数 a 的取值范围为 ( )

A. $a<0$ B. $a>e^{-1}$ C. $a<e^{-1}$ D. $0<a<e^{-1}$

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f'(x)>0, f(0)=1$, 则当 $x\in(0,1)$ 时, 有 ( )

A. $f(x)<e^{f(x)-1}$ B. $f(x)>e^{f(x)-1}$ C. $f(x)<e^{-f(x)+1}$ D. $f(x)>e^{f(x)+1}$

21. 证明: 当 $x > 0$ 时, $0 < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} < \dfrac{1}{2}$.

22. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上一阶可导, $f(0)=0$, $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值 $Mx_0, x_0 \in (0,2)$, 且 $f'(x) \leqslant M$. 证明:

(1) 当 $x \in [0,x_0]$ 时, 有 $f(x)=Mx$;

(2) $M=0$.

23. 设 $0 < a < b$, 证明: $\ln \dfrac{b}{a} > \dfrac{2(b-a)}{a+b}$.

24. 设 $x \in (-1, 1)$, 证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$.

25. 设 $x > 0$, 证明: $(x^2 - 1)\ln x \geqslant (x-1)^2$.

26. 设 $0 < x < 1$, 证明: $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

27. 设 $b > a > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) < \dfrac{2f(x)}{x}$, 则当 $x \in (a, b)$ 时, 有不等式 (　)

A. $a^2 f(x) < x^2 f(a)$　　B. $b^2 f(x) < x^2 f(b)$　　C. $x^2 f(x) < a^2 f(a)$　　D. $x^2 f(x) > b^2 f(b)$

28. 若方程 $\ln x = kx$ 有两个实根, 则常数 k 的取值范围为 ( )

A. $0 < k < 1$ B. $0 < k < \frac{1}{e}$ C. $1 < k < e$ D. $\frac{1}{e} < k < e$

29. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶导数连续, $f(1) \leqslant 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in (1,+\infty)$, 使得 $f'(\xi) > 1$;

(2) 存在 $\eta \in (-\infty,+\infty)$, 使得 $f''(\eta) = 0$.

30. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a](a>0)$ 上二阶可导, 且 $f(-a)=-1, f(a)=1, f'(-a)=f'(a)=0, |f''(x)|\leqslant 1$. 证明:

(1) $f'(x)\leqslant a-|x|$;

(2) $a>\sqrt{2}$.

第 7 章 一元函数微分学的应用 (三)—物理应用

1. 质点 P 沿抛物线 $x = y^2 (y > 0)$ 移动, P 的横坐标 x 的变化速度为 5cm/s. 当 $x = 9$ 时, 点 P 到原点 O 的距离变化速度为 __________.

2. 球的半径以 5cm/s 的速度匀速增长, 问球的半径为 50cm 时, 球的表面积和体积的增长速度各是多少?

第 8 章 一元函数积分学的概念与性质

1. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x & ,x\leqslant 0 \\ x^2+a & ,x>0 \end{cases}$, 则 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 处 ( )

A. 极限存在但不连续

B. 连续但不可导

C. 可导

D. 是否可导与 a 的取值有关

2. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数 (若下式中用到 $f'(x)$, 则设 $f'(x)$ 存在), 则以下结论中不正确的是 ( )

A. $f'(x)$ 必以 T 为周期

B. $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 必以 T 为周期

C. $\int_0^x [f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$ 必以 T 为周期

D. $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ 必以 T 为周期

3. 已知 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{x+e^{\frac{x}{t}}}{1+e^{\frac{x}{t}}}$, 则下列命题正确命题的个数为 (　)

(1) $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有原函数

(2) $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可积

(3) $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 处可导

(4) $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 处连续但不可导

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 设 $I_1=\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x, I_3=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, 则 (　)

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_2<I_3<I_1$　　C. $I_3<I_2<I_1$　　D. $I_2<I_1<I_3$

5. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$, 则 (　)

A. $I_1<1<I_2$　B. $I_2<1<I_1$　C. $1<I_1<I_2$　D. $I_1<I_2<1$

6. 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{\sin x} \sin x \mathrm{d}x (k = 1, 2, 3)$, 则 (　)

A. $I_2 < I_1 < I_3$　　B. $I_3 < I_2 < I_1$　　C. $I_2 < I_3 < I_1$　　D. $I_1 < I_2 < I_3$

7. 设 $I_1=\int_1^x \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$, $I_2=\int_1^x \frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t$, $I_3=\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, 且 $x>1$, 则 (　)

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_1<I_3<I_2$　　C. $I_2<I_3<I_1$　　D. $I_3<I_1<I_2$

8. 设 $I_1=\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x, I_2=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x, I_3=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$, 则 ( )

A. $I_1<I_2<I_3$ B. $I_1<I_3<I_2$ C. $I_3<I_2<I_1$ D. $I_3<I_1<I_2$

9. 设函数 $f(x)$ 连续, $f(x) \neq 0$, 且满足 $f(x) = \int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$, 则 $f(x) =$ ___________.

10. 已知 $\alpha > 0$, 则对于反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 的敛散性的判别, 下列选项中正确的是 ( )

A. 当 $\alpha \geqslant 1$ 时, 积分收敛

B. 当 $\alpha < 1$ 时, 积分收敛

C. 敛散性与 α 的取值无关, 必收敛

D. 敛散性与 α 的取值无关, 必发散

11. 已知 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a + x^b} \mathrm{d}x$ 收敛, 且 $a > b > 0$, 则 (　)

A. $a \leqslant 1$　　B. $b \leqslant 1$　　C. $a > 1$　　D. $b > 1$

12. 设 p 为常数, 若反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛, 则 p 的取值范围是 (　)

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,2)$

13. 已知 $\int_0^2 \frac{1}{|\ln x|^a}\mathrm{d}x$ 收敛, a 为常数, 则 (　)

A. $1 < a \leqslant 2$　　B. $a < 1$　　C. $1 \leqslant a < 2$　　D. $a > 2$

14. 若反常积分 $\int_{1}^{+\infty}\left(e^{-\cos\frac{1}{x}}-e^{-1}\right)x^{k}\mathrm{d}x$ 收敛, 则 k 的取值范围是 ________.

15. 下列反常积分中发散的是 (　)

A. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$　B. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x$　C. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^2 x}$　D. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\ln^2(x+2)}$

16. 下列反常积分中收敛的是 (　)

A. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$　　B. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)}}$　　C. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$　　D. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-1)}$

17. 求 p 的取值范围, 使得 $\int_1^{+\infty} \sin \frac{\pi}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$ 收敛.

18. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n}\left(e^{-\frac{x^2}{n^2}}+e^{-\frac{4x^2}{n^2}}+\cdots+e^{-x^2}\right)$, 求:

(1) $f(x)$ 的表达式;

(2) 曲线 $y=e^{x^2}f(x)$ 的拐点.

19. 设 $f(x)=x^2, f[\varphi(x)]=-x^2+2x+3$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}i^2(n-i)\cdot\dfrac{1}{n+\varphi(x)}=(\quad)$

A. $\dfrac{1}{12}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

第 9 章　一元函数积分学的计算

1. $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x =$ __________.

2. 求 $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

3. $\int_1^e \cos(\ln x)\mathrm{d}x =$ ____________.

4. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $xf(x)+f(1-x)=x^2$, 求 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} 2^{-\sqrt{x}} \mathrm{d}x =$ __________.

6. 已知 $f(x)$ 是连续的偶函数, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$, 则 $\int_0^2 x f(1-x)\mathrm{d}x =$ __________.

7. 已知 $f(x)$ 连续, $f(x^2+1)-f(x^2)=x(x>0)$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, 则 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=$ __________.

8. 设 $f(t)=\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}x$, 求 $\int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t$.

9. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的连续函数, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1, g(x)$ 是过点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 和 $(0,1)$ 的直线, 则 $\int_0^2 f[g(x)]\mathrm{d}x =$ (　)

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

10. 已知 $f'(x)=\arctan(x-1)^2$, $f(0)=0$, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

11. 设 $g(x)=x^2, g[f(x)]=-x^2+2x+3$, 且 $f(x)>0$, 则 $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$ ____________.

12. 求 $\int_{-1}^{1} x\ln(1+e^{x})\mathrm{d}x$.

13. 求 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$.

14. 设 $F(x) > 0$ 为 $\mathbf{R}$ 上的连续可导函数, $F(0) = \sqrt{\pi}$, 且 $F(x)F'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$. 求 $F(x)$.

15. 求 $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

16. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$.

17. 求 $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|2x - x^2|}}$.

18. 设 n 为非负整数, 则 $\int_0^1 x^2 \ln^n x \mathrm{d}x =$ __________.

19. 设 $f(x)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y, 0\leqslant x\leqslant 1$, 则 $f'_+(0)=(\quad)$

A. $-\dfrac{\pi}{2}$

B. $\dfrac{\pi}{2}$

C. $-\pi$

D. π

20. 设 $|x| \leqslant 1$, 求积分 $I(x) = \int_{-1}^{1} |t - x| e^{2t} \mathrm{d}t$ 的最大值.

21. 设函数 $f(x)=\int_0^1 \left|t^2-x^2\right| \mathrm{d}t (x>0)$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的最小值.

22. 设 $f(x)=x, g(x)=\begin{cases} \cos x & ,x\leqslant \pi \\ 0 & ,x>\pi \end{cases}$，求 $F(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t(x\geqslant 0)$.

23. 设 $y = f(x) = x\int_0^2 e^{-(xt)^2}\mathrm{d}t + x^2$, 其在 $x = 0$ 的某邻城内与 $x = g(y)$ 互为反函数, 则 $g''(0) =$ __________.

24. $F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\sin t|\mathrm{d}t(x\geqslant 0)$ 在 $x\to 0^+$ 处的二次泰勒多项式为 $a+bx+cx^2$, 求 a,b,c 的值.

25. 已知 $\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^3+ax+1}{x(x+2)}-(2x-4)\right]\mathrm{d}x=b$, a,b 为常数, 则 $ab=$ __________.

26. 设 $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-t|e^{-t^2}\mathrm{d}t$, 求:

(1) $F''(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.

27. 求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$.

28. 设 $a_n = \int_0^{+\infty} x n^{-\frac{x}{n}} \mathrm{d}x, n = 2, 3, \cdots$, 求 $\{a_n\}$ 的最小值.

第 10 章　一元函数积分学的应用 (一)—几何应用

1. 曲线 $e^{y}+xy+x^{3}=e$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 __________.

2. 曲线 $r = 2\cos 3\theta$ 从 $\theta = 0$ 到 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 所围图形面积为 __________.

3. 若曲线 $r = a(1 + \cos\theta)(a > 0)$ 所围图形的面积为 6π, 则 $a =$ __________.

4. 设函数 $y = y(x)$ 满足方程 $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)}{x} = 1$, 求曲线 $y = y(x)$ 与 x 轴正半轴之间的平面图形的面积及该平面图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体体积.

5. 曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x^2$ 所围平面有界区域绕直线 $y=x$ 旋转一周所得旋转体的体积为 __________.

6. 过坐标原点作曲线 $y = e^x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = e^x$ 以及 x 轴围成的向 x 轴负向无限伸展的图形记为 D.

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕直线 $x = 1$ 旋转一周所成的旋转体体积.

7. 求曲线 $y = e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}(x \geqslant 0)$ 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

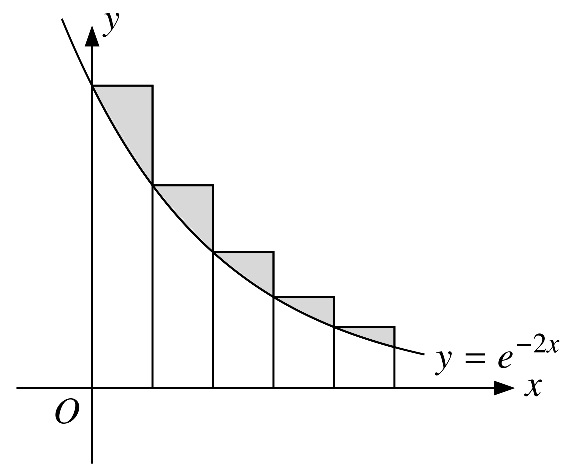
8. 设曲线 $y = ax^2(x \geqslant 0$, 常数 $a > 0)$ 与曲线 $y = 1 - x^2$ 交于点 A, 过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y = ax^2$ 围成一平面图形 D.

(1) 求 D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积 $V(a)$;

(2) 求使 $V(a)$ 为最大值时 a 的值.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $xf'(x) = f(x) + x^2$. 已知曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 0, x = 1, y = 0$ 所围的图形 S 面积为 2. 求 $f(x)$ 的表达式, 以及图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

10. 当 $x \geqslant 0$ 时, 在曲线 $y = e^{-2x}$ 上面作一个台阶曲线, 台阶的宽度皆为 1(见图). 则图中无穷多个阴影部分的面积之和 $S =$ __________.



11. 设函数 $y=f(x)$ 满足微分方程 $y'+y=\dfrac{e^{-x}\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$, 且 $f(\pi)=0$, 求曲线 $y=f(x)(x\geqslant 0)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

12. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内非负连续, 且 $\int_0^x tf(x^2)f(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\sin^2 x^2$, 求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的平均值.

13. 已知 $\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的平均值为 ________.

14. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内是函数 $\dfrac{\sin \pi x}{x}$ 的一个原函数, 且 $f(1)=0$, 则 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 ________.

15. 设函数 $f(x)$ 非负连续, 且 $f(x)\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t = 2x^2$, 则 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均值为 ________.

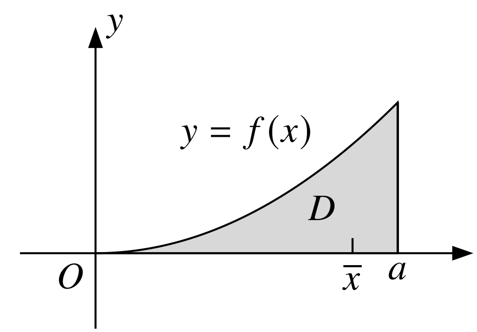
16. 设 $f(x)$ 为 $[0,3]$ 上的非负连续函数, 且满足 $f(x)\int_{1}^{2} f(xt-x)\mathrm{d}t = 2x^{2}, x \in [0,3]$, 则 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上的平均值为 ________.

17. 已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值为 ________.

18. 设平面区域 D 由 $y=0, y=a, x=0, x=\sqrt{a^2+y^2}$ 围成 $(a>0)$. 求 D 绕 y 轴旋转所生成的旋转体的体积 V, 以及旋转体的表面积 S (表面积 = 侧面积 + 上下底面积).

19. 设非负函数 $y(x)$ 是微分方程 $2yy' = \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解, 求曲线 $f_n(x) = n\int_0^{\frac{x}{n}} y(t)\mathrm{d}t (0 \leqslant x \leqslant n\pi)$ 的弧长.

20. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上非负, $f''(x)>0$, 且 $f(0)=0$. 有一块质量均匀分布的平板 D, 其占据的区域是曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$ 以及 x 轴围成的平面图形. 用 $\overline{x}$ 表示平板 D 的质心的横坐标 (见图). 证明: $\overline{x}>\dfrac{2}{3}a$.



21. 求摆线的一拱 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0)$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积与表面积.

22. 已知摆线的参数方程为 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 其中 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, 常数 $a > 0$. 设该摆线一拱的弧长的数值等于该弧段绕 x 轴旋转一周所围成的旋转曲面面积的数值. 求 a 的值.

23. 求曲线 $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\cos t \\ y = -1 + \sqrt{2}\sin t \end{cases} \left(t \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]\right)$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积及表面积.

24. 计算摆线: $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(t \in [0, 2\pi])$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积和表面积.

25. 设 $a > 0$, 求摆线: $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$, $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转面的面积.

26. 求由参数方程 $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ $\left(t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 确定的曲线绕 x 轴旋转所成曲面的面积.

27. 计算上半心形线: $\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

第 11 章　一元函数积分学的应用 (二)—积分等式和积分不等式

1. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导, 且 $f''(x)>0, f(0)=-1$, 则 (　)

A. $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x>0$　　B. $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x<0$　　C. $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x>-2$　　D. $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x<-2$

2. 设函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 利用分部积分法证明: $\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)f(x)\mathrm{d}x$.

3. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可导函数, $f(0)=f(1)=1$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|f'(x)|\}=1$, 则 (　)

A. $\frac{1}{4}<\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}<\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<\frac{3}{4}$　C. $\frac{3}{4}<\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<\frac{5}{4}$　D. $\frac{5}{4}<\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<\frac{7}{4}$

4. 证明: $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = 1 - \sin 1.$

5. 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 对任意的 $x \in [a, b]$, 满足 $\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 且 $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. 证明: $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0$, 且对任意的 $x \in [0,1]$, 有 $0 < f'(x) < 1$. 求证: $\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 > \int_0^1 [f(x)]^3 \mathrm{d}x$.

7. 设 $0 \leqslant f(x) \leqslant \pi, f'(x) \geqslant m > 0(a \leqslant x \leqslant b)$, 证明: $\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{2}{m}$.

8. 设函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x > \frac{1}{4}$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) < 2$;

(2) 若当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) \neq 2$, 则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t > x^2$.

第 12 章　一元函数积分学的应用 (三)—物理应用

1. 一三角形平面薄板铅直地浸没于水中, 设当该薄板的一条边与水面相平齐时薄板一侧所受的水压力的大小为 F_1, 当倒转薄板使原来与水面相平齐的那条边与水面平行而该边相对的顶点与水面相齐时薄板一侧所受的水压力的大小为 F_2, 则 (　)

A. $F_2=\dfrac{3}{2}F_1$　　B. $F_2=\dfrac{4}{3}F_1$　　C. $F_2=2F_1$　　D. $F_2=3F_1$

2. 边长为 2 的等边三角形薄平板铅直沉没在水中, 且一条边与水面相齐. 记重力加速度为 g, 水的密度为 ρ.

(1) 求该平板一侧所受的水压力;

(2) 当水面开始以 0.1 的速度上涨时, 求平板一侧所受水压力的变化率.

3. 已知曲线 $L: y=\ln\sqrt{x}(2 \leqslant x \leqslant 4)$, 在 L 上的任意点 $P(x, y)$ 作切线, 记切线与曲线 L 在 $2 \leqslant x \leqslant 4$ 时所围成的有界区域的面积为 S.

(1) 求一点 P_0, 使上述面积 S 关于 x 的变化率为零;

(2) 当点 $P(x, y)$ 在曲线上移动至 $\left(e, \dfrac{1}{2}\right)$ 时, 横坐标关于时间的变化率为 1 , 求此时面积关于时间的变化率 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$.

第 13 章　多元函数微分学

1. 设函数 $f(x,y)=|x|+y|y|$, 则 (　)

A. $f_x'(0,0)$ 存在, $f_y'(0,0)$ 存在

B. $f_x'(0,0)$ 存在, $f_y'(0,0)$ 不存在

C. $f_x'(0,0)$ 不存在, $f_y'(0,0)$ 存在

D. $f_x'(0,0)$ 不存在, $f_y'(0,0)$ 不存在

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\sin x\cos y & ,x\neq 0\\ 1-\cos y & ,x=0\end{cases}$ 则 (　)

A. $f_x'(0,0)=0$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$　　C. $f_{yx}''(0,0)=1$　　D. $f_y'(0,0)=1$

3. 已知函数 $f(x,y)=x|x|+x|y|+y|x|+y|y|$, 则以下命题正确命题的个数为 ( )

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=f(0,0)$ (2) $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$ (3) $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=1$ (4) $\mathrm{d}f(0,0)=0$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某个邻域内有定义, $f(0,0)=0$, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$, 其中 a 为常数.

(1) 讨论函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性;

(2) 当 a 为何值时, 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微? 并求 $\mathrm{d}f|_{(0,0)}$.

5. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 回答以下问题, 并说明理由:

(1) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续?

(2) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个一阶偏导数是否存在? 若存在, 求出这两个偏导数;

(3) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微? 若可微, 求出函数的微分.

6. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 (　)

A. 两个偏导数都存在, 函数也连续

B. 两个偏导数都存在, 但函数不连续

C. 偏导数不存在, 但函数连续

D. 偏导数不存在, 函数也不连续

7. 设函数 $z=f(x,y)$ 连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{f(x,y)-3x+y+5}{(x-1)^2+y^2}=\dfrac{1}{4}$, 则 $\mathrm{d}z|_{(1,0)}=$ __________.

8. 设函数 $f(u,v)$ 具有连续偏导数, $z=f(xy,x+y)$. 若 $\mathrm{d}z\big|_{\substack{x=2\\y=3}}=6\mathrm{d}x+5\mathrm{d}y$, 则 $f_u'(6,5)+f_v'(6,5)=$ __________.

9. 设函数 $z=f(x,y)(xy\neq 0)$ 满足 $f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)=y^2(x^2-1)$, 则 $\mathrm{d}z=$ ____________.

10. 设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy} e^{xt^2}\mathrm{d}t$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$ __________.

11. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $z+e^z=xy$ 所确定的二元函数, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{z=0}=$ ________.

12. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $e^{x-2y+3z} - 2xe^{-y}\cos z = 1$ 所确定的函数, 则 $\mathrm{d}z|_{(0,0)} =$ __________.

13. 已知 $\dfrac{ay\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x}{x^2+y^2-1}(x^2+y^2<1)$ 是某二元函数的全微分, 则 $a=$ ( )

A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

14. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\sin(x - y) + \int_1^z e^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$ 确定, 则 $\mathrm{d}z|_{(0,0)} =$ ________.

15. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}\mathrm{d}t=1$ 确定的函数, 计算 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

16. 设函数 f 与 g 均可微, $z = f[xy, \ln x + g(xy)]$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$

A. f_1'　　B. f_2'　　C. $f_1' + f_2'$　　D. $f_1' - f_2'$

17. 设 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{x}{z}, yz\right)=0$ 所确定. 设题中出现的分母不为零, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=(\quad)$

A. 0 B. z C. $\dfrac{1}{z}$ D. 1

18. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $3x+xyz+z^3=1$ 所确定的函数, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=$ __________.

19. 已知方程 $2z - e^z + 1 + \int_y^{x^2} \sin(t^2)\mathrm{d}t = 0$ 在 $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$ 的某个邻域中确定了一个隐函数 $z = z(x, y)$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)}$.

20. 设 $f(u,v)$ 存在二阶连续偏导数, $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(z-x,z-y)=1$ 确定的隐函数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

21. 已知函数 $f(x,y)=e^{-x}(ax+b-y^2)$, 若 $f(-1,0)$ 为其极大值, 则 a,b 满足 __________.

22. 设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且在点 (x_0,y_0) 处取极大值, 记 $a=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$, $b=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$, 则 (　)

A. $a>0,b>0$　　B. $a\geqslant 0,b\geqslant 0$　　C. $a<0,b<0$　　D. $a\leqslant 0,b\leqslant 0$

23. 设 $a>0, b>0$, 函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-a)^2+by^2}{2x^2}$ 在 $x<0$ 时的极小值为 2 , 且 $f''_{yy}(-1,0)=1$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求 $f(x,y)$ 在 $x>0$ 时的极值.

24. 设函数 $f(x,y)=x^2+xy$, 则点 $(0,0)$(   )

A. 不是驻点, 也不是极值点

B. 不是驻点, 但是极值点

C. 是驻点, 但不是极值点

D. 是驻点, 也是极值点

25. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$ 的极值.

26. 求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值, 并指出是极大值还是极小值.

27. 设 $f(x, y) = 3x + 4y - ax^2 - 2ay^2 - 2bxy$. 当 a, b 满足何种条件时, $f(x, y)$ 有唯一的极大值, 并说明理由.

28. 求 $|z|$ 在约束条件 $\begin{cases} x^2+9y^2-2z^2=0 \\ x+3y+3z=5 \end{cases}$ 下的最大值与最小值.

29. 求曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$ 上距离 xOy 平面最远和最近的点的坐标.

30. 求函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在约束条件 $x+2y=1$ 与 $x^2+2y^2+z^2=1$ 下的最值.

31. 求曲线 $x^2 - xy + y^2 = 1(x > 0, y > 0)$ 上的一点 P, 使该点处的切线与 x 轴, y 轴所围在第一象限的图形的面积最小.

32. 已知 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + 1, \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 2y + 3, u(0, 0) = 1$. 求 $u(x, y)$ 及 $u(x, y)$ 的极值, 并求出极值是极大值还是极小值? 说明理由.

33. 已知 $f(x,y)$ 满足 $e^{-2x}\dfrac{\partial f}{\partial x}=4y+2y^2+2x+1$, 且 $f(0,y)=2y+y^2$. 求:

(1) $f(x,y)$ 的表达式;

(2) $f(x,y)$ 的极值.

34. 设函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $f(x, 0) = x^2$, $f'_y(x, 0) = \sqrt{2}x$, $f''_{yy}(x, y) = 4$, 求 $f(x, y)$ 在约束条件 $x^2 + 2y^2 = 4$ 下的最大值与最小值.

35. 设函数 $u = xz + ay^3 (z \geqslant 0)$, 且 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(1) 当 $a = \dfrac{1}{3}$ 时, 求 u 的最大值;

(2) 当 $a = t$(t 为变量) 时, u 是否有最大值, 若有, 求出最大值, 若没有, 说明理由.

36. 设 $D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 3, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, 求函数 $f(x,y)=2x^3+2y^3-6x-6y+5$ 在区域 D 上的最大值与最小值.

37. 设二元函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z = (3x^2 - 3)\mathrm{d}x + (6y - 6)\mathrm{d}y$, 则 ( )

A. $f(1, 1)$ 是极小值, $f(-1, 1)$ 不是极值

B. $f(1, 1)$ 是极大值, $f(-1, 1)$ 不是极值

C. $f(1, 1)$ 是极大值, $f(-1, 1)$ 是极小值

D. $f(1, 1)$ 是极小值, $f(-1, 1)$ 是极大值

38. 设 $f(x,y)=x^3-y^3-3x+3y$, 则 (　)

A. $f(1,-1)$ 是极大值, $f(-1,1)$ 是极小值

B. $f(1,-1)$ 是极小值, $f(-1,1)$ 是极大值

C. $f(1,1)$ 是极大值, $f(-1,-1)$ 是极小值

D. $f(1,1)$ 是极小值, $f(-1,-1)$ 是极大值

39. 已知函数 $f(x,y)=xe^{\cos y}+\dfrac{x^2+e^2}{2}$, 则 (　)

A. $(-e,2\pi)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

B. $(-e,2\pi)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

C. $\left(-\dfrac{1}{e},3\pi\right)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

D. $\left(-\dfrac{1}{e},3\pi\right)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

40. 设 $f(x,y)=(x-y^2+1)e^{-x}$, 则函数 $f(x,y)$(　)

A. 有一个极小值, 没有极大值

B. 有一个极大值, 没有极小值

C. 有一个极大值, 一个极小值

D. 没有极值

41. 已知 $F(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin x-\sin^2 x+b)^2\cos x\mathrm{d}x$, 则使得 $F(a,b)$ 取得最小值的 a,b 分别为 (　)

A. $1,\frac{1}{6}$　　B. $1,-\frac{1}{6}$　　C. $-1,\frac{1}{6}$　　D. $-1,-\frac{1}{6}$

42. 求二元函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ 的极值.

43. 设 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2(x+y)\right\}$, 求二元函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ 在闭区域 D 上的最大值与最小值.

44. 求函数 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 3x + 1$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + 3y^2 \leqslant 3\}$ 上的最大值与最小值.

45. 设 $f(x)$ 为二阶可导函数, 且 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点, 则二元函数 $z=f(x)f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值的一个充分条件是 (　)

A. $f(0)<0, f''(0)>0$　　B. $f(0)<0, f''(0)<0$　　C. $f(0)>0, f''(0)>0$　　D. $f(0)=0, f''(0)\neq 0$

46. 函数 $f(x,y)=3axy-x^3-y^3(a>0)$(　)

A. 没有极值

B. 既有极大值也有极小值

C. 仅有极小值

D. 仅有极大值

47. 求函数 $f(x, y) = x^3 + y^2 + 6xy$ 的极值.

48. 设函数 $f(x,y)$ 可微, $f(0,0)=0, \dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}=e^{-x}\cos y$, 求 $f(x,x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的部分与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积.

49. 设函数 $f(x,y)$ 存在二阶偏导数, $f''_{xx}(x,y)=3$, 且 $f(0,y)=4$, $f'_x(0,y)=-y$, 则 $f(x,y)=$ __________.

50. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, $f(x,0)=2x+1$, $f'_y(1,y)=y+1-e^{-y}$, $f''_{xy}(x,y)=2x+y$, 则 $f(x,y)=(\quad)$

A. $x^2y+\frac{1}{2}xy^2-e^{-y}-2x$　B. $xy^2-\frac{1}{2}x^2y-e^{-y}-2x$　C. $x^2y+\frac{1}{2}xy^2+e^{-y}+2x$　D. $xy^2+\frac{1}{2}x^2y+e^{-y}+2x$

51. 设函数 $u = u(x, y)$ 的定义域为 $\{(x, y) \mid x + y \neq 0\}$, 其全微分为 $\mathrm{d}u = \dfrac{y}{(x+y)^2}\mathrm{d}x - \dfrac{x+ky}{(x+y)^2}\mathrm{d}y$, 则 $k =$ (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

52. 设函数 $f(x,y)$ 在第一象限 (不包含坐标原点) 可微分, 且 $\mathrm{d}[f(x,y)]=\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$, 则参数 a 的值为 ( )

A. $\dfrac{1}{2}$ B. 2 C. $\dfrac{1}{4}$ D. 4

53. 设函数 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. 若变换 $\begin{cases} u = x - 3y \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把上述等式化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 则常数 $a = (\quad)$

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

54. 对于任意二阶连续可导的函数 $f(u)$, $z=\int_0^y e^{t^2}\mathrm{d}t+f(x+ay)$ 均是方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2ye^{y^2}$ 的解, 求 a 的值.

55. 设函数 $u = u(x, y)$ 在区域 $D = \left\{(x, y) \mid 2x^2 + 3y^2 \leqslant 4\right\}$ 上连续, 在区域 D 的内部有二阶连续偏导数, 且满足 $-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^2$. 在区域 D 的边界 $2x^2 + 3y^2 = 4$ 上 $u(x, y) \geqslant 0$. 证明: 当 $2x^2 + 3y^2 \leqslant 4$ 时, $u(x, y) \geqslant 0$.

56. 设 a, b 满足 $\int_a^b |x|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, a \leqslant 0, b \geqslant 0$, 求曲线 $y = x^2 + ax$ 与直线 $y = bx$ 所围平面区域面积的最大值和最小值.

57. 已知 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有二阶连续导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. 求 $f(u)$ 的表达式.

58. 设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶连续导数, 且 $z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. 若 $f'(1)=1$, 则 $f'(2)=(\quad)$

A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. -2　　D. $-\dfrac{1}{2}$

第 14 章　二重积分

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{(n+i)\sqrt{n^2+j^2}}=$ __________.

2. 设 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 3\}$, $D_k(k=1,2,3,4)$ 是 D 的第 k 象限部分, $I_k=\iint\limits_{D_k}\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 (　)

A. $I_1>0$　　B. $I_2>0$　　C. $I_3>0$　　D. $I_4>0$

3. 设 $M = \iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, N = \iint\limits_D \left[\ln(x^2+y^2)\right]^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, P = \iint\limits_D (x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\}$, 则必有 (　)

A. $M < N < P$　　B. $N < M < P$　　C. $M < P < N$　　D. $N < P < M$

4. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数且其在 $[0,1]$ 上的平均值 $\overline{f}=\dfrac{1}{2}$, 满足 $f(x)+a\displaystyle\int_1^x f(y)f(y-x)\mathrm{d}y=1$, 求常数 a 的值.

5. 设 $J_i = \iint\limits_{D_i} \sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,(i=1,2,3)$, 其中 $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$, $D_3 = \left\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant 1\right\}$, 则 (　)

A. $J_1 < J_2 < J_3$　　B. $J_3 < J_1 < J_2$　　C. $J_2 < J_3 < J_1$　　D. $J_2 < J_1 < J_3$

6. $\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}^{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} (1-\sin x \cos y)\mathrm{d}y + \int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}^{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} (1-\sin x \cos y)\mathrm{d}y =$ __________.

7. 设有界区域 D 是由圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴所围成的在第一象限的图形, 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

8. 设 $D = \left\{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 < 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\right\}$, 则积分 $I = \iint\limits_D (1 - 12x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ __________.

9. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{\sqrt{3}}x\leqslant y\leqslant\sqrt{3}x,1\leqslant x\leqslant 2\right\}$, 求二重积分 $I=\iint\limits_{D} ye^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

10. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^x \frac{\tan y}{y} \mathrm{d}y =$ ________.

11. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\right\}$, 则 $\iint\limits_D (x-2y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________.

12. 设 $D = \left\{(x, y) \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$, 常数 $a > 0, b > 0, a \neq b$, 计算 $I = \displaystyle\iint\limits_D \left[(x-1)^2 + (2y+3)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

13. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|1\leqslant |x|+|y|\leqslant 2\}$.

14. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{-1}^{y} y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}x =$ __________.

15. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} (x+1)y\mathrm{d}y =$ ________.

16. 计算二重积分 $\iint\limits_{D} |x - |y||\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2x, x \leqslant 1\right\}$.

17. 计算二重积分 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-\sqrt{2}(x+y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\right\}$.

18. 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$, 计算 $\displaystyle\iint\limits_D |xy - 1| \mathrm{d}\sigma$.

19. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\geqslant 1,(x-2)^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant x\right\}$，计算 $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$.

20. $\int_{-\sqrt{2}}^{0} \mathrm{d}x \int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y + \int_{0}^{2} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y =$ __________.

21. 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{\pi},0\leqslant y\leqslant\sqrt{\pi}\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D \sin\left(\max\left\{x^2,y^2\right\}\right)\mathrm{d}\sigma$.

22. $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^4 - y^2}\mathrm{d}x =$ ________.

23. $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x \int_x^1 e^{-y^2} \mathrm{d}y =$ ____________.

24. 设 $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4, (x-1)^2 + y^2 \geqslant 1, y \geqslant 0\right\}$, 计算 $\iint\limits_D (xy + y^2)\mathrm{d}\sigma$.

25. 设平面区域 $D=\left\{(x, y) \mid (x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1\right\}$, 则 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=$ __________.

26. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$, 求 $\iint\limits_D e^{\frac{|y|}{|x|+|y|}}\,\mathrm{d}\sigma$.

27. $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \int_y^{2y} e^{-x^2} \mathrm{d}x = (\quad)$

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

28. 已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2}\mathrm{d}x\int_t^{\sqrt{x}}e^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y$, 则 $f'(\pi)=$ ________.

29. 设 $D = \left\{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2\right\}$, 则 $\iint\limits_{D} (x+y)\mathrm{d}\sigma =$ ____________.

30. 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2e\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D x\,|y-e^x|\,\mathrm{d}\sigma$.

31. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, x\leqslant 0\right\}$, 求 $\iint\limits_D(1+|x|+xy)\sqrt{4-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

32. 设 $D=\left\{(x,y)\mid -x\leqslant y\leqslant x,x^2+y^2\leqslant 2x\right\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$.

33. 设 D 是由曲线 $y=x^3$ 与直线 $x=-1, y=1$ 所围成的有界闭区域, 则 $\iint\limits_D \left[x^2+\sin(xy)\right] \mathrm{d}\sigma = (\quad)$

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{4}{3}$

34. $\int_{1}^{3} \mathrm{d}x \int_{x-1}^{2} e^{y^2} \mathrm{d}y =$ ________.

35. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y} |x| y^2 \mathrm{d}x = (\quad)$

A. $-\dfrac{\pi^2}{12}$　　B. $\dfrac{\pi^2}{12}$　　C. $-\dfrac{\pi^2}{6}$　　D. $\dfrac{\pi^2}{6}$

36. 设区域 D 为 $x^2+y^2 \leqslant 2x$ 与 $|y| \leqslant \sqrt{3}x$ 的重合部分, 计算 $\iint\limits_D \max\left\{2-(x^2+y^2), x^2+y^2\right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

37. 设 $f(x, y)=\max \left\{\sqrt{x^2+y^2}, 1\right\}, D=\{(x, y) \mid |x| \leqslant y \leqslant 1\}$. 求 $\iint\limits_D f(x, y) \mathrm{d} \sigma$.

38. 计算 $\iint\limits_{D} \max\{x, y\} \mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是 $x^2 + y^2 \leqslant 2x$ 与 $x^2 + y^2 \leqslant 2y$ 重合的部分.

39. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中区域 $D=\left\{(x,y)\mid \sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant 2, 0\leqslant x\leqslant 2\right\}$.

40. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{x} \frac{x}{\sqrt{1-x^2+y^2}} \mathrm{d}y =$ ____________.

41. 设 $D=\left\{(x,y)\mid 1-|x|\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\right\}$, 求二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

42. 已知 $f(x)=\begin{cases} e^x & ,0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & ,其他 \end{cases}$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)f(x-y)\mathrm{d}y=$ __________.

43. 计算 $\iint\limits_D \left[(x+1)^2+(y-1)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x, x^2+y^2\leqslant 2y\right\}$.

44. 设平面区域 $D = \left\{(x, y) \mid x^3 + y^3 \geqslant (x^2 + y^2)^2, x + y \geqslant 1\right\}$. 计算 $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x + y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}\sigma$.

45. 设平面区域 $D=\{(r,\theta)\mid r\leqslant 1, r\leqslant 2\cos\theta, \sin\theta\geqslant 0\}$, 计算 $\iint\limits_D r^2\left(\cos\theta+\dfrac{1}{2}r\sin 2\theta\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

46. 设平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant \dfrac{1}{\cos\theta},0\leqslant r\leqslant \dfrac{\pi}{\sin\theta}\right\}$, 则 $\iint\limits_{D}\left|r^2\cos\theta-r\sin^2(r\sin\theta)\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$ __________.

47. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x\int_0^{x^2} f(x^2-t)\mathrm{d}t+\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}\sigma+a$, 其中 D 是由 $y=x^3$ 与 $y=1, y=-1$ 及 y 轴所围平面有界闭区域, $f(1)=0$, 且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的平均值为 3 , 求常数 a 的值.

48. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内二阶可导, $f''(x)<0$, 且 $f(0)=0, f'(1)=0$, 又设曲线 $y=f(x)$ 上任一点 (x,y) 处的曲率半径恒等于 1.

(1) 求函数 $f(x)$;

(2) 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $x=0, x=2, y=2$ 及曲线 $y=f(x)$ 围成的平面区域.

第 15 章　微分方程

1. 以 $y_1 = x^2$ 和 $y_2 = x^2 - e^{2x}$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为 ________.

2. 已知微分方程 $y' + y = e^{\sin x}$, 证明方程存在唯一的以 2π 为周期的解.

3. 设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数, 且满足 $f'_u(u,v)+f'_v(u,v)=uv$, 则函数 $y=e^{-2x}f(x,x)$ 满足条件 $y|_{x=0}=1$ 的表达式为 ________.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且有水平渐近线 $y=b\neq 0$, 则 (　)

A. 当 $a>0$ 时, $y'+ay=f(x)$ 的任意解都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\dfrac{b}{a}$

B. 当 $a>0$ 时, $y'+ay=f(x)$ 的任意解都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\dfrac{a}{b}$

C. 当 $a<0$ 时, $y'+ay=f(x)$ 的任意解都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\dfrac{b}{a}$

D. 当 $a<0$ 时, $y'+ay=f(x)$ 的任意解都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\dfrac{a}{b}$

5. 若二阶常系数齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上均有周期性, 则 (　)

A. $a < 0, b < 0$　　B. $a > 0, b > 0$　　C. $a = 0, b < 0$　　D. $a = 0, b > 0$

6. 微分方程 $x + yy' = y - xy'$ 的通解为 ________.

7. 以 $y=x$ 与 $y=xe^{-2x}$ 为特解的最低阶常系数齐次线性微分方程为 (　)

A. $y'''+2y''=0$

B. $y'''+4y''+4y'-4y=0$

C. $y^{(4)}+2y'''=0$

D. $y^{(4)}+4y'''+4y''=0$

8. 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{xy}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$, 且 $y(0)=1$, 则 $y'(1)=(\quad)$

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

9. 微分方程 $(x+y)\mathrm{d}y+(y+1)\mathrm{d}x=0$ 满足 $y|_{x=1}=2$ 的特解是 __________.

10. 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x+y^2}$ 满足初始条件 $y|_{x=2}=1$ 的特解是 ________.

11. 设当 $x \geqslant 0$ 时, $f(x)$ 有连续的一阶导数, 并且满足 $f(x) = -1+x+2\int_0^x (x-t)f(t)f'(t)\mathrm{d}t$, 则 $f(x) =$ ________.

12. 设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数, 且对任意 $x>0$ 满足 $x\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=-2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)+x^4$, $f(1)=0$. 求函数 $f(x)$.

13. 设函数 $y = f(x)$ 满足 $f'(x) + 2f(x) + 2x\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t + e^{-x} = 0$, 且 $f(x) - x$ 在 $x = 0$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 的表达式.

14. 已知函数 $y=y(x)$ 满足 $y'-2\sqrt{2}x\sqrt{y}=0$, 且其积分曲线的拐点的横坐标为 -2 , 则 $y(x)=$ __________.

15. 若函数 $f(x)$ 满足关系式 $f'(x)+af(x)=\int_x^0 f(t)\mathrm{d}t, a>0$, 求 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

16. 已知函数 $y=y(x)$ 满足 $x(\ln x-1)y'(x)+(3-\ln x^2)y(x)=0, x>e$, 且 $y(e^2)=\dfrac{e^4}{2}$, 求 $y=y(x)$ 的最小值.

17. 设 $y=y(x)$ 满足 $y'+2(\ln x+1)y=0, y(1)=1$, 则 $y(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值为 ________.

18. 若微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(a+\sin^2 x)y=0$ 的所有解都以 π 为周期, 则 $a=$ __________.

19. 当 $x>0$ 时, 函数 $f(x)$ 满足关系式 $x^2 f'(x)+(-1+\ln x)f(x)=0$, 且 $f(1)=1$, 则 $f(x)$ 的最大值为 (　)

A. e^{-e}　　B. e^{e}　　C. $e^{-\frac{1}{e}}$　　D. $e^{\frac{1}{e}}$

20. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且满足 $f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}+\sin x$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 求曲线 $y=f(x)$ 与 $y=0$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$ 上围成的图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

21. 已知函数 $f(x), g(x)$ 满足方程 $f'(x)-g(x)=e^x$ 及 $g'(x)-f(x)=0, f(0)=g(0)=0$, 计算

$$\int_0^1 e^{-x^2}\left[f'(x)-2xg'(x)\right]\mathrm{d}x$$

22. 设连续函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x) = xe^x - \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

23. 设下列 A, B, C 为任意常数, 则微分方程 $y'' + 4y = \sin^2 x$ 有特解形如 (　)

A. $A\sin^2 x$

B. $A\cos^2 x$

C. $x(A + B\cos 2x + C\sin 2x)$

D. $A + x(B\cos 2x + C\sin 2x)$

24. 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = -3x - 5$ 满足条件 $y(0) = 1, y'(0) = 5$ 的解.

25. 求微分方程 $y'' + 2y' + y = (3x+2)e^{-x}$ 的通解.

26. 微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{x}$ 的通解为 ________.

27. 微分方程 $y'' - 4y' = x$ 的通解为 __________.

28. 设 $y=1, y=e^{-x}, y=2e^{-x}$ 为某二阶常系数线性微分方程的解, 则该微分方程为 ________.

29. 设三阶常系数齐次线性微分方程有特解 $\cos x$ 与 e^{2x}, 则该微分方程为 ( )

A. $y''' + 2y'' + y' + 2y = 0$

B. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$

C. $y''' + 2y'' - y' + 2y = 0$

D. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

30. 以函数 $y_1 = xe^x, y_2 = e^x \sin x$ 为特解的最低阶常系数齐次线性微分方程是 (　)

A. $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$

B. $y''' + y'' - y' + y = 0$

C. $y^{(4)} - 2y''' + y'' + 2y' - 2y = 0$

D. $y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = 0$

31. 设函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y^{(4)} - y'' = 0$, 且当 $x \to 0$ 时 $y(x) \sim x^3$. 求 $y(x)$.

32. 设函数 $y = y(x)$ 满足方程 $y'' - 2y' + y = 0$, 且在 $x = 0$ 处取得极值 -1 , 则曲线 $y = y(x)$ 的拐点坐标为 __________.

33. 将以 $y = y(x)$ 为未知函数的微分方程 $y'' + (x + e^y + \sin y)(y')^3 = 0$ 化为以 $x = x(y)$ 为未知函数的形式, 并求其通解.

34. 设 $y=y(x)$ 满足关系式 $e^{2x}(y''+y')+y=e^{-x}$, 且 $x=-\ln t, t>0, y\left(\ln\dfrac{2}{\pi}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, 则 $y(x)=$ __________.

35. 已知某三阶常系数齐次线性微分方程有两个特解, 分别为 $e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 与 e^x, 则该微分方程为 __________.

36. 若某三阶常系数齐次线性微分方程具有特解 $y = 2xe^{x}$ 与 $y = 3e^{-2x}$, 则该微分方程为 (　)

A. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$　B. $y''' + 3y'' - 4y = 0$　C. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$　D. $y''' - 3y' + 2y = 0$

37. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 且存在反函数, 其反函数为 $g(x)$. 若

$$\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=xe^x-e^x+1$$

求 $f(x)$.

38. 微分方程 $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足 $y(0) = 0$ 的积分曲线的拐点个数为 (   )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

39. 若微分方程 $y' + py = e^{qx}$ 的任何积分曲线均有拐点, 则 (　)

A. $p + q > 0$　　B. $p + q < 0$　　C. $p = -q \neq 0$　　D. $p + q \neq 0, pq \neq 0$

40. 求微分方程 $y'(x)+y(x)=\dfrac{(-x)^{n-1}}{3^n e^x}$ 的通解, 其中 n 为任意正整数.

41. 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}=e^{-y}$ 的通解为 ________.

42. 微分方程 $y' + \dfrac{1}{x} = xe^{-y}$ 的通解是 __________.

43. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(0)=0, f'(0)=1$, 且微分方程 $[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x^2y\right]\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 求该全微分方程的通解.

44. 欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0(x>0)$ 的通解为 __________.

45. 设当 $x > -1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) + f(x) = \dfrac{1}{x+1}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 求证:

(1) $f(x)$ 满足微分方程 $(x+1)y'' + (x+2)y' = 0$;

(2) 若 $f(0) = 1, f'(0) = -1$, 则对任意 $x \geqslant 0, e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

46. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2y(y-a)(2y-a)$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=\sqrt{2}(1-a)$ 的解, 其中 $x>0$, 常数 $a>1$.

47. 求二阶微分方程 $y'' - y' = e^{2x}$ 满足条件 $y(0) = \dfrac{1}{2}, y'(0) = 1$ 的解.

48. 微分方程 $xy'' - y' = x$ 的通解是 ________.

49. 已知函数 $y = y(x)$ 可导, 将区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S, 在 $[0, x]$ 上的弧长记为 $aS(a > 0)$, 且 $y(0) = \frac{1}{a}$, 求曲线 $y = y(x)$ 的表达式.

50. 已知微分方程 (I) 的通解为 $y_1 = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$, 微分方程 (II) 为 $y'' + 2y' + 2y = 0$, 其通解记为 y_2. 又曲线 y_1 与 y_2 在原点有公切线, 且 $y_2 - x$ 在 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 处取得极值. 求 y_1 与 y_2 的表达式.

51. 设曲线 $y=y(x)$ 过原点且在原点处与曲线 $y=\sin x$ 有公共切线, 且函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+4y'+4y=0$, 则 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x=$ __________.

52. 设位于坐标轴原点的甲追踪位于 x 轴上点 $A(1,0)$ 处的乙, 甲始终对准乙. 已知乙以匀速 v_0 沿平行于 y 轴正向的方向前进, 甲的速度是 $kv_0, k>0$, 设甲追踪乙的曲线方程是 $y=y(x)$.

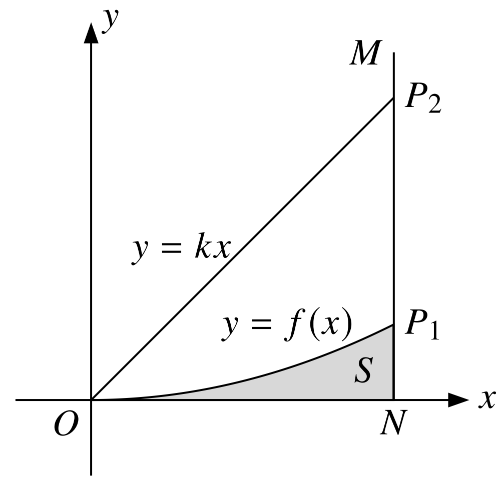
(1) 证明 $y=y(x)$ 满足方程 $k(1-x)y''=\sqrt{1+(y')^2}$, 且 $y(0)=0, y'(0)=0$;

(2) k 为何值时, 甲可追上乙, 并求出甲追上乙时的坐标.

53. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续可导, 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\dfrac{1}{3}$. 当 $x>0$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$ 的表达式.

54. 如图所示, 设连续函数 $f(x)(0 \leqslant x < +\infty)$ 满足条件: (1) $f(0)=0, 0 \leqslant f(x) \leqslant kx(k>0)$; (2) 平行 y 轴的动直线 MN 与曲线 $y=f(x)$ 及直线 $y=kx$ 分别交于点 P_1, P_2; (3) 曲线 $y=f(x)$ 与直线 MN, x 轴所围图形的面积 S 恒等于线段 P_1P_2 的长度. 则 $f(x)$ 的表达式为 (　)

A. $\frac{k}{2}\left(1-e^{-x}\right)$　　B. $k\left(1-e^{-x}\right)$　　C. $\frac{k}{2}\left(e^{x}-1\right)$　　D. $k\left(e^{x}-1\right)$



55. 求一条凹曲线, 已知其上任意一点处的曲率 $k = \dfrac{1}{2y^2\cos\alpha}$, 其中 α 为该曲线在相应点处的切线的倾斜角 $(\cos\alpha > 0)$, 且该曲线在点 $(1,1)$ 处的切线水平.

56. 已知曲线 $y = y(x)$ 上点 $P(x, y)(y \neq 0)$ 处的法线与 x 轴, y 轴的交点分别为 Q, R, 且 $|PR| = |RQ|$, 且 C 为任意常数, 则曲线方程为 (　)

A. $2x^2 + y^2 = C$　　B. $x^2 - 2y^2 = C$　　C. $x^2 + 2y^2 = C$　　D. $2x^2 - y^2 = C$

57. 求一条曲线 $L: y = y(x)$, 其中 $y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续可微, 并使得曲线 L 上每一点处的切线与横轴交点的坐标等于切点横坐标的一半.

第 16 章　无穷级数

1. 设 $a>1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-\ln n}$ 收敛, 则 (　)

A. $a>e$　B. $1<a<e$　C. $1<a\leqslant e$　D. $a\geqslant e$

2. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\sin^2 x_n \sin x_{n+1} + 2\sin x_{n+1} = 1, x_0 = \dfrac{\pi}{6}$, 证明:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sin x_{n+1} - \sin x_n)$ 收敛;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n$ 存在, 且其极限值 c 是方程 $x^3 + 2x - 1 = 0$ 的唯一正根.

3. 下列级数中发散的是 ( )

A. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sin n - n}$ B. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ C. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ D. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

4. 设 $a_n = \cos n\pi \cdot \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $n = 1, 2, \cdots$, 则 ( )

A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散

D. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则下述结论不成立的是 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 必收敛 B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ 必收敛 C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 必收敛 D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 必收敛

6. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 条件收敛, 则以下级数中, 绝对收敛的是 ( )

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - |b_n|)$ B. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ C. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

7. 已知方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的根, 记作 $a_n(n = 1, 2, \cdots)$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.

8. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛是级数 $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \cdots + a_n - a_n + \cdots$ 收敛的 ( )

A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

9. 下列命题正确的是 (　)

A. 设 $a_n \leqslant b_n (n=1,2,\cdots)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 亦收敛

B. 设 $|a_n| \leqslant b_n (n=1,2,\cdots)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 亦发散

C. 设 $a_n \leqslant |b_n| \, (n=1,2,\cdots)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 亦发散

D. 设 $|a_n| \leqslant |b_n| \, (n=1,2,\cdots)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 亦收敛

10. 设 $a_n(x)$ 满足 $a_n'(x) - \dfrac{n}{(1+x)\ln(1+x)}a_n(x) + \ln^n(1+x) = 0, x > 0, n = 1, 2, \cdots, a_n(1) = 0.$

(1) 求 $a_n(x)$ 的表达式;

(2) 判别 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 a_n(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

11. 设 $u_n = \int_0^1 x(1-x)\sin^{2n} x\mathrm{d}x$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

12. 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+2)^n$ 在 $x=-\sqrt{2}$ 处 (　)

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 敛散性不能确定

13. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$ 条件收敛, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n (x+1)^n$ 的收敛区间为 (　)

A. $(-3,1)$　　B. $(-1,3)$　　C. $(-2,2)$　　D. $(-4,2)$

14. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径均为 $r(0 < r < +\infty)$, 则以下级数的收敛半径仍为 r 的是 (　)

A. $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$　　B. $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + nb_n)x^n$　　C. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n + \frac{b_n}{2^n}\right)x^n$　　D. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n + \frac{b_n}{n+1}\right)x^n$

15. 设 a_n 表示由曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ 所围成的平面图形的面积, $n = 1, 2, \cdots$.

(1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域与和函数 $S(x)$;

(2) 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)2^n}$ 之和.

16. 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x, b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\mathrm{d}t, n = 1, 2, \cdots$, 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{a_n}{b_n}$.

17. 设 $a_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x, n = 0, 1, 2, \cdots$.

(1) 求 a_n 的表达式;

(2) 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{a_n}$.

18. 设 $a_n = \int_0^1 x^2 \ln^n x \mathrm{d}x, n = 0, 1, 2, \cdots$.

(1) 求 a_n 的表达式;

(2) 计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!}$.

19. 设函数 $y = f(x)$ 满足 $y'' + 2y' + 5y = 0$, 且 $f(0) = 1, f'(0) = -1$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 设 $a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, (n+1)a_{n+1} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) a_n$, 证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数.

21. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 a_n 满足关系式 $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n} + 1 - \dfrac{1}{n}, n = 2, 3, \cdots, a_1 = 2$, 则当 $|x| < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x) =$ ________.

22. (1) 求微分方程 $y'(x) + y(x) = \dfrac{(-x)^{n-1}}{3^n e^x}$ 的通解, 其中 n 为任意正整数;

(2) 记 $a_n(x), n = 1, 2, \cdots$ 是 (1) 中满足条件 $y(0) = 0$ 的特解, 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的和函数.

23. 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

24. 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $\displaystyle\int_{a_n}^{\tan a_n} e^{x^2}\mathrm{d}x = \ln(1+b_n)^{b_n}$, $a_n > 0, b_n > 0, n = 1, 2, \cdots$, 且级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

(2) 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{a_n^2}$ 收敛.

25. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{2^n}$ 的和.

26. 设曲线 $y = x^{\frac{1}{n}}$ 与其在点 $(1,1)$ 处的切线和 y 轴所围成的平面图形的面积为 a_n, 其中 $n = 2, 3, \cdots$.

(1) 求 a_n 的表示式;

(2) 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

27. 已知函数 $y=f(x)=x\ln x+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{(n+1)\cdot(n+1)!}$. 求 $f(x)$ 的定义域, 证明 $y=f(x)$ 满足微分方程 $xy'-y=xe^x$, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=0$.

28. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 展开成 $x+1$ 的幂级数, 求该幂级数的收敛域, 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(x+1)^n$ 的和函数 $S(x)$.

29. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛域为 __________.

30. 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

31. 设 $a_n = \int_0^{+\infty} e^{-n^2x^2}\mathrm{d}x, n = 1, 2, \cdots$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n a_{n+2}$.

32. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!}$ 的和为 ____________.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)n!} =$ ________.

34. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^2 2^{-nx} (x > 0)$ 的和函数 $S(x) =$ __________.

35. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ 的和.

36. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} =$ ________.

37. 记 a_n 为曲线 $y(t)=\int_0^{\frac{t}{n}} n\sqrt{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$ 的全长, $0\leqslant t\leqslant n\pi, n=1,2,\cdots$.

(1) 求 a_n 的表达式;

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{a_n-3}$ 的和函数 $S(x), x\geqslant 0$.

38. 设 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, $a_n(x)$ 满足 $x(1-x)a_n'(x)+[(n+2)x-n]a_n(x)=0, n=1,2,\cdots; a_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{n+2}}$.

(1) 求 $a_n(x)$ 的表达式;

(2) 判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 的敛散性.

39. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'(x)=0$ 及 $f''(x)+2f'(x)+f(x)=-1$, 且 $f(0)=0$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 设 $a>0$, 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f(n^{-a}\ln n)$ 收敛, 求 a 的取值范围.

40. 设 $f(x)=2-x(0\leqslant x<2)$, 而 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2}(-\infty<x<+\infty)$, 其中 $b_n=\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots)$, 则 $S(3)=$ __________.

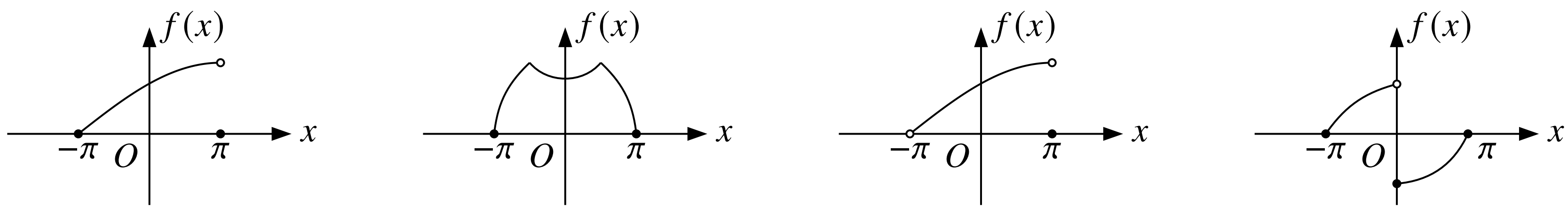
41. 设函数 $f(x) = \pi x + x^2(-\pi < x < \pi)$ 的傅里叶级数为 $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则系数 $b_3 =$ __________.

42. 设 $f(x)=\begin{cases} x+1 & ,0\leqslant x\leqslant \pi \\ 0 & ,-\pi\leqslant x<0 \end{cases}$, $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=(\quad)$

A. $-\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $-\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

43. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}, -\pi \leqslant x \leqslant \pi$, 并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

44. 已知函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots$, $b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots$, 则下列选项中可使得 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上处处成立的 $f(x)$ 的图像是 (　)



A.　B.　C.　D.

第 17 章　多元函数积分学的预备知识

1. 设 $f(x,y)=e^{-(x^2+2y^2)}$, 曲线 $y=y(x)$ 上任一点 P 的切线方向始终指向 $f(x,y)$ 变化率最大的方向, 且 $y(1)=2$, 则 $y(x)=(\quad)$

A. $2x^2$　　B. x^2+x　　C. $e^{-x^2+1}+x$　　D. $2e^{-x^2+1}$

2. 求曲面 $4z = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ 上的点到平面 $x + y - 4z = 1$ 的最短距离.

3. 空间曲线 $L:\begin{cases} y^2 = z \\ x = 2(y-1) \end{cases}$ 在 $y=1$ 处的切线方程为 __________.

4. 曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2+3z^2=6 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程为 __________.

5. 求抛物面 $\Sigma : z = x^2 + y^2$ 上的点到空间图形 $\Omega : x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$ 的形心的最短距离.

6. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 附近有定义, 且 $f'_x(0, 0) = 3$, 则曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的法平面方程为 ________.

7. 曲面 $e^z - xz + y = 3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为 __________.

8. 设可微函数 $f(u,v)$ 满足 $f(x-y,x+e^y)=x^2-y^2$, 则 $f(u,v)$ 在点 $(1,2)$ 处的方向导数的最大值等于 (　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

9. $f(x, y, z) = x^2 \int_1^y e^t \mathrm{d}t + 2z$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的梯度为 ________.

10. 已知函数 $z = f(x, y)$ 可微, 其在点 $P_0(1, 2)$ 处沿从 P_0 到 $P_1(2, 3)$ 的方向的方向导数为 $2\sqrt{2}$, 沿从 P_0 到 $P_2(1, 0)$ 的方向的方向导数为 -3, 则 z 在点 P_0 处的最大方向导数为 __________.

11. 函数 $u(x, y, z) = xy - 2z^2$ 在点 $(1, 1, -2)$ 处的最大方向导数为 ________.

12. 设 $\boldsymbol{F}(x, y, z) = y^2\boldsymbol{i} + 2xz\boldsymbol{j} + x^2y\boldsymbol{k}$, 则 $\mathbf{rot}\boldsymbol{F}(1, 0, 1) =$ __________.

13. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $3x + 6y + xyz + z^3 = 1$ 所确定的函数, 则函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处沿该点梯度方向的方向导数为 __________.

14. 在曲面 $\Sigma : x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z$ 在该点沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数最大, 其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 Σ 在点 $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 的外侧法向量.

15. 设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $(1,-1)$ 处可微, 且满足 $f\left[xy+e^x, \sin(xy)-e^y\right] = e^x + 2e^y + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, 求函数 $z = f(x,y)$ 在点 $(1,-1)$ 处的梯度及该点处的最大方向导数.

16. 设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$.

(1) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否连续? 说明理由;

(2) 函数 $f(x,y)$ 在原点处沿任意给定的方向 $\boldsymbol{u}=(a,b)(a^2+b^2=1)$ 的方向导数是否存在? 若存在, 求出方向导数; 若不存在, 说明理由;

(3) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否可微? 若可微, 求出函数的微分; 若不可微, 说明理由.

第 18 章　多元函数积分学

1. 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\right\}$, 则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ __________.

2. 设曲线 L 的方程为 $2x = y^2 (0 \leqslant y \leqslant 1)$, 则 $\int_L y \mathrm{d}s =$ __________.

3. 设 L 为曲线 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$, 取逆时针方向, $I=\oint_L 4y\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y$, $J=\oint_L 4x\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y$, $K=\oint_L 4xy\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y$, 则 I,J,K 的大小顺序为 ( )

A. $I<K<J$　　B. $J<K<I$　　C. $I<J<K$　　D. $K<I<J$

4. 设 Γ 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=a \end{cases}$ $(a>0)$, 则空间第一型曲线积分 $\oint_{\Gamma} x^2 \mathrm{d}s =$ __________.

5. 设 Γ 是空间圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=\dfrac{3}{2}a \end{cases}$ $(a>0)$, 则 $\oint_{\Gamma}(2yz+2zx+2xy)\mathrm{d}s=$ __________.

6. 设 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x=y$ 的交线, 则 $\oint_{\Gamma}(x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ __________.

7. 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}s$, 其中 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=R \end{cases}\ (R>0)$.

8. 设 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\right\}$, ∂D 为 D 的正向边界, 则 $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=$ __________.

9. 设函数 $f(x), g(x)$ 二阶导数连续, $f(0)=0, g(0)=0$, 且对于平面上任一简单闭曲线 L, 均有

$$\oint_L \left[y^2 f(x)+2ye^x+2yg(x)\right] \mathrm{d}x+2[yg(x)+f(x)]\mathrm{d}y=0$$

(1) 求 $f(x), g(x)$ 的表达式;

(2) 设 L_1 为任一条从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的曲线, 计算

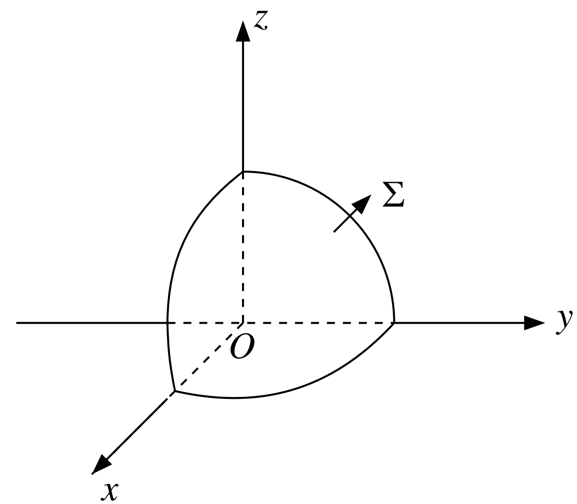
$$\int_{L_1} \left[y^2 f(x)+2ye^x+2yg(x)\right] \mathrm{d}x+2[yg(x)+f(x)]\mathrm{d}y$$

10. 设 $P(x,y,z)$ 为球面 $S: x^2+y^2+z^2-2z=0$ 上的动点, 球面 S 在点 $P(x,y,z)$ 处的法线与平面 $x+z=0$ 平行.

(1) 求点 P 的轨迹 Γ 的方程;

(2) 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$, 从 z 轴正向看下去, Γ 取逆时针方向.

11. 已知 Σ 为曲面 $4x^2+y^2+z^2=1(x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$ 的上侧 (见图), L 为 Σ 的边界曲线, 其正向与 Σ 的正法向量满足右手法则, 计算曲线积分 $I=\oint_L (yz^2-\cos z)\mathrm{d}x+2xz^2\mathrm{d}y+(2xyz+x\sin z)\mathrm{d}z$.



12. 设曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与平面 $z=-x$ 的交线为 L, 起点为 $A(0,1,0)$, 终点为 $B(0,-1,0)$, 则

$$\int_L (x+y-z)\mathrm{d}x+|y|\mathrm{d}z=\underline{\qquad\qquad}.$$

13. 设 L 为曲线 $y=2\sqrt{1-x^2}$ 上从点 $(0,2)$ 到点 $(1,0)$ 的一段弧, 则曲线积分

$$\int_L (2y+1)\mathrm{d}x+(3x+2)\mathrm{d}y = \underline{\qquad\qquad}.$$

14. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+4y^2\leqslant 4\right\}$ 上二阶偏导数连续, ∂D 是 D 取正向的边界曲线, 则 $\oint_{\partial D}\left[f_x'(x,y)-y\right]\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y=$ __________.

15. 设 $y' = f(x, y)$ 是一条简单封闭曲线 L (取正向), $f(x, y) \neq 0$, 其所围区域记为 D, D 的面积为 $a, a > 0$, 则 $I = \oint_L x f(x, y)\mathrm{d}x - \dfrac{y}{f(x, y)}\mathrm{d}y =$ __________.

16. 设曲线 L 是 xOy 平面上有界单连通闭区域 D 的正向边界, 当曲线 L 的方程为 $x^2+y^2=1$ 时,

$I=\oint_L\left(ax+\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}xe^{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{1}{2}ye^{x^2+y^2}-\frac{a}{3}y^3\right)\mathrm{d}x$ 的值最大, 求

(1) 常数 a 的值;

(2) I 的最大值.

17. 求 $\int_L (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的边界线. 从球心看 L, L 为逆时针.

18. 设 L 为从点 $A(-1,0)$ 到点 $B(3,0)$ 的上半个圆周 $(x-1)^2+y^2=2^2, y \geqslant 0$, 则

$$\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \underline{\qquad\qquad}.$$

19. 设 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(0)=0$, 若对于平面内的任意简单封闭曲线 L, 均有曲线积分

$$\oint_L [f(x)-e^x]\, y^2 \mathrm{d}x - 2y f(x) \mathrm{d}y = 0$$

则 $f(x) =$ __________.

20. 设 $I_1 = \int_L f(x,y)\mathrm{d}x + (6xy - 6x)\mathrm{d}y$, $I_2 = \int_L (6x^2y + 6xy + x)\mathrm{d}x + f(x,y)\mathrm{d}y$. 已知曲线积分 I_1 与 I_2 均在整个 xOy 平面内与路径无关, 且 $f(0,0) = 0$, 求函数 $f(x,y)$ 的极值.

21. 已知曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被曲面 $z-4=-6(x^2+y^2)$ 截成三段, 自上而下记三段曲面的面积分别为 S_1, S_2, S_3, 则 (　)

A. $S_3 > S_2 > S_1$　　B. $S_3 > S_1 > S_2$　　C. $S_2 > S_3 > S_1$　　D. $S_2 > S_1 > S_3$

22. 设 Σ 是 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 所割下的有限部分, 求 $\iint\limits_{\Sigma} |xyz| \mathrm{d}S$.

23. 曲面 $\Sigma: z=\sqrt{4-x^2-y^2}(z \leqslant 1)$ 的形心坐标为 __________.

24. 设曲面 $\Sigma: z = ax^2 + y^2 + b$ 在点 $(1, 0, 2)$ 处的切平面为 $\pi: z = 2x$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若切平面 π 与曲面 Σ 及圆柱面 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的立体为 Ω, 求 Ω 的形心竖坐标.

25. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被锥面 $z=\sqrt{Ax^2+By^2}$ 截下的小的那部分, 其中 A,B,R 均为正常数且 $A\neq B$, 则第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=$ ________.

26. 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, α,β 分别为曲面 Σ 的外法线向量与 x 轴, z 轴的夹角, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(|xy|\cos\alpha+z^2\cos\beta\right)\mathrm{d}S=\underline{\qquad\qquad}.$$

27. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被锥面 $z=\sqrt{x^2+2y^2}$ 截下的小的那部分, 则第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=$ ________.

28. 设曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=4(x+y+z \geqslant \sqrt{3})$, 取上侧, 则 $I=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________.

29. 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4)$ 的下侧, $f(x)$ 是连续函数, 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

30. 计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma}(xyz + x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (xyz + y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2 + y^2 + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为柱面 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1(0 \leqslant z < 2)$ 的外侧.

31. 设 Σ 为任意闭曲面, $I=\oiint\limits_{\Sigma_{\text{外侧}}}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{4}{3}y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(3y-\frac{1}{3}z^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(1) 证明 Σ 为椭球面 $x^2+4y^2+z^2=1$ 时, I 达到最大值;

(2) 求 I 的最大值.

32. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为半球面 $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 取上侧.

33. 设直线 L 过点 $A(0,1,0)$ 与点 $B(1,1,1)$, Σ 是由直线 L 绕 z 轴旋转一周所得曲面 $(0 \leqslant z \leqslant 1)$, 取下侧, $f(x)$ 连续.

(1) 求 Σ 的表达式;

(2) 计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma} yf(xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xf(xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

34. 计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} 2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (5z - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是由 $\begin{cases} z = e^y \\ x = 0 \end{cases}$ $(1 \leqslant y \leqslant 2)$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面, 并取外侧.

35. 设 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 2)$, 取下侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\quad)$

A. 6π　　B. -6π　　C. 12π　　D. -12π

36. 计算曲面积分: $I = \iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为上半球面 $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1(z \geqslant 0)$ 被锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 所截得的部分, Σ 的法线方向向上.

37. 设 $f(u)$ 为奇函数，且具有一阶连续导数，Σ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，两球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+y^2+z^2=2(z>0)$ 所围立体的全表面，方向向外. 求 $\displaystyle\oiint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[y^3+f(xy)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[z^3+f(yz)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

38. 设一空间物体是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 2x$ 所围成的, 其体密度为 $\rho = y^2$, 求它对 z 轴的转动惯量.

线代强化篇

第 1 章 行列式

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ __________.

2. 已知 $\boldsymbol{A}$ 有 0 特征值, $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 且 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=2$, 则 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=$ ________.

3. 计算 n 阶行列式:$D_n = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x_n \end{vmatrix}$, 其中 $x_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

4. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ ____________.

5. 计算 $n+1$ 阶行列式:$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$.

6. $D_n = \begin{vmatrix} b & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & b+a_1 \end{vmatrix} =$ ____________.

7. 设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{PA}=[-\boldsymbol{\alpha}_1,-2\boldsymbol{\alpha}_2,-3\boldsymbol{\alpha}_3]$, 则 $|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}|=(\quad)$

A. 6　　B. -6　　C. 24　　D. -24

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个不同的特征值, 其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_3$, $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, A^2\boldsymbol{\alpha}]$.

(1) 证明 $\boldsymbol{P}$ 可逆;

(2) 若 $(\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$, 求 $|\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}|$.

第 2 章　余子式与代数余子式的计算

1. 设 $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix}$, 则 $5A_{11} + 2A_{12} + A_{13} =$ __________.

2. 已知 3 阶行列式 $|\boldsymbol{A}| = -9$, 其第 2 行元素为 $[1, 1, 2]$, 第 3 行元素为 $[2, 2, 1]$, 则 $A_{31} + A_{32} - 3A_{33} =$ __________.

3. 已知 3 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的元素 a_{ij} 均为实数, 且 a_{ij} 不全为 0. 若 $a_{ij}=-A_{ij}(i,j=1,2,3)$, 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 则 $|\boldsymbol{A}|=$ __________.

第 3 章　矩阵运算

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{13}=$ __________.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{10}=$ __________.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^5 =$ ________.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均是 3 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{BC}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{99}=$ __________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶实对称矩阵, 且满足 $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{2}-2\boldsymbol{A}^{3}=\boldsymbol{O}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 则 $\boldsymbol{A}=$ __________.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量. 记分块矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 (　)

A. $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq 1$　　B. $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq -1$　　C. $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 1$　　D. $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq -1$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 2 维非零列向量, 且 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}]$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$, 则 $\boldsymbol{B}=(\quad)$

A. $\begin{bmatrix}-1&0\\1&2\end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix}0&1\\2&-1\end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix}-1&1\\0&2\end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix}0&2\\1&-1\end{bmatrix}$

8. 已知 a 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{bmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量, b 为常数. 记分块矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*} & |\boldsymbol{A}|\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$;

(2) 证明: 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

10. 求与 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 可交换的全部 2 阶矩阵.

11. 设 2 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素满足 $a_{11}+2=a_{22}$, 则 $\boldsymbol{A}=$ __________.

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$, 问是否存在非单位矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$? 若不存在, 请说明理由; 若存在, 求出所有满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{B}$.

第 4 章　矩阵的秩

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$, 则必有 (　)

A. $r(\boldsymbol{A})=1$

B. $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$

C. $[r(\boldsymbol{A})-1][r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-2]=0$

D. $[r(\boldsymbol{A})-1][r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-1]=0$

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均是 3 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&1\\-2&-1&a\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, 则必有 (　)

A. $a=-1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=1$　　B. $a=-1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=2$　　C. $a\neq-1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=1$　　D. $a\neq-1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=2$

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵, 记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$ 表示分块矩阵, 则 ( )

A. $r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB}])=r(\boldsymbol{A})$

B. $r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA}])=r(\boldsymbol{A})$

C. $r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}])=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$

D. $r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}])=r([\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}])$

4. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 记矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 的秩分别为 r_1,r_2,r_3, 则 ( )

A. $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$ B. $r_1 \leqslant r_3 \leqslant r_2$ C. $r_3 \leqslant r_1 \leqslant r_2$ D. $r_2 \leqslant r_1 \leqslant r_3$

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, $r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{BA})$, 记 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BC} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BC} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{BAC} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$ 的秩分别为 r_1,r_2,r_3, 则 (　)

A. $r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_1$　　B. $r_2 \leqslant r_1 \leqslant r_3$　　C. $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$　　D. $r_3 \leqslant r_2 \leqslant r_1$

第 5 章　线性方程组

1. 方程组 $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=-2 \end{cases}$, 有无穷多解, 则 $a=$ __________.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶正定矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 实矩阵, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 与 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 合同的充分必要条件为 (　)

A. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解

B. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解

C. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解

D. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解

3. 设方程组 $\begin{cases} x_1 + ax_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 = 3 \end{cases}$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 自由项为 $\boldsymbol{b}$, 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 有解, 则 $a = (\quad)$

A. -1　　B. 1　　C. -3　　D. 3

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量. 若 $r\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\right) = r(\boldsymbol{A})$, 则线性方程组 (　)

A. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}$ 必有无穷多解

B. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}$ 必有唯一解

C. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ 只有零解

D. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ 必有非零解

5. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为零, 且 $r(\boldsymbol{A}) = n - 1$, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解是 __________.

6. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 2×4 矩阵, $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,2,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,-3,1,0]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{\beta}_1=[1,3,0,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[1,2,-1,a]^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 如果 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 有非零公共解, 求 a 的值及所有非零公共解.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{e}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$. 若方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}$ 有解, 则对于 (I) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 (II) $\begin{cases}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\\ \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\end{cases}$ 说法正确的是 (　)

A. (I) 的解都是 (II) 的解, 但 (II) 的解未必是 (I) 的解

B. (II) 的解都是 (I) 的解, 但 (I) 的解未必是 (II) 的解

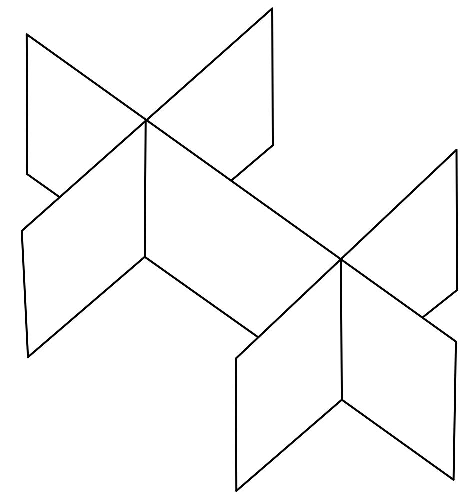
C. (I) 的解不是 (II) 的解, 且 (II) 的解也不是 (I) 的解

D. (I) 的解都是 (II) 的解, 且 (II) 的解也都是 (I) 的解

8. 设平面 $\pi_1 : ax + y + z = 1, \pi_2 : x + ay + z = 1, \pi_3 : x + y + az = -2$ 有无穷多个交点, 则 $a =$ __________.

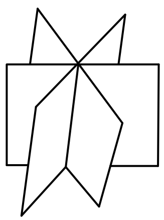
9. 如图所示有三张平面, 其中有两张平面平行, 第三张平面与它们相交, 其方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i (i = 1, 2, 3)$ 组成的方程组的系数矩阵与增广矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\overline{\boldsymbol{A}}$, 则 ( )

A. $r(\boldsymbol{A}) = 2, r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$ B. $r(\boldsymbol{A}) = 2, r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$ C. $r(\boldsymbol{A}) = 1, r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$ D. $r(\boldsymbol{A}) = 1, r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 1$

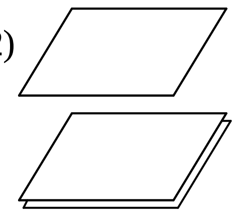


10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_i,b_i,c_i]^{\mathrm{T}}(i=1,2,3)$ 均为非零列向量, 且直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2}=\dfrac{y-b_1}{b_2}=\dfrac{z-c_1}{c_2}$ 过点 (a_3,b_3,c_3), 则可能是三个平面 $\pi_i:\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1(i=1,2,3)$ 的位置关系的所有序号是 (　)

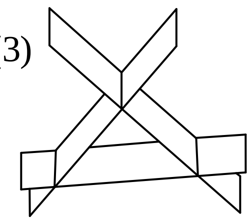
(1)



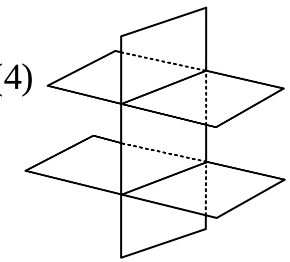
(2)



(3)



(4)



A. (1)(3)　B. (2)(3)　C. (2)(4)　D. (1)(3)(4)

第 6 章　向量组

1. 设 3 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[5,3,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,3,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[-2,2,-3]^{\mathrm{T}}$. 且 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$$

求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_4$.

2. 设 3 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

(1) 证明: 存在 3 维非零向量 $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 也可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1, -2, 3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [2, 1, 1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_1 = [-2, 1, 4]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = [-5, -3, 5]^{\mathrm{T}}$, 求既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 也可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示的所有非零列向量 $\boldsymbol{\xi}$.

3. 设向量空间 V 满足 $x_1+x_2+x_3=0,-\infty<x_i<+\infty,i=1,2,3$, 则 V 的一个基为(　)

A. $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

4. 向量空间 $V = \left\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - 2z = 0\right\}$ 的一个基为 __________.

5. 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基, 则基 $\boldsymbol{\beta}_1,2\boldsymbol{\beta}_2,3\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_1$ 的过渡矩阵为(　)

A. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

6. 由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1, 0, 1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [1, 2, 3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [2, 2, 4]^{\mathrm{T}}$ 生成的向量空间

$$\boldsymbol{V} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\} = \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{R}\}$$

则 V 的一个规范正交基为 __________.

第 7 章　特征值与特征向量

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=(\quad)$

A. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ a & 4 & b \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, $\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 则 (　)

A. $a=1, b=-2$　　B. $a=-1, b=2$　　C. $a=2, b=-1$　　D. $a=-2, b=1$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, 有特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, 对应的特征向量分别是 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$, 以下 k, k_1, k_2 为任意常数, 则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_3$ 的通解是 ( )

A. $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_3$　B. $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_3 + \boldsymbol{\xi}_2$　C. $k\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_3$　D. $k\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_3$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有通解 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$($k_1,k_2$ 为任意常数), $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_3$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是 (　)

A. $[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_3]$　B. $[\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_1]$　C. $[\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,-\boldsymbol{\xi}_2,2\boldsymbol{\xi}_3]$　D. $[\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3]$

5. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行元素全是 1，且 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=$ __________.

6. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 -1 与 1 的特征向量, 且

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$$

(1) 证明 $\boldsymbol{P}$ 可逆;

(2) 计算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$.

第 8 章　相似理论

1. 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是 (　)

A. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. 以下两个矩阵, 可用同一可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 相似对角化的是 (　)

A. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. 下列矩阵中与矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 相似的是 (　)

A. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&2&3\\0&0&0\end{bmatrix}$　B. $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&2&3\end{bmatrix}$　C. $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\3&0&0\end{bmatrix}$　D. $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量组, 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$$

求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ (其列向量用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示), 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵, 并写出该对角矩阵.

5. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维列向量组且线性无关, 若

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] = [3\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1]$$

(1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 可相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$;

(2) 若 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Lambda}$, 并写出 $\boldsymbol{\Lambda}$.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha} = [1, 2, 3, 4]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = [3, -2, -1, 1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量;

(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角矩阵, 说明理由.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&1&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵, 并写出该对角矩阵.

8. 已知 3 维列向量 $\boldsymbol{\xi}$ 不是 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解, $\boldsymbol{A\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解. 记 $\boldsymbol{P}=\left[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{A\xi},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}\right]$.

(1) 证明 $\boldsymbol{P}$ 可逆;

(2) $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化? 若能, 求出一个与之相似的对角矩阵, 若不能, 请说明理由.

9. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 其中 $|\boldsymbol{A}| > 0$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$.

10. 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 2, 3$, $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{B}^*$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}^*) =$ ________.

11. 以下矩阵中, 与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似的是 (　)

A. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则下列结论错误的是 (　)

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似

B. $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

C. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似

D. $\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

13. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&1&t\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&2\\3&3&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&2&0\\-1&3&2\end{bmatrix}$.

(1) t 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 等价? 说明理由;

(2) t 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$ 相似? 说明理由.

14. 设 4 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^4 = \boldsymbol{O}$, 则 $r(\boldsymbol{A}) = (\quad)$

A. 0　　B. 0 或 1　　C. 1 或 2　　D. 2 或 3

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 则 $r(\boldsymbol{A})=$ __________.

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实矩阵, 则“$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵”是“$\boldsymbol{A}$ 有 3 个相互正交的特征向量”的 (　)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

17. 设 2 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_1, λ_2, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_1, λ_2 的单位特征向量, 则与矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$ 相似的对角矩阵为 (　)

A. $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} \lambda_1+1 & 0 \\ 0 & \lambda_2+1 \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2+1 \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} \lambda_1+1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

18. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & a\\ 2 & a & 2\\ a & 2 & 2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\ 2\\ -4\end{bmatrix}$, 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解.

(1) 求常数 a 的值及方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解;

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵.

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=1$, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1[-2,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[-3,0,1]^{\mathrm{T}}$, k_1,k_2 为任意常数, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

20. 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有两个不同的特征值 1 与 a, 且其属于特征值 1 的全部特征向量均可由 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{A} =$ __________.

21. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 2 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个实特征向量, $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|=\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必为 (　)

A. 正定矩阵　　B. 实对称矩阵　　C. 正交矩阵　　D. 单位矩阵

22. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 已知 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和及主对角线元素之和均为 2 , 且 $\boldsymbol{\alpha} = [2, 1, 0]^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta} = [0, 1, 2]^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = [1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$ 的两个解, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

23. 在某一核反应堆中有 α 与 β 两种粒子, 若每秒钟 1 个 α 粒子分裂成 3 个 β 粒子, 且 1 个 β 粒子分裂成 2 个 β 粒子与 1 个 α 粒子. 设在 $t=0$ 时刻, 该反应堆中只有 1 个 α 粒子, 记 a_n, b_n 分别表示 $t=n$ 秒时 α 粒子、β 粒子的个数.

(1) 证明 $\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(2) 求 $t=n$ 秒时反应堆中的粒子总数 $a_n + b_n$.

第 9 章　二次型

1. 已知三元二次型表示为 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$, 则 f 的规范形为 (　)

A. $y_1^2-y_2^2+y_3^2$　B. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　C. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$　D. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+ax_2^2+ax_3^2+4x_2x_3(a>2)$ 的规范形为 (　)

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

3. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant 3}|i-j|x_ix_j$ 的规范形为 __________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称方阵, $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$, 且 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}$, 则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 ( )

A. $z_1^2+z_2^2+z_3^2$ B. $z_1^2+z_2^2-z_3^2$ C. $z_1^2-z_2^2-z_3^2$ D. $-z_1^2-z_2^2-z_3^2$

5. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-3x_2x_3$ 的规范形为 ( )

A. $z_1^2+z_2^2-z_3^2$ B. $z_1^2-z_2^2-z_3^2$ C. $z_1^2+z_2^2+z_3^2$ D. $-z_1^2-z_2^2-z_3^2$

6. 设 a_1, a_2, a_3 为一组不全为零的实数, 则二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i a_j x_i x_j$ 的规范形为 __________.

7. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_1)^2$ 的秩为 ____________.

8. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2，则 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的通解为__________.

9. 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 2 , 其主对角线元素之和为 $5, r(\boldsymbol{A}) = 2$, 则二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 满足条件 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 的最大值为 (　)

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. 3

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a+2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{bmatrix}$, 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 $z_1^2+z_2^2$, 求 a 的值与将其化为规范形的可逆线性变换.

11. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维列向量, $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}],\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\alpha}]$. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=(\quad)$

A. $\begin{bmatrix}1&4\\4&2\end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}$

12. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$.

13. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+bx_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2cx_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 可化为标准形 $-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$，求:

(1) 常数 a,b,c 的值;

(2) 所用正交变换.

14. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+3x_2+ax_3)(x_1+5x_2+bx_3)$ 的正惯性指数 p(　)

A. 与 a 有关, 与 b 无关　B. 与 a 无关, 与 b 有关　C. 与 a,b 均有关　D. 与 a,b 均无关

15. 设 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha} = [1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与全部特征向量;

(2) 求方程组 $(\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$($k$ 为常数) 的解;

(3) 求一个正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 将二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形.

16. 若可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可将二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2$ 化为规范形 $y_1^2+y_2^2$, 同时将二次型 $g(x_1,x_2)=-x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2$ 化为标准形 $k_1y_1^2+k_2y_2^2$, 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 k_1,k_2 的值.

17. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　)

A. 等价, 相似但不合同

B. 等价, 合同但不相似

C. 等价, 但不相似, 不合同

D. 等价, 相似且合同

18. 已知实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & a\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4 & b\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, a 为正整数. 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

19. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则与 $\boldsymbol{A}^2$ 既相似又合同的矩阵是 (　)

A. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

20. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_2^2+ay_3^2(a\neq 0)$, 且 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{a}\end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 有 ( )

A. $f(x_1,x_2,x_3)>0$　　B. $f(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0$　　C. $f(x_1,x_2,x_3)<0$　　D. $f(x_1,x_2,x_3)\leqslant 0$

21. 下列二次型中, 是正定二次型的是 ( )

A. $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4-x_1)^2$

B. $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

C. $f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

D. $f_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

22. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 则以下不是 “$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定” 的充要条件的是 ( )

A. $\boldsymbol{A}$ 为初等矩阵的乘积

B. $\boldsymbol{A}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的某两个基之间的过渡矩阵

C. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关

D. $\boldsymbol{A}$ 与 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 相似

23. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为 3 维列向量, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, 证明 f 为正定二次型;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}1\\0\\a\end{bmatrix}$, 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解, 并求二次型的规范形.

24. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}2ax_ix_j$ 正定的充要条件为 ( )

A. $a>0$ B. $0<a<1$ C. $-1<a<1$ D. $-\frac{1}{2}<a<1$

25. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+x_3)^2+[-x_1+(a-4)x_2+2x_3]^2+(2x_1+x_2+ax_3)^2$ 正定, 则参数 a 的取值范围是 (　)

A. $a=2$　　B. $a=-7$　　C. $a>0$　　D. a 为任意实数

26. 设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ a & -3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & b \end{bmatrix}$, 其中 b 为正整数.

(1) 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$, 求出 a,b 的值与矩阵 $\boldsymbol{P}$;

(2) 对于 (1) 中的 a,b, 是否存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$, 若存在, 求出 $\boldsymbol{Q}$, 若不存在, 说明理由.

27. (1) 设二次型 $f(x,y,z)=y^2+2xz$, 用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将其化为标准形, 并写出 $\boldsymbol{Q}$;

(2) 求函数 $g(x,y,z)=\dfrac{y^2+2xz}{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2\neq 0)$ 的最大值, 并求出一个最大值点.

28. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{3} a_{ii}=2$, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 用正交变换化二次型为标准形, 并求所作正交变换;

(2) 求该二次型;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示什么曲面?

29. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-3x_2x_3=1$ 表示 (　)

A. 椭球面　　B. 双曲柱面　　C. 双叶双曲面　　D. 单叶双曲面

30. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A\eta}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\eta}$ 为 3 维列向量.

(1) 求 $\boldsymbol{\eta}$;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$;

(3) 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}+\boldsymbol{\eta}$, 其中 $\boldsymbol{x}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=[x_1,y_1,z_1]^{\mathrm{T}}$, 化简二次曲面方程 $2x^2+y^2-4xy-4yz-4x-5=0$, 并说明它表示什么曲面.

31. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为 $p=2,q=0$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 在点 $(0,1,1)$ 处的切平面方程为 __________.

概率强化篇

第 1 章　随机事件和概率

1. 对于任意事件 $A, P(A)=P(\overline{A})$ 是 $P(A)=\frac{1}{4}+[P(A)]^2$ 的 (　)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件　　C. 充率条件　　D. 既非充分也非必要条件

2. 一平面质点从原点出发, 每次走一个单位, 只有向上、向右两种走法. 且向上走的概率为 $p(0 < p < 1)$, 现质点走到了点 $(3,2)$, 则这 5 步按照: 右. 上, 右, 上, 右的方式走的概率为 (　)

A. $\frac{3}{20}$　　B. $\frac{1}{13}$　　C. $\frac{1}{20}$　　D. $\frac{1}{10}$

3. 设有两批数量相同的零件, 已知有一批产品全部合格, 另一批产品有 25% 不合格. 从这两批产品中任取 1 只, 经检验是正品, 放回原处, 并从原所在批次中再取 1 只, 则这只产品是次品的概率为 ________.

第 2 章　一维随机变量及其分布

1. 设 X,Y 独立同分布, $P\{X=k\}=\dfrac{1}{a^k}, k=1,2,\cdots$, 则 $P\{X>Y\}=(\quad)$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2a}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3a}$

2. 设 X 是随机变量, s, t 是正数, m, n 是正整数, 下列结论中正确的个数是 (　)

(1) 若 $X \sim G(p)$, 则 $P\{X > m+n \mid X > m\}$ 与 m 无关;

(2) 若 $X \sim P\{X = k\} = \dfrac{1}{k(k+1)}, k = 1, 2, \cdots$, 则 $P\{X \geqslant 2n \mid X \geqslant n\}$ 与 n 无关:

(3) 若 $X \sim E(\lambda)$, 则 $P\{X > s+t \mid X > s\}$ 与 s 无关

(4) 若 $X \sim f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & , x > 1 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$, 则当 $t > 1$ 时, $P(X \geqslant 2t \mid X \geqslant t)$ 与 t 无关

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 设 $X \sim E(1), Y = [X+1]$, 其中 $[\cdot]$ 表示取整符号, 则 Y 服从 (　)

A. 参数为 e^{-1} 的几何分布　　B. 参数为 $1-e^{-1}$ 的几何分布

C. 参数为 e^{-1} 的泊松分布　　D. 参数为 $1-e^{-1}$ 的泊松分布

4. 设 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布, p_1, p_2, p_3 分别是 X 取整数、偶数与奇数的概率, 则 (　)

A. $p_1 = p_2 = p_3$　　B. $p_1 = p_2 > p_3$　　C. $p_1 > p_2 > p_3$　　D. $p_1 > p_2 = p_3$

5. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) \neq 1(x \in \mathbf{R})$, 则 X 不可能服从 (　)

A. $N(1,1)$　　B. $N(0,2)$　　C. $E(1)$　　D. $U(-1,1)$

第 3 章　一维随机变量函数的分布

1. 设 $X \sim N(0,1), Y = X + |X|$, 则 $P\{Y > 1\} = (\quad)$(答案用标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 表示)

A. $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$　　B. $1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)$　　C. $\Phi(1)$　　D. $1 - \Phi(1)$

2. 设 $X \sim f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty < x < +\infty$, 令 $Y = \arctan X$, 则 $f_Y(y) =$ ________.

3. 设 $X \sim U(0,1)$, 则 $Y = X^{\ln X}$ 的概率密度 $f_Y(y) =$ __________.

4. 将长度为 1 的铁丝沿其上任一点折成两段, 较短的一段长度记为 X, 并以这两段作为矩形的两条边, 记矩形面积为 Z, 求:

(1) X 的概率密度;

(2) $E(Z)$.

第 4 章　多维随机变量及其分布

1. 设随机变量 X,Y 相互独立, 且 $X \sim U(-2,4), Y \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 则 $P\{XY > 2\} = ($　$)$

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & ,-1\leqslant x<1,0\leqslant y<2\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$，则二次型 $g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+Yx_3^2+2x_1x_2+2Xx_1x_3$ 正定的概率为(　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $Y = \max\limits_{2\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$, 已知 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leqslant 0 \end{cases}$

则 $P\{X_1Y - Y < 0\} =$ __________.

4. 设随机变量 X 在 $[0,2]$ 上服从均匀分布, Y 服从参数 $\lambda=2$ 的指数分布, 且 X,Y 相互独立. 则关于 a 的方程 $a^2+Xa+Y=0$ 有实根的概率为 __________. (答案用标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 表示)

第 5 章　多维随机变量函数的分布

1. 设 $X \sim f(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,其他 \end{cases}$ 在给定 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下, $Y \sim U(-x, x)$.

(1) 求 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$;

(2) 若 $[Y]$ 表示不超过 Y 的最大整数, 求 $W = X + [Y]$ 的分布函数.

2. 设 X_1, X_2 是来自标准正态总体 X 的简单随机样本, 则 $Y = \dfrac{X_1}{X_2}$ 的概率密度 $f_Y(y) = ($　$)$

A. $\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$　　B. $\dfrac{1}{\pi(1+y)}$　　C. $\dfrac{1}{1+y^2}$　　D. $\dfrac{1}{\pi}$

3. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\mid 0<x<1, x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布, 令 $U=\begin{cases}1 &, X\leqslant Y\\ 0 &, X>Y\end{cases}$.

(1) 写出 (X,Y) 的概率密度;

(2) U 与 X 是否相互独立? 说明理由;

(3) 求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

4. 设 X_1, X_2 相互独立, $X_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $X_2 \sim N(0,1)$, $Y = 2X_1X_2 - X_2$, 则 Y 服从 (　)

(答案用标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 表示)

A. $1 - \Phi(2y)$　　B. $1 - \Phi(y)$　　C. $\Phi(2y)$　　D. $\Phi(y)$

5. 设 $X_0, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $Y = \dfrac{1}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}}$, 已知 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ,x > 0 \\ 0 & ,x \leqslant 0 \end{cases}$$

(1) 求 Y 的分布函数;

(2) 求 $P\{X_0Y - X_0 - Y + 1 < 0\}$.

6. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$. 设 $U=X+Y, V=X-Y$, 求:

(1) U 与 V 的概率密度 $f_U(u)$ 与 $f_V(v)$;

(2) U 与 V 的协方差 $\operatorname{Cov}(U,V)$ 和相关系数 ρ_{UV}.

7. 设二维随机变量 (U,V) 在以点 $(-2,0),(2,0),(0,1),(0,-1)$ 为顶点的四边形区域 D 上服从均匀分布, 令

$$X=\begin{cases}-1 & ,U\leqslant -1\\ 1 & ,U>-1\end{cases},Y=\begin{cases}-1 & ,V\leqslant \dfrac{1}{2}\\ 1 & ,V>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的分布律;

(2) 求 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY};

(3) 求 V 的边缘概率密度.

8. 已知随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布, 在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布. 求:

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

第 6 章　数字特征

1. 设 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = (\quad)$

A. $\frac{1}{e}$　　B. $1-\frac{1}{e}$　　C. $\frac{2}{e}$　　D. $1+\frac{1}{e}$

2. 设总体 X 服从参数为 p 的几何分布, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值. 若 $Y = a\overline{X} + b\overline{X}^2$ (a, b 为常数) 的数学期望为 $\dfrac{1}{p^2}$, 则 $a + b =$ (　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. 假设某种试验只有成功与失败两种结果, 并且每次试验的成功率都是 $p(0 < p < 1)$. 现进行重复独立试验直至成功与失败的结果都出现为止, 已知试验次数 X 的数学期望 $E(X) = 3$, 则 $p =$ __________.

4. 设总体 X 服从分布 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1, 0<p<1. X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 记 $Y_1=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}, Y_2=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{X_j\right\}, Y_3=Y_1-Y_2$, 则 $E(Y_3)=$ __________.

5. 在区间 $[0,1]$ 上任取一点, 将其分为两个区间, 留下其中任一区间记其长度为 X, 再从留下的区间上任取一点, 将其分为两个区间, 并取其中任一区间, 记其长度为 Y, 则 $E(Y) =$ __________.

6. 设总体 (X,Y) 服从 $N(0,0;1,2;1),(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$ 是来自总体 (X,Y) 的简单随机样本, $\overline{X} = \dfrac{X_1+X_2}{2},\overline{Y} = \dfrac{Y_1+Y_2}{2}$, 则 $E\left[(\overline{X}-\overline{Y})^2\right] = (\quad)$

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. 设 $(X,Y) \sim f(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{x^2+2y^2}{4}}, -\infty < x, y < +\infty, Z = X^2 - Y^2$, 则 $E(Z) =$ ________.

8. 已知 (X, Y) 服从 $N(0,0;\sigma^2,\sigma^2;0), \sigma>0$, 若 $D(|X-Y|)=1-\dfrac{2}{\pi}$, 则 $\sigma=$ ________.

9. 设随机变量 $X \sim B\left(1, \frac{1}{4}\right)$, 随机变量 $Y \sim B\left(1, \frac{1}{6}\right)$, 且 $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{24}$. 求:

(1) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(2) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY};

(3) $P\{XY = 0\}$ 的值.

10. 设 X 服从参数为 1 的指数分布, 其分布函数为 $F(x)$, 则 $E\left[F^2(X)+X^2\right]=$ __________.

11. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2x & ,0<x<1\\ 0 & ,其他\end{cases}$，在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下, 随机变量 Y 在 $(-x,x)$ 上服从均匀分布.

(1) 求 $P\left\{\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2} \mid Y=E(Y)\right\}$;

(2) 判断 X 与 Y 的独立性、相关性, 并给出理由;

(3) 令随机变量 $Z=X-Y$, 求 $f_Z(z)$.

12. 独立重复抛掷一枚均匀硬币两次, 记 $X_i = \begin{cases} 1 & ,\text{出现正面} \\ 0 & ,\text{出现反面} \end{cases}$ $(i = 1, 2)$, 则 $X_1 + X_2$ 与 $X_1 - X_2$(　)

A. 独立, 不相关　　B. 不独立, 不相关　　C. 独立, 相关　　D. 不独立, 相关

13. 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 且对任意的正数 ε, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\right| < \varepsilon\right\} = 1$, 则 $D[|X - D(X)|] = (\quad)$

A. $1 - \frac{2}{e}$　　B. $1 + \frac{2}{e}$　　C. $1 - \frac{4}{e^2}$　　D. $1 + \frac{4}{e^2}$

第 7 章　大数定律与中心极限定理

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 的简单随机样本, 若取值为 2 的样本个数 K 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{K-a}{b} \leqslant x\right) = \Phi(x)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 a, b 分别是 (　)

A. $\frac{1}{16}, \frac{\sqrt{15}}{16}$　　B. $\frac{n}{16}, \frac{\sqrt{15n}}{16}$　　C. $\frac{1}{16}, \frac{\sqrt{15n}}{16}$　　D. $\frac{n}{16}, \frac{\sqrt{15}}{16}$

2. 设 $X \sim N(0,1)$, 在 $X = x$ 的条件下, 总体 $Y \sim N(x,1)$, 记 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为取自总体 Y 的简单随机样本, 则 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2$ 依概率收敛于 __________.

3. 设总体 X 服从参数为 1 的泊松分布, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 $\nu_n(1)$ 为 n 个观测值中不大于 1 的个数, 则 $\dfrac{\nu_n(1)}{n}$ 依概率收敛于 (　)

A. $\dfrac{1}{e}$　　B. $\dfrac{2}{e}$　　C. $1-\dfrac{1}{e}$　　D. $1-\dfrac{2}{e}$

第 8 章　统计量及其分布

1. 设 $X \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值, 则 $P\left\{\overline{X} > \frac{1}{3}\right\} = (\quad)$

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{7}{8}$

2. 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立且都服从标准正态分布 $N(0,1)$, 已知 $Y = \dfrac{X_1^2 + X_2^2}{X_3^2 + X_4^2}$, 对给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 数 y_α 满足 $P\{Y > y_\alpha\} = \alpha$, 则有 (　)

A. $y_\alpha y_{1-\alpha} = 1$　　B. $y_\alpha y_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1$　　C. $y_\alpha y_{1-\alpha} = \dfrac{1}{2}$　　D. $y_\alpha y_{1-\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{2}$

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, 记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, T = (\overline{X} + 1)(S^2 + 1)$, 则 $E(T)$ 的值为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

4. 设 X_1, X_2 是取自正态总体 $X \sim N(1,1)$ 的简单随机样本, 则 $\dfrac{X_1 - 1}{|1 - X_2|}$ 服从 (　)

A. $N(1,1)$　　B. $\chi^2(1)$　　C. $t(1)$　　D. $F(1,1)$

5. 设随机变量 $X \sim N(0,4)$, 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>2)$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则 (　)

A. $\dfrac{1}{2n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \sim \chi^2(1)$　B. $\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$　C. $\sqrt{\dfrac{(n-1)X_n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} X_i^2}} \sim t(n-1)$　D. $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$

6. 已知随机变量 X,Y, 且 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\dfrac{1}{4\pi}e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{8}}$, 则 $\dfrac{4X^2}{(Y-1)^2}$ 服从 ( )

A. $\chi^2(2)$ B. $t(1)$ C. $N(0,2^2)$ D. $F(1,1)$

第 9 章　参数估计与假设检验

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(1, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\sigma^2 > 0$ 未知, 记 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma^2}$, 则 $D(\hat{\sigma^2}) =$ __________.

2. 设总体 X 服从均匀分布, 其概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x\leqslant\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则总体 X 的方差 $D(X)$ 的最大似然估计量 $\widehat{D(X)}=$ __________.

3. 设总体 $X \sim f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}} & ,x>0 \\ 0 & ,x\leqslant 0 \end{cases}$ $\theta>0$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 $\hat{\theta}_M$ 与 $\hat{\theta}_L$ 分别是 θ 的矩估计量和最大似然估计量, 则 ( )

A. $\hat{\theta}_M=\dfrac{2}{\pi}(\overline{X})^2, E(\hat{\theta}_M)=\theta$

B. $\hat{\theta}_M=\dfrac{1}{\pi}(\overline{X})^2, E(\hat{\theta}_M)=\theta$

C. $\hat{\theta}_L=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2, E(\hat{\theta}_L)=\theta$

D. $\hat{\theta}_L=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2, E(\hat{\theta}_L)=\theta$

4. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{\sigma}} & ,x>0\\ 0 & ,x\leqslant 0\end{cases}$, 其中 σ 为大于零的未知参数, 已知 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则 σ 的最大似然估计量为 ( )

A. $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ B. $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ C. $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ D. $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$

5. 设总体 X 服从参数 λ ($\lambda > 0$ 未知) 的泊松分布, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本, 则 $P\{X = 0\}$ 的最大似然估计量为 __________.

6. 设二维总体 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{x+y}{\lambda}} & ,x>0,y>0\\ 0 & ,其他\end{cases}$ 为大于 0 的参数, $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体的简单随机样本, 则 λ 的最大似然估计量为 __________.

7. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}1 & ,\theta-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\theta+\dfrac{1}{2}\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$ 其中 $-\infty<\theta<+\infty.X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的简单随机样本, 并记 $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$. 求参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.

8. 设某手机每天销售量 X (单位: 万台) 的概率分布律为 $X \sim \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ \theta^2 & \theta(1-\theta) & 1-\theta \end{pmatrix}$, 其中 $0 < \theta < 1$ 为未知参数, 且每天的退货率为 5%, 现有一周的销售量: 15, 10, 10, 15, 20, 20, 15.

(1) 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$;

(2) 记 Y 为每天的退货量, 根据 (1) 中的 $\hat{\theta}$, 求 $E(Y)$.

9. 设总体 X 服从 $\left(0, \dfrac{1}{\theta}\right]$ 上的均匀分布, $\theta > 0$ 为未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 求:

(1) θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(2) $\hat{\theta}$ 的分布函数;

(3) $P\{\theta < \hat{\theta} \leqslant \theta + 1\}$.

10. 设总体 X 服从 $f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & ,x\geqslant\beta\\ 0 & ,x<\beta\end{cases}$,α,β 均大于 0, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 α,β 的最大似然估计量 $\hat{\alpha},\hat{\beta}$;

(2) 对任意的 $\varepsilon>0$, 是否存在常数 a, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\beta}-a|\geqslant\varepsilon\}=0$?

(3) 求 $E(\ln X_1)$.

11. 设连续型总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases} 0 & ,x\leqslant 0 \\ x^{\sqrt{\theta}} & ,0<x<1 \\ 1 & ,x\geqslant 1 \end{cases}$，其中 θ 为未知参数, 且 $\theta>0, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 求 θ 的矩估计量与最大似然估计量.

12. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} & ,x>0\\ 0 & ,x\leqslant 0\end{cases}$, $\theta>0$, 求 θ 的最大似然估计量.

13. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)} & ,x\geqslant\theta \\ 0 & ,其他 \end{cases}$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则未知参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=$ __________.

14. 设总体 X 服从区间 $[-\theta, \theta]$ 上的均匀分布, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则参数 $\theta(\theta > 0)$ 的最大似然估计量 $\hat{\theta} = ($　$)$

A. $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$　　B. $-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$　　C. $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|X_i|\}$　　D. $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|X_i|\}$

15. 设总体 X 服从区间 $(-\theta,\theta)(\theta>0)$ 上的均匀分布, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=$ __________.

16. 设总体 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \dfrac{\theta}{4N} & \dfrac{\theta}{2N} & \dfrac{4N-3\theta}{4N} \end{pmatrix}$, 其中 N 已知, θ 未知, 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 取到 0 的个数为 n_0, 取到 1 的个数为 n_1, 取到 2 的个数为 n_2, 即 $n_0 + n_1 + n_2 = n$.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$;

(2) 求 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的数学期望;

(3) 求 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的方差.

17. 设总体 $X \sim U[\theta_0, \theta_0 + \theta]$, 其中 θ_0 是已知常数, θ 是未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 求:

(1) θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 及 $E(\hat{\theta}_1)$;

(2) θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$ 及 $E(\hat{\theta}_2)$.

18. 设总体 X 服从 $(0,\theta]$ 上的均匀分布, $\theta>0, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $Z=\dfrac{\hat{\theta}}{\theta}$ 的分布函数;

(3) 若 $P\left\{\hat{\theta}<\theta<\theta_0\right\}=1-\alpha, 0<\alpha<1$, 求 θ_0.

19. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$. 记 $Z=X-Y$.

(1) 求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$;

(2) 设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma^2}$;

(3) 是否存在实数 a, 使得对任意的 $\varepsilon>0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\sigma^2}-a\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$?

20. 设某元件的使用寿命 T 的分布函数 $F(t)$ 满足微分方程 $F'(t)+\dfrac{2t}{\theta^2}[F(t)-1]=0, t\geqslant 0, \theta$ 为大于 0 的常数, $F(0)=0$, 且该元件性能 $Q(\theta)=\theta^2\left(\dfrac{\ln\theta}{2}-\dfrac{3}{4}\right)+\theta$. 任取 n 个此种元件做寿命试验, 测得值分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$.

(1) 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$;

(2) 求该元件性能 Q 的最大似然估计值 $\hat{Q}$.

21. 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0,1)$ 未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 $(i=1,2,3)$. 求常数 a_1, a_2, a_3, 使 $T=\sum_{i=1}^{3} a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

22. 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布, 取容量为 1 的简单随机样本 X_1, 其样本值 $x_1 = 3$, 则 $e^{-2\lambda}$ 的无偏估计量与无偏估计值分别为 (　)

A. e^{-2X_1}, e^{-6}　　B. e^{-X_1}, e^{-3}　　C. $1, 1$　　D. $(-1)^{X_1}, -1$

23. 设总体 X 的未知参数 θ 有两个相互独立的无偏估计量 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$, 且 $D(\hat{\theta}_2) = 2D(\hat{\theta}_1)$, 记 $\hat{\theta} = a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2$, 则以下使得 $\hat{\theta}$ 最有效的是 ( )

A. $a = \dfrac{1}{3}, b = \dfrac{1}{3}$　B. $a = \dfrac{2}{3}, b = \dfrac{1}{3}$　C. $a = \dfrac{1}{3}, b = \dfrac{2}{3}$　D. $a = \dfrac{2}{3}, b = \dfrac{2}{3}$

24. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1
P	$1-p$	p

, 其中 $0 < p < 1$, 是未知参数, 又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 X 的一组样本观测值, 求:

(1) 参数 p 的矩估计量和最大似然估计量;

(2) 验证相应两个估计量的无偏性.

25. 设总体 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0 & ,x<0 \\ \theta & ,0\leqslant x<1 \\ 1-2\theta & ,1\leqslant x<\dfrac{3}{2} \\ 1 & ,x\geqslant \dfrac{3}{2} \end{cases}$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$, 并验证其是否有无偏性、一致性;

(2) 若 n 个样本中有 n_1 个观测值为 $1,n_2$ 个观测值为 0 , 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_L$.

26. 设总体 $X \sim U[\theta, 2\theta]$, 其中 $\theta(>0)$ 是未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值.

(1) 求参数 θ 的矩估计量, 并判断它是否是无偏估计和相合估计;

(2) 求参数 θ 的最大似然估计量, 并判断它是否是无偏估计.

27. 设总体 $X \sim N(\mu, 2^2)$, 其中 μ 为未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 记关于 μ 的置信度为 0. 95 的置信区间长度为 L, 则 L 的数学期望 $E(L) =$ (　)

A. $\frac{2}{3}z_{0.025}$　　B. $\frac{4}{3}z_{0.025}$　　C. $\frac{2}{3}z_{0.05}$　　D. $\frac{4}{3}z_{0.05}$

28. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{25}$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)(\sigma > 0)$ 的简单随机样本, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 考虑假设检验问题: $H_0 : \mu \leqslant 10, H_1 : \mu > 10$, 若该检验问题的拒绝域为 $W = \{\overline{X} > 20\}$, 其中 $\overline{X} = \dfrac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i$, 则 $\mu = 20.5$ 时, 该检验犯第二类错误的概率为 $1 - \Phi\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $\sigma =$ (　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

29. 设总体 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix}$, 作检验 $H_0: \theta = 0.1\,(H_1: \theta = 0.9)$. 抽取 3 个样本, 取拒绝域 W 为 $\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1\}$, 则犯第二类错误的概率为 __________.

30. 设随机变量 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 现检验总体 X 的均值是否大于 Y 的均值, 则应检验假设 (　)

A. $H_0 : \mu_1 \leqslant \mu_2; H_1 : \mu_1 > \mu_2$

B. $H_0 : \mu_1 \geqslant \mu_2; H_1 : \mu_1 < \mu_2$

C. $H_0 : \mu_1 < \mu_2; H_1 : \mu_1 \geqslant \mu_2$

D. $H_0 : \mu_1 > \mu_2; H_1 : \mu_1 \leqslant \mu_2$

综合篇

第 1 章　测试卷一

一、选择题 (本大题共 10 个小题, 每小题 5 分, 共 50 分)

1. 设 $\{a_n\}$ 为非零数列, 下列命题正确的是 (　)

A. 若 $\{\sin a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛

B. 若 $\{\arcsin(\sin a_n)\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛

C. 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\left\{\sin\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 收敛

D. 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{\sin a_n\}$ 收敛

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3}{x}$, 则 $f''(2)=(\quad)$

A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. -1

3. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 条件收敛, $u_n > 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n} - 2u_{2n-1})$(　)

A. 发散　　B. 绝对收敛　　C. 条件收敛　　D. 敛散性无法判断

4. 设空间曲面 $\Sigma_1 : z = \dfrac{x^3+y^3}{3}, \Sigma_2 : z = \dfrac{x^2-y^2}{2}, \Sigma_3 : z = \dfrac{x^2y^2}{2}$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 所截部分的面积分别为 S_1, S_2, S_3, 则 ( )

A. $S_1 > S_2 > S_3$ B. $S_2 > S_1 > S_3$ C. $S_3 > S_1 > S_2$ D. $S_3 > S_2 > S_1$

5. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 3 维非零列向量, 则下列命题, 正确命题的个数为 (　)

(1) 若 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4$ 线性无关

(2) 若 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 则 $r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

(3) 若 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

(4) 若 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 则 $2\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\leqslant 3$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 均为 3 维非零列向量, 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\eta}$ 均有解, 则它们同解的充分必要条件为 ( )

A. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

B. $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\xi}]$ 的行向量组与 $[\boldsymbol{B},\boldsymbol{\eta}]$ 的行向量组等价

C. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

D. $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\xi}]$ 的列向量组与 $[\boldsymbol{B},\boldsymbol{\eta}]$ 的列向量组等价

7. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为 2 阶矩阵, 则 ( )

A. $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{BC}|$

B. $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\right|$

C. $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|\neq|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|$

D. $\left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\right||\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{DA}-\boldsymbol{CB}|$

8. 设总体 X 的概率分布为 $P\{X=x\}=(x-1)p^2(1-p)^{x-2}, x=2,3,\cdots, p$ 为参数且 $0<p<1$. 现有来自总体 X 的简单随机样本的观测值: $5,3,6,2,6$, 则 p 的矩估计值为 (　)

A. $\sqrt{\dfrac{5}{11}}$　　B. $\sqrt{\dfrac{5}{22}}$　　C. $\dfrac{5}{11}$　　D. $\dfrac{5}{22}$

9. 已知总体 $X \sim N(\mu_1, 4)$, $Y \sim N(\mu_2, 5)$, X 与 Y 相互独立, $X_1, \cdots, X_8$ 和 $Y_1, \cdots, Y_{10}$ 是分别来自总体 X 和 Y 的两组简单随机样本, S_X^2 与 S_Y^2 分别为两组样本的样本方差, 则 (　)

A. $\dfrac{2S_X^2}{5S_Y^2} \sim F(7,9)$　B. $\dfrac{5S_X^2}{2S_Y^2} \sim F(7,9)$　C. $\dfrac{4S_X^2}{5S_Y^2} \sim F(7,9)$　D. $\dfrac{5S_X^2}{4S_Y^2} \sim F(7,9)$

10. 设 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & ,-1\leqslant x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{4} & ,0<x<2\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$，且 $Y=\begin{cases}1 & ,X\leqslant 0\\ 2 & ,X>0\end{cases}$ 则 $E[D(X|Y)]=(\quad)$

A. $\dfrac{1}{24}$　　B. $\dfrac{5}{24}$　　C. $\dfrac{7}{24}$　　D. $\dfrac{9}{24}$

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

11. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处方向导数的最小值为 ________.

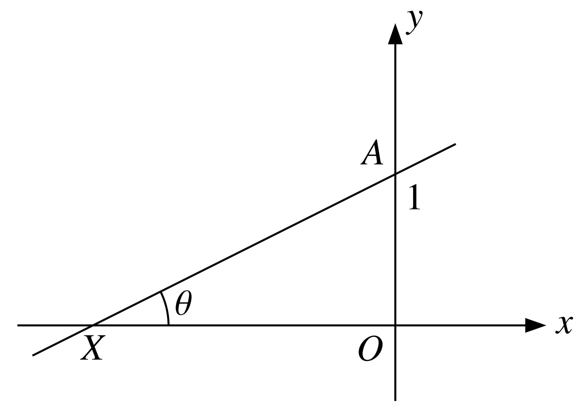
12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n!}=$ __________.

13. 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=x$ 所截部分的上侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma} xy^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________.

14. 微分方程 $y'+xy=xy^3$ 满足条件 $y(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的特解为 __________.

15. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1&1\\-1&2&1&1\\1&1&2&-1\\2&-1&1&1\end{bmatrix}$, 则 $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=$ __________.

16. 设通过点 $A(0,1)$ 任意作直线与 x 轴正向相交所成的角为 $\theta(0<\theta<\pi)$, 如图所示, 则直线在 x 轴上的截距 X 的概率密度为 __________.



三、解答题 (本大题共 6 个小题, 第 17 题 10 分, 第 18 ~ 22 题每题 12 分, 共 70 分)

17. 已知函数 $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$, 记 $a = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若当 $x \to 0$ 时, $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小, 求 k 的值.

18. 求函数 $u = xy + 2xz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最值.

19. 已知 $z^2\mathrm{d}x + ayz\mathrm{d}y + (y^2 + 2xz + z^2)\mathrm{d}z$ 是某三元函数 $u(x, y, z)$ 的全微分, 且 $u(1, 1, 0) = 1$, 求:

(1) a 的值;

(2) $u(x, y, z)$ 的表达式.

20. 设空间有界闭区域 Ω 由柱面 $x^2 - y = 0$ 和平面 $z = 1, y = z$ 围成, 求 Ω 的形心竖坐标 $\bar{z}$.

21. 设多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3+x_2$.

(1) 写出该多项式的二次型部分的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 表示什么曲面? 请说明理由.

22. 设连续型总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{x}{\theta}} & ,x\geqslant 0 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$，其中 $\theta(\theta>0)$ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的最大似然估计量;

(2) 若假设检验: $H_0:\theta=1,H_1:\theta=2$, 从总体中抽取简单随机样本 X_1,X_2, 拒绝域为 $W=\{X_1+X_2\leqslant 1\}$, 求犯第一类错误的概率.

第 2 章 测试卷二

一、选择题 (本大题共 10 个小题, 每小题 5 分, 共 50 分)

1. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上均有 1 个间断点, 则 $f[g(x)]$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 ( )

A. 仅有 1 个间断点

B. 仅有 2 个间断点

C. 间断点个数不超过 2

D. 间断点个数可为无穷多个

2. 当 $x \to 0$ 时, 连续函数 $f(x) = 1 + x - \cos\sqrt[3]{x} + o(x)$, $o(x)$ 表示 x 的高阶无穷小, 则 (　)

A. $f'(0) = 1$　　B. $f'(0) = \dfrac{1}{3}$　　C. $f'(0)$ 不存在　　D. $f'(0)$ 与 $o(x)$ 有关

3. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy & ,xy\neq 0 \\ y & ,x=0 \\ x & ,y=0 \end{cases}$，$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 为任意不平行于坐标轴的单位向量, 给出以下结论, 正确结论的个数为 (　)

(1) $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=1$

(2) $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial \boldsymbol{l}}=0$

(3) $(1,1)$ 是 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的梯度

(4) $(1,0)$ 是 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的梯度

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{1}^{\frac{i}{n}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=(\quad)$

A. $1-2\cos 1$　　B. $\cos 1-1$　　C. $1-2\sin 1$　　D. $\sin 1-1$

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为 (　)

A. $\begin{bmatrix} -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^* & -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \\ |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^* & -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \\ -|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^* & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \\ |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^* & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \\ -|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$

6. 已知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵, 则 (　)

A. $\boldsymbol{AB}$ 是正定矩阵　B. $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 相似　C. $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵　D. $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全为正数

7. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2$, $g(y_1,y_2,y_3)=ay_2^2-6y_1y_3$, 若存在可逆线性变换将 f 化为 g, 但不存在正交变换将 f 化为 g, 则 a 的取值范围是 (　)

A. $a>0$ 且 $a\neq 2$　　B. $a<0$ 且 $a\neq -2$　　C. $a>0$ 且 $a\neq 3$　　D. $a<0$ 且 $a\neq -3$

8. 设随机变量 X,Y 的二阶矩 $E(X^2),E(Y^2)$ 均存在, 则 (　)

A. $\left[\operatorname{Cov}^2(X,Y)\right]^{\frac{1}{2}} > \sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$

B. $|E(X)| > \left[E(X^2)\right]^{\frac{1}{2}}$

C. $\left[E(X^2)\right]^{\frac{1}{2}}\left[E(Y^2)\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant |E(XY)|$

D. $\left[E\left(|X+Y|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant \left[E(X^2)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[E(Y^2)\right]^{\frac{1}{2}}$

9. 设 X,Y 为随机变量, 且 $X \sim N(1,9), Y \sim N(1,4)$, 若 X 与 Y 相互独立, X_1, X_2, X_3 与 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 分别为来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 为其样本均值, 则 $E(|\overline{X}-\overline{Y}|) = (\quad)$

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$　　B. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$　　D. $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$

10. 为检验某硬币是否均匀, 作假设检验: H_0 : 正面向上的概率 $P=\frac{1}{2}$, H_1 : 正面向上的概率 $P\neq\frac{1}{2}$. 现独立重复某硬币 n 次, 记 $X_i=\begin{cases}1 & ,\text{第}i\text{次正面向上}\\ 0 & ,\text{第}i\text{次反面向上}\end{cases}$, $i=1,2,\cdots,n$, $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, u_α 为标准正态分布的上 α 分位数, α 为显著性水平. 当 n 充分大时, 该检验的拒绝域 $W=$ (　)

A. $\left\{\left|\frac{\overline{X}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\right|>u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$　B. $\left\{\left|\frac{\overline{X}-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2n}}}\right|>u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$　C. $\left\{\left|\frac{\overline{X}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\right|>u_{\alpha}\right\}$　D. $\left\{\left|\frac{\overline{X}-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2n}}}\right|>u_{\alpha}\right\}$

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

11. 曲线 $y = x(x-1)^{\frac{1}{3}}$ 的拐点为 ＿＿＿＿＿＿.

12. $f(x)=\int_0^x \frac{t}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 ____________.

13. 已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\mathrm{d}[f(x, y)] = \dfrac{(x+2y)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$, $f(1, 1) = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$, 则 $f(2, 2) =$ ____________.

14. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-nx}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ 的收敛域为 $(a, +\infty)$, 则 $a =$ __________.

15. 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 若 $(\boldsymbol{PA})^2 = \boldsymbol{PA}$, 且 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{P}$ 可以为 __________.

16. 已知随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, 且 X 与 Y 相互独立. 若 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3, X\boldsymbol{\alpha}_3 + Y\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关的概率为 __________.

三、解答题 (本大题共 6 个小题, 第 17 题 10 分, 第 18 ~ 22 题每题 12 分, 共 70 分)

17. 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2} te^t\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{x} x^2\sin t\,\mathrm{d}t}$.

18. 已知函数 $f(x, y)$ 二阶偏导数连续, 任给 x, y, 均有 $f(x+1, y) = f(x, y)$, $f(x, y+1) = f(x, y)$, 且 $\iint\limits_{D} \left\{\left[f_x'(x, y)\right]^2 + \left[f_y'(x, y)\right]^2\right\} \mathrm{d}\sigma = a$, 其中 $D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

(1) 计算 $I = \iint\limits_{D} f(x, y)\left[f_{xx}''(x, y) + f_{yy}''(x, y)\right] \mathrm{d}\sigma$;

(2) 若 $I \geqslant 0$, 证明 $\mathrm{d}[f(x, y)] = 0$.

19. 设曲面 $\Sigma : z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, 取上侧, $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是 Σ 的单位外法向量. 计算

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \left[(z^2 - y^2)\cos\alpha + (x^2 - z^2)\cos\beta + (y^2 - x^2)\cos\gamma\right] \mathrm{d}S$$

20. 设幂级数 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-\infty<x<+\infty)$ 满足 $y''+2xy'+2y=0$, 且 $y(0)=1, y'(0)=0$.

(1) 证明: $a_{n+2}=-\dfrac{2}{n+2}a_n, n=0,1,2,\cdots$;

(2) 求 $y(x)$ 的表达式.

21. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵;

(2) 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 均为对角矩阵.

22. 设随机变量 (X,Y) 服从区域 $D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,1-\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\right\}$ 上的均匀分布, 记

$$Z=\begin{cases}1 & ,X+Y>1\\ 0 & ,X+Y\leqslant 1\end{cases},U=XZ$$ 的分布函数为 $F_U(u)$.

(1) 证明 X 与 Z 不独立;

(2) 计算 $F_U\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 的值.

第 3 章 测试卷三

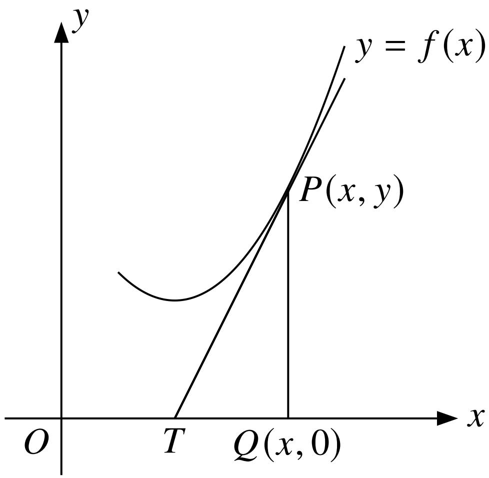
一、选择题 (本大题共 10 个小题, 每小题 5 分, 共 50 分)

1. 曲线 $y = 2^{\frac{1}{x}} + \ln(e^{2x} + 1)(x > 0)$ 的斜渐近线为 (　)

A. $y = x + e$　　B. $y = x - e$　　C. $y = 2x + 1$　　D. $y = 2x - 1$

2. 如图所示, 从曲线 $y=f(x)$ 上任一点 P 分别作切线交 x 轴于点 T, 作垂线交 x 轴于点 Q, 三角形 PTQ 的面积为 $\frac{1}{2}$, 则 ( )

A. $y'=y$ B. $y'=-y$ C. $(y')^2=y$ D. $y'=y^2$



3. 函数 $f(x,y)=x+y\sin x$(　)

A. 有极大值点, 没有极小值点

B. 没有极大值点, 有极小值点

C. 既有极大值点, 也有极小值点

D. 既没有极大值点, 也没有极小值点

4. 已知平面区域 D 由曲线 $L_1: y=\sqrt{1-x^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $L_2:\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ 围成. ∂D 为 D 的边界, 取顺时针方向, 则 $I=\oint_{\partial D} e^{xy}y^2\mathrm{d}x+[e^{xy}(1+xy)+x]\,\mathrm{d}y=(\quad)$

A. $-\dfrac{5\pi}{32}$　　B. $\dfrac{5\pi}{32}$　　C. $-\dfrac{5\pi}{16}$　　D. $\dfrac{5\pi}{16}$

5. 设 $\boldsymbol{A}^*$ 为 3 阶非零矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^* = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3], \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, k, k_1, k_2$ 为任意常数, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的通解为 (　)

A. $k(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$　B. $k(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3)$　C. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$　D. $k_1\boldsymbol{\alpha}_2 + k_2\boldsymbol{\alpha}_3$

6. 设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ 均为 n 阶矩阵, 给出以下结论, 正确结论的个数为 (　)

(1) 若 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$ 相似于 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}_1$ 相似于 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{A}_2$ 相似于 $\boldsymbol{B}_2$

(2) 若 $\boldsymbol{A}_1$ 相似于 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{A}_2$ 相似于 $\boldsymbol{B}_2$, 则 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$ 相似于 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}$

(3) 若 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$ 合同于 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}_1$ 合同于 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{A}_2$ 合同于 $\boldsymbol{B}_2$

(4) 若 $\boldsymbol{A}_1$ 合同于 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{A}_2$ 合同于 $\boldsymbol{B}_2$, 则 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \end{bmatrix}$ 合同于 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下化为 $y_1^2-y_2^2$, 其中 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$. 若 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{e}_2,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1]$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}z$ 下化为 (　)

A. $z_1^2+z_2^2+z_3^2$　　B. $z_1^2-z_2^2+z_3^2$　　C. $-z_1^2+z_3^2$　　D. $-z_1^2-z_3^2$

8. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)(-\infty < x < +\infty)$, 且 $E(|X|) = a \neq 1$, 则当 $x \to +\infty$ 时, $1 - \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 是 $\frac{1}{x}$ 的 (　)

A. 低阶无穷小　　B. 高阶无穷小　　C. 同阶但不等价无穷小　　D. 等价无穷小

9. 已知总体 X 服从标准正态分布, X_1, X_2 是来自总体 X 的简单随机样本. 记 $Y = X_1^2 + X_2^2, F(y)$ 是 Y 的分布函数, 给出以下结论, 正确结论的个数为 (　)

(1)$Y \sim E\left(\dfrac{1}{2}\right)$　　(2)$Y \sim \chi^2(2)$　　(3)$E[F(Y)] = \dfrac{1}{2}$　　(4)$\dfrac{Y}{2X_1^2} \sim F(2,1)$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

10. 设假设检验中的显著性水平为 α, 则以下选项, 概率为 $1-\alpha$ 的是 (　)

A. 原假设 H_0 成立, 经检验被接受　　B. 原假设 H_0 成立, 经检验被拒绝

C. 原假设 H_0 不成立, 经检验被接受　　D. 原假设 H_0 不成立, 经检验被拒绝

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

11. 设 $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{i(i-1)}}{n^2 + i(i-1)} (n = 2, 3, \cdots)$, 则 $\lim_{n \to \infty} a_n =$ __________.

12. 设 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 由方程 $e^z - xyz = 0$ 及 $xz^2 = \ln y$ 所确定, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{1}{2}} =$ ________.

13. 微分方程 $y' + 1 = e^{-y}\sin x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解为 ________.

14. 平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid \dfrac{1}{1+x^2}\leqslant y\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right\}$ 绕 x 轴旋转一周形成的旋转体体积为 __________.

15. 若正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A} =$ ____________.

16. 抛掷一枚均匀的硬币, 直到正、反面均出现为止, 则抛掷次数 X 的数学期望为 __________.

三、解答题 (本大题共 6 个小题, 第 17 题 10 分, 第 18 ~ 22 题每题 12 分, 共 70 分)

17. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有一阶导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+e^{x^2}\sin x}{x^2}=1$, 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

18. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(e^x-1)-\ln x & ,x>0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\cdots$, 且 $x_1=1$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间, 并求 $f'_+(0)$;

(2) 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

19. 设常数 $a > 1, b > 0$. 证明:

(1) 当 $x \to +\infty$ 时, $\dfrac{1}{a^x} = o\left(\dfrac{1}{x^b}\right)$;

(2) 微分方程 $y' + a^x y = x^b (x > 0)$ 的任一解 $y(x)$ 满足 $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

20. 设锥面 Σ 的顶点为原点, 准线为曲线 $\Gamma:\begin{cases} z=y^2 \\ x=1 \end{cases}$ $(|y| \leqslant 1)$.

(1) 求 Σ 的方程;

(2) 计算 $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, Σ 取上侧.

21. 已知 3 维列向量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量, $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0, |\boldsymbol{A}|=1, \boldsymbol{\eta}$ 是 3 维非零列向量, $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta})=0$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量;

(2) 记 $\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\dfrac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$, 证明二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2-(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$$

在正交变换下的标准形为 $y_1^2-y_2^2$.

22. 设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(0,0;1,1;\rho)$, 若 $E\left[(X-Y)^2\right]=1$.

(1) 求 ρ;

(2) 证明在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度为 $f_{X|Y}(x|y)=\sqrt{\dfrac{2}{3\pi}}e^{-\frac{4x^2-4xy+y^2}{6}}, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}$;

(3) 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 (2) 中总体 X 的简单随机样本, 求 y 的最大似然估计量.

第 4 章　测试卷四

一、选择题 (本大题共 10 个小题, 每小题 5 分, 共 50 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 给出下列命题, 正确命题的个数为 (　)

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=1$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=x$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$

(3) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$, 则曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线斜率为 1

(4) 若曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线斜率为 1 , 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\dfrac{2n+i}{2n}\right)\dfrac{1}{n}=($ $)$

A. $\int_{1}^{\frac{9}{4}}\dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ B. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{2}}\dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ C. $2\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ D. $2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

3. 设 $\dfrac{x^2-x-1}{x^2(x+1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n, x\in(0,2)$, 则 a_n 的表达式为 ( )

A. $(-1)^n n-\dfrac{1}{2^n}$

B. $(-1)^{n+1}\left[(n+1)-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right]$

C. $(-1)^n\left(n-\dfrac{1}{2^n}\right)$

D. $(-1)^{n+1}(n+1)-\dfrac{1}{2^{n+1}}$

4. 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1(x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$, 则 $\iint\limits_{\Sigma} xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\mathrm{d}S=(\quad)$

A. $\dfrac{1}{16}$　　B. $\dfrac{1}{32}$　　C. $\dfrac{\pi}{16}$　　D. $\dfrac{\pi}{32}$

5. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 是线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + 2x_3 = b \\ x_1 + cx_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$ 的两个不同解, k, k_1, k_2 为任意常数, 则该线性方程组的通解是 ( )

A. $(k_1+1)\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2$ B. $(k_1-1)\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2$ C. $(k+1)\boldsymbol{\eta}_1 - k\boldsymbol{\eta}_2$ D. $(k-1)\boldsymbol{\eta}_1 - k\boldsymbol{\eta}_2$

6. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,1,a]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [1,a,1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [a,1,1]^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = [1,1,a]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = [-2,a,4]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3 = [-2,a,a]^{\mathrm{T}}$ 线性表示, 但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 则 $a = (\quad)$

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

7. 若 $f(x_1,x_2,x_3)=(ax_1+2x_2-3x_3)^2+(x_2-2x_3)^2+(x_1+ax_2-x_3)^2$ 是正定二次型, 则 a 的取值范围是 (　)

A. $a \neq 1$　　B. $a \neq -\frac{1}{2}$　　C. $a \neq 1$ 或 $a \neq -\frac{1}{2}$　　D. $a \neq 1$ 且 $a \neq -\frac{1}{2}$

8. 设参数 θ 的区间估计的显著性水平为 0.1, 现独立重复抽样 100 次得到 100 个置信区间 $I_i(i = 1, 2, \cdots, 100)$, 则 (　)

A. θ 值落人任一 I_i 的概率为 0.9

B. θ 值落人任 $-I_i$ 的概率为 0.1

C. 约有 10 个区间包含 θ 值

D. 约有 90 个区间包含 θ 值

9. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & ,0<x<\pi \\ 0 & ,其他\end{cases}$,$Y$ 表示对 X 的 4 次独立重复观察中观测值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数, 则能使 $P\{Y=k\}$ 最大的 k 是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

10. 设总体 X 的分布律为 $P\{X=x\}=\theta^{-\frac{x-2}{3}}(1-\theta)^{\frac{x+1}{3}}, x=-1,2, 0<\theta<1$ 为未知参数, X_1, X_2 为来自总体 X 的简单随机样本, 则 θ 的最大似然估计量及其无偏性为 (　)

A. $\hat{\theta}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{2} X_i$, 无偏

B. $\hat{\theta}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{2} X_i$, 有偏

C. $\hat{\theta}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{2} X_i$, 无偏

D. $\hat{\theta}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{2} X_i$, 有偏

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

11. 设 $f(x) = \dfrac{1}{2^x + 1}, x \in \mathbf{R}$, 则 $f^{(4)}(0) =$ ____________.

12. 由曲面 $z = 8 - x^2 - y^2$ 与平面 $z = 2x$ 围成的空间有界闭区域 Ω 的体积为 __________.

13. 函数 $f(x,y)=1+x+2y+x^2+xy^2$ 在点 $(0,0)$ 处的二阶泰勒多项式为 ________.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1 & ,0<x\leqslant 1 \\ 0 & ,-1\leqslant x\leqslant 0 \end{cases}$，若 $a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x(n=0,1,\cdots)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=$ __________.

15. 设 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,-2,1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [0,1,1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [3,2,1]^{\mathrm{T}}$ 下的坐标为 $[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$, 而 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$, 且 $y_1 = x_1 - x_2 - x_3, y_2 = -x_1 + x_2, y_3 = x_1 + 2x_3$, 则由基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P} =$ __________.

16. 设总体 X 的分布函数 $F(x)$ 是严格单调增加的连续函数, X_1, X_2 为总体 X 的简单随机样本, 记 $Y = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \ln F(X_i)$, 则 $P\left\{F(X) < E(Y) + \frac{3}{2}\right\} =$ ________.

三、解答题 (本大题共 6 个小题, 第 17 题 10 分, 第 18 ~ 22 题每题 12 分, 共 70 分)

17. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$, 证明 $g(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

18. 设曲线 $\Gamma:\begin{cases} y-z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ 从 z 从正向看去, Γ 去逆时针方向, 求 $\oint_{\Gamma} xyz\mathrm{d}z$.

19. 设函数 $f(x,y)$ 一阶偏导数连续, $f(x,y)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分, $u(0,0) = 1$, 且对于任意的 t, 有 $1 + \int_0^t f(x,1)\mathrm{d}x = \int_1^0 f(x,t)\mathrm{d}x$.

(1) 求 $\mathrm{d}u$;

(2) 求 $u(x,y)$ 的极值点.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导, $f''(x)<0$, 任取 $0<x_1<x_2$, 证明:

(1) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi_2)x_2-f'(\xi_1)x_1$, 其中 $0<\xi_1<x_1, 0<\xi_2<x_2$, 且 ξ_1,ξ_2 均唯一;

(2) 在 (1) 的条件下, $\xi_1<\xi_2$.

21. 已知 $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -a & 2 & a+3 \\ -a-3 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$, $r(A+E)=1$.

(1) 求 a 的值;

(2) 计算 $A^{n-1}+A^{n-2}+\cdots+A+E\,(n\geqslant 2)$.

22. 设随机变量 X 服从标准正态分布, 其概率密度为 $\varphi(x)$, 又 $g(x)=\begin{cases}\cos x & ,|x|<\pi\\ 0 & ,|x|\geqslant\pi\end{cases}$,

$$f(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}g(x)g(y)(-\infty<x,y<+\infty)$$

(1) $f(x,y)$ 是否为某二维随机变量 (X,Y) 的概率密度, 说明理由;

(2) 求 Y 的边缘分布;

(3) 证明 X 与 Y 不相关, 也不独立.