Практическое задание к уроку 11

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д’Аламбера:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n!)^2}{((n+1)!)^2\cdot n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot 1}{1\cdot n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} =$
$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+1)n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n\cdot n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$

Таким образом, исследуемый ряд **сходится**.

---

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

- если $q < 1$, то ряд сходится;
- если $q > 1$, то ряд расходится;
- если $q = 1$, то радикальный признак Коши не работает.

Найдем предел:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

т.к. предел равен $\frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится.

---

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln(n)}$$

$$-\frac{1}{1} + \frac{1}{2+\ln(2)} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+\ln(n)} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln(n)}$$

- ряд является знакочередующимся.

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

– члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий $|a_{n+1}| < |a_n|$ – поскольку бОльшим знаменателям соответствуют мЕньшие дроби. Таким образом, убывание монотонно.

Этот знакопеременный ряд сходится, причем условно.

---

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

- если $q > 1$, то ряд сходится;
- если $q < 1$, то ряд расходится;
- если $q = 1$, то признак Раабе не работает.

$$\frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \ldots + \frac{3^n}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

Найдем предел:

$$\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{3^n}{2^n} : \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\infty$$

т.к. предел равен $-\infty < 1$, то ряд расходится.

---

5. Разложить функцию по Тейлору в единице:

$$f(x) = \ln(16x^2)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Найдем частные производные функции $f(x)$

$f'(x) = 2\ln(16x) = 2\frac{1}{16x} \cdot 16 = \frac{2}{x}$
$f''(x) = (\frac{2}{x})' = -\frac{2}{x^2}$
$f'''(x) = (-\frac{2}{x^2})' = \frac{4}{x^3}$
$f''''(x) = (\frac{4}{x^3})' = -\frac{12}{x^4}$

В данном случае, когда порядок разложения не указан, выбор порядка зависит от требуемой точности и сложности вычислений. Обычно, для практических целей достаточно разложения до 3-4 порядка, так как с увеличением порядка вычисления становятся более сложными, а прирост точности может быть незначительным.

Вычислим в точке $x = 1$ значение функции и ее производных.

$$f(1) = \ln(16 \cdot 1^2) = \ln(16) = 4\ln(2)$$
$$f'(1) = \frac{2}{1} = 2$$
$$f''(1) = -\frac{2}{1^2} = -2$$
$$f'''(1) = \frac{4}{1^3} = 4$$
$$f''''(1) = -\frac{12}{1^4} = -12$$

Теперь можем записать разложение Тейлора до 4-го порядка включительно:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 +$$
$$+ \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f''''(1)}{4!}(x-1)^4 + O(x-1)^5$$

Подставим значения:

$$f(x) \approx 4\ln(2) + 2(x-1) - \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 - \frac{12}{4!}(x-1)^4 + O(x-1)^5$$

Упростим:

$$f(x) \approx 4\ln(2) + 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}(x-1)^4 + O(x-1)^5$$

Если требуется более высокая точность, можно продолжить разложение, вычисляя производные более высоких порядков.

---

6. Дана функция $f(x) = x^2$

1. Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на отрезке $x \in [-\pi; \pi]$.
2. Построить график функции и ее разложения.

Рассмотрим некоторую функцию, определённую по крайней мере на отрезке $[-\pi, \pi]$ (а возможно, и на более широком промежутке). Если данная функция интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то её можно разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Коэффициенты Фурье рассчитываются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Найдем a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right) = \frac{\pi^2}{3}$$

Найдем a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx =$$

Данный интеграл будем брать по частям:

$$\int_a^b u \, dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

$$U = x^2 \quad \Rightarrow \quad dU = 2x \, dx$$

$$dV = \cos nx \, dx \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{n} \sin nx$$

$$(*) = \left(\frac{1}{\pi n} x^2 \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx =$$

Скобка равно нулю, т.к. $\sin \pi n = \sin(-\pi n) = 0$. Интеграл возьмем еще раз по частям:

$$U = x \quad \Rightarrow \quad dU = dx$$

$$dV = \sin nx \, dx \Rightarrow V = \int \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \int \sin nx \, d(nx) = -\frac{1}{n} \cos nx$$

$$(*) = \left(\frac{2}{\pi n^2} x \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx =$$

Второй член равен выражения нулю, т.к. в результате вычисления интеграла получим $-\frac{4\sin(\pi n)}{\pi n^3}$, где выражение $\sin \pi n = 0$.

$$= \frac{2}{\pi n^2} (\pi \cos \pi n - (-\pi) \cos(-\pi n)) = [\cos(\pi n) = \cos(-\pi n) = (-1)^n] =$$

$$= \frac{4\pi \cos(\pi n)}{\pi n^2} = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Найдем b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \, dx =$$

Данный интеграл будем брать по частям:

$$U = x^2 \quad \Rightarrow \quad dU = 2x \, dx$$

$$dV = \sin nx \, dx \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{1}{n} \cos nx$$

$$(*) = \left(-\frac{1}{\pi n} x^2 \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx =$$

Скобка равно нулю, т.к. $(\pi)^2 \cos \pi n = (-\pi)^2 \cos(-\pi n)$. Интеграл возьмем еще раз по частям:

$$U = x \quad \Rightarrow \quad dU = dx$$

$$dV = \cos nx \, dx \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{n} \sin nx$$

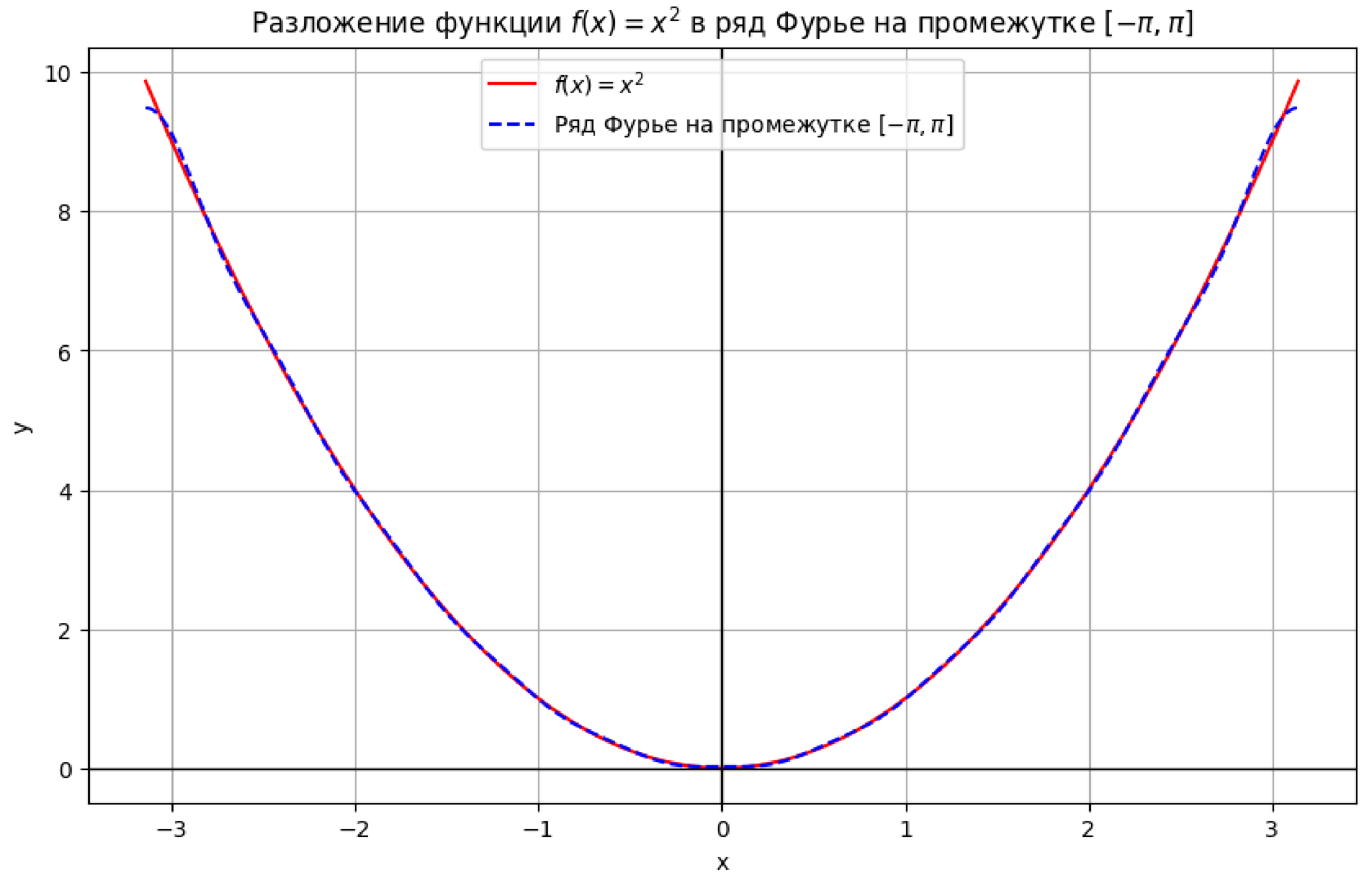
$$(*) = \left(\frac{2}{\pi n^2} x \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx =$$

$$= 0 + \left(\frac{2}{\pi n^3} \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Таким образом, мы получили разложение функции $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$ на промежутке $[-\pi, \pi]$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

INTERVAL = -np.pi, np.pi
X_SPACE = np.linspace(INTERVAL[0], INTERVAL[1], 500)
NUMS = 10
F_X = X_SPACE**2


class FourierSeries:
    def __init__(self, function, interval, num_terms):
        self.function = function
        self.interval = interval
        self.num_terms = num_terms

    def compute_coefficients(self):
        a_0 = np.pi**2 / 3
        a_n = [4 * (-1) ** n / n**2 for n in range(1, self.num_terms + 1)]
        return a_0, a_n

    def evaluate(self, x_value):
        a_0, a_n = self.compute_coefficients()
        summ = a_0
```

```python
        for n, a in enumerate(a_n, start=1):
            summ += a * np.cos(n * x_value)
        return summ


class Plotter:
    def __init__(self, x, y, y_fourier, title, xlabel, ylabel):
        self.x = x
        self.y = y
        self.y_fourier = y_fourier
        self.title = title
        self.xlabel = xlabel
        self.ylabel = ylabel

    def plot(self):
        plt.figure(figsize=(10, 6))
        plt.plot(self.x, self.y, label="$ f(x) = x^2 $", color="red")
        plt.plot(
            self.x,
            self.y_fourier,
            label="Ряд Фурье на промежутке $ [-\\pi, \\pi] $",
            linestyle="--",
            color="blue",
        )
        plt.title(self.title)
        plt.xlabel(self.xlabel)
        plt.ylabel(self.ylabel)
        plt.axhline(0, color="black", linewidth=1)
        plt.axvline(0, color="black", linewidth=1)
        plt.legend()
        plt.grid(True)
        plt.show()


def main():
    fourier_series = FourierSeries(F_X, INTERVAL, NUMS)
    f_fourier = [fourier_series.evaluate(x_val) for x_val in X_SPACE]

    plotter = Plotter(
        X_SPACE,
        F_X,
        f_fourier,
        "Разложение функции $ f(x) = x^2 $ в ряд Фурье на промежутке $ [-\\pi, \\pi] $",
        "x",
        "y",
    )
    plotter.plot()


if __name__ == "__main__":
    main()
```


Разложение функции $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$
$f(x) = x^2$
Ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$
y
x
10
8
6
4
2
0
−3
−2
−1
0
1
2
3