# Diophantus 指数

集训队讲座

2025 年 3 月 26 日


**摘要**

我们介绍几种 Diophantus 指数的定义, 证明一些容易的结论, 并介绍一些开放问题及进展.


## 1 几种 Diophantus 指数的定义

故事要从 “Dirichlet 小定理” 说起.

**定理 1** (Dirichlet, 1842)**.** *设 $n$ 是一个正整数, 设 $\xi$ 是一个实数. 则, 对任何正实数 $H$, 存在 $n+1$ 元非零整数组 $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$ 使得*

$$\max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \leqslant H, \quad \text{且 } |x_0 + x_1\xi + x_2\xi^2 + \cdots + x_n\xi^n| < H^{-n}.$$

定理 1 的证明是抽屉原理的简单应用. 对于 $n = 1$ 这一情况, 稍加分析, Dirichlet 得到了如下结论: 对任何无理数 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 存在无穷多个有理数 $p/q$ 使得 $|\xi - p/q| < 1/q^2$. 这是关于有理数逼近实数的一个结论. 有理数是一次的代数数, 很自然地, 我们想研究代数数逼近实数的问题. 为了描述逼近的程度, 人们引入了几种不同的指数. 在介绍它们之前, 我们先约定一些记号. 对于一个复系数多项式 $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$, 我们记

$$\|P\| := \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|,$$

称 $\|P\|$ 为多项式 $P$ 的高度. 对任何代数数 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, 我们记

$$H(\alpha) := \|P_\alpha\|,$$

其中 $P_\alpha \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ 是 $\alpha$ 的最小多项式. 称 $H(\alpha)$ 为代数数 $\alpha$ 的高度. 我们用记号 $\mathbb{Z}[X]_{\deg \leqslant n}$ 表示所有次数不超过 $n$ 的整系数多项式构成的集合 (包括零多项式). 我们用记号 $\overline{\mathbb{Q}}_{\deg \leqslant n}$ 表示 $\mathbb{C}$ 中所有次数不超过 $n$ 的代数数. 对任意非空实数集合 $S \subset \mathbb{R}$, 我们用 $\sup S$ 表示 $S$ 的上确界 (允许取 $+\infty$).

**定义 2.** *对实数 $\xi$ 与正整数 $n$, 我们定义*

$$\omega_n(\xi) := \sup\left\{\omega \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \forall H_0 > 0 \exists H > H_0 \exists P \in \mathbb{Z}[X]_{\deg \leqslant n} \text{ 使得 } \|P\| \leqslant H \text{ 且 } 0 < |P(\xi)| \leqslant H^{-\omega}\right\}.$$

*换言之, $\omega_n(\xi)$ 是满足以下条件的正实数 $\omega$ 的上确界: 存在任意大的正实数 $H$ 使得*

$$\|P\| \leqslant H \text{ 且 } 0 < |P(\xi)| \leqslant H^{-\omega}$$

*有解 $P \in \mathbb{Z}[X]_{\deg \leqslant n}$.*

**定义 3.** *对实数 $\xi$ 与正整数 $n$, 我们定义*

$$\widehat{\omega}_n(\xi) := \sup\left\{\widehat{\omega} \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \exists H_0 > 0 \forall H > H_0 \exists P \in \mathbb{Z}[X]_{\deg \leqslant n} \text{ 使得 } \|P\| \leqslant H \text{ 且 } 0 < |P(\xi)| \leqslant H^{-\widehat{\omega}}\right\}.$$

*换言之, $\widehat{\omega}_n(\xi)$ 是满足以下条件的正实数 $\widehat{\omega}$ 的上确界: 对所有充分大的正实数 $H$,*

$$\|P\| \leqslant H \text{ 且 } 0 < |P(\xi)| \leqslant H^{-\widehat{\omega}}$$

*有解 $P \in \mathbb{Z}[X]_{\deg \leqslant n}$.*

**定义 4.** *对实数 $\xi$ 与正整数 $n$, 我们定义*

$$\omega_n^*(\xi) := \sup\left\{\omega^* \in \mathbb{R}_{>0} \;\middle|\; \text{存在无穷多个 } \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_{\deg \leqslant n} \text{ 使得 } 0 < |\alpha - \xi| \leqslant H(\alpha)^{-\omega^*-1}\right\}.$$

根据定义 2, 定义 3, 以及定理 1, 我们立即得到以下的简单引理.

**引理 5.** *对任意正整数 $n$ 与实数 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}_{\deg \leqslant n}$, 我们有*

$$\omega_n(\xi) \geqslant \widehat{\omega}_n(\xi) \geqslant n.$$

从测度的角度看, 我们对这几种指数 "100%" 地了解.

**定理 6** (Sprindžuk [13], 1967)**.** *对几乎所有实数 $\xi$ (相对于 Lebesgue 测度), 有*

$$\omega_n(\xi) = \omega_n^*(\xi) = \widehat{\omega}_n(\xi) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

然而, 对具体的实数 $\xi$, 确定这几种 Diophantus 指数通常是非常困难的, 仍有很多未被解决的问题.

**问题 7.** *对圆周率 $\pi$, 是否有*

$$\omega_1(\pi) = \omega_1^*(\pi) \stackrel{?}{=} 1.$$

**问题 8** (Wirsing 猜想)**.** *对任意实超越数 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$, 对任意正整数 $n$, 是否总是有*

$$\omega_n^*(\xi) \stackrel{?}{\geqslant} n.$$

**问题 9.** *设 $n$ 是正整数. 是否存在实超越数 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$, 使得*

$$\widehat{\omega}_n(\xi) > n?$$

# 2 三种指数 $\omega_n$, $\widehat{\omega}_n$, 及 $\omega_n^*$ 之间的简单关系

**引理 10.** 对任意正整数 $n$ 与实数 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}_{\deg \leqslant n}$, 有

$$\omega_n(\xi) \geqslant \omega_n^*(\xi).$$

证明. 由 Dirichlet 定理知 $\omega_n^*(\xi) \geqslant \omega_1^*(\xi) \geqslant 1$. 任取正实数 $\omega^* < \omega_n^*(\xi)$. 则由 $\omega_n^*(\xi)$ 的定义 (见定义 4), 存在无穷多个 $\alpha \in \overline{Q}_{\deg \leqslant n}$ 满足 $0 < |\alpha - \xi| \leqslant H(\alpha)^{-\omega^* - 1} \leqslant 1$. 设 $P_\alpha(X) \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ 是 $\alpha$ 的最小多项式. 由于 $\xi \notin \overline{\mathbb{Q}}_{\deg \leqslant n}$, 故 $P_\alpha(\xi) \neq 0$. 设

$$P_\alpha(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n, \quad \text{其中 } (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j| = H(\alpha).$$

则

$$\left| \frac{P_\alpha(\xi)}{\xi - \alpha} \right| = \left| \frac{P_\alpha(\xi) - P_\alpha(\alpha)}{\xi - \alpha} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j| \left| \sum_{k=0}^{j-1} \xi^{j-1-k} \alpha^k \right| \leqslant n^2 (1 + |\xi|)^n H(\alpha).$$

于是

$$0 < |P_\alpha(\xi)| \leqslant |\xi - \alpha| \cdot n^2 (1 + |\xi|)^n H(\alpha) \leqslant n^2 (1 + |\xi|)^n \cdot H(\alpha)^{-\omega^*}.$$

由于这样的 $P_\alpha(X) \in \mathbb{Z}[X]_{\deg \leqslant n}$ 有无穷多个, 故由 $\omega_n(\xi)$ 的定义 (见定义 2), 对任何 $\varepsilon > 0$ 有 $\omega_n(\xi) \geqslant \omega^* - \varepsilon$. 这便推出 $\omega_n(\xi) \geqslant \omega_n^*(\xi)$. □

**引理 11.** 对任意无理数 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 有

$$\widehat{\omega}_1(\xi) = 1.$$

证明. 设 $\{p_\ell / q_\ell\}_{\ell=1}^{+\infty}$ 是 $\xi$ 的渐近分数. 对 $\ell \geqslant 4$, 我们有 $q_\ell - q_{\ell-1} \geqslant q_{\ell-2} \geqslant 2$. 于是, 对任意满足 $1 \leqslant q \leqslant q_\ell - 1$ 的整数 $q$, 我们有

$$\|q\xi\| \geqslant \|q_{\ell-1}\xi\| > \frac{1}{q_\ell + q_{\ell-1}} \geqslant \frac{1}{2(q_\ell - 1)}.$$

这表明对于 $H = q_\ell - 1$, $(\ell \geqslant 4)$, 不存在整数 $p, q$ 使得

$$\max\{|p|, |q|\} \leqslant H \quad \text{且 } 0 < |q\xi - p| \leqslant \frac{1}{2H}.$$

故 $\widehat{\omega}(\xi) \leqslant 1$. 又由 Dirichlet 定理, 有 $\widehat{\omega}(\xi) \geqslant 1$, 故 $\widehat{\omega}(\xi) = 1$. □

**定义 12** (Mahler 测度 [8])**.** 设 $m$ 是任意非负整数. 对任意次数为 $m$ 的非零多项式 $P(X) = a_m \prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_j) \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, *(其中 $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$, 而 $a_m \in \mathbb{C}^\times$)*, 我们定义它的 *Mahler* 测度为

$$M(P) := |a_m| \prod_{j=1}^{m} \max\{1, |\alpha_j|\}.$$

*(当 $P = a_0$ 为非零常数多项式时, 约定 $M(P) = |a_0|$.)*

**引理 13.** 对任意非零复系数多项式 $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, 记 $m = \deg P$, 则我们有

$$\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}^{-1} \cdot \|P\| \leqslant M(P) \leqslant \sqrt{m+1} \cdot \|P\|.$$

证明. 由根与系数的关系及定义 12, 有

$$\|P\| \leqslant \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} M(P).$$

这证明了引理的第一个不等式.

由定义 12 及复分析中熟知的 Jensen 公式, 我们有

$$M(P) = \exp\left(\int_0^1 \log |P(e^{2\pi i t})| \mathrm{d}t\right). \tag{1}$$

由 (1), Jensen 不等式 ($\log(\cdot)$ 是上凸函数), 及 Cauchy 不等式, 我们推出

$$M(P) \leqslant \int_0^1 |P(e^{2\pi i t})| \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_0^1 |P(e^{2\pi i t})|^2 \mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{m+1} \cdot \|P\|.$$

这证明了引理的第二个不等式. □

**引理 14** (Gel'fond 引理 [7], 又见 [2, Lemma A.3])**.** 设 $r$ 是正整数. 设 $P_1(X), \ldots, P_r(X) \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. 记 $n = \deg(P_1 \cdots P_r)$. 则我们有

$$2^{-n} \|P_1\| \cdots \|P_r\| \leqslant \|P_1 \cdots P_r\| \leqslant 2^n \|P_1\| \cdots \|P_r\|.$$

证明. 设 $\deg P_j = n_j$, $(j = 1, \ldots, r)$, 则 $n = n_1 + \cdots + n_r$. 由引理 13 及 Mahler 测度的乘性, 我们得到

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^r \|P_j\| &\leqslant \prod_{j=1}^r \binom{n_j}{\lfloor n_j/2 \rfloor} M(P_j) \\
&= \left(\prod_{j=1}^r \binom{n_j}{\lfloor n_j/2 \rfloor}\right) M(P_1 \cdots P_r) \\
&\leqslant \left(\prod_{j=1}^r \binom{n_j}{\lfloor n_j/2 \rfloor}\right) \sqrt{n+1} \cdot \|P_1 \cdots P_r\|.
\end{aligned}$$

利用初等的不等式

$$\binom{a}{\lfloor a/2 \rfloor} \leqslant \frac{2^a}{\sqrt{a+1}}, \quad \forall a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

(上式可以通过对偶数 $a$ 归纳, 再从偶数的结论推出奇数的结论来证明) 我们得到

$$\left(\prod_{j=1}^r \binom{n_j}{\lfloor n_j/2 \rfloor}\right) \sqrt{n+1} \leqslant 2^n.$$

以上证明了引理的第一个不等式. 而引理的第二个不等式是平凡的:

$$\|P_1\cdots P_r\| \leqslant (n_1+1)\cdots(n_r+1)\|P_1\|\cdots\|P_r\| \leqslant 2^{n_1+\cdots+n_r}\|P_1\|\cdots\|P_r\|.$$

□

**引理 15** (Wirsing [15], 1961)**.** *设 $n\in\mathbb{N}$ 及 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{Q}}_{\deg\leqslant n}$. 则对任意正实数 $\omega<\omega_n(\xi)$, 存在无穷多个不可约整系数多项式 $P$ 使得 $1\leqslant\deg P\leqslant n$, 且*

$$0<|P(\xi)|\leqslant\|P\|^{-\omega}.$$

*证明.* 我们用反证法. 设正实数 $\omega<\omega_n(\xi)$. 假设集合

$$\mathcal{P}(\omega)=\Big\{P\in\mathbb{Z}[X]\;\Big|\;P\text{ 不可约, }1\leqslant\deg P\leqslant n,\text{ 且 }0<|P(\xi)|\leqslant\|P\|^{-\omega}\Big\}$$

是一个有限集. 则集合

$$\mathcal{Q}(\omega)=\Big\{Q\in\mathbb{Z}[X]_{\deg\leqslant n}\;\Big|\;Q\text{ 是 }\mathcal{P}(\omega)\text{ 中若干个 (可以重复) 不可约多项式的乘积}\Big\}$$

也是一个有限集 (用到了 $\deg Q\leqslant n$). 这里我们约定 $1\in\mathcal{Q}(\omega)$ (看作是零个 $\mathcal{P}(\omega)$ 中不可约多项式的乘积).

对任意多项式 $R\in\mathbb{Z}[X]_{\deg\leqslant n}\setminus\{0\}$, 我们可以将其分解成

$$R=aQ_1Q_2,$$

其中 $a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $Q_1\in\mathcal{Q}(\omega)$, 而 $Q_2=P_1\cdots P_s$, 其中 $s\geqslant 0$, $P_1,\ldots,P_s$ 是非常数的不可约整系数多项式 (可以重复), 且 $P_j\notin\mathcal{P}(\omega)$. (当 $s=0$ 时 $Q_2=1$.) 由于 $P_j\notin\mathcal{P}(\omega)$, 有

$$|P_j(\xi)|>\|P_j\|^{-\omega},\quad j=1,\ldots,s.$$

由于 $\mathcal{Q}(\omega)$ 是有限集, 故存在常数 $c>0$ 使得

$$|Q_1(\xi)|\geqslant c.$$

于是我们推出

$$\begin{aligned}
|R(\xi)| &= |a||Q_1(\xi)|\prod_{j=1}^{s}|P_j(\xi)|\\
&\geqslant c\cdot|a|\prod_{j=1}^{s}\|P_j\|^{-\omega}\\
&\geqslant c\cdot|a|^{-\omega}\|Q_1\|^{-\omega}\prod_{j=1}^{s}\|P_j\|^{-\omega}\qquad(\text{因为 }|a|\geqslant 1,\ \|Q_1\|\geqslant 1,\ \text{及 }\omega>0)\\
&\geqslant c2^{-n\omega}\cdot\|R\|^{-\omega}\qquad(\text{用到了引理 14, 及 }\omega>0).
\end{aligned}$$

上式对任意多项式 $R\in\mathbb{Z}[X]_{\deg\leqslant n}\setminus\{0\}$ 成立, 这推出 $\omega_n(\xi)\leqslant\omega$, 矛盾. □

**引理 16.** 设 $\xi \in \mathbb{C}$. 设正整数 $m \geqslant 2$, 设 $P$ 是一个无重根的 $m$ 次整系数多项式. 则存在 $P$ 的一个根 $\alpha$ 使得

$$|\alpha - \xi| \leqslant (2m)^m \cdot \|P\|^{m-2}|P(\xi)|.$$

*证明.* 设 $P(X) = a_m \prod_{j=1}^m (X - \alpha_j)$, 其中 $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $(j = 1, \ldots, m)$, 而 $a_m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. 不妨设 $|\alpha_1 - \xi| \leqslant \cdots \leqslant |\alpha_m - \xi|$.

考虑 $P$ 的判别式

$$\mathrm{Disc}(P) := a_m^{2m-2} \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant m} (\alpha_j - \alpha_k)^2.$$

根据对称多项式基本定理, 判别式 $\mathrm{Disc}(P)$ 可以表示成 $P$ 的系数的整系数多项式. 一方面, 由于 $P$ 是无重根的整系数多项式, 有

$$|\,\mathrm{Disc}(P)| \geqslant 1.$$

另一方面, 利用 Vandermonde 行列式与 Hadamard 不等式, 有

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{Disc}(P)| &= \left(|a_m|^{2m-2} \prod_{j=2}^m |\alpha_1 - \alpha_j|^2\right) \cdot \left|\det(\alpha_j^s)_{2 \leqslant j \leqslant m,\ 0 \leqslant s \leqslant m-2}\right|^2 \\
&\leqslant \left(|a_m|^{2m-2} \prod_{j=2}^m |\alpha_1 - \alpha_j|^2\right) \cdot \prod_{j=2}^m \sum_{s=0}^{m-2} |\alpha_j|^{2s} \\
&\leqslant \left(|a_m|^{2m-2} \prod_{j=2}^m |\alpha_1 - \alpha_j|^2\right) \cdot (m-1)^{m-1} \prod_{j=2}^m \max\{1, |\alpha_j|\}^{2m-4} \\
&\leqslant \left(|a_m|^{2} \prod_{j=2}^m |\alpha_1 - \alpha_j|^2\right) \cdot (m-1)^{m-1} M(P)^{2m-4},
\end{aligned}$$

其中 $M(P)$ 是 $P$ 的 Mahler 测度 (见定义 12). 注意到 $|\alpha_1 - \alpha_j| \leqslant 2|\alpha_j - \xi|$, $(j = 2, \ldots, m)$, 我们得到

$$|\alpha_1 - \xi| \leqslant |\alpha_1 - \xi| \cdot |\,\mathrm{Disc}(P)|^{1/2} \leqslant 2^{m-1}(m-1)^{(m-1)/2} M(P)^{m-2}|P(\xi)|.$$

由上式及引理 13, 得

$$\begin{aligned}
|\alpha_1 - \xi| &\leqslant 2^{m-1}(m-1)^{(m-1)/2}(m+1)^{(m-2)/2}\|P\|^{m-2}|P(\xi)| \\
&\leqslant (2m)^m \|P\|^{m-2}|P(\xi)|.
\end{aligned}$$

取 $\alpha = \alpha_1$ 即可. □

**定理 17** (Wirsing [15], 1961)**.** 对任意正整数 $n$ 与实数 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}_{\deg \leqslant n}$, 有

$$\omega_n^*(\xi) \geqslant \omega_n(\xi) - n + 1.$$

*证明.* 对于 $n=1$, 由定义易知 $\omega_1^*(\xi)=\omega_1(\xi)$, 此时引理成立. 以下设 $n\geqslant 2$.

由 Dirichlet 定理知 $\omega_n(\xi)\geqslant n$. 任取正实数 $\omega$ 满足 $n-1<\omega<\omega_n(\xi)$. 由引理 15, 存在无穷多个非常数的不可约多项式 $P\in\mathbb{Z}[X]_{\deg\leqslant n}$, 使得

$$0<|P(\xi)|\leqslant\|P\|^{-\omega}.$$

若 $\deg P\geqslant 2$, 则由引理 16, 存在 $P$ 的一个根 $\alpha$ 使得

$$|\alpha-\xi|\leqslant(2n)^n\|P\|^{n-2}|P(\xi)|.$$

因 $n\geqslant 2$, 当 $\deg P=1$ 时上式仍然成立. 注意 $P$ 是 $\alpha$ 的最小多项式. 于是我们得到

$$0<|\alpha-\xi|\leqslant(2n)^n\|P\|^{n-2-\omega}=(2n)^nH(\alpha)^{n-2-\omega}.$$

上式对无穷多个 $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}_{\deg\leqslant n}$ 成立, 故 $\omega_n^*(\xi)\geqslant\omega-n+1$. 令 $\omega\to w_n(\xi)$ 便完成证明. □

**引理 18.** *设 $P(X)\in\mathbb{C}[X]$, $\deg P=m\geqslant 1$. 设 $\xi\in\mathbb{C}$ 满足 $P'(\xi)\neq 0$. 则存在 $P$ 的一个根 $\alpha$ 使得*

$$|\alpha-\xi|\leqslant m\frac{|P(\xi)|}{|P'(\xi)|}.$$

*证明.* 若 $P(\xi)=0$, 则结论显然成立. 以下设 $P(\xi)\neq 0$. 设 $P(X)=a_m\prod_{j=1}^m(X-\alpha_j)$, 其中 $\alpha_j\in\mathbb{C}$, $(j=1,\ldots,m)$, 而 $a_m\in\mathbb{C}^\times$. 不妨设 $|\alpha_1-\xi|\leqslant\cdots\leqslant|\alpha_m-\xi|$. 则

$$\left|\frac{P'(\xi)}{P(\xi)}\right|=\left|\sum_{j=1}^m\frac{1}{\xi-\alpha_j}\right|\leqslant\frac{m}{|\alpha_1-\xi|},$$

故

$$|\alpha_1-\xi|\leqslant m\frac{|P(\xi)|}{|P'(\xi)|}.$$

□

**定理 19** (Bugeaud and Laurent [3, Theorem 2.1], 2005)**.** *对任意正整数 $n$ 与实数 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{Q}}_{\deg\leqslant n}$, 有*

$$\omega_n^*(\xi)\geqslant\frac{\widehat{\omega}_n(\xi)}{\widehat{\omega}_n(\xi)-n+1}.$$

*证明.* 由定义 4 及定义 3 易知, 对任何 $N\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, 有 $\omega_n^*(N\xi)=\omega_n^*(\xi)$ 以及 $\widehat{\omega}_n(N\xi)=\widehat{\omega}_n(\xi)$. 故我们可不妨设

$$0<\xi<\frac{1}{10}.$$

由 Dirichlet 定理知 $\widehat{\omega}_n(\xi)\geqslant n$, 故

$$\frac{\widehat{\omega}_n(\xi)}{\widehat{\omega}_n(\xi)-n+1}\leqslant n.$$

如果 $\omega_n^*(\xi) \geqslant n$, 则本引理已得证. 以下假设

$$\omega_n^*(\xi) < n.$$

(又由 Dirichlet 定理有 $\omega_1^*(\xi) \geqslant 1$, 于是在上述假设下有 $n \geqslant 2$.) 任取实数 $A$ 使得

$$\omega_n^*(\xi) < A - 1 < n. \tag{2}$$

(注意由 $\omega_1^*(\xi) \geqslant 1$ 有 $A > 2$.) 由定义 4, 对任意 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_{\deg \leqslant n}$, 除去至多有限个例外以外, 有

$$|\alpha - \xi| > H(\alpha)^{-A}. \tag{3}$$

任取实数 $c$ 使得

$$0 < c < \frac{n - A + 1}{A - 2}. \tag{4}$$

对任意 $H \geqslant 2$, 由 Minkowski 凸体定理, 存在非零多项式 $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]_{\deg \leqslant n} \setminus \{0\}$ 满足

$$|a_1| \leqslant H^{1+c}, \tag{5}$$

$$|a_2|, \ldots, |a_n| \leqslant H, \tag{6}$$

$$|P(\xi)| \leqslant H^{-n-c}. \tag{7}$$

由式 (7) 及 $0 < \xi < 1/10$ 易得

$$|a_0| < \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\},$$

故 $\|P\| = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$ (这蕴含 $\deg P \geqslant 1$). 如果 $\|P\| = |a_1|$, 则

$$\begin{aligned} |P'(\xi)| &= |a_1 + 2a_2\xi + \cdots + na_n\xi^{n-1}| \\ &\geqslant |a_1| - \left(\frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{n}{10^{n-1}}\right)|a_1| \\ &> \frac{|a_1|}{2} = \frac{\|P\|}{2}. \end{aligned}$$

则由引理 18, 存在 $P$ 的一个根 $\alpha$, 使得

$$|P(\xi)| \geqslant \frac{|P'(\xi)|}{n}|\alpha - \xi| > \frac{\|P\|}{2n}|\alpha - \xi|.$$

注意当 $H \to +\infty$ 时, 上式推出 $|\alpha - \xi| \to 0$, 于是若 $H$ 充分大, 则多项式 $P$ 的根 $\alpha$ 满足式 (3). 而引理 14 推出 $H(\alpha) \leqslant 2^n\|P\|$. 于是有

$$H^{-n-c} \geqslant |P(\xi)| > \frac{\|P\|}{2n}H(\alpha)^{-A} \geqslant \frac{\|P\|}{2n}(2^n\|P\|)^{-A} \geqslant \frac{1}{2^{An+1}n}H^{(-A+1)(1+c)}, \tag{8}$$

上式中第一个不等式用到了 (7), 而最后一个不等式用到了 $\|P\| = |a_1|$ 与 (5). 但是, 由 (4) 有 $-n-c < (-A+1)(1+c)$, 故当 $H$ 充分大时 (8) 不可能成立.

以上的论证表明, 对所有充分大的正实数 $H$, 多项式 $P$ 满足 $\|P\| = \max\{|a_2|, \ldots, |a_n|\}$, 于是结合 (6)(7), 有

$$\|P\| \leqslant H, \quad \text{且 } |P(\xi)| \leqslant H^{-n-c}.$$

故由定义 3, 我们得到

$$\widehat{\omega}_n(\xi) \geqslant n + c.$$

这对任何满足 (4) 的实数 $c$ 成立, 令 $c \to (n-A+1)/(A-2)$ 得到

$$\widehat{\omega}_n(\xi) \geqslant n + \frac{n-A+1}{A-2}.$$

于是

$$\frac{\widehat{\omega}_n(\xi)}{\widehat{\omega}_n(\xi) - n + 1} \leqslant A - 1.$$

而上式对任何满足 (2) 的实数 $A$ 成立. 令 $A \to \omega_n^*(\xi) + 1$, 我们便得到

$$\frac{\widehat{\omega}_n(\xi)}{\widehat{\omega}_n(\xi) - n + 1} \leqslant \omega_n^*(\xi).$$

本引理得证. □

## 3　无理指数 $\mu(\xi)$

由引理 11, 对任何无理数 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 总有 $\widehat{\omega}_1(\xi) = 1$. 而由定义 2, 定义 4, 及 Dirichlet 定理, 易知 $\omega_1(\xi) = \omega_1^*(\xi) \geqslant 1$.

**定义 20.** *对任意实数 $\xi$, 我们定义*

$$\mu(\xi) := \omega_1^*(\xi) + 1.$$

*换言之, $\mu(\xi)$ 是满足以下条件的正实数 $\mu$ 的上确界: 存在无穷多个有理数 $p/q$ 使得*

$$0 < |\xi - p/q| \leqslant \max\{|p|, |q|\}^{-\mu}.$$

我们称 $\mu(\xi)$ 为实数 $\xi$ 的无理指数. 由 Dirichlet 定理知

$$\mu(\xi) \geqslant 2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

而从定义易得

$$\mu(\xi)=1,\quad \forall \xi\in\mathbb{Q}.$$

从测度的角度看, 对几乎所有实数 $\xi$ 有 $\mu(\xi)=2$ (见定理 6). 然而, 对具体的 $\xi$, 确定 $\mu(\xi)$ 通常是非常困难的.

**定义 21.** *若实数 $\xi$ 满足 $\mu(\xi)=+\infty$, 则称 $\xi$ 为 Liouville 数.*

**定理 22** (Liouville, 1850)**.** *Liouville 数存在.*

$$\xi=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{10^{k!}}$$

*是一个 Liouville 数. 任何 Liouville 数均是超越数.*

**引理 23.** *对任意无理数 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 对任意*

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}),$$

*有*

$$\mu\left(\frac{a\xi+b}{c\xi+d}\right)=\mu(\xi).$$

**引理 24.** *对任意无理数 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 对任意正整数 $d$, 有*

$$\mu(\xi)\leqslant d\cdot\mu(\xi^d).$$

**引理 25.** *设无理数 $\xi\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 的渐近分数为 $\{p_\ell/q_\ell\}_{\ell=1}^{+\infty}$. 则*

$$\mu(\xi)=1+\limsup_{\ell\to+\infty}\frac{\log q_{\ell+1}}{\log q_\ell}.$$

**定理 26** (Euler, 1737)**.** *自然对数底 $e$ 的简单连分数为*

$$e=[2;\overline{\{1,2k,1\}}_{k\geqslant 1}]=[2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,\ldots].$$

*特别的,*

$$\mu(e)=2.$$

事实上, 对于 $e$ 的有理逼近, 我们知道得更精细一点.

**定理 27** (Davis [5, 6], 1979)**.** *一方面, 存在无穷多个有理数 $p/q$ 使得*

$$\left|e-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{2}\cdot\frac{\log\log q}{q^2\log q}.$$

*另一方面, 对任意 $\varepsilon>0$, 仅存在有限个有理数 $p/q$ 使得*

$$\left|e-\frac{p}{q}\right|<\frac{1-\varepsilon}{2}\cdot\frac{\log\log q}{q^2\log q}.$$

对圆周率 $\pi$, 我们仍不知道 $\mu(\pi)$ 的具体值.

**定理 28** (Zeilberger and Zudilin, 2020). 对圆周率 $\pi$, 有

$$\mu(\pi) < 7.103205334138.$$

1955 年, Roth 给出了一个深刻的结果.

**定理 29** (Roth [12], 1955). 对任意无理代数数 $\xi \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$, 有

$$\mu(\xi) = 2.$$

以下罗列一些其它常数的无理指数的已知上界.

**定理 30** (Rhin and Viola [11], 2001). 对 *Apéry* 常数

$$\zeta(3) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^3},$$

有

$$\mu(\zeta(3)) < 5.513891.$$

**定理 31** (Marcovecchio [9], 2009). 我们有

$$\mu(\log 2) < 3.57455391.$$

**定理 32** (Bondareva, Luchin and Salikhov [1], 2018). 我们有

$$\mu(\log 3) < 5.116201.$$

**定理 33** (Zudilin [17], 2014). 我们有

$$\mu(\pi^2) < 5.09541179.$$

# 4 Wirsing 猜想

关于 Diophantus 指数的一个基本的仍未被解决的问题是 Wirsing 猜想.

**猜想 34** (Wirsing 猜想). 对任意实超越数 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$, 对任意正整数 $n$, 有

$$\omega_n^*(\xi) \overset{?}{\geqslant} n.$$

由 Dirichlet 定理知 Wirsing 猜想对于 $n=1$ 的情况成立. 1967 年, Davenport 和 Schmidt 证明了 Wirsing 猜想对于 $n=2$ 的情况成立. 事实上, 对于 $n=2$, 他们证明了稍强一点的结果.

**定理 35** (Davenport and Schmidt [4], 1967)**.** 对任意 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}_{\deg \leqslant 2}$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在无穷多个 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_{\deg \leqslant 2}$ 使得

$$|\alpha - \xi| < \frac{160+\varepsilon}{9} \max\{1, |\xi|^2\} \cdot H(\alpha)^{-3}.$$

特别的,

$$\omega_2^*(\xi) \geqslant 2.$$

对任何 $n \geqslant 3$, Wirsing 猜想是否正确仍是未知的.

**定理 36** (Tsishchanka [14], 2007)**.** 对任意 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}_{\deg \leqslant 3}$, 有

$$\omega_3^*(\xi) > 2.7304.$$

对于一般的正整数 $n$, 最近 Poëls 取得了一个重要进展.

**定理 37** (Poëls [10], 2025)**.** 对任意实超越数 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$, 对任意正整数 $n$, 有

$$\omega_n^*(\xi) > \frac{n}{2 - \log 2}.$$

注意 $1/(2-\log 2) \approx 0.765$.

# 参考文献


[1] I. V. Bondareva, M. Y. Luchin and V. K. Salikhov, *Symmetrized polynomials in a problem of estimating the irrationality measure of the number* $\ln 3$, Chebyshevskiĭ Sb. 19 (2018), no. 1, 15–25.

[2] Y. Bugeaud, *Approximation by Algebraic Numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press 2004.

[3] Y. Bugeaud and M. Laurent, *Exponents of Diophantine approximation and Sturmian continued fractions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), 773–804.

[4] H. Davenport and W. M. Schmidt, *Approximation to real numbers by quadratic irrationals*, Acta Arith. 13 (1967/68), 169–176.

[5] C. S. Davis, *Rational approximations to* $e$, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 25 (1978), no. 4, 497–502.

[6] C. S. Davis, *A note on rational approximation*, Bull. Austral. Math. Soc. 20 (1979), no. 3, 407–410.

[7] A. O. Gel'fond, *Transcendental and Algebraic Numbers*, Translated from the first Russian edition by L. F. Boron. Dover Publications, Inc., New York, 1960.

[8] K. Mahler, *An application to Jensen's formula to polynomials*, Mathematika, 7 (1960), 98–100.

[9] R. Marcovecchio, *The Rhin-Viola method for* $\log 2$, Acta Arith. 139 (2009), no. 2, 147–184.

[10] A. Poëls, *On approximation to a real number by algebraic numbers of bounded degree*, Ann. of Math. (2) 201 (2025), no. 1, 307–330.

[11] G. Rhin and C. Viola, *The group structure for* $\zeta(3)$, Acta Arith. 97 (2001), no. 3, 269–293.

[12] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 2 (1955), 1–20; corrigendum, 168.

[13] V. G. Sprindžuk, *Mahler's problem in metric number theory.* Izdat. "Nauka i Tehnika", Minsk, 1967 (in Russian). English translation by B. Volkmann, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 25, American Mathematical Society, Providence, RI, 1969.

[14] K. I. Tsishchanka, *On approximation of real numbers by algebraic numbers of bounded degree*, J. Number Theory 123 (2007), no. 2, 290–314.

[15] E. Wirsing, *Approximation mit algebraischen Zahlen beschránkten Grades*, J. reine angew. Math. 206 (1961), 67–77.

[16] D. Zeilberger and W. Zudilin, *The irrationality measure of* $\pi$ *is at most* $7.103205334137\ldots$, Mosc. J. Comb. Number Theory 9 (2020), no. 4, 407–419.

[17] W. Zudilin, *Two hypergeometric tales and a new irrationality measure of* $\zeta(2)$, Annales mathématiques du Québec. 38 (2014), 101–117.