

1. סדר פעולות החשבון

סדר פעולות חשבון:

1. סוגריים
2. חזקה/שורש
3. כפל/חילוק
4. חיבור/חיסור

כלל 1:

בתרגיל שבו יש רק פעולות חיבור וחיסור (ללא סוגריים) סדר הפעולות הוא משמאל לימין.

דוגמאות:

א. $12 - 5 + 3 = 7 + 3 = 10$

ב. $18 - 2 + 4 = 16 + 4 = 20$

ג. $20 + 5 - 8 - 3 = 25 - 8 - 3 = 17 - 3 = 14$

כלל 2:

בתרגיל שבו יש רק פעולות כפל וחילוק (ללא סוגריים) סדר הפעולות הוא משמאל לימין.

דוגמאות:

א. $12 \cdot 3 \div 6 = 36 \div 6 = 6$

ב. $18 \div 2 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$

ג. $48 \div 2 \div 8 \cdot 3 = 24 \div 8 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$

כלל 3:

בתרגיל שבו יש מספר פעולות (ללא סוגריים) קודמות פעולות הכפל והחילוק לפעולות החיבור והחיסור.

דוגמאות:

א. $12 + 2 \cdot 4 = 12 + 8 = 20$

ב. $18 + 6 \div 2 = 18 + 3 = 21$

ג. $15 - 15 \div 3 = 15 - 5 = 10$

ד. $8 - 12 \div 4 = 8 - 3 = 5$

כלל 4:

בתרגיל שבו יש סוגריים הפעולות שבתוך הסוגריים קודמות לפעולות שמחוץ לסוגריים.

דוגמאות:

פתור את התרגילים הבאים:

א. $15 - (6 + 3) = 15 - 9 = 6$

ב. $2 \cdot (7 - 4) = 2 \cdot 3 = 6$

ג. $(4 + 8) \div 2 = 12 \div 2 = 6$

ד. $12 \div (4 \cdot 3) = 12 \div 12 = 1$

ה. $(8 - 3 \cdot 2) \cdot (1 + 3) = (8 - 6) \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8$

כלל 5:

בתרגיל שבו יש סוגריים בתוך סוגריים קודמות הפעולות שבתוך הסוגריים הפנימיים לפעולות שבתוך הסוגריים החיצוניים וכן הלאה.

דוגמאות:

$$א. \quad 2 \cdot [1 + 3 \cdot (4 - 2)] = 2 \cdot [1 + 3 \cdot 2] = 2 \cdot [1 + 6] = 2 \cdot 7 = 14$$

$$ב. \quad 12 \div [2 \cdot (9 - 5) \div 4] = 12 \div [2 \cdot 4 \div 4] = 12 \div [8 \div 4] = 12 \div 2 = 6$$

כלל 6:

פעולת החילוק באפס איננה מוגדרת. ביטוי מהצורה 0:(משהו) או $\frac{\text{משהו}}{0}$ נקרא ביטוי חסר משמעות.

תרגילים:

1. $12 + 3 - 15 =$
2. $70 - 20 + 5 - 30 =$
3. $6 \cdot 3 \div 9 =$
4. $63 \div 7 \cdot 2 =$
5. $9 \cdot 4 \div 9 \cdot 4 =$
6. $3 \cdot 6 \div 9 \cdot 0 =$
7. $6 - 2 \cdot 5 \cdot 0 =$
8. $11 - 2 \cdot 5 + 24 \div 8 =$
9. $54 \div 18 + 52 \div 13 - 6 \div 6 =$
10. $4 \cdot 7 \div 2 =$
11. $12 + 40 \div 8 - 1 =$
12. $36 \div 3 \div 3 \cdot 5 =$
13. $10 - (7 - 4) =$
14. $5 \cdot (7 - 3) =$
15. $18 \div (2 + 4) =$
16. $100 \div (20 \div 4) =$
17. $6 \cdot (7 - 2) \cdot 2 =$
18. $(12 \div 2) \div (6 \div 2) =$
19. $100 \div (30 - 10) \div 5 =$
20. $20 - 2 \cdot (6 - 1) =$
21. $(45 \div 9 - 20 \div 4) \div 6 + 4 =$
22. $(4 \div 2 + 3) \cdot (8 - 24 \div 4) =$
23. $\{29 - [3 \cdot 4 \div (5 - 2) + 4]\} \div 7 =$
24. $3 \cdot [8 - 2 \cdot (5 - 3)] =$
25. $[60 - 8 \cdot (2 + 3)] \div 4 =$
26. $36 \div [24 \div (5 + 1) \cdot 3] =$
27. $[10 - 18 \div (3 + 6)] \div 4 - 2 =$
28. $5 \cdot \{[7 - 18 \div (2 \cdot 3) + 8] \div 2 + 9\} =$
29. $51 \div [15 \cdot (7 - 3) - 7 \cdot 6 - 1] =$
30. $\{64 - 2 \cdot [(2 + 4) \cdot 3] \div 4\} \div 5 =$
31. $20 - 2 \cdot \{10 - [(28 - 4) \div 2] \div 3\} =$
32. $32 \div [24 \div (5 + 3) + 7 - 6 \div 3] =$
33. $[10 \cdot 2 - 3 \cdot (9 - 2 \cdot 4) - 9] \cdot 9 =$
34. $36 - [18 - (5 + 3) \cdot 2 + 4] \cdot 6 =$
35. $2 \cdot [10 - (2 \cdot 4 + 1) \div 9] - (7 - 2 \cdot 10 \div 4) \cdot 3 =$
36. $(4 \cdot 3 - 6 \cdot 2) \div (10 - 12 \div 2 - 4) =$
37. $8 + \{12 \div [15 - 7 \cdot (9 - 8) - 4] - 3\} \cdot 18 =$

תשובות:

- | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. 0 | 2. 25 | 3. 2 | 4. 18 | 5. 16 | 6. 0 | 7. 6 |
| 8. 4 | 9. 6 | 10. 14 | 11. 16 | 12. 20 | 13. 7 | 14. 20 |
| 15. 3 | 16. 20 | 17. 60 | 18. 2 | 19. 1 | 20. 10 | 21. 4 |
| 22. 10 | 23. 3 | 24. 12 | 25. 5 | 26. 3 | 27. 0 | 28. 75 |
| 29. 3 | 30. 11 | 31. 8 | 32. 4 | 33. 72 | 34. 0 | 35. 12 |
| 36. 0 | 37. 8 | | | | | |

2. שברים

שבר מדומה – שבר שהמונה שלו יותר גדול מהמכנה שלו.

שבר מעורב – שבר שיש בו מספר שלם וגם שבר. שבר = $\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$.

דוגמאות: שברים מדומים: $\frac{9}{7}, \frac{8}{5}$. שברים מעורבים: $4\frac{2}{3}, 1\frac{1}{4}$.

כדי לעבור משבר מדומה לשבר מעורב מבצעים **חילוק רגיל עם שארית**.

דוגמא: $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, כי אם מחלקים 7 ב-3 מקבלים מנה ושארית 1.

כדי לעבור משבר מעורב לשבר מדומה כופלים את המכנה במספר השלם, מוסיפים תוצאה זו למונה ואת הסכום המתקבל רושמים במונה. המכנה נשאר ללא שינוי.

דוגמא: $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$, כי המונה הוא $2 \cdot 4 + 3 = 11$.

תרגילים:

1. צמצם את השברים הבאים:

א. $\frac{12}{20}$ ב. $\frac{8}{18}$ ג. $\frac{42}{63}$ ד. $\frac{24}{36}$ ה. $\frac{77}{22}$ ו. $\frac{72}{27}$ ז. $\frac{15}{35}$

2. הפוך את השברים המדומים לשברים מעורבים:

א. $\frac{29}{5}$ ב. $\frac{55}{8}$ ג. $\frac{32}{6}$ ד. $\frac{51}{7}$ ה. $\frac{91}{12}$ ו. $\frac{71}{9}$ ז. $\frac{61}{4}$

3. הפוך את השברים המעורבים לשברים מדומים:

א. $2\frac{3}{8}$ ב. $7\frac{5}{9}$ ג. $5\frac{4}{5}$ ד. $7\frac{6}{7}$ ה. $2\frac{5}{6}$ ו. $1\frac{3}{4}$ ז. $-4\frac{3}{11}$

תשובות

1. א. $\frac{3}{5}$ ב. $\frac{4}{9}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. $\frac{7}{2}$ ו. $\frac{8}{3}$ ז. $\frac{3}{7}$
2. א. $5\frac{4}{5}$ ב. $6\frac{7}{8}$ ג. $5\frac{1}{3}$ ד. $7\frac{2}{7}$ ה. $7\frac{7}{12}$ ו. $7\frac{8}{9}$ ז. $15\frac{1}{4}$
3. א. $\frac{19}{8}$ ב. $\frac{68}{9}$ ג. $\frac{29}{5}$ ד. $\frac{55}{7}$ ה. $\frac{17}{6}$ ו. $\frac{7}{4}$ ז. $-\frac{47}{11}$

פעולות חשבון בשברים:

א. חיבור של שברים פשוטים – בחיבור של שברים פשוטים מוצאים מכנה משותף ו**מרחיבים** כל שבר בהתאם.

❖ במציאת מכנה משותף, יש למצוא את הקטן ביותר.

דוגמא: $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{12} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

ב. חיסור של שברים פשוטים - בחיסור של שברים פשוטים מוצאים מכנה משותף ו**מרחיבים** כל שבר בהתאם.

דוגמא: $\frac{3}{10} - \frac{2}{15} = \frac{3}{10} - \frac{2}{15} = \frac{9 - 4}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

ג. כפל של שברים פשוטים - כדי לכפול שני שברים פשוטים כופלים מונה ומכנה במכנה.

הערות: א. אם ניתן, רצוי לצמצם לפני ביצוע הכפל.

- ב. כאשר השברים הם שברים מעורבים הופכים אותם לשברים מדומים.
ג. כאשר כופלים שבר במספר שלם מספיק לכפול את המספר השלם המונה של השבר.

דוגמאות :

$$\text{א. } \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

$$\text{ב. } 1\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{9} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

$$\text{ג. } 5 \cdot \frac{3}{10} = \frac{5 \cdot 3}{10} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

- ד. חילוק של שברים פשוטים - כדי לחלק שבר אחד (המחולק) בשבר שני (המחלק) כופלים את המחולק בשבר ההפוך של המחלק.

דוגמאות :

$$\text{א. } \frac{5}{8} \div \frac{6}{7} = \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{6} = \frac{35}{48}$$

$$\text{ב. } 1\frac{2}{5} \div 1\frac{3}{4} = \frac{7}{5} \div \frac{7}{4} = \frac{7}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{4}{5}$$

$$\text{ג. } 6 \div \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

$$\text{ד. } \frac{3}{5} \div 2 = \frac{3}{5} \div \frac{2}{1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

סדר פעולות חשבון עם קווי שבר

1. קו שבר משמש **בסוגריים**.
2. אם יש קו שבר ראשי וקו שבר משני אז פעולת החילוק נקבעת על ידי קו השבר המשני קודמת לפעולת החילוק הנקבעת על ידי קו השבר הראשי.

תרגילים :

$$1. 1\frac{2}{9} - \frac{3}{4} - \frac{1}{12} =$$

$$2. \frac{8}{15} + 2\frac{1}{6} - 2\frac{2}{5} =$$

$$3. \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} \div \frac{1}{2} =$$

$$4. \frac{5}{8} \div 10 \cdot \frac{4}{5} =$$

$$5. 2\frac{1}{4} \cdot 8 - 2\frac{2}{5} \cdot 4\frac{7}{12} =$$

$$6. 3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{7} - 2\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{4} =$$

$$7. 2 \div \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \div 2 - 5\frac{1}{2} \div 6 =$$

$$8. 2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + 2\frac{1}{2} \div 2 - 2 \div \frac{4}{5} =$$

$$9. 1\frac{1}{5} \div \left(1\frac{5}{7} \cdot 2\frac{1}{3}\right) =$$

$$10. \left(\frac{6}{7} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{30}\right) =$$

$$11. \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \div \left(2\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) =$$

$$12. 4\frac{5}{14} - \left(7\frac{5}{7} - 4\frac{2}{3}\right) \div 1\frac{1}{15} =$$

$$13. \frac{15}{49} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \cdot 2\frac{1}{3} =$$

$$14. 1\frac{1}{4} \div \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{8}\right) \div 1\frac{1}{2} =$$

$$15. \frac{[4 \cdot 7 - 12 \div 3] \div 4}{4 \cdot 3 - (5 - 2) \cdot 2}$$

$$16. \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{5}{12} + \frac{5}{36}}$$

$$17. \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{9}}$$

$$18. \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{8}}$$

תשובות :

$$1. \frac{7}{18}$$

$$2. \frac{3}{10}$$

$$3. \frac{3}{7}$$

$$4. \frac{1}{20}$$

$$5. 7$$

$$6. 6$$

$$7. 1\frac{3}{8}$$

$$8. \frac{3}{20}$$

$$9. \frac{3}{10}$$

$$10. \frac{1}{4}$$

$$11. \frac{1}{2}$$

$$12. 1\frac{1}{2}$$

$$13. \frac{2}{3}$$

$$14. 4$$

$$15. 1$$

$$16. 1\frac{1}{2}$$

$$17. \frac{6}{7}$$

$$18. 2$$

3. מספרים מכוונים ופעולת החזקה

ערך מוחלט – המרחק של מספר מהאפס. מסומן ע"י שני קווים מקבילים משני צדדיו של המספר.

דוגמא: א. $|-5| = 5$ ב. $|+2| = 2$

הכללים לחיבור של שני מספרים מכוונים:

- הסכום של שני מספרים חיוביים שווה לסכום המספרים ללא הסימן והתוצאה היא חיובית.
- הסכום של שני מספרים שליליים שווה לסכום המספרים ללא הסימן והתוצאה היא שלילית.
- הסכום של שני מספרים שונים סימן שווה להפרש שבין המספר הגדול ללא הסימן לבין המספר הקטן ללא הסימן וסימן התוצאה הוא כסימן של המספר הגדול ללא הסימן.
- אם יש הרבה מספרים חיוביים ושליליים אפשר לחבר תחילה לחוד את המספרים החיוביים לחוד ולחוד את המספרים השליליים. ולאחר מכן להשתמש בכלל ג'.

חיסור מספרים מכוונים:

נסתכל על הסכום של זוגות המספרים הבאים:

$$(+3) + (-3) = 0 \qquad (+8) + (-8) = 0 \qquad \left(+1\frac{1}{2}\right) + \left(-1\frac{1}{2}\right) = 0$$

כפי שרואים הסכום של כל שני מספרים הוא 0. נגדיר:

מספרים נגדיים - שני מספרים שסכומם שווה לאפס נקראים מספרים נגדיים.

בצורה כללית: המספר הנגדי למספר a הוא המספר $-a$.

חיסור של מספר מכוון שקול לחיבור המספר הנגדי לו.

כלומר: במקום לבצע חיסור מספר מכוון נבצע חיבור של המספר הנגדי לו.

דוגמאות:

א. $(+7) - (+4) = (+7) + (-4) = +3$

ב. $(+7) - (-4) = (+7) + (+4) = +11$

ג. $(-7) - (+4) = (-7) + (-4) = -11$

ד. $(-7) - (-4) = (-7) + (+4) = -3$

סיכום לגבי המכפלה של שני מספרים מכוונים:

א. מכפלה של שני מספרים חיוביים היא חיובית: $(+) \cdot (+) = +$.

ב. מכפלה של מספר חיובי במספר שלילי היא שלילית: $(-) \cdot (+) = -$.

ג. מכפלה של מספר שלילי במספר חיובי היא שלילית: $(-) \cdot (-) = +$.

סיכום לגבי המנה של שני מספרים מכוונים:

א. המנה של שני מספרים חיוביים היא חיובית: $\frac{+}{+} = +$.

ב. המנה של מספר חיובי במספר שלילי היא שלילית: $\frac{+}{-} = -$.

ג. המנה של מספר שלילי במספר חיובי היא שלילית: $\frac{-}{+} = -$.

ד. המנה של שני מספרים שליליים היא חיובית: $\frac{-}{-} = +$.

1. $(-12) + (+8) =$
2. $(-6) + (+4) + (+2) =$
3. $(-10) - (-8) + (-6) =$
4. $(+5) + (+3) - (+4) + (-1) =$
5. $(-7) + (-3) - (-2) + (-5) =$
6. $(+2) + (-10) - (-7) + (-9) =$
7. $(-2) - (-3) + (-5) - (-1) =$
8. $(+8) - (+9) + (-5) + (+11) - (+7) =$
9. $(-25) + (+15) - (-3) + (-8) - (+5) =$
10. $(+7) - (-5) - (+2) - (-10) =$

כללים לקביעת סימן המכפלה של מספרים מכוונים בתנאי שכולם שונים מאפס:

א. אם מספר המספרים השליליים הוא זוגי אז המכפלה היא חיובית.

ב. אם מספר המספרים השליליים הוא אי זוגי אז המכפלה היא שלילית.

כפל וחילוק

11. $(+4) \cdot (+3) =$
12. $(-5) \cdot (+2) =$
13. $(+3) \cdot (-7) =$
14. $(-13) \cdot (-4) =$
15. $(+3) \cdot (-2) \cdot (-5) =$
16. $(-1) \cdot (-4) \cdot (-6) =$
17. $(-8) \cdot (+1) \cdot (+2) =$
18. $(+2) \cdot (-7) \cdot 0 =$
19. $(-3) \cdot (+2) \cdot (+4) \cdot (-1) =$
20. $-(-7) \cdot (+4) \cdot (+8) =$
21. $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) =$
22. $(-4) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-2) =$
23. $-(-5) \cdot (-3) =$
24. $-(+4) \cdot (+8) =$
25. $(+1) \cdot (+2) \cdot (-3) =$

תשובות

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. -4 | 2. 0 | 3. -8 | 4. 3 | 5. -13 |
| 6. -10 | 7. -3 | 8. -2 | 9. -20 | 10. 20 |
| 11. 12 | 12. -10 | 13. -21 | 14. 52 | 15. 30 |
| 16. -24 | 17. -16 | 18. 0 | 19. 24 | 20. 224 |
| 21. -1 | 22. 240 | 23. -15 | 24. -32 | 25. -6 |

פעולת החזקה:

נסתכל במכפלה הבאה: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. כפי שאנו רואים, כדי לחשב מכפלה זו צריך **לכפול** את המספר 2 **בעצמו** כמה פעמים.

מקובל לרשום את המכפלה הנ"ל בצורה הבאה: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$.

בסיס החזקה: המספר שכופלים אותו בעצמו כמה פעמים נקרא בסיס החזקה.

מעריך החזקה: המספר שמראה כמה פעמים הבסיס מופיע ככופל במכפלה הנ"ל נקרא מעריך החזקה.

בביטוי 2^5 המספר 2 הוא הבסיס והמספר 5 הוא המעריך.

דוגמאות:

א. $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

ב. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

ג. $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

חזקות עם מספרים מכוונים:

דוגמאות:

ב. $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

א. $(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$

ד. $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

ג. $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

ו. $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

ה. $-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$

ח. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

ז. $-2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$

תזכורת: כאשר במונה או במכנה של קו שבר יש ביטוי עם פעולות חשבון, משמש קו השבר גם כסוגריים של הביטוי המופיע במונה או במכנה.

תרגילים:

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $-36 \div (-9) \cdot 5 =$ | 2. $-35 \div 7 \cdot (-6) =$ | 3. $-2 - 8 \div (-4) =$ |
| 4. $(15 - 30) \div (-5) =$ | 5. $-28 \div (-7) + (-16) \div 4 =$ | 6. $[3 \cdot (-2) - 8] \div (-7) =$ |
| 7. $[-15 \div 5 - 21] \div (-4) =$ | 8. $5 \cdot [-6 \div (-2) - 2 \cdot 3] =$ | 9. $\{-6 + 30 \div [-8 - (4 - 7)]\} \cdot (-4) =$ |
| 10. $\frac{18 \div (-3) - 32 \div 8}{(-56 \div 7 + 4 \cdot 5) \div (-3)} =$ | 11. $\frac{[-2 \cdot 5 - 16 \div (-4)] \div (-2)}{-7 + 3 \cdot (-5 + 9) \div (-6)} =$ | 12. $3 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-3)^2 =$ |
| 13. $10 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-4)^2 =$ | 14. $2 \cdot (-10)^2 - 5 \cdot (-6)^2 =$ | 15. $(-5)^2 \cdot (-2^2) \div (3^2 + 1) =$ |
| 16. $[5 - 5 \cdot (-2)^3] \div 3^2 =$ | 17. $[-9 \cdot (-3)^2 - 11 \cdot 2^2] \div (-5^2) =$ | 18. $[(8 - 3 \cdot 2^2) \div (-2)^3] \cdot (5^2 - 1^2) =$ |
| 19. $6^2 \div [(-2) \cdot (-3^2) - (-3) \cdot (-2^2)] =$ | | 20. $\{[-3^2 + (-4^2)] \div 5^2\} \cdot (-3)^3 =$ |

תשובות:

- | | | | | | | |
|---------|-------|--------------------|--------------------|--------|--------|--------|
| 1. 20 | 2. 30 | 3. 0 | 4. 3 | 5. 0 | 6. 2 | 7. 6 |
| 8. -15 | 9. 48 | 10. $2\frac{1}{2}$ | 11. $-\frac{1}{3}$ | 12. -6 | 13. -8 | 14. 20 |
| 15. -10 | 16. 5 | 17. 5 | 18. 12 | 19. 6 | 20. 27 | |

5. תבניות מספר

תבנית מספר / ביטוי אלגברי – ביטוי המכיל מספרים ואות או אותיות כך שעל ידי הצבת מספרים במקום האות או האותיות מקבלים ערך מספרי.

משתנים – האותיות שמופיעות בתבנית מספר.

מקדם – המספר שבו כופלים את המשתנה.

כללים של כתיבת תבנית מספר

1. כאשר כופלים מספר במשתנה או משתנה במשתנה אפשר להשמיט את הנקודה של הכפל.

לדוגמא: א. במקום לרשום $7 \cdot t$ נהוג לרשום $7t$.

ב. במקום לרשום $m \cdot n$ נהוג לרשום mn .

2. כאשר כופלים מספר במשתנה נהוג לרשום את המספר משמאל למשתנה.

לדוגמא: א. במקום לרשום $x8$ נהוג לרשום $8x$.

ב. במקום לרשום $1x$ או $-1x$ נהוג לרשום x או $-x$ בהתאמה.

3. כאשר הכפל הוא של ביטוי עם סוגריים אפשר לרשום את המספר או המשתנה ללא נקודה משמאל וגם מימין לסוגריים. **אנו נרשום את המספר משמאל לסוגריים.**

לדוגמא: א. במקום לרשום $5 \cdot (x+y)$ נהוג לרשום $5(x+y)$.

ב. במקום לרשום $(1+x) \cdot (2+3x)$ נהוג $(1+x)(2+3x)$.

4. אם המשתנה רשום במונה של שבר אז אפשר לכתוב זאת כך שהשבר יהיה משמאל למשתנה.

$$\text{דוגמאות: } \frac{x}{3} = \frac{1}{3}x, \quad \frac{-3x}{19} = -\frac{3}{19}x, \quad \frac{5(x+2)}{-7} = -\frac{5}{7}(x+2)$$

הערה: שימו לב למיקום המינוס בשתי הדוגמאות האחרונות. מקובל לרשום את המינוס לפני קו השבר!

הצבה בתבנית מספר

כאשר מציבים בתבנית מספר, מספרים במקום האותיות יש להקפיד על הכללים של **סדר פעולות חשבון**. התוצאה שמתקבלת היא **מספר** והיא גם נקראת **ערך התבנית**.

תרגילים

הצב בתבניות המספר הבאות (1-6) במקום m ו-n את הערכים שבטבלה הנתונה וחשב אותם:

	א	ב	ג	ד
m	1	5	4	-2
n	2	1	-3	7

$$1. \quad 2m + 3n \quad 2. \quad 2(m - 2n) \quad 3. \quad (m - n)(2m + n)$$

$$4. \quad 2(m - 2) - 3(2n + 1) \quad 5. \quad mn - 4(m - 1) \quad 6. \quad [4(2n - 1) + m]^3$$

חשב את ערכי התבניות מספר הבאות (הצב את הערכים שבצד שמאל):

$$7. \quad 3a^2 \quad a = -2, -3, 1, -4, 2$$

$$8. \quad -t^3 \quad t = -2, -3, 1, 0, 2$$

$$9. \quad (-2p)^2 \quad p = -1, -3, 5, -4, 1$$

$$a = -3, b = -1, c = -4 \quad \lambda \quad a = -2, b = 5, c = 2 \quad \beth \quad a = 2, b = 3, c = 1 \quad \aleph \quad 5a^2b + c \quad .10$$

$$a = -3, b = -1 \quad \lambda \quad a = -2, b = 5 \quad \beth \quad a = 2, b = 3 \quad \aleph \quad a^2 - 2ab + b^2 \quad .11$$

$$a = -3, b = -1 \quad \lambda \quad a = -2, b = 5 \quad \beth \quad a = 2, b = 3 \quad \aleph \quad (a - b)^2 \quad .12$$

$$a = -3, b = -1 \quad \lambda \quad a = -2, b = 5 \quad \beth \quad a = 2, b = 3 \quad \aleph \quad 25a^2 - 30ab + 9b^2 \quad .13$$

$$a = -3, b = -1 \quad \lambda \quad a = -2, b = 5 \quad \beth \quad a = 2, b = 3 \quad \aleph \quad (5a - 3b)^2 \quad .14$$

$$a = -3, b = -1 \quad \lambda \quad a = -2, b = 5 \quad \beth \quad a = 2, b = 3 \quad \aleph \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad .15$$

$$a = -3, b = -1 \quad \lambda \quad a = -2, b = 5 \quad \beth \quad a = 2, b = 3 \quad \aleph \quad (a - b)^3 \quad .16$$

$$t = -2, -3, 4, 0, 2 \quad t^2 - 8t + 12 \quad .17$$

$$x = -2, -1, 1, 0, 2 \quad (5x - 10)^2 \quad .18$$

$$d = -2, -1, 1, 0, 2 \quad d^4 - 5d^3 + 6d^2 - 3d + 1 \quad .19$$

$$f = -2, -1, 1, 0, 2 \quad f^3 + 6f^2 - 15f + 8 \quad .20$$

$$g = -2, -1, 1, 0, 3 \quad \frac{2g - g^2 + 3}{2g + 3} \quad .21$$

$$m = -2, -1, 1, 0, 2 \quad \frac{m^3 - 27}{m - 3} + 3m \quad .22$$

כתוב את תבניות המספר הבאות בצורה מקוצרת.

$$n + n + n + n + n + n + n \quad .23$$

$$r + r + r + r + q + q + q + q + q \quad .24$$

$$uuvv + uuvv + uuvv \quad .25$$

$$r \cdot r \cdot r \cdot 3r \cdot q \cdot q \cdot 4q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \quad .26$$

$$y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y + y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y + y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y + y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \quad .27$$

$$y \cdot y \cdot y + y \cdot y \cdot y + y \cdot y \cdot y + y \cdot y + y \cdot y + y \cdot y + y + y + y + y \quad .28$$

$$\frac{uuvvv + uuvvv + uuvvv}{z + z + z + z + w + w + w} \quad .29$$

$$\frac{xxx + xxx - xx - xx - xx - xx - xx}{zzz + zzz + zzz + zz + ww + ww} \quad .30$$

כתוב את תבניות המספר הבאות ללא סימן המקדם.

$$4(b - 3p)^2 \quad .36 \quad 3y^2 + 2z^3 \quad .35 \quad 3x + 5z \quad .34 \quad 4xy^2z^3 \quad .33 \quad 2y + 4b \quad .32 \quad 6y \quad .31$$

כתוב את תבניות המספר הבאות ללא סימן החזקה.

$$b^2 + c^3 + d^2 \quad .42 \quad \frac{3^3}{a^2} \quad .41 \quad \frac{p^4}{b^2} \quad .40 \quad b^2c^3d^2 \quad .39 \quad y^5 \quad .38 \quad z^3 \quad .37$$

כתוב את תבניות המספר הבאות ללא סימן החזקה והמקדם.

$$3a^2 + b^3 \quad .46 \quad 3b^2c \quad .45 \quad 4m^2 \quad .44 \quad 2z^2y^3 \quad .43$$

פתרונות

	6	5	4	3	2	1	
א	39	2	-17	-4	-6	8	
ב	27	-11	-3	44	6	13	
ג	-72	-24	19	35	20	-1	
ד	150	-2	-53	-27	-32	17	

7. 12, 27, 3, 48, 12 8. 8, 27, -1, 0, -8 9. 4, 36, 100, 64, 4 10. א. 61 ב. 102 ג. -49

11. א. 1 ב. 49 ג. 4 12. א. 1 ב. 49 ג. 4 13. א. 1 ב. 625 ג. 144

14. א. 1 ב. 625 ג. 144 15. א. -1 ב. -343 ג. -8 16. א. -1 ב. -343 ג. -8

17. 32, 45, -4, 12, 0 18. 400, 225, 25, 100, 0 19. 87, 16, 0, 1, -5 20. 54, 28, 0, 8, 10

21. 5, 0, $\frac{4}{5}$, 1, 0 22. 1, 4, 16, 9, 25 23. $7n$ 24. $4r+5q$ 25. $3u^2v^2$ 26. $12r^4q^7$ 27. $4y^5$ 28.

$$.29 \quad 3y^3 + 3y^2 + 5y \quad .30 \quad \frac{3u^2v^3}{4z+3w} \quad .31 \quad \frac{2x^3-5x^2}{3z^3+z^2+2w^2} \quad y+y+y+y+y+y+y$$

$$.32 \quad y+y+b+b+b+b \quad .33 \quad xy^2z^3+xy^2z^3+xy^2z^3+xy^2z^3 \quad .34 \quad x+x+x+z+z+z+z+z$$

$$.35 \quad y^2+y^2+y^2+z^3+z^3 \quad .36 \quad (b-3p)^2+(b-3p)^2+(b-3p)^2+(b-3p)^2 \quad .37 \quad z \cdot z \cdot z$$

$$.38 \quad y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \quad .39 \quad b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c \cdot d \cdot d \quad .40 \quad \frac{p \cdot p \cdot p \cdot p}{b \cdot b} \quad .41 \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{a \cdot a} \quad .42 \quad b \cdot b + c \cdot c \cdot c + d \cdot d$$

$$.43 \quad z \cdot z \cdot y \cdot y \cdot y + z \cdot z \cdot y \cdot y \cdot y \quad .44 \quad m \cdot m + m \cdot m + m \cdot m + m \cdot m \quad .45 \quad b \cdot b \cdot c + b \cdot b \cdot c + b \cdot b \cdot c$$

$$.46 \quad a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + b \cdot b \cdot b$$

נספח:

קבוצת הצבה או תחום הגדרה של תבנית מספר עם משתנה יחיד

קבוצת הצבה – קבוצת כל המספרים שהצבתם בתבנית המספר נותנת מספר.

דוגמאות:

א. קבוצת ההצבה של תבנית המספר $\frac{2x-7}{19}$ היא כל המספרים או כל x (אפשר לרשום $(\forall x)$).

כי לכל הצבה של מספר במקום x נוכל לחשב את ערך התבנית ולקבל מספר.

ב. קבוצת ההצבה של תבנית המספר $\frac{-3}{x-7}$ היא כל המספרים חוץ מ-7.

כי אם נציב $x=7$ נקבל $\frac{-3}{0}$ שהוא ביטוי חסר משמעות. אנו נרשום זאת כך: $x \neq 7$.

לסיכום: כדי למצוא את קבוצת ההצבה של תבנית מספר בצורת שבר יש לבדוק מתי המכנה שווה לאפס.

6. כינוס איברים דומים

חד – איבר: הוא מספר אחד, משתנה אחד, או צירוף מספרים ומשתנים בצורת מכפלה או מנה.

הגורם המספרי של חד-איבר נקרא **מקדם**.

המספר 4 הוא המקדם של חד – האיבר $4x$.

המספר $-\frac{1}{2}$ הוא המקדם של חד – האיבר $-\frac{1}{2}b^2x$.

המקדם של חד-איבר ab הוא 1. (את המקדם 1, או -1, משמיטים).

איברים דומים: ביטויים כמו $2a$, $-3a$, $\frac{1}{2}a$ וכו' או a^2b , $4a^2b$, $-\frac{1}{4}a^2b$ וכו' נקראים **איברים דומים**.

גם האיברים $\frac{1}{2}ax^2$, $3ax^2$, ו- $-4x^2a$ נקראים איברים דומים **למרות** שסדר הכתיבה שלהם שונה.

באיברים דומים מופיעים אותן האותיות עם אותן החזקות והקשר ביניהם הוא ע"י **כפל בלבד**.

כינוס איברים דומים – חיבור מקדמים של איברים דומים וכפל הסכום באיבר הדומה נקרא כינוס איברים דומים.

דוגמאות:

$$\text{א. } 3a + 4 - 5a + 3 = 3a - 5a + 4 + 3 = -2a + 7$$

$$\text{ב. } a - 3ab + 5b + ab + 7a - 8b = a + 7a - 3ab + ab + 5b - 8b = 8a - 2ab - 3b$$

$$\text{ג. } 4 + x^2 - 7x + 2x^2 + x - 9 = x^2 + 2x^2 - 7x + x + 4 - 9 = 3x^2 - 6x - 5$$

$$\text{ד. } yx - x^3y + 3xy^3 - 2yx^3 + 6xy - 3y^3x = -3x^3y + 7xy$$

תרגילים:

- $5x + 3y + 7y - 2x =$
- $6a + 7b - 8b + 6a =$
- $4x + 3y - 5z - 2x - 6y + 12z =$
- $12a - 5b + 7c + 12b - 3a - 4b =$
- $12x + 12y - 5x + 6z - 2y + 4z =$
- $11a + 2b + c + 10a - b + 4c =$
- $15x + 10y - 5z - 20x + 4y - 11z =$
- $8a - 7b + 6c - 4c - 2b + 10a =$
- $10x - 12y + 14z - 12x + 14y - 16z =$
- $2a + 7b - 11c - 15a - 13c + 17b =$
- $a^4 + a^4 + a^4 =$
- $7y^5 - 2y^4 + 3y^5 + 5y^4 =$
- $3xy - 2x - 8xy + 7x =$
- $3x^2y - 5xy^2 + 4xy^2 - 4x^2y =$
- $4ac - 5 + 3ax - 5ca + 7 - 5ax =$
- $7abc + 5ab - 8ba + 13cba + 15 =$
- $\frac{2}{3}x^2 - 4yx - 5\frac{2}{5}x^2 - 7\frac{1}{2}xy =$
- $8p - 15\frac{1}{3}m - 9\frac{1}{6}p + m =$
- $2\frac{1}{3}a + 3\frac{1}{4}b + \frac{1}{2}a - 5\frac{1}{6}b =$
- $7\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{3}y - 5x - 3\frac{1}{6}y =$

תשובות:

- $3x + 10y$
- $12a - b$
- $2x - 3y + 7z$
- $9a + 3b + 7c$
- $7x + 10y + 10z$
- $21a + b + 5c$
- $-5x + 14y - 16z$
- $18a - 9b + 2c$
- $-2x + 2y - 2z$
- $-13a + 24b - 24c$
- $3a^4$
- $10y^5 + 3y^4$
- $-5xy + 5x$
- $-x^2y - xy^2$
- $-ac - 2ax + 2$
- $20abc - 3ab + 15$
- $-4\frac{11}{15}x^2 - 11\frac{1}{2}xy$
- $-1\frac{1}{6}p - 14\frac{1}{3}m$
- $2\frac{5}{6}a - 1\frac{11}{12}b$
- $2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{6}y$

7. כינוס איברים דומים (עם סוגריים)

בשלב זה נסתפק במקרה שלפני הסוגריים לא מופיע כופל, הפעולה שנבצע תהיה השמטת סוגריים.

הכללים להשמטת סוגריים:

א. אם יש סימן פלוס לפני סוגריים אז משמיטים את הסוגריים ומשאירים את הביטויים שבתוך הסוגריים ללא שינוי.

ב. אם יש סימן מינוס לפני סוגריים אז משמיטים את הסוגריים והופכים את הסימנים של כל הביטויים שבתוך הסוגריים.

ג. אם יש סוגריים בתוך סוגריים אז סדר השמטת הסוגריים הוא החל מהסוגריים הפנימיים.

ד. במידת האפשר רצוי לכנס איברים דומים בתוך הסוגריים לפני שמשמיטים אותם.

דוגמאות:

$$3a - (2a + 4) + (7 - a) = 3 - 2a - 4 + 7 - a = -3a + 6 \quad \text{א.}$$

$$-(6a - 5) - (4a - 2) + (8a + 3) = -6a + 5 - 4a + 2 + 8a + 3 = -2a + 10 \quad \text{ב.}$$

$$8x - [7x - (6 + 4x) - 2] = 8x - [7x - 6 - 4x - 2] = 8x - [3x - 8] = 8x - 3x + 8 = 5x + 8 \quad \text{ג.}$$

$$\left\{ 2x - [3x - (x^2 + x) - 4x^2] \right\} - 5x^2 = \left\{ 2x - [3x - x^2 - x - 4x^2] \right\} - 5x^2 = \\ = 2x - 3x + x^2 + x + 4x^2 - 5x^2 = 0 \quad \text{ד.}$$

תרגילים:

$$1. (4a + 9b) + (3a + 6b) = \quad 2. (8a + b) + (5b - 3a) = \quad 3. (4a + 2b) - (5a + 7b) =$$

$$4. (12a - 7b) + (3a - 15b) = \quad 5. (8p - 6c) - (5p + 7c) = \quad 6. (8x + 9y) - (3x - 7y) =$$

$$7. (7x + 8y) - (4x + 2y) + (5x - 3y) = \quad 8. (9a + 7b) - (12a - 6b) - (a - 5b) =$$

$$9. (5p - 3m) - (4p - 6m) + (7p - 5m) = \quad 10. (6x + 5y) - (4x + 17y) - (x - 7y) =$$

$$11. (7x + 3y - 9z) + (14x - 4y - 3z) = \quad 12. (10a - 17b - 5c) + (21a - 7b + 16c) =$$

$$13. (6m - 9p - 4b) - (-7m - 9b - 16p) = \quad 14. 8x - [6x - (7a + 4x)] + 13x =$$

$$15. 15m + [5p - (7p + 17 - 6m)] - m = \quad 16. 5x^2 - (8x + 12x^2) - [3x + (13x^2 - 12x)] =$$

$$17. 17a - a^2b - (21ab^2 - a) + (3a^2b - 2a^2) =$$

$$18. 12z - \{3p + [3p - 7z - (-5z + 4p) - 7z] + p\} =$$

$$19. 6x - \{8y + [5x - (8x - 7)]\} + (23x - 18) =$$

$$20. 5a^2b - \{-[-4ab - (ab - 8) - 4ab] + 8a^2b\} - 14ab =$$

$$21. -(8x + 12y - 6z) - \{5x + [4y - 9z - (3x + y - 18z) - (x - y) + z]\} =$$

תשובות:

$$1. 7a + 15b \quad 2. 5a + 6b \quad 3. -a - 5b \quad 4. 15a - 22b \quad 5. 3p - 13c \quad 6. 5x + 16y$$

$$7. 8x + 3y \quad 8. -4a + 18b \quad 9. 8p - 2m \quad 10. 3x - 5y \quad 11. 21x - y - 12z$$

$$12. 31a - 24b + 11c \quad 13. 13m + 7p + 5b \quad 14. 19x + 7a \quad 15. 20m - 2p - 17 \quad 16. -20x^2 + x$$

$$17. 18a + 2a^2b - 21ab^2 - 2a^2 \quad 18. 21z - 3p \quad 19. 32x - 8y - 25 \quad 20. -3a^2b - 23ab + 8$$

$$21. -9x - 16y - 4z$$

תרגילים נוספים

כנס את האיברים הדומים הבאים :

1. $3a + 10a - 2a$ 2. $12x - 3y + 7x - 8y + 11x - 25y$ 3. $t^2 + t^2$
4. $15b^3 - 11b^3 - 2b^3$ 5. $7b - 3p + 2b + 5p$ 6. $6y - 9 - 11 + 2y$
7. $a^3 + a^3 + a^3 + 7r - 3r - 2r$ 8. $5a^4 - 2c^3 + 3a^4 - 3c^3 - 2a^4 + 7c^3$
9. $8d - 6e + 7 - 8e + 11d - 2$ 10. $3xy - 5t^2 - 7xy + 9t^2 + 6xy$
11. $-3x^2 + 9ab - 5x^2 - 7ab + ba$ 12. $4t^3 - 5t^2 + 3t - 7t^3 + 7t^2 - 12t$
13. $6f - 5d - (4f - 3d)$ 14. $6x^2y - 10yx + 4xy^2 - 3xy + 13x^2y - 2y^2x$
15. $6x^2y - 10yx - (4xy^2 - 3xy + 13x^2y) - 2y^2x$
16. $7t^2r^3 - 6r^2t^2 + (5t^2r^2 - 8r^3t^2) - (-6t^2r^2 + 5r^3t^2)$
17. $7x^2 - 6x - (5 - 4x^2 + 7x) - (17 - 9x^2 + 10x)$
18. $7p^3 - (5p + 3p^2) - \{-13p^2 - (11 - 9p^3 + 10p)\}$
19. $2m^3n - \{nm^3 - [2mn + (3m^3n - 4mn)] - 5u^2\}$
20. $5m^3n^2 - \{5n^2m^3 + 2a^2 - (2m^3n^2 - 7mn - 3a^2) + 5mn\}$
21. $-\{15a - 5a^2d + [6a^2 - 8a - (8a^2d - 5a^2)] + 10a^2d\}$

פתרונות

1. $11a$ 2. $30x - 36y$ 3. $2t^2$ 4. $2b^3$ 5. $9b + 2p$ 6. $8y - 20$
7. $3a^3 + 2r$ 8. $6a^4 + 2c^3$ 9. $19d - 14e + 5$ 10. $2xy + 4t^2$
11. $-8x^2 + 3ab$ 12. $-3t^3 + 2t^2 - 9t$ 13. $2f - 2d$ 14. $19x^2y - 13yx + 2xy^2$
15. $-7x^2y - 7yx - 6y^2x$ 16. $-6t^2r^3 + 5r^2t^2$ 17. $20x^2 - 23x - 22$
18. $-2p^3 + 10p^2 + 5p + 11$ 19. $4m^3n - 2mn + 5u^2$ 20. $2m^3n^2 - 12mn - 5a^2$
21. $3a^2d - 11a^2 - 7a$

8. חוקי חזקות

חוק 1 (מכפלת חזקות בעלות בסיסים שווים) :

כדי לחשב מכפלת חזקות בעלות בסיסים שווים כותבים את הבסיס פעם אחת ומחברים את המעריכים של החזקות המוכפלות.

בנוסחה נוכל לרשום: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

דוגמאות:

א. $a^2 \cdot a^5 \cdot a \cdot a^4 = a^{2+5+1+4} = a^{12}$

ב. $2a^4 \cdot b \cdot 3b^8 \cdot a^2 = 2 \cdot 3 \cdot a^4 \cdot a^2 \cdot b \cdot b^8 = 6 \cdot a^{4+2} \cdot b^{1+8} = 6a^6b^9$

חוק 2 (מנת חזקות בעלות בסיסים שווים) :

כדי לחשב מנת חזקות בעלות בסיסים שווים כותבים את הבסיס פעם אחת ומחסרים את המעריכים.

בנוסחה נוכל לרשום:

כאשר $(a \neq 0, m < n)$ או כאשר $(a \neq 0, m > n)$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

דוגמאות:

א. $\frac{2^{17}}{2^8} = 2^{17-8} = 2^9$

ב. $\frac{a^7 \cdot b^8 \cdot a \cdot b^3}{a^2 \cdot a^5 \cdot b^4} = \frac{a^{7+1} \cdot b^{8+3}}{a^{2+5} \cdot b^4} = \frac{a^8 \cdot b^{11}}{a^7 \cdot b^4} = a^{8-7} \cdot b^{11-4} = a \cdot b^7$

חוק 3 (חזקה של חזקה) :

כדי לחשב חזקה של חזקה כותבים את הבסיס פעם אחת וכופלים את המעריכים של שתי החזקות.

בנוסחה נוכל לרשום: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

דוגמאות:

א. ע"פי חוק (3) $(a^6)^5 = a^{6 \cdot 5} = a^{30}$

ב. ע"פי חוקים (3) ו-(1) $(3^6)^3 \cdot (3^2)^8 = 3^{6 \cdot 3} \cdot 3^{2 \cdot 8} = 3^{18} \cdot 3^{16} = 3^{18+16} = 3^{34}$

ג. ע"פי חוקים (3) ו-(2) $\frac{(2^4)^9}{(2^7)^5} = \frac{2^{4 \cdot 9}}{2^{7 \cdot 5}} = \frac{2^{36}}{2^{35}} = 2^{36-35} = 2^1 = 2$

חוק 4 (חזקה של מכפלת בסיסים) :

חזקה של מכפלת שני בסיסים שווה למכפלת החזקות בעלות אותו המעריך של שני הבסיסים.

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n} \quad \text{בנוסחה נוכל לרשום:}$$

דוגמאות:

א. ע"פי חוק (4) $(3a)^3 = 3^3 \cdot a^3 = 27a^3$

ב. ע"פי חוקים (4) ו-(3) $(a^3 \cdot b^2)^6 = (a^3)^6 \cdot (b^2)^6 = a^{18} \cdot b^{12}$

חוק 5 (חזקה של מנת שני בסיסים) :

חזקה של מנת שני בסיסים שווה למנת החזקות בעלות אותו המעריך של שני הבסיסים.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}} \quad \text{בנוסחה נוכל לרשום:} \quad (b \neq 0)$$

דוגמאות:

א. ע"פי חוק (5): $\left(\frac{a}{2}\right)^5 = \frac{a^5}{2^5} = \frac{a^5}{32}$

ב. דרך א'-עפ"י החוקים 5, 4, 3, ו-2: $\left(\frac{a^4 b^6}{a^2 b^5}\right)^5 = \frac{(a^4 b^6)^5}{(a^2 b^5)^5} = \frac{(a^4)^5 (b^6)^5}{(a^2)^5 (b^5)^5} = \frac{a^{20} b^{30}}{a^{10} b^{25}} = a^{10} b^5$

דרך ב' -עפ"י חוק 2 ואחר כך חוקים 4 ו-3: $\left(\frac{a^4 b^6}{a^2 b^5}\right)^5 = (a^{4-2} b^{6-5})^5 = (a^2 b)^5 = (a^2)^5 b^5 = a^{10} b^5$

סיכום חוקי החזקות:

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.3	2. $\frac{a^n}{a^m} = \begin{matrix} \nearrow (n>m) & a^{n-m} \\ \searrow (m>n) & \frac{1}{a^{m-n}} \end{matrix}$	1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$		4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
8. $1^n = 1$	7. $a^1 = a$	6. $a^0 = 1$

1. $(x \cdot y)^{10} =$
2. $(5x)^3 =$
3. $(8y)^2 =$
4. $(12x)^3 =$
5. $\left(\frac{y}{7}\right)^3 =$
6. $\left(\frac{x}{6}\right)^4 =$
7. $\left(\frac{2}{t}\right)^7 =$
8. $\left(\frac{3}{p}\right)^5 =$
9. $x^3 \cdot x^{10} =$
10. $y \cdot y^{20} =$
11. $t^{12} \cdot t^4 =$
12. $p^{14} \cdot p^{24} =$
13. $\frac{p^{17}}{p^{12}} =$
14. $\frac{y^{21}}{y} =$
15. $\frac{x^{58}}{x^{21}} =$
16. $\frac{t^{41}}{t^{35}} =$
17. $(x^4)^5 =$
18. $(y^3)^{10} =$
19. $(p^8)^6 =$
20. $(t^{41})^2 =$
21. $(x^3 y^2)^5 =$
22. $(p^5 x^4)^6 =$
23. $(t^{10} y^{12})^3 =$
24. $(x^4 y^{13})^6 =$
25. $\frac{x^4 \cdot x^{10}}{x^3} =$
26. $\frac{y^{12} \cdot y^{14}}{y^{25}} =$
27. $\frac{t^5 \cdot t^{12} \cdot t^{40}}{t^{50} \cdot t^2} =$
28. $\frac{t^6 \cdot x^5 \cdot x^{12} \cdot t^{21}}{(x \cdot t)^{15}} =$
29. $\frac{(x^3 \cdot p^2)^5 \cdot (x \cdot p^4)^4 \cdot (x^3)^7}{(x^5 \cdot p^3)^4 \cdot (p^3 \cdot x^5)^3} =$
30. $\frac{(x^5 \cdot y^2 \cdot t^3)^4 \cdot (y^3 \cdot t^4 \cdot x)^5}{(x^3 \cdot y^3 \cdot t)^4 \cdot (y^3 \cdot x^4 \cdot t^2)^3} =$

תשובות:

1. $x^{10} y^{10}$
2. $125x^3$
3. $64y^2$
4. $1728x^3$
5. $\frac{y^3}{343}$
6. $\frac{x^4}{1296}$
7. $\frac{128}{t^7}$
8. $\frac{243}{p^5}$
9. x^{13}
10. y^{21}
11. t^{16}
12. p^{38}
13. p^5
14. y^{20}
15. x^{37}
16. t^6
17. x^{20}
18. y^{30}
19. p^{48}
20. t^{82}
21. $x^{15} y^{10}$
22. $p^{30} x^{24}$
23. $t^{30} y^{36}$
24. $x^{24} y^{78}$
25. x^{11}
26. y
27. t^5
28. $x^2 t^{12}$
29. $x^5 p^5$
30. $t^{22} y^2 x$

9. כפל חד איבר בחד איבר

חד איבר – תבנית מספר שאין בה פעולות של חיבור וחיסור נקראת חד איבר.

דוגמאות לחד איבר : $2a$, $3xy$, $\frac{1}{4}ab^2$ וכו'.

כדי לכפול חד איבר בחד איבר כופלים את המקדמים (המספרים) של חד האיברים זה בזה ואת האותיות זו בזו. אם מופיעה אותה אות צריך להיעזר בחוקי החזקה.

נזכיר : $x^2 + x^2 = 2x^2$, $x^2 \cdot x^2 = x^4$, $x^2 \cdot x^3 = x^5$, $(x^2)^3 = x^6$

דוגמאות :

א. $3x \cdot 2x^2 = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot x^2 = 6x^{1+2} = 6x^3$

ב. $3a^3 \cdot 4ab = 3 \cdot 4 \cdot a^3 \cdot ab = 12a^4b$

ג. $5a^2 \cdot 2a^2 - 3a^3 \cdot 3a = 10a^4 - 9a^4 = a^4$

תרגילים :

1. $5x \cdot (-4y) =$
2. $4ab \cdot 7c =$
3. $-6xz \cdot (-9p) =$
4. $-3t \cdot 7cp =$
5. $-8x^3 \cdot (-3x^5) =$
6. $11y^5 \cdot (-2y^7) =$
7. $8xy^6 \cdot 4y^3x^{12} =$
8. $-9a^{16}b^3c \cdot 2c^{21}a^{13}b^7 =$
9. $p^{16} \cdot p^{10} \cdot (-p^4) =$
10. $(-x^9t^4z^6) \cdot (-z^{32}x^{14}t^{13}) \cdot (-t^{17}x^5z^8) =$
11. $-5y^7c^4p^{15} \cdot 3y^{21}p^9c^{14} \cdot apc =$
12. $8x^7a^3b^{23} \cdot (-ab^{27}c^{31}) \cdot (xc^{22}b^{19}) =$
13. $x^5 \cdot x^m \cdot x^{3m+3} =$
14. $3x^2 \cdot (-4x^{10}) + 5x^4 \cdot 6x^8 - (-4x^6) \cdot (x^3)^2 =$
15. $6a^3b^5 \cdot (-4a^{12}b^{15}) - (-4a^7b^{12}) \cdot 9a^8b^8 - 2ab^{11} \cdot 7a^{14}b^9 =$
16. $3x^5y^8z^4 \cdot (-2x^8y^4z^5) + 5x^7y^8z \cdot (3x^3y^2z^4)^2 =$

תשובות :

1. $-20xy$
2. $28abc$
3. $54xzp$
4. $-21tcp$
5. $24x^8$
6. $-22y^{12}$
7. $32x^{13}y^9$
8. $-18a^{29}b^{10}c^{22}$
9. $-p^{30}$
10. $-x^{28}t^{34}z^{46}$
11. $-15y^{28}c^{19}p^{25}a$
12. $-8x^8a^4b^{69}c^{53}$
13. x^{4m+8}
14. $22x^{12}$
15. $-2a^{15}b^{20}$
16. $39x^{13}y^{12}z^9$

10. כפל חד איבר ברב איבר

נזכיר את המושגים **דו איבר ורב איבר**.

דו איבר – אם יש בתבנית המספר בדיוק פעולת חיבור אחת או פעולת חיסור אחת היא נקראת דו איבר.

רב איבר – תבנית מספר שיש בה לפחות פעולת חיבור אחת או פעולת חיסור אחת נקראת רב איבר.

דוגמאות לדו איברים: $a+3$, $3x^2-4x$, $a+b$ וכו'.

דוגמאות לרב איברים: x^2+2x-5 , $x-3y+4$, $a+b+c+d$ וכו'.

גם דו איבר הוא למעשה רב איבר. אם ברב איבר ישנם שלושה מחוברים הוא נקרא גם **תלת איבר**. שם אחר לתלת

איבר הוא **טרינום** (נטפל בו בצורה מסורה בהמשך... לא לדאוג!!!)

כדי לבצע כפל של חד איבר ברב איבר מסתמכים על **חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור והחיסור** (לא להיבהל – זה

מאוד פשוט!!!!).

נזכיר: $a(b \pm c) = ab \pm ac$ או $(b \pm c)a = ba \pm ca$

דוגמאות:

$$\text{א. } 5(2a-3) = 5 \cdot 2a + 5 \cdot (-3) = 10a - 15$$

$$\text{ב. } -3a(a-2) = -3a \cdot a - 3a \cdot (-2) = -3a^2 + 6a$$

$$\text{ג. } 2x^2(3x^2-4x-1) = 6x^4 - 8x^3 - 2x^2$$

$$\text{ד. } (3a-2)4-7(1-a) = 12a-8-7+7a = 19a-15$$

תרגילים:

1. $3(x+y) =$
2. $2(a-4b) =$
3. $-5(3x-y-1) =$
4. $7(4a-b+8c) =$
5. $(2x-5)9 =$
6. $(2a-6b+5c)3 =$
7. $x(x+1) =$
8. $-5ab(a-b+c) =$
9. $-2p(6a-7b+3c) =$
10. $6mc(2am-3bc+mc) =$
11. $(7a-3b-8c)(-2ab) =$
12. $(-5ab+3ac-9bc)(-4abc) =$
13. $(-9xy+6ab)(-5ax) =$
14. $4x^2(x-1) =$
15. $3x^5(x^2+4y) =$
16. $3a^4b(4ab^2-7ab+5ab^3) =$
17. $-5a^5m^4(-3a^2m+8a^9m^3-4a^5m^5) =$
18. $5(3a-b)+3(a+8b) =$
19. $4(5m-7p)-8(3m-5p)+3(p+4m) =$
20. $7x(3x-5y)-2y(4y+8x)+6x(7y-4x) =$
21. $4a(5a-2)-10(2a^2-a+3) =$
22. $2(6x^3-3x^2)-(4x^2-2x+1)3x =$
23. $(m^2-5mp+3p^2)2m+5p(2m^2-1.2mp-p^2) =$
24. $(x^2-3xy+2y^2)2x+3y(2x^2-1\frac{1}{3}xy+y^2) =$
25. $2a(4a^2+6a+9)-3(4a^2-6a-9) =$
26. $4a(5b^3-7b+8)+2a(3b^3+5b+7) =$
27. $3p^2-[5pt-3p(p-2t)+4t]3 =$
28. $4y^2+[3x+2(y+5x)-7(2y-3x)]3y =$

תשובות:

1. $3x+3y$
2. $2a-8b$
3. $-15x+5y+5$
4. $28a-7b+56c$
5. $18x-45$
6. $6a-18b+15c$
7. x^2+x
8. $-5a^2b+5ab^2-5abc$
9. $-12ap+14pb-6pc$
10. $12m^2ac-18mbc^2+6m^2c^2$
11. $-14a^2b+6ab^2+16abc$
12. $20a^2b^2c-12a^2bc^2+36ab^2c^2$
13. $45ax^2y-30a^2bx$
14. $4x^3-4x^2$
15. $3x^7+12x^5y$
16. $12a^5b^3-21a^5b^2+15a^5b^4$
17. $15a^7m^5-40a^{14}m^7+20a^{10}m^9$
18. $18a+19b$
19. $8m+15p$
20. $-3x^2-9xy-8y^2$
21. $2a-30$
22. $-3x$
23. $2m^3-5p^3$
24. $2x^3+3y^3$
25. $8a^3+36a+27$
26. $26ab^3-18ab+46a$
27. $12p^2-33pt-12t$
28. $102xy-32y^2$

11. כפל של רב איבר ברב איבר

נסתכל תחילה לדוגמא בתרגיל הבא : $(2+3)(5+4)$.

הפעולה בתוך הסוגריים קודמת לפעולה שמחוץ לסוגריים ולכן נקבל : $(2+3)(5+4) = 5 \cdot 9 = 45$.

מצד שני ניתן לחשב את התרגיל גם ע"י פתיחת סוגריים באופן הבא :

$$(2+3)(5+4) = 2(5+4) + 3(5+4) = 10 + 8 + 15 + 12 = 45$$

עפ"י הדוגמא הנ"ל נוכל לרשום את חוק הפילוג המורחב בעזרת אותיות : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

דוגמאות :

$$(x+3)(x-5) = x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 2x - 15 \quad \text{א.}$$

$$(2a^2b - 3ab^2)(4a + 2b) = 8a^3b + 4a^2b^2 - 12a^2b^2 - 6ab^3 = 8a^3b - 8a^2b^2 - 6ab^3 \quad \text{ב.}$$

$$(x-5)(x^2 + 2x + 3) = x \cdot x^2 + x \cdot 2x + x \cdot 3 - 5 \cdot x^2 - 5 \cdot 2x - 5 \cdot 3 = \\ = x^3 + 2x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 15 = x^3 - 3x^2 - 7x - 15 \quad \text{ג.}$$

$$(a+1)(a-2)(a+3) = (a^2 - 2a + a - 2)(a+3) = (a^2 - a - 2)(a+3) = \\ = a^3 + 3a^2 - a^2 - 3a - 2a - 6 = a^3 + 2a^2 - 5a - 6 \quad \text{ד.}$$

תרגילים :

1. $(a+2)(b+3) =$
2. $(a+2)(b-3) =$
3. $(a-2)(b+3) =$
4. $(a-2)(b-3) =$
5. $(a+2x)(2b+y) =$
6. $(a+1)(a^2+1) =$
7. $(2k^2+1)(k+2) =$
8. $(3p^2-1)(4-3p) =$
9. $(3-a^2)(5-a) =$
10. $(x-y)(5a-3b) =$
11. $(x+y)(-3a+20b) =$
12. $(4x-3y)(5a+2c) =$
13. $(5p+2t)(9m-7a) =$
14. $(6x-3y)(5b-4a) =$
15. $(\frac{1}{3}m+2)(3m^2-9) =$
16. $(\frac{1}{5}n-1)(\frac{1}{2}n^2+2) =$
17. $(a^2-\frac{1}{2})(-\frac{1}{4}a+3) =$
18. $(2\frac{1}{2}x-\frac{1}{3})(1\frac{1}{4}x^2+2) =$
19. $(3k+1)(2k^3-5) =$
20. $(y^4-5)(y^3+1) =$
21. $(x^2+3xy+9y^2)(x-3y) =$
22. $(2x^2-3xy+y^2)(4x+3y) =$
23. $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2) =$
24. $(a^2-2a+3)(a-4) =$
25. $(2x^2-3x-1)(5x+2) =$
26. $(b^3-b^2+b-1)(b+1) =$
27. $(3x^2-5x+11)(2x^2+8x-6) =$
28. $(2a+3b)(5a-4b) + (3a-4b)(2a-5b) =$
29. $(5x-8y)(8x-5y) + (7x-y)(2y-3x) =$
30. $(4a^2-10a+25)(2a+5) + (4a^2+10a+25)(2a-5) =$

תשובות :

1. $ab+3a+2b+6$
2. $ab-3a+2b-6$
3. $ab+3a-2b-6$
4. $ab-3a-2b+6$
5. $2ab+ay+4bx+2xy$
6. a^3+a^2+a+1
7. $2k^3+4k^2+k+2$
8. $-9p^3+12p^2+3p-4$
9. $a^3-5a^2-3a+15$
10. $5ax-3bx-5ay+3by$
11. $-3ax+20bx-3ay+20by$
12. $20ax+8cx-15ay-6cy$
13. $45mp-35ap+18mt-14at$
14. $30bx-24ax-15by+12ay$
15. $m^3+6m^2-3m-18$
16. $\frac{1}{10}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{2}{5}n-2$
17. $-\frac{1}{4}a^3+3a^2+\frac{1}{8}a-1\frac{1}{2}$
18. $3\frac{1}{8}x^3-\frac{5}{12}x^2+5x-\frac{2}{3}$
19. $6k^4+2k^3-15k-5$
20. $y^7+y^4-5y^3-5$
21. x^3-27y^3
22. $8x^3-6x^2y-5xy^2+3y^3$
23. $8x^3-y^3$
24. $a^3-6a^2+11a-12$
25. $10x^3-11x^2-11x-2$
26. b^4-1
27. $6x^4+14x^3-36x^2+118x-66$
28. $16a^2-16ab+8b^2$
29. $19x^2-72xy+38y^2$
30. $16a^3$

תרגילים נוספים

פתח את הסוגריים וכנס את האיברים הדומים (אם ישנם).

- | | |
|--|--|
| .1 $5(2a + 3b - 5c)$ | .2 $(5x - 4y + 3z)2b$ |
| .3 $3x^2(2x - 5xy + 2ab)$ | .4 $-(2c^2d - 7cd - 5cd^2)4c^2d^3$ |
| .5 $(4k^2l^3m - 6kl^2m^3 - 3klm^2)(-3klm)$ | .6 $-(-10klm + 5kl^2m^3 + 6kl - 2km^2)(-4k^2l^3m)$ |
| .7 $8(3g - 5h + 4i) - 3(7g - 9h - i)$ | .8 $4(2x - 5) + 2(x + 5)$ |
| .9 $4(7j - 1) + 3j(8 - 2j) - 4j(9 - j)$ | .10 $3a^3(3a^4 - 2a^2 - 1) - 2a^2(4a^5 - 3a^3 + a)$ |
| .11 $4(7y^2 - 5y + 4) - (9 - y - y^2)3y^2$ | .12 $3n[p - 3q + 2(n - r)] - n[6p + 2(3n + r) - 9q]$ |
| .13 $4t^2 - [2u - t(3u - 2t) - 2ut]3$ | .14 $4w[4w^2 - (w - 2z)5w + wz^2 - z(9w - 7zw)]$ |
| .15 $(x + 3)(x - 4)$ | .16 $(a - 4)(a - 5)$ |
| .17 $(2b - 5)(b + 1)$ | .18 $(3c - 2)(2c - 3)$ |
| .19 $(3d - 5e)(10d - 3e)$ | .20 $-(6f - 5)(4f + 3)$ |
| .21 $-(2g - 1)(3 - g)$ | .22 $(4h^3 - 2h + 1)(2h + 7)$ |
| .23 $(7i^2 + 2)(49i^4 - 14i^2 + 4)$ | .24 $3(j - 2)(j + 4)$ |
| .25 $2k(5k - 3) - (3k - 1)(3k + 2)$ | .26 $6k^2(2k - 1) - 2k(4 - 3k) - (3k + 1)(4k^2 - 2)$ |
| .27 $4l^3(2l - 3m) - (2m - l^2)(m - 7l^2)$ | .28 $3n(4n + 1)(5n - 2)$ |
| .29 $(4n - 3)(3n + 5) + 6(2n + 1)(5 - n)$ | .30 $(7p - 4)(4p + 5) - (2p + 3)(14p - 1)$ |
| .31 $(r^2 + 1)(r - 1)(r + 1)$ | .32 $[(q - 3)7q - 5q^2](q + 1) - (2q - 1)(q^2 + 1)$ |

פתרונות

- | | | | |
|--|--|-------------------------------------|-------------------------------------|
| .1 $10a + 15b - 25c$ | .2 $10bx - 8by + 6bz$ | .3 $6x^3 - 15x^3y + 6abx^2$ | .4 $-8c^4d^4 + 28c^3d^4 + 20c^3d^5$ |
| .5 $-12k^3l^4m^2 + 18k^2l^3m^4 + 9k^2l^2m^3$ | .6 $-40k^3l^4m^2 + 20k^3l^5m^4 + 24k^3l^4m - 8k^3l^3m^3$ | .7 $3g - 13h + 35i$ | .8 $10x - 10$ |
| .9 $-2j^2 + 16j - 4$ | .10 $a^7 - 5a^3$ | .11 $3y^4 + 3y^3 + y^2 - 20y + 16$ | .12 $-3np - 8nr$ |
| .13 $-2t^2 - 6u + 15ut$ | .14 $-4w^3 + 4w^2z + 32w^2z^2$ | .15 $x^2 - x - 12$ | .16 $a^2 - 9a + 20$ |
| .17 $2b^2 - 3b - 5$ | .18 $6c^2 - 13c + 6$ | .19 $30d^2 - 59de + 15e^2$ | .20 $-24f^2 + 2f + 15$ |
| .21 $2g^2 - 7g + 3$ | .22 $8h^4 + 28h^3 - 12h + 7$ | .23 $343i^6 + 8$ | .24 $3j^2 + 6j - 24$ |
| .25 $k^2 - 9k + 2$ | .26 $-4k^2 - 2k + 2$ | .27 $-2m^2 + 15l^2m - 12l^3m + l^4$ | .28 $60n^3 - 9n^2 - 6n$ |
| .29 $65n + 15$ | .30 $-21p - 17$ | .31 $r^4 - 1$ | .32 $-18q^2 - 23q + 1$ |

12. הנוסחאות לכפל מקוצר

הנוסחה להפרש ריבועים

נראה עכשיו שישנם מקרים שבהם ניתן למצוא מכפלה של דו איבר בדו איבר בדרך קצרה יותר. הנוסחאות שנקבל נקראות **הנוסחאות לכפל מקוצר**. כדי לקבל את הנוסחה הראשונה שנקראת **הנוסחה להפרש ריבועים** נבצע את

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2 \quad \text{הכפל הבא:}$$

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2} \quad \text{הנוסחה להפרש ריבועים:}$$

דוגמאות:

$$\text{א. } (x+5)(x-5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$$

$$\text{ב. } (2x+3)(2x-3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$$

הנוסחאות לדו איבר בריבוע

נביא עכשיו שתי נוסחאות נוספות לכפל מקוצר:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\boxed{(a+b)^2 = (b+a)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \quad \text{בנוסחה נוכל לרשום:}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = (b-a)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \quad \text{בנוסחה נוכל לרשום:}$$

דוגמאות:

$$\text{א. } (x+4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$\text{ב. } (5x-2)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 2 + 2^2 = 25x^2 - 20x + 4$$

$$\text{ג. } (2a^2b^3 - 3ab)^2 = (2a^2b^3)^2 - 2 \cdot 2a^2b^3 \cdot 3ab + (3ab)^2 = 4a^4b^6 - 12a^3b^4 + 9a^2b^2$$

תרגילים:

1. $(x+5)^2 =$
2. $(a+8)^2 =$
3. $(3b+1)^2 =$
4. $(1+5c)^2 =$
5. $(x+3y)^2 =$
6. $(3a+4b)^2 =$
7. $(ab+10)^2 =$
8. $\left(4x+\frac{1}{2}\right)^2 =$
9. $(2a^2+3b^2)^2 =$
10. $\left(x+\frac{1}{y}\right)^2 =$
11. $\left(0.1p^2q^3+\frac{1}{4}\right)^2 =$
12. $(8-x)^2 =$
13. $(p-3q)^2 =$
14. $(5y-4x)^2 =$
15. $\left(\frac{3}{2}y-x\right)^2 =$
16. $\left(\frac{1}{3}ab-\frac{1}{2}\right)^2 =$
17. $(3-x^2)^2 =$
18. $(2a^3-3b^2)^2 =$
19. $\left(\frac{2}{3}ab^2-\frac{3}{2}\right)^2 =$
20. $(2a+b)(2a-b) =$
21. $(3x+4y)(3x-4y) =$
22. $\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{5}\right) =$
23. $(3m^2-5p^4)(3m^2+5p^4) =$
24. $(2a-3b)^2+(3a+2b)^2 =$
25. $(3x+4y)^2+(4x-3y)^2 =$
26. $(5x-3y)^2-2(3x-3y)^2 =$
27. $(6a-5b)^2-3(2a+3b)^2 =$
28. $2(7x-3a)^2-3(x-14a)^2 =$
29. $5(6x-2b)^2+3(3b-2x)^2 =$
30. $(3x-5y)^2+(2x+9y)^2-(2x+3y)(27y-17x) =$
31. $(4a-7b)^2-(3a+5b)^2-2(2a+3b)(4b-17a) =$
32. $(3x-2y)(3x+2y)+(x-3y)^2-(5x-y)(2x-5y) =$

תשובות:

1. $x^2+10x+25$
2. $a^2+16a+64$
3. $9b^2+6b+1$
4. $1+10c+25c^2$
5. $x^2+6xy+9y^2$
6. $9a^2+24ab+16b^2$
7. $a^2b^2+20ab+100$
8. $16x^2+4x+\frac{1}{4}$
9. $4a^4+12a^2b^2+9b^4$
10. $x^2+2\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}$
11. $0.01p^4q^6+0.05p^2q^3+\frac{1}{16}$
12. $64-16x+x^2$
13. $p^2-6pq+9q^2$
14. $25y^2-40xy+16x^2$
15. $\frac{9}{4}y^2-3xy+x^2$
16. $\frac{1}{9}a^2b^2-\frac{1}{3}ab+\frac{1}{4}$
17. $9-6x^2+x^4$
18. $4a^6-12a^3b^2+9b^4$
19. $\frac{4}{9}a^2b^4-2ab^2+\frac{9}{4}$
20. $4a^2-b^2$
21. $9x^2-16y^2$
22. $\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{25}$
23. $9m^4-25p^8$
24. $13a^2+13b^2$
25. $25x^2+25y^2$
26. $7x^2-6xy-9y^2$
27. $24a^2-96ab-2b^2$
28. $95x^2-570a^2$
29. $192x^2-156bx+47b^2$
30. $47x^2+3xy+25y^2$
31. $75a^2$
32. $21xy$

תרגילים נוספים

פתח את הסוגריים וכנס את האיברים הדומים (אם ישנם).

1. $(2a+3b)^2 + (2a-b)^2$
2. $(x-3)^2 + (x+2)(x+4)$
3. $2(2a+3)(4-3a) + (4a-5)^2$
4. $(5b+3)^2 - (5b-3)^2$
5. $(7c-3)(7c+3) - (6c+3)(8c-5)$
6. $(5-3d)^2 - 2(2d-5)^2$
7. $2(2f+9)^2 - 3(f-5)(2f-11)$
8. $(2e-5)(2e+5) - 2(2e+3)(e-1)$
9. $(3g-5)(g+3) - (2g-7)^2 + (g-1)^2$
10. $3(4h-5)^2 - 2(5h-7)^2$
11. $4(6i-1)(6i+1) - (12i-2)^2$
12. $(5-4j)(5+4j) - (3j+1)^2 + (5j+2)^2$
13. $(4k-7)(k+3) - 5(k+2)^2 + (k-3)^2$
14. $(2l+6)^2 - (1+3l)(1-3l) + 5(2l+8)(3-l)$

פתרונות

1. $8a^2 + 8ab + 10b^2$
2. $2x^2 + 17$
3. $4a^2 - 42a + 49$
4. $60b$
5. $c^2 + 6c + 6$
6. $d^2 + 10d - 25$
7. $2f^2 + 135f - 3$
8. $-2e - 19$
9. $30g - 63$
10. $-2h^2 + 20h - 23$
11. $48i - 8$
12. $14j + 28$
13. $-21k - 32$
14. $3l^2 + 14l + 155$

13. פירוק לגורמים

נבחין בין ארבעה סוגים של פירוק לגורמים :

- א. פירוק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף.
- ב. פירוק לגורמים ע"י הנוסחאות לכפל מקוצר.
- ג. פירוק לגורמים לפי קבוצות.
- ד. פירוק לגורמים של תלת איבר ריבועי (טרינום).

פירוק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף :

בפירוק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף נסתמך על **חוק הפילוג** $a(b+c) = ab + ac$ אלא שהפעם ניעזר בו מימין לשמאל. תחילה נדון במקרה שהגורם המשותף הוא **חד איבר**.
נבחין בשני שלבים בפירוק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף שהוא חד איבר :

1. הוצאת גורם משותף למספרים.

2. הוצאת גורם משותף לאותיות.

נביא דוגמאות להוצאת גורם משותף למספרים.

דוגמאות:

פרק לגורמים את תבניות המספר הבאות :

א. פרק את: $5a + 5b$. הגורם המשותף של $5a$ ו- $5b$ הוא 5. אם נחלק את $5a$ ב-5 נקבל a ואם נחלק את $5b$ ב-5 נקבל b . לכן הפירוק לגורמים הוא: $5a + 5b = 5(a + b)$.

ב. פרק את: $18x - 12y$. בדרך כלל נרצה להוציא את הגורם הגדול ביותר האפשרי. אמנם 2 וגם 3 הם גורמים משותפים של 12 ו-18 אבל 6 הוא הגורם המשותף הגדול ביותר. אם נחלק את $18x$ ב-6 נקבל $3x$ ואם נחלק את $12y$ ב-6 נקבל $2y$. לכן הפירוק לגורמים הוא: $18x - 12y = 6(3x - 2y)$.

נביא עכשיו דוגמאות להוצאת גורם משותף לאותיות.

דוגמאות:

פרק לגורמים את תבניות המספר הבאות :

ג. פרק את: $a^4 + 2a^2$. האות a מופיעה גם ב- a^4 וגם ב- $2a^2$ ולכן ניתן להוציא אותה כגורם משותף. יחד עם זאת, היות ומופיעות כאן חזקות אז הגורם המשותף הגדול ביותר יהיה החזקה בעלת המעריך הקטן ביותר שמופיע. לכן במקרה זה נוציא כגורם משותף את a^2 ולא רק את a .
אם נחלק את a^4 ב- a^2 נקבל a^2 ואם נחלק את $2a^2$ ב- a^2 נקבל 2. לכן הפירוק לגורמים הוא: $a^4 + 2a^2 = a^2(a^2 + 2)$.

ד. פרק את: $3^3b^4 - a^2b^5 + ab^2$. האות a מופיעה בכל הביטויים והחזקה הקטנה ביותר שלה היא a . גם האות b מופיעה בכל הביטויים והחזקה הקטנה ביותר שלה היא b^2 . לכן הגורם המשותף הגדול ביותר הוא ab^2 .

הפירוק לגורמים הוא: $a^3b^4 - a^2b^5 + ab^2 = ab^2(a^2b^2 - ab^3 + 1)$.

נעבור למקרה של הוצאת גורם משותף גם למספרים וגם לאותיות.

דוגמאות:

פרק לגורמים את תבניות המספר הבאות :

ה. פרק את: $15x^5 - 10x^3$. הגורם המשותף הגדול ביותר למספרים הוא 5 ולאותיות הוא x^3 . לכן הפירוק לגורמים הוא: $15x^5 - 10x^3 = 5x^3(3x^2 - 2)$.

ו. פרק את: $7a^2b - 21ab^2$. הגורם המשותף הגדול ביותר למספרים הוא $7ab$. לכן הפירוק לגורמים הוא: $7a^2b - 21ab^2 = 7ab(a - 3b)$.

פירוק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף שהוא רב איבר :

הגורם המשותף שהוצאנו עד כה היה תמיד חד איבר. קיימים מקרים שבהם ניתן להוציא גורם משותף שאינו דווקא חד איבר.

דוגמא :

ז. פרק לגורמים את תבנית המספר : $(2a+3)a + (2a+3)4$

הגורם המשותף במקרה זה הוא $(2a+3)$. אם נוציא אותו כגורם משותף נקבל :

$$(2a+3)a + (2a+3)4 = (2a+3)(a+4)$$

תרגילים :

1. $5x+5y=$ 2. $7a-21b=$ 3. $8k+8=$ 4. $32-20x=$ 5. $120a-48=$
6. $16-64p=$ 7. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=$ 8. $cx+xb=$ 9. $ab+a=$ 10. $4ap-20ak=$
11. $9zp-3z=$ 12. $10ax+15bx-5axc=$ 13. $26bpx-39by+52bx=$
14. $x^2+3x=$ 15. $a^3+a^2=$ 16. $3x^2-9x=$ 17. $2y^3-6y^2=$ 18. $5a^4x-15a^3=$
19. $x^3y^2-2x^2y^3=$ 20. $48xz^3-16z^2=$ 21. $3a^6m^4+12a^3m^6=$ 22. $2x^4-4x^3=$
23. $3b^7-6b^5=$ 24. $a^2-ab+ac=$ 25. $14pq^2-49p^2+28p^2q=$
26. $24ax-18x^2+56bx=$ 27. $2a^2b-6ab^2+abc=$ 28. $xy^2-5xy+4x^2y=$
29. $6m^3p-12m^2p^2+18mp=$ 30. $15x^2yz-18x^2z-75x^2yz^2=$
31. $6(b-y)+a(b-y)=$ 32. $x(a+5)+y(5+a)=$ 33. $a(x+y)+b(x+y)=$
34. $a(p+q)-b(p+q)=$ 35. $x^2(a+b)+y^2(a+b)=$
36. $a(1+m+p)+b(1+m+p)=$ 37. $x(m+p)+y(m+p)+z(m+p)=$
38. $x^2(b-a)+p(a-b)=$ 39. $3xa^2(x^2-3)-2y(3-x^2)=$
40. $bx(py-1)-ay(1-py)=$

תשובות :

1. $5(x+y)$ 2. $7(a-3b)$ 3. $8(k+1)$ 4. $4(8-5x)$ 5. $24(5a-2)$ 6. $16(1-4p)$
7. $\frac{1}{2}(a+b)$ 8. $x(c+b)$ 9. $a(b+1)$ 10. $4a(p-5k)$ 11. $3z(3p-1)$ 12. $5x(2a+3b-ac)$
13. $13b(2xp-3y+4x)$ 14. $x(x+3)$ 15. $a^2(a+1)$ 16. $3x(x-3)$ 17. $2y^2(y-3)$
18. $5a^3(ax-3)$ 19. $x^2y^2(x-2y)$ 20. $16z^2(3xz-1)$ 21. $3a^3m^4(a^3+4m^2)$ 22. $2x^3(x-2)$ 23.
- $3b^5(b^2-2)$ 24. $a(a-b+c)$ 25. $7p(2q^2-7p+4pq)$ 26. $2x(12a-9x+28b)$
27. $ab(2a-6b+c)$ 28. $xy(y-5+4x)$ 29. $6mp(m^2-2mp+3)$ 30. $3x^2z(5y-6-25yz)$
31. $(b-y)(6+a)$ 32. $(a+5)(x+y)$ 33. $(x+y)(a+b)$ 34. $(p+q)(a-b)$ 35. $(a+b)(x^2+y^2)$
36. $(1+m+p)(a+b)$ 37. $(m+p)(x+y+z)$ 38. $(b-a)(x^2-p)$ 39. $(x^2-3)(3a^2x+2y)$
40. $(py-1)(bx+ay)$

14. פירוק לגורמים לפי קבוצות

כאשר בתבנית המספר ישנם **ארבעה** מחוברים ואין אפשרות למצוא לכולם גורם משותף ייתכן שאפשר למצוא גורם משותף **לשניים** מבין המחוברים וגורם משותף אחר **לשני** המחוברים **האחרים**. במקרה כזה ישנם גורמים משותפים לקבוצות של מחוברים ולכן הפירוק נקרא **פירוק לגורמים לפי קבוצות**.

דוגמאות:

א. פרק את: $10x^2 + 15x - 8x - 12$

קל לראות שאין גורם משותף לכל ארבעת המחוברים. לעומת זאת יש גורם משותף לשני המחוברים הראשונים, שהוא $5x$, ויש גורם משותף לשני המחוברים האחרונים, שהוא -4 . נקבל:

$$10x^2 + 15x - 8x - 12 = 5x(2x + 3) - 4(2x + 3) = (2x + 3)(5x - 4)$$

ב. פרק את: $a^2 + 6 - 2a - 3a$

במקרה זה אין אפשרות להוציא גורם משותף לשני המחוברים הראשונים, לכן נוציא גורם משותף למחוברים הראשון והשלישי וגורם משותף למחוברים השני והרביעי. (אפשר להוציא גם גורם משותף למחוברים הראשון והרביעי וגורם משותף למחוברים השני והשלישי). נקבל:

$$a^2 + 6 - 2a - 3a = a(a - 2) - 3(a - 2) = (a - 2)(a - 3)$$

ג. פרק את: $6a^3 - 15a - 4a^2 + 10$ נקבל:

$$6a^3 - 15a - 4a^2 + 10 = 3a(2a^2 - 5) - 2(2a^2 - 5) = (3a - 2)(2a^2 - 5)$$

ד. פרק את: $a^2b^2 - 3ab + 2ab - 6$ נקבל:

$$a^2b^2 - 3ab + 2ab - 6 = ab(ab - 3) + 2(ab - 3) = (ab + 2)(ab - 3)$$

ה. פרק את: $x^4y^2 - 5x^2y + 3x^2y - 15$ נקבל:

$$x^4y^2 - 5x^2y + 3x^2y - 15 = x^2y(x^2y - 5) + 3(x^2y - 5) = (x^2y + 3)(x^2y - 5)$$

ו. פרק את: $3a^5x^2 - 3a^2y^2x^3 + 2a^3b - 2y^2xb$ נקבל:

$$3a^5x^2 - 3a^2y^2x^3 + 2a^3b - 2y^2xb = 3a^2x^2(a^3 - y^2) + 2b(a^3 - y^2) = (3a^2x^2 + 2b)(a^3 - y^2)$$

הערות:

ניתן לפרק לגורמים גם תבנית מספר שיש בה **6 מחוברים**. במקרה כזה ייתכן שישנם גורמים משותפים לכל זוג מחוברים מבין שלושת הזוגות של המחוברים או שישנם גורמים משותפים לכל שלשה מבין השלוש של המחוברים.

ז. פרק את: $a^3 - 2a^2 - 3a^2 + 6a + 5a - 10$ נקבל:

$$a^3 - 2a^2 - 3a^2 + 6a + 5a - 10 = a^2(a - 2) - 3a(a - 2) + 5(a - 2) = (a^2 - 3a + 5)(a - 2)$$

1. $ax + bx + ay + by =$
2. $ac + bc + ad + bd =$
3. $ac - bc + ad - bd =$
4. $ax - ak + px - pk =$
5. $6ax + 8bx + 15ay + 20by =$
6. $35ax + 10am - 21bx - 6bm =$
7. $6px + 9py - 8tx - 12ty =$
8. $5ax - 9ay - 5bx + 9by =$
9. $xy - 3y + 4x - 12 =$
10. $6a^2 - 4ab + 3ac - 2bc =$
11. $a^2 + ab + 4a + 4b =$
12. $5x^2 - 5xz + 2yz - 2xy =$
13. $x^2 + ax + bx + ab =$
14. $x^2 - ax + bx - ab =$
15. $x^2 + 3x + x + 3 =$
16. $x^2 - 5x + x - 5 =$
17. $a^2 + 4a - 11a - 44 =$
18. $a^2 - 5ab + 3ab - 15b^2 =$
19. $5a - a^2 - 4a + 20 =$
20. $ax + bx + ay + by + am + bm =$
21. $xp - yp + ax - ay - cx + cy =$
22. $ax + bx + cx + ay + by + cy =$
23. $am - bm - cm - a^2 + ab + ac =$

תשובות:

1. $(a+b)(x+y)$
2. $(a+b)(c+d)$
3. $(a-b)(c+d)$
4. $(a+p)(x-k)$
5. $(2x+5y)(3a+4b)$
6. $(7x+2m)(5a-3b)$
7. $(2x+3y)(3p-4t)$
8. $(5x-9y)(a-b)$
9. $(x-3)(y+4)$
10. $(3a-2b)(2a+c)$
11. $(a+b)(a+4)$
12. $(x-z)(5x-2y)$
13. $(x+a)(x+b)$
14. $(x-a)(x+b)$
15. $(x+3)(x+1)$
16. $(x-5)(x+1)$
17. $(a-11)(a+4)$
18. $(a+3b)(a-5b)$
19. $(5-a)(4+a)$
20. $(a+b)(x+y+m)$
21. $(x-y)(p+a-c)$
22. $(a+b+c)(x+y)$
23. $(a-b-c)(m-a)$

15. פירוק לגורמים עפ"י הנוסחאות לכפל מקוצר

פירוק לגורמים עפ"י הנוסחה להפרש ריבועים:

בכל התרגילים שראינו עד כה היה גורם משותף לכל הביטויים שהופיעו ברב האיבר. נראה עכשיו שישנם מקרים שלמרות שאין גורם משותף לכל הביטויים ניתן לבצע פירוק לגורמים. נתחיל עם פירוק לגורמים עפ"י הנוסחה להפרש ריבועים. את הפירוק לגורמים נבצע באופן מיידי עפ"י הנוסחה $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ וזאת ע"י שניעזר בה בכיוון ההפוך, כלומר: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

דוגמאות:

פרק לגורמים את תבניות המספר הבאות:

א. פרק את: $4x^2 - 25$. נקבל:

קל לראות שאין גורם משותף ל- $4x^2$ ו-25. הביטויים $4x^2$ ו-25 הם **ריבועים** של $2x$ ו-5 בהתאמה ולכן ניתן לפרק אותם עפ"י הנוסחה להפרש ריבועים.

הנוסחה להפרש ריבועים: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

הפירוק לגורמים: $4x^2 - 25 = (2x+5)(2x-5)$.

ב. פרק את: $49x^2b^6 - 121b^2t^2$. נקבל:

הביטויים $49x^2b^6$ ו- $121b^2t^2$ הם **ריבועים** של $7xb^3$ ו- $11bt$ בהתאמה ולכן ניתן לפרק אותם עפ"י הנוסחה להפרש ריבועים.

הפירוק לגורמים: $49x^2b^6 - 121b^2t^2 = (7xb^3 - 11bt)(7xb^3 + 11bt)$.

ג. פרק את: $64x^2 + 256y^2$. נקבל:

הביטויים $64x^2$ ו- $256y^2$ הם **ריבועים** של $8x$ ו- $16y$ בהתאמה ולכן ניתן לפרק אותם עפ"י הנוסחה להפרש ריבועים. **לא!!!!!!** כי יש סימן של חיבור במקום סימן חיסור, לכן ביטוי זה **אינו פריק**!!!!

פירוק לגורמים עפ"י הנוסחאות לדו איבר בריבוע:

בדומה לפירוק לגורמים עפ"י הנוסחה להפרש ריבועים נוכל לפרק לגורמים גם עפ"י הנוסחאות לדו איבר בריבוע.

נרשום אותן בצורה: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

דוגמאות:

פרק לגורמים עפ"י הנוסחאות לדו איבר בריבוע:

א. פרק את: $x^2 + 8x + 16$. נקבל:

כפי שקל לראות אין אפשרות להוציא גורם משותף. כמו כן נשים לב שהביטוי השמאלי x^2 הוא **ריבוע** של x וגם הביטוי הימני 16 הוא **ריבוע** של 4. לכן **ייתכן** שאפשר לפרק את התבנית בעזרת אחת מהנוסחאות.

הפירוק נעשה באופן מיידי. הנוסחה לדו איבר בריבוע: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

הפירוק לגורמים: $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$.

שים לב: ל- a^2 מתאים x^2 ולכן ל- a מתאים x . כמו כן ל- b^2 מתאים 16 ולכן ל- b מתאים 4

לבסוף ל- $2ab$ מתאים $8x$ כי $2 \cdot x \cdot 4 = 8x$.

הערה: אחרי שמבצעים את הפירוק לגורמים עפ"י אחת מהנוסחאות של דו איבר בריבוע צריך לבדוק ע"י

ביצוע הכפל האם האיבר האמצעי מתאים. לדוגמא גם בתבניות המספר $x^2 + 10x + 16$ האיברים השמאלי והימנים הם כמו קודם **ריבועים** אבל האיבר האמצעי **לא** מתאים והפירוק **איננו** עפ"י הנוסחה הנ"ל.

ב. פרק את: $-x^2 + 6x - 9$. נקבל:

נכתוב את התבנית $-x^2 + 6x - 9$ בצורה $-(x^2 - 6x + 9)$.

ל- a^2 מתאים x^2 ולכן ל- a מתאים x . כמו כן ל- b^2 מתאים 9 ולכן ל- b מתאים 3.

לבסוף ל- $2ab$ מתאים $6x$ כי $2 \cdot x \cdot 3 = 6x$.

הפירוק לגורמים הוא: $-(x^2 - 6x + 9) = -(x - 3)^2$.

ג. פרק את: $16a^2 + 40a + 25$. נקבל:

ל- a^2 מתאים $16a^2$ ולכן ל- a מתאים $4a$. כמו כן ל- b^2 מתאים 25 ולכן ל- b מתאים 5.

לבסוף ל- $2ab$ מתאים $40a$ כי $2 \cdot 4a \cdot 5 = 40a$.

הפירוק לגורמים הוא: $16a^2 + 40a + 25 = (4a + 5)^2$.

הערה: בפירוק לגורמים עפ"י הנוסחאות לדו איבר בריבוע צריך לשים לב לסדר המחוברים.

לדוגמא: כדי לפרק לגורמים את התבנית $25 + x^2 - 10x$ נרשום אותה תחילה בסדר חזקות יורד בצורה

$x^2 - 10x + 25$ ולכן הפירוק הוא $(x - 5)^2$.

תרגילים:

1. $x^2 + 2ax + a^2 =$

2. $b^2 - 10b + 25 =$

3. $p^2 - 8p + 16 =$

4. $m^2 - 36 =$

5. $121 + 22y + y^2 =$

6. $k^2 - 49 =$

7. $b^2 + 1 + 2b =$

8. $9x^2 - 16 =$

9. $48x + 9 + 64x^2 =$

10. $-20ab + 25b^2 + 4a^2 =$

11. $\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2 =$

12. $b^4x^2 + 18b^2x + 81 =$

13. $169y^4 - 4x^2 =$

14. $a^4 - 6a^2b + 9b^2 =$

15. $121a^2 - 49x^2 =$

16. $64x^6 - 25y^4 =$

תשובות:

1. $(x + a)^2$

2. $(b - 5)^2$

3. $(p - 4)^2$

4. $(m - 6)(m + 6)$

5. $(y + 11)^2$

6. $(k - 7)(k + 7)$

7. $(b + 1)^2$

8. $(3x - 4)(3x + 4)$

9. $(8x + 3)^2$

10. $(2a - 5b)^2$

11. $(\frac{1}{2}x + y)^2$

12. $(b^2x + 9)^2$

13. $(13y^2 - 2x)(13y^2 + 2x)$

14. $(a^2 - 3b)^2$

15. $(11a + 7x)(11a - 7x)$

16. $(8x^3 - 5y^2)(8x^3 + 5y^2)$

תרגילים נוספים

העזר בנוסחאות כפל מקוצר ופרק את הביטויים הבאים :

$81 + x^2 + 18x$.3	$x^2 - 10x + 25$.2	$x^2 + 6x + 9$.1
$x^2 - 2x + 1$.6	$x^2 - 20x + 100$.5	$14x + 49 + x^2$.4
$-x^2 + 6x - 9$.9	$x^2 - 6x - 9$.8	$-x^2 + 6x + 9$.7
$4x^2 + 20x + 25$.12	$-x^2 - 6x - 9$.11	$x^2 - 6x + 9$.10
$4x^2 + 4x + 1$.15	$112x + 49 + 64x^2$.14	$36 - 60x + 25x^2$.13
$1 + 100x^2 - 20x$.18	$1 + 49x^2 - 14x$.17	$9x^2 + 15x + 25$.16
$-126xy + 49x^2 + 81y^2$.21	$25x^2 + 20xy + 4y^2$.20	$121x^2 + 1 - 22x$.19
$-6xy + 9 + x^2y^2$.24	$9 + 25x^2 - 60x$.23	$9y^2 + 25x^2 - 30xy$.22
$25 - 30xy + 9x^2y^2$.27	$-4xy + 1 + 4x^2y^2$.26	$1 + x^2y^2 - 2xy$.25
$x^2 - 4x + 9$.30	$12x + 12x^2 + 3$.29	$1 + 49x^2y^2 - 14xy$.28
$-216x^2 + 288x - 96$.33	$400x^2 + 240x + 36$.32	$-320x^2 - 5 + 80x$.31
$7x^2 - 63$.36	$9x^2 - 64$.35	$4x^2 - 25$.34
$-x^2 + 36$.39	$81 - 36x^2$.38	$x^2 - 49$.37
$4x^2 - 81y^2$.42	$27x^2 - 75$.41	$4x^2 + 9$.40
$24x^2y^2 - 150$.45	$9x^2 + 49$.44	$5x^2 - 45$.43

פתרונות

$(x-10)^2$.5	$(x+7)^2$.4	$(x+9)^2$.3	$(x-5)^2$.2	$(x+3)^2$.1
$(x-3)^2$.10	$-(x-3)^2$.9	אין פירוק .8	אין פירוק .7	$(x-1)^2$.6
$(2x+1)^2$.15	$(8x+7)^2$.14	$(5x-6)^2$.13	$(2x+5)^2$.12	$-(x+3)^2$.11
$(5x+2y)^2$.20	$(11x-1)^2$.19	$(10x-1)^2$.18	$(7x-1)^2$.17	אין פירוק .16
$(xy-1)^2$.25	$(xy-3)^2$.24	אין פירוק .23	$(5x-3y)^2$.22	$(7x-9y)^2$.21
	$3(2x+1)^2$.29	$(7xy-1)^2$.28	$(3xy-5)^2$.27	$(2xy-1)^2$.26
$-24(3x-2)^2$.33	$4(10x+3)^2$.32	$-5(8x-1)^2$.31	אין פירוק .30	
$7(x-3)(x+3)$.36	$(3x-8)(3x+8)$.35	$(2x-5)(2x+5)$.34		
$(6-x)(6+x)$.39	$9(3-2x)(3+2x)$.38	$(x-7)(x+7)$.37		
$(2x-9y)(2x+9y)$.42	$3(3x-5)(3x+5)$.41	אין פירוק .40		
$6(2xy-5)(2xy+5)$.45	אין פירוק .44	$5(x-3)(x+3)$.43		

16. פירוק לגורמים לפי טרינום ריבועי

כדי לפרק לגורמים טרינום מהצורה $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) צריך בשלב הראשון למצוא שני מספרים שסכומם שווה ל- b ומכפלתם שווה ל- $a \cdot c$.

דוגמאות:

פרק לגורמים את תלת האיברים הריבועיים הבאים:

א. פרק את: $6x^2 + 11x - 10$.

צריך למצוא שני מספרים שסכומם 11 ומכפלתם $-60 = 6 \cdot (-10)$. המספרים

הם 15 ו-4 והפירוק הוא:

$$6x^2 + 11x - 10 = 6x^2 + 15x - 4x - 10 = 3x(2x + 5) - 2(2x + 5) = (2x + 5)(3x - 2)$$

ב. פרק את: $2x^2 - 3x + 1$.

צריך למצוא שני מספרים שסכומם -3 ומכפלתם 2. המספרים הם -2 ו-1

ולכן הפירוק הוא: $2x^2 - 3x + 1 = 2x^2 - 2x - x + 1 = 2x(x - 1) - 1(x - 1) = (2x - 1)(x - 1)$

ג. פרק את: $3x^2 - 10x + 8$.

צריך למצוא שני מספרים שסכומם -10 ומכפלתם 24. המספרים הם -6 ו-4

ולכן הפירוק הוא: $3x^2 - 10x + 8 = 3x^2 - 6x - 4x + 8 = 3x(x - 2) - 4(x - 2) = (3x - 4)(x - 2)$

ד. פרק את: $5x^2 - 12xy + 4y^2$.

צריך למצוא שני מספרים שסכומם -12 ומכפלתם 20. המספרים הם -10 ו-2

ולכן הפירוק הוא:

$$5x^2 - 12xy + 4y^2 = 5x^2 - 10xy - 2xy + 4y^2 = 5x(x - 2y) - 2y(x - 2y) = (5x - 2y)(x - 2y)$$

ה. פרק את: $15x^4 - 4x^2 - 4$.

צריך למצוא שני מספרים שסכומם -4 ומכפלתם -60. המספרים הם -10 ו-6

ולכן הפירוק הוא:

$$15x^4 - 4x^2 - 4 = 15x^4 - 10x^2 + 6x^2 - 4 = 5x^2(3x^2 - 2) + 2(3x^2 - 2) = (5x^2 + 2)(3x^2 - 2)$$

ו. פרק את: $8x^6 - 2x^3 - 1$.

צריך למצוא שני מספרים שסכומם -2 ומכפלתם -8. המספרים הם -4 ו-2

ולכן הפירוק הוא:

$$8x^6 - 2x^3 - 1 = 8x^6 - 4x^3 + 2x^3 - 1 = 4x^3(2x^3 - 1) + 1(2x^3 - 1) = (4x^3 + 1)(2x^3 - 1)$$

ז. פרק את: $10x^8 + 17x^4 - 6$.

צריך למצוא שני מספרים שסכומם 17 ומכפלתם -60. המספרים הם 20 ו-3

ולכן הפירוק הוא:

$$10x^8 + 17x^4 - 6 = 10x^8 + 20x^4 - 3x^4 - 6 = 10x^4(x^4 + 2) - 3(x^4 + 2) = (10x^4 - 3)(x^4 + 2)$$

ח. פרק את: $23a - 6 + 4a^2$.

קודם נסדר בסדר חזקות יורד, נקבל: $4a^2 + 23a - 6$

צריך למצוא שני מספרים שסכומם 23 ומכפלתם -24. המספרים הם 24 ו-1 ולכן הפירוק הוא:

$$4a^2 + 23a - 6 = 4a^2 + 24a - a - 6 = 4a(a + 6) - 1(a + 6) = (4a - 1)(a + 6)$$

ט. פרק את: $42 - 13x + x^2$.

קודם נסדר בסדר חזקות יורד, נקבל $42 - 13x + x^2 = x^2 - 13x + 42$.

צריך למצוא שני מספרים שסכומם -13 ומכפלתם 42. המספרים הם -7 ו-6 ולכן הפירוק הוא:

$$x^2 - 13x + 42 = x^2 - 7x - 6x + 42 = x(x - 7) - 6(x - 7) = (x - 6)(x - 7)$$

תרגילים:

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 1. $x^2 + 6x + 8 =$ | 2. $x^2 - x - 2 =$ | 3. $b^2 - 5b + 4 =$ |
| 4. $z^2 + 9z + 20 =$ | 5. $p^2 - 12p + 20 =$ | 6. $z^2 + 4z - 21 =$ |
| 7. $t^2 - t - 12 =$ | 8. $x^2 + 13x + 30 =$ | 9. $m^2 + m - 42 =$ |
| 10. $a^2 + 4a - 45 =$ | 11. $x^2 - 19x + 90 =$ | 12. $c^2 + 7c - 120 =$ |
| 13. $x^2 + 5xy + 6y^2 =$ | 14. $x^2 - 3xz - 4z^2 =$ | 15. $z^2 + az - 6a^2 =$ |
| 16. $t^2 - bt - 12b^2 =$ | 17. $a^2 + 8ab - 20b^2 =$ | 18. $2x^2 + 5x + 3 =$ |
| 19. $2a^2 + 3a + 1 =$ | 20. $5y^2 - 9y - 2 =$ | 21. $3b^2 + 7b + 2 =$ |
| 22. $3x^2 - 5x - 8 =$ | 23. $5x^2 + 2x - 3 =$ | 24. $2a^2 - 5a + 2 =$ |

תשובות:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|------------------------|
| 1. $(x + 2)(x + 4)$ | 2. $(x - 2)(x + 1)$ | 3. $(b + 1)(b + 4)$ |
| 4. $(z + 4)(z + 5)$ | 5. $(p - 10)(p - 2)$ | 6. $(z + 7)(z - 3)$ |
| 7. $(t - 4)(t + 3)$ | 8. $(x + 3)(x + 10)$ | 9. $(m + 7)(m - 6)$ |
| 10. $(a + 9)(a - 5)$ | 11. $(x - 9)(x - 10)$ | 12. $(c + 15)(c - 8)$ |
| 13. $(x + 2y)(x + 3y)$ | 14. $(x - 4z)(x + z)$ | 15. $(z + 3a)(z - 2a)$ |
| 16. $(t - 4b)(t + 3b)$ | 17. $(a + 10b)(a - 2b)$ | 18. $(x + 1)(2x + 3)$ |
| 19. $(a + 1)(2a + 1)$ | 20. $(y - 2)(5y + 1)$ | 21. $(b + 2)(3b + 1)$ |
| 22. $(3x - 8)(x + 1)$ | 23. $(x + 1)(5x - 3)$ | 24. $(a - 2)(2a - 1)$ |

17. פרוק לגורמים משולב:

פרוק לגורמים לפי כל השיטות: הוצאת גורם משותף ← פרוק לפי קבוצות ← פרוק לפי נוסחאות ← פרוק לפי טרינום.

דוגמאות:

פרק לגורמים את תבניות המספר הבאות:

א. פרק את: $3x^3 - 12x$

במקרה זה יש גורם משותף ל- $3x^3$ ו- $12x$ והוא $3x$. לכן נבצע תחילה פירוק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף. נקבל $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4)$. נשים לב שאת תבנית המספר שבתוך הסוגריים אפשר לפרק ע"י הנוסחה להפרש ריבועים.

בסה"כ נקבל: $3x(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)$

ב. פרק את: $20a^3 - 60a^2 + 45a$

תחילה נוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר. גורם זה הוא $5a$.
ולכן נקבל: $20a^3 - 60a^2 + 45a = 5a(4a^2 - 12a + 9)$. את האיבר שבתוך הסוגריים נוכל לפרק עפ"י הנוסחה השנייה לדו איבר ריבועי בסה"כ נקבל: $5a(4a^2 - 12a + 9) = 5a(2a - 3)^2$

ג. פרק את: $28a^2b^2 - 63a^4b^2$

תחילה נוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר. גורם זה הוא $7a^2b^2$.
ולכן נקבל: $28a^2b^2 - 63a^4b^2 = 7a^2b^2(4 - 9a^2)$. את האיבר שבתוך הסוגריים נוכל לפרק עפ"י הנוסחה להפרש ריבועים.

בסה"כ נקבל: $7a^2b^2(4 - 9a^2) = 7a^2b^2(2 - 3a)(2 + 3a)$

ד. פרק את: $27a^2 + 72ab + 48b^2$

תחילה נוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר. גורם זה הוא 3 .
ולכן נקבל: $27a^2 + 72ab + 48b^2 = 3(9a^2 + 24ab + 16b^2)$. את האיבר שבתוך הסוגריים נוכל לפרק עפ"י הנוסחה לדו איבר בריבוע:

בסה"כ נקבל: $3(9a^2 + 24ab + 16b^2) = 3(3a + 4b)^2$

ה. פרק את: $4a^2b^2 - 12a^2b^4 + 9a^2b^6$

תחילה נוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר. גורם זה הוא a^2b^2 .
ולכן נקבל: $4a^2b^2 - 12a^2b^4 + 9a^2b^6 = a^2b^2(4 - 12b^2 + 9b^4)$. את האיבר שבתוך הסוגריים נוכל לפרק לפי הנוסחה לדו איבר בריבוע.

בסה"כ נקבל: $a^2b^2(4 - 12b^2 + 9b^4) = a^2b^2(2 - 3b^2)^2$

ו. פרק את: $5x^4z - 10x^2yz + 5y^2z$

תחילה נוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר. גורם זה הוא $5z$.
ולכן נקבל: $5x^4z - 10x^2yz + 5y^2z = 5z(x^4 - 2x^2y + y^2)$. את האיבר שבתוך הסוגריים נוכל לפרק לפי הנוסחה לדו איבר בריבוע.

בסה"כ נקבל: $5z(x^4 - 2x^2y + y^2) = 5z(x^2 - y)^2$

ז. פרק את: $8x^3 + 14x^2 - 30x$.

תחילה נוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר. גורם זה הוא $2x$.

ולכן נקבל: $8x^3 + 14x^2 - 30x = 2x(4x^2 + 7x - 15)$. את האיבר שבתוך הסוגריים נוכל לפרק לפי טרינום. בסה"כ נקבל:

$$2x(4x^2 + 7x - 15) = 2x(4x^2 + 12x - 5x - 15) = 2x[4x(x+3) - 5(x+3)] = 2x(4x-5)(x+3)$$

תרגילים:

- | | | |
|---|--|-------------------------------|
| 1. $36a^2 - 81b^2 =$ | 2. $36p^2 - 4p^4 =$ | 3. $36y^2 - 144p^2 =$ |
| 4. $8b^2 - 24b + 18 =$ | 5. $44m^3 - 99m =$ | 6. $16z^2 + 16z + 4 =$ |
| 7. $121y^5 - 9a^2y =$ | 8. $3m^2 + 6mb + 3b^2 =$ | 9. $144m^2 - 144mb + 36b^2 =$ |
| 10. $16k^4 - 1 =$ | 11. $2x^2 - 50 =$ | 12. $3b^2 - 27 =$ |
| 13. $a^7 - a^5 =$ | 14. $2x^2 + 24x + 72 =$ | 15. $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 =$ |
| 16. $4m^2 + 8mb + 4b^2 =$ | 17. $25m^2 - 50mb + 25b^2 =$ | 18. $32x^2 - 18a^2 =$ |
| 19. $mx^2 + 6mx + 9m =$ | 20. $12b - 36bx + 27bx^2 =$ | |
| 21. $ax^2 - 3axm + 2axb - 6abm =$ | 22. $15b^2p - 25b^2c - 12b^2xp + 20b^2xc =$ | |
| 23. $x^2m + x^2t - 25m - 25t =$ | 24. $x^2y + x^2b + 12xy + 12xb + 36y + 36b =$ | |
| 25. $4m^2 - 4m - 48 =$ | 26. $x^3 + 4x^2 - 21x =$ | |
| 27. $ab^2 + 5ab + 4a - xb^2 - 5bx - 4x =$ | 28. $x^2a^2 - 4ax^2 - 45x^2 - 49a^2 + 196a + 2205 =$ | |

תשובות:

- | | | | | |
|------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------|-----------------|
| 1. $9(2a-3b)(2a+3b)$ | 2. $4p^2(3-p)(3+p)$ | 3. $36(y-2p)(y+2p)$ | 4. $2(2b-3)^2$ | |
| 5. $11m(2m-3)(2m+3)$ | 6. $4(2z+1)^2$ | 7. $y(11y^2-3a)(11y^2+3a)$ | 8. $3(m+b)^2$ | |
| 9. $36(2m-b)^2$ | 10. $(2k-1)(2k+1)(4k^2+1)$ | 11. $2(x-5)(x+5)$ | 12. $3(b-3)(b+3)$ | |
| 13. $a^5(a-1)(a+1)$ | 14. $2(x+6)^2$ | 15. $2x^2(x-2)^2$ | 16. $4(m+b)^2$ | 17. $25(m-b)^2$ |
| 18. $2(4x-3a)(4x+3a)$ | 19. $m(x+3)^2$ | 20. $3b(3x-2)^2$ | 21. $a(x-3m)(x+2b)$ | |
| 22. $b^2(3p-5c)(5-4x)$ | 23. $(m+t)(x-5)(x+5)$ | 24. $(y+b)(x+6)^2$ | 25. $4(m-4)(m+3)$ | |
| 26. $x(x+7)(x-3)$ | 27. $(a-x)(b+4)(b+1)$ | 28. $(x-7)(x+7)(a-9)(a+5)$ | | |

18. צמצום שברים אלגבריים

צמצום שברים אלגבריים ללא פירוק לגורמים:

צמצום שברים אלגבריים נעשה בדומה לצמצום שברים פשוטים. כלומר מחלקים את המונה והמכנה באותו ביטוי שיכול להכיל גם אותיות ולא רק מספרים. בדרך כלל צריך להיעזר בפירוק לגורמים. התנאי היסודי לצמצום הוא שהמונה והמכנה יהיו רשומים בצורת מכפלות.

נבחין בסוגים הבאים של צמצום שברים אלגבריים.

צמצום שברים אלגבריים ללא פירוק לגורמים.

צמצום שברים אלגבריים בעזרת פירוק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף.

צמצום שברים אלגבריים בעזרת פירוק לגורמים עפ"י הנוסחאות לכפל מקוצר.

צמצום שברים אלגבריים בעזרת פירוק לגורמים לפי קבוצות.

צמצום שברים אלגבריים בעזרת פירוק לגורמים של תלת איבר ריבועי.

צמצום שברים אלגבריים ללא פירוק לגורמים:

הצמצום במקרה זה מורכב מצמצום מספרים ומצמצום אותיות. הצמצום של המספרים דומה לצמצום בשברים

$$\text{פשוטים. הצמצום של האותיות מבוסס על חוק החזקה } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

דוגמאות:

א. צמצם את: $\frac{3a}{12}$

נחלק את המונה והמכנה ב-3 ונקבל: $\frac{3a}{12} = \frac{a}{4}$

ב. צמצם את: $\frac{2x^2}{5x}$

נוכל לחלק את המונה והמכנה ב- x ונקבל: $\frac{2x^2}{5x} = \frac{2x}{5}$

ג. צמצם את: $\frac{2x(a+2)}{4(a+2)}$

נחלק את המונה והמכנה ב- $2(a+2)$ ונקבל: $\frac{2x(a+2)}{4(a+2)} = \frac{x}{2}$

ד. צמצם את: $\frac{6(a-3)}{2x(3-a)}$

נשים לב שהתבניות שבתוך הסוגריים במונה ובמכנה הן נגדיות זו לזו ולכן **תוצאת**

$$\frac{6(a-3)}{2x(3-a)} = -\frac{6(a-3)}{2x(a-3)} = -\frac{3}{x} \quad \text{הצמצום שלהן היא } -1, \text{ בסה"כ מתקיים:}$$

צמצום שברים אלגבריים בעזרת פירוק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף:

נביא את שני הכללים היסודיים של צמצום שברים אלגבריים:

א. כאשר יש במונה או במכנה פעולות של חיבור וחסור (לא בתוך סוגריים) אסור לצמצם רק חלק מהביטויים.

לדוגמא: הצמצומים הבאים אינם נכונים:

$$\frac{2a^2+5}{3a} = \frac{2a+5}{3} \quad \frac{1}{2} \frac{4+a}{8} = \frac{1+a}{2}$$

2. כדי לצמצם שברים אלגבריים שיש בהם פעולות חיבור וחסור (לא בתוך סוגריים)

צריך לכתוב את המונה והמכנה שלהם בצורת מכפלות (בעזרת פירוק לגורמים)

ואז מותר לצמצם.

קבע באילו מהתרגילים הצמצום נכון ובאילו הוא לא נכון :

$$\begin{array}{lll} \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b} \cdot 3 & \frac{a+b}{a} = b \cdot 2 & \frac{ab}{a} = b \cdot 1 \\ \frac{a}{a+b} = \frac{1}{1+b} \cdot 6 & \frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c} \cdot 5 & \frac{a^2+b}{a} = a+b \cdot 4 \\ \frac{ab+ac}{a} = b+c \cdot 9 & \frac{a+b}{ab} = 1 \cdot 8 & \frac{ab-c}{a} = b-c \cdot 7 \\ \frac{a(b-c)}{a+(b-c)} = 1 \cdot 12 & \frac{a-b}{a(a-b)} = \frac{1}{a} \cdot 11 & \frac{a+(b-c)}{d(b-c)} = \frac{a}{d} \cdot 10 \\ \frac{a^2b-ac+a}{a} = ab-c+1 \cdot 15 & \frac{ac+bc}{abc} = \frac{a+b}{ab} \cdot 14 & \frac{b}{ab-bc} = \frac{1}{a-c} \cdot 13 \end{array}$$

פתרונות:

1. תקין	2. לא תקין	3. תקין	4. לא תקין	5. לא תקין
6. לא תקין	7. לא תקין	8. לא תקין	9. תקין	10. לא תקין
11. תקין	12. לא תקין	13. תקין	14. תקין	15. תקין

דוגמאות:

א. צמצם את: $\frac{a^2-2a}{3a-6}$.

נפרק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף מהמונה והמכנה. לאחר מכן נוכל לצמצם. נקבל:

$$\frac{a^2-2a}{3a-6} = \frac{a(a-2)}{3(a-2)} = \frac{a}{3}$$

ב. צמצם את: $\frac{ab^2+ab}{b^3+b^2}$.

נפרק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף מהמונה והמכנה. לאחר מכן נוכל לצמצם. נקבל:

$$\frac{ab^2+ab}{b^3+b^2} = \frac{ab(b+1)}{b^2(b+1)} = \frac{a}{b}$$

ג. צמצם את: $\frac{4a^3-a^2}{5-20a}$.

$$\frac{4a^3-a^2}{5-20a} = \frac{a^2(4a-1)}{5(1-4a)} = -\frac{a^2}{5}$$

ד. צמצם את: $\frac{a^2-3a}{(a-3)^2}$.

$$\frac{a^2-3a}{(a-3)^2} = \frac{a(a-3)}{(a-3)(a-3)} = \frac{a}{(a-3)}$$

ה. צמצם את: $\frac{4x^2y-6xy^2}{(2x-3y)^2}$.

$$\frac{4x^2y-6xy^2}{(2x-3y)^2} = \frac{2xy(2x-3y)}{(2x-3y)(2x-3y)} = \frac{2xy}{(2x-3y)}$$

צמצום שברים אלגבריים בעזרת הנוסחאות לכפל מקוצר:

דוגמאות:

א. צמצם את: $\frac{a^2 - 2a}{a^2 - 4}$

את המונה נפרק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף. את המכנה נפרק לגורמים ע"י הנוסחה להפרש ריבועים. לאחר מכן נצמצם.

נקבל: $\frac{a^2 - 2a}{a^2 - 4} = \frac{a(a-2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{a}{a+2}$

ב. צמצם את: $\frac{a^2 + 10a + 25}{3a^2 + 15a}$

את המונה נפרק לגורמים ע"י הנוסחה לדו איבר בריבוע. את המכנה נפרק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף. לאחר מכן נצמצם.

נקבל: $\frac{a^2 + 10a + 25}{3a^2 + 15a} = \frac{(a+5)^2}{3a(a+5)} = \frac{a+5}{3a}$

ג. צמצם את: $\frac{9 - 25m^2}{5m^2 - 3m}$

נקבל: $\frac{9 - 25m^2}{5m^2 - 3m} = \frac{(3-5m)(3+5m)}{m(5m-3)} = -\frac{(3+5m)}{m}$

ד. צמצם את: $\frac{a^2 + 14a + 49}{49 - a^2}$

נקבל: $\frac{a^2 + 14a + 49}{49 - a^2} = \frac{(a+7)^2}{(7-a)(7+a)} = \frac{(a+7)}{(7-a)}$

ה. צמצם את: $\frac{4a^3 - 9a}{16a^2 - 48a + 36}$

נקבל: $\frac{4a^3 - 9a}{16a^2 - 48a + 36} = \frac{a(4a^2 - 9)}{4(4a^2 - 12a + 9)} = \frac{a(2a-3)(2a+3)}{3(2a-3)^2} = \frac{a(2a+3)}{3(2a-3)}$

ו. צמצם את: $\frac{1 - 4xy + 4x^2y^2}{1 - 4x^2y^2}$

נקבל: $\frac{1 - 4xy + 4x^2y^2}{1 - 4x^2y^2} = \frac{(1-2xy)^2}{(1-2xy)(1+2xy)} = \frac{(1-2xy)}{(1+2xy)}$

צמצום שברים אלגבריים בעזרת פירוק לגורמים לפי קבוצות:

דוגמאות:

א. צמצם את: $\frac{a^2 - 3a + 2a - 6}{5a - 15}$

את המונה נפרק לגורמים לפי קבוצות. את המכנה נפרק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף. לאחר מכן נצמצם. בסה"כ נקבל:

$\frac{a^2 - 3a + 2a - 6}{5a - 15} = \frac{a(a-3) + 2(a-3)}{5(a-3)} = \frac{(a-3)(a+2)}{5(a-3)} = \frac{a+2}{5}$

ב. צמצם את: $\frac{ax+by+bx+ay}{x^2-y^2}$.

כדי לפרק לגורמים את המונה **לפי קבוצות** נוציא גורם משותף מהמחברים הראשון והשלישי וגורם משותף מהמחברים השני והרביעי. את המכנה נפרק לגורמים ע"י הנוסחה **להפרש ריבועים**. לאחר מכן נצמצם. בסה"כ נקבל:

$$\frac{ax+by+bx+ay}{x^2-y^2} = \frac{x(a+b)+y(a+b)}{(x+y)(x-y)} = \frac{(a+b)(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{a+b}{x-y}$$

ג. צמצם את: $\frac{3a^2-15a-2a+10}{9a^2-12a+4}$.

$$\frac{3a^2-15a-2a+10}{9a^2-12a+4} = \frac{3a(a-5)-2(a-5)}{(3a-2)^2} = \frac{(3a-2)(a-5)}{(3a-2)^2} = \frac{(a-5)}{(3a-2)}$$

ד. צמצם את: $\frac{4mx-5y+2my-10x}{2mz-5z-4m+10}$. נקבל:

$$\frac{4mx-5y+2my-10x}{2mz-5z-4m+10} = \frac{2m(2x+y)-5(2x+y)}{2m(z-2)-5(z-2)} = \frac{(2m-5)(2x+y)}{(2m-5)(z-2)} = \frac{(2x+y)}{(z-2)}$$

צמצום שברים אלגבריים בעזרת פירוק לגורמים של תלת איבר ריבועי:

דוגמאות:

א. צמצם את: $\frac{x^2+2x-8}{3x^2-6x}$.

את המונה נפרק לגורמים ע"י פירוק לגורמים של **תלת איבר ריבועי**. את המכנה נפרק לגורמים ע"י הוצאת **גורם משותף**. לאחר מכן נצמצם. נקבל:

$$\frac{x^2+2x-8}{3x^2-6x} = \frac{x^2+4x-2x-8}{3x(x-2)} = \frac{x(x+4)-2(x+4)}{3x(x-2)} = \frac{(x-2)(x+4)}{3x(x-2)} = \frac{x+4}{3x}$$

ב. צמצם את: $\frac{x^3-6x^2+9x}{2x^2-7x+3}$.

את המונה נפרק לגורמים ע"י הוצאת **גורם משותף** וע"י הנוסחה **לדו איבר ריבועי**. את המכנה נפרק לגורמים ע"י פירוק של **תלת איבר ריבועי**. לאחר מכן נצמצם.

$$\frac{x^3-6x^2+9x}{2x^2-7x+3} = \frac{x(x^2-6x+9)}{2x^2-6x-x+3} = \frac{x(x-3)^2}{2x(x-3)-1(x-3)} = \frac{x(x-3)^2}{(2x-1)(x-3)} = \frac{x(x-3)}{2x-1}$$

ג. צמצם את: $\frac{-x^2+11x-24}{x^2-7x-8}$. נקבל:

$$\frac{-x^2+11x-24}{x^2-7x-8} = \frac{-x^2+8x+3x-24}{x^2-8x+x-8} = \frac{-x(x-8)+3(x-8)}{x(x-8)+1(x-8)} = \frac{(-x+3)(x-8)}{(x+1)(x-8)} = \frac{(-x+3)}{(x+1)}$$

תרגילים:

1. $\frac{100a}{25} =$
2. $\frac{-24t}{8} =$
3. $\frac{-18b}{9} =$
4. $\frac{8a}{2a} =$
5. $\frac{-7x}{x} =$
6. $\frac{32k}{4k} =$
7. $\frac{ab}{ac} =$
8. $\frac{30a}{6a^2} =$
9. $\frac{x}{2xy} =$
10. $\frac{26x^3}{65x^5} =$
11. $\frac{p^3q^3 - 2p^2q^3}{3pq} =$
12. $\frac{6x-3}{8x-4} =$
13. $\frac{x^2 - xy}{xy - y^2} =$
14. $\frac{18bx - 24cx}{15ab - 20ac} =$
15. $\frac{mx + px}{my + py} =$
16. $\frac{2x-7}{7-2x} =$
17. $\frac{15-5n}{n-3} =$
18. $\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 3x} =$
19. $\frac{5x^2 - 10x}{5x^2 + 10x} =$
20. $\frac{8(x+y)^4}{20(x+y)^2} =$
21. $\frac{x^2 - 1}{x-1} =$
22. $\frac{c^2 - d^2}{(d+c)^2} =$
23. $\frac{25 - 4a^2}{2a^2 - 5a} =$
24. $\frac{4a^4 + a^3}{16a^2 - 1} =$
25. $\frac{m-p}{m^2 - 2mp + p^2} =$
26. $\frac{4a^2 + 12a + 9}{2a + 3} =$
27. $\frac{1-x^2}{1-2x+x^2} =$
28. $\frac{x^3 - xy^2}{2x^2 + 4xy + 2y^2} =$
29. $\frac{4a^3b^2 - 16a^2b^3 + 16ab^4}{4a^3b^2 - 16ab^4} =$
30. $\frac{x+2}{x^2 + 3x + 2} =$
31. $\frac{x^2 + 8xy + 12y^2}{x + 2y} =$
32. $\frac{y^2 - 16}{y^2 - y - 12} =$
33. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} =$
34. $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15} =$
35. $\frac{ax + a - bx - b}{a - b} =$
36. $\frac{ax - by + ay - bx}{ax + by - ay - bx} =$
37. $\frac{2ab - 2a + b - 1}{2ab - 2a + 2b - 2} =$
38. $\frac{2ax - 2by + 4bx - ay}{ax - 4by + 2bx - 2ay} =$
39. $\frac{ax + 3 + 3a + x}{x^2 + 6x + 9} =$

תשובות:

1. $4a$
2. $-3t$
3. $-2b$
4. 4
5. -7
6. 8
7. $\frac{b}{c}$
8. $\frac{5}{a}$
9. $\frac{1}{2y}$
10. $\frac{2}{5x^2}$
11. $\frac{pq^2(p-2)}{3}$
12. $\frac{3}{4}$
13. $\frac{x}{y}$
14. $\frac{6x}{5a}$
15. $\frac{x}{y}$
16. -1
17. -5
18. $\frac{x+4}{x+3}$
19. $\frac{x-2}{x+2}$
20. $\frac{2(x+y)^2}{5}$
21. $x+1$
22. $\frac{c-d}{c+d}$
23. $-\frac{5+2a}{a}$
24. $\frac{a^3}{4a-1}$
25. $\frac{1}{m-p}$
26. $2a+3$
27. $\frac{1+x}{1-x}$
28. $\frac{x(x-y)}{2(x+y)}$
29. $\frac{a-2b}{a+2b}$
30. $\frac{1}{x+1}$
31. $x+6y$
32. $\frac{y+4}{y+3}$
33. $\frac{x-3}{x-4}$
34. $\frac{x-4}{x-5}$
35. $x+1$
36. $\frac{x+y}{x-y}$
37. $\frac{2a+1}{2(a+1)}$
38. $\frac{2x-y}{x-2y}$
39. $\frac{a+1}{x+3}$

19. כפל וחילוק שברים אלגבריים

כפל שברים אלגבריים:

כפל של שברים אלגבריים מבצעים בדומה לכפל של שברים פשוטים עם מספרים, כלומר: **כופלים מונה במונה ומכנה במכנה.**

הערות:

- רצוי לצמצם במידת האפשר לפני ביצוע הכפל.
 - מכפלות (עם סוגריים) **במכנה** נשאיר בצורת מכפלות **ולא** נבצע את הכפל.
 - מכפלות **במונה** נבצע ע"י פתיחת סוגריים ולאחר מכן נכנס איברים. (כהכנה לחיבור וחסור שברים).
- דוגמאות:**

א. כפול את השבר: $\frac{7a}{4} \cdot \frac{8}{a^2}$

נצמצם תחילה ואחר כך נכפול. נקבל: $\frac{7a}{4} \cdot \frac{8}{a^2} = \frac{7a \cdot 8}{4 \cdot a^2} = \frac{7 \cdot 2}{a} = \frac{14}{a}$

ב. כפול את השבר: $\frac{a^2 - 9}{2} \cdot \frac{a^2}{a^2 - 3a}$

נפרק תחילה לגורמים, לאחר מכן נצמצם ונבצע את הכפל. נקבל:

$$\frac{a^2 - 9}{2} \cdot \frac{a^2}{a^2 - 3a} = \frac{(a+3)(a-3)}{2} \cdot \frac{a^2}{a(a-3)} = \frac{(a+3)(a-3)a^2}{2a(a-3)} = \frac{a(a+3)}{2}$$

ג. כפול את השבר: $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 4x - 12} \cdot \frac{x^2 - 36}{x^2 - 7x}$ נקבל:

$$\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 4x - 12} \cdot \frac{x^2 - 36}{x^2 - 7x} = \frac{(x-2)(x-7)}{(x+6)(x-2)} \cdot \frac{(x-6)(x+6)}{x(x-7)} = \frac{(x-2)(x-7)(x-6)(x+6)}{x(x+6)(x-2)(x-7)} = \frac{(x-6)}{x}$$

ד. כפול את השבר: $\frac{y^2 - 8y + 15}{y^2 - 7y + 10} \cdot \frac{y^2 - 4y + 4}{y^2 - 5y + 6}$ נקבל:

$$\frac{y^2 - 8y + 15}{y^2 - 7y + 10} \cdot \frac{y^2 - 4y + 4}{y^2 - 5y + 6} = \frac{(y-3)(y-5)}{(y-2)(y-5)} \cdot \frac{(y-2)^2}{(y-3)(y-2)} = \frac{(y-3)(y-5)(y-2)^2}{(y-2)^2(y-5)(y-3)} = 1$$

חילוק שברים אלגבריים:

גם במקרה זה החילוק של שברים אלגבריים דומה לחילוק של שברים פשוטים. כלומר: **כופלים את המחולק בהופכי של המחלק.**

דוגמאות:

א. בצע את החילוק: $\frac{a^2}{3b} \div \frac{5a}{6b^2}$

נכפיל בהופכי של המחלק ונקבל: $\frac{a^2}{3b} \div \frac{5a}{6b^2} = \frac{a^2}{3b} \cdot \frac{6b^2}{5a} = \frac{2ab}{5}$

ב. בצע את החילוק: $\frac{a^2 - 25}{a^2} \div \frac{2a + 10}{3a}$

ניעזר בפירוק לגורמים ונקבל:

$$\cdot \frac{a^2 - 25}{a^2} \div \frac{2a + 10}{3a} = \frac{(a+5)(a-5)}{a^2} \cdot \frac{3a}{2(a+5)} = \frac{3(a-5)}{2a} = \frac{3a-15}{2a}$$

ג. בצע את החילוק: $\frac{2x-4}{x^2+12x+36} \div \frac{10-5x}{x^3+6x^2}$

נקבל: $\frac{2x-4}{x^2+12x+36} \div \frac{10-5x}{x^3+6x^2} = \frac{2(x-2)}{(x+6)^2} \cdot \frac{x^2(x+6)}{5(2-x)} = \frac{2x^2(x-2)(x+6)}{5(x+6)^2(2-x)} = -\frac{2x^2}{5(x+6)}$

ד. בצע את החילוק: $\frac{x^2+y^2}{b^2-2ba+a^2} \div \frac{4y^2+4y^2}{b^2-a^2}$

נקבל: $\frac{x^2+y^2}{b^2-2ba+a^2} \div \frac{4y^2+4y^2}{b^2-a^2} = \frac{x^2+y^2}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{4(x^2+y^2)} = \frac{(x^2+y^2)(b-a)(b+a)}{4(b-a)^2(x^2+y^2)} = \frac{(b+a)}{4(b-a)}$

ה. בצע את החילוק: $\frac{3t^2-7t+2}{(t^2-4)^2} \div \frac{1}{t^2+4t+4}$

נקבל: $\frac{3t^2-7t+2}{(t^2-4)^2} \div \frac{1}{t^2+4t+4} = \frac{(t-2)(3t-1)}{[(t-2)(t+2)]^2} \cdot \frac{(t+2)^2}{1} = \frac{(t-2)(3t-1)(t+2)^2}{(t-2)^2(t+2)^2} = \frac{(3t-1)}{(t-2)}$

שברים אלגבריים עם יותר מקו שבר אחד:

כאשר יש יותר מקו שבר אחד מבדילים בין קו שבר ראשי לקו שבר משני.

נזכיר את הכלל היסודי: **פעולת החילוק הנקבעת על ידי קו השבר המשני קודמת לפעולת החילוק הנקבעת על ידי קו**

השבר הראשי.

נסמן את קו השבר הראשי בקו יותר ארוך ועבה.

נשים לב שמתקיים:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \text{א.} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{1} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b} \quad \text{ב.} \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{cb} \quad \text{ג.}$$

דוגמאות:

א. $\frac{\frac{a^3}{2}}{a} = \frac{a^3}{2} \div \frac{1}{a} = \frac{a^3}{2a} = \frac{a^2}{2}$

ב. $\frac{\frac{x^2}{x}}{\frac{3}{3}} = \frac{x^2}{1} \div \frac{3}{x} = \frac{3x^2}{x} = 3x$

ג. $\frac{\frac{a}{2}}{\frac{3}{a}} = \frac{a \cdot a}{2 \cdot 3} = \frac{a^2}{6}$

$$\frac{\frac{6}{a} \cdot \frac{a^2}{5}}{\frac{a^2+a}{8} \div \frac{1}{6}} = \frac{\frac{6a^2}{a \cdot 5}}{\frac{(a^2+a)6}{8}} = \frac{\frac{6a}{5}}{\frac{a(a+1)3}{4}} = \frac{6a \cdot 4}{5a(a+1)3} = \frac{8}{5(a+1)} \quad \text{ז.}$$

$$\frac{\frac{a+2}{2} \cdot \frac{1}{a}}{\frac{2a+4}{2}} = \frac{\frac{a+2}{2a}}{\frac{2(a+2)}{2}} = \frac{a+2}{2a} \cdot \frac{2}{2(a+2)} = \frac{1}{2a} \quad \text{ח.}$$

$$\frac{\frac{a^3}{8} \cdot \frac{3}{a}}{\frac{a^2}{10} \div \frac{1}{15}} = \frac{\frac{3a^3}{8a}}{\frac{a^2}{10} \cdot \frac{15}{a}} = \frac{\frac{3a^3}{8a}}{\frac{15a^2}{10a}} = \frac{3a^3}{8a} \cdot \frac{10a}{15a^2} = \frac{a}{4} \quad \text{ט.}$$

$$\frac{\frac{5}{x-2} \cdot \frac{x+3}{10}}{\frac{x+3}{2} \cdot \frac{3}{x-2}} = \frac{\frac{5(x+3)}{10(x-2)}}{\frac{3(x+3)}{2(x-2)}} = \frac{5(x+3)}{10(x-2)} \cdot \frac{2(x-2)}{3(x+3)} = \frac{1}{3} \quad \text{י.}$$

תרגילים:

$$1. \frac{4b}{3} \cdot \frac{9a}{8b} = \quad 2. \frac{-ab}{5} \cdot \frac{15}{a} = \quad 3. \frac{4c}{3p} \cdot \frac{9d}{32c} = \quad 4. 6xy \cdot \frac{7ab}{18xy} =$$

$$5. \frac{9ab}{28xy} \cdot \frac{35xy}{27ab} = \quad 6. \frac{5a^2b^3}{57x^3y^3z^3} \div \frac{1}{76x^2y^4z^6} = \quad 7. \frac{21a^3b^2}{64x^6c^7} \div \frac{35a^2}{24x^3c^4} =$$

$$8. \frac{39x^2}{22a^4y} \div \frac{52x}{77ay^5} = \quad 9. \frac{\frac{4ab}{3q}}{\frac{ab}{9pq}} = \quad 10. \frac{\frac{-3a^2b^2}{7x^2y^2}}{\frac{9ab^4}{56xy}} = \quad 11. \frac{\frac{21}{5m^4p^3}}{\frac{7a^5}{15m^7}} =$$

$$12. \frac{p+q}{p-q} \cdot \frac{4p-4q}{3p+3q} = \quad 13. \frac{(a-1)^3}{4a(x+1)^2} \cdot \frac{ba(x+1)}{(a-1)^2} = \quad 14. \frac{12x^2}{x^2-a^2} \cdot \frac{x-a}{8x} =$$

$$15. \frac{x^2-9a^2}{15} \cdot \frac{35}{x+3a} = \quad 16. \frac{x^2-1}{6-3x} \cdot \frac{4x-8}{3x+3} = \quad 17. \frac{a^2+b^2}{a-b} \cdot \frac{(b-a)^2}{a^4-b^4} =$$

$$18. \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2} \cdot \frac{ab+b^2}{a^2-ab} = \quad 19. \frac{4p^2+2pq}{p^2-4pq+4q^2} \cdot \frac{p^2-4q^2}{2p} =$$

$$20. \frac{k^2-12k+36}{3k-18} \cdot \frac{12}{k^2-36} = \quad 21. \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{x^2+x-2}{x^2+2x} =$$

$$22. \frac{3+z}{2+z} \cdot \frac{z^2+3z+2}{z^2+4z+3} = \quad 23. \frac{2a^3-6a^2b}{2a^3-2ab^2} \cdot \frac{a^2+3ab+2b^2}{a-3b} =$$

$$24. \frac{t^2+6t+9}{2t-2} \cdot \frac{t^2-1}{t^2+4t+3} = \quad 25. \frac{b^2-5a+6}{b^2+2b-15} \cdot \frac{b^2+12b+35}{b^2+b-42} =$$

$$26. \frac{x^2+4x+3}{x^2+3x+x} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+2x-3} = \quad 27. \frac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x-3} \cdot \frac{x^2-9}{9x^2-6x+1} =$$

$$28. \frac{a^2 + ma + ta + mt}{a^2 + ma + pa + mp} \cdot \frac{a^2 - p^2}{a^2 - t^2} =$$

$$30. \frac{m^2 - 5m + 6}{m + 4} \div \frac{m - 3}{5} =$$

$$32. \frac{a^2 + 6a - 7}{6a^2} \div \frac{a^2 + 5a - 14}{15a} =$$

$$34. \frac{\frac{a^4}{2} \div \frac{a^2}{6}}{\frac{a}{4} \div \frac{2}{a^3}} =$$

$$36. \frac{\frac{a^4}{6} \div \frac{a^2}{30}}{\frac{a}{5} \cdot \frac{10}{a^2}} =$$

$$29. \frac{a^2 + ac + ab + bc}{a^2 + ac + ap + pc} \cdot \frac{a^2 + ap + ad + dp}{a^2 + ad + ab + bd} =$$

$$31. \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 7x + 10} \div \frac{x + 2}{x - 5} =$$

$$33. \frac{\frac{a^4}{8} \cdot \frac{12}{a^2}}{\frac{a^3}{6} \cdot \frac{12}{a^4}} =$$

$$35. \frac{\frac{a^2 + 1}{4} \div \frac{a - 1}{2b}}{\frac{b^2}{12} \div \frac{a - 1}{2a^2 + 2}} =$$

$$37. \frac{\frac{6}{a^2 + 2a} \div \frac{9}{a^2}}{\frac{a + 5}{3} \cdot \frac{4}{a + 2}} =$$

תשובות:

1. $\frac{3a}{2}$ 2. $-3b$ 3. $\frac{3d}{8p}$ 4. $\frac{7ab}{3}$ 5. $\frac{5}{12}$ 6. $\frac{20a^2b^3yz^3}{3x}$ 7. $\frac{9ab^2}{40x^3c^3}$ 8. $\frac{21xy^4}{8a^3}$
9. $12p$ 10. $-\frac{8a}{3b^2xy}$ 11. $\frac{9m^3}{a^5p^3}$ 12. $\frac{4}{3}$ 13. $\frac{b(a-1)}{4(x+1)}$ 14. $\frac{3x}{2(x+a)}$ 15. $\frac{7(x-3a)}{3}$ 16.
- $-\frac{4(x-1)}{9}$ 17. $\frac{1}{a+b}$ 18. $\frac{b}{a}$ 19. $\frac{(2p+q)(p+2q)}{p-2q}$ 20. $\frac{4}{k+6}$ 21. x 22. 1
23. $\frac{a(a+2b)}{a-b}$ 24. $\frac{t+3}{2}$ 25. $\frac{b-2}{b-6}$ 26. $\frac{x+3}{x-1}$ 27. $\frac{(x-2)(x+3)}{(2x+1)(3x-1)}$ 28. $\frac{x}{2(x-1)}$ 29. 1 30.
- $\frac{5(m-2)}{m+4}$ 31. $\frac{x+5}{x-2}$ 32. $\frac{5(a-1)}{2a(a-2)}$ 33. $\frac{3a^3}{4}$ 34. $\frac{24}{a^2}$ 35. $\frac{3}{b}$
36. $\frac{5a^3}{2}$ 37. $\frac{a}{2(a+5)}$

20. חיבור וחיסור שברים אלגבריים שבמכנים שלהם יש רק חד איברים

חיבור וחיסור שברים אלגבריים שבמכנים שלהם יש רק מספרים:

בדומה לחיבור וחיסור של שברים פשוטים, גם במקרה של חיבור וחיסור שברים אלגבריים צריך למצוא מכנה משותף, רצוי למצוא את המכנה המשותף הקטן ביותר (המינימלי).

בחיבור וחיסור של שברים אלגבריים נבחין בין שני סוגים של שברים:

- א. שברים שבמכנים שלהם יש רק חד איברים. כלומר הקשר בין המספרים והאותיות שבמכנים הוא רק ע"י כפל.
- ב. שברים שבמכנים שלהם יש גם רב איברים, כלומר הקשר בין המספרים והאותיות שבמכנים הוא גם ע"י חיבור וחיסור.

נתחיל בסוג הראשון וגם כאן נבחין בין שני סוגים של שברים:

1. שברים שבמכנים שלהם יש רק מספרים.
2. שברים שבמכנים שלהם יש מספרים וגם אותיות.

שברים שבמכנים שלהם יש רק מספרים:

נגדיר: כפולה משותפת מינימלית של כמה מספרים טבעיים נתונים היא המספר הטבעי הקטן ביותר שמתחלק ללא שארית בכל אחד מהמספרים הטבעיים הנתונים.

לדוגמא: הכפולה המשותפת המינימלית של 2 ו-3 היא 6. למעשה גם כל אחד מאינסוף המספרים המתחלקים ב-6 ללא שארית, כמו: 12, 18, 24 וכו', היא כפולה משותפת של 2 ו-3 אבל היא לא הכפולה המשותפת המינימלית.

דוגמאות:

$$א. \text{ פשט את תבנית המספר: } 3a - \frac{7a}{6} - \frac{5}{4}a$$

$$\text{נשים לב שמתקיים } 3a = \frac{3a}{1} \text{ וכן מתקיים } \frac{5}{4}a = \frac{5a}{4}. \text{ כלומר המכנים הם } 1, 4, 6 \text{ ו-} 4.$$

$$\text{המכנה המשותף המינימלי של } 1, 4, 6 \text{ ו-} 4. \text{ לכן את המונה והמכנה של } \frac{3a}{1} \text{ נכפול פי } 12$$

$$(\text{כי } \frac{12}{1} = 12). \text{ את המונה והמכנה של } \frac{7a}{6} \text{ נכפול פי } 2 \text{ (כי } \frac{12}{6} = 2) \text{ ואת המונה והמכנה של } \frac{5a}{4} \text{ נכפול}$$

$$\text{פי } 3 \text{ (כי } \frac{12}{4} = 3). \text{ נסמן מעל לכל שבר פי כמה צריך להגדיל את המונה והמכנה שלו}$$

כלומר להרחיב אותו. לאחר מכן נכנס איברים דומים במונה. בסה"כ נקבל:

$$3a - \frac{7a}{6} - \frac{5}{4}a = \frac{3a}{1} - \frac{7a}{6} - \frac{5a}{4} = \frac{12}{1} \cdot \frac{3a}{1} - \frac{2}{6} \cdot \frac{7a}{6} - \frac{3}{4} \cdot \frac{5a}{4} = \frac{36a - 14a - 15a}{12} = \frac{7a}{12}$$

הערה: להבדיל מפתרון משוואות עם שברים כאן אין אפשרות לכפול את כל התבנית פי המכנה המשותף והוא נשאר גם בתשובה הסופית.

ב. פשט את תבנית המספר : $\frac{3a-1}{5} - \frac{a-2}{10}$.

המכנה המשותף המינימלי של 5 ו-10 הוא 10. את המונה והמכנה של השבר השמאלי נכפול פי 2. נשים לב שסימן מינוס לפני קו שבר הוא כמו סימן מינוס לפני סוגריים. נקבל:

$$\frac{2}{\cancel{2}} \frac{3a-1}{5} - \frac{1}{\cancel{10}} \frac{a-2}{10} = \frac{2(3a-1)-(a-2)}{10} = \frac{6a-2-a+2}{10} = \frac{5a}{10} = \frac{a}{2}$$

ג. פשט את תבנית המספר : $\frac{a-2}{6} - \frac{a+1}{15}$.

המכנה המשותף הקטן ביותר של 6 ו-15 הוא 30. לאחר כינוס איברים במונה ופירוק לגורמים ע"י הוצאת גורם משותף נוכל לצמצם. בסה"כ נקבל:

$$\frac{5}{\cancel{6}} \frac{a-2}{6} - \frac{2}{\cancel{15}} \frac{a+1}{15} = \frac{5(a-2)-2(a+1)}{30} = \frac{5a-10-2a-2}{30} = \frac{3a-12}{30} = \frac{3(a-4)}{30} = \frac{a-4}{10}$$

שברים שבמכנים שלהם יש מספרים וגם אותיות:

נעבור למקרה שהמכנים של השברים האלגבריים הם איברים שיש בהם גם מספרים וגם אותיות. הקשר בין המספרים והאותיות הוא ע"י פעולות כפל בלבד.

דוגמאות:

מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של הביטויים הבאים:

א. מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של: $8a$, $2a^2$, $4a$.

הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים 4, 2, ו-8 היא 8. הכפולה המשותפת המינימלית של a , a^2 ו- a^2 היא a^2 . לכן הכפולה המשותפת המינימלית של $4a$, $2a^2$ ו- $8a$ היא $8a^2$.

ב. מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של: $6a^2b$, $4ab^3$.

הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים 4 ו-6 היא 12. הכפולה המשותפת המינימלית של האותיות ab^3 ו- a^2b היא a^2b^3 . לכן הכפולה המשותפת המינימלית של $4ab^3$ ו- $6a^2b$ היא $12a^2b^3$.

א. **חשב את:** $\frac{a+2}{3a^2} - \frac{1}{6a}$.

המכנה המשותף המינימלי של המספרים 6 ו-3 הוא 6. המכנה המשותף המינימלי של האותיות a ו- a^2 הוא a^2 . לכן המכנה המשותף המינימלי הוא $6a^2$. את המונה והמכנה של השבר השמאלי צריך להגדיל פי 2

(כי $\frac{6a^2}{3a^2} = 2$). את המונה והמכנה של השבר הימני צריך להגדיל פי a (כי $\frac{6a^2}{6a} = a$).

סה"כ נקבל: $\frac{2}{\cancel{2}} \frac{a+2}{3a^2} - \frac{1}{\cancel{6}} \frac{1}{6a} = \frac{2(a+2)-a}{6a^2} = \frac{2a+4-a}{6a^2} = \frac{a+4}{6a^2}$

ב. חשב את: $\frac{1}{2a} - \frac{a-2}{2a^2} + \frac{1}{a^3}$

המכנה המשותף המינימלי למספרים הוא 2. המכנה המשותף המינימלי לאותיות הוא a^3 . לכן המכנה המשותף המינימלי הוא $2a^3$. את המונה והמכנה של השבר השמאלי נכפול פי a^2 ($\frac{2a^3}{2a} = a^2$). את המונה והמכנה של השבר

האמצעי נכפול פי a ($\frac{2a^3}{2a^2} = a$). את המונה והמכנה של השבר הימני נכפול פי 2 ($\frac{2a^3}{a^3} = 2$). סה"כ נקבל:

$$\frac{a^2}{2a} - \frac{a-2}{2a^2} + \frac{1}{a^3} = \frac{a^2 - a(a-2) + 2}{2a^3} = \frac{a^2 - a^2 + 2a + 2}{2a^3} = \frac{2(a+1)}{2a^3} = \frac{a+1}{a^3}$$

נסה לבד!!!! מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של הביטויים הבאים:

תרגילים:

- | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. $3a, 6a^2, 4$ | 2. $15a^2, 5a^3, 3a$ | 3. $7a^2, 14a, 2a^2$ |
| 4. $9a, 6a^2, 3a^3$ | 5. $6, 10a^3, 5a$ | 6. $4a, 3a^5, 6a^3$ |
| 7. $3a^3b, 6a^2$ | 8. $3y, 2x^2y$ | 9. $2x^3y^2, 3xy, 6xy^4$ |
| 10. $5ab, 2a^2b^3$ | 11. $8x^2, 4xy^3$ | 12. $5x^4y, 2xy^3, x^4y^2$ |

תשובות:

- | | | | | | |
|------------|------------|--------------|----------------|---------------|----------------|
| 1. $12a^2$ | 2. $15a^3$ | 3. $14a^2$ | 4. $18a^3$ | 5. $30a^3$ | 6. $12a^5$ |
| 7. $6a^3b$ | 8. $6x^2y$ | 9. $6x^3y^4$ | 10. $10a^2b^3$ | 11. $8x^2y^3$ | 12. $10x^4y^3$ |

חיבור וחיסור שברים אלגבריים שבמכנים שלהם יש גם רב איברים:

קודם נלמד למצוא מכנה משותף למכנים עם רב איברים.

דוגמאות:

מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של הביטויים הבאים:

א. מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של: $a, a+2$.

במקרה זה אין אפשרות לפרק לגורמים. הכפולה המשותפת המינימלית היא $a(a+2)$ **שים לב:** הכפולה המשותפת

המינימלית של $2a$ ו- a היא $2a$ אבל הכפולה המשותפת של $a+2$ ו- a היא $a(a+2)$ **ולא** $a+2$.

ב. מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של: $a(a+5), 3(a+5)$

הגורם $a+5$ מופיע ב- $3(a+2)$ וגם ב- $a(a+5)$, לכן הכפולה המשותפת המינימלית היא $3a(a+5)$.

ג. מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של: $a^2 - 3a, 2a - 6$

הפירוק לגורמים של $2a - 6$ הוא $2(a-3)$. הפירוק לגורמים של $a^2 - 3a$ הוא $a(a-3)$. לכן הכפולה המשותפת

המינימלית היא $2a(a-3)$.

ד. מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של: $a^2 - 25, 3a + 15$

הפירוק לגורמים של $a^2 - 25$ הוא $(a+5)(a-5)$. הפירוק לגורמים של $3a + 15$ הוא

$3(a+5)$. לכן הכפולה המשותפת המינימלית של $a^2 - 25$ ו- $3a + 15$ היא $3(a+5)(a-5)$.

ה. מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של: $a^2 - 16a + 64$, $3a - 24$.

הפירוק לגורמים של $a^2 - 16a + 64$ הוא $(a-8)^2$. הפירוק לגורמים של $3a - 24$ הוא $3(a-8)$. הגורם $(a-8)$ נמצא עם מעריך 2 לכן הכפולה המשותפת המינימלית היא $3(a-8)^2$.

ו. מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של: $a^2 - 5a + 6$, $a^2 - 9$.

הפירוק לגורמים של $a^2 - 9$ הוא $(a+3)(a-3)$. הפירוק לגורמים של $a^2 - 5a + 6$ עפ"י הפירוק של תלת איבר ריבועי הוא $(a-2)(a-3)$. לכן הכפולה המשותפת המינימלית היא $(a+3)(a-3)(a-2)$.

אחרי שאנחנו יודעים למצא מכנה משותף לרב איברים נראה מספר דוגמאות לכינוס שברים אלגבריים עם מכנים כאלה.
דוגמאות:

א. פשט וכנס את תבנית המספר: $\frac{a}{a-1} - \frac{a+3}{a-2}$.

המכנה המשותף המינימלי הוא $(a-1)(a-2)$. את השבר השמאלי נרחיב פי $a-2$ ואת השבר הימני נרחיב פי $a-1$. נקבל:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a-1} - \frac{a+3}{a-2} &= \frac{a^{a-2}}{a-1} - \frac{a+3}{a-2} = \frac{a(a-2) - (a+3)(a-1)}{(a-1)(a-2)} = \\ &= \frac{a^2 - 2a - (a^2 - a + 3a - 3)}{(a-1)(a-2)} = \frac{a^2 - 2a - a^2 - 2a + 3}{(a-1)(a-2)} = \frac{3-4a}{(a-1)(a-2)} \end{aligned}$$

ב. פשט וכנס את תבנית המספר: $\frac{2a}{a-7} - \frac{a+1}{7-a}$.

נשים לב שהמכנה של השבר הימני הוא הנגדי של המכנה של השבר השמאלי. לכן כדי לקבל את אותו המכנה, נהפוך את הסימן שלפני השבר הימני ונהפוך את הסימנים של האיברים שנמצאים במכנה שלו. בצורה כזאת לא נשנה את השבר. נקבל:

$$\frac{2a}{a-7} - \frac{a+1}{7-a} = \frac{2a}{a-7} + \frac{a+1}{a-7} = \frac{2a+a+1}{a-7} = \frac{3a+1}{a-7}$$

ג. פשט וכנס את תבנית המספר: $\frac{1}{2a+4} + \frac{1}{a^2+2a}$.

עפ"י דוגמא א' המכנה המשותף המינימלי של $2a+4$ ו- a^2+2a הוא $2a(a+2)$ את השבר

השמאלי נרחיב פי a (כי $\frac{2a(a+2)}{2a+4}$). את השבר הימני נרחיב פי 2 (כי $\frac{2a(a+2)}{a^2+2a}$). בשלב

לפני האחרון נצמצם ב- $a+2$. בסה"כ נקבל:

$$\frac{1}{2a+4} + \frac{1}{a^2+2a} = \frac{a}{2(a+2)} + \frac{1}{a(a+2)} = \frac{a+2}{2a(a+2)} = \frac{1}{2a}$$

ד. פשט וכנס את תבנית המספר: $\frac{a^2+49}{a^2-49} - \frac{a}{a+7}$

הפירוק לגורמים של המכנה השמאלי הוא $(a+7)(a-7)$ וזהו המכנה המשותף המינימלי. נקבל:

$$\begin{aligned} \frac{a^2+49}{a^2-49} - \frac{a}{a+7} &= \frac{a^2+49}{(a+7)(a-7)} - \frac{a}{a+7} = \frac{a^2+49-a(a-7)}{(a+7)(a-7)} \\ &= \frac{a^2+49-a^2+7a}{(a+7)(a-7)} = \frac{7a+49}{(a+7)(a-7)} = \frac{7(a+7)}{(a+7)(a-7)} = \frac{7}{a-7} \end{aligned}$$

ה. פשט וכנס את תבנית המספר: $\frac{a-3}{9a+27} + \frac{a+1}{a^2+3a}$

המכנה המשותף המינימלי הוא $9a(a+3)$. נקבל:

$$\begin{aligned} \frac{a-3}{9a+27} + \frac{a+1}{a^2+3a} &= \frac{a-3}{9(a+3)} + \frac{a+1}{a(a+3)} = \frac{a(a-3)+9(a+1)}{9a(a+3)} \\ &= \frac{a^2-3a+9a+9}{9a(a+3)} = \frac{a^2+6a+9}{9a(a+3)} = \frac{(a+3)^2}{9a(a+3)} = \frac{a+3}{9a} \end{aligned}$$

ו. פשט וכנס את תבנית המספר: $\frac{a}{a+2} - \frac{5a+1}{a^2+a-2} + \frac{2}{a-1}$

הפירוק לגורמים של המכנה האמצעי הוא $(a+2)(a-1)$ וזהו המכנה המשותף המינימלי. נקבל:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+2} - \frac{5a+1}{a^2+a-2} + \frac{2}{a-1} &= \frac{a}{a+2} - \frac{5a+1}{(a+2)(a-1)} + \frac{2}{a-1} = \\ \frac{a(a-1)-(5a+1)+2(a+2)}{(a+2)(a-1)} &= \frac{a^2-a-5a-1+2a+4}{(a+2)(a-1)} = \frac{a^2-4a+3}{(a+2)(a-1)} = \frac{(a-3)(a-1)}{(a+2)(a-1)} = \frac{a-3}{a+2} \end{aligned}$$

תרגילים:

מצא את הכפולה המשותפת המינימלית:

1. $a+6$, a , 3
2. $a+4$, a , $4a$
3. $a-4$, $a-4$
4. $2a-5$, $5-2a$
5. $a+3$, $a+2$, $a+1$
6. $3-2a$, $a(2a-3)$
7. $a(1-a)$, $3(a-1)$
8. $3a(a+1)$, $2a(a+1)$
9. $2a-2$, $a-1$
10. a^2+a , a
11. $a+2$, a^2-4
12. a^2-25 , $5+a$
13. $2a+5$, $4a^2-25$, $2a-5$
14. $7a-6$, $6-7a$, $36-49a^2$
15. a^2+4a+4 , $a+2$
16. a^2-6a+9 , $a-3$
17. $a^2+14a+49$, a^2-49
18. $36-a^2$, $a^2-12a+36$
19. $3a^2+6a+3$, a^2+a
20. $6a^2-4a$, $18a^2-24a+8$
21. a^2+5a+6 , $a+2$
22. $a^2-7a+12$, $a-4$
23. a^2-6a-7 , $a-7$, $a+1$
24. a^2-6a+8 , a^2-4a

פתרונות :

- | | | | |
|-------------------|------------------|--------------------|----------------------|
| $2a-5$.4 | $a-4$.3 | $4a(a+4)$.2 | $3a(a+6)$.1 |
| $6a(a+1)$.8 | $3a(a-1)$.7 | $a(2a-3)$.6 | $(a+1)(a+2)(a+3)$.5 |
| $(a-5)(a+5)$.12 | $(a-2)(a+2)$.11 | $a(a+1)$.10 | $2(a-1)$.9 |
| $(a-3)^2$.16 | $(a+2)^2$.15 | $(6-7a)(6+7a)$.14 | $(2a-5)(2a+5)$.13 |
| $2a(3a-2)^2$.20 | $3a(a+1)^2$.19 | $(6-a)^2(6+a)$.18 | $(a-7)(a+7)^2$.17 |
| $a(a-4)(a-2)$.24 | $(a+1)(a-7)$.23 | $(a-4)(a-3)$.22 | $(a+2)(a+3)$.21 |

תרגילים :

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\frac{m}{2} + \frac{m}{3} =$ | 2. $\frac{3x}{4} - \frac{5y}{6} =$ | 3. $\frac{a}{4} + \frac{5b}{6} - \frac{3a}{20} - \frac{7b}{30} =$ |
| 4. $\frac{a}{2p} - \frac{b}{6p} =$ | 5. $\frac{-4}{3x} - \frac{1}{2x} =$ | 6. $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} =$ |
| 7. $\frac{3ab}{5c} - \frac{ab}{2c} - \frac{ab}{10c} =$ | 8. $\frac{2x}{3y} - \frac{3x}{4y^2} =$ | 9. $\frac{5m}{12p} - \frac{7m}{18p} + \frac{11m}{30p} =$ |
| 10. $\frac{9m-8p}{16} - \frac{2m+p}{12} =$ | | 11. $\frac{a-3c}{24} - \frac{7a+c}{36} =$ |
| 12. $\frac{2a-3b}{26} - \frac{4a-3b}{52} =$ | | 13. $\frac{x-1}{2} - \frac{4x-9}{5} + \frac{11x-3}{6} - \frac{2-7x}{10} =$ |
| 14. $\frac{4(x+1)}{6} + \frac{3(2x-1)}{15} - \frac{2(3-x)}{24} =$ | | 15. $\frac{2x^2+3}{6x^2} - \frac{3x^3+1}{12x^3} + \frac{3x^4-2}{36x^4} =$ |
| 16. $\frac{2a+5b}{a+b} + \frac{3a-2b}{a+b} =$ | | 17. $\frac{7p-3q}{p-q} - \frac{3p+q}{p-q} =$ |
| 18. $\frac{(a+1)(a+2)}{a-3} + \frac{(a+1)(a-4)}{a-3} =$ | | 19. $\frac{3(2a+1)}{a+2} - \frac{2(a-5)}{a+2} - \frac{3(4-a)}{a+2} =$ |
| 20. $\frac{y}{y-3} + \frac{1}{3-y} =$ | | 21. $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a} =$ |
| 22. $\frac{a-b}{a+b} - \frac{a-b}{b+a} =$ | | 23. $\frac{x+y}{x-y} + \frac{y+x}{y-x} =$ |
| 24. $\frac{a+b}{ax+ay} - \frac{a+b}{bx+by} =$ | | 25. $\frac{x+y}{2x-2y} + \frac{6y}{7x-7y} - \frac{3x}{5x-5y} =$ |
| 26. $\frac{x}{x+y} - \frac{xy}{xy-y^2} =$ | | 27. $\frac{c}{c^2-cd} + \frac{d}{c^2d-d^3} =$ |
| 28. $\frac{1}{a+b} - \frac{a}{a^2-b^2} =$ | | 29. $\frac{1}{x^2-9} + \frac{1}{x^2-6x+9} =$ |
| 30. $\frac{1}{t^3+2t^2+t} + \frac{1}{t^3-t} =$ | | 31. $\frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{3}{x^2-2x} =$ |

$$32. \frac{a+1}{ab-a-4b+4} + \frac{a-4}{ab-a+b-1} =$$

$$34. \frac{x-2}{x^2-10x+16} + \frac{x-2}{x^2-17x+72} =$$

$$36. \frac{3x-y}{9x^2-6xy+y^2} + \frac{3x+y}{9x^2+6xy+y^2} =$$

$$38. \frac{\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3}}{\frac{x+4}{2} - \frac{2x+11}{6}} =$$

$$40. \frac{2 - \frac{6}{x}}{1 + \frac{9}{x^2} - \frac{6}{x}} =$$

$$42. \frac{\frac{4}{x+1} + \frac{x-10}{2x+1}}{\frac{2}{x+1} + \frac{5x-16}{3x-7}} =$$

$$33. \frac{a^2-a}{a^2-2a+1} + \frac{12}{1-a} =$$

$$35. \frac{8}{x^2+10x+9} - \frac{5}{x^2-3x-4} =$$

$$37. \frac{2x-1}{3x^2+12x} - \frac{3}{x+4} + \frac{5x-16}{2x^2-32} =$$

$$39. \frac{\frac{x+1}{3} - \frac{x+8}{6}}{\frac{x-2}{4x-4} + \frac{3-x}{3x-3}} =$$

$$41. \frac{\frac{7}{x-4} + \frac{10x+2}{x+1}}{\frac{14}{2x+1} + \frac{x-11}{x+1}} =$$

$$43. \frac{\frac{1}{x-2} + \frac{9}{4x^2-16} - \frac{9}{x+2}}{\frac{32x-89}{4x^2-2x-20}} =$$

תשובות:

$$1. \frac{5m}{6} \quad 2. \frac{9x-10y}{12} \quad 3. \frac{a+6b}{10} \quad 4. \frac{3a-b}{6p} \quad 5. \frac{-11}{6x} \quad 6. \frac{a+b+c}{abc} \quad 7.0 \quad 8. \frac{x(8y-9)}{12y^2}$$

$$9. \frac{71m}{180p} \quad 10. \frac{19m-28p}{48} \quad 11. \frac{-11(a+c)}{72} \quad 12. \frac{-3b}{52} \quad 13. \frac{67x+18}{30} \quad 14. \frac{69x+13}{60}$$

$$15. \frac{6x^4+18x^2-3x-2}{36x^4} \quad 16. \frac{5a+3b}{a+b} \quad 17.4 \quad 18. \frac{2(a-1)(a+1)}{a-3} \quad 19. \frac{7a+1}{a+2} \quad 20. \frac{y-1}{y-3}$$

$$21.1 \quad 22.0 \quad 23.0 \quad 24. \frac{(b-a)(b+a)}{ab(x+y)} \quad 25. \frac{-7x+95y}{70(x-y)} \quad 26. \frac{-2xy}{(x-y)(x+y)}$$

$$27. \frac{c+d+1}{(c-d)(c+d)} \quad 28. \frac{-b}{(a-b)(a+b)} \quad 29. \frac{2x}{(x+3)(x-3)^2} \quad 30. \frac{2}{(t+1)^2(t-1)} \quad 31. \frac{4x-9}{x(x-2)(x-3)}$$

$$32. \frac{2a^2-6a+17}{(a-4)(a+1)(b-1)} \quad 33. \frac{a-12}{a-1} \quad 34. \frac{2x-11}{(x-8)(x-9)} \quad 35. \frac{3x-77}{(x+9)(x+1)(x-4)}$$

$$36. \frac{6x}{(3x-y)(3x+y)} \quad 37. \frac{x+2}{6x(x-4)} \quad 38.5 \quad 39. -2x+2 \quad 40. \frac{2x}{x-3}$$

$$41. \frac{5(2x+1)}{x-4} \quad 42. \frac{3x-7}{5(2x+1)} \quad 43. \frac{5-2x}{2(x-2)}$$

תרגילים נוספים

- $$\frac{2m}{m-1} + \frac{5}{m} + \frac{8}{3-3m} \quad (2)$$
- $$\frac{4}{(x-1)(3x-4)} - \frac{5}{(x+3)(4-3x)} \quad (4)$$
- $$\frac{x-2}{9-6x} - \frac{1}{2x} - \frac{2x-5}{2x-3} \quad (6)$$
- $$\frac{3x}{x^2-4} + \frac{5}{x} - \frac{1}{3x-6} \quad (8)$$
- $$\frac{x}{x-3} - \frac{6-x}{x-3} \quad (10)$$
- $$\frac{m}{c(m-c)} - \frac{c}{m(m-c)} \quad (12)$$
- $$\frac{m-6}{m+2} + \frac{5}{m} - \frac{14-m}{m(m+2)} \quad (14)$$
- $$\frac{7}{a+5} - \frac{3}{a-5} + \frac{2(a+10)}{a^2-25} \quad (16)$$
- $$\frac{m}{m-3} - \frac{m+2}{m+3} - \frac{2m}{m^2-9} \quad (18)$$
- $$\frac{(2x-a)^2}{x-a} - \frac{a^2}{x-a} \quad (20)$$
- $$\frac{m}{2(a+m)} - \frac{a}{a-m} + \frac{a^2}{a^2-m^2} \quad (22)$$
- $$\frac{x}{3x-4} - \frac{3}{6x+8} - \frac{3x^2-5x+12}{9x^2-16} \quad (24)$$
- $$\frac{1}{x^2-xa} - \frac{1}{a^2-xa} - \frac{4}{x^2-a^2} \quad (26)$$
- $$\frac{x-y}{x^2-xy} + \frac{x-y}{x^2+xy} \quad (28)$$
- $$\frac{3x-1}{2x^2-18} - \frac{2x}{3(x-3)^2} - \frac{5x^2-30x-27}{6(x-3)^2(x+3)} \quad (30)$$
- $$\frac{6m+5}{3mb+15m} - \frac{m+2a}{ab+5a} + \frac{3m^2-5a+6cb+30c}{3amb+15am} \quad (32)$$
- $$\frac{a^2}{a-3} + \frac{18+2a^2}{a^2+3a+9} - \frac{3a(a^2+a+15)}{a^3-27} \quad (34)$$
- $$\frac{3}{x} + \frac{2}{x-5} - \frac{7}{2x-10} \quad (1)$$
- $$\frac{3}{(a-2)(a+3)} + \frac{5}{(a+3)(a+7)} \quad (3)$$
- $$\frac{3m}{m-1} + \frac{2}{m} - \frac{5m-3}{2m} \quad (5)$$
- $$\frac{5a-1}{a^2-9} - \frac{2}{a-3} \quad (7)$$
- $$\frac{10}{m^2-9} + \frac{4}{(m+3)^2} + \frac{3}{4m+12} \quad (9)$$
- $$\frac{5m}{2m-3} + \frac{9-m}{3-2m} \quad (11)$$
- $$\frac{5}{a+3} + \frac{12-a}{a^2+3a} \quad (13)$$
- $$\frac{6x^2-9x+27}{4x^2-9} - \frac{3x}{2x-3} \quad (15)$$
- $$\frac{16a}{a^2-16} + \frac{2a}{a+4} - \frac{a+4}{a-4} \quad (17)$$
- $$\frac{2y^2+y+10}{4y^2-25} + \frac{y}{5-2y} \quad (19)$$
- $$\frac{3x}{2x-8} - \frac{x^2+10x-8}{x^2-16} \quad (21)$$
- $$\frac{m^3}{m-3} - \frac{3m^3+81}{m^2-9} \quad (23)$$
- $$\frac{2}{a-2} - \frac{3}{a(a+2)} - \frac{2a-2}{a^2-4} \quad (25)$$
- $$\frac{a+1}{a^2-9} + \frac{1}{a^2-3a} + \frac{1}{a^2+3a} \quad (27)$$
- $$\frac{2x^2-15x+10}{8x^2-50} + \frac{3}{2x+5} - \frac{x+9}{10-4x} \quad (29)$$
- $$\frac{a-5}{5ab-a^2x} + \frac{b-x}{abx-5b^2} \quad (31)$$
- $$\frac{(3m-c)^3}{m-c} - \frac{c^3-9mc^2}{c-m} \quad (33)$$

$$\frac{x}{2x-4} - \frac{x-1}{3x+6} + \frac{4}{x^2-4} \quad (36)$$

$$\frac{m+1}{m+4} + \frac{2}{m+3} - \frac{3}{m^2+7m+12} \quad (38)$$

$$\frac{a-5}{a-3} - \frac{a^2-9a-3}{a^2+a-12} + \frac{a-3}{a+4} \quad (40)$$

$$\frac{2m}{m^2-4} - \frac{1}{m-2} + \frac{2}{m^2+5m+6} \quad (42)$$

$$\frac{3x-7}{x^2-5x+6} - \frac{5}{x^2+x-6} - \frac{x+9}{x^2-9} \quad (44)$$

$$\frac{3m-2}{m(m-3)} - \frac{2}{m+3} + \frac{12-8m}{m(m^2-9)} \quad (46)$$

$$\left(\frac{1}{a^2-2a-3} + \frac{1}{2a^2-a-3} \right) \cdot \left(a - \frac{3}{a-2} \right) \quad (48)$$

$$\left(\frac{3a}{a^2-5a-6} - \frac{2a+1}{a^2-1} \right) \cdot \left(\frac{a^2-7a+6}{a^2+8a+6} \right) \quad (50)$$

$$\frac{2}{a-3} + \frac{3}{a+3} + \frac{a^2+9}{a^2-9} \quad (35)$$

$$\frac{a+1}{a-2} - \frac{5}{a} + \frac{3}{2-a} \quad (37)$$

$$\frac{a^2-2a-7}{a^2+3a+2} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+1} \quad (39)$$

$$\frac{19m-18}{25m^2-4} + \frac{m-6}{5m+2} \quad (41)$$

$$\frac{3x-8}{x^2-4} + \frac{1}{x(x-2)} - \frac{2}{x+2} \quad (43)$$

$$\frac{a+3}{a(a+2)} + \frac{2}{a-2} + \frac{4}{a(a^2-4)} \quad (45)$$

$$\frac{m+2}{m^2-5m} + \frac{3}{10-2m} + \frac{5}{m(m^2-25)} \quad (47)$$

$$\left(\frac{a}{a+1} - \frac{4}{a+4} \right) \cdot \left(3a + \frac{a-8}{a-2} \right) \quad (49)$$

פתרונות

$$\frac{9x+7}{(x-1)(x+3)(3x-4)} \quad (4) \quad \frac{8a+11}{(a-2)(a+3)(a+7)} \quad (3) \quad \frac{6m^2+7m-15}{3m(m-1)} \quad (2) \quad \frac{3x-30}{2x(x-5)} \quad (1)$$

$$\frac{3m^2+56m+45}{4(m+3)^2(m-3)} \quad (9) \quad \frac{23x^2-2x-60}{3x(x^2-4)} \quad (8) \quad \frac{3a-7}{a^2-9} \quad (7) \quad \frac{14x^2-28x-9}{6x(3-2x)} \quad (6) \quad \frac{m^2+12m-7}{2m(m-1)} \quad (5)$$

$$\frac{2}{m-3} \quad (18) \quad \frac{1}{a+5} \quad (17) \quad \frac{6}{2x+3} \quad (16) \quad \frac{-9}{m} \quad (15) \quad \frac{m-2}{a} \quad (14) \quad \frac{4}{mc} \quad (13) \quad \frac{m+c}{2y+5} \quad (12) \quad \frac{3}{ab} \quad (11) \quad \frac{2}{ab} \quad (10)$$

$$\frac{3}{2(3x+4)} \quad (24) \quad \frac{m^2+9}{2(a-m)} \quad (23) \quad \frac{-m}{2(x+4)} \quad (22) \quad \frac{x-4}{4x} \quad (21) \quad \frac{-2}{2y+5} \quad (19)$$

$$\frac{-2}{(x+3)(x-3)} \quad (30) \quad \frac{2x+5}{2(2x-5)} \quad (29) \quad \frac{2}{x+y} \quad (28) \quad \frac{1}{a-3} \quad (27) \quad \frac{x-a}{ax(x+a)} \quad (26) \quad \frac{3}{a(a-2)} \quad (25)$$

$$\frac{m+2}{m+3} \quad (38) \quad \frac{a-5}{a} \quad (37) \quad \frac{x+10}{6(x-2)} \quad (36) \quad \frac{a+2}{a-3} \quad (35) \quad \frac{2c}{am} \quad (32) \quad \frac{-1}{ab} \quad (31)$$

$$\frac{2}{x+3} \quad (44) \quad \frac{x-1}{x(x+2)} \quad (43) \quad \frac{m+5}{(m+3)(m+2)} \quad (42) \quad \frac{m-3}{5m-2} \quad (41) \quad \frac{a-2}{a-3} \quad (40) \quad \frac{a-2}{a+1} \quad (39)$$

$$\frac{1}{a+1} \quad (50) \quad \frac{(3a-8)(a+2)}{a+4} \quad (49) \quad \frac{3}{2a-3} \quad (48) \quad -\frac{m+6}{2m(m+5)} \quad (47) \quad \frac{m+2}{m(m-3)} \quad (46) \quad \frac{3a-1}{a(a-2)} \quad (45)$$

21. משוואה ממעלה ראשונה בנעלם אחד

משוואה – תבנית פסוק עם סימן שיווין נקראת משוואה.

השיטה לפתרון משוואות:

הדרך הכללית לפתרון משוואה היא לעבור ע"י כמה צעדים מהמשוואה הנתונה למשוואה **פשוטה יותר** השקולה לה. המשוואה הפשוטה ביותר היא משוואה שבאגף אחד שלה מופיע המשתנה (הנעלם) ובאגף השני שלה מופיע מספר.

השלבים הם:

א. " **העברת** " כל הביטויים המכילים את הנעלם לאגף אחד ואת כל המספרים לאגף שני תוך כדי שינוי הסימנים שלהם.

ב. **כינוס איברים** דומים בכל אחד מהאגפים.

ג. מציאת הנעלם **מהמשוואה המפורשת** המתקבלת.

דוגמאות:

פתור את המשוואות הבאות:

א. פתור את המשוואה: $3[2(x-5)-x] = 5-2x$

נפתח תחילה את הסוגריים הפנימיים $3[2x-10-x] = 5-2x$

נכנס איברים בתוך הסוגריים החיצוניים $3[x-10] = 5-2x$

נפתח את הסוגריים החיצוניים $3x-30 = 5-2x$

נעביר אגפים $5x = 35$

והפתרון $x = 7$

ב. פתור את המשוואה: $x(x-5)-2 = x^2-3x+6$

נפתח סוגריים ונקבל: $x^2-5x-2 = x^2-3x+6$

נעביר אגפים ונקבל: $x^2-5x-x^2+3x = 6+2$

x^2 ו- $-x^2$ מתבטלים, לכן $-2x = 8$

והפתרון: $x = -4$

ג. פתור את המשוואה: $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 2 - \frac{1}{6}x$

המכנה המשותף המינימלי של המספרים 3, 4 ו- 6 הוא 12. נכפול את כל המשוואה פי 12. נסמן מעל לכל שבר פי כמה צריך להגדיל את המונה שלו, כלומר פי כמה צריך להרחיב את השבר. בניגוד לפעולת כינוס בשברים אלגבריים שבהם המכנה המשותף נשאר, במשוואות המכנים אחרי פעולת ההרחבה נעלמים!!!! סה"כ נקבל:

$$\frac{4}{3}x - \frac{3}{4}x = \frac{12}{2} - \frac{2}{6}x \quad \text{12} \cdot$$

$$4x - 3x = 24 - 2x$$

$$3x = 24$$

$$x = 8$$

$$ד. \quad \text{פתור את המשוואה: } \frac{x-3}{5} - \frac{7x+9}{10} = 1 - \frac{1-3x}{2}$$

המכנה המשותף המינימלי של המספרים 5, 10 ו-2 הוא 10.

נכפול את כל המשוואה פי 10 ונזכור שקו שבר הוא כמו סוגריים.

$$\frac{x-3}{5} - \frac{7x+9}{10} = 1 - \frac{1-3x}{2} \quad \cdot 10$$

$$2(x-3) - 1(7x+9) = 10 - 5(1-3x)$$

$$2x - 6 - 7x - 9 = 10 - 5 + 15x$$

סה"כ נקבל:

$$-5x - 15 = 5 + 15x$$

$$-20x = 20$$

$$x = -1$$

$$ה. \quad \text{פתור את המשוואה: } \frac{5}{x-2} = \frac{3}{x}$$

המכנה המשותף של x ו- $x-2$ הוא $x \cdot (x-2)$. לכן נכפול את כל המשוואה פי $x(x-2)$.

$$\frac{5}{x-2} = \frac{3}{x} \quad \cdot x(x-2)$$

$$5x = 3(x-2)$$

$$5x = 3x - 6$$

סה"כ נקבל:

$$2x = -6$$

$$x = -3$$

הערה: קבוצת ההצבה של המשוואה היא $x \neq 0, 2$ והפתרון שקיבלנו איננו מאפס אף מכנה במשוואה המקורית.

משוואות ללא פתרון ומשוואות עם אינסוף פתרונות:

בד"כ למשוואות מהמעלה הראשונה שפתרנו עד כה היה בדיוק פתרון אחד. בסעיף זה נדון במשוואות מיוחדות משני סוגים:

א. **משוואות שאין להן פתרון** – כלומר לא קיים מספר שהצבתו במשוואה תיתן פסוק אמת. קבוצת האמת היא הקבוצה הריקה. (הסימון \emptyset).

ב. **משוואות שיש להן אינסוף פתרונות** – כלומר קיימים אינסוף מספרים שהצבתם במשוואה תיתן פסוק אמת.

דוגמאות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$א. \quad \text{פתור את המשוואה: } 7x - 5 - 3x = 4x - 3$$

אם נרכז את כל הביטויים עם x באגף שמאל ואת כל המספרים באגף ימין

$$נקבל: 7x - 3x - 4x = -3 + 5. \quad \text{כלומר } 0 = 2 \quad \text{וזה לא ייתכן.}$$

מסקנה: למשוואה זו אין פתרון, כלומר לא קיים מספר שהצבתו במקום x בשני אגפי המשוואה תגרום לכך ששני אגפי המשוואה יהיו שווים זה לזה.

$$ב. \quad \text{פתור את המשוואה: } 6 + 3x - 1 = 5x + 5 - 2x$$

לאחר העברת אגפים נקבל $3x - 5x + 2x = 5 - 6 + 1$. אם נכנס איברים נקבל $0 = 0$ וזה תמיד נכון. **מסקנה:** למשוואה זו יש אינסוף פתרונות. במקרה זה הצבתו של כל מספר במקום x תגרום לכך ששני אגפי המשוואה יהיו שווים זה לזה. כלומר הפתרון הוא: כל x .

פתרון משוואות עם משתנה במכנה בעזרת פירוק לגורמים:

השלבים בפתרון המשוואות:

- א. מציאת המכנה המשותף המינימלי של כל השברים שבמשוואה. כדי לעשות זאת נעזרים בפירוק לגורמים במידת הצורך.
- ב. הכפלת כל המשוואה פי המכנה המשותף המינימלי וסימון מעל לכל שבר פי כמה מרחיבים אותו.
- ג. פתרון המשוואה שמתקבלת ללא השברים.
- ד. בדיקה האם הפתרון או הפתרונות שייכים לקבוצת ההצבה של המשוואה. פתרון שאיננו שייך לקבוצת ההצבה הוא איננו פתרון של המשוואה ויש לבטלו.

דוגמאות:

פתור את המשוואות הבאות:

א. פתור את המשוואה: $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+4} = 1$

כאן אין אפשרות לפרק לגורמים את המכנים ולכן המכנה המשותף המינימלי הוא $(x-1)(x+4)$. נכפול את כל המשוואה פי המכנה הנ"ל ונקבל:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+4} = 1 \quad \bigg/ \cdot (x-1)(x+4)$$

המשוואה ללא שברים שמתקבלת היא: $x(x+4) - 2(x-1) = (x-1)(x+4)$

נפתח סוגריים ונקבל: $x^2 + 4x - 2x + 2 = x^2 + 4x - x - 4$, לכן $x^2 + 4x - 2x + 2 = x^2 + 4x - x - 4$
והפתרון $x = 6$.

קבוצת ההצבה של המשוואה היא $x \neq 1$, $x \neq -4$ כלומר הפתרון $x = 6$ לא מאפס את אף אחד מהמכנים של המשוואה ולכן זהו פתרון המשוואה.

ב. פתור את המשוואה: $\frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{3x+6} = \frac{1}{x-2}$

הפירוק לגורמים הוא $x-2$, $3(x+2)$, $(x+2)(x-2)$. לכן המכנה המשותף המינימלי הוא $3(x+2)(x-2)$. נכפול את כל המשוואה פי המכנה הנ"ל ונקבל:

$$\frac{x}{(x+2)(x-2)} - \frac{2}{3(x+2)} = \frac{1}{x-2} \quad \bigg/ \cdot 3(x+2)(x-2)$$

מכאן $3x - 2(x-2) = 3(x+2)$ לכן $3x - 2x + 4 = 3x + 6$ והפתרון $x = -1$.
הפתרון לא מאפס אף אחד מהמכנים ולכן זהו פתרון המשוואה.

ג. פתור את המשוואה: $\frac{x^2-4x+3}{x-1} = 2x-5$

הפעם נפעיל שיקול דעת וקודם ננסה לצמצם !!! הפירוק לגורמים של המונה השמאלי הוא $(x-3)(x-1)$. כלומר

המשוואה היא $\frac{(x-3)(x-1)}{x-1} = 2x-5$. לכן נוכל לצמצם את השבר שבאגף שמאל ב- $x-1$ ונקבל $x-3 = 2x-5$.

פתרון משוואה זו הוא $x = 2$. הפתרון לא מאפס את המכנה.

הערה: אם היינו קודם מכפילים במכנה המשותף היינו מקבלים פתרון אלגברי זהה, אבל יותר מסובך. זו דוגמא טובה להפעלת שיקול דעת ולנסות תמיד לפתור בעזרת פתרון אלגברי פשוט שלא מסרב! !!!

1. $19x - 17 - 7x + 72 = 12x + 12 - 25x + 93$ $x = 2$
2. $204 - 3z + 37 + 28z = 19z - 19 + 13z + 6z$ $z = 20$
3. $18x - 9 - 13x - 2x + 11 = 34x + 97 - 21x - 85 - 10x$ אין פתרון
4. $2(x - 3) = x - 1$ $x = 5$
5. $3(x + 1) = 31 - x$ $x = 7$
6. $4(x - 1) = 5(x - 2)$ $x = 6$
7. $2(3x - 4) = 36 - 4(10 - x)$ $x = 2$
8. $14 - (17 - x) = 2x - 3(9 - x)$ $x = 6$
9. $3(2y - 1) + 4 = 2(y - 3) + 11$ $y = 1$
11. $7(3y + 6) - (y - 1)3 = 92 + 2(y + 1) + 3(y + 1)$ $y = 4$
12. $2(x - 6) + 66 = 24 - [3x - 2(1 - x)]$ $x = -4$
13. $2y - [3y - 2(1 - y)] = 2(y - 3) - 7$ $y = 3$
14. $3x - 2[x - 4(3 - x)] = 31$ $x = -1$
15. $[3(y - 1) - 5(2 - y)]2 - 3y = 2y - 4$ $y = 2$
16. $4(x - 1)^2 - (2x + 3)^2 = 16x + 49$ $x = -1\frac{1}{2}$
17. $(2x - 1)^2 - 3(x - 2)^2 = x^2 - 3$ $x = 1$
18. $(2x - 3)^2 - 3(x + 1)^2 = (x - 9)^2$ אין פתרון
19. $(4x - 3)^2 + (3x + 2)^2 = (5x - 1)^2 + 2(6 - x)$ x כל
20. $(4x + 1)^2 - (3x + 5)^2 = 7x^2 - 22x - 24$ x כל
21. $(3x - 1)(3x + 1) - (3x + 4)^2 = 7$ $x = -1$
22. $(5x - 6)^2 - (5x - 2)(5x + 2) = 0$ $x = \frac{2}{3}$
23. $\frac{x}{3} + 3 - \frac{5x}{6} = \frac{3x}{4} - 2 + \frac{7x}{12} - 17$ $x = 12$
24. $\frac{x}{4} - 2 - \frac{x}{3} = \frac{x}{6} - 5 - \frac{x}{8}$ $x = 24$
25. $\frac{9x}{4} - \frac{11x}{6} = \frac{53x}{12} - 164 + \frac{46x}{9}$ $x = 18$
26. $\frac{2}{3x} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2x} - \frac{3}{8}$ $x = -\frac{2}{5}$
27. $\frac{x + 2}{6} - \frac{2x + 1}{3} = \frac{3x - 1}{3}$ $x = \frac{2}{9}$

28. $\frac{3x-12}{5} - \frac{2x+6}{2} = \frac{9x+42}{4}$ $x = -6$
29. $\frac{2x-5}{4} - \frac{x-2}{6} = \frac{x}{7} - \frac{1}{4}$ $x = 3\frac{1}{2}$
30. $\frac{6x+7}{9} - \frac{3x-5}{4} - \frac{9x+5}{14} = \frac{10x+7}{18}$ $x = 1$
31. $\frac{1-2x}{3} - \frac{1-3x}{5} - \frac{1-5x}{7} = \frac{x-2}{3} + \frac{2x-4}{5}$ $x = 17$
32. $\frac{14-7x}{2} - \left(2x - \frac{x-3}{5}\right) = 11\frac{7}{10}$ $x = -1$
33. $2x-1 - \frac{3x-4}{2} = \frac{x+1}{3} - \left(1 - \frac{x+2}{2}\right)$ $x = 2$
34. $\frac{x+1}{4} - 2x = \frac{5-3x}{2} - \left(x + \frac{x-3}{8}\right)$ $x = 3$
35. $\frac{4(2x-1)}{3} - \frac{2(x-5)}{7} = 2\left(x + \frac{4x-15}{21}\right)$ אין פתרון
36. $\frac{5x^2-7x+8}{6x^2-2x-20} = \frac{5}{6}$ $x = 4\frac{5}{8}$
37. $\frac{5x^2-5x+8}{4x^2-4x+12} = \frac{5}{4}$ אין פתרון
57. $\frac{7x^2-3x-15}{9x^2+5x-25} = \frac{7}{9}$ $x = \frac{20}{31}$
38. $\frac{2x+5}{x-3} + 2 = \frac{x+3}{3x-9} + \frac{3-7x}{6-2x}$ אין פתרון
39. $\frac{7}{8x} - \frac{x-1}{2x^2-4x} = \frac{1}{8x-16} + \frac{5-x}{8x-4x^2}$ $x \neq 2$ וגם $x \neq 0$
40. $\frac{1}{3x-3} - \frac{x+1}{x^2-2x+1} = \frac{2}{x-1} - \frac{2x-7}{2x^2-4x+2}$ $x = -1\frac{7}{10}$
41. $\frac{16}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = \frac{6}{x+2}$ $x = 3$
42. $\frac{5x-1}{2x+1} + \frac{2x+9}{2x-1} = \frac{14x^2+49}{4x^2-1}$ $x = 3$
43. $\frac{23}{4x-20} - \frac{41}{2x-4} = \frac{45-11x}{x^2-7x+10}$ $x = 12\frac{4}{15}$
44. $\frac{12}{x^2-9} - \frac{3}{x^2-6x+9} = 0$ $x = 5$
45. $\frac{2}{x+2} - \frac{3}{3x+6} = \frac{3x-10}{x^2+4x+4}$ $x = 6$

22. השיטה האלגברית לפתרון מערכת של שתי משוואות

שיטת השוואת מקדמים:

אנו יודעים לפתור משוואה אחת ממעלה ראשונה עם משתנה אחד ולכן מטרתנו היא להגיע מהמערכת של שתי המשוואות עם שתי המשתנים למערכת השקולה לה (כלומר בעלת אותו הפתרון) שבה אחת מהמשוואות היא עם משתנה אחד בלבד.

משוואה מסודרת - משוואה שבאגף אחד שלה מופיעים שתי המשתנים (x ו- y) לאחר כינוס איברים, ובאגף השני מופיע מספר בודד (האיבר החופשי) נקראת משוואה מסודרת.

הצורה של המשוואה מסודרת היא: $ax + by = c$.
דוגמאות למשוואות מסודרות: $x + y = 5$, $2x - 3y = 4$, $x + 4y = 0$.
דוגמאות למשוואות לא מסודרות: $y = 2x$, $2x + y - 3x + 5 = x$, $4(x - 1) = 3y$.

שיטת השוואת מקדמים:

דוגמאות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. פתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -5 \end{cases}$$

כדי שאמרנו, ברצוננו לקבל מהמערכת הנ"ל מערכת השקולה לה שבה אחת מהמשוואות היא עם משתנה אחד בלבד. כדי לעשות זאת נשאיר את המשוואה הראשונה ללא שינו ואילו למשוואה השנייה נחבר את המשוואה הראשונה לפי האגפים המתאימים.

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -5 \end{cases} \quad \text{סה"כ נקבל:} \\ &2x + 0 = -2 \end{aligned}$$

הפתרון של המשוואה השנייה הוא $x = -1$. כדי למצוא את y נציב את הפתרון במשוואה הראשונה.

אם נציב $x = -1$ במשוואה $x + y = 3$ נקבל $-1 + y = 3$ ולכן $y = 4$.

כלומר פתרון המערכת הוא $x = -1$, $y = 4$. נהוג לסמן $(-1, 4)$.

ב. פתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ 7x + 4y = -5 \end{cases}$$

נשווה את מקדמי ה- x . כדי לעשות זאת נכפול את המשוואה הראשונה פי 4 ואת המשוואה השנייה פי 3.

$$\begin{aligned} &\text{נקבל:} \quad \begin{cases} 2x + 3y = -7 \quad \cdot 7 \\ 7x + 4y = -5 \quad \cdot 2 \end{cases} \quad \text{ולכן} \quad \begin{cases} 14x + 21y = -49 \\ 14x + 8y = -10 \end{cases} \\ &\text{נחסר עכשיו את המשוואות ונקבל:} \quad 13y = -39 \end{aligned}$$

ולכן $y = -3$. אם נציב את התוצאה באחת משתי המשוואות נקבל $x = 1$.

לסיכום: פתרון המערכת הוא $x = 1$, $y = -3$. ונסמן $(1, -3)$.

נסכם:

בשיטת השוואת המקדמים משווים את המקדמים של אחד מהמשתנים בשתי המשוואות. עושים זאת ע"י הכפלת אחת מהמשוואות במספר מתאים או הכפלת שתי המשוואות במספרים מתאימים. לאחר מכן מחברים או מחסרים את המשוואות וכך מקבלים משוואה אחת בנעלם אחד. פותרים משוואה זו... ומוצאים את אחד הנעלמים. אח"כ מציבים את הנעלם שמצאנו באחת המשוואות ומוצאים את הנעלם השני.

שיטת ההצבה:

נראה עכשיו שיטה נוספת לפתרון מערכת של שתי משוואות ממעלה ראשונה עם שני משתנים (נעלמים). שיטה זו נקראת **שיטת ההצבה**.

בשיטה זו מביעים את אחד מהמשתנים בעזרת המשתנה השני מתוך אחת מהמשוואות (הפעולה נקראת בידוד). את התוצאה המתקבלת מציבים במשוואה השנייה. בצורה כזאת מקבלים משוואה אחת עם משתנה אחד.

דוגמאות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x + y = -3 \end{cases}$$
 פתור את מערכת המשוואות:

כפי שאפשר לראות, המקדם של y במשוואה השנייה הוא 1. לכן **כדאי** לחלץ את y מהמשוואה השנייה. נקבל $y = -3 - 5x$. נציב תוצאה זו במקום y במשוואה הראשונה ונקבל: $3x + 2(-3 - 5x) = 8$ מכאן $3x - 6 - 10x = 8$ ז"א $-7x = 14$ לכן $x = -2$. כדי למצוא את y נציב $x = -2$ במשוואה $y = -3 - 5x$, נקבל $y = 7$. לסיכום, פתרון המערכת הוא $x = -2, y = 7$ ונסמן $(-2, 7)$.

ב.
$$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ -4x + 3y = -7 \end{cases}$$
 פתור את מערכת המשוואות:

$$2y = 3 - 5x \quad / \div 2$$

$$y = \frac{3 - 5x}{2}$$

נטפל במשוואה הראשונה (נעביר אגפים ונבודד) ונקבל:

נציב תוצאה זו במקום y במשוואה השנייה ונקבל: $-4x + 3\left(\frac{3 - 5x}{2}\right) = -7 \Leftrightarrow -4x + \frac{9 - 15x}{2} = -7$. נכפול פי 2

את המשוואה ונקבל $-8x + 9 - 15x = -14$. לכן $-23x = -23$ ולכן $x = 1$. הצבת תוצאה זו במשוואה

$$y = \frac{3 - 5x}{2} \quad \text{נותנת: } y = \frac{3 - 5 \cdot 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

לכן פתרון המערכת הוא $x = 1, y = -1$ ונסמן $(1, -1)$.

דוגמאות נוספות: והפעם בלי לבלבל את המוח..... פשוט פתרון:

א.
$$\begin{cases} 3x - 2 = x - y + 5 \\ x + y = 4y - 4x + 1 \end{cases}$$
 פתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 3x - x + y = 5 + 2 \\ x + y - 4y + 4x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases} \quad / \cdot 3$$

נקבל:

$$+ \begin{cases} 6x + 3y = 21 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$11x = 22 \Rightarrow x = 2$$

נציב תוצאה זו במשוואה הראשונה ונקבל: $y = 3$. פתרון סופי: $(2, 3)$.

ב. פתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 2 \\ \frac{x-y}{2} - \frac{x+4}{5} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 2 & / \cdot 6 \\ \frac{x-y}{2} - \frac{x+4}{5} = 1 & / \cdot 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 5(x-y) - 2(x+4) = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 & / \cdot 3 \\ 3x - 5y = 18 & / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 9y = 36 & / \cdot 3 \\ 6x - 10y = 36 & / \cdot 2 \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 6$$

נקבל:

פיתרון סופי (6,0).

ג. פתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ x + y = 1 & / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$0 = 3$$

נקבל:

למערכת זו אין פתרון. אפשר להגיד שקבוצת האמת של המערכת הנ"ל היא הקבוצה הריקה.

ד. פתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 & / \div 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

נקבל:

למערכת זו יש אינסוף פתרונות.

$$1. \begin{cases} y = 3x \\ y + x = 12 \end{cases}$$

(3,9)

$$2. \begin{cases} y = x + 5 \\ 2y - x = 11 \end{cases}$$

(1,6)

$$3. \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y + x = 19 \end{cases}$$

(6,13)

$$4. \begin{cases} x - y = 5 \\ 3y - 8x = -30 \end{cases}$$

(3,-2)

$$5. \begin{cases} x - y = 0 \\ 9x + 2y = 44 \end{cases}$$

(4,4)

$$6. \begin{cases} 3x + y = 10 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

(2,4)

$$7. \begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ 3x + 4y = 26 \end{cases}$$

(2,5)

$$8. \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

(3,2)

$$9. \begin{cases} 2x + 5y = -5 \\ 4x + 3y = -17 \end{cases}$$

(-5,1)

$$10. \begin{cases} 7x - 5y = 2 \\ 5x - 4y = -2 \end{cases}$$

(6,8)

$$11. \begin{cases} 7x + 2y = 14 \\ 9x + y = 7 \end{cases}$$

(0,7)

$$12. \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

(5,2)

$$13. \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 5x + 2y = 13 \end{cases}$$

(3,-1)

$$14. \begin{cases} 3x + 8y = 50 \\ 6x + 9y = 107 \end{cases}$$

$(19\frac{1}{3}, -1)$

$$15. \begin{cases} 12x - 19y = 10 \\ 30x - 53y = 14 \end{cases}$$

(4,2)

$$16. \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 1.5x + 2y = 3.5 \end{cases}$$

אינסוף פתרונות

$$17. \begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ 4x - 10y = 10 \end{cases}$$

אין פתרון

$$18. \begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

(4,7)

$$19. \begin{cases} 3(x+1) + 2(y-2) = 17 \\ 3(x+1) - 3(y-2) = 7 \end{cases}$$

$(3\frac{1}{3}, 4)$

$$20. \begin{cases} 5(2x-3y) - 3(3x-2y) + 26 = 0 \\ 3(5x-2y) - (2x-5y) - 87\frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

$(7, 3\frac{2}{3})$

$$21. \begin{cases} 2(x-3) - 3(y-4) = 5 \\ 5(x-2) + 2(y-5) = 6 \end{cases}$$

(4,3)

$$22. \begin{cases} (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \\ (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \end{cases}$$

(7,5)

$$23. \begin{cases} (x+2)(y-3) = (x-3)(y+4) \\ (x-2)(y-6) = (x+4)(y-8) \end{cases}$$

(8,10)

$$24. \begin{cases} (x+3)(y-5) = xy - 12 \\ xy - (x-1)(y+3) = 0 \end{cases}$$

(3,6)

$$25. \begin{cases} 4(x-1) - 3(y+3) = 14 \\ 8x - (y+1) = 48 \end{cases}$$

(6,-1)

$$26. \begin{cases} 2(4-x) + 3y = 6(x+5) + 1 \\ 2y - 4 - (4+x)3 = -10 \end{cases}$$

(-4,-3)

$$27. \begin{cases} x - \frac{x-y}{2} = 2 \\ 9x - 4(x+y) = 11 \end{cases}$$

(3,1)

$$29. \begin{cases} \frac{y-5}{3} + \frac{x-7}{2} = 8 \\ \frac{y-5}{2} + \frac{x-7}{3} = 7 \end{cases}$$

(19,11)

$$31. \begin{cases} \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}x = 2 \\ \frac{1}{3}y - \frac{1}{7}x = 3 \end{cases}$$

(21,18)

$$33. \begin{cases} \frac{2x+1}{5} - \frac{3y+2}{7} = 2y - x - 7 \\ \frac{3x-1}{5} + \frac{7y+2}{6} = 2x - y + 6 \end{cases}$$

(2,4)

$$35. \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ 2x - \frac{3}{y} = 9 \end{cases}$$

(3,-1)

$$37. \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{5}{x} - \frac{4}{y} = 3 \end{cases}$$

(3,-3)

$$28. \begin{cases} 2x - \frac{5x+y}{3} = -1\frac{1}{3} \\ 3(x-y) - \frac{3}{2}x = -25\frac{1}{2} \end{cases}$$

(9,13)

$$30. \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{3} - 5 = 0 \\ y - 6 - \frac{x}{4} = 0 \end{cases}$$

(12,9)

$$32. \begin{cases} \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \\ 2x - 7 = 3y + 8 \end{cases}$$

(6,-1)

$$34. \begin{cases} \frac{3x+7y+1}{5} - \frac{2x-3y+8}{3} = 2 \\ \frac{5x-7y+10}{5} - \frac{3x+2y+6}{5} = 2 \end{cases}$$

(13, 2 $\frac{2}{9}$)

$$36. \begin{cases} 5x + \frac{3}{y} = 6 \\ 3x - \frac{5}{y} = 7 \end{cases}$$

(1 $\frac{1}{2}$, -2)

$$38. \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases}$$

(3,5)

23. מערכות של שלוש משוואות עם שלושה משתנים

דוגמאות:

פתור את המערכות הבאות:

$$א. \quad \begin{cases} -3y + 2x - 4z = 1 \\ -5y - 2x + z = 4 \\ 4y + 5x + 2z = 3 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות:}$$

פתרון: נבודד מהמשוואה השנייה את z , בשל היותו נטול מקדם ונקבל: $z = 5y + 2x + 4$.
נציב את z במשוואות הראשונה והשנייה.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -3y + 2x - 4(5y + 2x + 4) = 1 \\ 4y + 5x + 2(5y + 2x + 4) = 3 \end{cases} \\ &\hline &\begin{cases} -23y - 6x = 17 & / \cdot 6 \\ 14y + 9x = -5 & / \cdot 4 \end{cases} \\ &\hline &\begin{cases} -138y - 36x = 102 \\ 56y + 36x = -20 \end{cases} \\ &+ \\ &\hline &-82y = 82 \\ &y = -1 \end{aligned}$$

נציב את $y = -1$ במשוואה: $14y + 9x = -5$ ונקבל $x = 1$.

נציב את $y = -1$ ואת $x = 1$ במשוואה: $z = 5y + 2x + 4$ ונקבל: $z = 1$.

את הפתרון נרשום בעזרת **שלושה מסודרת** (x, y, z) באופן הבא: $(1, -1, 1)$.

$$ב. \quad \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 15 \\ 2y - 4x + 7z = -5 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות:}$$

פתרון: במערכת המשוואות הנ"ל, יותר נוח להשוות מקדמים על מנת שלא לעבוד עם שברים.
ניקח את המשוואות הראשונה והשנייה ונקבל:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 & / \cdot 3 \\ 3x + 4y - 5z = 15 & / \cdot 2 \end{cases} \\ &\hline &\begin{cases} 6x - 9y - 6z = 0 \\ 6x + 8y - 10z = 30 \end{cases} \\ &- \\ &\hline &-17y + 4z = -30 \end{aligned}$$

ניקח את המשוואות השנייה והשלישית ונקבל:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2y - 4x + 7z = -5 & / \cdot 3 \\ 3x + 4y - 5z = 15 & / \cdot 4 \end{cases} \\ &\hline &\begin{cases} -12x + 6y + 21z = -15 \\ 12x + 16y - 20z = 60 \end{cases} \\ &\hline &22y + z = 45 \end{aligned}$$

קיבלנו מערכת חדשה של שתי משוואות בשתי נעלמים נפתור אותה :

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -17y + 4z = -30 \\ 22y + z = 45 \end{cases} / \cdot 4 \\ \hline \begin{cases} -17y + 4z = -30 \\ -88y + 4z = 180 \end{cases} \\ \hline 105y = 210 \\ y = 2 \end{array}$$

נציב את $y = 2$ במשוואה $22y + z = 45$ ונקבל: $z = 1$.

נציב את $y = 2$ ו $z = 1$ במשוואה $2y - 4x + 7z = -5$ ונקבל: $x = 4$.

תשובה סופית: $(4, 2, 1)$.

תרגילים:

1.
$$\begin{cases} 4x - 3y + z = 0 \\ 5x + 2y - 3z = 10 \\ 6x + 4y + z = 9 \end{cases}$$

 $(1, 1, -1)$

2.
$$\begin{cases} 3x + 5y + 5z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ 7x + y - z = -15 \end{cases}$$

 $(-2, 0, 1)$

3.
$$\begin{cases} 5x - y + 4z = 12 \\ x + 5y - 3z = -8 \\ 6x - 2y + z = 16 \end{cases}$$

 $(2, -2, 0)$

4.
$$\begin{cases} 5x + y - 2z = -2 \\ 3x + y = 0 \\ 5y + 4z = -7 \end{cases}$$

 $(1, -3, 2)$

5.
$$\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 4y - 3z = 2 \\ 4z - 3x = 12 \end{cases}$$

 $(4, 5, 6)$

6.
$$\begin{cases} x - y - z = 4 \\ x + y = 15 \\ y + z = 6 \end{cases}$$

 $(10, 5, 1)$

7.
$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 10 \\ 2x - 5y + 8z = 1 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$$

 $(4, 3, 1)$

8.
$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - 4y + z = 1 \\ 4x - 5y + 2z = 3 \end{cases}$$

 פתרונות אינסוף

9.
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 20 \\ x + 4y - 5z = -6 \\ 3x - 3y + 4z = 9 \end{cases}$$

 $(1, 2, 3)$

10.
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 8 \\ 4x - 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

 $(2, 1, -1)$

11.
$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 8 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ 4x - 5y - 5z = 12 \end{cases}$$

 פתרונות אינסוף

12.
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

 פתרון אין

24. המשוואה הריבועית ונוסחת השורשים

משוואה ריבועית – משוואה כזאת היא משוואה ממעלה שנייה והמשתנה x מופיע בה בחזקה שנייה.

משוואה מסודרת - **משוואה ריבועית מהצורה** $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) **נקראת משוואה מסודרת**.

למשוואה ריבועית יכולים להיות שני פתרונות שמסמנים אותם ב- x_1 ו- x_2 והם נקראים גם **שורשי המשוואה הריבועית**.

נוסחת השורשים: פתרונות המשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) הם:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

שיטת העבודה: נביא כל משוואה לצורה מסודרת ע"י העברת אגפים. נציין את מקדמי המשוואה a, b, c ונציב בזהירות רבה בנוסחא (עם הרבה תשומת לב לפלוס ומינוס)!!!!!!

דוגמאות:

פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. פתור את המשוואה: $x^2 - 4x - 5 = 0$. נקבל:

$$\begin{aligned} a=1 \quad b=-4 \quad c=-5 \\ x_{1,2} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{10}{2} = 5, \quad x_2 = \frac{-2}{2} = -1 \\ &\text{פתרונות סופיים: } x_1 = 5 \text{ ו- } x_2 = -1. \end{aligned}$$

ב. פתור את המשוואה: $6x^2 + 14x - 12 = 0$. נצמצם את כל המקדמים ב- 2 ונקבל:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow a=3 \quad b=7 \quad c=-6 \\ x_{1,2} &= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{-7 \pm 11}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} \\ &x_2 = -3 \end{aligned}$$

ג. פתור את המשוואה: $x^2 - 8x + 16 = 0$. נקבל:

$$\begin{aligned} a=1 \quad b=-8 \quad c=16 \\ x_{1,2} &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ &x_1 = x_2 = 4 \end{aligned}$$

במקרה כזה אומרים ששני שורשי המשוואה מתלכדים לשורש אחד.

ד. פתור את המשוואה: $x^2 - 6x + 10 = 0$. נקבל:

$$\begin{aligned} a=1 \quad b=-6 \quad c=10 \\ x_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \end{aligned}$$

אולם הביטוי $\sqrt{-4}$ הוא חסר משמעות כי ל- 4 אין שורש ריבועי. לכן למשוואה הנ"ל אין פתרון. במקרה כזה אומרים שלמשוואה אין שורשים ממשיים.

ה. פתור את המשוואה: $x^2 - 36 = 0$. נקבל: $b = 0$ כי לא מופיע איבר עם x .

דרך א – נעביר את המקדם החופשי -36 לאגף ימין ונקבל את המשוואה $x^2 = 36$

עכשיו נוציא שורש ריבועי משני האגפים, נקבל $x = \pm 6$, כלומר $x_1 = 6$, $x_2 = -6$.

דרך ב – נפתור בעזרת נוסחת השורשים:

$$a = 1 \quad b = 0 \quad c = -36$$

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{\pm 12}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 6 \\ x_2 = -6 \end{matrix}$$

דרך ג – ניעזר בפירוק עפ"י הנוסחה להפרש ריבועים ונקבל: $x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6) = 0$

כאשר מכפלה של כמה מספרים שווה לאפס אז לפחות אחד מהם שווה לאפס ולכן: $x_1 = 6$, $x_2 = -6$.

ו. פתור את המשוואה: $x^2 - 5x = 0$. נקבל: במשוואה זו $c = 0$ כי לא מופיע המקדם החופשי.

דרך א – נפתור את המשוואה ע"י שנוציא את x כגורם משותף באגף שמאל. נקבל $x \cdot (x - 5) = 0$. כאשר

מכפלה של כמה מספרים שווה לאפס אז לפחות אחד מהם שווה לאפס ולכן: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$.

דרך ב – נפתור בעזרת נוסחת השורשים:

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{5 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

ז. פתור את המשוואה: $5(x^2 + 1) = (x + 3)^2 - (x + 2)(x - 2)$.

נפתח סוגריים, נעביר את כל הביטויים לאגף שמאל ונשאיר 0 בצד ימין. נקבל:

$$5x^2 + 5 = x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 4)$$

$$5x^2 + 5 = x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4$$

$$5x^2 + 5 = 6x + 13$$

$$5x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow a = 5 \quad b = -6 \quad c = -8$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 5 \cdot (-8)}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{6 \pm 14}{10} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{4}{5} \end{matrix}$$

ח. פתור את המשוואה: $\frac{3}{x^2 - 4x} - \frac{x+1}{2x-8} = \frac{-1}{x-4}$.

נפרק לגורמים את המכנים ונקבל: $x-4$, $2(x-4)$, $x(x-4)$ לכן המכנה המשותף המינימלי יהיה

$2x(x-4)$. נכפול את כל המשוואה פי המכנה הנ"ל ונקבל:

$$\cancel{2}^2 \cdot \frac{3}{x(x-4)} - \cancel{2}^2 \cdot \frac{x+1}{2(x-4)} = \cancel{2}^2 \cdot \frac{-1}{x-4} / \cdot 2x(x-4)$$

$$6 - x(x+1) = -2x$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow a = 1 \quad b = -1 \quad c = -6$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$$

ט. פתור את המשוואה: $\frac{3x}{x^2-10x+25} = \frac{2}{x^2-25}$

נפרק לגורמים את המכנים ונקבל: $(x+5)(x-5)$, $(x-5)^2$ לכן המכנה המשותף המינימלי יהיה $(x-5)^2(x+5)$. נכפול פי המכנה הנ"ל ונקבל:

$$\frac{x+5}{(x-5)^2} \cdot \frac{3x}{(x-5)^2} = \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} \cdot \frac{2}{(x+5)(x-5)} \cdot (x-5)^2(x+5)$$

$$3x(x+5) = 2(x-5) \Rightarrow 3x^2 + 13x + 10 = 0 \Rightarrow a = 3 \quad b = 13 \quad c = 10$$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 3 \cdot 10}}{6} = \frac{-13 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-13 \pm 7}{6} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= -3\frac{1}{3} \end{aligned}$$

תרגילים:

1. $x^2 + 8x = 0$
2. $x^2 - 7x = 0$
3. $5x^2 - 30x = 0$
4. $3x^2 - 4x = x^2 + 10x$
5. $6x^2 + x = 9x^2 + 4x$
6. $x^2 + x = 2x - x^2$
7. $2x^2 + 3x = 8x$
8. $7x^2 + 5x = x^2 + x$
9. $4x^2 - 5x = 2x + x^2$
10. $x^2 - 64 = 0$
11. $x^2 = 36$
12. $3x^2 - 27 = 0$
13. $5x^2 - 245 = 0$
14. $x^2 + 1 = 0$
15. $4x^2 + 3 = x^2 + 78$
16. $6x^2 - 7 = 4x^2 + 25$
17. $5x^2 - 2 = x^2 - 146$
18. $3x^2 + 5 = 2x^2 + 6$
19. $x^2 + 22x + 121 = 0$
20. $x^2 + 26x + 169 = 0$
21. $3x^2 - 16x + 5 = 0$
22. $2x^2 - 5x + 2 = 0$
23. $6x^2 - x - 7 = 0$
24. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
25. $5x^2 - 19x + 12 = 0$
26. $3x^2 + 2x - 16 = 0$
27. $2x^2 - 9x + 10 = 0$
28. $2x^2 + 13x + 18 = 0$
29. $9x^2 - 24x + 16 = 0$
30. $(x+5)(x-5) = 24$
31. $x(x+1) + x(x+2) + x(x+3) + 3 = 0$
32. $(x+1)^2 + (x-3)^2 = 16$
33. $(x+1)(2x+3) = 4x^2 - 22$
34. $2(x-3) = 3(x+2)(x-3)$
35. $(x-1)^2 + (x+1)^2 = (x+3)^2$
36. $2(x-1)^2 - 3(x+3)(2-x) = 2$
37. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{5x-4}{x}$
38. $\frac{3x-8}{x-2} = \frac{5x-2}{x+5}$
39. $\frac{x+3}{2x-7} - \frac{2x-1}{x-3} = 0$
40. $2x + \frac{5}{x-2} = \frac{6x-7}{x-2}$
41. $3x + \frac{5}{x-2} = \frac{6x-7}{x-2}$
42. $\frac{2x^2-5x-2}{x^2-3x+1} = 8$
43. $\frac{5}{5-x} + \frac{8}{8-x} = 3$
44. $\frac{x}{x-5} = \frac{x-5}{x} - \frac{15}{4}$
45. $\frac{5x-3}{2x+1} - \frac{x-11}{x+4} = 12$
46. $\frac{x+7}{3x-5} - \frac{x+3}{2x+2} + 5 = 0$

$$47. \frac{x^2}{x^2-25} - 4 = \frac{x-2}{5-x}$$

$$48. \frac{x^2+2}{x^2-4} = \frac{2x-8}{x+2} - \frac{x-3}{4-2x}$$

$$49. \frac{1}{x^2-14x+49} + \frac{x-4}{x^2-7x} = \frac{3}{2x-14}$$

$$50. \frac{1}{x^2+6x+9} - \frac{2}{x^2-6x+9} = \frac{1}{x^2-9}$$

$$51. \frac{3}{x^2+15x+54} + \frac{10}{x^2+2x-24} = \frac{x+3}{x^2+5x-36}$$

$$52. \frac{1}{x^2+4x-21} - \frac{1}{x^2+2x-15} = \frac{x}{x^2+12x+35}$$

תשובות:

$$1. 0, -8$$

$$2. 0, 7$$

$$3. 0, 6$$

$$4. 0, 7$$

$$5. 0, -1$$

$$6. 0, \frac{1}{2}$$

$$7. 0, 2\frac{1}{2}$$

$$8. 0, -\frac{2}{3}$$

$$9. 0, 2\frac{1}{3}$$

$$10. \pm 8$$

$$11. \pm 6$$

$$12. \pm 3$$

$$13. \pm 7$$

$$14. \text{ אין פתרון }$$

$$15. \pm 5$$

$$16. \pm 4$$

$$17. \text{ אין פתרון }$$

$$18. \pm 1$$

$$19. -11$$

$$20. -13$$

$$21. \frac{1}{3}, 5$$

$$22. \frac{1}{2}, 2$$

$$23. 1\frac{1}{6}, -1$$

$$24. 1\frac{1}{2}$$

$$25. 3, \frac{4}{5}$$

$$26. 2, -2\frac{2}{3}$$

$$27. 2, 2\frac{1}{2}$$

$$28. -2, -4\frac{1}{2}$$

$$29. 1\frac{1}{3}$$

$$30. \pm 7$$

$$31. -1$$

$$32. 3, -1$$

$$33. 5, -2\frac{1}{2}$$

$$34. 3, -1\frac{1}{3}$$

$$35. 7, -1$$

$$36. 2, -1\frac{4}{5}$$

$$37. \frac{1}{2}, 2$$

$$38. 4, 5\frac{1}{2}$$

$$39. 4, 1\frac{1}{3}$$

$$40. 3$$

$$41. \text{ אין פתרון }$$

$$42. 2\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$$

$$43. 2, 6\frac{2}{3}$$

$$44. 4, -1\frac{2}{3}$$

$$45. -1, -2\frac{1}{3}$$

$$46. 1, -\frac{21}{29}$$

$$47. 7\frac{1}{2}, -6$$

$$48. 1, 7\frac{1}{3}$$

$$49. 8, -7$$

$$50. 0, -9$$

$$51. 10$$

$$52. 2, 1$$

25. מערכות של שתי משוואות ממעלה שנייה עם שני משתנים

מדובר במערכת של שתי משוואות שבהן x ו- y משמשים כנעלמים. המערכת מכילה מעריכים ממעלה שניה ואף יותר. בד"כ נפתור את המערכות האלה בשיטת ההצבה, ונשאף תמיד לבצע בידוד נעלם נח ככל האפשר כדי למנוע סיבוכים מיוחדים במהלך ההצבה. בהחלט יתכן שנצטרך להיות יצירתיים בפיתרון מערכות כאלה.....

דוגמאות:

פתור את המערכות הבאות:

א. פתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$$

נבודד מהמשוואה השנייה כי שם יותר נח ונקבל: $y = 10 - 3x$.

$$x^2 + (10 - 3x)^2 = 20$$

$$x^2 + 100 - 60x + 9x^2 = 20$$

נציב במשוואה השנייה ונקבל:

$$10x^2 - 60x + 80 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$$

נציב את $x_1 = 2$ במשוואה $y = 10 - 3x$ ונקבל: $y_1 = 10 - 3 \cdot 2 = 10 - 6 = 4$

נציב את $x_2 = 4$ במשוואה $y = 10 - 3x$ ונקבל: $y_2 = 10 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$

פתרונות סופיים: $(2, 4)$, $(4, -2)$

ב. פתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ xy = 12 \end{cases}$$

נבודד מהמשוואה הראשונה כי שם יותר נח ונקבל: $x = 2y - 2$.

$$(2y - 2)y = 12$$

נציב במשוואה השנייה ונקבל:

$$2y^2 - 2y - 12 = 0$$

$$y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y_1 = 3, y_2 = -2$$

נציב את $y_1 = 3$ במשוואה $x = 2y - 2$ ונקבל: $x_1 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$

נציב את $y_2 = -2$ במשוואה $x = 2y - 2$ ונקבל: $x_2 = 2 \cdot (-2) - 2 = -6$

פתרונות סופיים: $(4, 3)$, $(-6, -2)$

ג. פתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x^2 - y^2 - 3x = -3 \end{cases}$$
 . נבודד מהמשוואה הראשונה ונקבל $y = \frac{3x-5}{2}$.

$$x^2 - \left(\frac{3x-5}{2}\right)^2 - 3x = -3$$

נציב במשוואה השנייה ונקבל: $4 \cdot x^2 - \frac{9x^2 - 30x + 25}{4} - 3x = -3$ / $4 \cdot 3x = 4 \cdot -3$

$$4x^2 - 9x^2 + 30x - 25 - 12x = -12$$

$$5x^2 - 18x + 13 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.6$$

נציב את $x_1 = 3$ במשוואה $y = \frac{3x-5}{2}$ ונקבל: $y_1 = -1$

נציב את $x_2 = 2$ במשוואה $y = \frac{3x-5}{2}$ ונקבל: $y_2 = 1.4$

פתרונות סופיים: $(1, -1)$, $(2.6, 1.4)$

ד. פתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \end{cases}$$
 . להבדיל מהמערכת הקודמת כאן חילוץ של x^2

או y^2 לא יעזור. יש בעיה..... צריך להיות יצירתיים..... נתחיל בפתיחת סוגריים ונפתח את העניים (פתחתם אותם?)... נקבל:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 25 \end{cases} \\ \hline - \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20 \end{cases} \end{array}$$

אם נחסיר את המשוואות נקבל: $2x - 4y = -10$ ומכאן קל לבודד את x ולכן $x = 2y - 5$.
נציב עכשיו במשוואה הראשית הראשונה ונקבל:

$$(2y - 5)^2 + y^2 = 10$$

$$4y^2 - 20y + 25 + y^2 = 10$$

$$5y^2 - 20y + 15 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 3$$

נציב את $y_1 = 1$ במשוואה $x = 2y - 5$ ונקבל: $x_1 = -3$

נציב את $y_2 = 3$ במשוואה $x = 2y - 5$ ונקבל: $x_2 = 1$

פתרונות סופיים: $(-3, 1), (1, 3)$

תרגילים:

$$1. \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 = 40 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - 3y^2 = 13 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y = 4 \\ 3y = 28 - x^2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} xy = 48 \\ 2x + 4y = 40 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} xy = 28 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x^2 + xy = 2 \\ y - 3x = 7 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} xy = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x - y = 4 \\ xy = 140 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x^2 - 3xy + 7y^2 = 149 \\ y - x = 3 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x^2 - 2y^2 - 1 = 0 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 76 \\ 3y - x = -22 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 3x^2 - 5xy - 2y^2 = 0 \\ 5x - 6y = 4 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x^2 - 3xy = 0 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

תשובות:

$$1. (6, 2), (-6, -2)$$

$$2. (4, 1), (5, 2)$$

$$3. (5, 1), (-8, -12)$$

$$4. (12, 4), (8, 6)$$

$$5. (7, 4), (4, 7)$$

$$6. \left(\frac{1}{4}, 7\frac{3}{4}\right), (-2, 1)$$

$$7. (2, 4), (4, 2)$$

$$8. (4, 2), (-2, -4)$$

$$9. (14, 10), (-10, -14)$$

$$10. (2, 5), \left(-\frac{43}{5}, -\frac{28}{5}\right)$$

$$11. (3, 2), \left(\frac{33}{17}, -\frac{20}{17}\right)$$

$$12. (4, -6), \left(-\frac{50}{7}, -\frac{68}{7}\right)$$

$$13. (2, 1), \left(\frac{4}{23}, -\frac{12}{23}\right)$$

$$14. \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right)$$

$$15. \left(0, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

26. שינוי נושא הנוסחה

1. נתונה נוסחה לשטח טרפז: $S = (a+b) \cdot \frac{H}{2}$.

א. בטא את H באמצעות a , b ו- S .

ב. נתון: $S = 20$ סמ"ר, $b = 7.5$ סמ"מ, $a = 2.5$ סמ"מ.

חשב את H .

פתרון:

א. $H = \frac{2S}{a+b}$, ב. 4 ס"מ

2. נתונה הנוסחה: $V = \frac{2F-3P}{4}$.

א. בטא את F באמצעות P ו- V .

ב. בטא את P באמצעות F ו- V .

ג. נתון: $P = 3$, $V = -1$. חשב את F .

ד. נתון: $F = 0.25$, $V = 0.5$. חשב את P .

פתרון:

א. $F = \frac{4V+3P}{2}$, ב. $P = \frac{2F-4V}{3}$, ג. $F = 2.5$, ד. $P = -0.5$

3. נוסחה לשטח פני כדור היא: $P = 4\pi R^2$.

א. נתון: $P = 100\pi$ סמ"ר. חשב את R .

ב. בטא את רדיוס הכדור R באמצעות P .

פתרון:

א. $R = 5$ סמ"מ, ב. $R = \sqrt{\frac{P}{4\pi}}$

4. נוסחת נפח חרוט היא: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 H$.

א. בטא את הגובה H של החרוט בנושא הנוסחה (כלומר, בטא את H באמצעות V ו- R).

ב. בטא את R בנושא הנוסחה.

ג. נתון: $V = 800\pi$ סמ"ק, $H = 6$ סמ"מ.

חשב את R .

פתרון:

א. $H = \frac{3V}{\pi R^2}$, ב. $R = \sqrt{\frac{3V}{\pi H}}$, ג. $R = 20$ סמ"מ

$$5. \text{ נתונה הנוסחה: } V = \frac{S_2 - S_1}{t}$$

א. בטא את S_1 באמצעות V, t, S_2 .

ב. הצב $t = 5$, $S_2 = 100$, $V = 16$, וחשב את S_1 .

פתרון:

$$א. S_1 = S_2 - Vt, \quad ב. S_1 = 20$$

6. לפניך נוסחה למציאת הטמפרטורה במעלות פרנהייט, F , כאשר הטמפרטורה

$$\text{נתונה במעלות צלזיוס, } C: F = \frac{9}{5}C + 32^\circ$$

א. נקודת הרתיחה של מים היא 100 מעלות צלזיוס.

מצא את נקודת הרתיחה של מים במעלות פרנהייט.

ב. מצא את הטמפרטורה שבה $F = C$.

ג. רשום נוסחה לחישוב טמפרטורה במעלות צלזיוס, כאשר הטמפרטורה

נתונה במעלות פרנהייט.

פתרון:

$$א. F = 212, \quad ב. F = C = -40, \quad ג. C = \frac{5F - 160}{9}$$

7. מחיר מוצר, כולל מע"מ, הוא M שקלים. נוסחה לחישוב מחיר המוצר N (בשקלים)

$$\text{בלי מע"מ היא: } N = \frac{100M}{117}$$

א. רשום נוסחה לחישוב המחיר M הכולל מע"מ, כאשר נתון המחיר N בלי מע"מ.

ב. רשום נוסחה לחישוב תוספת המע"מ בשקלים, T , כאשר נתון המחיר N .

פתרון:

$$א. M = \frac{117N}{100}, \quad ב. T = \frac{17N}{100}$$

8. נוסחה להיקף מעגל שקוטרו D היא: $L = \pi D$.

א. מצא את אורך הקשת של חצי מעגל, אם קוטר המעגל הוא 30 ס"מ.

ב. רשום נוסחה לאורך הקשת ℓ של חצי מעגל שקוטרו D .

ג. רשום נוסחה לחישוב הקוטר D , אם אורך הקשת של חצי המעגל הוא ℓ .

פתרון:

$$א. 15\pi \text{ ס"מ}, \quad ב. \ell = \frac{\pi D}{2}, \quad ג. D = \frac{2\ell}{\pi}$$

9. נוסחה לחישוב רדיוס העיגול היא: $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$, כאשר S הוא שטח העיגול.

רשום את הנוסחה לחישוב השטח S של עיגול שרדיוסו R .
פתרון:

$$S = \pi R^2$$

10. נוסחה לשטח עיגול היא: $S = \frac{\pi D^2}{4}$, כאשר D הוא קוטר העיגול. בטא את D באמצעות S .

פתרון:

$$D = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

11. נוסחה לשטח פנים של גליל, שרדיוסו R וגובהו H , היא: $P = 2\pi R \cdot H + 2\pi R^2$.

א. בטא את גובה הגליל באמצעות P , אם נתון כי $R = 5$ ס"מ.

ב. חשב את גובה הגליל, אם נתון גם כי $P = 471$ סמ"ר.

בחישוביך השתמש ב- $\pi = 3.14$.

פתרון:

$$H = \frac{P - 50\pi}{10\pi} \quad \text{א.}$$

$$H = 10 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.}$$

12. נוסחה לשטח מעטפת של תיבה היא: $M = 2c(a+b)$, כאשר a, b הם ממדי בסיס התיבה

ו- c הוא גובה התיבה.

א. בטא את c בנושא הנוסחה.

ב. חשב את c , אם נתון: $a = 5$ ס"מ, $b = 6$ ס"מ, $M = 32$ סמ"ר.

ג. רשום נוסחה לשטח מעטפת M של קובייה שצלעה a .

ד. רשום נוסחה לשטח מעטפת M של תיבה שבסיסה ריבוע,

כאשר a הוא אורך צלע הבסיס ו- b הוא גובה התיבה.

פתרון:

$$\text{א. } c = \frac{M}{2(a+b)} \quad \text{ב. } c = \frac{16}{11} \text{ ס"מ} \quad \text{ג. } M = 4a^2 \quad \text{ד. } M = 4ab$$

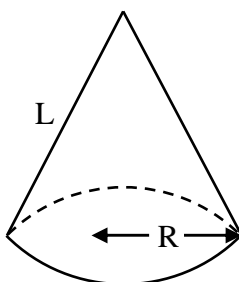
13. נוסחה לשטח פנים של חרוט (ראה ציור) היא: $P = \pi R^2 + \pi RL$.

א. בטא את L באמצעות P , אם נתון כי $R = 3$ ס"מ.

ב. חשב את L , אם נתון כי $P = 24\pi$ סמ"ר.

פתרון:

$$\text{א. } L = \frac{P - 9\pi}{3\pi} \quad \text{ב. } L = 5 \text{ ס"מ}$$



14. שטח מרובע, שהאלכסונים שלו מאונכים זה לזה, הוא מחצית מכפלת אורכי האלכסונים: $S = \frac{1}{2}ef$.

א. נתון מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה. שטח המרובע הוא $S =$ סמ"ר 100.

אורך אחד האלכסונים הוא $f =$ ס"מ 10.

מצא את אורך האלכסון e .

ב. רשום נוסחה לחישוב אורך האלכסון f , כאשר שטח המרובע הוא S ואורך

האלכסון השני הוא e (האלכסונים מאונכים זה לזה).

ג. מצא נוסחה לחישוב שטח של ריבוע שאורך האלכסון שלו הוא d .

פתרון:

א. $e =$ ס"מ 20

ב. $f = \frac{2S}{e}$

ג. $S = \frac{1}{2}d^2$