Практическое задание к уроку 4

Урок 4. Предел функции. Часть 1

Question

Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечности.

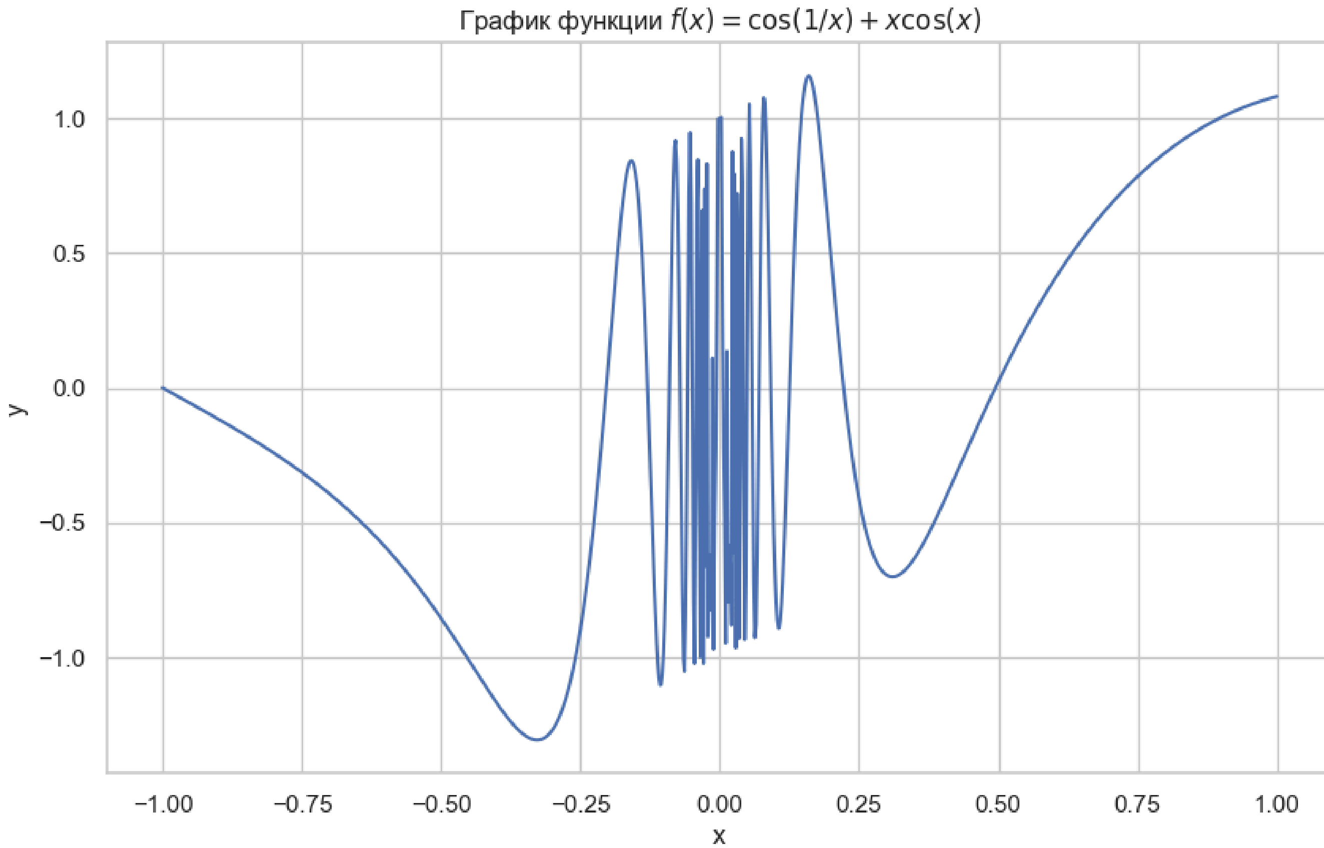


График функции $f(x) = \cos(1/x) + x\cos(x)$
y
x
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

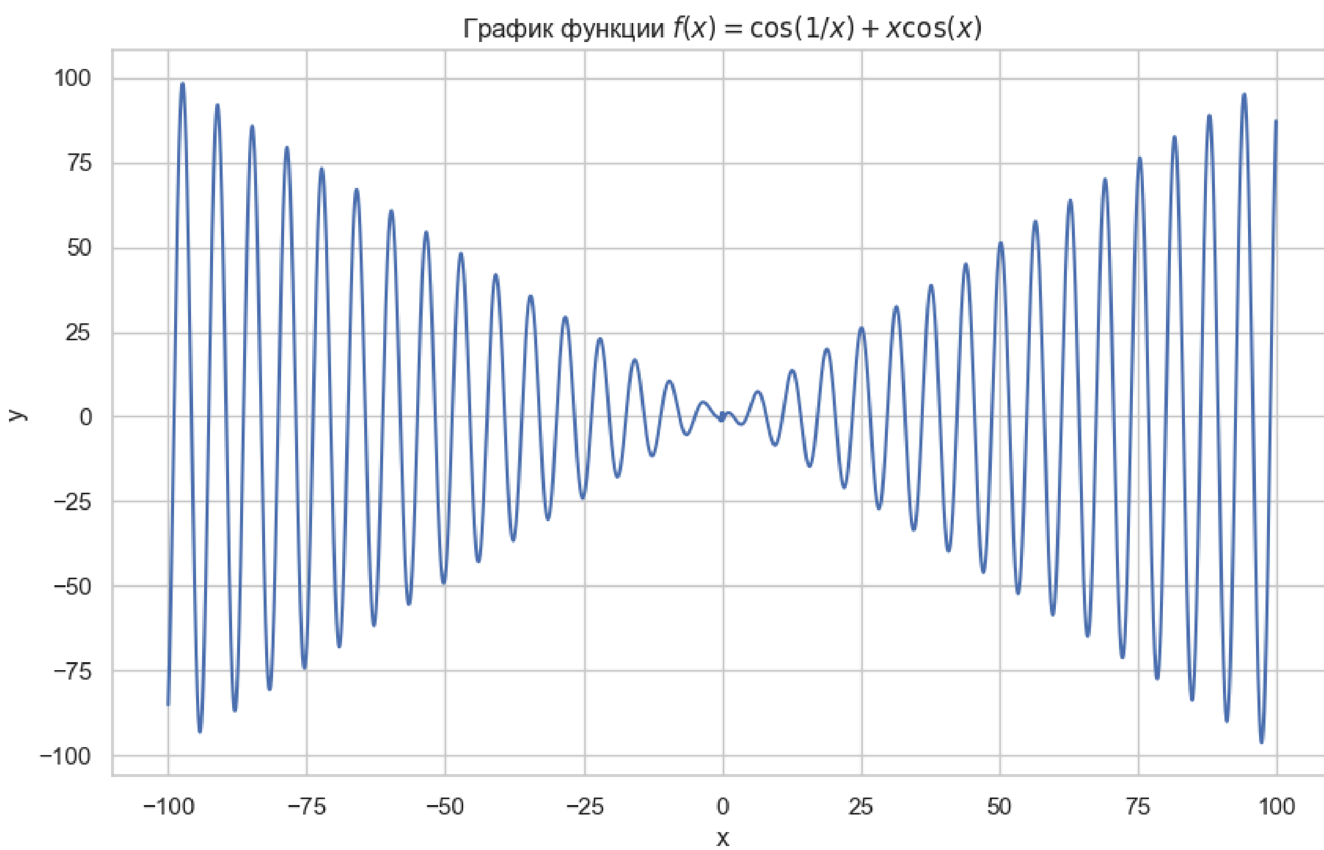


График функции $f(x) = \cos(1/x) + x\cos(x)$
y
x
100
75
50
25
0
−25
−50
−75
−100
−100
−75
−50
−25
0
25
50
75
100

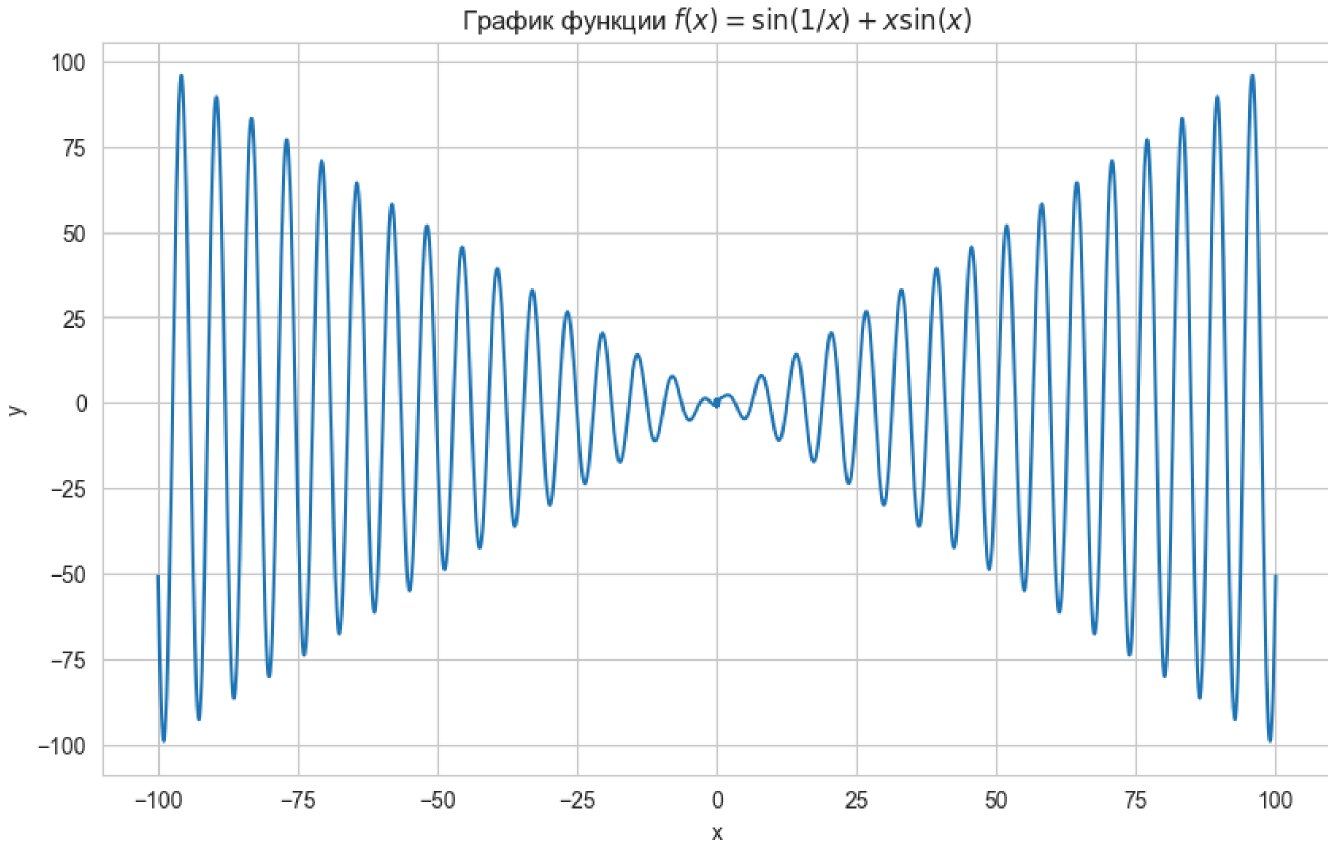


График функции $f(x) = \sin(1/x) + x\sin(x)$
100
75
50
25
0
−25
−50
−75
−100
y
−100
−75
−50
−25
0
25
50
75
100
x

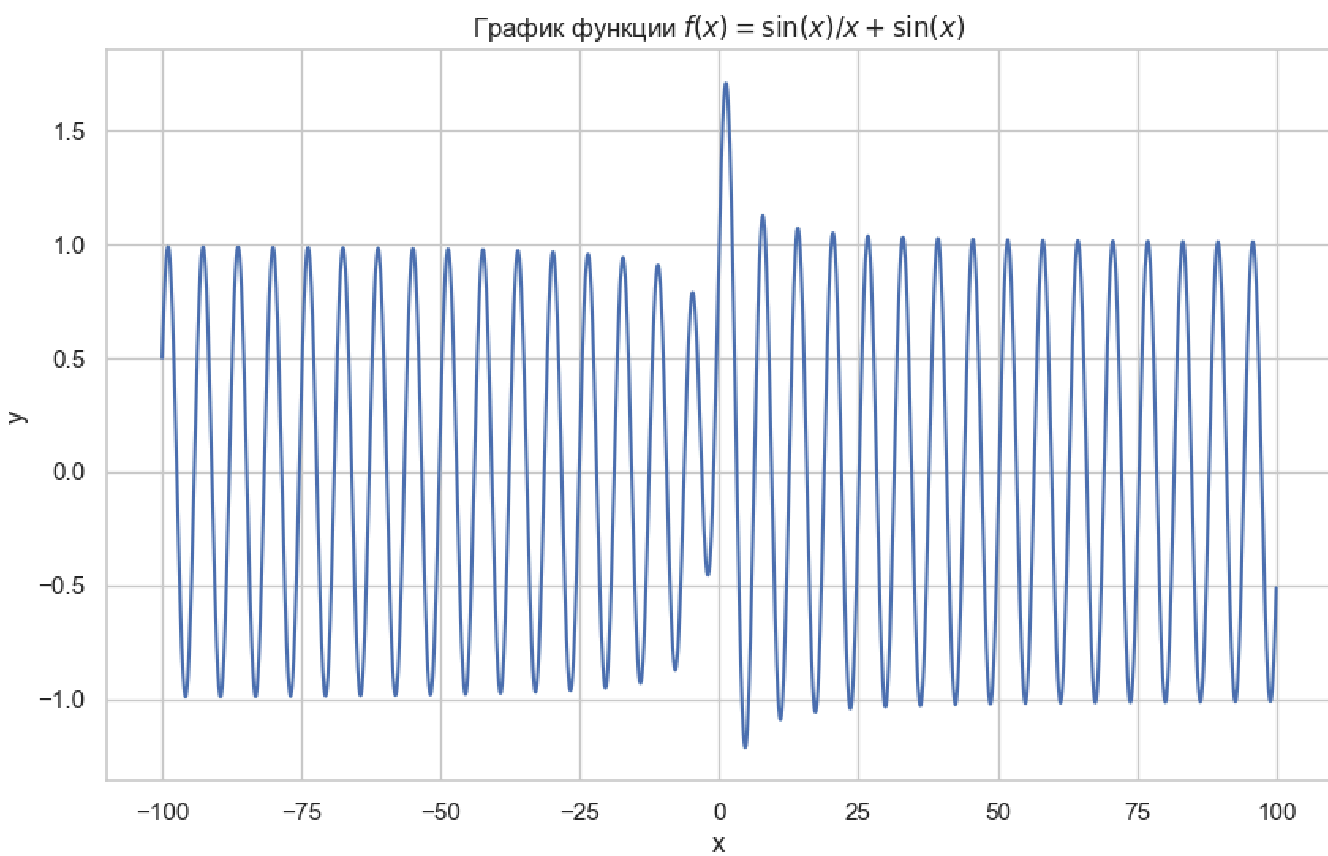
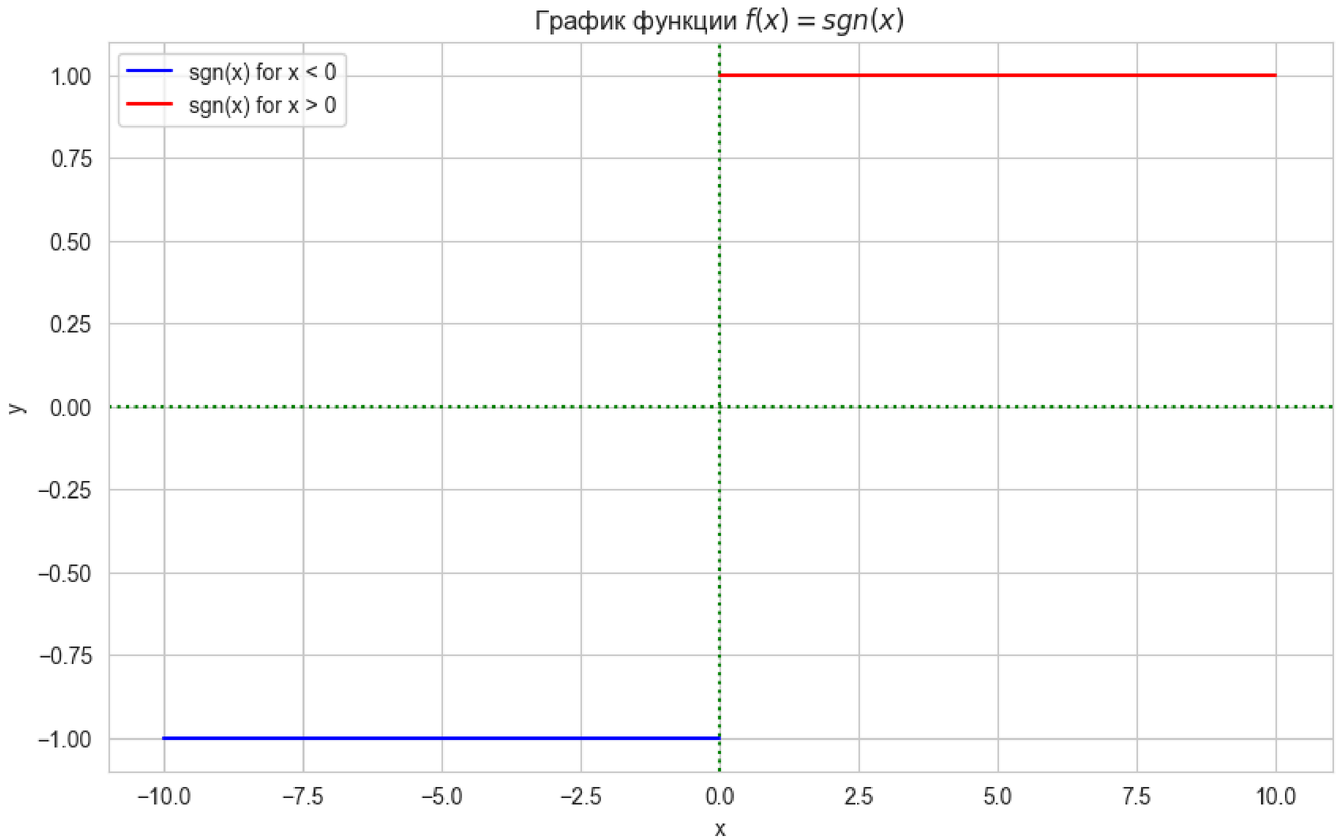


График функции $f(x) = \sin(x)/x + \sin(x)$
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
y
−100
−75
−50
−25
0
25
50
75
100
x

Question

Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней.



Question

Исследовать функцию $f(x) = x^3 - x^2$ по плану:

a. Область задания и область значений.

b. Нули функции и их кратность.

c. Отрезки знакопостоянства.

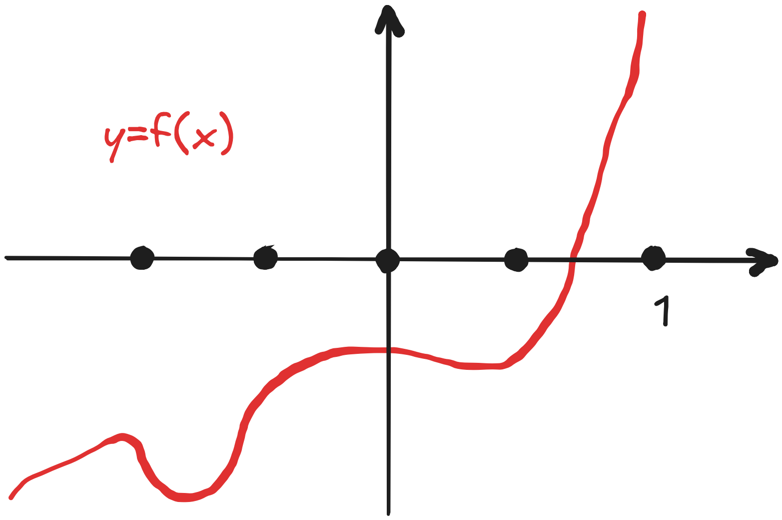
d. Интервалы монотонности.

e. Четность функции.

f. Ограниченность.

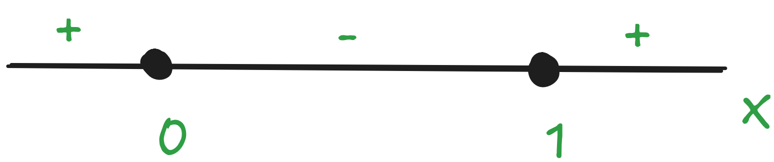
g. Периодичность.

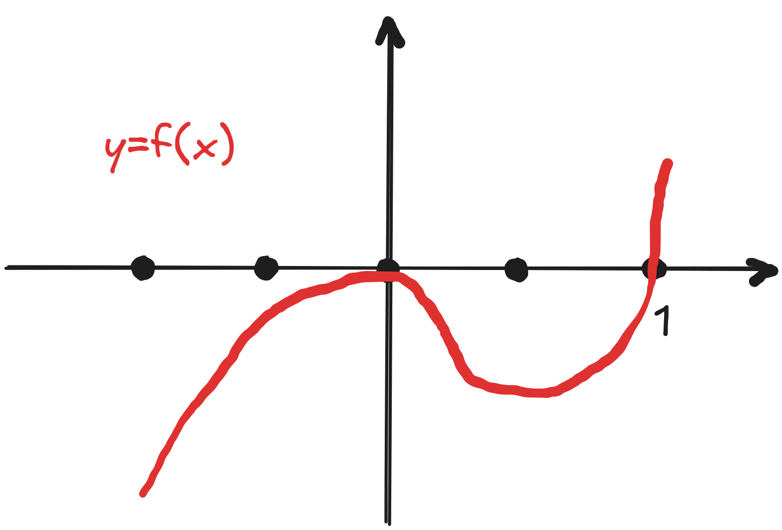
а) **Область задания и область значений.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой: $D(f) = \mathbb{R}$. Учитывая, что у нас нет точек разрыва, становится понятна и *область значений функции*: $E(f) = \mathbb{R}$ – тоже любое действительное число.



b) **Нули функции и их кратность.**
Сначала найдём точку пересечения графика с осью ординат. Необходимо вычислить значение функции при $x = 0 : y = f(0) = 0 - 0 = 0$, $x = 1 : y = f(1) = 1 - 1 = 0$
Уравнение имеет 2 действительных корня: $x = 0, x = 1$.

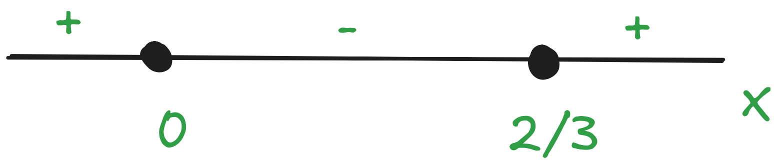
c) **Отрезки знакопостоянства.** На числовой прямой отложим найденные значения и методом интервалов определим знаки функции:





d) **Интервалы монотонности.**

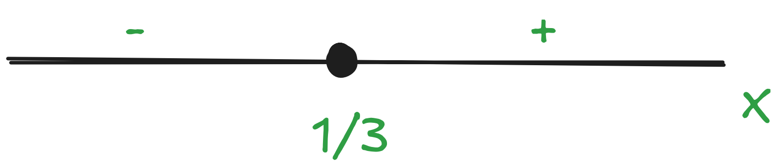
Исследуем первую производную: $\frac{\partial(x^3-x^2)}{\partial x}=3x^2-2x \Longrightarrow 3x^2-2x=0 \Longrightarrow x=0; x=\frac{2}{3}$
Данное уравнение имеет два действительных корня. Отложим их на числовой прямой и определим знаки производной:



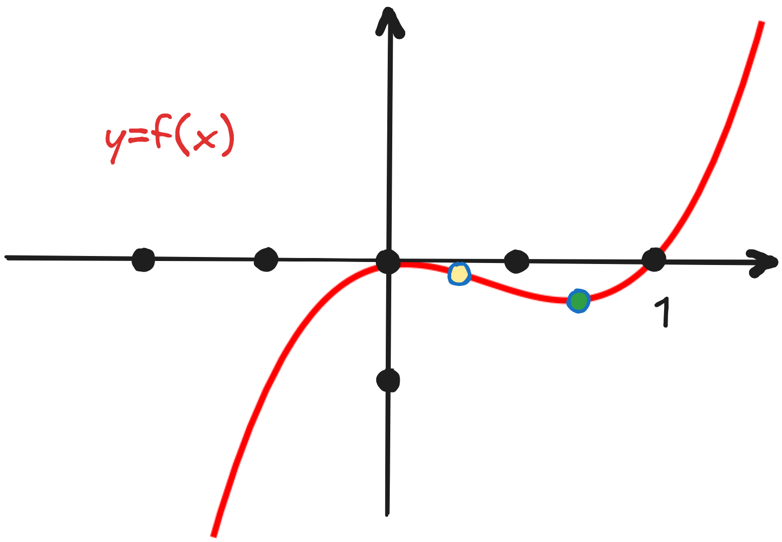
В точке $x=\frac{2}{3}$ функция достигает минимума, а в точке $x=0$ максимума.

x	$(-\infty,0)$	**0**	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},\infty)$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$\Uparrow$	0	$\Downarrow$	$-\frac{4}{27}$	$\Uparrow$

Исследуем вторую производную: $\frac{\partial(3x^2-2x)}{\partial x}=6x-2 \Longrightarrow 6x-2=0 \Longrightarrow x=\frac{1}{3}$
Определим знаки производной:



x	$(-\infty,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},\infty)$
f''(x)	-	0	+
f(x)	$\cap$	$-\frac{2}{27}$	$\cup$



e) **Четность функции.** Проверим на четность/нечетность:
$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2 \Longrightarrow f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$, значит, данная функция не является чётной или нечётной.

f) **Ограниченность.** Выясним, как ведёт себя функция на бесконечности:
Вертикальные асимптоты отсутствуют.
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x^3 - x^2\right) = \pm\infty \Longrightarrow$ Нет горизонтальных асимптот.
Наклонная асимптота имеет вид $y = kx + b$, где:
$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim_{x \to \infty}(f(x) - kx)$
Найдем k:
$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} x^2 - x = \infty$
Аналогично $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x^2 - x = \infty$. Наклонных асимптот нет.
Таким образом, функция неограниченная – *не ограничена сверху* и *не ограничена снизу*.

g) **Периодичность.** Функция непериодическая.

> **Question**
>
> Найти предел:

$\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3x^3}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{3x - 2}{4} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \left(\sqrt[n]{x+1} - 1 \sim \frac{1}{n}x\right) = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{3}} = \frac{3}{2}$

$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x})^{4x+1} = (\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(u(x)-1)v(x)}) = \lim_{x\to\infty}(\left(\frac{x+3}{x} - 1\right)(4x+1)) =$
$= \lim_{x\to\infty}(3\left(\frac{1}{x} + 4\right)) = 12 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x})^{4x+1} = e^{12}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{4x} \sim \lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} \sim \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin(x)} \sim \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x\to\infty}(\frac{4x+3}{4x-3})^{6x} = (\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(u(x)-1)v(x)}) = \lim_{x\to\infty}(6\left(\frac{4x+3}{4x-3} - 1\right)x) =$
$= \lim_{x\to\infty}(\frac{36x}{4x-3}) = 9 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty}(\frac{4x+3}{4x-3})^{6x} = e^{9}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)+\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\right) \Longrightarrow$
$(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0) = 0 + 0 = 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+\ln x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\right) \Longrightarrow (\sin(x) \sim x; \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1) \Longrightarrow$
$(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty) = 0 + \infty \to \text{не существует}$

$\ln(x)$ не определена при $x \leq 0$, и поэтому предел не существует, так как $\ln(x)$ не стремится к какому-либо конечному значению при $x \to 0$.