



Università degli Studi di Milano - Bicocca

FACOLTÀ DI SCIENZA MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Teoria dei fluidi subsonici e transonici

Candidato:
Lilia Grasso
Matricola 813210

Relatore:
Prof. Giovanni Ortenzi

Indice

Introduzione	i
1 Equazioni differenziali del moto dei fluidi	1
1.1 Derivazioni equazioni del moto di un fluido	1
1.1.1 Teorema del Trasporto di Reynolds e Conservazione della Massa	2
1.1.2 Equazione del bilancio della quantità di moto	4
1.2 Velocità del suono come velocità di propagazione della perturbazione	5
1.2.1 Numero di Mach e classificazioni regime subsonico, sonico, supersonico	7
1.3 Teorema del rotore e la velocità potenziale	8
1.3.1 Velocità potenziale e funzione di stream	10
2 Dinamica dei gas in regime transonico	13
2.1 Mappatura nel piano odografico(delle velocità)	13
2.2 Equazione di Tricomi ed equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo misto	17
2.3 Equazioni di Tricomi e ricerca caratteristiche nel semipiano iperbolico	19
3 Esistenza e Unicità, Buona Positura e Soluzioni Particolari dell'equazioni di Tricomi	21
3.1 Esistenza soluzioni particolari dell'equazione di Tricomi . . .	21
3.1.1 Soluzione per separazione delle variabili nel piano odografico	21
3.2 Condizioni al bordo, unicità e risoluzione con Metodo ABC . .	24
3.2.1 Unicità e risoluzione con Metodo ABC	25
4 Cenni di alcuni problemi relativi ai fluidi in regime transonico	28

0 INDICE	3
-----------------	----------

4.1 Cenni sui flussi transonici in un dominio aperto	28
--	----

Ringraziamenti	30
-----------------------	-----------

Introduzione

Il presente lavoro di tesi si basa sullo studio del moto stazionario bidimensionale di fluidi in regime transonico (nel cui campo di moto coesistono velocità sia minori sia maggiori di quella locale del suono). Tale regime è descritto dall'equazione differenziale alle derivate parziali detta di Chaplygin:

$$f_{\theta\theta} + \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} f_{vv} + v f_v = 0.$$

Quest'ultima è una forma generalizzata della seguente equazione alle derivate parziali di tipo misto studiata da Tricomi:

$$y f_{xx} - f_{yy} = 0.$$

La trattazione di queste due equazioni comprende l'analisi dell'esistenza delle soluzioni, la verifica dell'unicità e la verifica della buona positura rispetto a delle condizioni iniziali arbitrarie.

I fluidi subsonici e supersonici hanno comportamenti notevolmente differenti sia dal punto di vista fenomenologico sia dal punto di vista di strumenti matematici da utilizzare. Il regime subsonico è descritto da un'equazione differenziale alle derivate parziali di tipo ellittico mentre il regime supersonico da un'equazione di tipo iperbolico. L'obiettivo principale di questa tesi è quello di caratterizzare l'equazione di Chaplygin e quella di Tricomi da un punto di vista matematico. Si riduce il problema attraverso una trasformazione nel piano odografico, e si verifica successivamente l'esistenza e l'unicità della soluzione con differenti condizioni al bordo e in differenti domini.

L'elaborato è suddiviso in quattro capitoli: il primo riguarda l'esposizione del modello che descrive l'evoluzione del moto di alcuni tipi di fluidi; nel secondo capitolo si analizzano le equazioni di Tricomi e Chaplygin, ottenute attraverso mappe odografiche dal moto stazionario di fluidi bidimensionali; nel terzo vi è la verifica dell'esistenza di una soluzione e la ricerca di quest'ultima, analizzandone successivamente l'unicità nel problema di Tricomi; infine nel quarto capitolo si accenna un problema che riguarda questo tipo di fluidi.

Capitolo 1

Equazioni differenziali del moto dei fluidi

1.1 Derivazioni equazioni del moto di un fluido

E' possibile descrivere il moto di un fluido secondo due punti di visti diversi. Il primo è detto lagrangiano o materiale, in quanto segue la traiettoria di ogni particella di fluido e ne identifica le coordinate iniziali come (a, b, c, t) da cui poi dipendono le coordinate della particella; e in seguito procede con l'analisi delle variazioni delle proprietà fisiche (come ad esempio la densità o la temperatura).

Le variabili che descrivono il moto saranno dunque variabili dipendenti ed è possibile scriverle:

$$\begin{cases} x = x(a, b, c, t) \\ y = y(a, b, c, t) \\ z = z(a, b, c, t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Il secondo punto di vista è detto euleriano e osserva le variazioni delle proprietà fisiche per ogni data posizione spaziale (x, y, z) , le quali, assieme alla variabile temporale, saranno variabili indipendenti.

Le variabili dipendenti sono in funzione delle coordinate spaziali e temporali, come ad esempio quella che descrive la velocità di un fluido $u = u(x, y, z, t)$. In questa trattazione si suppone il fluido continuo deformabile, chimicamente omogeneo e non reagente, privo di cariche elettriche, funzione della densità ρ e delle velocità u_1, u_2, u_3 dipendenti dalle coordinate spaziali x_1, x_2, x_3 e dal tempo t . Il fluido ha la caratteristica di essere iso-entropico e in uno

stato adiabatico con un relazione tra pressione e densità $p = c\rho^\gamma$ dove $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ coefficiente di dilatazione adiabatico, rapporto tra i calori specifici a pressione costante c_p , e a volume costante c_v .

I principi fisici su cui è basata la costruzione del modello sono:

1. Equazione di continuità;
2. Bilancio della quantità di moto;
3. La conservazione dell'energia.

1.1.1 Teorema del Trasporto di Reynolds e Conservazione della Massa

Prima di accennare la breve formalizzazione matematica dei principi fisici su cui si basano le equazioni del moto dei fluidi è utile introdurre il teorema del trasporto di Reynolds. (Petrila and Trif, 2004)

Considerando la grandezza estensiva $A = A(x, y, z, t)$, con V volume che racchiude una superficie S ; supponendo che a un certo istante $V(t) = V$, si ha:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left(\int_{V(t)} A(x, y, z, t) dV \right) = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V+\Delta V} A(x, y, z, t + \Delta t) dV - \int_V A(x, y, z, t) dV \right) \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_V A(x, y, z, t) dV + \int_{\Delta V} A(x, y, z, t) dV + \right. \\
 &+ \int_V \frac{\partial A(x, y, z, t)}{\partial t} \Delta t dV + \int_{\Delta V} \frac{\partial A(x, y, z, t)}{\partial t} \Delta t dV - \int_V A(x, y, z, t) dV \left. \right) \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\Delta V} A(x, y, z, t) dV + \int_V \frac{\partial A(x, y, z, t)}{\partial t} \Delta t dV \right),
 \end{aligned}$$

e inoltre

$$\int_{\Delta V} A(x, y, z, t) dV = \int_S A(x, y, z, t) \Delta t \vec{u} \cdot \hat{n} dS$$

dove \vec{u} è la velocità con cui si muove il fluido. Allora:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V(t)} A(x, y, z, t) dV \right) = \int_V \frac{\partial A(x, y, z, t)}{\partial t} dV + \int_S A(x, y, z, t) \vec{u} \cdot \hat{n} dS.$$

Prendendo $A(x, y, z, t)$ continua e differenziabile, si può trasformare il secondo integrale con il teorema della divergenza ottenendo la formulazione finale del teorema di Reynolds:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V(t)} A(x, y, z, t) dV \right) = \int_V \left(\frac{\partial A(x, y, z, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (A(x, y, z, t) \vec{u}) \right) dV$$

Dal punto di vista lagrangiano, il teorema afferma che la massa contenuta in un volume deformabile resta invariata nel tempo e definendo m la massa si ha:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{V(t)} \rho dV \right) = 0;$$

applicando il teorema del trasporto di Reynolds alla densità ρ si ottiene l'equazione di continuità:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV &= \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right) dV = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned}$$

con $i = 1, 2, 3$ tale per cui

$$\begin{cases} x_1 = x(a, b, c, t) \\ x_2 = y(a, b, c, t) \\ x_3 = z(a, b, c, t). \end{cases} \quad (1.2)$$

1.1.2 Equazione del bilancio della quantità di moto

La variazione temporale della quantità di moto Q di un sistema è esprimibile come la risultante delle forze esterne al sistema, le quali sono, nel caso di un fluido, la somma delle forze esterne di volume \vec{F}_v^E e di superficie \vec{F}_p^E . Formalizzando:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^E = \vec{F}_v^E + \vec{F}_p^E,$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{u} dV = \int_{V(t)} \rho F_v dV + \int_{S(t)} F_s dS.$$

Per il teorema del trasporto il primo integrale si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\rho \vec{u}) dV &= \\ &= \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \rho \vec{u} (\nabla \cdot \vec{u}) \right) dV = \\ &= \int_V \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV + \int_V \vec{u} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \vec{u}) \right) dV, \end{aligned}$$

e quest'ultimo integrale si annulla per l'equazione di continuità:

$$\int_V \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV = \int_V \rho F_v dV + \int_V F_s dS.$$

Applicando il teorema della divergenza all'ultimo integrale si ottiene:

$$\int_V \left(\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \rho F_v - \nabla \cdot \underline{T} \right) dV = 0$$

(con \underline{T} tensore degli sforzi).

Considerando che il valore del volume è arbitrario, allora ad annullarsi è anche l'integrando, si ha:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho F_v + \nabla \cdot \underline{T}.$$

Applicando la conservazione dell'energia e trascurando in particolare la forza di gravità, si ottengono le equazioni di Eulero (analoghe alla seconda legge di Newton)([Batchelor, 2000](#)):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0,$$

con $i = 1, 2, 3$.

Considerando il risultato appena ricavato, e l'equazione ottenuta nel capitolo precedente, si giunge a un sistema di equazioni del moto di un fluido:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 & (1) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. & (2) \end{cases} \quad (1.3)$$

Tale sistema in generale non è chiuso a meno di non introdurre una relazione tra pressione e densità che verrà analizzata nella sezione successiva.

1.2 Velocità del suono come velocità di propagazione della perturbazione

Considerando la relazione che intercorre tra la pressione p e la densità ρ , $p = p(\rho)$ si può definire una nuova quantità:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho},$$

la quale è maggiore di zero in quanto si considera la pressione una funzione monotona non decrescente della densità; inoltre questa quantità ha le stesse dimensioni di una velocità al quadrato. Si può affermare e dimostrare ([Bers, 2016](#)) che c^2 è la velocità di propagazione delle piccole perturbazioni all'interno di un fluido definita come *velocità locale del suono*.

La dimostrazione di questa affermazione si può costruire partendo dall'analisi di una propagazione di una piccola perturbazione all'interno di un fluido a riposo.

Sia (x_0, y_0, z_0) punto in cui il vettore delle velocità è identicamente nullo e nel cui intorno il fluido è a riposo.

Considerato ciò si procede con la linearizzazione delle u_i e della p , ovvero:

$$\begin{cases} u_i = \epsilon u'_i \\ \rho = \rho_0 + \epsilon \rho' \\ p = p_0 + \epsilon p'. \end{cases} \quad (1.4)$$

Dato

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\rho} = c^2 &\Rightarrow dp = c^2 d\rho \Rightarrow d(p_0 + \epsilon \rho') = c^2 d(\rho_0 + \epsilon \rho') \\ &\Rightarrow dp' = c^2 d\rho' + o(\epsilon^2) \Rightarrow p' = c_0^2 \rho' \end{aligned}$$

con $c_0 = c(\rho_0)$ il sistema diventa dunque:

$$\begin{cases} p = p_0 + \epsilon c_0^2 \rho' + O(\epsilon^2) \\ \rho = \rho_0 + \epsilon \rho' \\ u_i = \epsilon u'_i. \end{cases} \quad (1.5)$$

Con la sostituzione di queste nuove variabili nelle equazioni del moto, e trascurando i termini con ϵ di grado maggiore di due si ottiene:

Da (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \epsilon \rho') + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}(\epsilon u'_i(\rho_0 + \epsilon \rho')) &= 0 \\ \Rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\rho') + \rho_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + \epsilon^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} &= 0; \end{aligned}$$

Da (2)

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u'_j \epsilon^2 \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}(p_0 + \epsilon c_0^2 \rho') &= \\ = \epsilon \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u'_j \epsilon \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\epsilon c_0^2}{\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} &= 0 \\ \Rightarrow \rho \frac{\partial u'_i}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} &= 0; \end{aligned}$$

e procedendo con il metodo per sostituzione ed eliminando così le variabili, si giunge all'equazione finale:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i'^2} = 0.$$

Quest'equazione descrive la propagazione di una perturbazione all'interno di un fluido con velocità c_0 , e si può notare che la velocità di propagazione dipende dal valore locale della densità del fluido.

1.2.1 Numero di Mach e classificazioni regime subsonico, sonico, supersonico

Sulla base delle considerazioni appena fatte si definisce *Numero di Mach* M , un numero adimensionale definito come il rapporto tra la velocità di un oggetto in moto in un fluido e la velocità del suono locale nel fluido considerato. ([Batchelor, 2000](#))

$$M = \frac{q}{c} \text{ con } q = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Questa quantità permette di stabilire quanto sono importanti gli effetti di comprimibilità del fluido in esame e il suo valore inoltre permette la distinzione di diversi regimi all'interno del campo di moto del fluido, di cui tre sono matematicamente rilevanti:

1. Regime subsonico $M < 1$ quando tutte le velocità del campo di moto sono minori della velocità del suono nel fluido considerato in un sistema di riferimento solidale al corpo.
2. Regime sonico $M = 1$.
3. Regime supersonico $M > 1$ quando le velocità del campo di moto risultano maggiori della velocità del suono nel fluido considerato rispetto a un sistema di riferimento solidale al corpo.

Può capitare inoltre che all'interno del campo di moto, come già accennato in precedenza, $(M - 1)$ possa essere una funzione che cambia di segno: quindi sono presenti sia zone in regime subsonico che in regime supersonico e questo tipo di regime è detto transonico. Il comportamento di un fluido in regime subsonico è molto diverso da quello in regime supersonico. Se un gas incontra

un ostacolo in un flusso subsonico, ne risente del disturbo provocato ancor prima di incontrare l'ostacolo, in quanto la perturbazione viaggia ad una velocità superiore a quella del fluido. Questo però non può accadere per velocità supersoniche, in quanto la velocità del fluido è maggiore di quella del suono, e si formano delle strutture fluidodinamiche chiamate onde d'urto che permettono al fluido di evitare l'ostacolo decelerandolo o deviandolo.

1.3 Teorema del rotore e la velocità potenziale

Considerando il flusso del rotore di determinati campi vettoriali attraverso superfici regolari dotate di bordo, il teorema del rotore [si veda ([Fusco et al., 1996](#))] afferma che esso è uguale alla circuitazione del campo lungo la frontiera della superficie. Formalmente:

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva piana liscia a tratti tale che $t, s \in (a, b)$ con $\gamma(s) = \gamma(t) \Rightarrow t = s$, e dato che la curva è chiusa si ha $\gamma(a) = \gamma(b)$

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ con frontiera γ e $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ liscia e sia \vec{F} un campo vettoriale, allora:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\Gamma = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$$

con $S = \psi(D)$ immagine di D tramite ψ e $\Gamma(t) = \psi(\gamma(t))$.

Questo teorema implica che se si ha un campo irrotazionale $\nabla \times \vec{F} = 0$, allora il campo è conservativo.

Se il fluido è irrotazionale ([Bers, 2016](#)) ovvero $\nabla \times \vec{q} = 0$, dal teorema di Bernoulli si ottiene:

$$\frac{q^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} dp = 0.$$

La densità è una data funzione della velocità in un flusso potenziale, e $\rho = \rho(q)$ è una funzione decrescente che si può definire implicitamente dalla relazione seguente:

$$\frac{q^2}{2} + \int_1^\rho \frac{p'(\xi)}{\xi} d\xi = 0$$

in cui si è effettuato il seguente cambio di variabili

$$\begin{cases} \xi = \rho(q) \\ dp = dp(\rho(q)) = d\rho(q)p'(\rho(q)) = d\xi p'(\xi). \end{cases} \quad (1.6)$$

Inoltre si può calcolare anche il numero di Mach e la velocità locale del suono, infatti:

$$\begin{cases} c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{-\rho q}{\rho'(q)} \\ M^2 = \frac{q^2}{c^2} = \frac{-q}{\rho} \frac{d\rho}{dq}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Considerando un flusso governato da una densità di pressione adiabatica, la funzione ρ ha la seguente forma esplicita:

$$\rho = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}q^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Sostituendo l'espressione appena definita al valore di ρ nel numero di Mach e nella velocità del suono si trova:

$$\begin{cases} c^2 = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}q^2\right) \\ M^2 = \frac{q^2}{1 - \frac{\gamma-1}{2}q^2}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Se ci si mette sul profilo sonico con $M = 1$, si può trovare l'espressione della velocità critica per un fluido:

$$1 = \frac{q_{crit}^2}{1 - \frac{\gamma-1}{2}} \Rightarrow q_{crit}^2 = \frac{2}{\gamma+1} \Rightarrow q_{crit} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se $q < q_{crit} < q_{max}$ il fluido è in regime subsonico, e data la positività di ρ sono infatti possibili solo i fluidi con $q < q_{max}$ dove $q_{max} = \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

1.3.1 Velocità potenziale e funzione di stream

Data l'irrotazionalità di \vec{q} e quindi la sua conservatività in $D \subseteq \mathbb{R}^3$, si possono esprimere le componenti u_i come le derivate parziali di una funzione $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ in D aperto connesso in \mathbb{R}^3 :

$$u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

con $i = 1, 2, 3$.

Si possono dunque scrivere le equazioni del moto per un fluido come $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}) = 0$ e considerando le espressioni di $\rho(q)$, c^2 , M^2 si ha:

$$\sum_{i,k=1}^3 \left(\delta_{k,i} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (1)$$

la quale risulta essere l'equazione differenziale base del potenziale, non lineare in quanto c^2 è una data funzione delle velocità \vec{q} .

Si considera ora il caso bidimensionale e facendo il seguente cambio di variabili:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x + iy = z \end{cases} \quad (1.9)$$

e

$$\begin{cases} u_1 = u \\ u_2 = v \\ u - iv = w = qe^{-i\theta}. \end{cases} \quad (1.10)$$

L'equazione (1) diventa:

1. Per $k = 1, i = 1$

$$\left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 \right) \Phi_{x_1 x_1} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \Phi_{xx}.$$

2. Per $k = 2, i = 1$

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \Phi_{x_1 x_2} = -\frac{uv}{c^2} \Phi_{xy}.$$

Viceversa per $k = 1, i = 2$

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \Phi_{x_2 x_1} = -\frac{uv}{c^2} \Phi_{yx},$$

e dato che per il teorema di Schwarz $\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$ questi due termini si sommano.

3. Per $k = 2, i = 2$

$$\left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right) \Phi_{x_2 x_2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Phi_{yy}.$$

Applicando infine la sommatoria si ottiene:

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \Phi_{xx} - \frac{2uv}{c^2} \Phi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Phi_{yy} = 0. \quad (1.11)$$

Prendendo l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x_2} = (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0$$

è possibile definire una nuova funzione $\Psi(x, y)$ per fluidi incompressibili in 2-d, chiamata *funzione di stream o flusso*, tale che:

$$\begin{cases} \Psi_x = -\rho v \\ \Psi_y = \rho u. \end{cases}$$

Questo perchè l'equazione di continuità ([Batchelor, 2000](#)) afferma che se si considerano fluidi incompressibili in un elemento infinitesimo di superficie, allora il flusso che entra nell'elemento infinitesimo deve essere uguale a quello che esce. Formalmente:

$$\begin{cases} d\Psi_{in} = udy + vdx \text{ flusso in entrata} \\ d\Psi_{out} = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) dy + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) dx \text{ flusso in uscita} \end{cases}$$

Imponendo $d\Psi_{in} = d\Psi_{out}$ si ottiene $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, ovvero $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}$.

Capitolo 2

Dinamica dei gas in regime transonico

L'equazione che descrive l'evoluzione dei fluidi in regime transonico è l'equazione di Chaplygin $f_{\theta\theta} + \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} f_{vv} + v f_v = 0$ che è particolarmente utile per studiare il fluido in prossimità della superficie di transizione in cui $v = c = q_{crit}$. In questa zona si ha che il terzo termine dell'equazione di Chaplygin è molto piccolo rispetto al secondo che contiene il termine $(1 - \frac{v^2}{c^2})$ al denominatore. Si può dunque fare un'approssimazione e attraverso un opportuno cambio di variabili si ottiene un'equazione differenziale alle derivate parziali di tipo $K(y)f_{xx} + f_{yy} = 0$, la quale è una forma generale dell'equazione studiata da Tricomi $y f_{xx} + f_{yy} = 0$.

2.1 Mappatura nel piano odografico(delle velocità)

Considerando la seguente equazione:

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \Phi_{xx} - \frac{2uv}{c^2} \Phi_{xy} + \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \Phi_{yy} = 0, \quad (2.1)$$

si mappa nel piano odografico, anche chiamato piano delle velocità, nelle nuove variabili indipendenti (u, v) ([Landau et al., 2013](#)).

Si calcola lo jacobiano della trasformazione $det J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ dove

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow det J = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \Phi_{xx} \Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2$$

il quale si annulla solo in punti isolati o lungo una curva isolata.

Se si ha un fluido subsonico gli zeri di J sono isolati e quindi la mappatura dal piano fisico a quello odografico non ha singolarità eccetto in campo complesso. Nei fluidi supersonici invece si ha una soluzione per la quale $J = 0$ identicamente.

Se lo jacobiano non si annulla in un punto di un dato flusso, allora la trasformazione è invertibile nell'intorno di quel punto (Fusco et al., 1996) e si possono considerare tutte le quantità descriventi il flusso come funzioni delle variabili (u, v) .

Inoltre utilizzando il cambio di variabili:

$$\begin{cases} u = q \cos \theta \\ v = q \sin \theta \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \theta = \arctg(\frac{v}{u}) \\ q = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = u dx + v dy = q(\cos \theta dx + \sin \theta dy)$$

e

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = -\rho v dx + \rho u dy = \rho q(-\sin \theta dx + \cos \theta dy),$$

e con questa trasformazione Ψ e Φ devono soddisfare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \Phi_\theta = \frac{q}{\rho} \Psi_q \\ \Phi_q = -\frac{1-M^2}{q\rho} \Psi_\theta. \end{cases} \quad (2.2)$$

Differenziando si ottiene:

$$\begin{cases} \Phi_{\theta q} = \left(\frac{q}{\rho} \Psi_q \right)_q \\ \Phi_{q\theta} = \left(-\frac{1-M^2}{q\rho} \Psi_\theta \right)_\theta \end{cases}$$

e dato che

$$\begin{aligned} \Phi_{\theta q} = \Phi_{q\theta} &\Rightarrow \left(\frac{q}{\rho} \Psi_q \right)_q + \left(\frac{1-M^2}{q\rho} \Psi_\theta \right)_\theta = 0 \\ &\Rightarrow \left(\frac{q}{\rho} \Psi_q \right)_q + \frac{1-M^2}{q\rho} \Psi_{\theta\theta} = 0. \end{aligned}$$

Risolvendo identicamente per la Φ si trova un risultato analogo:

$$\frac{\rho}{q} \Phi_{\theta\theta} + \left(\frac{\rho q}{1-M^2} \Phi_q \right)_q = 0. \quad (2.3)$$

Considerando le espressioni esplicite di c^2 e di M^2 ovvero:

$$c^2 = -\frac{\rho q}{\rho'(q)},$$

$$M^2 = \frac{-q}{\rho} \frac{d\rho}{dq};$$

l'equazione diventa:

$$(1 - M^2)\Psi_{\theta\theta} + q^2\Psi_{qq} + q(1 + M^2)\Psi_q = 0. \quad (2.4)$$

Nel piano odografico si ha dunque una singola equazione differenziale soddisfatta della funzione di stream Ψ .

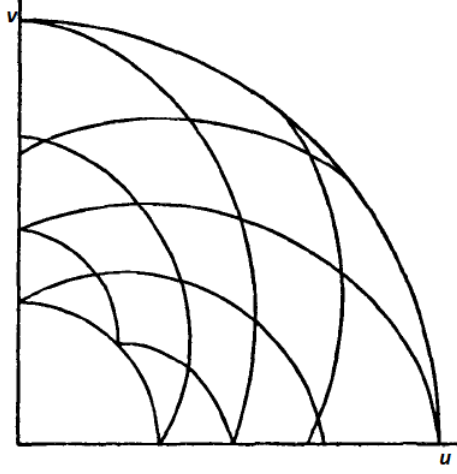
Questa equazione è ellittica nel disco subsonico $q^2 = u^2 + v^2 < q_{crit}^2$, parabolica sulla circonferenza $q^2 = q_{crit}^2$ sonica, iperbolica nella regione supersonica $q^2 > q_{crit}^2$.

Nella regione più esterna tutte le equazioni hanno le stesse caratteristiche fissate (immagini delle linee di Mach nel piano fisico) e sono date dall'equazione:

$$\left(\frac{d\theta}{dq}\right)_{\pm} = \pm \frac{1}{q} \sqrt{M^2 - 1}.$$

$$\Rightarrow qd\theta \pm \sqrt{M^2 - 1}dq = 0.$$

Integrando quest'ultima equazione si ottengono funzioni di forma epicycloidale, (curve generate da un punto di una circonferenza che rotola sulla superficie esterna di un'altra circonferenza), $J_+(q, \theta) = cost$, $J_-(q, \theta) = cost$, le quali sono quantità che restano costanti lungo le curve caratteristiche del piano fisico C_+, C_- (Landau et al., 2013).



Fig(2.1) Caratteristiche nel piano odografico (Landau et al., 2013)

Si può ridurre l'equazione in una forma canonica se ci si trova in un regime transonico, introducendo le seguenti variabili:

$$\begin{cases} \Phi' = \frac{\Phi}{q_{crit}} \\ \Psi' = \frac{\Psi}{\rho_{crit} q_{crit}} \end{cases}$$

con $\rho_{crit} = \rho(q_{crit})$.

Introducendo $\sigma = \int_{q_{crit}}^q \frac{\rho}{\rho_{crit}} \frac{1}{q} dq$ si ha inoltre:

$$\begin{cases} \lim_{q \rightarrow 0} \int_{q_{crit}}^q \frac{\rho}{\rho_{crit}} \frac{1}{q} dq = -\infty \\ \lim_{q \rightarrow q_{crit}} \int_{q_{crit}}^q \frac{\rho}{\rho_{crit}} \frac{1}{q} dq = 0. \end{cases}$$

Definendo la quantità $K = \left(\frac{\rho_{crit}}{\rho}\right)^2 (1 - M^2)$, allora:

$$\begin{cases} \Phi = q_{crit} \Phi' \\ \Psi = \Psi' \rho_{crit} q_{crit} \end{cases} \quad (2.5)$$

con:

$$\begin{aligned} \Phi_\theta = q_{crit} \Phi'_\theta = \frac{\rho}{q} \Psi_q &\Rightarrow \Phi'_\theta = \frac{\rho}{q_{crit} q} \Psi_q \\ \Phi_q = -\frac{1 - M^2}{\rho q} \Psi_\theta = \Phi'_q q_{crit} &\Rightarrow \Phi'_q = \frac{(1 - M^2)}{\rho q_{crit}} \Psi_\theta \end{aligned}$$

e sostituendo anche alla Ψ la sua nuova espressione

$$\begin{cases} \Psi_q = \rho_{crit} q_{crit} \Psi'_q \\ \Psi_\theta = \rho_{crit} q_{crit} \Psi'_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi'_\theta = \frac{q}{\rho} \rho_{crit} \Psi'_q \\ \Phi'_q = -\frac{1-M^2}{\rho q} \rho_{crit} \Psi'_\theta \end{cases}.$$

Con il cambio di variabile da q a σ :

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi'_\theta = \Psi'_\sigma \\ \Phi'_\sigma = -K \Psi'_\theta \end{cases}$$

e differenziando $\Phi'_{\theta\sigma} = \Phi'_{\sigma\theta}$ si ottiene infine una nuova espressione:

$$K \Psi'_{\theta\theta} + \Psi'_{\sigma\sigma} = 0 \quad (2.6)$$

con $K = K(\sigma)$.

Se si ha un gas ideale allora $\left(\frac{dK}{d\sigma}\right)_{\sigma=0} = -(1+\gamma)$, invece per ogni tipo di gas, vale che $\left(\frac{dq}{d\sigma}\right)_{\sigma=0} = q_{crit}$.

Si può sostituire a $K(\sigma) = -(1+\gamma)\sigma$ funzione lineare che approssima $K(\sigma)$ nel punto sonico a $\sigma = 0$ con l'opportuno cambio di variabili $s = (\gamma+1)^{\frac{1}{3}}\sigma$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_\sigma &= \frac{\partial s}{\partial \sigma} \partial_s + \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \partial_\theta = (\gamma+1)^{\frac{1}{3}} \partial_s \\ \Rightarrow \partial_{\sigma\sigma} &= (\gamma+1)^{\frac{2}{3}} \partial_{ss}. \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$-(\gamma+1)\sigma \Psi_{\theta\theta} + (\gamma+1)^{\frac{2}{3}} \Psi_{ss} = 0 \quad \Rightarrow \quad -(\gamma+1)^{\frac{1}{3}} \sigma \Psi_{\theta\theta} + \Psi_{ss} = 0$$

$$s \Psi_{\theta\theta} + \Psi_{ss} = 0 \quad (2.7)$$

che altro non è che l'equazione di Tricomi, infatti un gas che segue questo tipo di evoluzione è detto "di Tricomi" e si comporta molto similmente a un gas la cui velocità è molto vicina alla sonica q_{crit} .

2.2 Equazione di Tricomi ed equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo misto

Sia (x, y) regione reale e $f = f(x, y)$ funzione appartenente a \mathbb{R}^2 . E' utile introdurre le equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo misto di cui

si accennano alcune caratteristiche salienti. (Salsa, 2016)

Sia:

$$A(x, y)f_{xx} + 2B(x, y)f_{xy} + C(x, y)f_{yy} = f(x, y, f, f_x, f_y) \quad (2.8)$$

con $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$ funzioni continue in un dominio D connesso allora le proprietà dell'equazione (2.2) sono definite dalla quantità:

$$\Delta(x, y) = B(x, y)^2 - A(x, y)C(x, y).$$

La classificazione sulle y effettuata in precedenza viene dalla classificazione della funzione Δ infatti, in generale:

se in D $\Delta(x, y) > 0$ allora l'equazione è detta di tipo *iperbolico* e in tal caso la (2.2) ammette due radici reali e distinte:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \rho_1(x, y) \\ \frac{dy}{dx} = \rho_2(x, y) \end{cases} \quad (2.9)$$

le quali corrispondono a delle curve lungo cui la soluzione è costante, meglio conosciute come *curve caratteristiche*.

Se in D $\Delta(x, y) < 0$ allora l'equazione è di tipo *ellittico* e non possiede caratteristiche reali.

Se in D $\Delta(x, y) = 0$ *identicamente* allora l'equazione è di tipo iperbolico e vi è un solo sistema di curve caratteristiche reali in cui assumo $\eta(x, y) = cost$.

Se $\Delta(x, y)$ non è identicamente nulla in D , l'equazione (2.2) è detta di *tipo misto* e quindi lungo una curva cambia segno di $\Delta(x, y)$.

Nel caso in cui $f(x, y, f, f_x, f_y) = 0$, $A = y$ $C = 1$, Tricomi introduce l'equazione differenziale alle derivate parziali di tipo misto, meglio conosciuta come *equazione di Tricomi*:

$$yf_{xx} + f_{yy} = 0. \quad (2.10)$$

Quest'equazione ha $\Delta(x, y) = -y$ infatti:

se $y < 0$ l'equazione descrive un fluido in regime supersonico e diventa un'equazione iperbolica;

se $y > 0$ l'equazione descrive un fluido in regime subsonico e diventa un'equazione ellittica.

2.3 Equazioni di Tricomi e ricerca caratteristiche nel semipiano iperbolico

Considerando l'equazione di Tricomi:

$$yf_{xx} + f_{yy} = 0,$$

è utile introdurre il seguente cambio di variabili:

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = \eta(y) \end{cases}$$

da cui si ha:

$$\begin{cases} \partial_x = \partial_\xi \\ \partial_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \partial_\eta + \frac{\partial \xi}{\partial y} \partial_\xi = \eta'(y) \partial_\eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_{xx} = \partial_{\xi\xi} \\ \partial_{yy} = \eta'(y) \eta'(y) \partial_{\eta\eta} + \eta''(y) \partial_\eta \end{cases}$$

Si ottiene:

$$yf_{\xi\xi} + (\eta'(y))^2 f_{\eta\eta} + \eta''(y) f_\eta = 0,$$

e considerando $\frac{d\eta}{dy} = \left(\frac{y}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $\eta(0) = 0$ si ha:

$$yf_{\xi\xi} + \frac{y}{\eta} f_{\eta\eta} + \eta''(y) f_\eta = 0.$$

Moltiplicando tutto per la quantità $\left(\frac{\eta}{y}\right)$:

$$\eta f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} + \left(\frac{d^2\eta}{dy^2}\right) \left(\frac{\eta}{y}\right) f_\eta = 0.$$

Definendo la quantità $a_2(\eta) = \left(\frac{d^2\eta}{dy^2}\right) \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-2}$ si ottiene:

$$\eta f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} + a_2(\eta) f_\eta = 0.$$

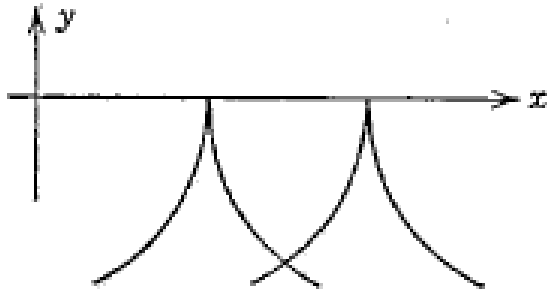
Se ci si pone nel piano iperbolico $y < 0$ si può definire l'equazione delle caratteristiche che ha la seguente forma:

$$(-y)^{\frac{1}{2}} dy \pm dx = 0,$$

da cui si ottengono due curve caratteristiche:

$$\begin{aligned} C_+ &= 3x + 2(-y)^{\frac{3}{2}} = \text{cost}, \\ C_- &= 3x - 2(-y)^{\frac{3}{2}} = \text{cost}. \end{aligned}$$

Rappresentabili dal seguente grafico:



Fig(2.2) Caratteristiche nel piano fisico (Bers, 2016)

Nel piano ellittico $y > 0$ l'equazione di Tricomi può essere ridotta a una forma canonica con il cambio di variabile $\tilde{y} = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ ottenendo così la seguente trasformazione:

$$\partial_y = y^{\frac{1}{2}} \partial_{\tilde{y}};$$

e quindi

$$\begin{aligned} \partial_{yy} &= \frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}} \partial_{\tilde{y}} + y \partial_{\tilde{y}\tilde{y}} \\ \Rightarrow \quad y f_{\tilde{y}\tilde{y}} + y f_{xx} + \frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}} f_{\tilde{y}} &= 0. \end{aligned}$$

Dividendo per y si ottiene:

$$f_{\tilde{y}\tilde{y}} + f_{xx} + \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} f_{\tilde{y}} = 0 \Rightarrow f_{\tilde{y}\tilde{y}} + f_{xx} + \frac{1}{3\tilde{y}} f_{\tilde{y}} = 0.$$

Capitolo 3

Esistenza e Unicità, Buona Positura e Soluzioni Particolari dell'equazioni di Tricomi

3.1 Esistenza soluzioni particolari dell'equazione di Tricomi

3.1.1 Soluzione per separazione delle variabili nel piano odografico

Considerando l'equazione nel piano odografico:

$$(1 - M^2)\Psi_{\theta\theta} + q^2\Psi_{qq} + q(1 + M^2)\Psi_q = 0,$$

e si nota che l'equazione ha i coefficienti dipendenti solo dal modulo della velocità q .

Grazie a ciò la soluzione si può fattorizzare in un prodotto tra una funzione dipendente esclusivamente dalla variabile q e una dipendente esclusivamente dalla variabile θ :

$$\psi(\theta, q) = f_\nu(q)e^{i\nu\theta};$$

con ν costante arbitraria.

Si ottiene dunque:

$$q^2 f_\nu''(q) + q(1 + M^2)f_\nu'(q) = 0;$$

la quale è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, che ha esattamente due soluzioni reali. Nel caso in cui si ha una densità di velocità adiabatica, la soluzione può essere fattorizzata con:

$$\psi(\tau, q) = q^2 F_\nu(\tau) e^{i\nu\theta}$$

con $\tau = \frac{q^2}{q_{max}^2} = \frac{\gamma-1}{2} q^2$, e se $q = q_{crit}$ allora $\tau_{crit} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ e $0 < \tau < 1$.

La funzione $F_\nu(\tau)$ è una funzione ipergeometrica confluyente che soddisfa l'equazione differenziale ordinaria lineare ipergeometrica di Gauss:

$$\tau(1-\tau)F_\nu'' + [(\nu+1) - (a_\nu + b_\nu + 1)\tau]F_\nu' - a_\nu b_\nu F_\nu = 0.$$

Utilizzando il metodo di Frobenius ([Tricomi, 1947](#)), si cerca la soluzione in un intorno dell'origine che è punto singolare dell'equazione ipergeometrica, la quale è esprimibile come serie di potenze

$$F_\nu(\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \tau^{n+s}.$$

Allora:

$$F_\nu' = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (n+s) \tau^{n+s-1},$$

e

$$F_\nu'' = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n (n+s)(n+s-1) \tau^{n+s-2}.$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene:

$$\begin{aligned} & \tau(1-\tau) \sum_{n=2}^{+\infty} c_n (n+s)(n+s-1) \tau^{n+s-2} + \\ & + [(\nu+1) - (a_\nu + b_\nu + 1)\tau] \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (n+s) \tau^{n+s-1} + \\ & - a_\nu b_\nu \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \tau^{n+s} = 0, \end{aligned}$$

e ancora:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (n+s)(n+s+\nu) \tau^{n+s-1} + \\ & - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n [(n+s)(a_\nu + b_\nu + n+s)] \tau^{n+s} + \end{aligned}$$

$$-a_\nu b_\nu \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \tau^{n+s} = 0,$$

e, portando fuori il primo termine dalla prima sommatoria e cambiandone poi l'indice con $m = n - 1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} c_0 s(s + \nu) + \sum_{m=0}^{+\infty} c_{m+1} (m + s + 1)(m + s + (\nu + 1)) \tau^{n+s} + \\ - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n [(n + s)(a_\nu + b_\nu + n + s)] \tau^{n+s} + \\ - a_\nu b_\nu \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \tau^{n+s} = 0. \end{aligned}$$

Si ottengono sicché le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} s(s + \nu)c_0 = 0 \\ c_{n+1}(n + s + 1)(n + s + \nu + 1) = c_n[(n + s)(n + s + a_\nu + b_\nu) + a_\nu b_\nu] \end{cases}$$

da cui si ottiene per la seconda relazione la seguente formula di ricorrenza per i coefficienti c_n :

$$c_{n+1} = \left[\frac{(n + s)(n + s + a_\nu + b_\nu) + a_\nu b_\nu}{(n + s + 1)(n + s + \nu + 1)} \right] c_n.$$

Per la prima si ha che se $c_0 = 0 \Rightarrow c_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con la conseguente banale soluzione nulla. Se invece si pone $s = 0$, allora:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{a_\nu b_\nu}{\nu+1}; \\ c_2 = \frac{1+a_\nu+b_\nu+a_\nu b_\nu}{2(\nu+2)}; \\ c_3 = \frac{2+a_\nu+b_\nu+a_\nu b_\nu}{3(\nu+3)}; \end{cases}$$

e così via.

Per n che tende all'infinito si otterrà infine la seguente serie:

$$F_1(a_\nu, b_\nu, \nu + 1, \tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_\nu)_n (b_\nu)_n}{(\nu + 1)_n n!} \tau^n,$$

con $|\tau| < 1$ e $\nu + 1 \neq n$, la quale è inoltre soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \tau(1 - \tau)F''_\nu + [(\nu + 1) - (a_\nu + b_\nu + 1)\tau]F'_\nu - a_\nu b_\nu F_\nu = 0; \\ F_\nu(0) = 1; \\ F'_\nu(0)' = \frac{a_\nu b_\nu}{\nu+1}. \end{cases}$$

Le variabili a_ν , b_ν sono determinate dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a_\nu + b_\nu = \nu - \frac{1}{\gamma-1} \\ a_\nu b_\nu = -\frac{\nu(\nu+1)}{2(\gamma-1)} \end{cases}$$

Considerando la seguente equazione di Tricomi con la funzione di stream ottenuta nel capitolo precedente:

$$s\Psi_{\theta\theta} + \Psi_{ss} = 0,$$

essa ha soluzione

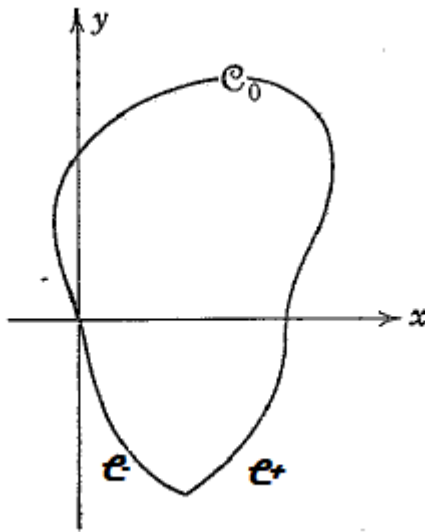
$$\psi(\theta, s) = s^{\frac{1}{2}} Z_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \nu s^{\frac{3}{2}} \right) e^{\pm i\nu\theta},$$

dove $Z_{\frac{1}{3}}$ è una delle soluzioni dell'equazione di Bessel di ordine $\frac{1}{3}$ come per esempio $J_{\frac{1}{3}}$ o $J_{-\frac{1}{3}}$ le quali hanno la seguente forma:

$$J_{\pm\frac{1}{3}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{3} \frac{\pi}{2} \right).$$

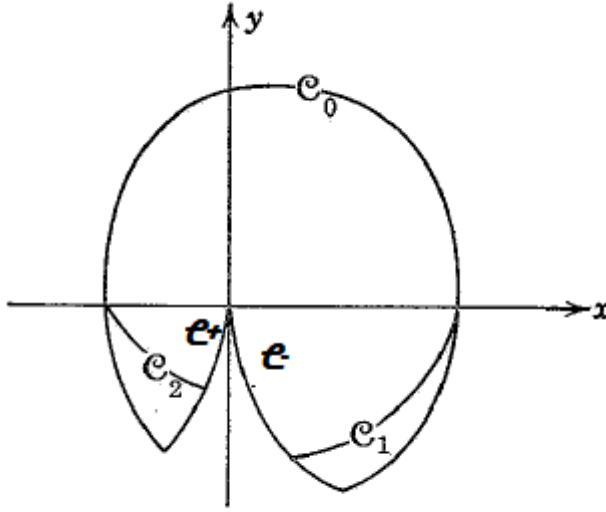
3.2 Condizioni al bordo, unicità e risoluzione con Metodo ABC

Il dominio in cui è definita la soluzione dell'equazione di Tricomi è intersecato da una linea parabolica, ed è formato da una curva C_0 nel semipiano ellittico positivo delle y , e due curve caratteristiche C_- e C_+ nel semipiano iperbolico negativo delle y , come mostra il seguente grafico:



Fig(3.1) Dominio di Tricomi (Bers, 2016)

E' possibile che vi sia una curva non caratteristica C_1 all'interno del triangolo delle caratteristiche definito da C_- e C_+ che coincide in parte con una delle due caratteristiche, oppure, in modo più generale può esserci un dominio con due curve non-caratteristiche C_1 e C_2 come mostrato in figura:



Fig(3.2) Altro dominio (Bers, 2016)

Si assume che (Frankl, 1947):

$$\begin{cases} 0 \geq \frac{dy}{dx} \geq -(-K)^{\frac{1}{2}} & \text{su } C_2 \\ 0 \leq \frac{dy}{dx} \leq (-K)^{\frac{1}{2}} & \text{su } C_1 \end{cases}$$

Inoltre si determinano le condizioni al bordo lungo $C_0 + C_1 + C_2$ date da $K\psi_x dy - \psi_x dx = f ds$ con f funzione data, e nel piano ellittico si può definire un problema di Neumann, con le variabili (x, \tilde{y}) attraverso la seguente condizione lungo C_0 :

$$\sqrt{K} \frac{\partial \psi}{\partial n} = -f.$$

3.2.1 Unicità e risoluzione con Metodo ABC

Nel semipiano iperbolico, è necessario che la più generale equazione di Tricomi $K(y)\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$ abbia unicità definita dalla seguente disuguaglianza

(Kuz'min, 2003), la quale pone una condizione sulla funzione $K(y)$:

$$3(K')^2 \geq 2KK''.$$

E' ovvia la validità in tutto il dominio della condizione sovracitata nel caso in cui $K(y) = y$, ma in generale non è necessario che venga rispettata dalla più generica funzione $K(y)$ lungo il triangolo delle caratteristiche. Questa condizione è però fondamentale per verificare che le condizioni al bordo siano correttamente impostate e che determinino la soluzione ψ dell'equazione considerata.

La dimostrazione dell'unicità avviene anche attraverso il cosiddetto metodo *abc* in cui si assume ψ soluzione dell'equazione di Tricomi definita in un dominio D . Questo metodo consiste nel trovare le funzioni lisce $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ tali per cui, quando si applica il teorema di Green all'integrale seguente, si ottiene un'espressione positiva che si annulla solo se $\psi \equiv 0$. Se ψ si annulla per condizioni al bordo omogenee allora si può ottenere un teorema di unicità per opportune classi di dati al bordo.

Si consideri l'integrale:

$$I = \iint_D (a\psi + b\psi_x + c\psi_y) (K\psi_{xx} + \psi_{yy}) = 0,$$

con dominio $D \equiv D_+ \cup D_-$, rappresentato in Fig.(1), in cui $\partial D_+ \equiv C_0$ è il dominio considerato nel semipiano ellittico, e $\partial D_- \equiv C_+ \cup C_-$ quello nel semipiano iperbolico. La ricerca delle funzioni $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ può essere molto difficile, ma è possibile considerare un'estensione dell'integrale I nello stesso dominio D (Protter, 1953), data da $I + I_1$, dove I_1 è il seguente integrale:

$$\begin{aligned} I_1 = & \iint_{D_+} (Q\psi^2)_x dx dy + \iint_D (P\psi^2)_y dx dy \\ & - \iint_{D_-} (-K)^{\frac{1}{2}} (P\psi^2)_x dx dy + \iint_{D_+} [(RK\psi\psi_x)_x + (R\psi\psi_y)_y] dx dy \end{aligned}$$

di cui bisogna determinare le funzioni P, Q, R funzioni da determinare, con R che giace sull'asse x .

La soluzione ψ si annulla identicamente lungo C_0 per il principio del massimo, e lungo una delle due caratteristiche, per esempio C_+ . Applicando il teorema di Green all'integrale I_1 si ottiene l'annullamento del primo e dell'ultimo integrale, ovvero:

$$\begin{aligned} & \iint_D [(RK\psi\psi_x)_x + (R\psi\psi_y)_y] dx dy = \\ & = \iint_D RK\psi\psi_{xx} dx dy + \iint_D RK\psi_x^2 dx dy + \iint_D R\psi_y^2 dx dy + \iint_D R\psi\psi_{yy} + \end{aligned}$$

$$+ \iint_D R_x K \psi \psi_x dx dy + \iint_D R_y \psi \psi_y dx dy,$$

che si annulla dopo aver applicato il teorema di Green, e ancora

$$\begin{aligned} & \iint_{D+} (Q\psi^2)_x dx dy \\ &= \iint_{D+} Q_x \psi^2 dx dy + \iint_{D+} Q 2\psi \psi_x dx dy = 0 \end{aligned}$$

che si annulla anch'esso applicando il teorema di Green. Considerando invece il secondo e il terzo si ha che:

$$\iint_D (P\psi^2)_y dx dy = - \iint_D (P\psi^2)_{yy} dy dx + \int_{C-} P\psi^2 dx$$

e

$$\iint_{D-} -(-K)^{\frac{1}{2}} (P\psi^2)_x dx dy = + \iint_D (-K)^{\frac{1}{2}} (P\psi^2)_{xx} dx dy - \int_{C-} P\psi^2 (-K)^{\frac{1}{2}} dy.$$

Sommando i valori ottenuti si ha:

$$\begin{aligned} & \iint_D [(-K)^{\frac{1}{2}} (P\psi^2)_{xx} - (P\psi^2)_{yy}] dx dy + \int_{C-} P\psi^2 [(-K)^{\frac{1}{2}} dy + dx] = \\ &= \int_{C-} P\psi^2 [(-K)^{\frac{1}{2}} dy + dx]. \end{aligned}$$

Applicando Green anche al primo integrale si ottiene:

$$0 = I + I_1 = \iint_{D+} \Theta_1 dx dy + \iint_{D-} \Theta_2 dx dy + \int_{C-} \Theta_3 dx$$

dove le Θ_i con $i = 1, 2, 3$ sono forme quadratiche in ψ, ψ_x, ψ_y . Con ciò si deduce che ψ è unica se si possono scegliere le funzioni a, b, c, P, Q, R tali per cui le forme quadratiche Θ_i diventano definite positive.

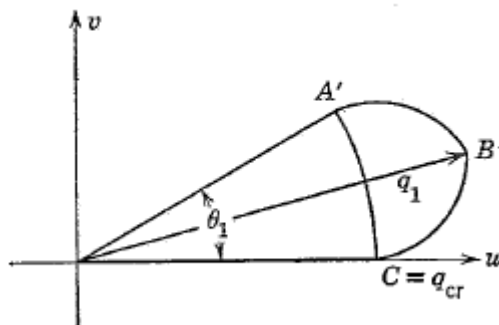
Capitolo 4

Cenni di alcuni problemi relativi ai fluidi in regime transonico

4.1 Cenni sui flussi transonici in un dominio aperto

Si consideri il getto che fuoriesce da un recipiente infinito che ha come contorno due pareti dritte, simmetriche una rispetto all'altra, con θ_1 angolo di inclinazione rispetto all'asse di simmetria ([Frankl, 1947](#)).

All'interno del recipiente il fluido è considerato in regime subsonico. Diventa sonico attraversando una linea che passa attraverso i punti finali delle pareti, e successivamente assume velocità costante q_0 supersonica. Nel piano odografico si può determinare una velocità caratteristica q_1 come segue dal seguente grafico ([Bers, 2016](#)):



Fig(4.1) Piano odografico ([Bers, 2016](#))

Nel grafico il raggio di inclinazione θ_1 interseca la linea sonica in A' . Le due caratteristiche che emergono da A' e $C = q_{crit}$ sono rispettivamente $A'B'$ e CB' , e q_1 è esattamente la velocità corrispondente al punto B' . La natura del fluido e il tipo di regime che lo caratterizza, dipende dalla velocità caratteristica q_1 .

Si hanno due casi, a seconda del valore di q_0 , da cui dipendono il dominio nel piano fisico e odografico e la soluzione dell'equazione di Chaplygin, che sono i seguenti:

$$\begin{cases} q_0 = q_1 \\ q_0 > q_1. \end{cases}$$

Per calcolare la soluzione è sufficiente trovare la funzione di stream nel piano odografico, sia nel caso $q_0 = q_1$ che in quello $q_0 > q_1$, andando a ricercare per ognuno dei due casi sia la soluzione nel semipiano ellittico, sia una soluzione nel semipiano iperbolico. Nel caso in cui si ha che $q_0 = q_{crit}$ si ha un getto critico, e le condizioni al bordo considerate sono condizioni al bordo di Dirichlet, la cui soluzione è stata ampiamente analizzata da Chaplygin (si veda ([Chaplygin, 1944](#))). Se si ha un getto di un fluido incompressibile o un qualsiasi getto subsonico, la velocità è variabile in tutto l'interno del getto e arriva a q_0 solo all'infinito. Nel getto critico invece, si raggiunge la velocità $q_0 = q_{crit}$ a una distanza finita dal recipiente, lungo una linea. Oltre questa linea però il flusso è uniforme con una velocità sonica, e ciò resta vero anche se le pareti del recipiente sono curve.

Ringraziamenti

E' giunto anche per me il momento dei ringraziamenti. Ringrazio vivamente il professore Giovanni Ortenzi che mi ha fatto scoprire un campo della fisica affascinante, e con un'enorme pazienza mi ha indirizzata, corretta, aiutata nello scrivere quest'elaborato. Inoltre ringrazio con tutto il cuore le persone che mi sono state vicine nel mio intero percorso di studi alla triennale, come il mio amico Dagmawi, Simone, Costanza, i miei coinquilini che mi hanno sopportato nei momenti di crisi in sessione, tutti gli amici con cui ho affrontato diversi esami, e soprattutto ringrazio i miei amati genitori, senza di loro nulla di tutto ciò sarebbe stato possibile. Grazie mille davvero.

Bibliografia

- George Batchelor. 2000. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press.
- Lipman Bers. 2016. *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*. Courier Dover Publications.
- Sergey Chaplygin. 1944. On gas jets. *N A C A Technical Memorandum No.1063*.
- Feliks I. Frankl. 1947. On the problems of chaplygin for mixed sub-and supersonic flows. *Bulletin de L'Academie des Sciences de L'URSS*.
- Nicola Fusco, Paolo Marcellini, and Carlo Sbordone. 1996. *Analisi matematica 2*. Liguori.
- Alexander G Kuz'min. 2003. *Boundary value problems for transonic flow*. John Wiley & Sons.
- Lev Landau, Evgenij Lifshits, and F Rapuano. 2013. *Fisica teorica 6. Meccanica dei fluidi*, volume 6. Gruppo Editoriale Italiano srl.
- Titus Petrilă and Damian Trif. 2004. *Basics of fluid mechanics and introduction to computational fluid dynamics*, volume 3. Springer Science & Business Media.
- Murray H. Protter. 1953. Uniqueness theorems for the tricomí problem. *Journal of Rational Mechanics and Analysis, JSTOR*, 2.
- Sandro Salsa. 2016. *Partial differential equations in action: from modelling to theory*, volume 99. Springer.
- Francesco Tricomi. 1947. Sulle funzioni ipergeometriche confluenti. *Annali di Matematica Pura ed Applicata, Springer*, 26.