# Практическое задание к уроку 9

## Исследовать функцию на условный экстремум

1. $U_1 = 3 - 8x + 6y$
2. $U_2 = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15$

✓ **Check**

Рассмотрим задачу для $U_1 = 3 - 8x + 6y$ при условии
$g(x, y) = x^2 + y^2 - 36 = 0$.

Для исследования функции на условный экстремум, необходимо использовать метод множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа $\mathcal{L}$ имеет вид:
$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda g(x, y)$
$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3 - 8x + 6y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 36)$

Найдем частные производные функции Лагранжа по $x$, $y$ и $\lambda$:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -8 + \lambda \cdot 2x = 0$
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 6 + \lambda \cdot 2y = 0$
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 36 = 0$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \frac{25}{\lambda^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \lambda^2 = \frac{25}{36} \end{cases}$$

Получаем две точки: $\left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, \frac{5}{6}\right)$ и $\left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{5}{6}\right)$

Найдем вторые производные:

$$L''_{xx} = 2\lambda$$

$$L''_{yy} = 2\lambda$$

$$L''_{\lambda\lambda} = 0$$

$$L''_{xy} = L''_{yx} = 0$$

$$L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x$$

$$L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 2y$$

Составим матрицу Гёссе:

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Далее найдем определитель в общем виде, а затем уже разберемся с каждой точкой.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} - 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda \end{vmatrix} + 2y \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda \\ 2y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2x) \cdot 4x\lambda + 2y \cdot (-4y\lambda) = -8\lambda(x^2 + y^2)$$

По условию задачи $x^2 + y^2 = 36$, тогда

$$\Delta = -8\lambda \cdot 36 = -288\lambda$$

Т.е. знак определителя зависит только от знака $\lambda$.

Если $\lambda = \frac{5}{6}$, то $\Delta < 0$, следовательно $\left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, \frac{5}{6}\right)$ - точка минимума.

Если $\lambda = -\frac{5}{6}$, то $\Delta > 0$, следовательно $\left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{5}{6}\right)$ - точка максимума.

✓ **Check**

Рассмотрим задачу для $U_2 = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15$ при условии $g(x, y) = x^2 + 16y^2 - 64 = 0$.

**1. Функция Лагранжа:**

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U_2(x, y) + \lambda g(x, y)$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda\left(x^2 + 16y^2 - 64\right)$$

**2. Частные производные функции Лагранжа:**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x + 12y + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 12x + 64y + 32\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + 16y^2 - 64 = 0$$

**3. Решим систему уравнений:**

$4x + 12y + 2\lambda x = 0$
$12x + 64y + 32\lambda y = 0$
$x^2 + 16y^2 = 64$

Из первого уравнения:

$4x + 12y + 2\lambda x = 0$
$x(4 + 2\lambda) + 12y = 0$
$x = -\frac{12y}{4+2\lambda}$

Из второго уравнения:

$12x + 64y + 32\lambda y = 0$
$12x + y(64 + 32\lambda) = 0$
$y = -\frac{12x}{64+32\lambda}$

Подставим $x = -\frac{12y}{4+2\lambda}$ во второе уравнение:

$12\left(-\frac{12y}{4+2\lambda}\right) + y(64 + 32\lambda) = 0$
$-\frac{144y}{4+2\lambda} + y(64 + 32\lambda) = 0$
$y\left(-\frac{144}{4+2\lambda} + 64 + 32\lambda\right) = 0$

Если $y \neq 0$:

$-\frac{144}{4+2\lambda} + 64 + 32\lambda = 0$
$-144 + 64(4 + 2\lambda) + 32\lambda(4 + 2\lambda) = 0$
$-144 + 256 + 128\lambda + 128\lambda + 64\lambda^2 = 0$

$64\lambda^2 + 256\lambda + 112 = 0$
$\lambda^2 + 4\lambda + \frac{7}{4} = 0$

Решаем квадратное уравнение:

$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16-7}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-4 \pm 3}{2}$
$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{7}{2}$

**4. Найдём точки экстремума**

Для $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$:
$x = -\frac{12y}{4-1} = -\frac{12y}{3} = -4y$
$x^2 + 16y^2 = 64$
$(-4y)^2 + 16y^2 = 64$
$16y^2 + 16y^2 = 64$
$32y^2 = 64$
$y^2 = 2$
$y = \pm\sqrt{2}$
$x = -4(\pm\sqrt{2}) = \mp 4\sqrt{2}$

Точки: $(4\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $(-4\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Для $\lambda_2 = -\frac{7}{2}$:
$x = -\frac{12y}{4-7} = -\frac{12y}{-3} = 4y$
$x^2 + 16y^2 = 64$
$(4y)^2 + 16y^2 = 64$
$16y^2 + 16y^2 = 64$
$32y^2 = 64$
$y^2 = 2$
$y = \pm\sqrt{2}$
$x = 4(\pm\sqrt{2}) = \pm 4\sqrt{2}$

Точки: $(4\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $(-4\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Найдем вторые производные:

$$L''_{xx} = 4 + 2\lambda$$

$$L''_{yy} = 64 + 32\lambda$$

$$L''_{\lambda\lambda} = 0$$

$$L''_{xy} = L''_{yx} = 12$$

$$L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x$$

$$L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 32y$$

**5. Проверим точки экстремума**

Для проверки точек экстремума, необходимо использовать достаточные условия (вторые производные и определитель матрицы Гессе).

Составим матрицу Гёссе:

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda \end{pmatrix}$$

Далее найдем определитель в общем виде, а затем уже разберемся с каждой точкой.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} 4+2\lambda & 12 \\ 12 & 64+32\lambda \end{vmatrix} - 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 12 \\ 32y & 64+32\lambda \end{vmatrix} + 32y \cdot \begin{vmatrix} 2x & 4+2\lambda \\ 32y & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2x) \cdot (2x \cdot (64+32\lambda) - 12 \cdot 32y) + 32y \cdot (2x \cdot 12 - 32y \cdot (4+2\lambda)) =$$

$$= -128\left((\lambda+2)x^2 - 12xy + 16(\lambda+2)y^2\right)$$

По условию задачи $x^2 + 16y^2 = 64$, тогда

$$\Delta = -128\left((\lambda+2)64 - 12xy\right)$$

$$\left\{x = -4\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}, \lambda = -\frac{7}{2}\right\}, \left\{x = 4\sqrt{2}, y = \sqrt{2}, \lambda = -\frac{7}{2}\right\}$$

$$\left\{x = -4\sqrt{2}, y = \sqrt{2}, \lambda = -\frac{1}{2}\right\}, \left\{x = 4\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}, \lambda = -\frac{1}{2}\right\},$$

Т.е. знак определителя зависит не только от знака $\lambda$.

Если $\lambda = -\frac{7}{2}, x = \pm 4\sqrt{2}, y = \pm\sqrt{2};$, то $\Delta > 0$, следовательно

$$\left\{x = -4\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}, \lambda = -\frac{7}{2}\right\}, \left\{x = 4\sqrt{2}, y = \sqrt{2}, \lambda = -\frac{7}{2}\right\}$$

- точки максимума.

Если $\lambda = -\frac{1}{2}$, то $\Delta < 0$, следовательно

$$\left\{x = -4\sqrt{2}, y = \sqrt{2}, \lambda = -\frac{1}{2}\right\}, \left\{x = 4\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}, \lambda = -\frac{1}{2}\right\},$$

- точки минимума.

# Найти производную функции $U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению вектора $\vec{c} = (-9, 8, -12)$ в точке $M(8, -12, 9)$

1. **Вычислим градиент функции $U$**:

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Для $U = x^2 + y^2 + z^2$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 2z.$$

Следовательно:

$$\nabla U = (2x, 2y, 2z).$$

2. **Подставим точку $M(8, -12, 9)$ в градиент**:

$$\nabla U\big|_M = (2 \cdot 8, 2 \cdot -12, 2 \cdot 9) = (16, -24, 18).$$

3. **Нормализуем вектор направления $\vec{c} = (-9, 8, -12)$**:
Длина вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-9)^2 + 8^2 + (-12)^2} = \sqrt{81 + 64 + 144} = \sqrt{289} = 17.$$

Нормализованный вектор $\hat{c}$:

$$\hat{c} = \left(-\frac{9}{17}, \frac{8}{17}, -\frac{12}{17}\right).$$

4. **Вычислим производную по направлению вектора $\vec{c}$:**
   Производная по направлению вектора $\vec{c}$ определяется как скалярное произведение $\nabla U\big|_M$ и $\hat{c}$:

$$D_{\vec{c}}U = \nabla U\Big|_M \cdot \hat{c} = (16, -24, 18) \cdot \left(-\frac{9}{17}, \frac{8}{17}, -\frac{12}{17}\right).$$

   Вычислим скалярное произведение:

$$D_{\vec{c}}U = 16 \cdot \left(-\frac{9}{17}\right) + (-24) \cdot \frac{8}{17} + 18 \cdot \left(-\frac{12}{17}\right).$$

   Упростим:

$$D_{\vec{c}}U = -\frac{144}{17} - \frac{192}{17} - \frac{216}{17} = -\frac{552}{17}.$$

Ответ:

$$D_{\vec{c}}U = -\frac{552}{17}.$$

# Найти производную функции $U = e^{x^2+y^2+z^2}$ по направлению вектора $\vec{d} = (4, -13, -16)$ в точке $M(-16, 4, -13)$

**Вычислим градиент функции $U$:**

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Для $U = e^{x^2+y^2+z^2}$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}.$$

Следовательно:

$$\nabla U = (2xe^{x^2+y^2+z^2}, 2ye^{x^2+y^2+z^2}, 2ze^{x^2+y^2+z^2}).$$

2. **Подставим точку $M(-16, 4, -13)$ в градиент**:

$$\nabla U\big|_M = (-32e^{441}, 8e^{441}, -26e^{441}).$$

3. **Нормализуем вектор направления $\vec{d} = (4, -13, -16)$**:
   Длина вектора $\vec{d}$:

$$|\vec{d}| = \sqrt{(4)^2 + (-13)^2 + (-16)^2} = \sqrt{16 + 169 + 256} = \sqrt{441} = 21.$$

   Нормализованный вектор $\hat{d}$:

$$\hat{d} = \left(\frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21}\right).$$

4. **Вычислим производную по направлению вектора $\vec{c}$**:
   Производная по направлению вектора $\vec{c}$ определяется как скалярное произведение $\nabla U\big|_M$ и $\hat{d}$:

$$D_{\vec{d}}U = \nabla U\big|_M \cdot \hat{d} = (-32e^{441}, 8e^{441}, -26e^{441}) \cdot \left(\frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21}\right).$$

   Вычислим скалярное произведение:

$$D_{\vec{d}}U = -\frac{32e^{441}4}{21} - \frac{8e^{441}13}{21} + \frac{26e^{441}16}{21} = \frac{184e^{441}}{21}.$$

   Ответ:

$$D_{\vec{d}}U = \frac{184e^{441}}{21}.$$