



**40 ANOS DO CURSO DE BACHARELADO
EM ESTATÍSTICA DA UFBA**

TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM

MODELOS PARA ITENS DICOTÔMICOS

Lilia Costa e Silvia Moraes

20 de marco de 2024



OBJETIVO:

**A PRESENTAR UMA DESCRIÇÃO DOS MODELOS
DICOTÔMICOS DA TRI E DAS IMPLEMENTAÇÕES
NO SOFTWARE R**

MODELOS PSICOMÉTRICOS:

- Teoria Clássica dos Testes - TCT
- Teoria de Resposta ao Item - TRI

Os modelos TCT e TRI possuem enfoques distintos, mas eles são compatíveis. Nesse sentido, há similaridades e divergências entre esses dois modelos Psicométricos (PASQUALI, 2003).

TEORIA CLÁSSICA DOS TESTES

Modelo da Psicometria Clássica é representado por:

$$T_i = V_i + \epsilon_i$$

T_i - escore bruto observado no i-ésimo indivíduo (a soma dos pontos obtidos no teste).

V_i - escore verdadeiro do i-ésimo indivíduo.

ϵ_i - erro de medida, $E(\epsilon_i)=0$.

TEORIA CLÁSSICA DOS TESTES

Análise dos Itens

Coeficiente de dificuldade dos itens

$$D_i = \frac{A_i}{n_i}$$

em que,

Item	Indivíduos				Proporção de acertos
	1	2	...	10	
Item 1	1	0	...	0	0,9
Item 2	0	1	...	1	0,6
Item 3	0	0	...	0	0,8
Item 4	0	0	...	0	0,3
Item 5	1	0	...	1	0,7

Item mais fácil

Item mais difícil

A_i = nº indivíduos que acertaram o item i ;
 n_i = nº indivíduos que respondera o item i ,

Quanto maior for o valor de D_i , mais fácil é o item.

TEORIA CLÁSSICA DOS TESTES

Análise dos Itens

Discriminação do item

É a capacidade de diferenciar indivíduos com escore altos no testes de indivíduos com escore mais baixo (Pasquali, 2003).

Coeficiente de correlação ponto-bisserial

$$\rho_{pb} = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_T}{S_T} \sqrt{\frac{p}{1-p}}$$

em que,

\bar{X}_A = média dos escores dos indivíduos que acertaram o item;

\bar{X}_T = média global dos escores do teste;

S_T = desvio padrão do teste;

p = proporção de respondentes que acertaram o item.

TEORIA CLÁSSICA DOS TESTES

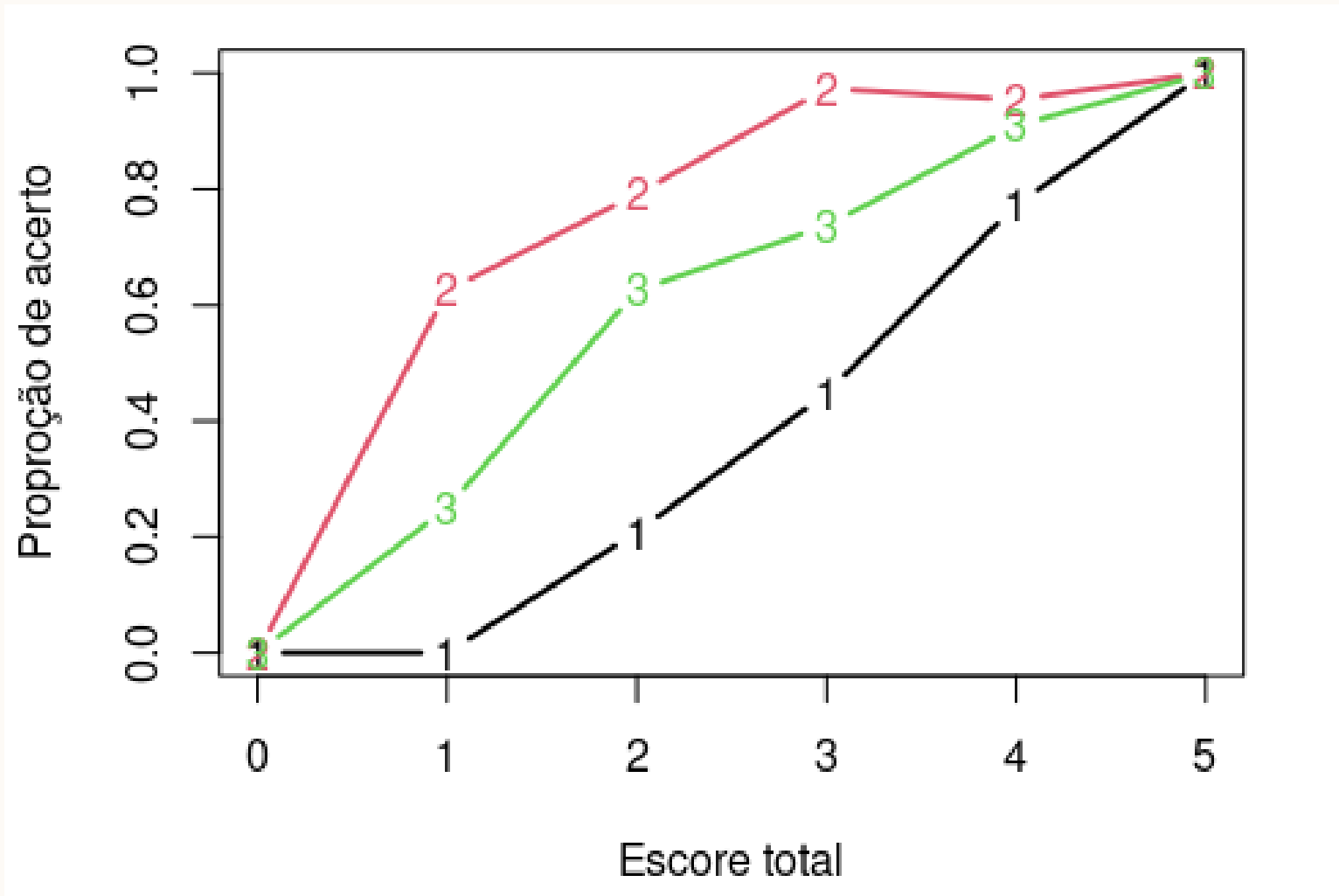
Análise dos Itens

Coeficiente de correlação ponto bisserial (ρ_{pb})

- É esperado um valor positivo e elevado para ρ_{pb} .
- Valores de ρ_{pb} negativo indica que o item precisa ser examinado. Há problema com o item, por exemplo, erro no gabarito, ter mais de uma solução, não ter solução ou ter solução, mas problema de enunciado Klein(2005).
- De forma geral, valores acima de 0,30 são considerados bons.

TEORIA CLÁSSICA DOS TESTES

Análise Gráfica do Item



❑ Teoria Clássica dos Testes – TCT *Pasquali e Primi (2003)*

- A pontuação no teste é por meio de escore brutos e dependente do conjunto de itens que compõem a prova. Por exemplo, o escore do sujeito depende e varia segundo o teste aplicado seja mais fácil ou mais difícil.
- As comparações entre indivíduos é possível somente quando foram submetidos às mesmas provas, ou pelo menos, a formas paralelas de testes (avaliações que medem a mesma coisa, mas possuem itens diferentes).
- O foco da análise é na prova como um todo.

❑ Teoria de Resposta ao Item – TRI

- Muda o foco de análise da prova como um todo para a análise de cada item que compõe a prova.
- É possível construir uma escala de habilidade que permite acompanhar o nível de conhecimento adquirido pelo aluno ao longo do tempo.

TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM

Modelo Logístico de 1 Parâmetro - Modelo de Rasch

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-D(\theta_j - b_i)}}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, I \text{ e } j = 1, 2, \dots, n.$$

U_{ij} - variável dicotômica (1- o indivíduo j acerta o item i ou 0 - o indivíduo j erra item i);

θ_j - habilidade (traço latente) do indivíduo j ;

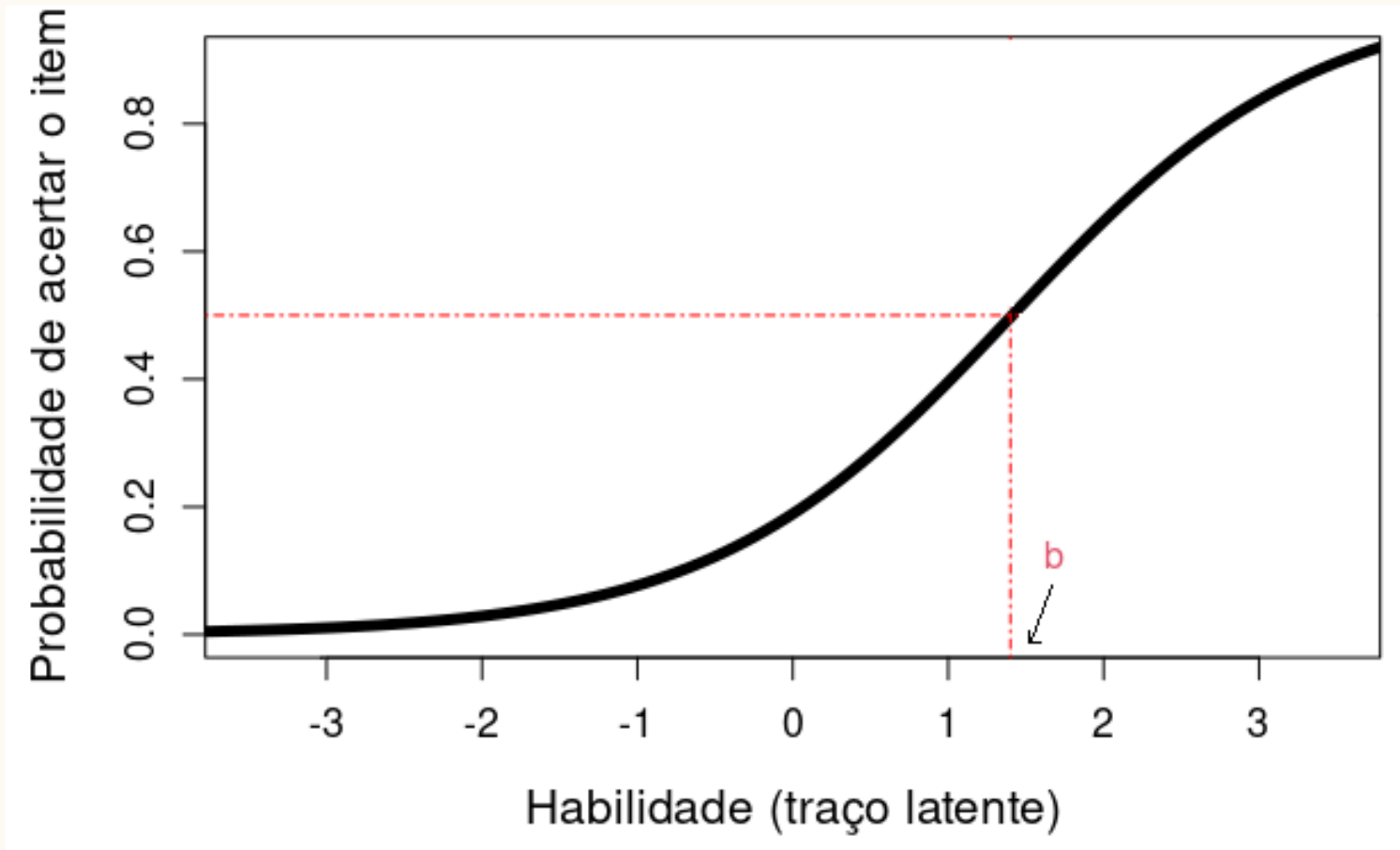
$P(U_{ij} = 1|\theta_j)$ - probabilidade de um indivíduo j responder corretamente o item i , dada uma habilidade θ_j responder corretamente o item i ;

b_i - parâmetro de dificuldade (parâmetro de posição) do item i ;

D = valor constante ($D=1$ – métrica logística e $D=1,7$ métrica normal).

CURVA CARACTERÍSTICA DO MODELO - ICC

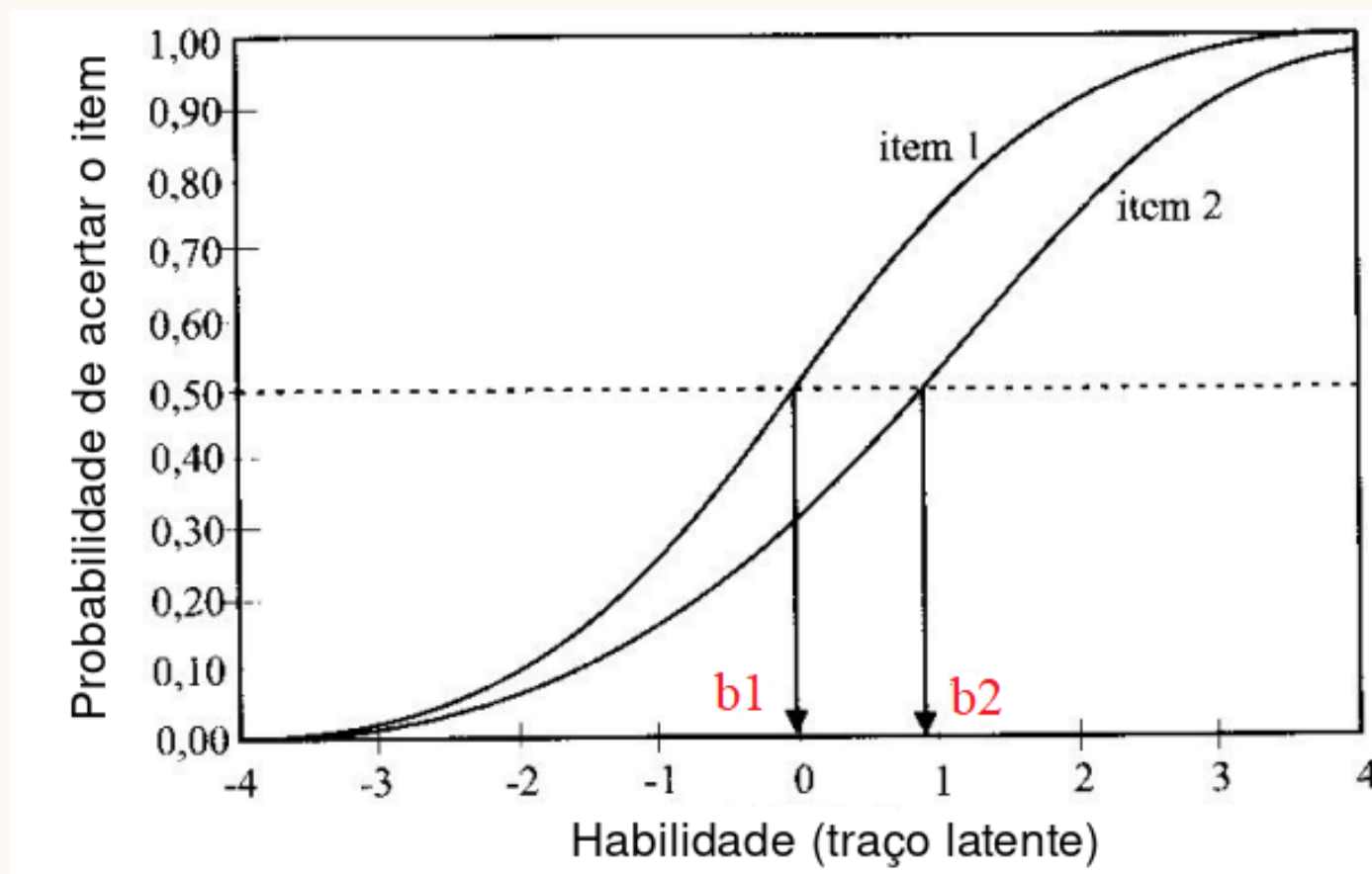
Logístico de 1 Parâmetro



A habilidade do indivíduo (θ_j) e o nível de dificuldade do item (b_i) são medidos em uma mesma escala. Geralmente, nas aplicações práticas usa a escala (0, 1).

CURVA CARACTERÍSTICA DO ITEM – CCI

Análise Gráfica do Item



Fonte: Pasquali (2017), p. 87

Quanto maior for o parâmetro de dificuldade (b_i), maior deve ser o nível de habilidade do indivíduo (θ_j) para que ele acerte o item i , com probabilidade de 0,5. Na prática, espera-se valores de b_i no intervalo $[-3; +3]$.

TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM

Modelo Logístico de 2 Parâmetros

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-D\mathbf{a}_i(\theta_i - \mathbf{b}_i)}}, \quad i = 1, 2, \dots, I \text{ e } j = 1, 2, \dots, n.$$

U_{ij} - variável dicotômica (1- o indivíduo j acerta o item i ou 0 - o indivíduo j erra item i);

θ_j - habilidade (traço latente) do indivíduo j ;

$P(U_{ij} = 1|\theta_j)$ - probabilidade de um indivíduo j responder corretamente o item i , dada uma habilidade θ_j responder corretamente o item i ;

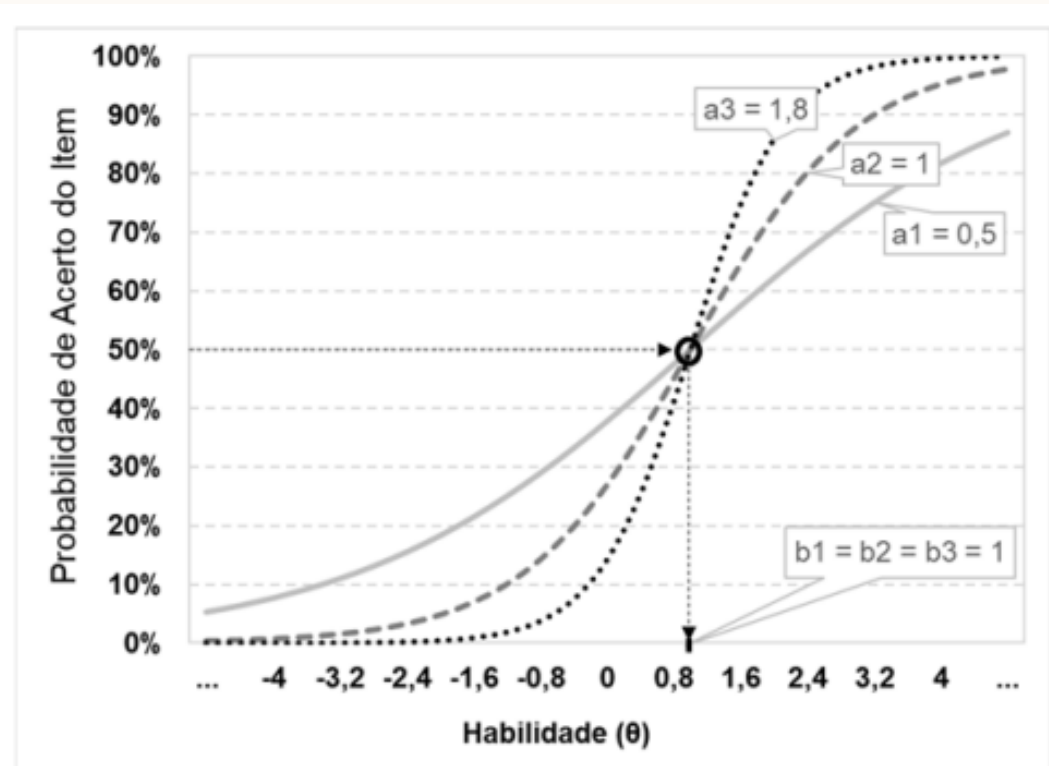
b_i - parâmetro de dificuldade (parâmetro de posição) do item i ;

\mathbf{a}_i - parâmetro de discriminação (grau de inclinação) do item i ;

D = valor constante ($D=1$ – métrica logística e $D=1,7$ métrica normal).

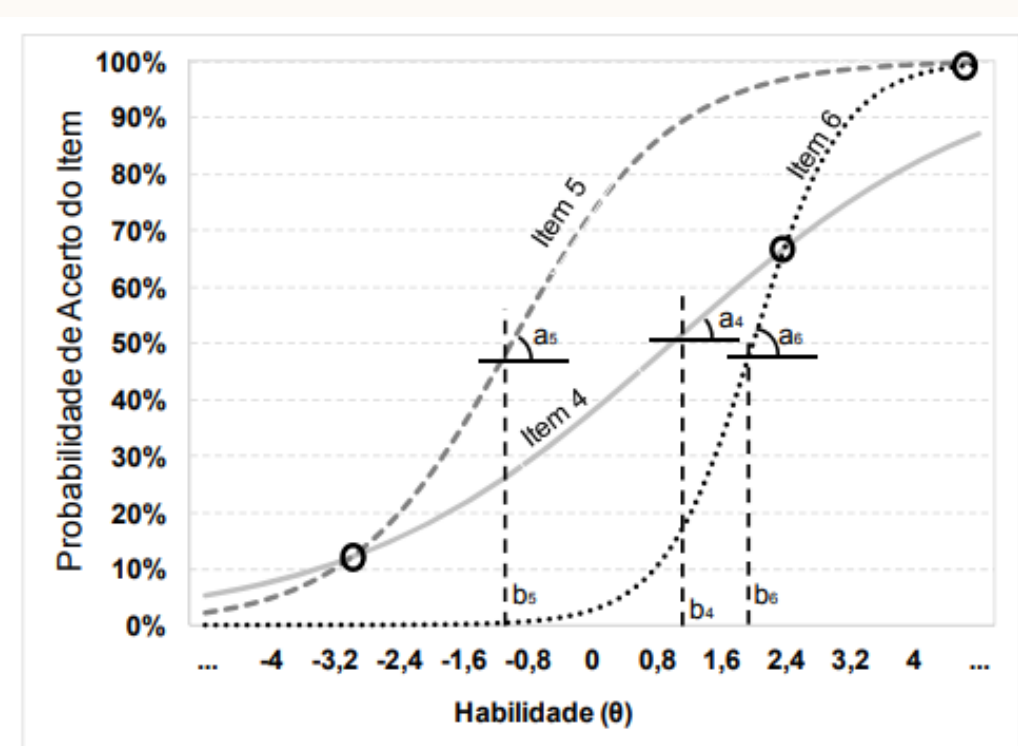
CURVA CARACTERÍSTICA DO ITEM – CCI

Análise Gráfica do Itens



Fonte: Silva (2017), p. 99.

Itens com mesma dificuldade



Fonte: Silva (2017), p. 100.

Itens com dificuldades distintas

O parâmetro discriminação o item (a_i) corresponde a inclinação da curva (ângulo) no ponto de inflexão, em que a probabilidade de acertar o item é 0,50. O valor de $a_i > 0$, mas na prática espera-se valores no intervalo de $[0; 2]$.

TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM

Modelo Logístico de 3 Parâmetros

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-D a_i(\theta_j - b_i)}}, \quad i = 1, 2, \dots, I \text{ e } j = 1, 2, \dots, n.$$

U_{ij} - variável dicotômica (1- o individuo j acerta o item i ou 0 - o indivíduo j erra item i);

θ_j - habilidade (traço latente) do indivíduo j ;

$P(U_{ij} = 1|\theta_j)$ - probabilidade de um indivíduo j responder corretamente o item i , dada uma habilidade θ_j responder corretamente o item i ;

b_i - parâmetro de dificuldade (parâmetro de posição) do item i ;

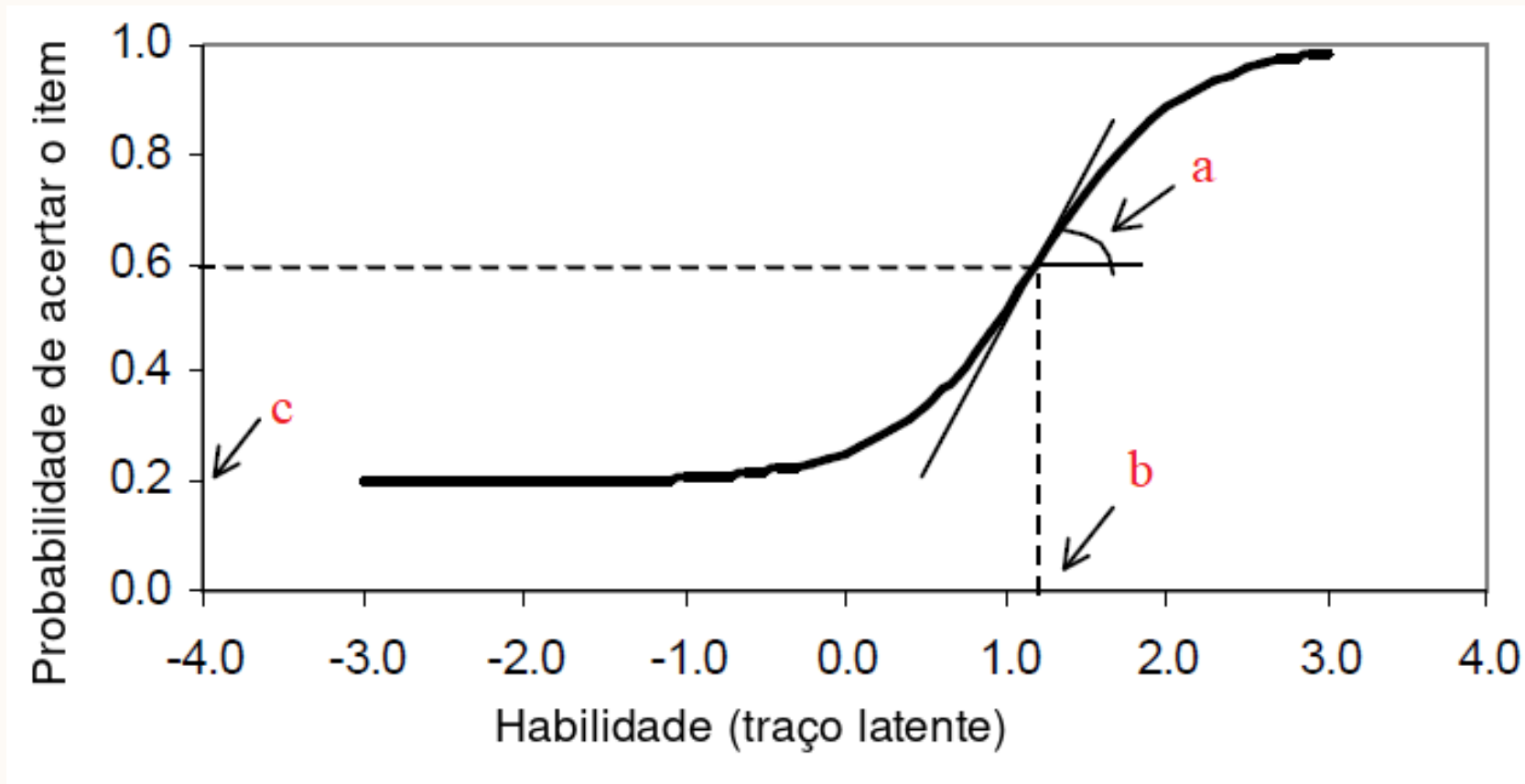
a_i - parâmetro de discriminação (grau de inclinação) do item i ;

c_i - probabilidade de acerto casual do item i ($0 < c_i < 1$).

D = valor constante ($D=1$ – métrica logística e $D=1,7$ métrica normal).

CURVA CARACTERÍSTICA DO ITEM – CCI

Modelo Logístico de Três Parâmetros.



Fonte: Andrade, Tavares e Valle (2000), p. 11.

O parâmetro b representa a habilidade necessária para se ter uma probabilidade de acerto igual a $(1+c)/2$.

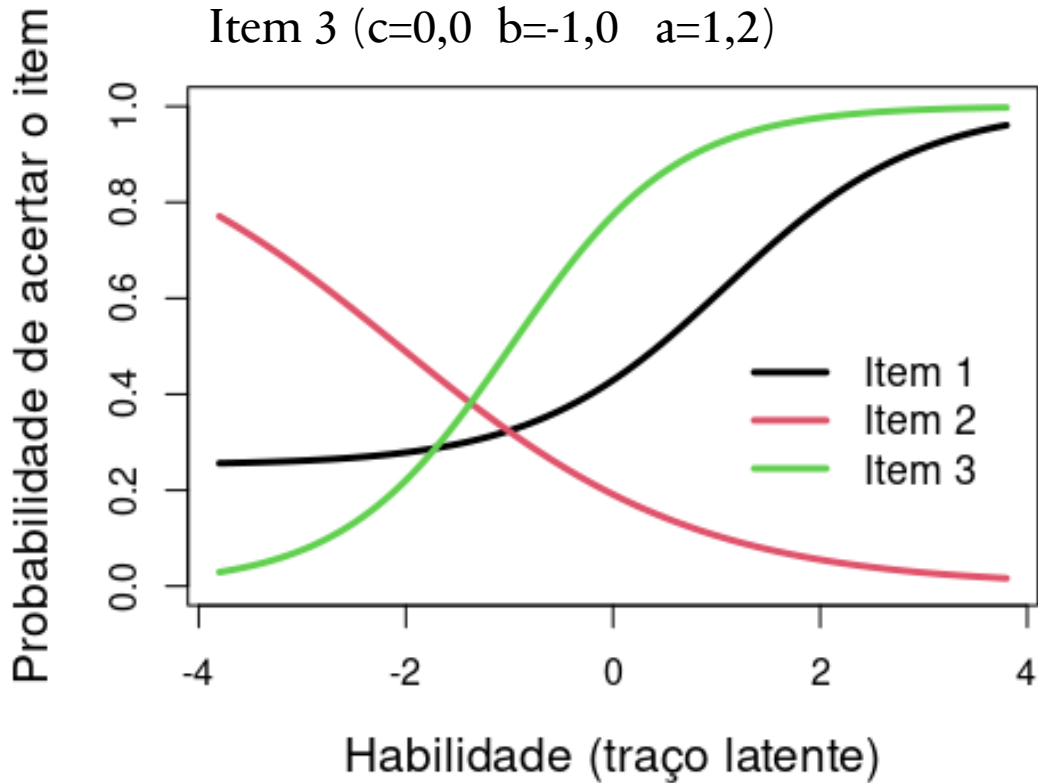
EXEMPLO DE ANÁLISE GRÁFICA DOS ITENS.

Exemplos de curvas associadas aos itens

Item 1 ($c=0,25$; $b=1,0$; $a=1,0$)

Item 2 ($c=0,0$ $b=-2,0$; $a=-0.7$)

Item 3 ($c=0,0$ $b=-1,0$ $a=1,2$)



Itens de um teste corrigidos como certo/errado (1=certo e 0 =errado).

Indivíduo	Item 1	Item 2	Item 3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	0
4	0	0	1
...

Obs.: Item 2 apresenta um comportamento não desejável

EXEMPLO: PROBABILIDADE DE ACERTAR UM ITEM VARIANDO OS PARÂMETROS DOS ITENS E DAS HABILIDADES.

Item	Parâmetros				$P(U_{ij} = 1 \theta_j)$
	a_i	b_i	c_i	θ_j	
1	1,00	-3,00	0,00	1,00	1,00
2	1,500	-2,00	0,10	-2,10	0,55
3	2,00	-0,50	0,15	-1,3	0,20
4	2,5	0,00	0,20	0,50	0,91
5	2,10	1,30	0,11	1,00	0,34
6	1,80	2,10	0,25	2,05	0,60
7	1,50	3,00	0,16	2,50	0,34

Item mais fácil

Item mais difícil

Fonte: Pasquali (2017), p. 90

SUPOSIÇÕES DA TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM

- Unidimensionalidade: indica que somente uma habilidade é responsável pela resposta a todos os itens do teste. Na prática, é suficiente admitir que exista uma habilidade dominante (fator ou traço latente dominante) responsável pelo desempenho no teste.
- Independência local: mantidas constantes as habilidades que afetam o teste, as respostas dos indivíduos a quaisquer dois itens são estatisticamente independentes. Ou seja, cada item é respondido pelo indivíduo em função da habilidade dominante.

FUNÇÃO DE INFORMAÇÃO DO ITEM

Função de informação de um item para o modelo de 3 parâmetros é dada por:

$$I_i(\theta) = D^2 a_i^2 \frac{[1 - P_i(\theta)]}{P_i(\theta)} \left[\frac{P_i(\theta) - c_i}{1 - c_i} \right]^2$$

$I_i(\theta)$ é a “informação” fornecida pelo item i no nível de habilidade θ ;

$P_i(\theta) = P(X_{ij} = 1 | \theta)$ e $Q_i(\theta) = 1 - P_i(\theta)$.

O valor de $I_i(\theta)$ será maior quando:

- a) b_i se aproxima de θ ;
- b) maior for o a_i ;
- c) c_i se aproximar de 0.

FUNÇÃO DE INFORMAÇÃO DO TESTE

Função de informação de um teste para o modelo de 3 parâmetros é dada por:

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^I I_i(\theta)$$

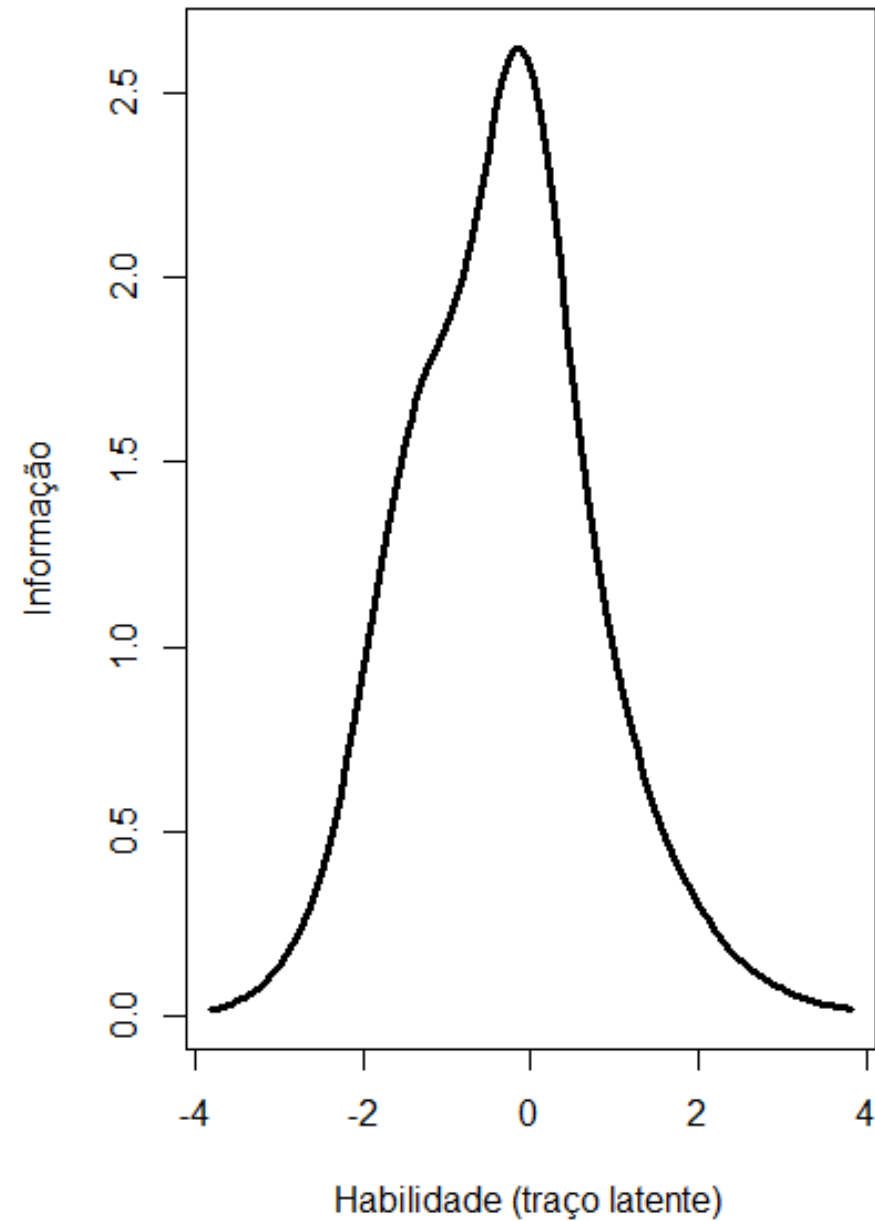
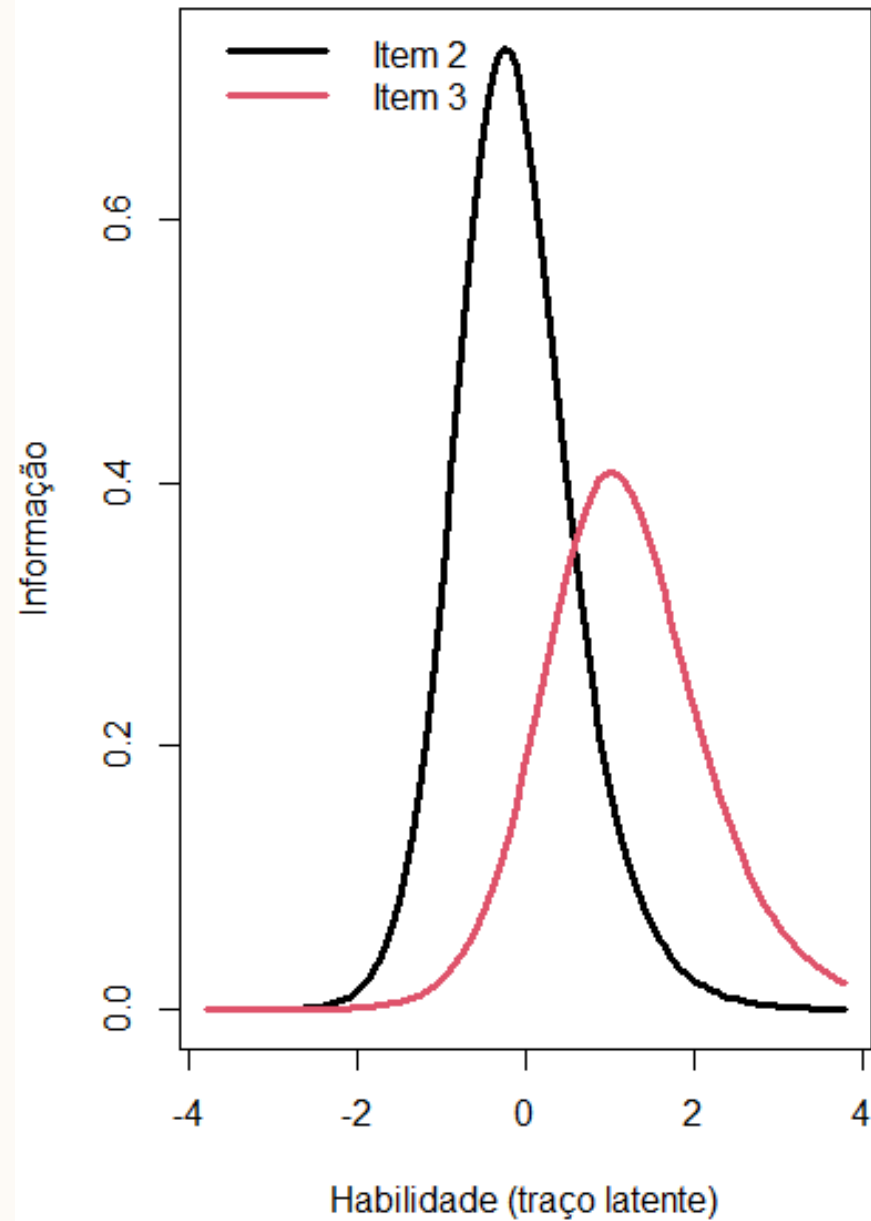
$I_i(\theta)$ é a “informação” fornecida pelo item i no nível de habilidade θ .

$I(\theta)$ é a “informação” fornecida pelo teste no nível de habilidade θ .

Forma alternativa de representar a função de informação do teste:

$$EP(\theta) = \frac{1}{\sqrt{I(\theta)}}$$

FUNÇÃO DE INFORMAÇÃO



ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

Software R - Implementação dos modelos:

Modelo Logístico de 1 Parâmetro (M1P)

b_i – *parâmetro de dificuldade*

Modelo Logístico de 2 Parâmetro (M2P)

b_i – *parâmetro de dificuldade*

a_i – *parâmetro de discriminação*

Modelo Logístico de 3 Parâmetros (M3P)

b_i – *parâmetro de dificuldade*

a_i – *parâmetro de discriminação*

c_i – *parâmetro acerto casual*

Funções implementadas no pacote “ltm”.

rasch()	M1P
ltm()	M2P
tpm()	M3P
grm ()	Modelo de resposta gradual

ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

Os dados usado no exemplo estão disponíveis no Software R e provêm do artigo “Fitting a Response Model for n Dichotomously Scored Items” dos autores Bock and Lieberman (1970).

O LSAT é um teste usado para admissão nas faculdades de Direito no Canadá. Neste teste, os participantes são avaliados por meio de uma redação e uma prova de múltipla escolha.

O banco de dados LSAT7 contém respostas de 1000 pessoas em 5 itens da prova objetiva.

ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

```
#####  
# Pacote e dados  
#####  
#####  
# Pacote e dados  
#####  
#install.packages("mirt")  
library("mirt")  
#install.packages("ltm")  
library(ltm)  
#install.packages('psych')  
library(psych)  
#install.packages('nFactors')  
library(nFactors)
```

ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

```
#####
```

```
##Análise descritiva dos itens
```

```
#####
```

```
descript(LSAT)
```

```
#Matriz de correlação tetracórica dos itens
```

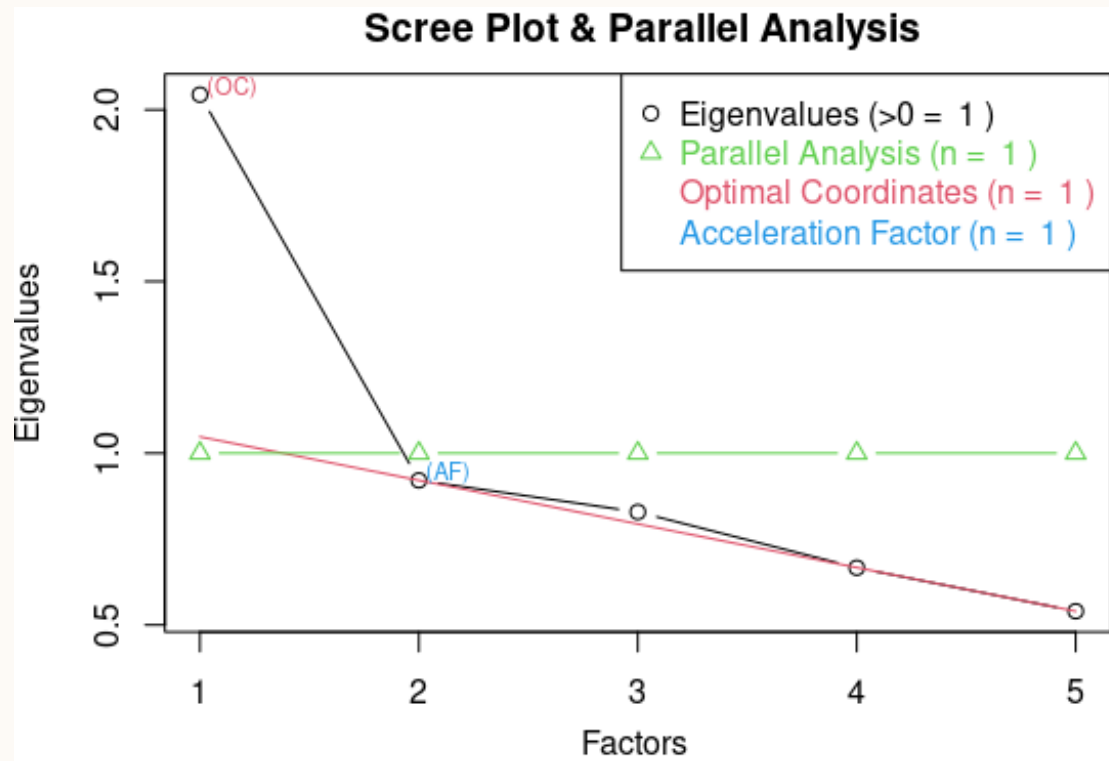
```
tetrachoric(data)
```

ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

Unidimensionalidade: Análise Fatorial

```
(evalues<-eigen(tetrachoric(data)$"rho")$values)plotnScree(nScree(evalues,  
model="factors"), main="Scree Plot & Parallel Analysis")
```



ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

```
#####
```

```
M1P - Ajustando o modelo 1 parâmetro
```

```
#####
```

```
fit1=rasch(data)
```

```
summary(fit1)
```

```
coef(fit1)
```

```
> coef(fit1)
```

```
      > coef(fit1)
```

```
      Dffclt Dscrmn
```

```
Item.1 -1.8480726 1.01097
```

```
Item.2 -0.7824312 1.01097
```

```
Item.3 -1.4451756 1.01097
```

```
Item.4 -0.5158415 1.01097
```

```
Item.5 -1.9713999 1.01097
```

#Grau de dificuldade dos itens: $5 < 1 < 3 < 2 < 4$

ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

```
#####
```

M2P - Ajustando o modelo de 2 parâmetros

```
#####
```

```
fit2=ltm(data~ z1)
```

```
summary(fit2)
```

```
coef(fit2)
```

```
> coef(fit2)
```

	Dffc1t	Dscrmn
--	--------	--------

Item.1	-1.8791363	0.9877086
--------	------------	-----------

Item.2	-0.7475388	1.0808416
--------	------------	-----------

Item.3	-1.0573431	1.7066397
--------	------------	-----------

Item.4	-0.6353278	0.7650036
--------	------------	-----------

Item.5	-2.5206726	0.7357208
--------	------------	-----------

#Grau de dificuldade dos itens: 5<1<3<2<4

#Grau de discriminação dos itens: 5<4<1<2<3

ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

```
#####
```

M3P - Ajustando o modelo de parâmetros

```
#####
```

```
fit3 <- tpm(data)
```

```
summary(fit3)
```

```
coef(fit3)
```

```
> coef(fit3)
```

	Gussng	Dffclt	Dscrmn
Item.1	2.846978e-06	-1.85274463	1.0070895
Item.2	2.981380e-01	-0.04140655	1.9531094
Item.3	5.032448e-04	-1.06835650	1.6657102
Item.4	3.110354e-12	-0.65527131	0.7354424
Item.5	1.406467e-04	-2.43421622	0.7676795

ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

#Teste de razão de verossimilhança entre modelos M1P e M2P para verificar qual tem o
#melhor ajuste.

```
anova(fit1, fit2)
```

```
> anova(fit1, fit2)
```

Likelihood Ratio Table

	AIC	BIC	log.Lik	LRT	df	p.value
fit1	5341.80	5371.25	-2664.90			
fit2	5337.61	5386.69	-2658.81	12.19	4	0.016

ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

#Teste de razão de verossimilhança entre modelos M2P e M3P para verificar qual tem o
#melhor ajuste.

```
anova(fit2, fit3)
```

```
> anova(fit2, fit3)
```

Likelihood Ratio Table

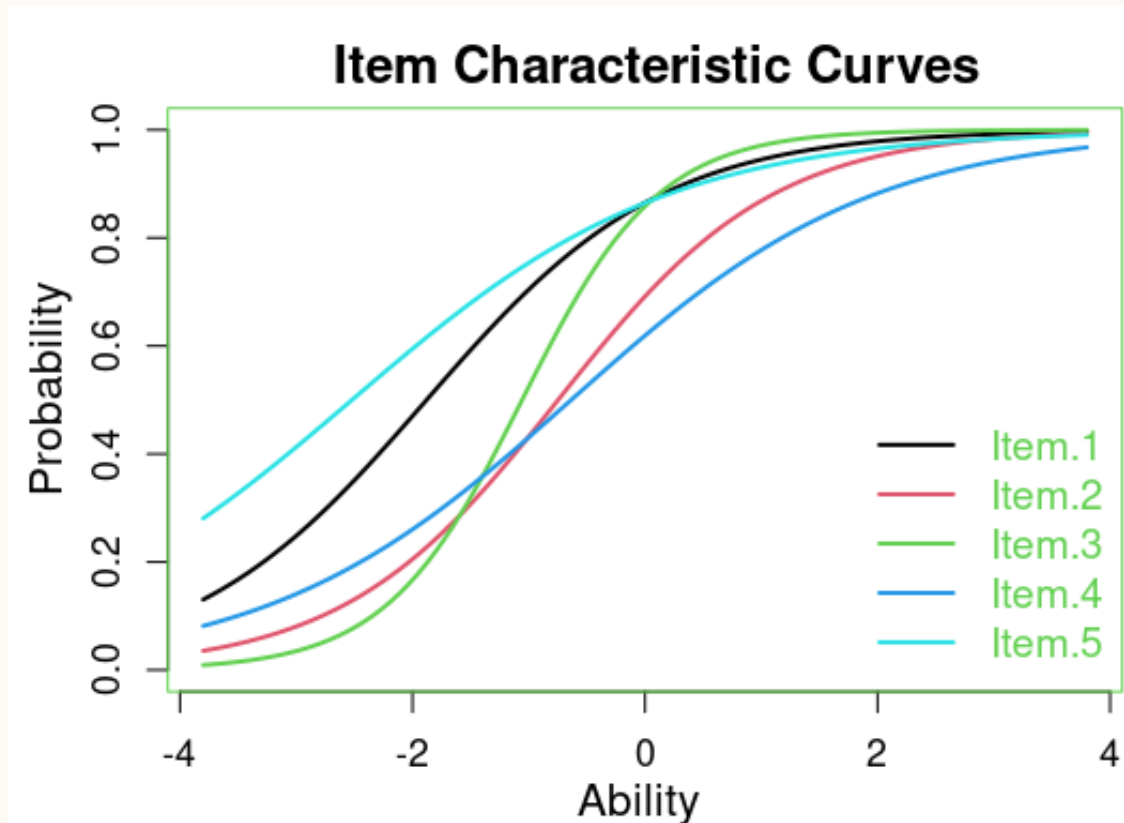
	AIC	BIC	log.Lik	LRT	df	p.value
fit2	5337.61	5386.69	-2658.81			
fit3	5346.11	5419.73	-2658.05	1.5	5	0.913

ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

Curva Característica do Item – CCI

```
plot(fit2, lwd = 2, cex = 1.2, legend = TRUE, cx = "bottomright", cex.main = 1.5, cex.lab = 1.3, cex.axis = 1.1)
```

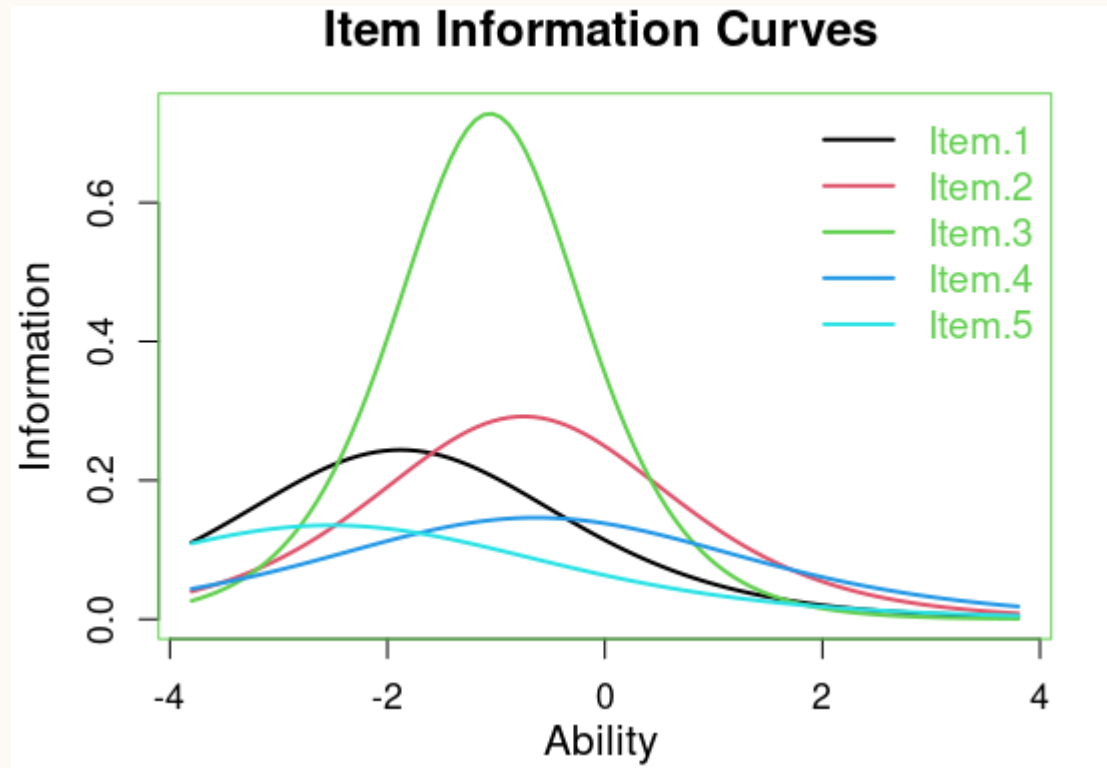


ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

Curva de Informacao do Item – CII

```
plot(fit2, type = "IIC", lwd = 2, cex = 1.2, legend = TRUE, cx = "topright", cex.main = 1.5, cex.lab = 1.3, cex.axis = 1.1)
```

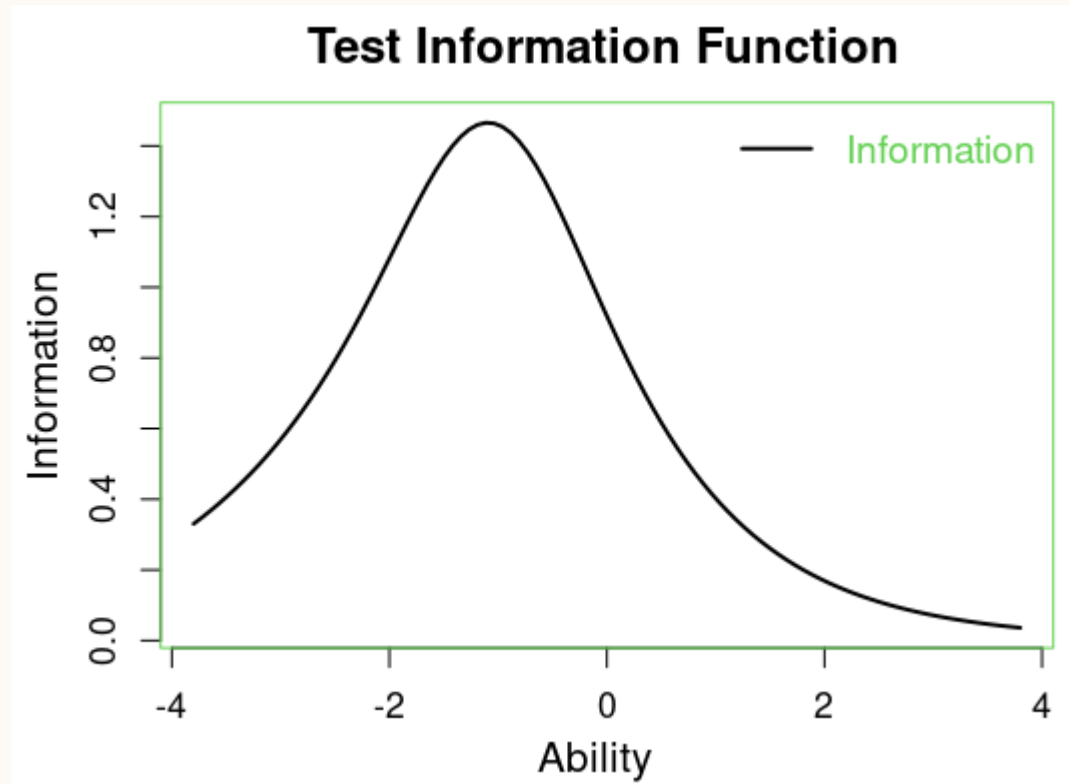


ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

Curva de Informação do Teste – CI

```
Tplot(fit2, type = "IIC", items = 0, lwd = 2, cex = 1.2, legend = TRUE, cx = "topright",  
cex.main = 1.5, cex.lab = 1.3, cex.axis = 1.1)
```



ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DA TRI

Modelos Dicotômicos

```
##### Estimando a Habilidade (traço latente) por padrão de respostas  
ltm::factor.scores(fit2)
```

```
ltm(formula = data ~ z1)
```

Scoring Method: Empirical Bayes

Factor-Scores for observed response patterns:

	Item.1	Item.2	Item.3	Item.4	Item.5	Obs	Exp	z1	se.z1
1	0	0	0	0	0	12	10.089	-1.816	0.675
2	0	0	0	0	1	19	18.496	-1.495	0.650
3	0	0	0	1	0	1	4.502	-1.482	0.649
4	0	0	0	1	1	7	10.660	-1.179	0.637



REFERÊNCIAS

- ❑ ANDRADE, Dalton Francisco de; TAVARES, Heliton Ribeiro; VALLE, Raquel da Cunha. Teoria da Resposta ao Item: conceitos e aplicações. **Sinape**, 2000. 164 p.
- ❑ KLEIN, Ruben. Testes de Rendimento. In: Alberto de Mello e Souza (Org.). **Dimensões da Avaliação Educacional**. Petrópolis: EDITORA VOZES, 2005, p. 110-138.
- ❑ LORD, Frederic M. **Applications of item response theory to practical testing problems**. Routledge, 2012.
- ❑ SILVA, Eder Alencar. **Transposição da Teoria da Resposta ao Item: uma abordagem pedagógica**. Dissertação (Mestrado)- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Estadual de São Paulo, São Paulo, 2017
- ❑ PASQUALI, Luiz. **Psicometria: teoria dos testes na psicologia e na educação**. Editora Vozes Limitada, 2017.
- ❑ PASQUALI, Luiz; PRIMI, Ricardo. Fundamentos da teoria da resposta ao item: TRI. Avaliação Psicológica: **Interamerican Journal of Psychological Assessment**, v. 2, n. 2, p. 99-110, 2003.
- ❑ RIZOPOULOS, Dimitris. Itm: An R package for latent variable modeling and item response analysis. **Journal of statistical software**, v. 17, p. 1-25, 2007.