

Практическое задание к уроку 4

Урок 4. Предел функции. Часть 1

Question

Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечности.

График функции $f(x) = \cos(1/x) + x\cos(x)$

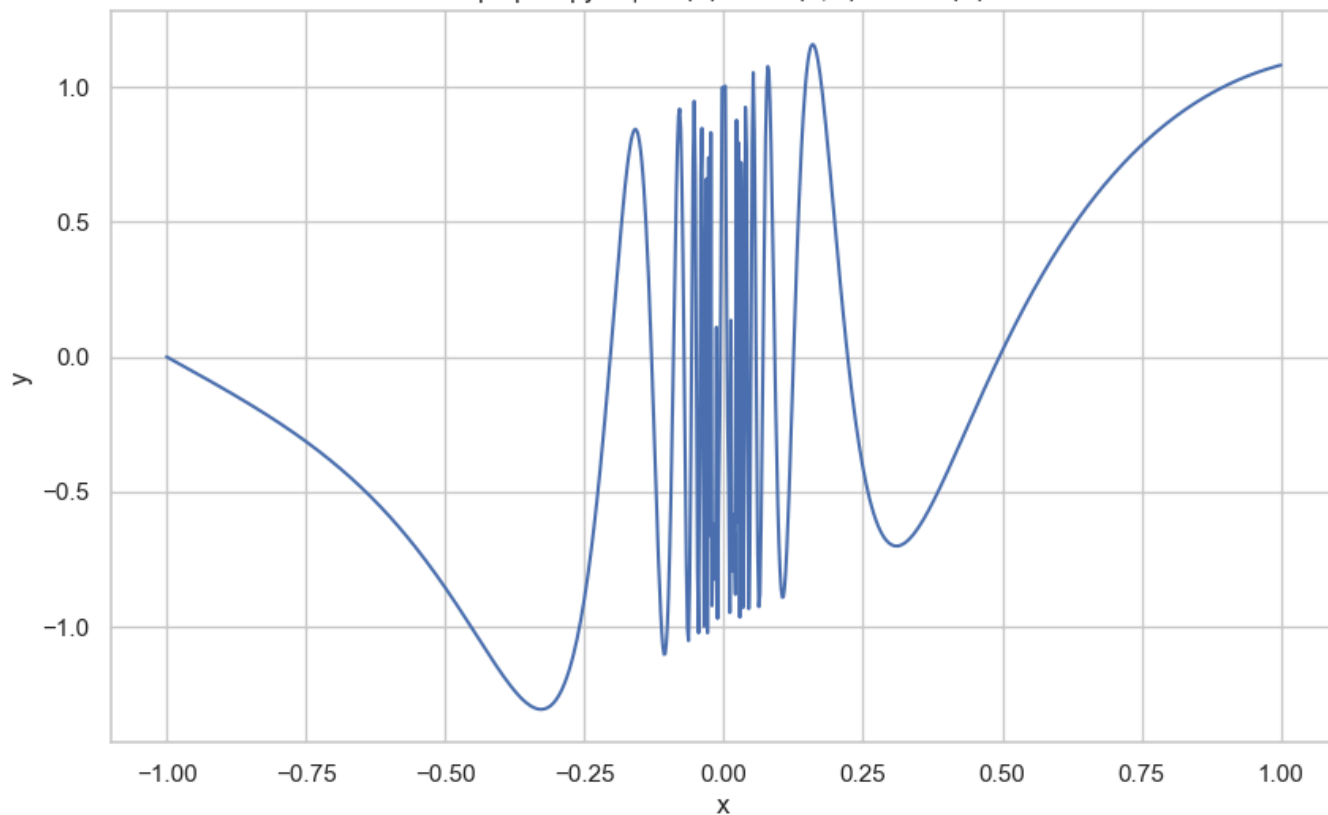


График функции $f(x) = \cos(1/x) + x\cos(x)$

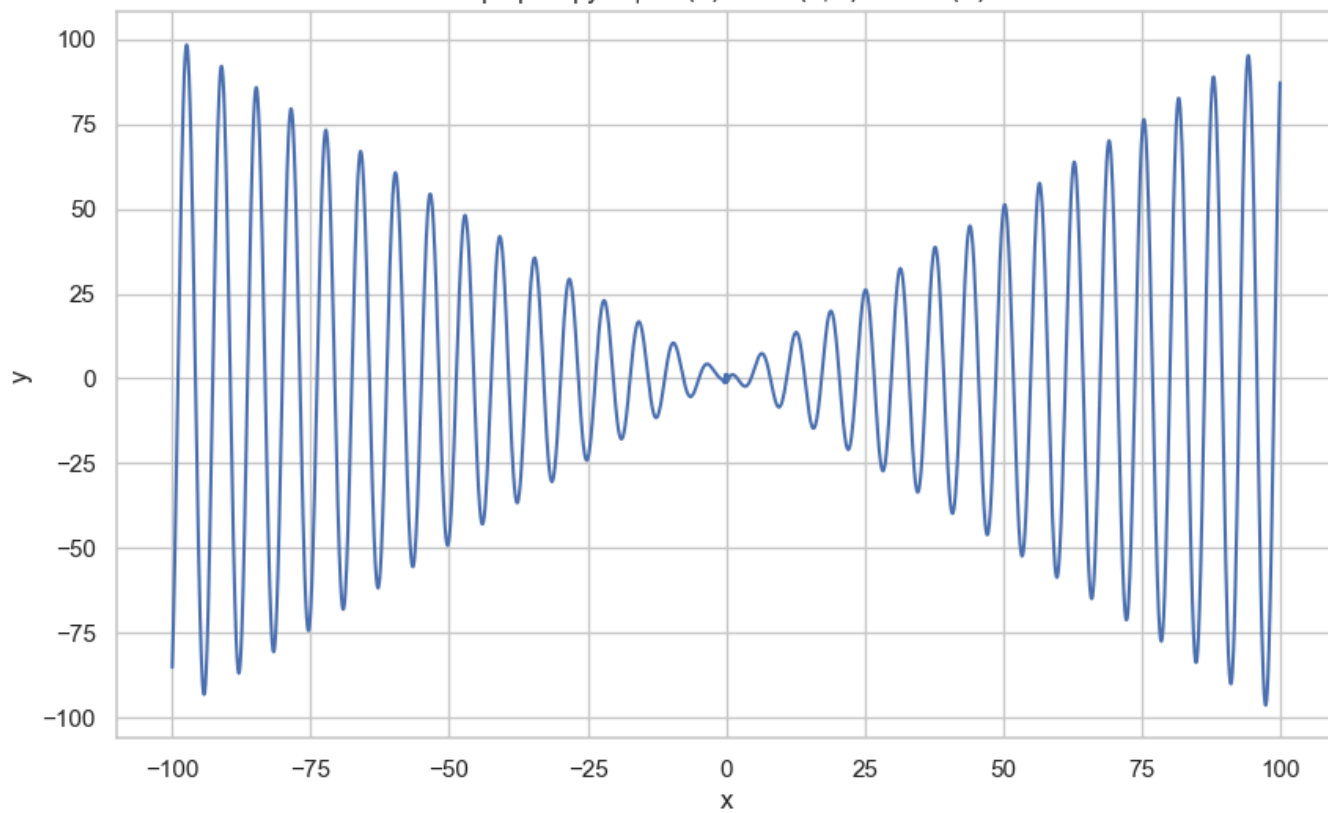


График функции $f(x) = \sin(1/x) + x\sin(x)$

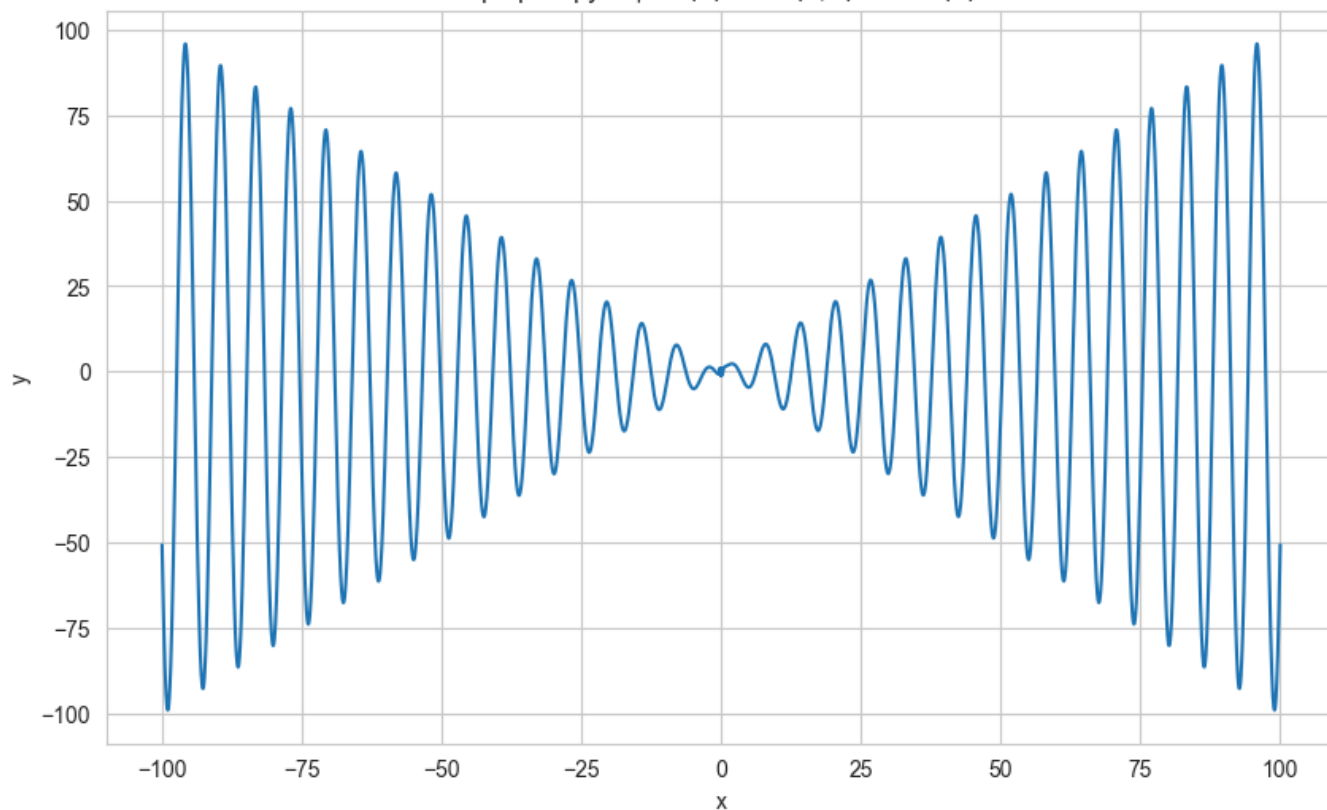
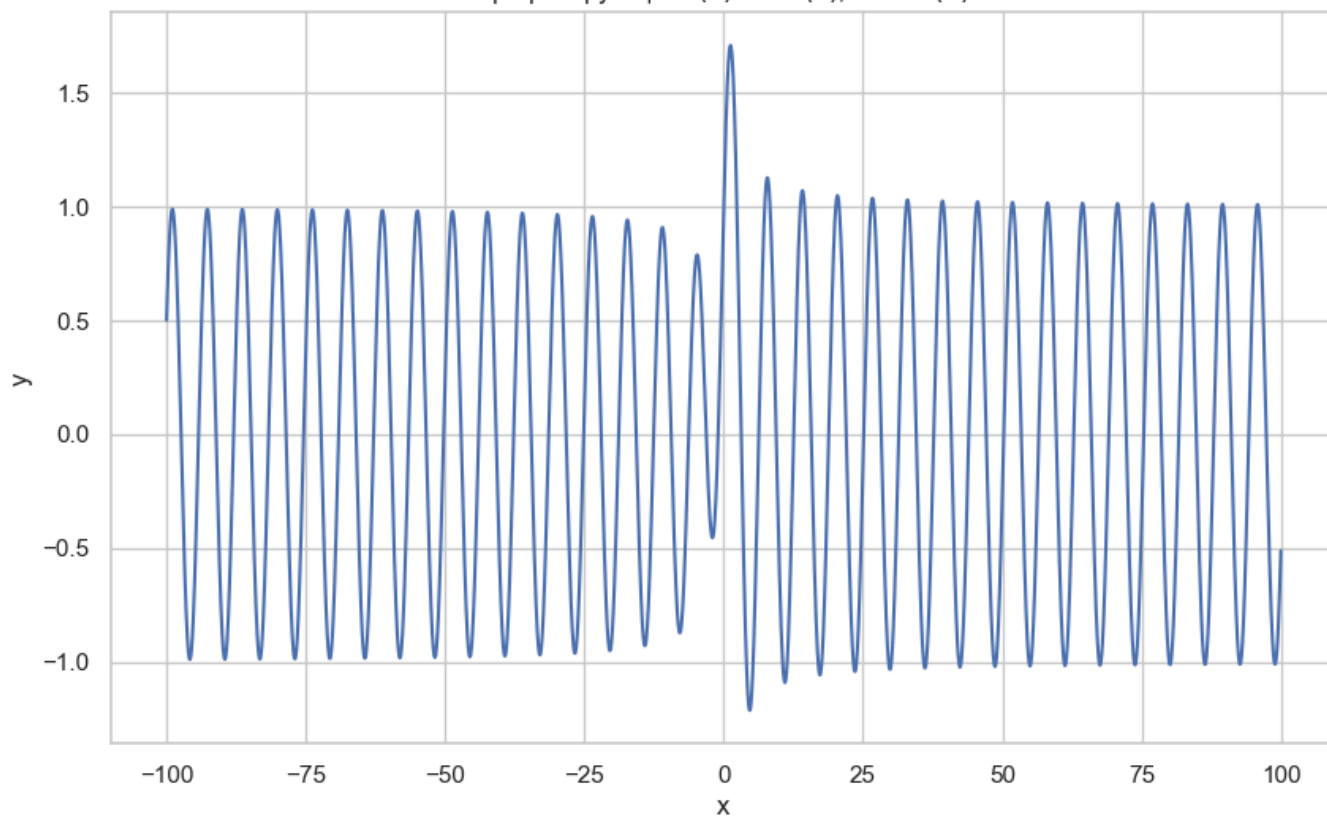
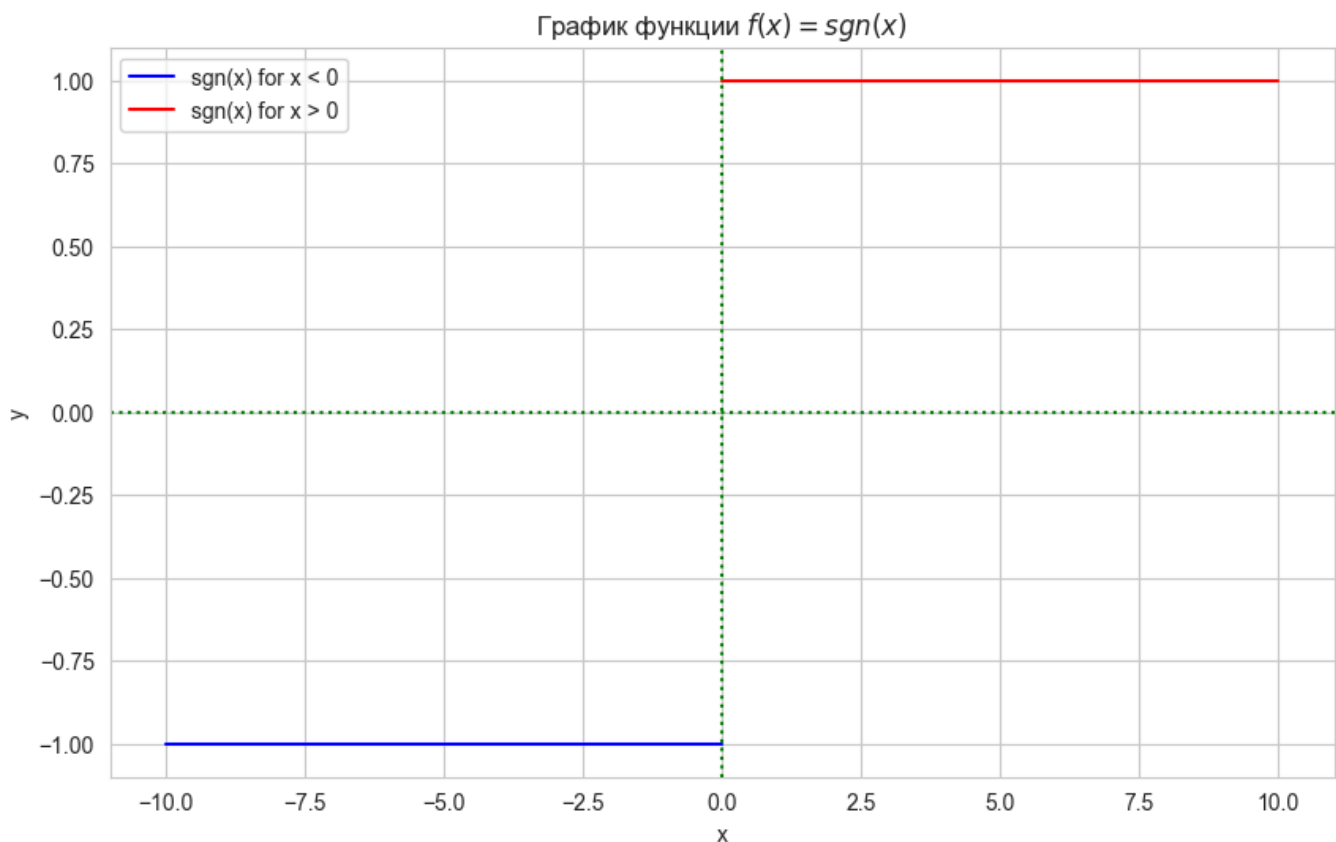


График функции $f(x) = \sin(x)/x + \sin(x)$



Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней.

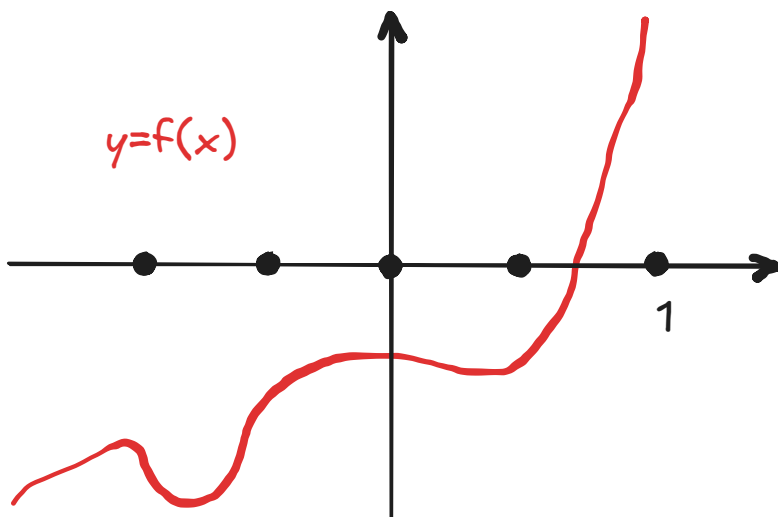


? Question

Исследовать функцию $f(x) = x^3 - x^2$ по плану:

- Область задания и область значений.
- Нули функции и их кратность.
- Отрезки знакопостоянства.
- Интервалы монотонности.
- Четность функции.
- Ограниченность.
- Периодичность.

а) **Область задания и область значений.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой: $D(f) = \mathbb{R}$. Учитывая, что у нас нет точек разрыва, становится понятна и область значений функции: $E(f) = \mathbb{R}$ – тоже любое действительное число.

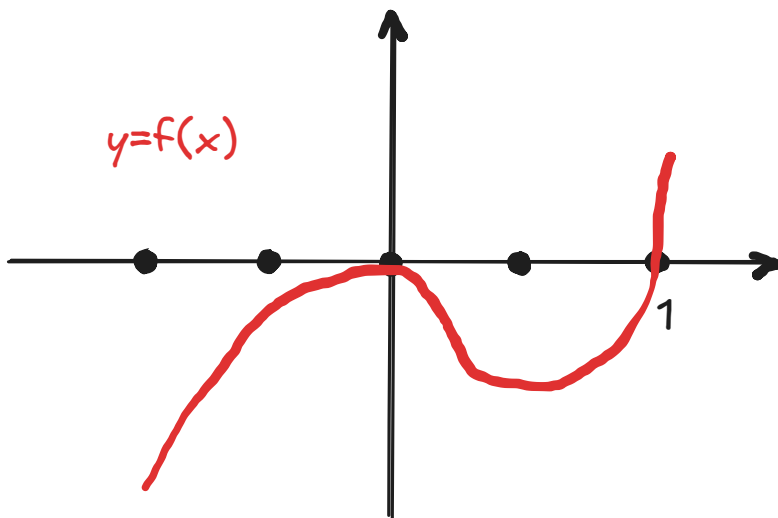


б) Нули функции и их кратность.

Сначала найдём точку пересечения графика с осью ординат. Необходимо вычислить значение функции при $x = 0 : y = f(0) = 0 - 0 = 0$, $x = 1 : y = f(1) = 1 - 1 = 0$

Уравнение имеет 2 действительных корня: $x = 0, x = 1$.

с) Отрезки знакопостоянства. На числовой прямой отложим найденные значения и методом интервалов определим знаки функции:



д) Интервалы монотонности.

Исследуем первую производную: $\frac{\partial(x^3-x^2)}{\partial x} = 3x^2 - 2x \implies 3x^2 - 2x = 0 \implies x = 0; x = \frac{2}{3}$

Данное уравнение имеет два действительных корня. Отложим их на числовой прямой и определим знаки производной:



В точке $x = \frac{2}{3}$ функция достигает минимума, а в точке $x = 0$ максимума.

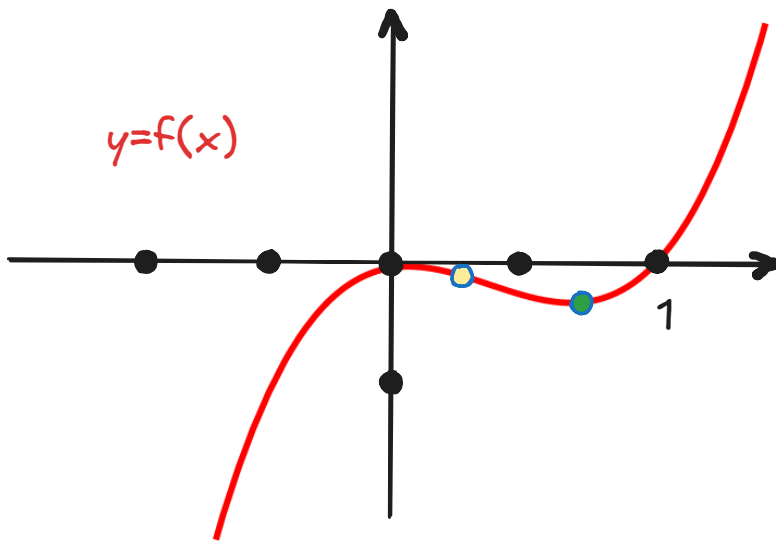
x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, \infty)$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↑	0	↓	$-\frac{4}{27}$	↑

Исследуем вторую производную: $\frac{\partial(3x^2-2x)}{\partial x} = 6x - 2 \implies 6x - 2 = 0 \implies x = \frac{1}{3}$

Определим знаки производной:



x	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, \infty)$
f''(x)	-	0	+
f(x)	∩	$-\frac{2}{27}$	∪



е) **Четность функции.** Проверим на четность/нечетность:

$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2 \Rightarrow f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$, значит, данная функция не является чётной или нечётной.

ф) **Ограниченность.** Выясним, как ведёт себя функция на бесконечности:

Вертикальные асимптоты отсутствуют.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - x^2) = \pm\infty \Rightarrow$ Нет горизонтальных асимптот.

Наклонная асимптота имеет вид $y = kx + b$, где:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

Найдем k :

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x = \infty$$

Аналогично $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x = \infty$. Наклонных асимптот нет.

Таким образом, функция неограниченная – *не ограничена сверху и не ограничена снизу*.

г) **Периодичность.** Функция неперiodическая.

? Question

Найти предел: