Практическое задание к уроку 11

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д’Аламбера:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n!)^2}{((n+1)!)^2\cdot n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot 1}{1\cdot n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} =$
$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+1)n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n\cdot n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$

Таким образом, исследуемый ряд **сходится**.

---

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

- если $q < 1$, то ряд сходится;
- если $q > 1$, то ряд расходится;
- если $q = 1$, то радикальный признак Коши не работает.

Найдем предел:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

т.к. предел равен $\frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится.

---

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln(n)}$$

$$-\frac{1}{1} + \frac{1}{2+\ln(2)} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+\ln(n)} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln(n)}$$

- ряд является знакочередующимся.

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

– члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий $|a_{n+1}| < |a_n|$ – поскольку бОльшим знаменателям соответствуют мЕньшие дроби. Таким образом, убывание монотонно.

Этот знакопеременный ряд сходится, причем условно.

---

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

- если $q > 1$, то ряд сходится;
- если $q < 1$, то ряд расходится;
- если $q = 1$, то признак Раабе не работает.

$$\frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \ldots + \frac{3^n}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

Найдем предел:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{3^n}{2^n} : \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\infty$$

т.к. предел равен $-\infty < 1$, то ряд расходится.

---

5. Разложить функцию по Тейлору в единице:

$$f(x) = \ln(16x^2)$$