1.4 条件概率

一、条件概率的定义

二、乘法公式

三、小结

一、条件概率

在解决许多概率问题时，往往需要在有某些附加信息(条件)下求事件的概率.

如在事件A发生的条件下求事件B发生的概率，将此概率记作$P(B|A)$.

一般地 $P(B|A) \neq P(B)$

例如，掷一颗均匀骰子，A={掷出2点}，

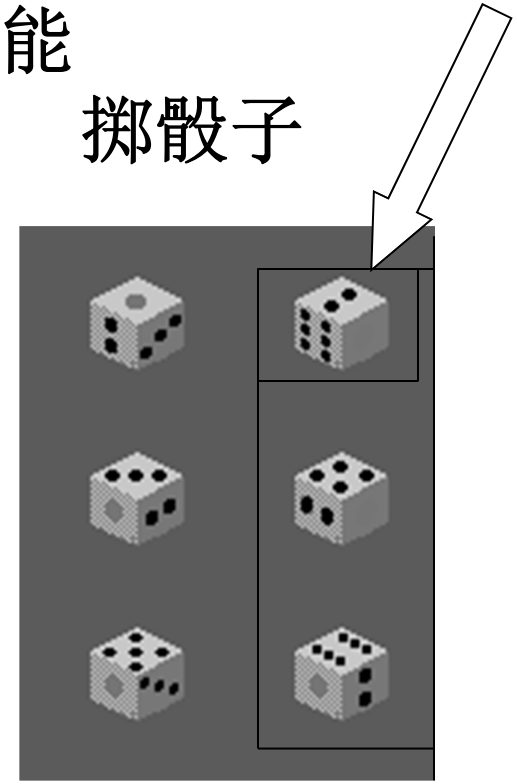
B={掷出偶数点}，$P(A)=1/6$，$P(A|B)$=？

已知事件B发生，此时试验所有可能结果构成的集合就是B，

B中共有3个元素,它们的出现是等可能的,其中只有1个在集A中. 于是

$$P(A|B)=1/3.$$

掷骰子



容易看到

$$P(A|B)=\frac{1}{3}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

又例如：将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正反面的情况. 设事件A为“至少有一次为H”, 事件B为“两次掷出同一面”. 现在求已知事件A已经发生条件下事件B发生的概率.

解：样本空间为$S=(HH,HT,TH,TT\}$,
$A=\{HH,HT,TH\}$, $B=\{HH,TT\}$.

已知事件A已发生, 知道"TT"不可能发生.

即知试验所有可能结果所成的集合就是A, A中共有**3**个元素, 其中只有$HH\in B$. 于是, 在A发生的条件下B发生的概率,记为$P(B|A)$,为

$$P(B \mid A)=\frac{1}{3}.$$

另外, 易知

$$P(A)=\frac{3}{4}, P(AB)=\frac{1}{4}, P(B \mid A)=\frac{1}{3}=\frac{1/4}{3/4}$$

故有

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

计算**$P(B|A)$**时，原始的前提条件未变，只是加上“事件***A***已发生”这个新的条件.

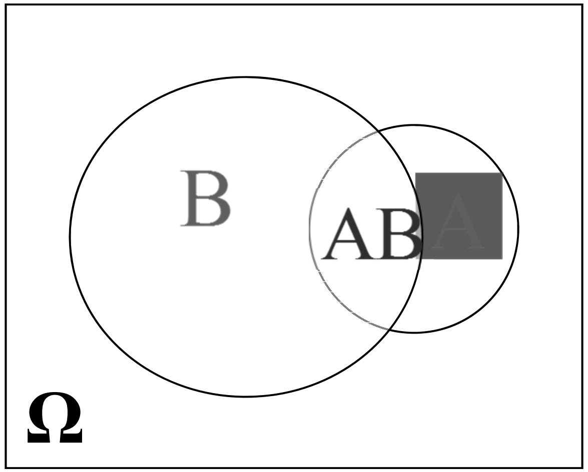
这好象给了我们一个“情报”，使我们得以在某个缩小了的范围内来考虑问题.

1. 定义1.8

设 A, B 是两个事件，且 $P(B) > 0$，称

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad （1）$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.



若事件***B***已发生，则为使***A***也发生，试验结果必须是既在 ***B*** 中又在***A***中的样本点，即此点必属于***AB***. 由于我们已经知道***B***已发生，故***B***变成了新的样本空间，于是得式（1）.

对于一般古典概型问题, 若仍以***P*****(*****A*****|B)**记事件***B***已经发生的条件下***A***发生的概率, 则关系式**(1)**仍然成立. 事实上, 设试验的基本事件总数为***n***, ***B***所包含的基本事件数为***m*****(*****m*****>0)**, ***AB***所包含的基本事件数为***k***, 即有

$$P(A|B)=\frac{k}{m}=\frac{k/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

2. 性质

(1)有界性：$0 \le P(A|B) \le 1$;

(2)规范性　　$\mathbf{P}(\Omega|\mathbf{B}) = 1$，　$\mathbf{P}(\Phi \mid \mathbf{B}) = \mathbf{0}$

(3) $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$;

(4) $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B)$.

(5)可加可列性：设 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots$,**是两两不相容的事件,则有**

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{A}_i \middle| \mathbf{B}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i|\mathbf{B}).$$

例1 掷两颗均匀骰子,已知第一颗掷出6点,问“掷出点数之和不小于10”的概率是多少?

解: 设A={掷出点数之和不小于10}

B={第一颗掷出6点}

解:

应用定义

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3/36}{6/36}=\frac{1}{2}$$

例2　一盒子装有4 只产品,其中有3 只一等品,1只二等品.从中取产品两次,每次任取一只,作不放回抽样.设事件A为"第一次取到的是一等品",事件B 为"第二次取到的是一等品",试求条件概$P(B|A)$.

解　将产品编号, 1, 2, 3 为一等品； 4 号为二等品 .

以 (i, j) 表示第一次、第二次分别取到第 i 号、第 j 号产品,则试验的样本空间为

$$\Omega = \{(1,2),\quad (1,3),\quad (1,4),\quad (2,1),\quad (2,3),\quad (2,4),\cdots,$$
$$(4,1),\quad (4,2),\quad (4,3)\},$$

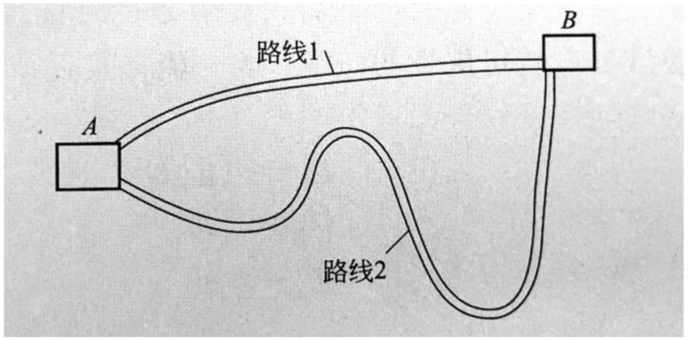
$$A=\{(1,2),\quad (1,3),\quad (1,4),\quad (2,1),\quad (2,3),\quad (2,4),$$
$$(3,1),\quad (3,2),\quad (3,4)\},$$

$$AB=\{(1,2),\quad (1,3),\quad (2,1),\quad (2,3),\quad (3,1),\quad (3,2)\},$$

由条件概率的公式得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/12}{9/12}=\frac{2}{3}.$$

例**3** 从城市**A**到城市**B**有两条公路，路线**1**是在开阔平原上，而路线**2**是经过山区地形的景观道路。在严冬季节，由于大雪阻碍交通，上述一条或两条路线可能会被关闭。令E_1={路线**1**开放}，E_2={路线**2**开放}。对这两条路线而言，与路线**1**相比，路线**2**在冬季更容易被关闭。此外，在严重雪灾的情况下，路线**1**的通行情况将可能取决于路线**2**是否开放。



假设在严重暴风雪情况下，两条路线开放的概率分别为：

则在暴风雪天气下路线**2**是开放的条件下，路线**1**也是开放的概率为多少？另一方面，若在暴风雪天气下路线**2**关闭，那么路线**1**也关闭的概率为多少？开放的概率为多少？

例**4** 假设车辆在接近某个路口时，将选择直走的可能性是右转可能性的两倍，而左转的可能性是右转可能性的一半。当一辆车接近该路口的时候，其可能的行驶方向定义为：

E_1={直走}；E_2={右转}；E_3={左转}，

其中$P(E_1)=4/7$。那么，如果在路口，汽车肯定会转弯，则将右转的概率是多少？

例5 某种动物由出生算起活20岁以上的概率为0.8, 活到25岁以上的概率为0.4, 如果现在有一个20岁的这种动物, 问它能活到25岁以上的概率是多少?

解 设 A 表示“ 能活 20 岁以上 ” 的事件; B 表示 “ 能活 25 岁以上”的事件,

则有 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

因为 $P(A)=0.8,\quad P(B)=0.4,\quad P(AB)=P(B),$

所以 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}.$$

1.条件概率$P(B|A)$与$P(B)$的区别

每一个随机试验都是在一定条件下进行的 ,设B是随机试验的一个事件，则$P(B)$是在该试验条件下事件B发生的可能性大小.

而条件概率 $P(B|A)$ 是在原条件下又添加 “A发生 ” 这个条件时B发生的可能性大小，即 $P(B|A)$仍是概率.

$P(B)$ 与 $P(B|A)$ 的区别在于两者发生的条件不同,它们是两个不同的概念,在数值上一般也不同

2.条件概率 $P(B|A)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 的区别.

P(AB) 表示在样本空间 Ω 中,计算 AB发生的概率,而 P(B|A) 表示在缩小的样本空间 Ω_A 中,计算 B 发生的概率 .用古典概率公式 ,则

$$P(B|A) = \frac{AB\text{ 中样本点数}}{\Omega_A\text{ 中样本点数}},$$

$$P(AB) = \frac{AB\text{ 中样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点数}}$$

一般来说 , P(B|A) 比 P(AB) 大.

2. 乘法定理

由条件概率的定义： $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

若已知$P(B)$, $P(A|B)$时, 可以反求$P(AB)$.

即　若$P(B)>0$,则$P(AB)=P(B)P(A|B)$　　(2)

将

若

(2)和(3)式都称为乘法公式，利用
它们可计算两个事件同时发生的概率

而　$P(AB)=P(BA)$

故　$P(A)>0$, 则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$　　(3)

容易推广到多个事件的积事件的情况. 例如:

设 A,B,C 为事件,且 $P(AB)>0$, 则有

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

推广 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件, $n\geq 2$,

且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则有

$$\boxed{\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_n)&=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\\&\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\end{aligned}}$$

抓阄是否与次序有关?

例6 五个阄, 其中两个阄内写着“有”字, 三个阄内不写字, 五人依次抓取, 问各人抓到“有”字阄的概率是否相同?

解 设 A_i 表示"第 i 人抓到有字阄"的事件,

$i=1,2,3,4,5.$ 则有 $P(A_1)=\dfrac{2}{5}$,

$$P(A_2)=P(A_2\Omega)=P(A_2\cap(A_1\cup\overline{A_1}))$$

$$= P(A_1A_2 \cup \overline{A_1}A_2) = P(A_1A_2) + P(\overline{A_1}A_2)$$

$$= P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 | \overline{A_1})$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{5},$$

$$P(A_3) = P(A_3\Omega) = P(A_3(A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}))$$

$$= P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$

$$= P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)P(A_3|A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}A_2)$$

$$+ P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\ \overline{A_2})$$

$$= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{5},$$

依此类推 $P(A_4) = P(A_5) = \dfrac{2}{5}.$

故抓阄与次序无关.

例7 （波里亚罐子模型） 设袋中装有r只红球, t只白球. 每次自袋中任取一只球, 观察其颜色后放回, 并再放入a只与所取出的那只球同色的球. 若在袋中连续取球四次, 试求第一,二次取到红球且第三, 四次取到白球的概率.

例**8** 某城市的电力由a和b两个发电厂提供。每个电厂都有足够的能力提供整个城市的日常电力需求。但在每天高峰时段都需要两个电厂提供电力，否则在该市某些地方会出现电力供应不足。定义事件**A={**电厂a失效**}**；**B={**电厂b失效**}**，并假定**P(A)=0.05,P(B)=0.07,P(AB)=0.01**。

如果在某一天，这两家电厂中的一家出现故障，那么另一家在同一天也出现故障的概率为多少？

P(A)=0.05,P(B)=0.07,P(AB)=0.01。

在给定的某一天中，该城市出现供电不足的概率是多少？如果实在高峰时段，该城市出现电力不足仅是由于电厂a出现故障导致的概率是多少？由于两家电厂同时出现故障导致供电不足的概率为多少？

三、小结

条件概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ $\longrightarrow$ 乘法定理

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$