Практическое задание к уроку 9

Исследовать функцию на условный экстремум

1. $U_1 = 3 - 8x + 6y$
2. $U_2 = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15$

✓ **Check**

Рассмотрим задачу для $U_1 = 3 - 8x + 6y$ при условии $g(x, y) = x^2 + y^2 - 36 = 0$.

Для исследования функции на условный экстремум, необходимо использовать метод множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа $\mathcal{L}$ имеет вид:
$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda g(x, y)$
$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3 - 8x + 6y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 36)$

Найдем частные производные функции Лагранжа по x, y и λ:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -8 + \lambda \cdot 2x = 0$
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 6 + \lambda \cdot 2y = 0$
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 36 = 0$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \frac{25}{\lambda^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \lambda^2 = \frac{25}{36} \end{cases}$$

Получаем две точки: $\left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, \frac{5}{6}\right)$ и $\left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{5}{6}\right)$

Найдем вторые производные:

$$L''_{xx} = 2\lambda$$

$$L''_{yy} = 2\lambda$$

$$L''_{\lambda\lambda} = 0$$

$$L''_{xy} = L''_{yx} = 0$$

$$L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x$$

$$L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 2y$$

Составим матрицу Гёссе:

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Далее найдем определитель в общем виде, а затем уже разберемся с каждой точкой.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} - 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda \end{vmatrix} + 2y \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda \\ 2y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2x) \cdot 4x\lambda + 2y \cdot (-4y\lambda) = -8\lambda(x^2 + y^2)$$

По условию задачи $x^2 + y^2 = 36$, тогда

$$\Delta = -8\lambda \cdot 36 = -288\lambda$$

Т.е. знак определителя зависит только от знака λ.

Если $\lambda = \frac{5}{6}$, то $\Delta < 0$, следовательно $\left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, \frac{5}{6}\right)$ - точка минимума.

Если $\lambda = -\frac{5}{6}$, то $\Delta > 0$, следовательно $\left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{5}{6}\right)$ - точка максимума.

✓ **Check**

Рассмотрим задачу для $U_2 = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15$ при условии $g(x, y) = x^2 + 16y^2 - 64 = 0$.

1. Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U_2(x, y) + \lambda g(x, y)$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda \left(x^2 + 16y^2 - 64\right)$$

2. Частные производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x + 12y + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 12x + 64y + 32\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + 16y^2 - 64 = 0$$

3. Решим систему уравнений: