Практическое задание к уроку 8

1. Найти область определения функции.

$$z = \sqrt{1 - x^3} + \ln(y^2 - 1)$$
$$\begin{cases} 1 - x^3 \geq 0, \\ y^2 - 1 > 0. \end{cases} \rightarrow$$
$$\begin{cases} (1 - x)(1 + x + x^2) \geq 0, \\ (y - 1)(y + 1) > 0. \end{cases} \rightarrow (y > 1 \wedge x \leq 1) \vee (y < -1 \wedge x \leq 1)$$

2. Найти производные 1-го порядка функции.

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$
$$z'_x = \frac{3\left(\frac{\ln(x)}{\ln(y)} + 1\right)^2}{x \ln(y)}; z'_y = -\frac{3\ln(x)\left(\frac{\ln(x)}{\log(y)} + 1\right)^2}{y \ln^2(y)}$$

3. Найти полный дифференциал функции в точке (1;1).

$$z = \sqrt{\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2\text{xy}}$$

Используем правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy\right) \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy\right) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} + 2y \rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy}}\left(-\sin\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} + 2y\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy\right) \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy\right) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + 2x \rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\cos\left(\frac{x}{y}\right)+2xy}}\left(\frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + 2x\right)$$

1. **Частная производная по (x) в точке ((1, 1)):**

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{2\sqrt{\cos(1)+2}}(-\sin(1)\cdot 1 + 2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\cos(1)+2}}(2 - \sin(1))$$

2. **Частная производная по (y) в точке ((1, 1)):**

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{2\sqrt{\cos(1)+2}}\left(\frac{1}{1}\sin(1) + 2\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\cos(1)+2}}(\sin(1) + 2)$$

Полный дифференциал функции (z) в точке ((1, 1)) вычисляется по формуле:

$$dz = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)} dy$$

Подставляем найденные значения:

$$dz = \frac{1}{2\sqrt{\cos(1)+2}}(2 - \sin(1))dx + \frac{1}{2\sqrt{\cos(1)+2}}(\sin(1) + 2)dy$$

$$dz = \frac{1}{2\sqrt{\cos(1)+2}}((2 - \sin(1))dx + (\sin(1) + 2)dy)$$

Таким образом, полный дифференциал функции (z) в точке ((1, 1)) равен:

$$dz = \frac{1}{2\sqrt{\cos(1)+2}}((2 - \sin(1))dx + (\sin(1) + 2)dy)$$

4. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - 6x + xy + y^2 - 9y$

Стационарные точки находятся путем решения системы уравнений, полученных приравниванием частных производных к нулю.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 6 + y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 9$$

$$2x - 6 + y = 0 \quad (1)$$
$$x + 2y - 9 = 0 \quad (2)$$

Из уравнения (1) выразим y:
$$y = 6 - 2x$$

Подставим y в уравнение (2):
$$x + 2(6 - 2x) - 9 = 0$$
$$x + 12 - 4x - 9 = 0$$
$$-3x + 3 = 0$$
$$x = 1$$

Теперь подставим $x = 1$ обратно в выражение для y:
$$y = 6 - 2 \cdot 1 = 4$$

Таким образом, стационарная точка:
$$(x, y) = (1, 4)$$

Для определения характера стационарной точки используем второй дифференциал (дифференциал второго порядка).

1. **Вычисление вторых производных:**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

2. **Матрица Гессе:**

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. **Определитель матрицы Гессе:**

$$\det(H) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3$$

4. **Собственные значения матрицы Гессе:**

Собственные значения матрицы Гессе находятся из уравнения:

$$\det(H - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$
$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$

Собственные значения:
$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1$

Оба собственных значения положительны, следовательно, матрица Гессе положительно определена, и точка ((1, 4)) является точкой минимума.

Ответ:

Функция $z = x^2 - 6x + xy + y^2 - 9y$ имеет точку минимума в точке ((1, 4)) и значение функции в этой точке равно -21