Probabilités et statistiques
Série 1

Lilian Rouzaire

23 septembre 2020

Exercice 1 : Dénombrabilité

Question a). Pour notre algorithme, on se base sur le fait que chaque sous-ensemble de A^* constitué des éléments de longueur l est le sous-ensemble des nombres de 0 à $2^l - 1$, en notation binaire. On utilise donc ce principe pour générer la suite des éléments de A^*. Voici ci-dessous le code utilisé pour l'algorithme. Vous trouverez le fichier complet et pouvez tester le programme via le lien suivant :
https://github.com/lilianrouzaire/probastats/blob/master/serie1_ex1a.py.

```
n = int(input("Enter value for n : ")) # List size
i = 0 # Counter representing the current position in the subsequence (the decimal represen
l = 1 # Counter representing the current length of the word we are writing (the length of

A = []; # Empty list

while(len(A) < n): # The list is bounded by n, we will not keep computing the list any fur
        for i in range(0, pow(2,l)): # Each subsequence has a length of 2^l - 1, so we loop
                A.append(format(i, '0' + str(l) + 'b')) # Adding the number to the list , a
                if(len(A) >= n): # Once we reached the length of n, we display the nth eler
                        print(A[-1])
                        break
        l += 1
```

Question b). Soit $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ définie par $(x, y) \mapsto 2^x \cdot 3^y$. Par le théorème de l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers, f est injective. De plus, il existe aussi une injection naturelle de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Par le théorème de Cantor-Bernstein, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sont en bijection. Un exemple de bijection est la fonction de Cantor qui utilise les diagonales du plan entier. Cette fonction est $g : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ définie par $(x, y) \mapsto \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$. Plutôt que de calculer analytiquement l'inverse de g, nous allons utiliser un algorithme qui calcule l'inverse par "force brute". C'est très peu optimisé mais plus rapide que de calculer analytiquement l'inverse pour des petits nombres. Pour trouver $x(n)$ à partir de n, on teste donc toutes les valeurs du plan, en descendant à partir de (n, n) jusqu'à $(0, 0)$. On utilise la fonction récursive suivante :

```
def g_inverse(n):
    if n == 0:
        return (0, 0)
    elif n == 1:
        return (1, 0)
    else:
        x, y = g_inverse(n-1)
        if x == 0:
            return (y+1, 0)
        else:
            return (x-1, y+1)
```

La fonction retourne le tuple (x_n, y_n). Vous pourrez trouver le code complet à l'adresse suivante :
https://github.com/lilianrouzaire/probastats/blob/master/serie1_ex1b.py.

Question c). On reprend l'argument de la diagonale de Cantor. Pour toute partie dénombrable de $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, en écrivant la suite de 0 et de 1 comme un nombre appartenant à $[0, 1]$, on peut créer un nouvel élément qui n'est pas dans cette partie dénombrable en utilisant la diagonale de la matrice infinie construite en superposant tous les éléments. L'argument original de la diagonale de Cantor se base sur des suites à valeurs dans $\{0, ..., 9\}$ mais on peut se ramener à notre problème de suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ en changeant de base.

Exercice 2 : Théorie des ensembles et mesure de probabilité

Question a). Montrons que $1_{A\cup B} = 1 - (1 - 1_A)(1 - 1_B)$. En développant l'indication donnée, on a

$$\begin{aligned}(1 - 1_A)(1 - 1_B) &= 1 - 1_B - 1_A + 1_A \cdot 1_B \\ &= 1 - 1_A - 1_B + 1_{A\cap B}\end{aligned}$$

On utilise la relation $1_{A\cap B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cup B}$ pour conclure que

$$\begin{aligned}(1 - 1_A)(1 - 1_B) &= 1 - 1_A - 1_B + (1_A + 1_B - 1_{A\cup B}) \\ &= 1 - 1_{A\cup B}\end{aligned}$$

On a ainsi bien l'égalité voulue : $1_{A\cup B} = 1 - (1 - 1_A)(1 - 1_B)$.

Question b). On utilise les propriétés $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ et $P(A\backslash B) = P(A) - P(B)$ valables si A et B sont disjoints, et on essaye donc de former une partition de $A \cup B$. En effet, décomposons $A \cup B$ avec la partition suivante (facilement visible sur un diagramme de Venn) :

$$\begin{aligned}A \cup B &= (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \cup (A \cap B) \\ &= (A\backslash(A \cap B)) \cup (B\backslash(A \cap B)) \cup (A \cup B)\end{aligned}$$

En utilisant les propriété de somme/différence des probabilités citées en début de paragraphe, on obtient :

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) - P(A \cup B) + P(B) - P(A \cup B) + P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cup B)\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

Exercice 3 : Espaces probabilisés et calculs de probabilités

Question a). En lançant deux pièces de monnaie, il existe une seule manière d'obtenir deux faces et une seule manière d'obtenir deux piles. Ainsi, puisque le nombre total de possibilités est de $2^2 = 4$, la probabilité d'obtenir ni deux faces ni deux piles est $\frac{1}{4-1-1} = \frac{1}{2}$.

Question b). Si l'on fixe la première face, il reste 5 possibilités pour la deuxième, 4 pour la troisième, etc. On a donc 6! possibilités d'avoir toutes les faces différentes. La probabilité d'avoir 6 faces différentes est donc $\frac{6!}{6^6} = 0,015$.

Question c). On interprète l'énoncé comme "la probabilité d'avoir **exactement** 8 fois la face 1, ni plus, ni moins". La probabilité que 8 dés soient sur la face 1 est $(\frac{1}{6})^8$. La probabilité que les 7 faces restantes soient 2,3,4,5 ou 6 est donc $(\frac{5}{6})^7$. Seulement, il reste à placer les 8 dés fixés sur la face 1 sur les 15 possibilités : on a de cette manière $\binom{15}{8}$ choix de placement. Par le principe de multiplication, la probabilité d'avoir exactement 8 dés sur la face 1 est $(\frac{1}{6})^8 \cdot (\frac{5}{6})^7 \cdot \binom{15}{8} = 0,001$.

Question d). Une fois encore, on interprète l'énoncé comme la probabilité d'avoir le nombre **exact** de faces recherché. Ainsi, sur un lancer de 100 dés, la probabilité d'avoir exactement n faces est $(\frac{1}{2})^n \cdot (\frac{1}{2})^{100-n}\binom{100}{n} = (\frac{1}{2})^{100}\binom{100}{n}$. En appliquant à $n = 2$, on trouve une probabilité de 10^{-27}, avec $n = 50$ on trouve une probabilité de 0.08 et avec $n = 98$, on trouve logiquement aussi 10^{-27} par les propriétés "miroir" de la loi binomiale.