Практическое задание к уроку 7

Урок 7. Производная функции одной переменной. Часть 2

Question

Найти длину x и ширину y прямоугольника при заданном периметре P=144 см, при которых данный прямоугольник имеет наибольшую площадь S.

$P = 144; S = x(72 - x) \to S'(x) = 72 - 2x \to x = \frac{72}{2} = 36 \to S''(x) = -2 < 0$
Вторая производная отрицательна, следовательно, функция $S(x)$ имеет максимум при $x = 36$ (см). Длина другой стороны $y = 72 - x = 72 - 36 = 36$ (см).

Таким образом наибольшую площадь $S = 36 \cdot 36 = 936$ (см2) при заданном периметре $P = 144$ (см) имеет квадрат со стороной **36** сантиметров.

Question

Найти экстремумы функций (если они есть)

1. y = |2x|
2. y=xˆ3
3. y = eˆ(3x) (или то же самое, что exp(3x))
4. y=xˆ3-5x

1. $y = |2x|$

Для функции $y = |2x|$ существует "излом" в точке $x = 0$, так как это модульная функция.

- При $x > 0$ $y = 2x$.
- При $x < 0$ $y = -2x$.

В точке $x = 0$ производная не определена, поэтому это критическая точка. Функция достигает минимума в точке $x = 0$, где $y = 0$.

Таким образом, минимум в точке $x = 0$, $y = 0$.

---

2. $y = x^3$

$y' = 3x^2$

Приравниваем производную к нулю: $3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Вторая производная $y = x^3$ равна $y'' = 6x$. При $x = 0$ она также равна нулю, что указывает на точку перегиба, а не на экстремум.

Таким образом, экстремумов нет.

---

3. $y = e^{3x}$

$y' = 3e^{3x}$

Так как $e^{3x} > 0$ для всех значений x, производная всегда положительна, что указывает на строгое возрастание функции.

Таким образом, экстремумов нет.

---

4. $y = x^3 - 5x$

$y' = 3x^2 - 5$

Приравниваем производную к нулю: $3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Проверим вторую производную $y'' = 6x$:

- Для $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ вторая производная положительна ($y'' > 0$), поэтому это точка минимума.
- Для $x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$ вторая производная отрицательна ($y'' < 0$), поэтому это точка максимума.

Таким образом, минимум при $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ и максимум при $x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$.