Доказательство, что выбывание не отличается от обычного колеса

@Dyaka

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – веса вариантов в колесе. Зафиксируем k-ый вариант – тот, для которого мы считаем вероятность победить. Вероятность его победы в обычном колесе:

$$\mathbb{P}(V_k) = \frac{x_k}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Зададим пространство событий в колесе на вылет. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ – событие невылета нашего варианта на i-ом шагу колеса. Вариант x_k побеждает, если происходит произведение событий: $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$. По формуле вероятности произведения событий имеем:

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_1) * \mathbb{P}(A_2|A_1) * \dots * \mathbb{P}(A_{n-1}|A_1 A_2 \dots A_{n-2}).$$

С одной стороны A_1 – сумма событий вылета всех вариантов, кроме k-го, на первом шагу. С другой стороны это дополнение к событию вылета k-го варианта на первом шагу. Вероятность вылета j-го варианта на первом шагу:

$$\frac{1 - \frac{x_j}{\sum_{i=1}^n x_i}}{n-1}.$$

Надо доказать, что

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) = \mathbb{P}(V_k) = \frac{x_k}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Доказательство с помощью мат. индукции.

1. База мат. индукции – два варианта.

   Будем считать вероятность победы первого варианта (для второго считается аналогично, также мы можем индексировать, как нам удобно). Победа перового варианта – вылет второго варианта. Получаем

   $$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1 - \frac{x_2}{x_1+x_2}}{2-1} = \frac{x_1}{x_1+x_2} = \mathbb{P}(V_1).$$

   База доказана.

2. Считаем, что для $n-1$ вариантов верно равенство

   $$\mathbb{P}(A_2 A_3 \dots A_{n-1}) = \frac{x_k}{\sum\limits_{i \in \{1 \dots n\} \setminus \{j\}} x_i},$$

   где на первом шагу вылетел j-ый вариант, $j \neq k$. Как написано выше, событие невылета на первом шагу для k-го варианта равна сумме событий вылета всех вариантов, кроме k-го, на первом шагу. Тогда полная вероятность победы k-го варианта:

   $$\sum_{j \in \{1 \dots n\} \setminus \{k\}} \left(\frac{1 - \frac{x_j}{\sum_{i=1}^n x_i}}{n-1} * \frac{x_k}{\sum\limits_{i \in \{1 \dots n\} \setminus \{j\}} x_i} \right).$$

Для упрощения обозначим $\sum_{i=1}^{n} x_i$ как S. Тогда получаем:

$$\sum_{j\in\{1\ldots n\}\setminus\{k\}} \left(\frac{S - x_j}{(n-1) * S} * \frac{x_k}{S - x_j} \right) = \frac{(n-1) * x_k}{(n-1) * S} = \frac{x_k}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

$\blacksquare$