Практическое задание к уроку 11

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д’Аламбера:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n!)^2}{((n+1)!)^2\cdot n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot 1}{1\cdot n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} =$
$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+1)n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n\cdot n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$

Таким образом, исследуемый ряд **сходится**.

---

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

- если $q < 1$, то ряд сходится;
- если $q > 1$, то ряд расходится;
- если $q = 1$, то радикальный признак Коши не работает.

Найдем предел:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

т.к. предел равен $\frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится.

---

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln(n)}$$

$$-\frac{1}{1} + \frac{1}{2+\ln(2)} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+\ln(n)} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln(n)}$$

- ряд является знакочередующимся.

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

– члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий $|a_{n+1}| < |a_n|$ – поскольку бОльшим знаменателям соответствуют мЕньшие дроби. Таким образом, убывание монотонно.

Этот знакопеременный ряд сходится, причем условно.

---

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

- если $q > 1$, то ряд сходится;
- если $q < 1$, то ряд расходится;
- если $q = 1$, то признак Раабе не работает.

$$\frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \ldots + \frac{3^n}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

Найдем предел:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{3^n}{2^n} : \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\infty$$

т.к. предел равен $-\infty < 1$, то ряд расходится.

---

5. Разложить функцию по Тейлору в единице:

$$f(x) = \ln(16x^2)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Найдем частные производные функции $f(x)$

$f'(x) = 2\ln(16x) = 2\frac{1}{16x} \cdot 16 = \frac{2}{x}$
$f''(x) = (\frac{2}{x})' = -\frac{2}{x^2}$
$f'''(x) = (-\frac{2}{x^2})' = \frac{4}{x^3}$
$f''''(x) = (\frac{4}{x^3})' = -\frac{12}{x^4}$

В данном случае, когда порядок разложения не указан, выбор порядка зависит от требуемой точности и сложности вычислений. Обычно, для практических целей достаточно разложения до 3-4 порядка, так как с увеличением порядка вычисления становятся более сложными, а прирост точности может быть незначительным.

Вычислим в точке $x = 1$ значение функции и ее производных.

$$f(1) = \ln(16 \cdot 1^2) = \ln(16) = 4\ln(2)$$
$$f'(1) = \frac{2}{1} = 2$$
$$f''(1) = -\frac{2}{1^2} = -2$$
$$f'''(1) = \frac{4}{1^3} = 4$$
$$f''''(1) = -\frac{12}{1^4} = -12$$

Теперь можем записать разложение Тейлора до 4-го порядка включительно:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 +$$
$$+ \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f''''(1)}{4!}(x-1)^4 + O(x-1)^5$$

Подставим значения:

$$f(x) \approx 4\ln(2) + 2(x-1) - \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 - \frac{12}{4!}(x-1)^4 + O(x-1)^5$$

Упростим:

$$f(x) \approx 4\ln(2) + 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}(x-1)^4 + O(x-1)^5$$

Если требуется более высокая точность, можно продолжить разложение, вычисляя производные более высоких порядков.

---

6. Дана функция $f(x) = x^2$

1. Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на отрезке $x \in [-\pi; \pi]$.
2. Построить график функции и ее разложения.