



UNIVERZITET U SARAJEVU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET
ODSJEK ZA RAČUNARSTVO I INFORMATIKU

Simulacija protoka fluida pri prisustvu čvrstih tijela

SEMINARSKI RAD
- RAČUNARSKO MODELIRANJE I SIMULACIJA -

Student: Tarik Hastor

Profesorica: Prof. dr Razija Turčinhodžić Mulahasanović

Sarajevo, novembar 2024

1 Sažetak

U ovom seminarskom radu će biti opisan razvoj tehnike simulacije dinamike fluida i rezultati simulacija u raznim postavkama koje uključuju: cijev u kojoj je fiksirano čvrsto tijelo i Taylor-Green vrtloge. Primjene ove simulacije su moguće u mnogim industrijama i djelatnostima.

Za potrebe automobilske i avioindustrije neophodno je ispitati aerodinamičnost dizajna. Takva ispitivanja se rade u vazдушnim tunelima, naša simulacija će se moći koristiti za simuliranje vazdušnog tunela. Moguća primjena u medicini predstavlja modeliranje lokalnog uticaja suženja krvnog suda nad tokom krvi.

Pošto je simulacija općenitijeg tipa potrebno je postaviti konkretna ograničenja na tip sistema koji simuliramo. U ovom seminarskom pretpostavljamo da fluid zadovoljava:

1. Fluid je nestišljiv,
2. Fluid je Njutnovski,
3. Kreće se pri niskim Mahovim brojevima i
4. Turbulentan je pri niskim Reynoldsovim brojevima.

Ovi su uvjeti dovoljni za korištenje modela Rešetkaste Boltzmannove Metode (LBM) na osnovu kojeg ćemo razviti ovu simulaciju u programskom jeziku Python.

2 Teoretski uvod

2.1 Općenito o modeliranju dinamike fluida

Simulacije fluida se izvode većinski na osnovu jednog od sljedeća tri pristupa u ovisnosti od namjene i veličine sistema:

- Makro pristup
- Mezo pristup
- Mikro pristup

Mikropristup podrazumijeva da svaku česticu pojedinačno predstavimo i raspišemo za nju Njutnove jednačine kretanja, na osnovu kojih možemo modelirati kretanje fluida. Ovakav pristup je najegzaktniji ali je neupotrebljiv za bilo kakav realan sistem. Razlog tome jeste što u jednom mL vode se nalazi 3.3×10^{22} molekula, stoga sama količina potrebnih proračuna čini ovaj pristup nemogućim u praksi za riješiti u realnom vremenu sa savremenom tehnologijom.

Makropristup kojim se bavi računarska dinamika fluida podrazumijeva raspišivanje i rješavanje Navier-Stokes jednačina direktno. Ovaj pristup je najmoćnija savremena tehnika za simulaciju fluida zbog svoje generalnosti. Ovako je moguće simulirati gotovo sve fluide pri gotovo svim uvjetima. [1]

Nedostatak ovakvog pristupa se najviše vidi u težini implementacije. Vrlo je teško riješiti sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina na numerički stabilan način, također vrlo malo je poznato o prirodi rješenja ovakvih jednačina. Jedan od najpoznatijih otvorenih problema u matematičkoj fizici predstavlja dokazivanje egzistencije, jedinstvenosti i glatkoće rješenja Navier-Stokes jednačina.

Za nestišljiv Njutnovski fluid Navier-Stokes jednačine su date sa:

$$\nabla u = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + F \quad (2)$$

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial^2 u_i u_k}{\partial x_k \partial x_i} \quad (3)$$

Fizikalno vrijednosti ρ, u su potrebne i dovoljne za potpuni i vjerodostojni opis nestišljivih Njutnovskih fluida.

Ustanovljeni pristup simulaciji na osnovu ovog modela jeste diskretizacija ovih jednačina. Takvi pristupi se grupišu u Eulerove i Lagranžove metode. [2]

Ovakvi modeli imaju ozbiljne poteškoće u simuliranju turbulentnih tokova ili komplikovanih geometrija. Recimo prisustvo semipermeabilne brane ili komplikovanih račvanja kao što je slučaj u krvnim sudovima čine ovakve tehnike gotovo neupotrebljivim.

2.2 Kinetička teorija gasova

Mezo pristup se javlja iz statističke fizike. Grubim crtama ideja je da grupišemo molekule u grupe i da onda postavljamo pitanje o tome kako se ta grupa ponaša u prosjeku. Ovo je osnovna ideja kinetičke teorije gasova.

Mi još uvijek nismo odustali od Navier-Stokes jednačina, s obzirom da ćemo implementirati solver za njih, ali ćemo to uraditi na jedan indirektan način, umjesto klasičnih tehnika.

Pošto je potrebno definirati prostor vjerovatnoća, da bismo to postigli prvo definiramo univerzu koju posmatramo i koju ćemo nazivati faznim prostorom.

Fazni prostor u oznaci Γ je prostor svih pozicija \mathbf{r} i svih brzina uslijed termičkog kretanja $\boldsymbol{\xi}$ i očigledno je $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^6$. Za potrebe modeliranja promjene faznog prostora sve njegove koordinate su parametrizirane u vremenu.

Definirajmo sada funkciju distribucije čestica $f(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, t)$ koja predstavlja gustoću čestica na poziciji \mathbf{r} u trenutku t koje se kreću brzinom $\boldsymbol{\xi}$. Jedinice ove funkcije su $[f] = \frac{s^3 kg}{m^6}$. Povećanje dimenzionalnosti prostora kojeg posmatramo u našim jednačinama djeluje da će biti otežavajuće, ali u ovako definiranom faznom prostoru ćemo kasnije izvesti jako korisne relacije koje će nakon diskretizacije imati vrlo pogodan oblik za računarsku implementaciju. Naravno da bismo išta korisno dobili iz tih jednačina moramo biti u stanju prevesti gustoću čestica u faznoj ravni u makroskopski model. [1]

Prva bitna makroskopska funkcija je $\rho(\mathbf{r}, t)$ koja predstavlja gustoću u tački \mathbf{r} u trenutku t . Veza ove funkcije sa faznim prostorom je data sa relacijom:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int f(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, t) d^3 \boldsymbol{\xi} \quad (4)$$

Srednju brzinu u okolini tačke \mathbf{r} u trenutku t nazivamo makroskopskom brzinom $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ i nju možemo dobiti iz prvog momenta f sa relacijom:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \boldsymbol{\xi} f(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, t) d^3 \boldsymbol{\xi}}{\rho(\mathbf{r}, t)} \quad (5)$$

Analogno makroskopsku ukupnu gustoću energije možemo očitati iz drugog momenta f sa relacijom:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \|\boldsymbol{\xi}\|^2 f(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, t) d^3 \boldsymbol{\xi}}{2\rho(\mathbf{r}, t)} \quad (6)$$

Makroskopska ukupna gustoća energije predstavlja energiju uslijed ukupne kretanje fluida i može se ekvivalentno zapisati kao $E = \frac{\rho u^2}{2}$. Kretanje čestica fluida također ovisi od nasumičnog termičkog kretanje te stoga uvodimo gustoću unutrašnje energije:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \|\mathbf{v}\|^2 f(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, t) d^3 \boldsymbol{\xi}}{2\rho(\mathbf{r}, t)} \quad (7)$$

Gdje je \mathbf{v} relativna brzina: $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$

Boltzmanova jednačina nalaže da pod uticajem eksterne sile F nad fluidom sa funkciju distribucije čestica f da se f mijenja po sljedećem zakonu:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial f}{\partial r_x} + \frac{F_x \partial f}{\rho \partial \xi_x} = \Omega(f) \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_y \frac{\partial f}{\partial r_y} + \frac{F_y \partial f}{\rho \partial \xi_y} = \Omega(f) \quad (9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_z \frac{\partial f}{\partial r_z} + \frac{F_z \partial f}{\rho \partial \xi_z} = \Omega(f) \quad (10)$$

Gdje je Ω kolizioni operator.

Ovako zapisana Boltzmanova jednačina je gotovo beskorisna u opisu fluida. Razlog u tome se krije što se samo pitanje kako se mijenja f mijenja u šta je i kako se ponaša kolizioni operator. U općem slučaju odgovor na to pitanje i dalje nije zadovoljavajuće odgovoren. Srećom postoji jednostavno rješenje koje će služiti našoj svrsi. Uvjeti koje kolizioni operator mora zadovoljiti su očuvanja impulsa, mase i energije:

$$\int \Omega(f) d^3 \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (11)$$

$$\int \boldsymbol{\xi} \Omega(f) d^3 \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (12)$$

$$\int \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \Omega(f) d^3 \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (13)$$

$$\int \|\mathbf{v}\|^2 \Omega(f) d^3 \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (14)$$

Rješavanje ove funkcionalne jednačine nije nimalo lak posao ali možemo nadoći na moguće rješenje koristeći intuiciju iz fizike.

Fluidi pri odsustvu vanjskih sila teže ka ravnotežnom stanju koje je izotropično u prostoru brzina u okolini $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}$. Za fluide koji su nestišljivi i Njutnovski pretpostavimo da vrijedi da je funkcija distribucije čestica f^{eq} separabilna po dimenzijama odnosno

$$f^{eq}([v_x, v_y, v_z], \mathbf{r}, t) = [f_{1D}^{eq}(v_x, \mathbf{r}, t), f_{1D}^{eq}(v_y, \mathbf{r}, t), f_{1D}^{eq}(v_z, \mathbf{r}, t)]$$

. S tim pretpostavkama Maxwell je dao analitičku formu za f^{eq} kao:

$$f^{eq}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = \rho \left(\frac{\rho}{2\pi p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mathbf{p}\mathbf{v}\mathbf{r}\mathbf{v}}{2\rho}} \quad (15)$$

Ovakva distribucija se često javlja u statističkoj fizici i poznata je kao Maxwell-Boltzmannova distribucija.

Bhanatagar, Gross i Krook su na osnovu ove ideje postavili najjednostavniji kolizijski operator koji zadovoljava uvjete (11) koji je forme:

$$\Omega_{BGK}(f) = \frac{f^{eq} - f}{\tau} \quad (16)$$

Objedinjeno Boltzmanov BGK model fluida koji će biti baza za svo daljnje razmatranje glasi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial f}{\partial r_x} + \frac{F_x \partial f}{\rho \partial \xi_x} = \frac{\rho \left(\frac{\rho}{2\pi p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mathbf{p}\mathbf{v}\mathbf{r}\mathbf{v}}{2\rho}} - f}{\tau} \quad (17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_y \frac{\partial f}{\partial r_y} + \frac{F_y \partial f}{\rho \partial \xi_y} = \frac{\rho \left(\frac{\rho}{2\pi p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mathbf{p}\mathbf{v}\mathbf{r}\mathbf{v}}{2\rho}} - f}{\tau} \quad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_z \frac{\partial f}{\partial r_z} + \frac{F_z \partial f}{\rho \partial \xi_z} = \frac{\rho \left(\frac{\rho}{2\pi p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mathbf{p}\mathbf{v}\mathbf{r}\mathbf{v}}{2\rho}} - f}{\tau} \quad (19)$$

$$\frac{\int \|\boldsymbol{\xi}\|^2 f(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, t) d^3 \boldsymbol{\xi}}{2\rho(\mathbf{r}, t)} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (20)$$

$$\frac{\int \boldsymbol{\xi} f(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, t) d^3 \boldsymbol{\xi}}{\rho(\mathbf{r}, t)} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (21)$$

$$\int f(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, t) d^3 \boldsymbol{\xi} = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (22)$$

2.3 Rešetkasta Boltzmann Metoda

Sada konačno možemo početi razumjeti zašto koristimo odabrani model. Naime iako su Navier-Stokes jednačine pravo teške za riješiti analitički, u praksi (17) su još teže za riješiti analitički. Neintuitivno ispostavlja se da je numeričko rješavanje Boltzmanovih jednačina jednostavno za implementirati, paralelizirati

i da su numerički stabilniji od CFD implementacija.

Što se tiče diskretizacije modela, potrebno je prevesti sve veličine u diskretne i zamijeniti diferencijalne jednačine diferentnim. Vrijeme ćemo diskretizirati uvođenjem diskretnog vremena

$$t_i = t_0 + i\Delta t$$

Za diskretiziranje faznog prostora potrebno je diskretizirati i prostor i brzine i gustoću. Diskretni fazni prostor je $\Delta = X \times C$. Gdje je:

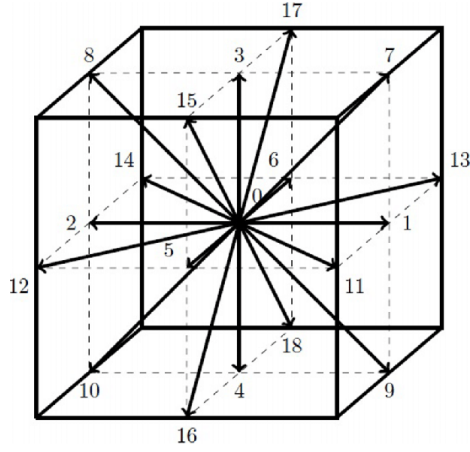
$$X = \{\mathbf{x}_0 + i_1\Delta x_1 + i_2\Delta x_2 + \dots i_n\Delta x_n \mid i_1, i_2, \dots i_n \in \Phi \subset \mathbb{N}\}$$

$$C = \{w_1c_1, w_2c_2, \dots, w_mc_m\}$$

Ovakva diskretizacija prostora brzina se u literaturi naziva DnQm rešetkom. Popularne rešetke u praksi su date u sljedećoj tabeli [1]:

Notacija	Brzine c_i	Magnitude $\ c_i\ $	Teg w_i	Broj
D1Q3	(0)	0	$\frac{2}{3}$	1
	(± 1)	1	$\frac{1}{6}$	2
D2Q9	(0,0)	0	$\frac{4}{9}$	1
	($\pm 1, 0$), ($0, \pm 1$)	1	$\frac{1}{9}$	4
	($\pm 1, \pm 1$)	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{36}$	4
D3Q15	(0,0,0)	0	$\frac{2}{9}$	1
	($\pm 1, 0, 0$), ($0, \pm 1, 0$), ($0, 0, \pm 1$)	1	$\frac{1}{9}$	6
	($\pm 1, \pm 1, \pm 1$)	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{72}$	8
D3Q19	(0,0,0)	0	$\frac{1}{3}$	1
	($\pm 1, 0, 0$), ($0, \pm 1, 0$), ($0, 0, \pm 1$)	1	$\frac{1}{18}$	6
	($\pm 1, \pm 1, 0$), ($\pm 1, 0, \pm 1$), ($0, \pm 1, \pm 1$)	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{36}$	12
D3Q27	(0, 0, 0)	0	$\frac{8}{27}$	1
	($\pm 1, 0, 0$), ($0, \pm 1, 0$), ($0, 0, \pm 1$)	1	$\frac{2}{27}$	6
	($\pm 1, \pm 1, 0$), ($\pm 1, 0, \pm 1$), ($0, \pm 1, \pm 1$)	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{54}$	12
	($\pm 1, \pm 1, \pm 1$)	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{216}$	8

Za trodimenzionalni prostor koristiti ćemo za diskretizaciju faznog prostora D3Q19 rešetku za koju postoje teoretski rezultati koji pokazuju da ima povoljne numeričke osobine. [1]



Slika 1: Jedna ćelija i njeni pravci brzine u D3Q19 rešetci

Diskretizaciju $f(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, t)$ radimo sa $f_i(\mathbf{x}, t)$ što predstavlja gustoću čestica koje se kreću brzinom \mathbf{c}_i .* Odatle diskretizacijom [1] ostalih relacija dobijamo diskretni model.

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (23)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \sum_i \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (24)$$

$$p = c_s^2 \rho \quad (25)$$

$$f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = w_i \rho \left(1 + \frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{c}_i}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{u}^\top \mathbf{c}_i)^2}{2c_s^4} - \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2c_s^2} \right) \quad (26)$$

$$f_{i+1}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau} \right) + f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) \frac{\Delta t}{\tau} \quad (27)$$

Gdje je konstanta c_s izotermalna brzina zvuka rešetke i data je kao:

$$c_s^2 = \frac{\Delta x^2}{3\Delta t^2}$$

Prilikom prisustva eksternih sila recimo gravitacije ili elektrostatske sile jedina promjena je u računanju makroskopske brzine:

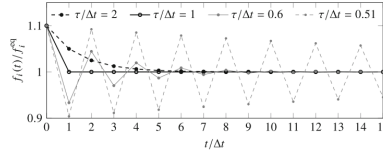
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \sum_i \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{F}_{ext}(\mathbf{x}) \Delta t}{2\rho(\mathbf{x}, t)}$$

Zbog ove osobine LBM je vrlo povoljan metod za simulaciju kompleksnijih simulacija fluida koje uključuju električne, termičke i druge efekte.

2.3.1 Numerička stabilnost

Korak simulacije i vrijeme relaksacije τ direktno utječu na način kako f_i konvergira ka f_i^{eq} . Razlikujemo tri slučaja:

- $\frac{\tau}{\Delta t} > 1$ - Podrelaksacija u ovom slučaju konvergencija je eksponencijalna
- $\frac{\tau}{\Delta t} = 1$ - Puna relaksacija u ovom slučaju konvergencija je linearna
- $\frac{1}{2} < \frac{\tau}{\Delta t} < 1$ - Prekomjerna relaksacija u ovom slučaju konvergencija je prigušena oscilacija



Slika 2: Primjeri pod, pune, prekomjerne relaksacije. Korišteno je $f_i^{eq} = const$ i početni uvjet $f_i(0) = 1.1f_i^{eq}$. [1]

Za $\frac{1}{2} \geq \frac{\tau}{\Delta t}$ iterativni proces ne konvergira [1].

Pri većim makroskopskim brzinama strujanja dolazi do prelaska čestica iz jednog sloja u drugi. Ovakvo kretanje uzrokuje pojave vrtloga i naziva se turbulentnim. Empirijski je utvrđeno da je pri turbulentnom kretanju brzina po cijelom presjeku cijevi ista, izuzev na rubovima gdje brzo opada.

Najbolji poznati prediktor kritične brzine kada kretanje postaje turbulentno je Reynoldsov broj koji je vezan za našu rešetku sa relacijom:

$$Re = \frac{\rho \|u\| N \Delta x}{\mu}$$

Numerički stabilne simulacije sa visokim Reynoldsovim brojem su sasvim moguće koristeći LBM, ali sa jednom velikom manom. Naime ako želimo postići visoke Reynoldsove brojeve moramo povećati veličinu rešetke N što direktno utiče na potrošnju memorije. Viskoznost ne smijemo previše spuštati s obzirom da je ona vezana sa relaksacijskim vremenom kroz relaciju:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = c_s^2 \frac{2\tau}{2}$$

S obzirom da se Δt može proizvoljno izabrati ono se po konvenciji postavlja na 1.

Što se tiče povećanja makroskopske brzine tu imamo granice koje su povezane za samo izvođenje LBM. Potrebne i dovoljne uvjete da se LBM može koristiti

za rješavanje (indirektno) Navier-Stokes jednačina su dali Sydney Chapman i David Enskog. Prilikom njihove analize koja je vrlo duga i matematski vrlo složena je doveden ključan zaključak. LBM radi ako je Machov broj mali.

Machov broj je omjer brzine nekog tijela i brzine zvuka. Relacija koja ga veže za našu rešetku je:

$$Ma = \frac{\|\mathbf{u}\|}{c_s}$$

S obzirom da je c_s konstanta koja se može proizvoljno izabrati. Najčešće da bi brojevi izgledali ljepše uzima se $c_s = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Pošto je potreban uvjet da LBM proizvede smislene rezultate $Ma \ll 1$, zaključujemo da je veličina $\|\mathbf{u}\|$ ograničena odozgo. LBM može odlično simulirati turbulentni tok ali po cijeni računarskih resursa.

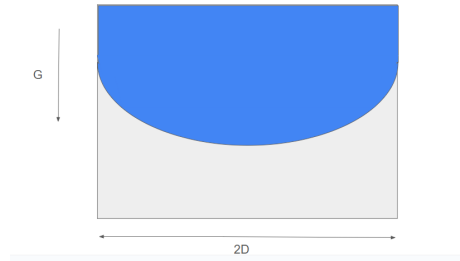
2.3.2 Sudari sa čvrstim tijelima

Za sada naša diskusija se bavila samo unutrašnjim silama fluida i uticajima eksternih sila ali smo zanemarili međudjelovanje fluida i čvrste granice.

Inače najteži aspekt rješavanja Navier-Stokes jednačina direktno jeste postavljanje graničnih uvjeta. Sasvim je očekivano da je vrlo teško analitički opisati utjecaj složene geometrije nad protokom.

LBM se pokazao kao fantastičan metod simulacije nad složenim geometrijama. Sada ćemo opisati jednu konkretnu dvodimenzionalnu simulaciju nad kojom ćemo objasniti kako tretirati granične uvjete.

Neka je data šupljina širine 2D sa čvrstim vertikalnim i otvorenom horizontalnom granicom kao na slici:



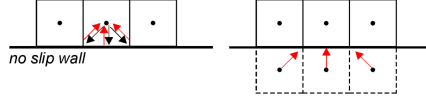
Slika 3: Šupljina

Neka nad fluidom jedina eksterna sila je sila Zemljine teže. Fluid u pitanju je voda sa $\nu = 0.1$ i najveća makroskopska brzina je $U = 0.1$. Dimenzija rešetke

je 20×20 dok je visina šupljine $L = 0.02$

Odakle se lako vidi da je $Re = 200$, $\tau = 0.53$.

Ideja kako tretirati granicu jeste vezana za uvjete na istoj. Tipično na čvrstoj granici primjenjujemo uvjet da nema klizanja odnosno da je $u = 0$. Za tu svrhu uvodimo sloj fiktivnih ćelija uz samu granicu čiji je zadatak da nulira makroskopsku brzinu. Ovo jednostavno možemo uraditi kopirajući komplementarne f_i , gdje je f_i komplementaran f_j akko $c_i = -c_j$ [3].



Slika 4: Granični uvjeti [3]

Dakle jednostavan način za implementaciju granice jeste da u algoritmu prije nego što primijenimo jednačinu (26) popunimo sve fiktivne ćelije. Ovakav metod implementacije granice se naziva Zou-He granica.

Ovakva implementacija dozvoljava za proizvoljno kompleksne geometrije, a na sličan način se mogu i proizvoljno kompleksni uvjeti definirati. Recimo ako je granica semipermeabilna onda možemo periodički izbaciti uvjet da nema klizanja, što je česta tehnika u simulacijama krvotoka.

U slučaju ako se granica može kretati onda Zou-He prilagodimo uvođenjem adekvatnog skaliranja na osnovu relativne brzine kretanja granice u odnosu na fluid.

Postoji mnogo uvjeta koji su dovoljni za stabilnost simulacije. Recimo jedan dovoljan uvjet za stabilnost simulacije je da f_i^{eq} je nenegativna funkcija [1]. Ovaj uvjet je poprilično ograničavajući stoga je korisniji uvjet za podrelaksirane simulacije ($\frac{\tau}{\Delta t} > 1$) da je:

$$\|\mathbf{u}\| < \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Ovi uvjeti utječu na odabir parametara simulacije, stoga je potrebno unaprijed ih odrediti da bismo procijenili da li će simulacija dati korisne rezultate.

3 Implementacija

Implementacija modela je urađena u programskom jeziku Python koristeći biblioteku za numeričke proračune numpy [4] i za vizualizaciju matplotlib [5] i data je kao popratni materijal uz rad [6]. Pseudokod LBM:

Algorithm 1: Rešetkasta Boltzman Metoda

Data: Input lattice X , Simulation step Δt , Iteration count N , relaxation time τ

Result: Processed simulation

- 1 Initialize $\rho \leftarrow 1, u \leftarrow 0, t \leftarrow 0$;
- 2 $f_i^{eq} \leftarrow w_i \rho(x, t) (1 + \frac{\mathbf{u}(x, t)^\top \mathbf{c}_i}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{u}(x, t)^\top \mathbf{c}_i)^2}{2c_s^4} - \frac{\|\mathbf{u}(x, t)\|^2}{2c_s^2})$;
- 3 **for** itr in $1, 2, \dots, N$ **do**
- 4 **for** $\mathbf{x} \in X$ **do**
- 5 **for** $i \in 1, 2, \dots, 9$ **do**
- 6 $f_i^{eq} \leftarrow w_i \rho(x, t) (1 + \frac{\mathbf{u}(x, t)^\top \mathbf{c}_i}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{u}(x, t)^\top \mathbf{c}_i)^2}{2c_s^4} - \frac{\|\mathbf{u}(x, t)\|^2}{2c_s^2})$
- 7 $f_i^*(\mathbf{x}, t) \leftarrow f_i(\mathbf{x}, t) (1 - \frac{\Delta t}{\tau}) + f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) \frac{\Delta t}{\tau}$
- 8 **for** $\mathbf{x} \in X$ **do**
- 9 **for** $i \in 1, 2, \dots, 9$ **do**
- 10 $f_{i+1}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) \leftarrow f_i^*(\mathbf{x}, t)$
- 11 **for** $\mathbf{x} \in X$ **do**
- 12 $\rho(\mathbf{x}, t) \leftarrow \sum_i c_i f_i(\mathbf{x}, t)$
- 13 $u(\mathbf{x}, t) \leftarrow \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \sum_i c_i f_i(\mathbf{x}, t)$
- 14 $output(u, \rho, t)$
- 15 $t \leftarrow t + \Delta t$

3.1 Dvodimenzionalna verzija

Implementacija LBM u dvije dimenzije je data putem klase LBM2D. Simulacijski objekat možemo inicijalizirati sa mnoštvom parametara od kojih su najbitniji i neizostavni: dimenzije rešetke Nx, Ny , relaksacijsko vrijeme τ i početne uvjete za f . Opciono možemo postaviti da li se koristi Zou-He granični uvjeti, analitičko rješenje, eksterne sile, objekte i callback funkciju za preračunavanje djelovanja eksternih sila.

Samu simulaciju počinjemo pozivom metode *simulate* u kojoj određujemo broj koraka simulacije i opciono postavljamo upute za ispis rezultata. Rezultati simulacije se mogu prikazati grafički kao heat-map magnitude makroskopske brzine, gustoće i magnitude rotora makroskopske brzine.

Simulacija na kraju vraća niz kinetičkih energija fluida i grešaka. Ako je za-

dano analitičko rješenje simulacija će porediti makroskopske gustoće i brzine sa analitičkim rješenjem. Pošto se greške u gustoći mnogo više trebaju kazniti zbog toga što ako nam simulacija krši zakon očuvanja mase ona je efektivno beskorisna. S ovim na umu grešu za gustoću računamo u svakoj iteraciji preko L2 norme kao:

$$\delta_\rho = \frac{\Sigma(\rho - \rho_{analiticko})^2}{\Sigma \rho_{analiticko}}$$

Grešku za makroskopsku brzinu računamo putem L3 norme kao:

$$\delta_u = \frac{\max(u - u_{analiticko})^2}{\max u_{analiticko}}$$

Obzirom da je ova implementacija D2Q9 rešetka služila kao početna tačka za razvoj trodimenzionalne D3Q19 verzije cilj je bio napisati kod koji je što više proširiv. Recimo u literaturi se vrlo često \mathbf{u} razbija na podnizove u_x i u_y ili još gore i češće se viđa razbijanje f na 9 podnizova. Implementacija koja je ponuđena ih sve suzbija u jedan niz s obzirom da kasnije se može lako proširiti u proizvoljne dimenzije.

Svaki korak simulacije možemo posmatrati kao primjena sljedećeg algoritma:

1. Popuniti fiktivne ćelije
2. Protok: $f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t)$
3. Kolizija: $f_i^*(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t)(1 - \frac{\Delta t}{\tau}) + f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) \frac{\Delta t}{\tau}$

Što se tiče geometrije koristi se bitmapa koja definira da li je neka ćelija granica (fiktivna) ili ne. Bitmapa se može direktno postaviti ili proslijediti objekat koji predstavlja oblik. Oblik jedino treba imati metodu *containsPoint(x,y)* koja vraća logičku vrijednost koja predstavlja da li je ćelija (x,y) fiktivna ili ne.

Ranije je pomenuto da se sudari sa granicom moraju anulirati. Anuliranje možemo postići tako što u susjednu ćeliju na indeksu suprotne brzine dodijelimo istu vrijednost. Na taj način osiguravamo da nakon koraka kolizije makroskopska brzina tečnosti ostane 0. Svakom vektoru brzine \mathbf{c}_i ćemo dodijeliti jedinstven indeks u rasponu od 0 do 8, bilo koja permutacija je uredu ali se mora ispoštovati u samom kodu. Odlučujemo se za sljedeće imenovanje pravaca.

\mathbf{c}	w	indeks	$\hat{\mathbf{c}}_i$	$\hat{\mathbf{c}}_j$
(0,0)	4/9	0	0	0
(0,1)	1/9	1	0	1
(1,1)	1/36	2	1	1
(1,0)	1/9	3	1	0
(1,-1)	1/36	4	1	-1
(0,-1)	1/9	5	0	-1
(-1,-1)	1/36	6	-1	-1
(-1, 0)	1/9	7	-1	0
(-1, 1)	1/36	8	-1	1

3.2 Trodimenzionalna verzija

Prethodni kod možemo pretvoriti u trodimenzionalnu verziju lakim prepravkama. Prvo moramo formirati nove pravce i tegove u skladu sa D3Q19 rešetkom. Kao što je ranije rečeno za potrebe sudara sa čvrstim granicama moramo imenovati pravce adekvatno. Svakom vektoru brzine c_i ćemo dodijeliti jedinstven indeks u rasponu od 0 do 18, bilo koja permutacija je uredu ali se mora ispoštovati u samom kodu. Mi se odlučujemo za sljedeće imenovanje pravaca.

\mathbf{c}	w	indeks	\hat{c}_i	\hat{c}_j	\hat{c}_k
(0,0,0)	1/3	0	0	0	0
(1,0,0)	1/18	1	1	0	0
(-1,0,0)	1/18	2	-1	0	0
(0,1,0)	1/18	3	0	1	0
(0,-1,0)	1/18	4	0	-1	0
(0,0,1)	1/18	5	0	0	1
(0,0,-1)	1/18	6	0	0	-1
(1,1,0)	1/36	7	1	1	0
(-1,-1,0)	1/36	8	-1	-1	0
(1,-1,0)	1/36	9	1	-1	0
(-1,1,0)	1/36	10	-1	1	0
(0,1,1)	1/36	11	0	1	1
(0,-1,-1)	1/36	12	0	-1	-1
(0,1,-1)	1/36	13	0	1	-1
(0,-1,1)	1/36	14	0	-1	1
(1,0,1)	1/36	15	1	0	1
(-1,0,-1)	1/36	16	-1	0	-1
(1,0,-1)	1/36	17	1	0	-1
(-1,0,1)	1/36	18	-1	0	1

Dalje moramo povećati dimenzionalnosti nizova i ulaznih parametara. Recimo sada se rešetka definira sa Nx, Ny, Nz . Ovakve prepravke su trivijalne za izvršiti.

4 Rezultati

Obzirom da je u sklopu ovog rada implementirana i objašnjena tehnika simulacije koja se može koristiti kao solver Navier-Stokes jednačina, kod se može koristiti na bezbroj načina. Za potrebe demonstracije prezentirati ćemo 5 dvodimenzionalnih i 2 trodimenzionalne simulacije. Jedna od tih posjeduje analitičko rješenje stoga rezultati te simulacije su najbolji indikator uspješne implementacije.

4.1 Dvodimenzionalne Simulacije

4.1.1 Taylor Green Vrtlozi

Taylor-Green Vrtlozi su početni uvjeti nestišljivog fluida koji su poznata patologija za solve Navier-Stokes jednačina. Defacto se koristi kao glavni testni program u praksi. Trodimenzionalna verzija se koristi kao primjer kako čak ni jednostavne postavke nemaju analitičko rješenje. Dvodimenzionalna verzija srećom ima analitičko rješenje [1], što možemo koristiti kao dokaz korektnosti implementacije.

Rješenje Navier-Stokes jednačina je dato sa:

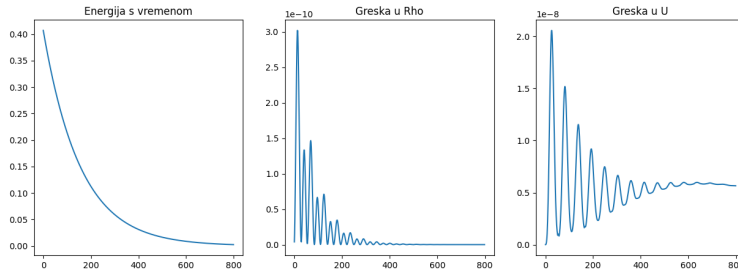
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_0 \begin{bmatrix} \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \\ \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \end{bmatrix} e^{-\frac{t}{t_d}} \quad (28)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0 - \rho \frac{u_0^2}{4} (\cos(4\pi x) + \cos(4\pi y)) e^{-\frac{t}{t_d}} \quad (29)$$

Gdje je $t_d = \frac{1}{4\nu\pi^2}$ Dok su početni uvjeti dati sa $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$.

Simulacija je izvršena nad rešetkom 64×64 . Početna gustoća je uzeta kao $\rho_0 = 1$, dok je maksimalna brzina uzeta kao $u_{max} = 0.02$. Simulacija je izvršena nad fluidom sa $\nu = 1/6$ i sa Reynoldsovim brojem od $Re = 7.68$.

Ukupno je urađeno 800 iteracija i ispod je dat grafik ukupne makroskopske energije fluida te greške u poređenju sa analitičkim rješenjem.



Slika 5: Greške prilikom simulacije

Kao što se vidi greške u makroskopskoj brzini fluida su reda 10^{-8} što je zadovoljavajuća tačnost za sve praktične primjene.

Primjetimo da greška konvergira ka nenuljoj vrijednosti, ovo je posljedica greške u računarskoj aritmetici. Također s obzirom na oblik krive greške zaključujemo da je u pitanju prekomjerna relaksacija.

Također činjenica da kinetička energija opada nije problematična s obzirom da simulirani fluid ima unutrašnje trenje čija je nuspojava zagrijavanje fluida.

Ovaj rezultat je naznaka da je tehnika uspješno implementirana.

Što se tiče performansi vrijeme provedeno u svakom metodu se mjerilo putem pythonovog profiler modula cPython. Nakon 5 mjerenja vremena izvršenja po 800 iteracija rezultati su sljedeći:

Ukupno vrijeme [s]	Vrijeme za strujanje [s]	Vrijeme za koliziju [s]
0.646	0.160	0.287
0.642	0.162	0.284
0.613	0.171	0.285
0.660	0.179	0.327
0.507	0.148	0.248

Tablica 1: Taylor Green performanse

Ukupno vrijeme uključuje i vrijeme neophodno za upis i ispis podataka, dok dvije bitne operacije simulacije strujanje i kolizija su date pored. Prosječna vremena za strujanje i koliziju su:

$$\mu_{strujanje} = 0.164s$$

$$\sigma_{strujanje} = 0.012s$$

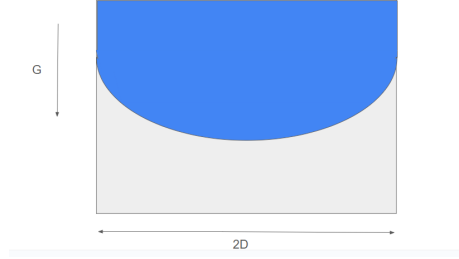
$$\mu_{kolizija} = 0.286s$$

$$\sigma_{kolizija} = 0.028s$$

4.1.2 Eksterna sila - Gravitacija

Ovo je najznačajniji primjer za konkretno razumijevanje LBM metoda. Naime svo vrijeme kroz ovaj rad se ne navode jedinice. Razlog za to nije lijenost, već zato što su neobične i zahtijevaju konkretno objašnjenje.

Kao što je ranije opisano posmatrajmo ponovo šupljinu širine 2D sa čvrstim vertikalnim i otvorenom horizontalnom granicom kao na slici:



Slika 6: Šupljina

Neka nad fluidom jedina eksterna sila je sila Zemljine teže. Fluid u pitanju je voda sa $\nu = 0.1$ i najveća makroskopska brzina je $U = 0.1$. Dimenzija rešetke je 600×300 dok je visina šupljine $L = 0.04m$ i širina $D = 0.02m$ [3]

Navino ako bismo postavili $F = 9.81\rho$ dobili bismo katastrofalno "rješenje". Takvo rješenje bi imalo energiju koja je proizvoljno velika po magnitudi, pa čak bi mogla i postati negativna, što je očigledan znak da je nešto pošlo po zlu. Razlog numeričke nestabilnosti leži u tome što bi takva sila rezultirala sa $Re \approx 2000000$ što je toliko nerealno velik broj da ne bismo trebali očekivati ikakav smislen rezultat.

Uzrok jeste što mi svo vrijeme ne radimo u SI jedinicama već u posebnim jedinicama koje se u literaturi nazivaju jedinice rešetke. Pošto u dosadašnjoj analizi to nije predstavljalo nikakav problem, nismo ni pominjali tu činjenicu. Stabilnost, korektnost i implementacija metoda zaista ne mare za jedinice mjere ali sada kada uvodimo eksternu silu moramo uračunati da je treba opisati u prikladnim jedinicama. [7]

Također ako bismo htjeli koristiti rezultate simulacije u praktične svrhe potrebno je prevesti \mathbf{u} i ρ iz jedinica rešetke u SI jedinice.

U nastavku veličine u jedinicama u SI ćemo označavati sa indeksom si dok veličine u jedinicama rešetke sa indeksom lb .

Ako imamo širinu rešetke da je 600 a da ona predstavlja 4cm stvarne dužine onda $\Delta x_{si} = \frac{0.04}{600}cm$ i $\Delta y_{si} = \frac{0.02}{300}cm$, odakle se vidi da je $\Delta x_{si} = \Delta y_{si}$.

Za vodu je

$$\nu_{si} = 0.035 \frac{cm^2}{s}$$

$$\rho_{si} = 1 \frac{g}{cm^3}$$

Postavljamo $\tau = 1$. Kako vrijedi:

$$\begin{aligned}\nu_{si} &= \frac{\Delta x_{si}^2}{\Delta t_{si}} \nu_{lb} \\ \nu_{lb} &= c_s^2(\tau - 0.5) \\ \Delta t_{si} &= \nu_{si} \frac{\Delta x_{si}^2}{c_s^2(\tau - 1/2)}\end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobijamo:

$$\Delta t_{si} = 0.035 \frac{\frac{160}{36} 10^{-9}}{1/6} = \frac{336}{36} ns$$

Kako mi uvijek koristimo $\Delta t_{lb} = 1$ i $\Delta x_{lb} = \Delta y_{lb} = 1$, to znači da svaka iteracija simulacije korespondira sa circa 9,33 ns u stvarnosti, dok je svaka ćelija međusobno udaljena $\frac{2}{3} \mu m$.

Na sličan način pretvaramo i gravitacionu konstantu

$$g_{lb} = g_{si} \frac{\Delta t_{si}^2}{\Delta x_{si}} = 9.81 \frac{(\frac{336}{36} 10^{-9})^2}{\frac{2}{3} 10^{-9}} \approx 1.28 \times 10^{-6}$$

Ovo je veličina koju trebamo koristiti prilikom simulacije. [7]

Zanimljiva posljedica ove dimenzione analize u općem slučaju nalaže da povećanje početne brzine u jedinicama rešetke u_0 povlači smanjenje Δt_{si}

Animirana simulacija sa ovakvim parametrima je data u prilogu sa 200 kadraka.

Performanse mjerene na isti način kao u prethodnom primjeru su:

Ukupno vrijeme [s]	Vrijeme za strujanje [s]	Vrijeme za koliziju [s]
7.910	1.505	2.686
7.956	1.523	2.702
8.043	1.525	2.735
7.960	1.537	2.694
7.953	1.537	2.685

Tablica 2: Gravitacija performanse

Prosječna vremena za strujanje i koliziju su:

$$\begin{aligned}\mu_{strujanje} &= 1.525s \\ \sigma_{strujanje} &= 0.013s \\ \mu_{kolizija} &= 2.7s \\ \sigma_{kolizija} &= 0.021s\end{aligned}$$

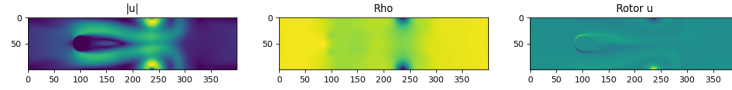
4.1.3 Krug kao prepreka

Sljedeća simulacija pokazuje velike prednosti ove metode. Neka je data rešetka dimenzija 400×100 . Fluid u pitanju ima $\nu_{lb} = 0.02$ i kreće se sa $Re = 2000$. Za očekivati je da se ovakav fluid kreće turbulentno.

Na poziciji (100, 50) se nalazi krug poluprečnika 15 ćelija.

Početni uvjeti fluida su takvi da se u svim stranama $f = u_m(1 + \text{random}(0, 0.01))$ izuzev za $f_3 = 2.3u_m$. Gdje je $u_m = 0.01$.

Simulacija je trajala 3000 koraka.



Slika 7: Korak 2000

Vidimo da je izraženo vrtloženje oko kruga što potvrđuje da je tok turbulentan. Za 3000 iteracija u tri mjerenja izmjerene su sljedeće performanse.

Ukupno vrijeme [s]	Vrijeme za strujanje [s]	Vrijeme za koliziju [s]
18.901	3.973	4.905
19.102	3.974	5.025
19.134	3.988	4.945

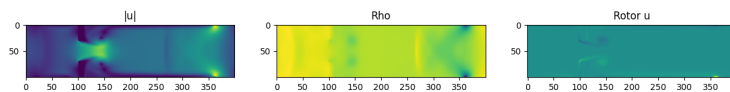
Tablica 3: Turbulentni tok performanse

4.1.4 Suženje

Kao pokaz kako simulacija može raditi sa kompleksnim geometrijama, neka je data identična postavka kao u prethodnoj simulaciji sa promjenjenom geometrijom.

Prvi pravougaonik ima tjemena koordinata (100, 0), (110, 0), (100, 30), (110, 30).

Drugi pravougaonik ima tjemena koordinata (100, 70), (110, 70), (100, 100), (110, 100).



Slika 8: Korak 500

Druge simulacije sa raznim postavkama su date u prilogu, njihova namjena služi kao pokaz moći implementirane metode.

4.2 Trodimenzionalne Simulacije

Vrhunac ovog seminarskog rada jeste efektivna implementacija LBM metoda u trodimenzionalnom prostoru. Neka je data cijev koja je opisana rešetkom $400 \times 100 \times 100$. Unutar cijevi se nalazi sfera poluprečnika 10 i središtem u $(100, 50, 50)$. Fluid u pitanju je niske viskoznosti sa relaksacijskim vremenom $\tau = 0.53$. Početni uvjeti za diskretnu funkciju sudara su takvi da je $f_i = 1 + \text{random}(0, 0.01)$ za sve smjerove osim $f_1 = 2.3$ što predstavlja težnju toka da se kreće desno, i to laminarno.

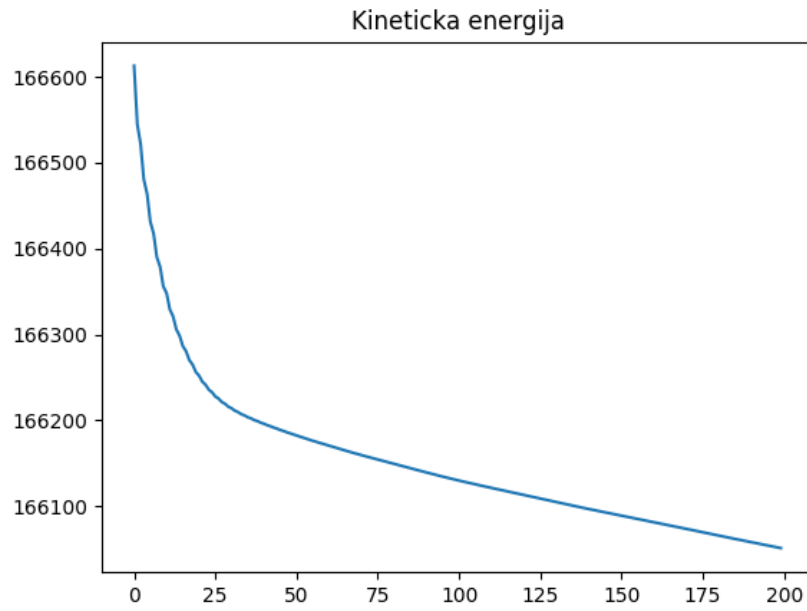
Simulirano je 200 iteracija. Ukupno je simulacija trajala skoro 13 minuta. Prvih pet redova iz tabele profilera je dato ispod:

11505563 function calls (11406172 primitive calls) in 766.777 seconds

Ordered by: cumulative time

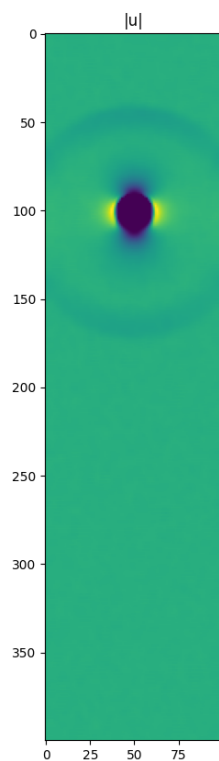
ncalls	totttime	percall	cumtime	percall	filename:lineno(function)
200	49.530	0.248	757.262	3.786	lbm3d.py:97(simulate_step)
200	238.358	1.192	418.002	2.090	lbm3d.py:62(stream)
200	176.051	0.880	198.173	0.991	lbm3d.py:68(equilibrium)
11400	179.597	0.016	179.644	0.016	numeric.py:1185(roll)
1200	0.007	0.000	57.940	0.048	fromnumeric.py:2338(sum)

Nažalost ne postoji lijep način za vizualizacije funkcija domene koja je poskup \mathbb{R}^3 . Stoga za ukupnu sliku o ponašanju fluida najkorisnija je njegova makroskopska energija E .



Slika 9: Makroskopska energija

Kao vizualizaciju polja makroskopske brzine \mathbf{u} koristimo presjek sa ravni $z = 50$.



Slika 10: Iteracija 100

Nažalost u trodimenzionalnom prostoru ne postoji netrivialan tok koji posjeduje analitičko rješenje. Naravno kod korišten za trodimenzionalnu simulaciju je samo blaga prepravka dvodimenzionalne verzije ali nisam u stanju adekvatno procijeniti red greške.

5 Zaključak

U ovom radu smo opisali teoriju iza rešetkaste Boltzmanove metode i na osnovu nje implementirali solver Navier-Stokes jednačina u dvodimenzionalnom i tro-dimenzionalnom prostoru.

Implementacija se pokazala dosta dobrom u dvodimenzionalnom prostoru. Patološki slučaj Taylor-Green Vrtloga smo numerički riješili i simulirali na tačnost od 8 decimala. Dvodimenzionalna verzija se pokazala brзом i stabilnom pri kompleksnim geometrijama i čak pri turbulentnim tokovima.

Trodimenzionalna verzija simulacije dijeli sa dvodimenzionalnom verzijom mogućnost simuliranja turbulentnih tokova i kompleksnih geometrija, ali se pokazala katastrofalno sporom. Razlog za loše performanse leži u tome što je implementacija jednonitna, odnosno nismo iskoristili jednu od najvećih prednosti LBM a to je njena laka paralelizacija. Budući napredak bi morao uključivati paralelnu implementaciju.

Trenutno smo u stanju simulirati jedino situacije u kojima je fluid homogen i Njutnovski. Dakle ne bismo bili u stanju simulirati recimo difuziju tinte u vodi jer su njihove viskoznosti drugačije. Također fluid kao što je krv nema konstantnu viskoznost i takav fluid sa trenutnom implementacijom ne bismo mogli simulirati. Srećom postoji ekstenzija nad BGK operatorom koja u literaturi naziva metodom višeparametarskog relaksacijskog vremena (MRT) kojom mjesto jednog relaksacijskog vremena τ se uvodi niz relaksacijskih vremena S . Trenutna implementacija bi se poprilično lako mogla prilagoditi da postane MRT model s obzirom da bismo trebali samo promijeniti metodu *equilibrium*.

Dalje prostor za popravku predstavlja činjenica da trenutno simuliramo tok i pritisak fluida i samo tok i pritisak fluida. U praktičnim primjenama je zanimljivo pitanje recimo koliko se zagrije fluid. Čak je i to jednostavna promjena koja bi se mogla uraditi u 5 linija koda ubacujući u model sljedeću jednačinu

$$\sigma_{\alpha\beta} = -(1 - \frac{\Delta t}{\tau}) \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} (f_i - f_i^{eq})$$

Na osnovu ove jednačine možemo također i simulirati eroziju granice. Ako je potrebno simulirati strujanje fluida u homogenoj sredini, pri niskom Mahovom broju onda je ponuđena implementacija adekvatna. Glavna prednost se ogleda u sposobnosti tretiranja složenih geometrijskih postavki, složenih eksternih sila i turbulentnog toka.

Literatura

- [1] T. Krüger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, and E. M. Viggien, *The Lattice Boltzmann Method - Principles and Practice*. 10 2016.
- [2] K. Staničić, “Simulacija fluida metodom lbm.” Završni rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, 2022. Dostupno na: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:168:891386>.
- [3] J. Derksen, “A lattice boltzmann (short) course for post-graduate research students.” Course Materials, 2018. Offered by the Department of Computer Science, University of Aberdeen, Available at: <https://homepages.abdn.ac.uk/jderksen/pages/lbm.html>.
- [4] C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt, R. Gommers, P. Virtanen, D. Cournapeau, E. Wieser, J. Taylor, S. Berg, N. J. Smith, R. Kern, M. Picus, S. Hoyer, M. H. van Kerkwijk, M. Brett, A. Haldane, J. F. del Río, M. Wiebe, P. Peterson, P. Gérard-Marchant, K. Sheppard, T. Reddy, W. Weckesser, H. Abbasi, C. Gohlke, and T. E. Oliphant, “Array programming with NumPy,” *Nature*, vol. 585, pp. 357–362, Sept. 2020.
- [5] J. D. Hunter, “Matplotlib: A 2d graphics environment,” *Computing in Science & Engineering*, vol. 9, no. 3, pp. 90–95, 2007.
- [6] T. Hastor, “Popratni repozitorij za: Simulacija protoka fluida pri prisustvu čvrstih tijela - seminarski rad - računarsko modeliranje i simulacija.” <https://github.com/lilhast1/lattice-boltzmann.git>, 2025. Accessed: January 13, 2025.
- [7] J. Buick and C. Greated, “Gravity in a lattice boltzmann model,” *Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics*, vol. 61, pp. 5307–20, 06 2000.