Урок 4. Дискретные распределения вероятностей

Урок 4. Семинар: Дискретные распределения вероятностей

Задача 1

Вероятность того, что стрелок попадет в мишень, выстрелив один раз, равна 0.8. Стрелок выстрелил 100 раз. Найдите вероятность того, что стрелок попадет в цель ровно 85 раз.

Применяем формулу Бернулли
$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$

$C_{100}^{85} = \frac{100!}{85! \cdot (100-85)!} = \frac{100!}{85! \cdot 15!} = \frac{86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = 253338471349988640,$

$P = P_{100}(85) = C_{100}^{85} \cdot 0.8^{85} \cdot 0.2^{15} = 0.0481$

Задача 2

Вероятность того, что лампочка перегорит в течение первого дня эксплуатации, равна 0.0004. В жилом комплексе после ремонта в один день включили 5000 новых лампочек. Какова вероятность, что ни одна из них не перегорит в первый день? Какова вероятность, что перегорят ровно две?
$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$
Имеем схему Бернулли с параметрами $n = 5000$ (знаков в тексте), $p = 0.0004$ (вероятность, что перегорит в первый день). Так как n велико, а p мало, можно использовать для вычислений

приближенную формулу Пуассона.

$\lambda = 2; \qquad P_{5000}^{0} = \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = 0.1353$

Задача 3

Монету подбросили 144 раза. Какова вероятность, что орел выпадет ровно 70 раз?

Имеем схему Бернулли с параметрами $n = 144, k = 70, p = 0.5, q = 0.5$

Используем локальную формулу Муавра-Лапласа ($144 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 36 > 10$):

$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$, значения функции ϕ берутся из таблицы. Подставляем:

$P_{144}(70) \approx \frac{1}{\sqrt{144 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \phi\left(\frac{70-144 \cdot 0.5}{\sqrt{144 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right) = 0.1667 \cdot \phi(0.05556) = 0.1667 \cdot 0.3774 =$

Задача 4

В первом ящике находится 10 мячей, из которых 7 - белые. Во втором ящике - 11 мячей, из которых 9 белых. Из каждого ящика вытаскивают случайным образом по два мяча. Какова вероятность того, что все мячи белые? Какова вероятность того, что ровно два мяча белые? Какова вероятность того, что хотя бы один мяч белый?

Для расчётов применим комбинаторные методы и теорию вероятностей.

Условия:

- Первый ящик: 10 мячей (7 белых, 3 чёрных).
- Второй ящик: 11 мячей (9 белых, 2 чёрных).
- Из каждого контейнера извлекают по два экземпляра.

Цели:

1. Определить шанс извлечения четырёх белых мячей.
2. Найти вероятность выбора ровно двух белых экземпляров.
3. Рассчитать вероятность наличия минимум одного белого мяча.

---

1. Все четыре светлые

Первый ящик.
Количество способов выбрать два белых мяча из семи:

$$C(7,2) = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

Общее число комбинаций для выбора любых двух экземпляров:

$$C(10,2) = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

Вероятность для первого контейнера:

$$P(\text{два белых из первого}) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

Второй ящик.
Комбинации для выбора двух белых из девяти:

$$C(9,2) = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Общее число вариантов:

$$C(11,2) = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

Вероятность для второго контейнера:

$$P(\text{два белых из второго}) = \frac{36}{55}$$

Итоговая вероятность:

$$P(\text{все четыре белые}) = \frac{7}{15} \times \frac{36}{55} = \frac{252}{825} = \frac{84}{275}$$

---

2. Ровно два белых мяча

Рассмотрим три возможных сценария.

Случай 1: два белых из первого ящика, два чёрных из второго.
Вероятность выбора двух чёрных из второго контейнера:

$$\frac{C(2,2)}{C(11,2)} = \frac{1}{55}$$

Итог:

$$P_1 = \frac{7}{15} \times \frac{1}{55} = \frac{7}{825}$$

Случай 2: два белых из второго, два чёрных из первого.
Вероятность двух чёрных из первого контейнера:

$$\frac{C(3,2)}{C(10,2)} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

Итог:

$$P_2 = \frac{36}{55} \times \frac{1}{15} = \frac{12}{275}$$

Случай 3: по одному белому из каждого ящика.
Вероятность для первого контейнера:

$$\frac{C(7,1) \times C(3,1)}{C(10,2)} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

Для второго:

$$\frac{C(9,1)\times C(2,1)}{C(11,2)} = \frac{18}{55}$$

Итог:

$$P_3 = \frac{7}{15}\times\frac{18}{55} = \frac{42}{275}$$

Суммарная вероятность:

$$P(\text{ровно два белых}) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{7}{825} + \frac{12}{275} + \frac{42}{275} = \frac{169}{825}$$

---

3. Минимум один белый мяч

Проще рассчитать через противоположное событие - все четыре чёрные.
Вероятность двух чёрных из первого ящика: $\frac{1}{15}$
Из второго: $\frac{1}{55}$
Вероятность ни одного белый мяча:

$$P(\text{ни одного белый}) = \frac{1}{15}\times\frac{1}{55} = \frac{1}{825}$$

Тогда вероятность того, что хотя бы один мяч белый:

$$P(\text{хотя бы один белый}) = 1 - \frac{1}{825} = \frac{824}{825}$$

Ответ:

1. Четыре белых мяча: 84/275
2. Ровно два белых: 169/825

3. Хотя бы один белый: 824/825

Проверка.

1. Все четыре мяча белые.
Для первого ящика: вероятность последовательно вытащить два белых мяча — 7/10 *6/9 = 7/15.*
Для второго: 9/11 8/10 = 36/55.
Общая вероятность: 7/15 * 36/55 = 252/825 = 84/275.

2. Ровно два белых мяча.
Рассмотрим три сценария:

- Два белых из первого ящика и два чёрных из второго: 7/15 *(2/11* 1/10) = 7/825.
- Два белых из второго и два чёрных из первого: 36/55 *(3/10* 2/9) = 12/275 = 36/825.
- По одному белому из каждого ящика: (7/10 *3/9 + 3/10* 7/9) *(9/11* 2/10 + 2/11 *9/10) = 7/15* 18/55 = 126/825.

Суммируем: 7 + 36 + 126 = 169 → 169/825.

3. Хотя бы один белый мяч.
Вероятность обратного события (все чёрные):
(3/10 *2/9)* (2/11 * 1/10) = 1/825.
Искомая вероятность: 1 − 1/825 = 824/825.

Ответ:

1. 84/275 ≈ 0.3055
2. 169/825 ≈ 0.2048

3. 824/825 ≈ 0.9988

Проверка расчётов подтверждает, что результаты соответствуют комбинаторному подходу.