

## Capitolo 1.4

domenica 24 dicembre 2023 13:14

## Home

# Logica del primo ordine

A differenza della logica proposizionale abbiamo più dettagli, come  $P$  e  $Q$  e  $x$  e  $y$  sono individuali del dominio

$P$  e  $Q$  assumono delle proprietà che hanno  $x$  e  $y$

ESEMPIO:

Dominio: persone

$P$ =sono femmine

$Q$ = sono omini

$P(x)$ =  $x$  sono femmine

$Q(x)$ = $x$  sono omini

Abbiamo la stessa roba della logica proposizionale ma abbiamo anche

$\exists$

Applicando le formule otterremo le costanti cioè elementi che indicano del dominio

Esempio:

$\exists x P(x)=P(a)$

**TERMINE:**

Un termine rappresenta un individuale(variabile) o un

**FORMULE BEN FORMATE:**

Una f.b.f lo è se abbiamo una lettera predicativa con n termini, che regole:

1. F è una f.b.f se la sua negazione viene una f.b.f
2. Se F e G sono f.b.f allora anche i connettivi tra loro sono f.b.f, tipo
3. Se F è una f.b.f allora anche  $\forall x F$  e  $\exists x F$  sono f.b.f

## INTERPRETAZIONI:

Per dare una corretta interpretazione bisogna rispettare questi 4 pu

- Un insieme non vuoto D che chiamiamo dominio;
- Una proprietà o una relazione per ogni lettera predicativa P in F ;
- Una funzione per ogni lettera funzionale f in F ;
- Un elemento del dominio per ogni costante a in F.

## ESEMPI:

$$\forall x \exists y P(f(x, a), y)$$

DOMINIO:NATURALI

$P(x, y) = "x \text{ è uguale a } y"$

$F(x, y) = x \text{ elevato alla } y ; a=2$

E si legge per ogni x esiste una x elevata a uguale alla y

## VARIABILI LIBERE E VINCOLATE:

Se la variabile sta in un quantificatore è Vincolata

Se non ci sta è libera

È chiusa se ci sono tutte le variabili vincolate

## FORMULE VALIDE VS TAUTOLOGIE:

Una formula f è valida se è vera per ogni sua interpretazione(tableau

È tautologia se sostituendo con la logica proposizionale deve uscire :

tazione. Nella logica del primo ordine si chiamano *tautologie* le formule che di tautologie della logica proposizionale. Per esempio, la formula

$$\forall x P(x) \rightarrow (\exists x Q(x) \rightarrow \forall x P(x))$$

Si ottiene dalla formula  $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$  sostituendo  $\forall x P(x)$  a  $X$  e formule (7) pertanto è una tautologia mentre, per esempio la (3), pur essendo una tautologia.

Si noti che una tautologia è vera in ogni interpretazione *indipendentemente* dal significato che hanno i quantificatori, mentre una formula valida che non è una tautologia è vera in ogni interpretazione *per* il significato che hanno i quantificatori.

## Interdipendenza dei quantificatori:

I due quantificatori  $\forall$  e  $\exists$  non sono indipendenti, nel senso che non si può “definire” uno in funzione dell’altro. Per esempio, la formula  $\neg \exists x P(x)$  è equivalente alla formula  $\forall x \neg P(x)$ . Infatti, data una interpretazione, la prima sta dicendo che “non esiste elemento del dominio per cui vale la proprietà  $P$ ”, la seconda sta dicendo che “per ogni elemento del dominio non vale la proprietà  $P$ ”.

## TABLEAUX LOGICA DEL PRIMO ORDINE

Sono come i tableaux a [capitolo 1.2](#)

Ci sono le formule universali e esistenziali.

UNIVERSALI:

$\gamma$	$\gamma(a)$
$\forall x P(x)$	$P(a)$
$\neg \exists x P(x)$	$\neg P(a)$

ESISTENZIALI:

$\delta$	$\delta(a)$
$\exists x P(x)$	$P(a)$
$\neg \forall x P(x)$	$\neg P(a)$

# ORA PASSIAMO AI TABLEA



.....

$$1. \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \rightarrow \forall x [P(x)$$

$$2. \forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$$

$$3. \forall x P(x) \rightarrow [\exists x Q(x) \rightarrow \forall x P(x)$$

$$4. \exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$$

$$1. \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \rightarrow \forall$$

1 F N

1 / 1

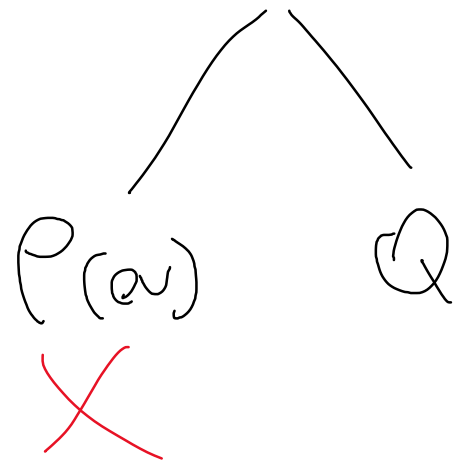
$$\forall x P(x) \vee \forall x Q$$

$$\neg \forall x (P(x) \vee Q)$$

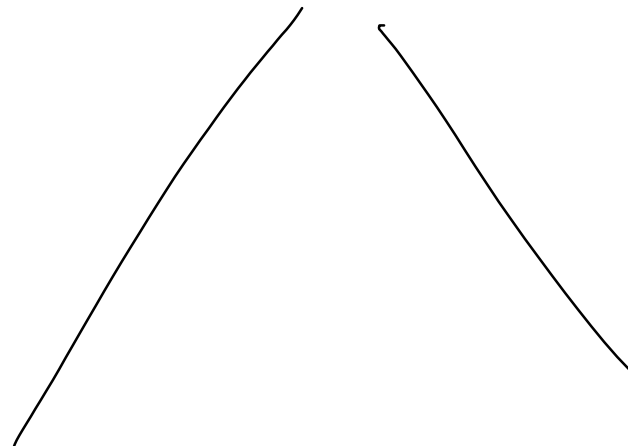
$$\neg (P(a) \vee Q(a))$$

$$\neg P(a)$$

$$\neg Q(a)$$



$$2. \forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x$$



$$\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \neg \exists x P(x, y))$$

$$\neg \exists x P(x, a)$$

$$\neg P(b, a)$$

$$\forall y P(b, y)$$

$$P(b, a)$$

X

$$3. \forall x P(x) \rightarrow (\exists x Q(x) \rightarrow \neg \exists x Q(x))$$

$$\neg F$$

$$\forall x P(x)$$

$$\neg (\exists x Q(x) \rightarrow \neg \exists x Q(x))$$

$$\neg \exists x Q(x)$$

$\neg \neg \neg \neg$   
 $\neg \forall x P(x)$   
 $\neg P(a)$   
 $Q(b)$   
 $P(a)$   
~~X~~

4.

$\exists x \forall x P(x, x) \rightarrow \forall x$

$\neg F$

$\exists x \forall x P(x, x)$

$\neg \forall x \exists x P(x, x)$

$\forall x P(x, a)$

$\neg \exists x P(b, x)$

$P(b, a)$

$\neg P(b, a)$

~~X~~

PROVA 2.

$$\exists x \forall y P(x, y) \wedge \exists x \forall y Q(x, y)$$

$\neg F$

$$\exists x \forall y P(x, y) \wedge \exists x \forall y Q$$

$$\neg \forall y (\exists x P(x, y) \wedge \exists x Q(x, y))$$

$$\exists x \forall y P(x, y)$$

$$\exists x \forall y Q(x, y)$$

$$\forall y P(a, y)$$

$$\forall y Q(b, y)$$

$$\neg (\exists x P(x, a) \wedge \exists x Q(x, b))$$



$$\neg \exists x P(x, a)$$

$$\neg \exists x$$

$$\neg P(a, a)$$

$$P(a, a)$$

$$Q(b, a)$$

X

PROVAB.

$$\forall x (\exists y P(x, y) \vee \exists y Q(x, y))$$

X

7/4

7/4

7/4

7/4

7/4

7/4

7/4

