题 9 求证：对任何正整数 m,n, 区间 $[m,m+10n^{\frac{3}{2}}]$ 中存在 n 个两两不同的正整数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 使得 $k\mid a_k$, $(k=1,2,\dots,n)$.

问题来源： Paul Erdös and Carl Pomerance, *Matching the natural numbers up to n with distinct multiples in another interval.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 83 (1980), 147–161.

证明. (我们将使用 Hall 定理：设 $G=(V_1,V_2)$ 是一个二部图。则存在 V_1 到 V_2 的完全匹配当且仅当对于 V_1 的任何一个子集 S, 有 $|N(S)|\geqslant|S|$, 其中 $N(S)$ 是 S 的邻域。)

我们将证明以下的命题：对任何正整数 m,n, 区间 $(m,m+4n(\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1)]$ 中存在 n 个两两不同的正整数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 使得 $k\mid a_k$, $(k=1,2,\dots,n)$.

把区间 $(m,m+4n\lfloor\sqrt{n}\rfloor]$ 划分成 $4\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 个长度为 n 的小区间：$(m+(s-1)n,m+sn]$, $s=1,2,\dots,4\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. 对任何整数 j, 我们用 $\langle j\rangle$ 表示 j 所在的小区间。根据抽屉原理，对任何 $k\in\{1,2,\dots,n\}$, 每个小区间中均存在 k 的倍数。

考虑二部图 $G_0=(I_0,J_0)$, 其中 $I_0=\{1,2,\dots,n\}$, $J_0=(m,m+4n\lfloor\sqrt{n}\rfloor]\cap\mathbb{Z}$. 对于 $i\in I_0$, $j\in J_0$, 顶点 i 与 j 相连当且仅当 $i\mid j$. 则 I_0 中每个顶点的度数均 $\geqslant 4\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

如果 J_0 中每个顶点的度数均 $\leqslant\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, 则由 Hall 定理，二部图 G_0 中存在 I_0 到 J_0 的完全匹配，命题得证。剩下的情况是：存在 $j_1\in J_0$ 使得度数 $d_{G_0}(j_1)>\sqrt{n}$. 则存在 I_0 的子集 K_1, 满足 $|K_1|>\sqrt{n}$, 并且对任何 $k\in K_1$ 有 $k\mid j_1$. 此时我们取 $a_k=j_1+k$, $(k\in K_1)$, 则有 $k\mid a_k$, $a_k\in\langle j_1\rangle\cup\langle j_1+n\rangle$, 并且 a_k $(k\in K_1)$ 两两不同。

记 $I_1=I_0\setminus K_1$, 记 $J_1=J_0\setminus(\langle j_1-n\rangle\cup\langle j_1\rangle\cup\langle j_1+n\rangle)$. 考虑二部图 $G_1=(I_1,J_1)$. 则 I_1 中每个顶点的度数 (在二部图 G_1 中的度数) 均 $\geqslant 4\lfloor\sqrt{n}\rfloor-3\geqslant\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

如果 J_1 中每个顶点的度数均 $\leqslant\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, 则由 Hall 定理，二部图 G_1 中存在 I_1 到 J_1 的完全匹配，命题得证。剩下的情况是：存在 $j_2\in J_1$ 使得度数 $d_{G_1}(j_1)>\sqrt{n}$. 则存在 I_1 的子集 K_2, 满足 $|K_2|>\sqrt{n}$, 并且对任何 $k\in K_2$ 有 $k\mid j_2$. 此时我们取 $a_k=j_2+k$, $(k\in K_2)$, 则有 $k\mid a_k$, $a_k\in\langle j_2\rangle\cup\langle j_2+n\rangle$, 并且 a_k $(k\in K_1\cup K_2)$ 两两不同。

注意 $n=|I_0|\geqslant|K_1\cup K_2|>2\sqrt{n}$, 故 $\sqrt{n}>2$. 记 $I_2=I_1\setminus K_2$, 记 $J_2=J_1\setminus(\langle j_2-n\rangle\cup\langle j_2\rangle\cup\langle j_2+n\rangle)$. 我们再考虑二部图 $G_2=(I_2,J_2)$. 则 I_2 中每个顶点的度数 (在二部图 G_2 中的度数) 均 $\geqslant 4\lfloor\sqrt{n}\rfloor-6\geqslant\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

如果 J_2 中每个顶点的度数均 $\leqslant\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, 则由 Hall 定理，二部图 G_2 中存在 I_2 到 J_2 的完全匹配，命题得证。剩下的情况是：存在 $j_3\in J_2$ 使得度数 $d_{G_2}(j_3)>\sqrt{n}$. 则存在 I_2 的子集 K_3, 满足 $|K_3|>\sqrt{n}$, 并且对任何 $k\in K_3$ 有 $k\mid j_3$. 此时我们取 $a_k=j_3+k$, $(k\in K_3)$, 则有 $k\mid a_k$, $a_k\in\langle j_3\rangle\cup\langle j_3+n\rangle$, 并且 a_k $(k\in K_1\cup K_2\cup K_3)$ 两两不同。

一般地，设 t 是一个正整数，假设上述方式进行 t 步之后仍未证明命题，则我们逐步得到了 $j_1,j_2,\dots,j_t$, $K_1,K_2,\dots,K_t$, a_k $(k\in K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_t)$. 它们满足：$K_1,K_2,\dots,K_t$ 是 I_0 的两两不交的子集，$|K_s|>\sqrt{n}$, $(s=1,2,\dots,t)$, $k\mid a_k$, $a_k\in\langle j_1\rangle\cup\langle j_1+n\rangle\cup\cdots\cup\langle j_t\rangle\cup\langle j_t+n\rangle$,

$(k \in K_1 \cup \cdots \cup K_t)$. 则 $n = |I_0| \geqslant |K_1 \cup \cdots \cup K_t| > t\sqrt{n}$, 故 $t \leqslant \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. 记 $I_t = I_0 \backslash (K_1 \cup K_2 \cdots \cup K_t)$, 记 $J_t = J_0 \backslash (\langle j_1 - n \rangle \cup \langle j_1 \rangle \cup \langle j_1 + n \rangle \cup \cdots \cup \langle j_t - n \rangle \cup \langle j_t \rangle \cup \langle j_t + n \rangle)$. 考虑二部图 $G_t = (I_t, J_t)$, 则 I_t 中每个顶点在二部图 G_t 中的度数均 $\geqslant 4\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 3t \geqslant \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. 如果 J_t 中每个顶点的度数 $\leqslant \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, 则由 Hall 定理，二部图 G_t 中存在 I_t 的完全匹配，命题成立。剩下的情况：存在 $j_{t+1} \in J_t$ 使得度数 $d_{G_t}(j_t) > \sqrt{n}$. 则存在 I_t 的子集 K_{t+1}, 满足 $|K_{t+1}| > \sqrt{n}$, 并且对任何 $k \in K_{t+1}$ 有 $k \mid j_{t+1}$. 此时我们取 $a_k = j_{t+1} + k$, $(k \in K_{t+1})$, 则 $k \mid a_k$, $a_k \in \langle j_{t+1} \rangle \cup \langle j_{t+1} + n \rangle$.

上述过程有限步必终止 (因为 $t \leqslant \lfloor \sqrt{n} \rfloor$), 而终止的方式只能是在某步时二部图 $G_t = (I_t, J_t)$ 存在 I_t 到 J_t 的完全匹配。按此匹配定义 a_k $(k \in I_t)$, 结合之前定义好的 a_k $(k \in K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_t)$, 便证明了命题。 □