GUIDA ESERCIZI

LISTA ESERCIZI

1. Un dato vettore può essere una base ammissibile?
2. Può esistere una soluzione di base ammissibile con x_2 e x_3 in base
3. Può esistere un vertice della regione ammissibile del problema con x_1 e x_2 strettamente positivi?
4. Può esistere una soluzione ottima con x_3 in base?
5. Può esistere una soluzione ottima con x_1 e x_2 strettamente positivi?
6. Simplesso
7. Simplesso a 2 fasi
8. simplesso primale-duale a partire da una soluzione duale y
9. Verificare se le soluzioni del vettore dato sono ottime

---

1. Un dato vettore può essere una base ammissibile?

ESERCIZIO 1. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$$

1.1 Rispondere alla seguenti domande senza risolvere direttamente

a) $\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **può essere una soluzione di base ammissibile?**

1. Prendo i ***vincoli ORIGINALI*** e sostituisco il ***vettore***
   - se i vincoli sono corretti → proseguo oltre
   - se i vincoli NON sono corretti → non può essere SBA → fine
2. Faccio ***forma standard***
   - aggiungo slack/surplus
3. Sostituisco il vettore alla forma standard
   - trovo quanto valgono gli slack/surplus

4. Scrivo vettore finale
    - Vedo quanti vincoli avevo ORIGINARIAMENTE (`n`)
    - DEVO avere esattamente `n` variabili $\neq$ 0 nel vettore
        - le ho? è SBA
        - non le ho? non è SBA

2. Può esistere una soluzione di base ammissibile con x_2 e x_3 in base

ESERCIZIO 1. **Dato il seguente problema di programmazione lineare:**

$$\max -4x_1 + 3x_2 - x_3$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 10$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0$$

1.1 Rispondere alla seguenti domande senza risolvere direttamente

a) Quali di questi vettori $x_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_4 = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **sono soluzioni di base ammissibili?**

b) Può esistere una soluzione di base ammissibile con x_2 **e** x_3 **in base?**

1. Faccio forma standard
2. Metto x_2 e x_3 in base
    - ossia, pongo TUTTO tranne, x_2 e x_3, uguale a 0 (e quindi cancello le variabili che non sono x_2 e x_3 dai vincoli)
3. Scrivo il sistema con i nuovi vincoli
4. Trovo il valore di x_2 e x_3
    - rispettano il dominio del problema originale → Esiste soluzione ottima
    - non rispettano il dominio → non esiste soluzione ammissibile

3. Può esistere un vertice della regione ammissibile del problema con x_1 e x_2 strettamente positivi?

ESERCIZIO 1. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

28 - 05-

$$\min 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$3x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 8$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \le 0$$

1.1 Rispondere alla seguenti domande senza risolvere direttamente

b) Può esistere un vertice della regione ammissibile del problema con x_1 e x_2 strettamente positivi?

1. Parto dalla ***forma standard*** (=)
2. Pongo <u>TUTTE</u> le variabili diverse da x_1 e x_2 UGUALI A 0
3. Risolvo il sistema ottenuto e trovo x_1 e x_2
    - x_1 e x_2 sono > 0?
        - **si → esiste il vertice**
        - no → non esiste il vertice

4. Può esistere una soluzione ottima con x_3 in base

ESERCIZIO 1. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

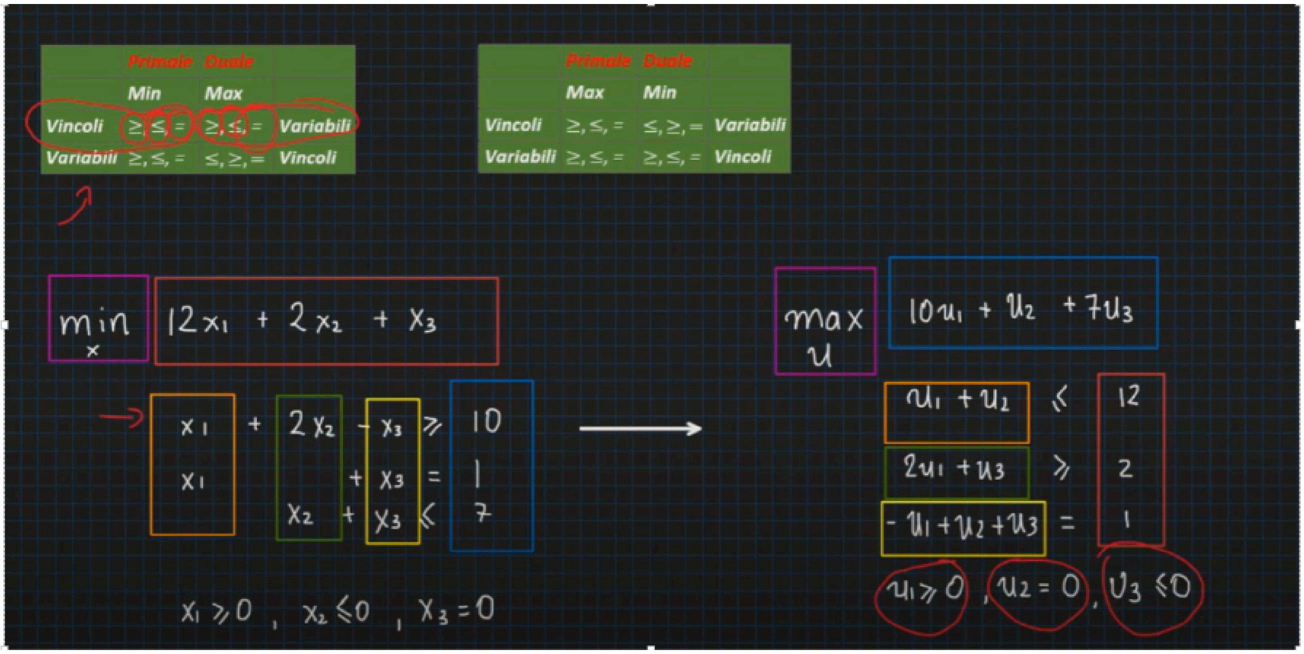
28 - 05-

$$\min 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$3x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 8$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \le 0$$

1.1 Rispondere alla seguenti domande senza risolvere direttamente

b) Può esistere un vertice della regione ammissibile del problema con x_1 e x_2 strettamente positivi?

1. Faccio il duale DIRETTAMENTE DAI VINCOLI ORIGINALI



2. Seleziono la riga che nel duale corrisponde a x_3 (quindi la terza riga)
3. vedo quanto vale u_i (che io chiamerò y_i)
   - rispetta il dominio? (quello cerchiato in rosso)
     - **si → esiste soluzione ottima**
     - no → non esiste soluzione ottima

ATTENZIONE, potrei avere un vincolo con più di una y_i, tipo riga 1.

In questo caso io devo applicare la complementarietà tra primale e duale, trovandomi i valori delle varie y_i e poi eseguire il punto 3).
Questa roba della complementarietà la vedi nell'esercizio 8.

5. Può esistere una soluzione ottima con x_1 e x_2 strettamente positivi?

ESERCIZIO 1. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

28_05-

$$\min 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$$

1.1 Rispondere alla seguenti domande senza risolvere direttamente

b) Può esistere un vertice della regione ammissibile del problema con x_1 e x_2 strettamente positivi?

1. Faccio il duale della formula ORIGINALE
2. Pongo i vincoli di x_1 e $x_2 > 0$, il resto $= 0$ (in pratica cancello tutti i vincoli tranne quelli di x_1 e x_2)
3. Trovo i valori di delle varie y
   - rispettano i vincoli delle variabili → Esiste soluzione ottima
   - non rispettano i vincoli delle variabili → Non esiste soluzione ottima

6. Simplesso

1. Forma standard
2. Metto tutto nel tableaux

Forma standard

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -4x_1 - x_2 - 5x_3 \\
& -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
& 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\
& x_1 + x_3 + x_6 = 1 \\
& x_1, \dots, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Tableaux

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	0	-4	-1	-5	0	0	0
x_4	1	-1	1	0	1	0	0
x_5	2	0	2	-1	0	1	0
x_6	1	1	0	1	0	0	1

- prendo il γ_i di z più piccolo tra quelli < 0
- Trovo il pivot (come nel tableaux del primale-duale)
- Divido tutta la riga scelta per il pivot

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	0	-4	-1	-5	0	0	0
x_4	1	-1	1	0	1	0	0
x_5	2	0	2	-1	0	1	0
x_6	1	1	0	1	0	0	1

- Cancello tutte le righe tranne
  - quella scelta
  - le righe che hanno nella colonna del pivot valore $= 0$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z							
x_4	1	-1	1	0	1	0	0
x_5							
x_6	1	1	0	1	0	0	1

- Per riscrivere le righe cancellate
  - parto dalla riga che voglio riscrivere
  - se voglio scrivere la `b` allora
    - prendo la `b` della riga in verde
    - la moltiplico per il valore (cambiato di segno) che si trova nella colonna verde e nella riga che voglio scrivere NEL TABLEAUX PRECEDENTE(es. riga `z`, prendo il suo valore originale di x_3 $(-(-5))$)
    - sommo questo valore con la casella del vecchio tableaux
    - sostituisco questo valore nella corrispettiva casella nel tableaux nuovo

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	0	-4	-1	-5	0	0	0
x_4	1	-1	1	0	1	0	0
x_5	2	0	2	-1	0	1	0
x_6	1	1	0	1	0	0	1

$$b_z = 1 \cdot (-(-5)) + 0 = 5$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	5	1	-1	0	0	0	5
x_4	1	-1	1	0	1	0	0
x_5	3	1	2	0	0	1	1
x_3	1	1	0	1	0	0	1

3. Finito il tableaux controllo se TUTTI i γ_i di `z` sono ≥ 0
   - si → fine simplesso e scrivo B_{ot}

- no → rifaccio di nuovo il tableaux PARTENDO DALL'ULTIMO TABLEAUX OTTENUTO

7. Simplesso a due fasi

> **Lo fai se devi sottrarre un *surplus* oppure se hai una base *con più volte la stessa variabile*.**

1. Forma standard
    - Trovo che la base non è ammissibile
2. FASE 1
    - riscrivo la forma standard aggiungendo `n` variabili artificiali quante sono le variabili in base "sbagliate"
        - la funzione obiettivo sarà il ***min*** delle variabili artificiali con il - davanti e sommate tra loro
        - aggiungo le variabili artificiali ai vincoli, sommate
    - scrivo il tableaux con le variabili artificiali
    - azzero le variabili artificiali
    - faccio simplesso
    - se arrivo ad avere che `z = 0` → FASE 2
3. FASE 2
    - riscrivo l'ultimo tableaux ottenuto, togliendo le colonne delle variabili artificiali
    - se $\gamma < 0$ → faccio simplesso
    - se $\gamma \geq 0$ → fine → scrivo B_{ot}

8. Eseguire primale-duale

1. Scrivo il ***primale*** (forma standard)
    - ricorda di volerla portare sempre a ***min***
        - se la formula originale è ***max*** → scrivi ***min*** e cambia <u>TUTTI</u> **i segni della funzione obiettivo**
2. Scrivo il ***duale*** del primale (vedi foto sopra)
3. Verifica ammissibilità duale
4. ITERAZIONE
    1. Scrivo le equazioni delle variabili
        - prendo i vincoli del duale
        - sposto il termine noto
        - pongo tutto $= 0$
        - metto il vincolo in una parantesi e moltiplico la variabile corrispondente

2. Sostituisco il vettore dato dal prof
    - Se dentro la parentesi ho un valore $\neq 0 \rightarrow x_i = 0$
    - Se dentro la parentesi ho un valore $= 0 \rightarrow$ non so quanto vale
3. Faccio il ***primale ristretto***
    - parto dal primale
    - cancello tutte le variabili che prima ho trovato essere $= 0$
    - aggiungo tanti a_i quante sono le variabili con le parentesi $(= 0)$
4. Faccio il tableaux
    - scrivo l'equazione di `z`
    - scrivo l'equazione delle `a`
    - azzero le `a` sulla riga di `z` (sottraggo le righe)
    - controllo se ho qualche variabile sulla riga di `z` che è ≤ 0
        - se ce l'ho $\rightarrow$ la porto in base
            - eseguo $min\{\frac{\beta_i}{\alpha_{i-entrante}} : \alpha_{i-entrante} > 0\}$ e trovo il pivot
            - divido tutta la riga per il pivot
            - scrivo la variabile in base
            - sottraggo la riga di `z` per la riga dove ho diviso α_i
    - controllo quanto vale il valore di `z`
        - se $z^* = 0 \rightarrow$ la base è ottima $\rightarrow$ fine
        - se $z^* \leq 0 \rightarrow$ faccio il duale ristretto
5. Faccio il duale del primale
    - identico al duale ma le variabili che aggiungo sono π_i
    - prendo in considerazione le righe delle variabili che ho in base nell'ultimo tableaux
    - i valori che ho dopo il $\leq$ corrispondono alle mie π
6. Calcolo $y^{(1)} = y^{(0)} + \Theta \cdot \pi$
7. Trovo il valore di Θ
8. Sostituisco Θ nel duale
9. Faccio il grafico
    - Se ho tutti i vincoli $\leq$ (oppure $\geq$), e quindi il grafico va tutto a sx (o tutto a dx) $\rightarrow$ non ho soluzioni e il problema si dice illimitato $\rightarrow$ fine
    - Se ho anche un solo vincolo diverso dagli altri $\rightarrow$ scelgo il valora più piccolo MA NON POSSO PRENDERE I NEGATIVI
10. Cambio base
11. RIINIZIO L'ITERAZIONE

9. Verificare se le soluzioni del vettore dato sono ottime (applica complementarietà tra primale e duale)

1. Applico vettore ai vincoli ORIGINALI
    - i vincoli sono corretti? È ammissibile → continuo
    - i vincono NON sono corretti? Non è ammissibile → stop
2. Scrivo il duale partendo dai vincoli ORIGINALI
3. Creo due sistemi
    1. Sistema per le y, dove metto dentro le parentesi i vincoli originali con il termine noto spostato e pongo tutto uguale a 0
        - esempio

$$y_1(-x_1 + x_2 + 1) = 0$$

        - ATTENZIONE: se un vincolo originale era un'uguaglianza $(=)$ non lo devi inserire nel sistema
    2. Sistema per le x, dove faccio la stessa cosa del sistema di prima solo prendendo i vincoli del duale
        - ATTENZIONE: se un vincolo nel duale era un'uguaglianza lo riscrivo così com'è nel sistema
4. Mi trovo i vari valori delle y
    - se ho $y(0) = 0$ → si dice ***satura***
    - se ho $y(\text{valore} \neq 0)$ = 0 → allora $y = 0$ e posso usarla nel secondo sistema
5. Una volta trovati tutti i valori delle y vedo se rispettano il dominio dei vincoli
    - Li rispettano → verifico per dualità forte
    - Non li rispettano → la soluzione non è ottima
6. Dualità forte
    - sostituisco i valori delle x nella funzione obiettivo originale
    - sostituisco i valori delle y nella funzione obiettivo del duale
        - sono uguali → è ottima
        - non sono uguali → non è ottima