

题 9 求证: 对任何正整数 m, n , 区间 $[m, m+10n^{\frac{3}{2}}]$ 中存在 n 个两两不同的正整数 a_1, a_2, \dots, a_n 使得 $k \mid a_k, (k = 1, 2, \dots, n)$.

问题来源: Paul Erdős and Carl Pomerance, *Matching the natural numbers up to n with distinct multiples in another interval*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 83 (1980), 147–161.

证明. (我们将使用 Hall 定理: 设 $G = (V_1, V_2)$ 是一个二部图. 则存在 V_1 到 V_2 的完全匹配当且仅当对于 V_1 的任何一个子集 S , 有 $|N(S)| \geq |S|$, 其中 $N(S)$ 是 S 的邻域.)

我们将证明以下的命题: 对任何正整数 m, n , 区间 $(m, m + 4n(\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1)]$ 中存在 n 个两两不同的正整数 a_1, a_2, \dots, a_n 使得 $k \mid a_k, (k = 1, 2, \dots, n)$.

把区间 $(m, m + 4n\lfloor \sqrt{n} \rfloor]$ 划分成 $4\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 个长度为 n 的小区间: $(m + (s-1)n, m + sn]$, $s = 1, 2, \dots, 4\lfloor \sqrt{n} \rfloor$. 对任何整数 j , 我们用 $\langle j \rangle$ 表示 j 所在的小区间. 根据抽屉原理, 对任何 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 每个小区间中均存在 k 的倍数.

考虑二部图 $G_0 = (I_0, J_0)$, 其中 $I_0 = \{1, 2, \dots, n\}$, $J_0 = (m, m + 4n\lfloor \sqrt{n} \rfloor] \cap \mathbb{Z}$. 对于 $i \in I_0$, $j \in J_0$, 顶点 i 与 j 相连当且仅当 $i \mid j$. 则 I_0 中每个顶点的度数均 $\geq 4\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

如果 J_0 中每个顶点的度数均 $\leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, 则由 Hall 定理, 二部图 G_0 中存在 I_0 到 J_0 的完全匹配, 命题得证. 剩下的情况是: 存在 $j_1 \in J_0$ 使得度数 $d_{G_0}(j_1) > \sqrt{n}$. 则存在 I_0 的子集 K_1 , 满足 $|K_1| > \sqrt{n}$, 并且对任何 $k \in K_1$ 有 $k \mid j_1$. 此时我们取 $a_k = j_1 + k, (k \in K_1)$, 则有 $k \mid a_k, a_k \in \langle j_1 \rangle \cup \langle j_1 + n \rangle$, 并且 $a_k (k \in K_1)$ 两两不同.

记 $I_1 = I_0 \setminus K_1$, 记 $J_1 = J_0 \setminus (\langle j_1 - n \rangle \cup \langle j_1 \rangle \cup \langle j_1 + n \rangle)$. 考虑二部图 $G_1 = (I_1, J_1)$. 则 I_1 中每个顶点的度数 (在二部图 G_1 中的度数) 均 $\geq 4\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 3 \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

如果 J_1 中每个顶点的度数均 $\leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, 则由 Hall 定理, 二部图 G_1 中存在 I_1 到 J_1 的完全匹配, 命题得证. 剩下的情况是: 存在 $j_2 \in J_1$ 使得度数 $d_{G_1}(j_2) > \sqrt{n}$. 则存在 I_1 的子集 K_2 , 满足 $|K_2| > \sqrt{n}$, 并且对任何 $k \in K_2$ 有 $k \mid j_2$. 此时我们取 $a_k = j_2 + k, (k \in K_2)$, 则有 $k \mid a_k, a_k \in \langle j_2 \rangle \cup \langle j_2 + n \rangle$, 并且 $a_k (k \in K_1 \cup K_2)$ 两两不同.

注意 $n = |I_0| \geq |K_1 \cup K_2| > 2\sqrt{n}$, 故 $\sqrt{n} > 2$. 记 $I_2 = I_1 \setminus K_2$, 记 $J_2 = J_1 \setminus (\langle j_2 - n \rangle \cup \langle j_2 \rangle \cup \langle j_2 + n \rangle)$. 我们再考虑二部图 $G_2 = (I_2, J_2)$. 则 I_2 中每个顶点的度数 (在二部图 G_2 中的度数) 均 $\geq 4\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 6 \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

如果 J_2 中每个顶点的度数均 $\leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, 则由 Hall 定理, 二部图 G_2 中存在 I_2 到 J_2 的完全匹配, 命题得证. 剩下的情况是: 存在 $j_3 \in J_2$ 使得度数 $d_{G_2}(j_3) > \sqrt{n}$. 则存在 I_2 的子集 K_3 , 满足 $|K_3| > \sqrt{n}$, 并且对任何 $k \in K_3$ 有 $k \mid j_3$. 此时我们取 $a_k = j_3 + k, (k \in K_3)$, 则有 $k \mid a_k, a_k \in \langle j_3 \rangle \cup \langle j_3 + n \rangle$, 并且 $a_k (k \in K_1 \cup K_2 \cup K_3)$ 两两不同.

一般地, 设 t 是一个正整数, 假设上述方式进行 t 步之后仍未证明命题, 则我们逐步得到了 $j_1, j_2, \dots, j_t, K_1, K_2, \dots, K_t, a_k (k \in K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_t)$. 它们满足: K_1, K_2, \dots, K_t 是 I_0 的两两不交的子集, $|K_s| > \sqrt{n}, (s = 1, 2, \dots, t), k \mid a_k, a_k \in \langle j_1 \rangle \cup \langle j_1 + n \rangle \cup \dots \cup \langle j_t \rangle \cup \langle j_t + n \rangle$,

$(k \in K_1 \cup \dots \cup K_t)$. 则 $n = |I_0| \geq |K_1 \cup \dots \cup K_t| > t\sqrt{n}$, 故 $t \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. 记 $I_t = I_0 \setminus (K_1 \cup K_2 \dots \cup K_t)$, 记 $J_t = J_0 \setminus (\langle j_1 - n \rangle \cup \langle j_1 \rangle \cup \langle j_1 + n \rangle \cup \dots \cup \langle j_t - n \rangle \cup \langle j_t \rangle \cup \langle j_t + n \rangle)$. 考虑二部图 $G_t = (I_t, J_t)$, 则 I_t 中每个顶点在二部图 G_t 中的度数均 $\geq 4\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 3t \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. 如果 J_t 中每个顶点的度数 $\leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, 则由 Hall 定理, 二部图 G_t 中存在 I_t 到 J_t 的完全匹配, 命题成立。剩下的情况: 存在 $j_{t+1} \in J_t$ 使得度数 $d_{G_t}(j_{t+1}) > \sqrt{n}$. 则存在 I_t 的子集 K_{t+1} , 满足 $|K_{t+1}| > \sqrt{n}$, 并且对任何 $k \in K_{t+1}$ 有 $k \mid j_{t+1}$. 此时我们取 $a_k = j_{t+1} + k$, ($k \in K_{t+1}$), 则 $k \mid a_k$, $a_k \in \langle j_{t+1} \rangle \cup \langle j_{t+1} + n \rangle$.

上述过程有限步必终止 (因为 $t \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$), 而终止的方式只能是在某步时二部图 $G_t = (I_t, J_t)$ 存在 I_t 到 J_t 的完全匹配。按此匹配定义 a_k ($k \in I_t$), 结合之前定义好的 a_k ($k \in K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_t$), 便证明了命题。 \square