第9章 互连网络

张晨曦 刘依

www.GotoSchool.net

xzhang2000@sohu.com

9.1 互连函数
9.2 互连网络的结构参数与性能指标
9.3 静态互连网络
9.4 动态互连网络

互连网络是一种由开关元件按照一定的拓扑结构和控制方式构成的网络，用来实现计算机系统中结点之间的相互连接。

- 结点：处理器、存储模块或其它设备。
- 在拓扑上，互连网络为输入结点到输出结点之间的一组互连或映象。
- SIMD计算机和MIMD计算机的关键组成部分。
- 3大要素：互连结构，开关元件，控制方式。

9.1 互连函数

9.1.1 互连函数

变量x：输入（设x=0，1，...，N－1）

函数f(x)：输出

通过数学表达式建立输入端号与输出端号的连接关系。即在互连函数f的作用下，输入端x连接到输出端f(x)。

- 互连函数反映了网络输入数组和输出数组之间对应的置换关系或排列关系。

（有时也称为置换函数或排列函数）

- 互连函数f(x)有时可以采用循环表示

  即： $(x_0\ x_1\ x_2\ \ldots\ x_{j-1})$

  表示： $f(x_0)=x_1$，$f(x_1)=x_2$，…，$f(x_{j-1})=x_0$

  j称为该**循环的长度**。

- 设$n=\log_2 N$，则可以用n位二进制来表示N个输入端和输出端的二进制地址，互连函数表示为：

  $$f\ (x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0)$$

9.1.2 几种基本的互连函数

介绍几种常用的基本互连函数及其主要特征。

1. 恒等函数
   - 恒等函数：实现同号输入端和输出端之间的连接。

$$I(x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0)=x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0$$

2. 交换函数
   - 交换函数：实现二进制地址编码中第k位互反的输入端与输出端之间的连接。

$$E(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{k+1}x_kx_{k-1}\cdots x_1x_0)=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{k+1}\bar{x}_kx_{k-1}\cdots x_1x_0$$

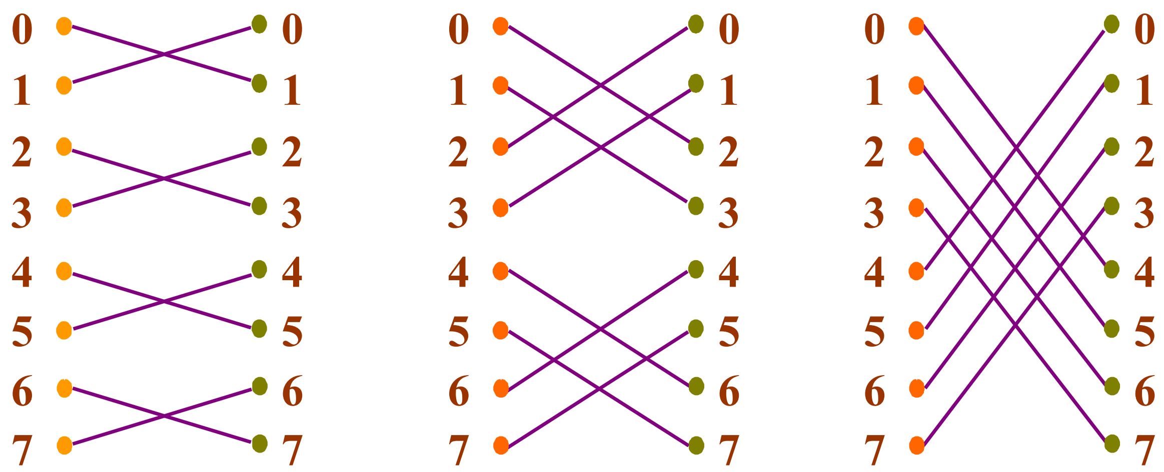
- 主要用于构造立方体互连网络和各种超立方体互连网络。
- 它共有$n=\log_2 N$种互连函数。

（N为结点个数）

- 当N＝8时，n＝3，可得到常用的立方体互连函数：

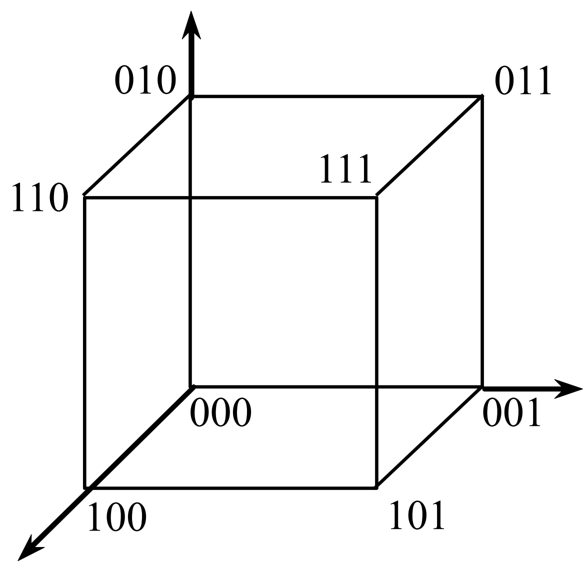
$$Cube_0(x_2x_1x_0)=x_2x_1\bar{x}_0$$
$$Cube_1(x_2x_1x_0)=x_2\bar{x}_1x_0$$
$$Cube_2(x_2x_1x_0)=\bar{x}_2x_1x_0$$

- 变换图形



(a) Cube_0 交换函数　(b) Cube_1 交换函数　(c) Cube_2 交换函数

N=8 的立方体交换函数



立方体网络

3. 均匀洗牌函数

- **均匀洗牌函数：** 将输入端分成数目相等的两半，前一半和后一半按类似均匀混洗扑克牌的方式交叉地连接到输出端（输出端相当于混洗的结果）。
  - 也称为**混洗函数（置换）**
  - 函数关系

$$\sigma(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0)=x_{n-2}x_{n-3}\cdots x_1x_0x_{n-1}$$

即把输入端的二进制编号循环左移一位。

- 互连函数（设为s）的**第k个子函数**：把s作用于输入端的二进制编号的低k位。
- 互连函数（设为s）的**第k个超函数**：把s作用于输入端的二进制编号的高k位。

例如：对于均匀洗牌函数

第k个子函数：

$$\sigma_{(k)}(x_{n-1}\cdots x_k \mid x_{k-1}x_{k-2}\cdots x_0) = x_{n-1}\cdots x_k \mid x_{k-2}\cdots x_0 x_{k-1}$$

即把输入端的二进制编号中的低k位循环左移一位。

第k个超函数：

$$\sigma^{(k)}(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{n-k} \mid x_{n-k-1}\cdots x_1x_0) = x_{n-2}\cdots x_{n-k}x_{n-1} \mid x_{n-k-1}\cdots x_1x_0$$

即把输入端的二进制编号中的高k位循环左移一位。

下列等式成立：

$$\sigma^{(n)}(X)=\sigma_{(n)}(X)=\sigma(X)$$

$$\sigma^{(1)}(X)=\sigma_{(1)}(X)=X$$

- 对于任意一种函数f(x)，如果存在g(x)，使得

$$f(x)\times g(x)=I(x)$$

则称g(x)是f(x)的逆函数，记为$f^{-1}(x)$。

$$f^{-1}(x)=g(x)$$

- 逆均匀洗牌函数：将输入端的二进制编号循环右移一位而得到所连接的输出端编号。

- 互连函数

$$\sigma^{-1}\left(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0\right)=x_0x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1$$

- 逆均匀洗牌是均匀洗牌的逆函数

➢ 当N=8时，有：

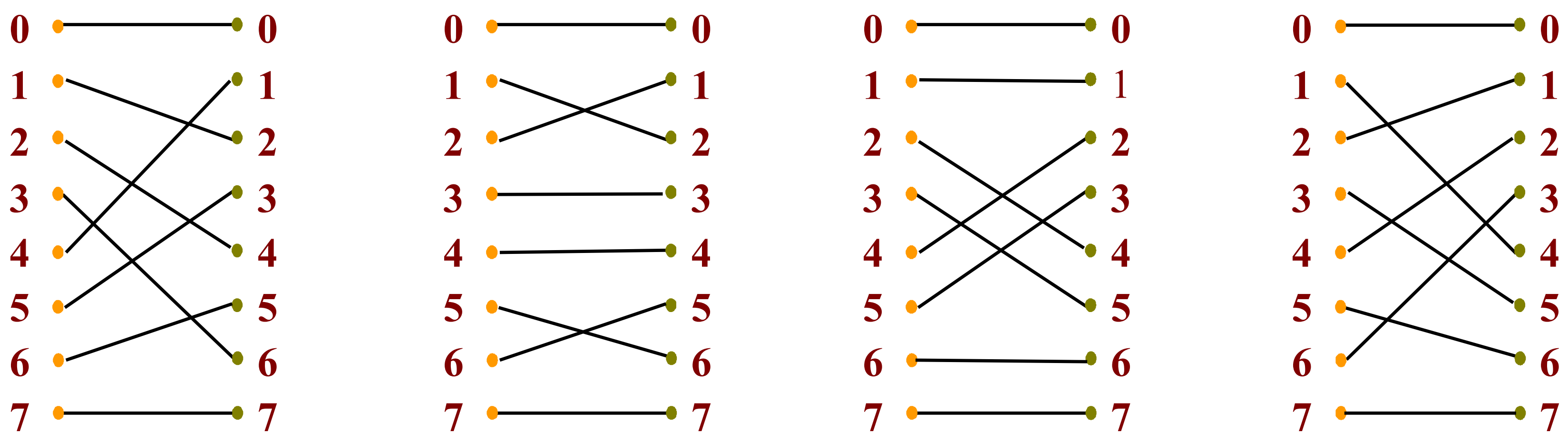
$$\sigma(x_2x_1x_0)=x_1x_0x_2$$

$$\sigma_{(2)}(x_2x_1x_0)=x_2x_0x_1$$

$$\sigma^{(2)}(x_2x_1x_0)=x_1x_2x_0$$

$$\sigma^{-1}(x_2x_1x_0)=x_0x_2x_1$$

- N=8 的均匀洗牌和逆均匀洗牌函数



(a) 均匀洗牌函数 σ　(b) 子洗牌函数 $\sigma_{(2)}$　(c) 超洗牌函数 $\sigma^{(2)}$　(d) 逆均匀洗牌函数 σ^{-1}

N=8 的均匀洗牌函数

4. 碟式函数

- **蝶式互连函数：** 把输入端的二进制编号的最高位与最低位互换位置，便得到了输出端的编号。

$$\beta(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0)=x_0x_{n-2}\cdots x_1x_{n-1}$$

- 第k个子函数

$$\beta_{(k)}(x_{n-1}\cdots x_kx_{k-1}x_{k-2}\cdots x_1x_0)=x_{n-1}\cdots x_kx_0x_{k-2}\cdots x_1x_{k-1}$$

把输入端的二进制编号的低k位中的最高位与最低位互换。

- 第k个超函数

$$\beta^{(k)}(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{n-k+1}x_{n-k}x_{n-k-1}\cdots x_1x_0)=x_{n-k}x_{n-2}\cdots x_{n-k+1}x_{n-1}x_{n-k-1}\cdots x_1x_0$$

把输入端的二进制编号的高k位中的最高位与最低位互换。

- 下列等式成立

$$\beta^{(n)}(X)=\beta_{(n)}(X)=\beta(X)$$

$$\beta^{(1)}(X)=\beta_{(1)}(X)=X$$

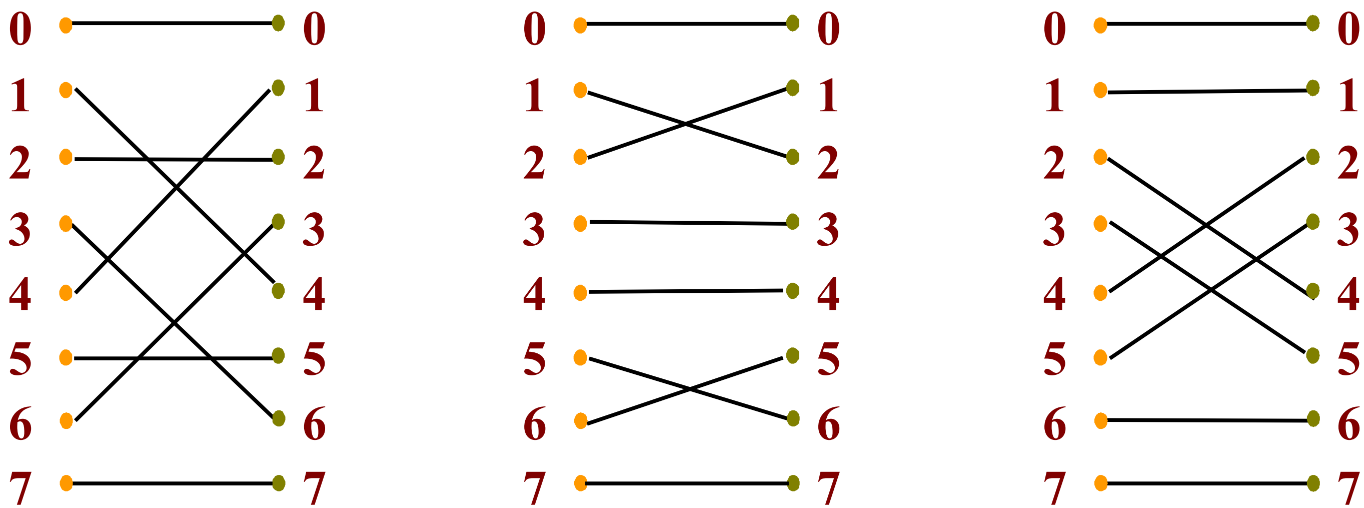
- 当N=8时，有：

$$\beta(x_2x_1x_0)=x_0x_1x_2$$

$$\beta_{(2)}(x_2x_1x_0)=x_2x_0x_1$$

$$\beta^{(2)}(x_2x_1x_0)=x_1x_2x_0$$

- 蝶式变换与交换变换的多级组合可作为构成方体多级网络的基础。



(a) $\beta = \rho$ (b) $\beta_{(2)} = \rho_{(2)}$ (c) $\beta^{(2)} = \rho^{(2)}$

N=8 的蝶式函数和反位序函数

5. 反位序函数

- **反位序函数**：将输入端二进制编号的位序颠倒过来求得相应输出端的编号。
  - **互连函数**

$$\rho(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0)=x_0x_1\cdots x_{n-2}x_{n-1}$$

- 第k个子函数

$$\rho_{(k)}(x_{n-1}\ldots x_k x_{k-1}x_{k-2}\ldots x_1 x_0)=x_{n-1}\ldots x_k x_0 x_1\ldots x_{k-2}x_{k-1}$$

即把输入端的二进制编号的低k位中各位的次序颠倒过来。

- 第k个超函数

$$\rho^{(k)}(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{n-k+1}x_{n-k}x_{n-k-1}\cdots x_1x_0)=x_{n-k}x_{n-k+1}\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_{n-k-1}\cdots x_1x_0$$

即把输入端的二进制编号的高k位中各位的次序颠倒过来。

- 下列等式成立

$$\rho^{(n)}(X)=\rho_{(n)}(X)=\rho(X)$$

$$\rho^{(1)}(X)=\rho_{(1)}(X)=X$$

- 当N=8时，有：

$$\rho(x_2x_1x_0)=x_0x_1x_2$$

$$\rho_{(2)}(x_2x_1x_0)=x_2x_0x_1$$

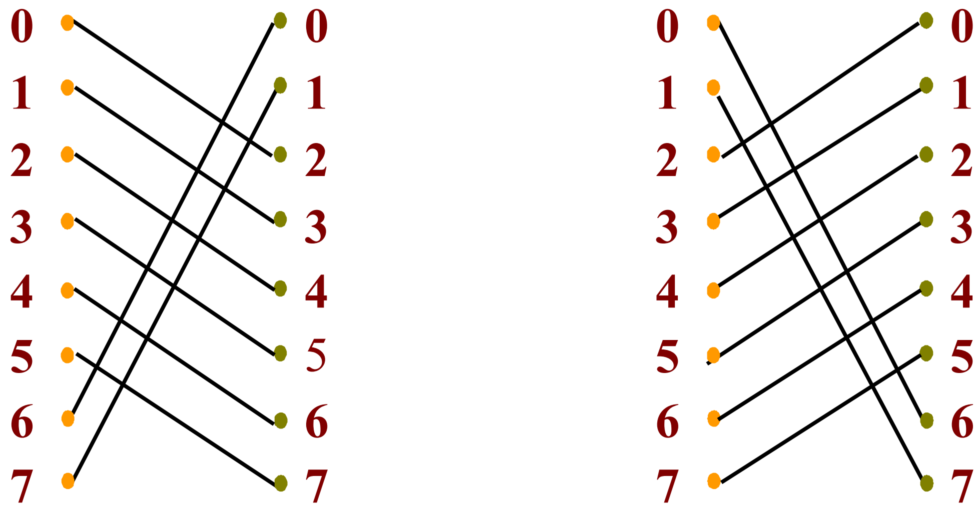
$$\rho^{(2)}(x_2x_1x_0)=x_1x_2x_0$$

6. 移数函数

➢ **移数函数**：将各输入端都错开一定的位置（模N）后连到输出端。

- 函数式

$\alpha(x) = (x \pm k) \bmod N \quad 1 \le x \le N-1, \; 1 \le k \le N-1$



(a) 左移移数函数 k=2　　(b) 右移移数函数 k=2

7. PM2I函数

- P和M分别表示加和减，2I表示2^i。
  - 该函数又称为“加减2^i”函数。
- PM2I函数：一种移数函数，将各输入端都错开一定的位置（模N）后连到输出端。
- 互连函数

$$PM2_{+i}(x) = x + 2^i \mod N$$

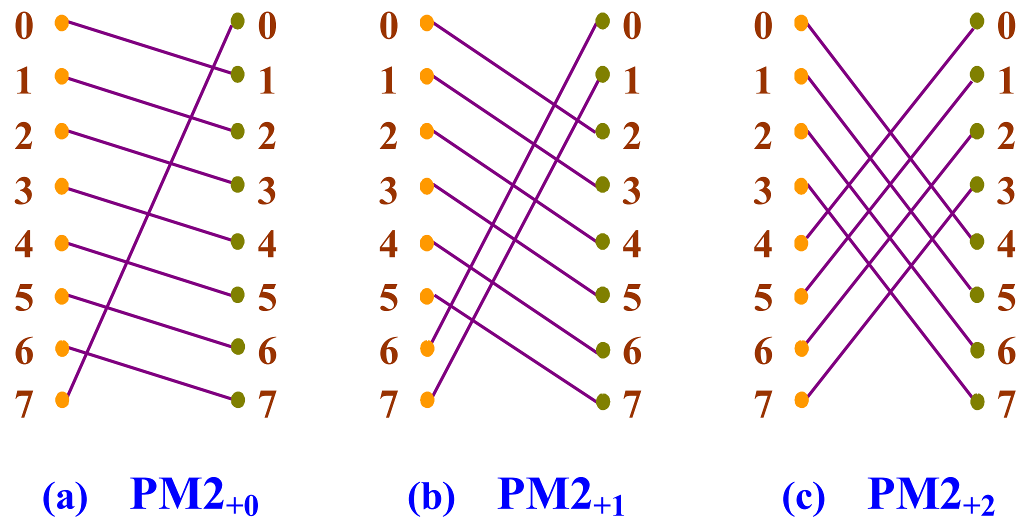
$$PM2_{-i}(x) = x - 2^i \mod N$$

其中：

$0 \leqslant x \leqslant N-1$，$0 \leqslant i \leqslant n-1$，$n = \log_2 N$，N为结点数。

- PM2I互连网络共有2n个互连函数。

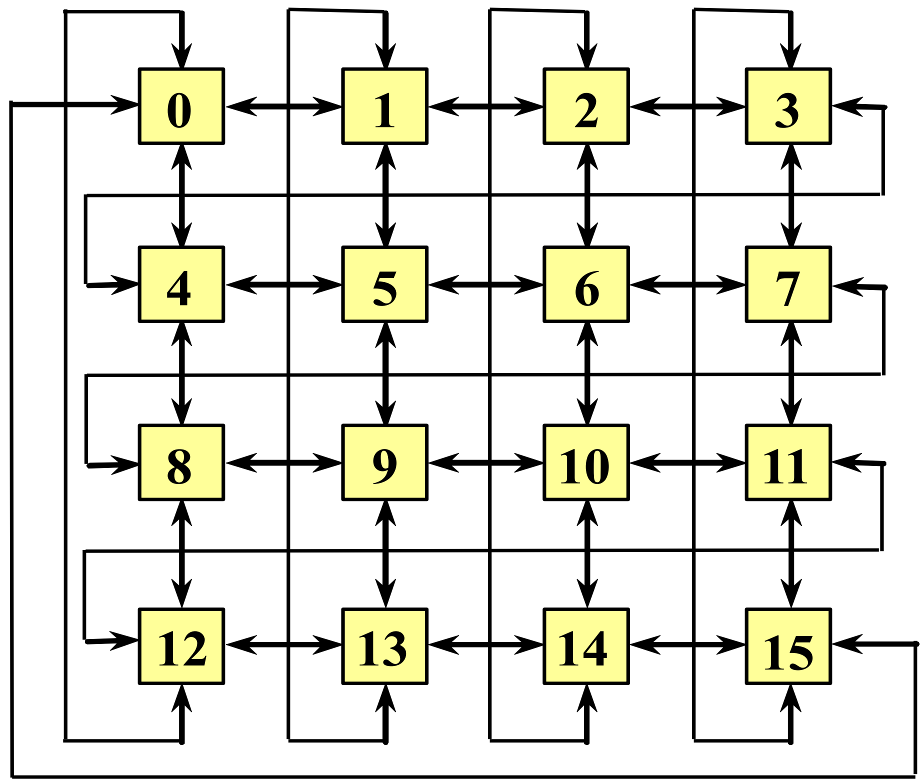
- 当N＝8时，有6个PM2I函数：
  - $PM2_{+0}$ ：（0 1 2 3 4 5 6 7）
  - $PM2_{-0}$ ：（7 6 5 4 3 2 1 0）
  - $PM2_{+1}$ ：（0 2 4 6 ）（1 3 5 7）
  - $PM2_{-1}$ ：（6 4 2 0）（7 5 3 1）
  - $PM2_{+2}$ ：（0 4）（1 5）（2 6）（3 7）
  - $PM2_{-2}$ ：（4 0）（5 1）（6 2）（7 3）



N=8 的PM2I函数

➢ 阵列计算机ILLIAC Ⅳ

采用$PM2_{\pm 0}$和$PM2_{\pm n/2}$构成其互连网络，实现各处理单元之间的上下左右互连 。



用移数函数构成ILLIAC Ⅳ 阵列机的互连网络

例9.1 现有16个处理器，编号分别为0，1，…，15，用一个N=16的互连网络互连。处理器i的输出通道连接互连网络的输入端i，处理器i的输入通道连接互连网络的输出端i。当该互连网络实现的互连函数分别为：

（1）$Cube_3$

（2）$PM2_{+3}$

（3）$PM2_{-0}$

（4）σ

（5）σ（σ）

时，分别给出与第13号处理器所连接的处理器号。

解：（1）由 $Cube_3(x_3x_2x_1x_0)=\bar{x}_3x_2x_1x_0$，

得 $Cube_3$（1101）＝0101，即处理器13连接到处理器5。

令 $Cube_3$（$x_3x_2x_1x_0$）＝1101，得 $x_3x_2x_1x_0$= 0101，故与处理器13相连的是处理器5。

所以处理器13与处理器5双向互连。

（2）由 $PM2_{+3}=j+2^3 \bmod 16$，得 $PM2_{+3}$（13）＝ $13+2^3=5$， 即处理器13连接到处理器5。

令 $PM2_{+3}$（j）＝ $j+2^3 \bmod 16 =13$，得j= 5，故与处理器13相连的是处理器5。

所以处理器13与处理器5双向互连。

（3）由 $PM2_{-0}$（j）＝ $j-2^0 \bmod 16$，得 $PM2_{-0}$（13）＝ $13-2^0=12$，即处理器13连接到处理器12。

令 $PM2_{-0}$（j）＝ $j-2^0 \bmod 16 =13$，得j= 14，故与处理器13相连的是处理器14。

所以处理器13连至处理器12，而处理器14连至处理器13。

（4）由$\sigma(x_3x_2x_1x_0)= x_2x_1x_0x_3$，得$\sigma(1101)= 1011$，即处理器13连接到处理器11。

令$\sigma(x_3x_2x_1x_0)= 1101$，得$x_3x_2x_1x_0= 1110$，故与处理器13相连的是处理器14。

所以处理器13连至处理器11，而处理器14连至处理器13。

（5）由$\sigma(\sigma(x_3x_2x_1x_0))= x_1x_0x_3x_2$，得$\sigma(\sigma(1101))= 0111$，即处理器13连接到处理器7。

令$\sigma(\sigma(x_3x_2x_1x_0))= 1101$，得$x_3x_2x_1x_0= 0111$，故与处理器13相连的是处理器7。

所以处理器13与处理器7双向互连。

9.2 互连网络的结构参数与性能指标

9.2.1 互连网络的结构参数

1. 网络通常是用有向边或无向边连接有限个结点的图来表示。
2. 互连网络的主要特性参数有：
   - 网络规模N：网络中结点的个数。

     表示该网络所能连接的部件的数量。
   - 结点度d：与结点相连接的边数（通道数），包括入度和出度。

- 进入结点的边数叫入度。
- 从结点出来的边数叫出度。

- 结点距离：对于网络中的任意两个结点，从一个结点出发到另一个结点终止所需要跨越的边数的最小值。
- 网络直径D：网络中任意两个结点之间距离的最大值。

  网络直径应当尽可能地小。

- 等分宽度b：把由N个结点构成的网络切成结点数相同（N/2）的两半，在各种切法中，沿切口边数的最小值。

- **线等分宽度**：B＝b×w
  - 其中：w为通道宽度（用位表示）
  - 该参数主要反映了网络最大流量。
- **对称性**：从任何结点看到的拓扑结构都是相同的网络称为**对称网络**。

对称网络比较容易实现，编程也比较容易。

9.2.2 互连网络的性能指标

评估互连网络性能的两个基本指标：时延和带宽

1. 通信时延

指从源结点到目的结点传送一条消息所需的总时间，它由以下4部分构成：

- 软件开销：在源结点和目的结点用于收发消息的软件所需的执行时间。
  - 主要取决于两端端结点处理消息的软件内核。
- 通道时延：通过通道传送消息所花的时间。
  - 通路时延 = 消息长度/通道带宽
  - 通常由瓶颈链路的通道带宽决定。

- **选路时延**：消息在传送路径上所需的一系列选路决策所需的时间开销。
  - 与传送路径上的结点数成正比。
- **竞争时延**：多个消息同时在网络中传送时，会发生争用网络资源的冲突。为避免或解决争用冲突所需的时间就是竞争时延。
  - 很难预测，它取决于网络的传输状态。

2. 网络时延

通道时延与选路时延的和。

- 它是由网络硬件特征决定的，与程序行为和网络传输状态无关。

3. 端口带宽

- 对于互连网络中的任意一个端口来说，其端口带宽是指单位时间内从该端口传送到其他端口的最大信息量。
  - 在对称网络中，端口带宽与端口位置无关。网络的端口带宽与各端口的端口带宽相同。
  - 非对称网络的端口带宽则是指所有端口带宽的最小值。

4. 聚集带宽

网络从一半结点到另一半结点，单位时间内能够传送的最大信息量。

例如，HPS是一种对称网络

网络规模N的上限：512

端口带宽：40MB/s

HPS的聚集带宽：（40MB/s×512）/2＝10.24GB/s

5. 等分带宽

与等分宽度对应的切平面中，所有边合起来单位时间所能传送的最大信息量。

9.3 静态互连网络

互连网络通常可以分为两大类：

- 静态互连网络

  各结点之间有固定的连接通路、且在运行中不能改变的网络。

- 动态互连网络

  由交换开关构成、可按运行程序的要求动态地改变连接状态的网络。

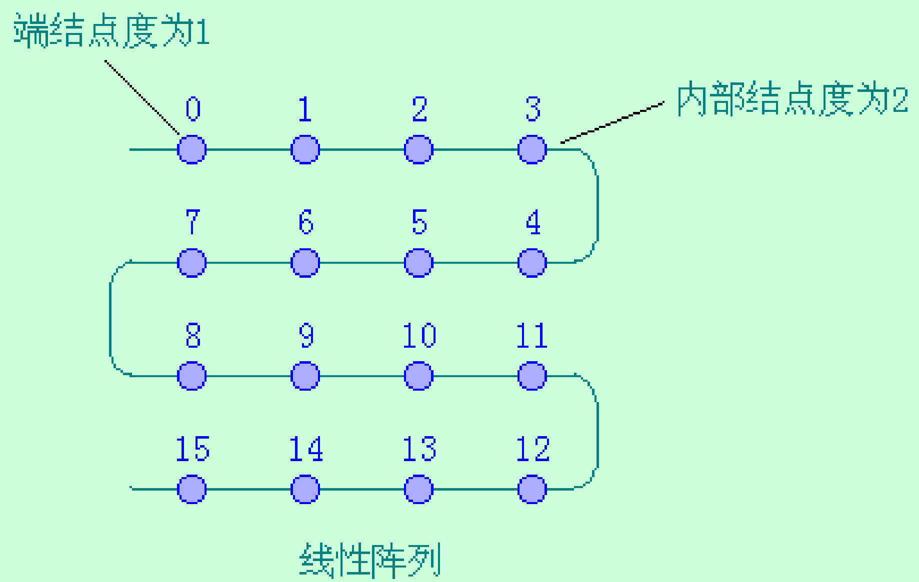
下面介绍几种静态互连网络。

（其中：N表示结点的个数）

1. 线性阵列 一种一维的线性网络，其中N个结点用N-1个链路连成一行。

- 端结点的度：1
- 其余结点的度：2
- 直径：N－1
- 等分宽度b=1

线 性 阵 列



线性阵列与总线的区别：

总线是通过切换与其连接的许多结点来实现时分特性的

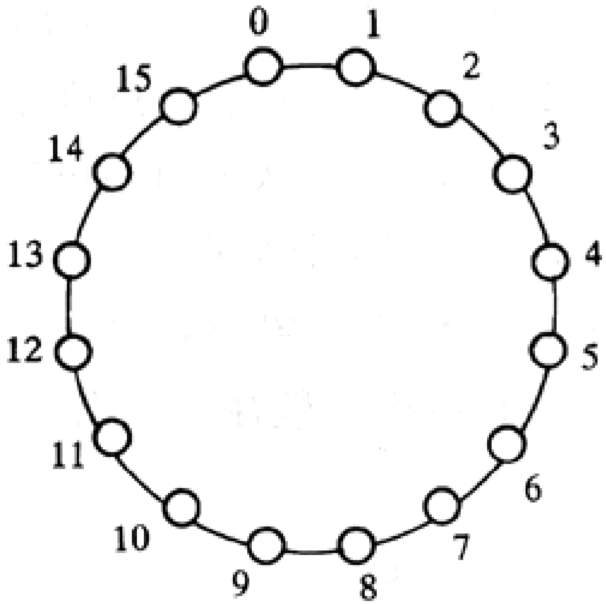
线性阵列允许不同的源结点和目的结点对并行地使用其不同的部分

2. 环和带弦环

- 环

用一条附加链路将线性阵列的两个端点连接起来而构成。可以单向工作，也可以双向工作。

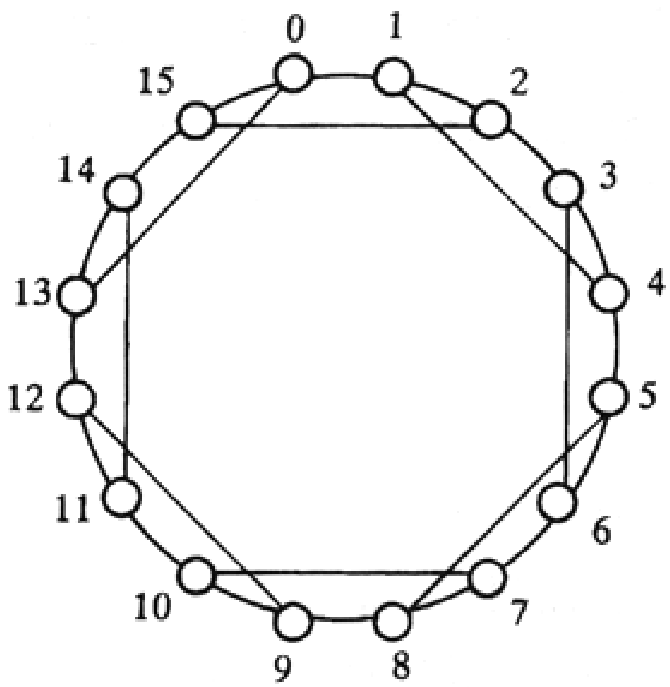
- 对称
- 结点的度：2
- 双向环的直径：N/2
- 单向环的直径：N
- 环的等分宽度**b=2**



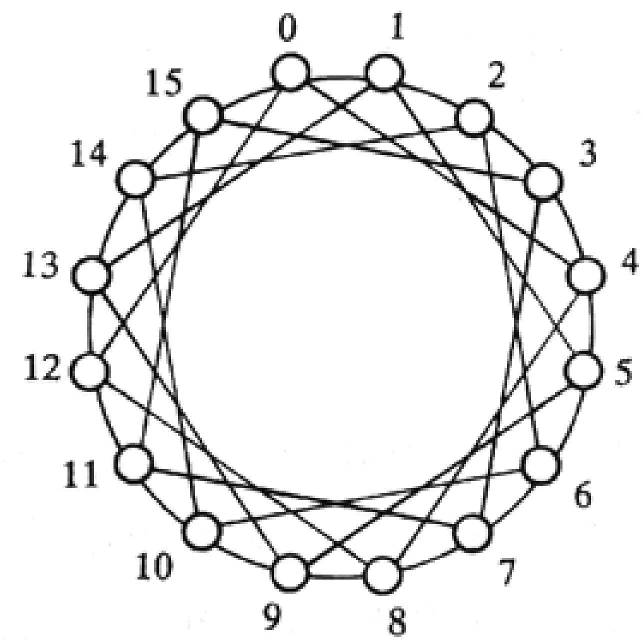
(b)环

- 带弦环

增加的链路愈多，结点度愈高，网络直径就愈小。

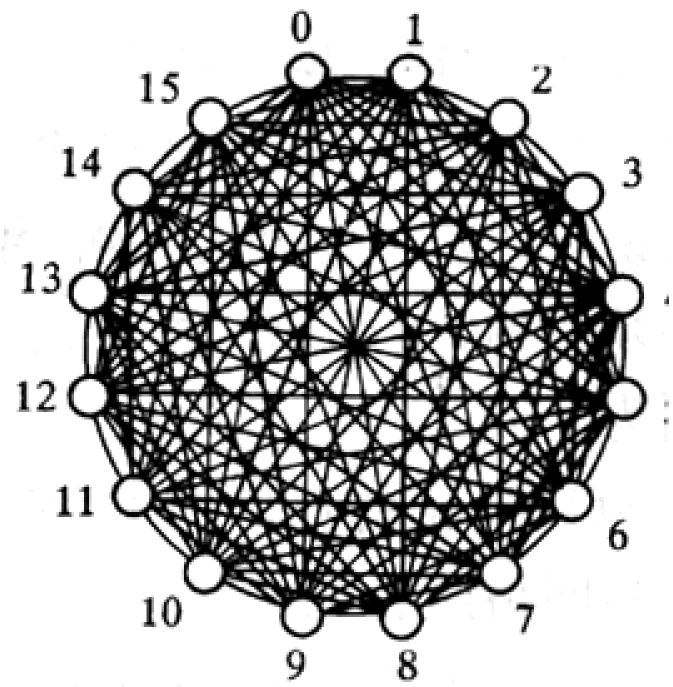


(c)度为 3 的带弦环



(d)度为 4 的带弦环(与 Illiac 网相同)

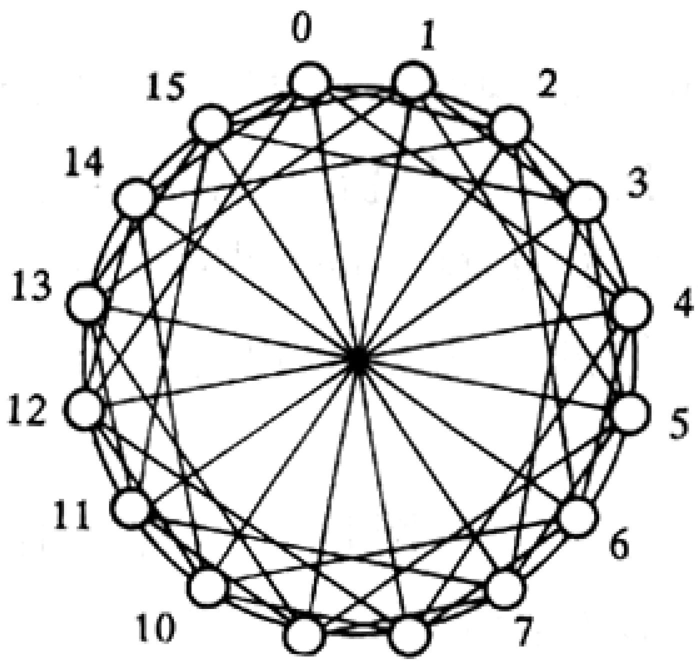
- 全连接网络
  - 结点度：15
  - 直径最短，为1。



(f)全连接

3. 循环移数网络

- 通过在环上每个结点到所有与其距离为2的整数幂的结点之间都增加一条附加链而构成。



(e)循环移数网络

N=16

- 结点度：7
- 直径：2

- 一般地，如果 $|j-i|=2^r$（$r=0, 1, 2, ..., n-1$，$n=\log_2 N$），则结点i与结点j连接。
  - 结点度：$2n-1$
  - 直径：$n/2$
  - 网络规模$N=2^n$

4. 树形和星形

- 一棵5层31个结点的二叉树

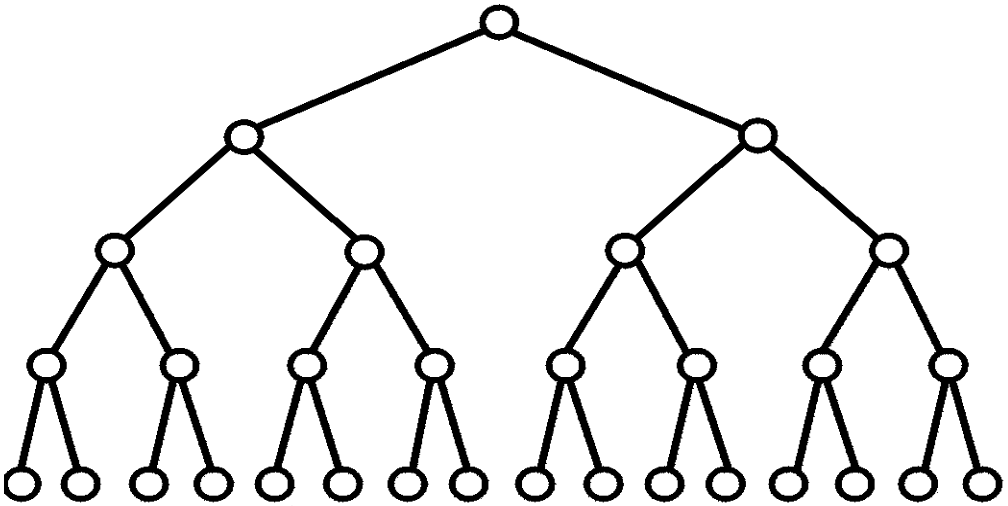
  一般说来，一棵k层完全平衡的二叉树有$N=2^k-1$个结点。

  - 最大结点度：3
  - 直径：2(k-1)
  - 等分宽度**b=1**

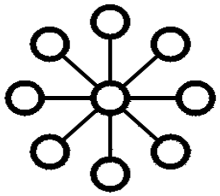
- 星形

  - 结点度较高，为N－1。
  - 直径较小，是一常数2。等分宽度$b=\lfloor N/2 \rfloor$
  - 可靠性比较差，只要中心结点出故障，整个系统就会瘫痪。

9.3 静态互连网络

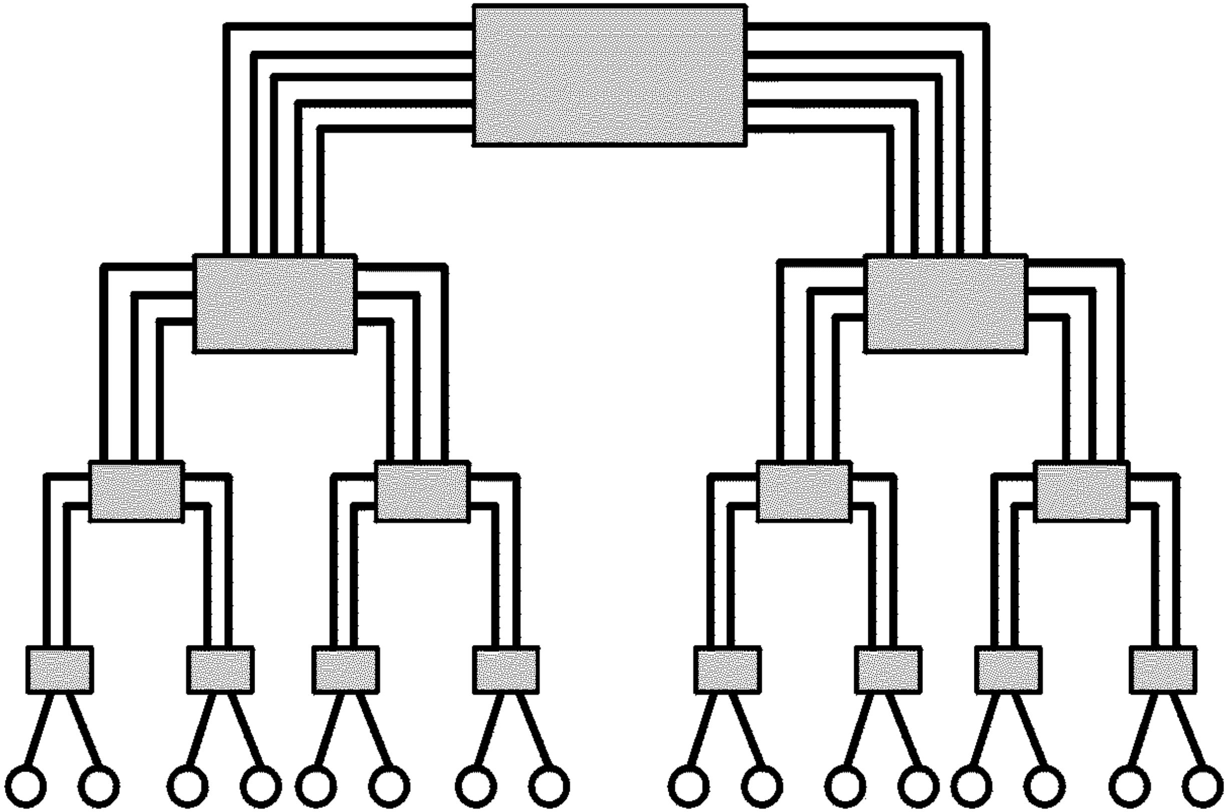


(a) 二叉树



(b) 星形

5. 胖树形



(c) 二叉胖树

6. 网格形和环网形

➢ 网格形

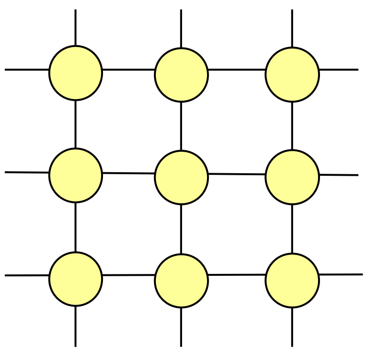
- 一个3×3的网格形网络
- 一个规模为$N=n \times n$的2维网格形网络
  - 内部结点的度$d=4$
  - 边结点的度$d=3$
  - 角结点的度$d=2$
  - 网络直径$D=2(n-1)$
  - 等分宽度$b=n$
- 一个由$N=n^k$个结点构成的k维网格形网络（每维n个结点）的内部结点度$d=2k$，网络直径$D=k(n-1)$。

- Illiac网络
  - 名称来源于采用了这种网络的Illiac Ⅳ计算机
  - 把2维网格形网络的每一列的两个端结点连接起来，再把每一行的尾结点与下一行的头结点连接起来，并把最后一行的尾结点与第一行的头结点连接起来。
  - 一个规模为n×n的Illiac网络
    - 所有结点的度d=4
    - 网络直径D=n-1

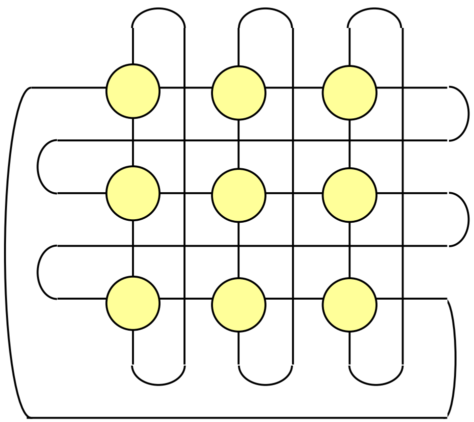
      Illiac网络的直径只有纯网格形网络直径的一半。
    - 等分宽度：2n

- 环网形
  - 可看作是直径更短的另一种网格。
  - 把2维网格形网络的每一行的两个端结点连接起来，把每一列的两个端结点也连接起来。
  - 将环形和网格形组合在一起，并能向高维扩展。
  - 一个$n \times n$的环网形网
    - 结点度：4
    - 网络直径：$2 \times \lfloor n/2 \rfloor$
    - 等分宽度**b=2n**

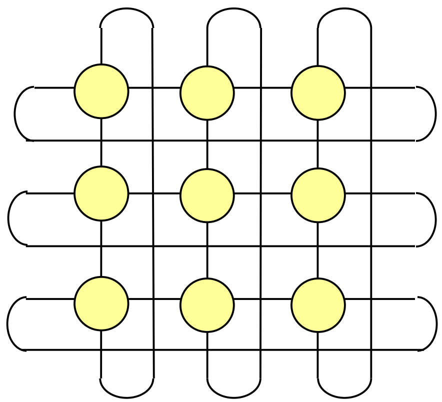
9.3 静态互连网络



(a) 网格形



(b) Illiac网



(c) 环网形

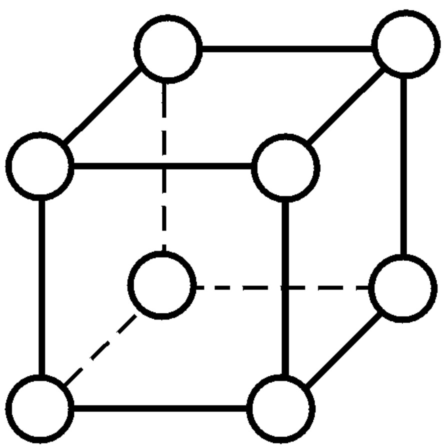
7. 超立方体

- 一种二元n-立方体结构
- 一般来说，一个二元n-立方体由$N=2^n$ 个结点组成，它们分布在n维上，每维有两个结点。

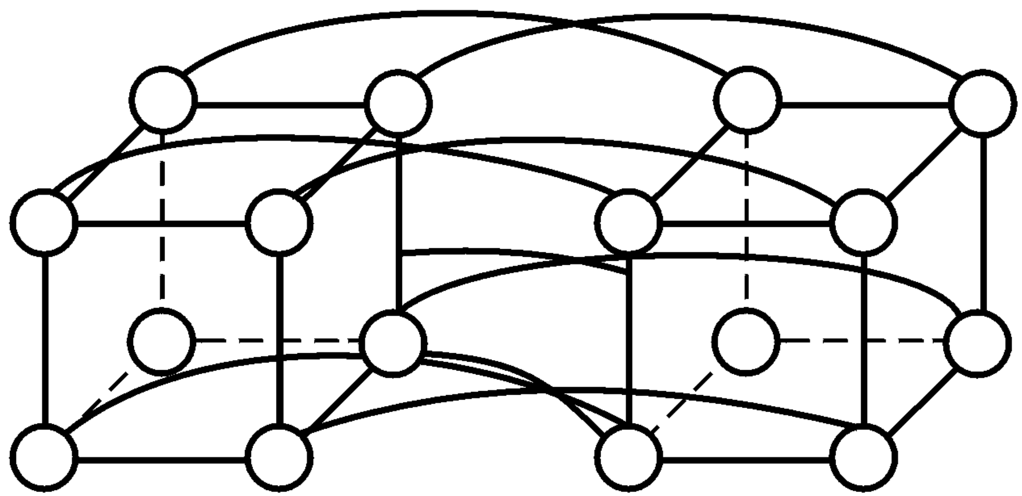
  例　8个结点的3维立方体

  4维立方体

- 为实现一个n-立方体，只要把两个（n－1）立方体中相对应的结点用链路连接起来即可。共需要2^{n-1}条链路。
- n-立方体中结点的度都是n，直径也是n，等分宽度为$b=N/2$ 。



(a) 3–立方体

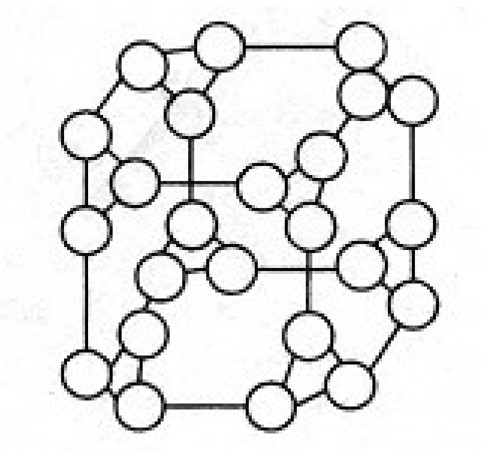


(b) 由 2 个 3– 立方体组成的 4– 立方体

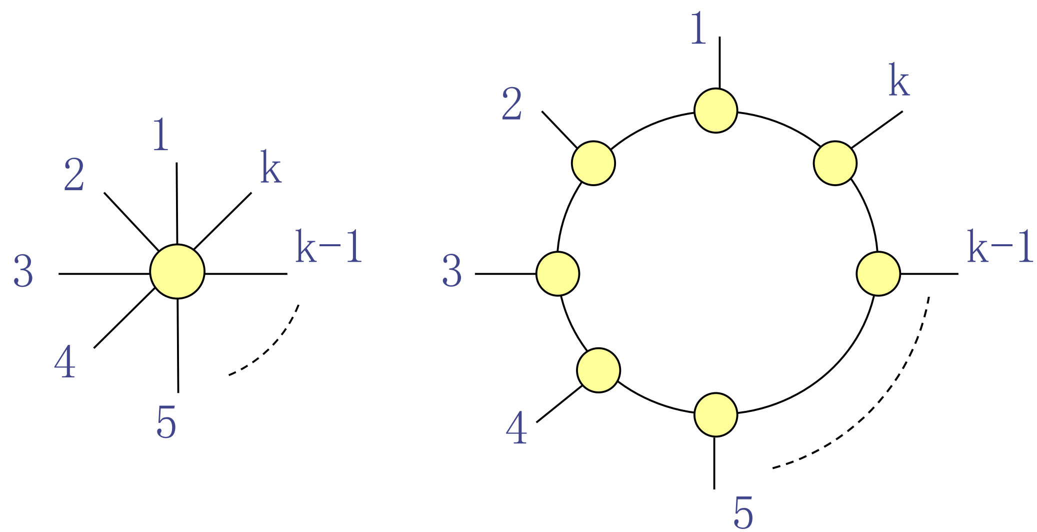
8. 带环立方体 （简称3-CCC）

- 把3-立方体的每个结点换成一个由3个结点构成的环而形成的。
- 带环k-立方体（简称k-CCC）
  - k-立方体的变形，它是通过用k个结点构成的环取代k-立方体中的每个结点而形成的。
  - 网络规模为$N=k\times 2^k$
  - 网络直径为$D=2k-1+\lfloor k/2 \rfloor$
    - 比k-立方体的直径大一倍
  - 等分宽度为$b=N/(2k)$

9.3 静态互连网络



(a) 带环3-立方体

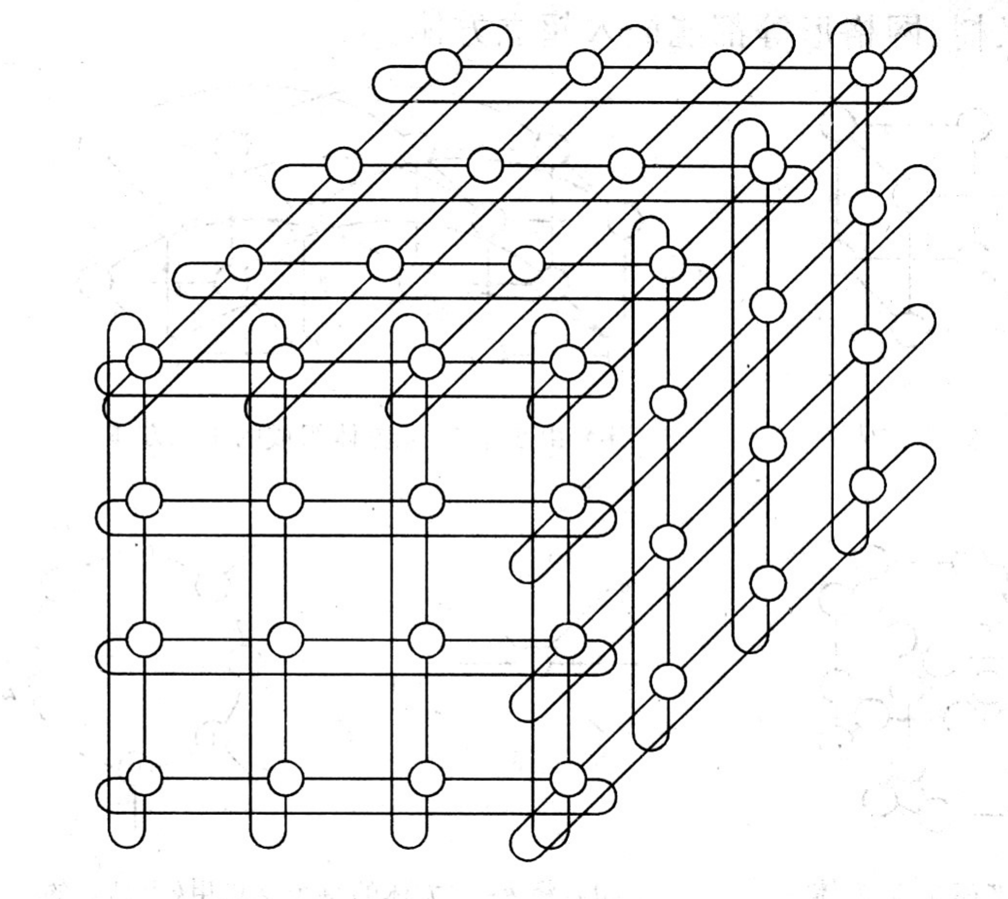


(b) 将k-立方体的每个结点用由k个结点的环来代替，组成带环k-立方体组成

9. k元n-立方体网络

- 环形、网格、环网形、二元n-立方体（超立方体）和Omega网络都是k元n-立方体网络系列的拓扑同构体。
- 在k元n-立方体网络中，参数n是立方体的维数，k是基数，即每一维上的结点个数。

  $N=k^n$，（ $k=\sqrt[n]{N}$ ，$n=\log_k N$）
- k元n-立方体的结点可以用基数为k的n位地址$A=a_1a_2\ldots a_n$来表示。
  - 其中a_i表示该结点在第i维上的位置
- 通常把低维k元n-立方体称为环网，而把高维k元n-立方体称为超立方体。



4元3-立方体网络

静态互连网络特征一览表

网络类型	结点度d	网络直径D	链路数l	等分宽度B	对称性	网络规格说明
线线阵列	2	N-1	N-1	1	非	N个结点
环形	2	[N/2]	N	2	是	N个结点
全连接	N-1	1	N(N-1)/2	$(N/2)^2$	是	N个结点
二叉树	3	2(h-1)	N-1	1	非	树高$h=[\log_2 N]$
星形	N-1	2	N-1	[N/2]	非	N个结点
2D网格	4	2(r-1)	2N-2r	r	非	r×r网格，$r=\sqrt{N}$
Illiac网	4	r-1	2N	2r	非	与 $r=\sqrt{N}$ 的带弦环等效
2D环网	4	2[r/2]	2N	2r	是	r×r环网，$r=\sqrt{N}$
超立方体	n	n	nN/2	N/2	是	N个结点，$n=[\log_2 N]$（维数）
CCC	3	2k-1+[k/2]	3N/2	N/(2k)	是	$N=k\times 2^k$结点 环长k≥3
k元n-立方体	2n	n[k/2]	nN	$2k^{n-1}$	是	$N=k^n$个结点

例9.2 已知有16台个处理器用Illiac网络互连，写出Illiac网络的互连函数，给出表示任何一个处理器PU_i（$0 \le i \le 15$）与其他处理器直接互连的一般表达式。

解：Illiac网络连接的结点数N=16，组成4×4的阵列。每一列的4个处理器互连为一个双向环，第1列～第4列的双向环可分别用循环互连函数表示为：

（0 4 8 12）	（12 8 4 0）
（1 5 9 13）	（13 9 5 1）
（2 6 10 14）	（14 10 6 2）
（3 7 11 15）	（15 11 7 3）

其中，传送方向为顺时针的4个单向环的循环互连函数可表示为：

$$PM2_{+2}(X) = (X + 2^2) \bmod N = (X + 4) \bmod 16$$

传送方向为逆时针的4个单向环的循环互连函数可表示为：

$$PM2_{-2}(X) = (X - 2^2) \bmod N = (X - 4) \bmod 16$$

16个处理器由Illiac网络的水平螺线互连为一个双向环，用循环互连函数表示为：

(0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15)

(15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0)

其中，传送方向为顺时针的单向环的循环互连函数可表示为：

$$PM2_{+0}(X) = (X + 2^0) \bmod N = (X + 1) \bmod 16$$

传送方向为逆时针的单向环的循环互连函数可表示为：

$$PM2_{-0}(X) = (X - 2^0) \bmod N = (X - 1) \bmod 16$$

所以，N=16的Illiac网络的互连函数有4个：

$PM2_{\pm 0}(X)$ 和 $PM2_{\pm 2}(X)$

由互连函数可得任何一个处理器i直接与下述4个处理器双向互连：

i±1 mod 16

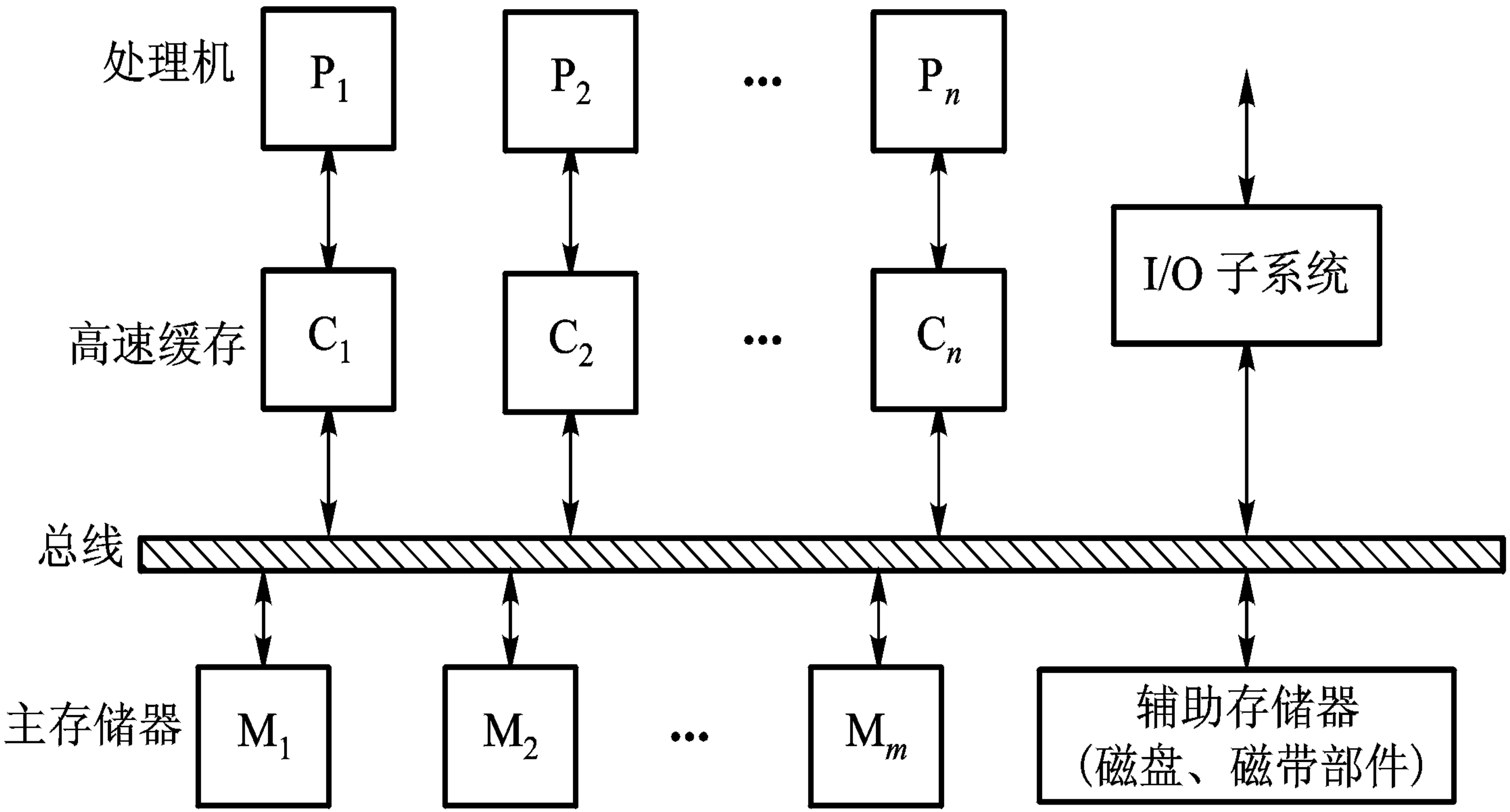
i±4 mod 16

9.4 动态互连网络

9.4.1 总线网络

1. 由一组导线和插座构成，经常被用来实现计算机系统中处理机模块、存储模块和外围设备等之间的互连。
   - 每一次总线只能用于一个源（主部件）到一个或多个目的（从部件）之间的数据传送。
   - 多个功能模块之间的争用总线或时分总线
   - 特点
     - 结构简单、实现成本低、带宽较窄

2. 一种由总线连接的多处理机系统



- 系统总线在处理机、I/O子系统、主存储器以及辅助存储设备（磁盘、磁带机等）之间提供了一条公用通路。
- 系统总线通常设置在印刷电路板底板上。处理器板、存储器板和设备接口板都通过插座或电缆插入底板。

3. 解决总线带宽较窄问题：采用多总线或多层次的总线

➢ 多总线是设置多条总线

有两种做法：

- 为不同的功能设置专门的总线
- 重复设置相同功能的总线

➢ 多层次的总线是按层次的架构设置速度不同的总线，使得不同速度的模块有比较适合的总线连接。

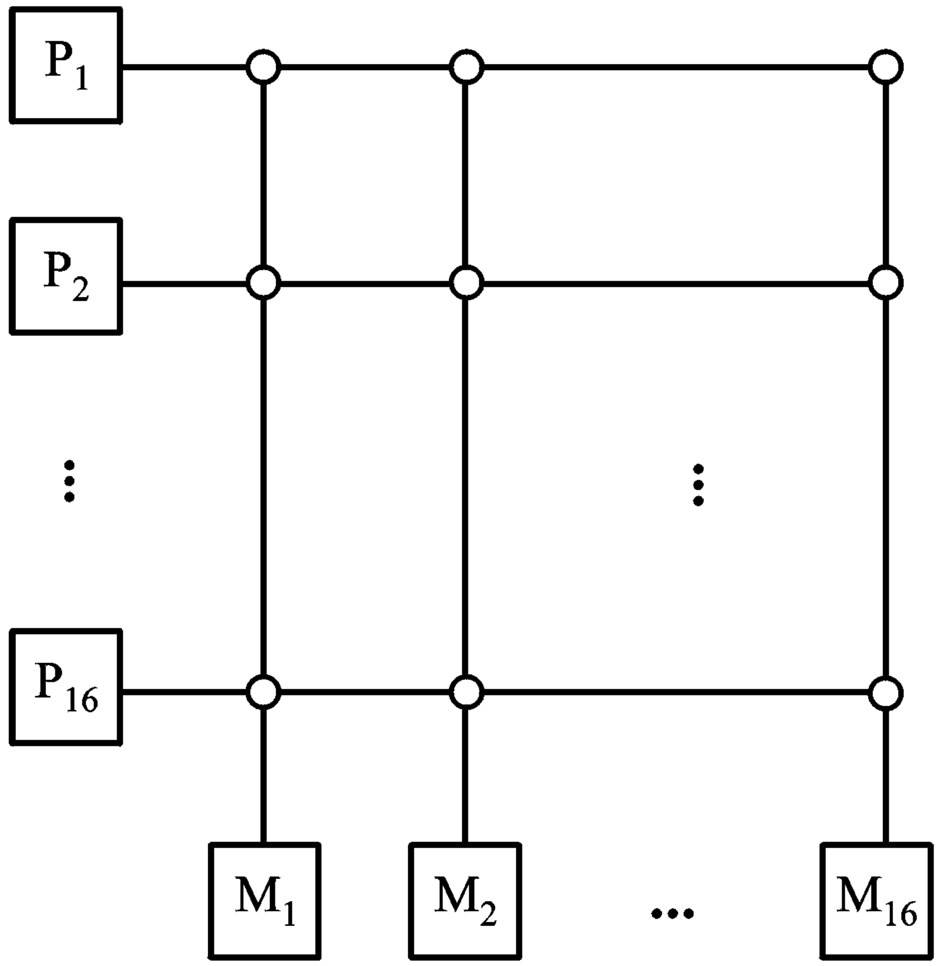
9.4.2 交叉开关网络

1. 单级开关网络

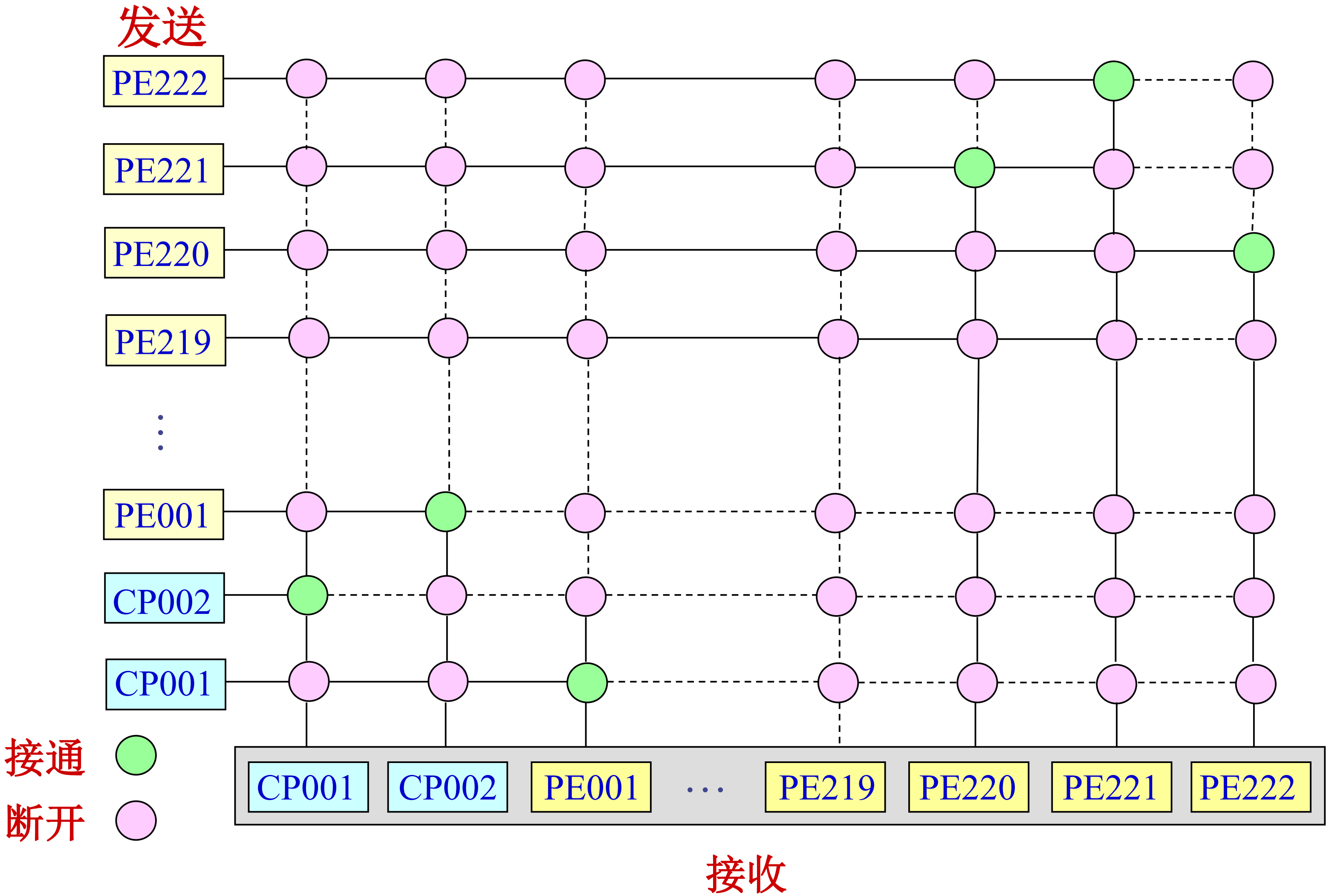
- 交叉点开关能在对偶（源、目的）之间形成动态连接，同时实现多个对偶之间的无阻塞连接。
- 带宽和互连特性最好。
- 一个n×n的交叉开关网络，可以无阻塞地实现n!种置换。
- 对一个n×n的交叉开关网络来说，需要n^2套交叉点开关以及大量的连线。
  - 当n很大时，交叉开关网络所需要的硬件数量非常巨大。

2. C.mmp多处理机的互连结构

- 用16×16的交叉开关网络把16台PDP-11处理机与16个存储模块连在一起
- 最多可同时实现16台处理机对16个不同存储模块的并行访问
  - 每个存储模块一次只能满足一台处理机的请求
  - 当多个请求要同时访问同一存储模块时，交叉开关就必须分解所发生的冲突，每一列只能接通一个交叉点开关。
  - 为了支持并行（或交叉）存储器访问，可以在同一行中接通几个交叉点开关。


P_1
P_2
P_{16}
M_1
M_2
M_{16}

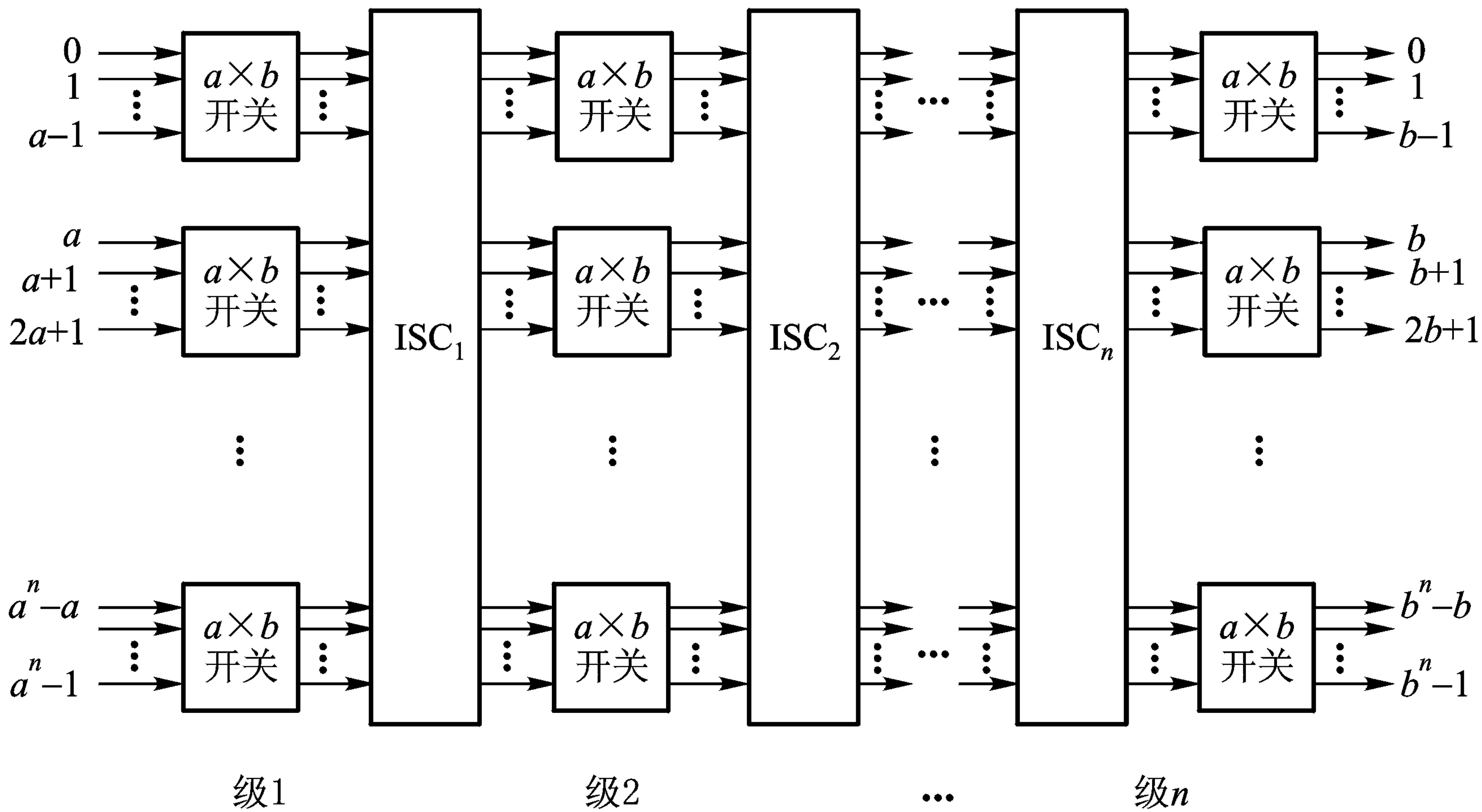
3. Fujitsu公司制造的向量并行处理机VPP500所采用的大型交换开关网络（224×224）
   - PE：带存储器的处理机
   - CP：控制处理机
   - 每一行和每一列只能接通一个交叉点开关


发送
PE222
PE221
PE220
PE219
PE001
CP002
CP001
接通
断开
CP001
CP002
PE001
PE219
PE220
PE221
PE222
接收

9.4.3 多级互连网络

1. 多级互连网络的构成

- MIMD和SIMD计算机都采用多级互连网络MIN（Multistage Interconnection Network）
- 一种通用的多级互连网络
  - 由a×b开关模块和级间连接构成的通用多级互连网络结构
  - 每一级都用了多个a×b开关
    - a个输入和b个输出
    - 在理论上，a和b不一定相等，然而实际上a和b经常选为2的整数幂，即$a=b=2^k$，$k \geq 1$。
  - 相邻各级开关之间都有固定的级间连接

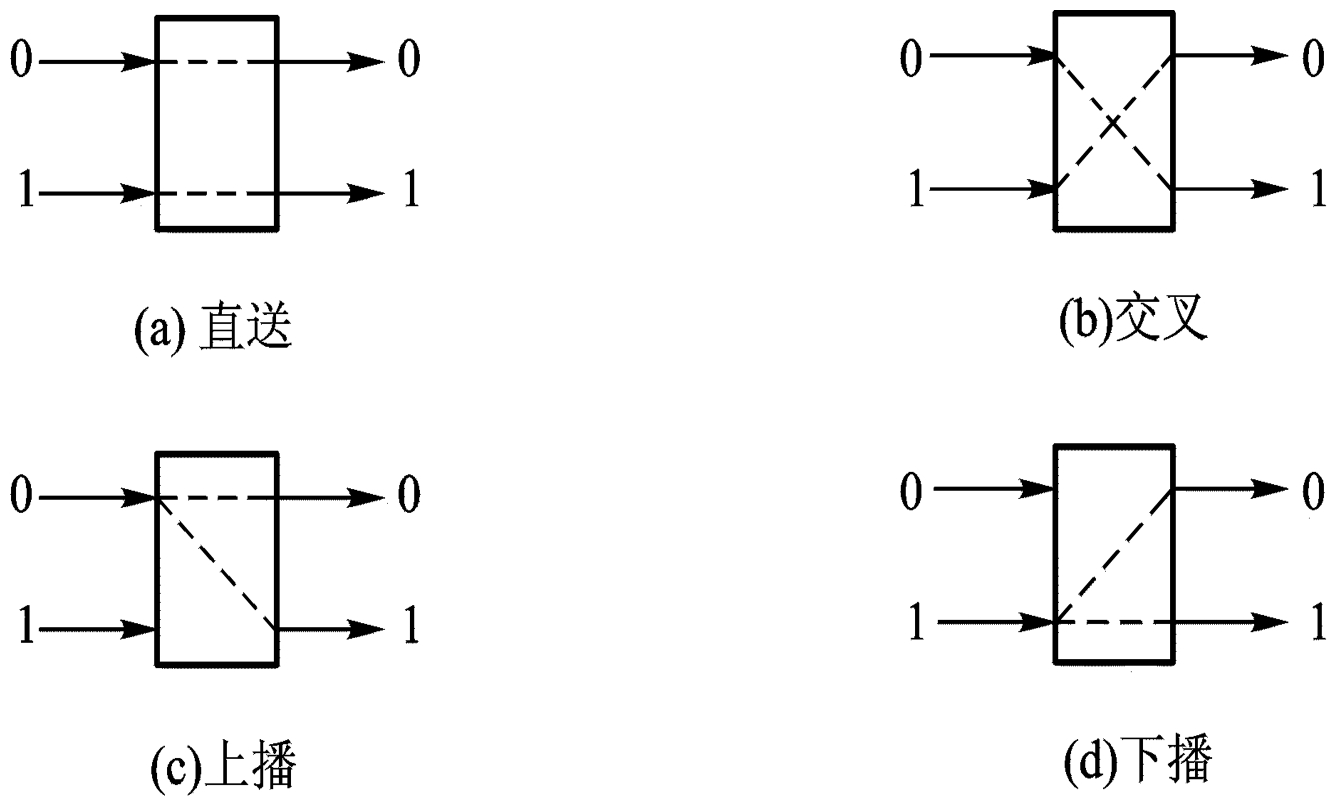

0
1
a−1
a
a+1
2a+1
aⁿ−a
aⁿ−1
a×b
开关
ISC1
ISC2
ISCn
0
1
b−1
b
b+1
2b+1
bⁿ−b
bⁿ−1
级1
级2
…
级n

- 几种常用的开关模块

模块大小	合法状态	置换连接
2×2	4	2
4×4	256	24
8×8	16 777 216	40 320
n×n	n^n	n!

- 最简单的开关模块：2×2开关

  2×2开关的4种连接方式

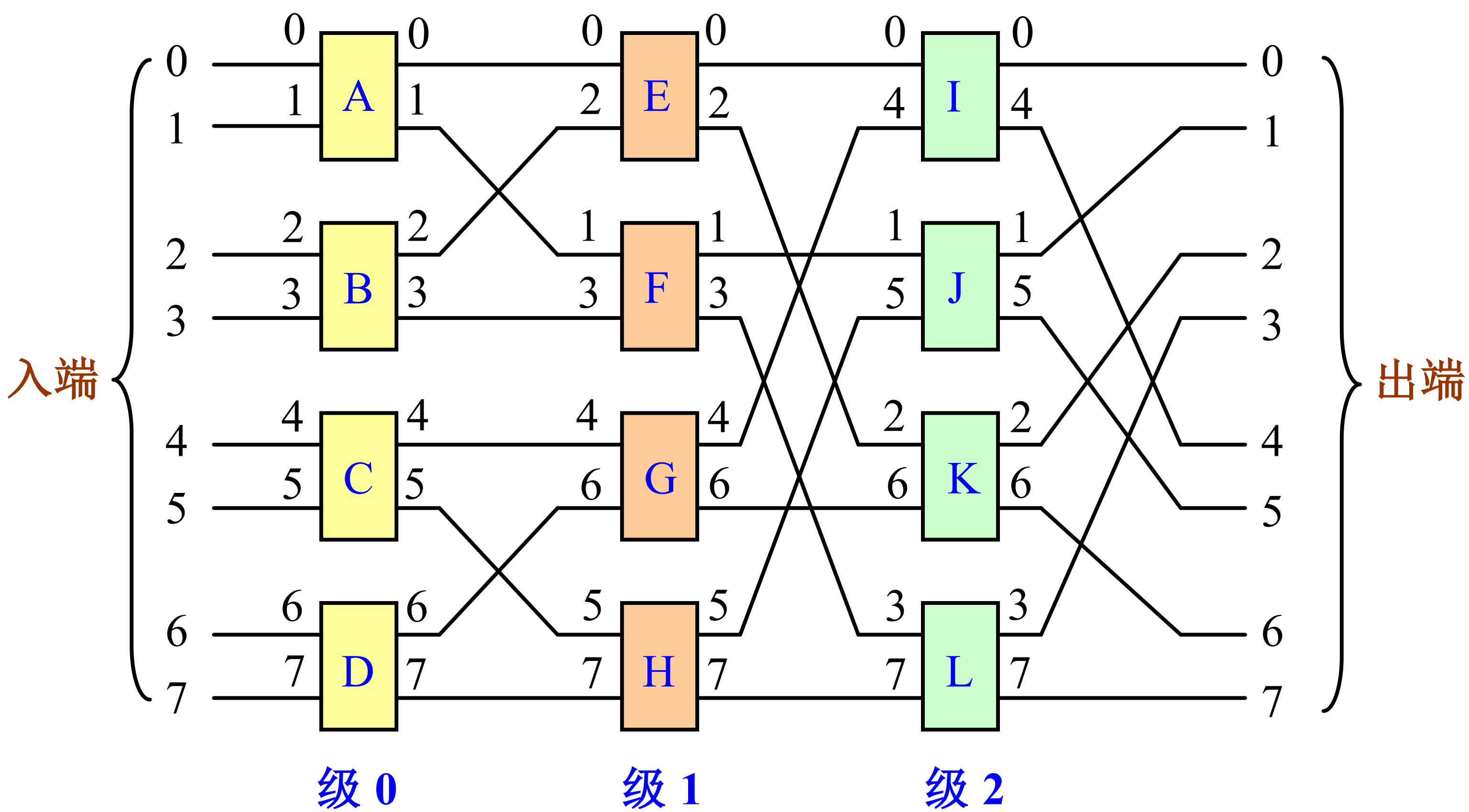


- 各种多级互连网络的区别在于所用开关模块、控制方式和级间互连模式的不同。
  - 控制方式：对各个开关模块进行控制的方式。
    - 级控制：每一级的所有开关只用一个控制信号控制，只能同时处于同一种状态。
    - 单元控制：每一个开关都有一个独立的控制信号，可各自处于不同的状态。
    - 部分级控制：第 i 级的所有开关分别用 $i+1$ 个信号控制，$0 \leq i \leq n-1$，n 为级数。
  - 常用的级间互连模式：

均匀洗牌、蝶式、多路洗牌、纵横交叉、立方体连接等

2. 多级立方体网络

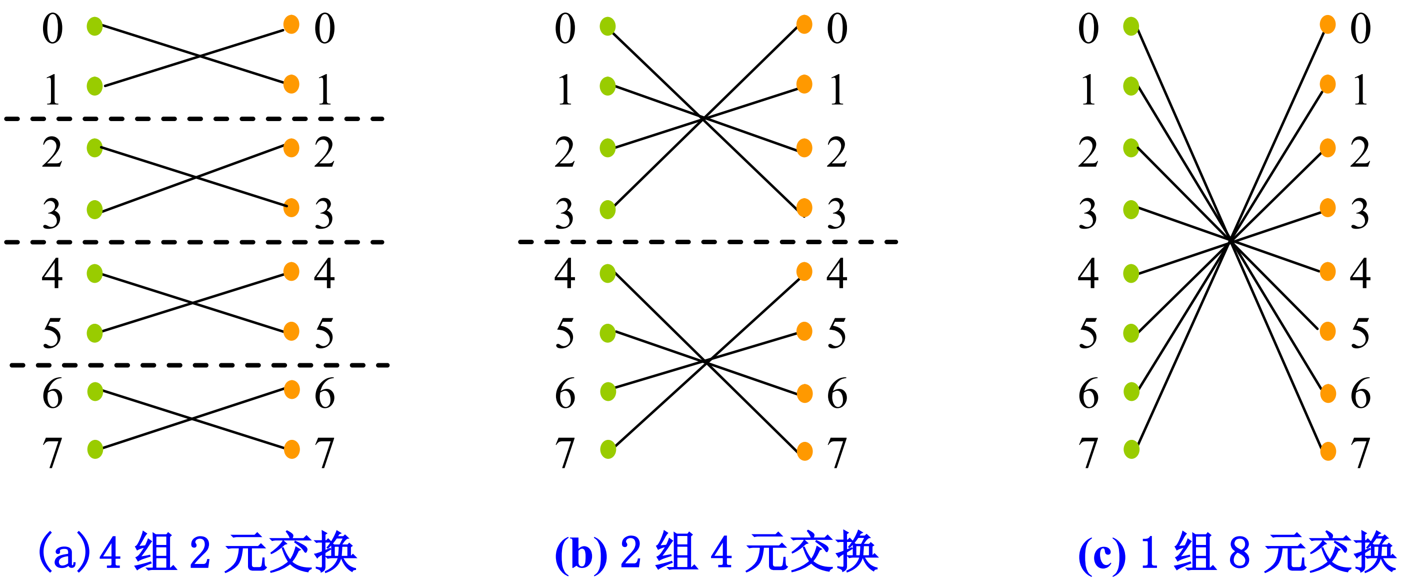
- 多级立方体网络包括STARAN网络和间接二进制n方体网络等。
  - 两者仅在控制方式上不同，在其他方面都是一样的。
  - 都采用二功能（直送和交换）的2×2开关。
  - 当第i级（$0 \le i \le n-1$）交换开关处于交换状态时，实现的是$Cube_i$互连函数。
- 一个N输入的多级立方体网络有$\log_2 N$级，每级用N/2个2×2开关模块，共需要$\log_2 N \times N/2$个开关。
- 一个8个入端的多级立方体网络



多级立方体网络

- STARAN网络采用级控制和部分级控制。
  - 采用级控制时，所实现的是交换功能；
  - 采用部分级控制时，则能实现移数功能。
- 间接二进制n方体网络则采用单元控制。
  - 具有更大的灵活性。
- 交换
  - 将有序的一组元素头尾对称地进行交换。

例如：对于由8个元素构成的组，各种基本交换的图形：



8个元素的基本交换图形

- 3级STARAN网络在各种级控制信号的情况下所实现的入出端连接以及所实现的交换函数和功能。

  其中：

  - $K_2k_1k_0$：控制信号，k_i（i=0，1，2）为第i级的级控制信号。
  - 从表中可以看出

    下面的4行中每一行所实现的功能可以从级控制信号为其反码的一行中所实现的功能加上1组8元变换来获得。

  例如：级控制信号为110所实现的功能是其反码001所实现的4组2元交换再加上1组8元交换来获得。

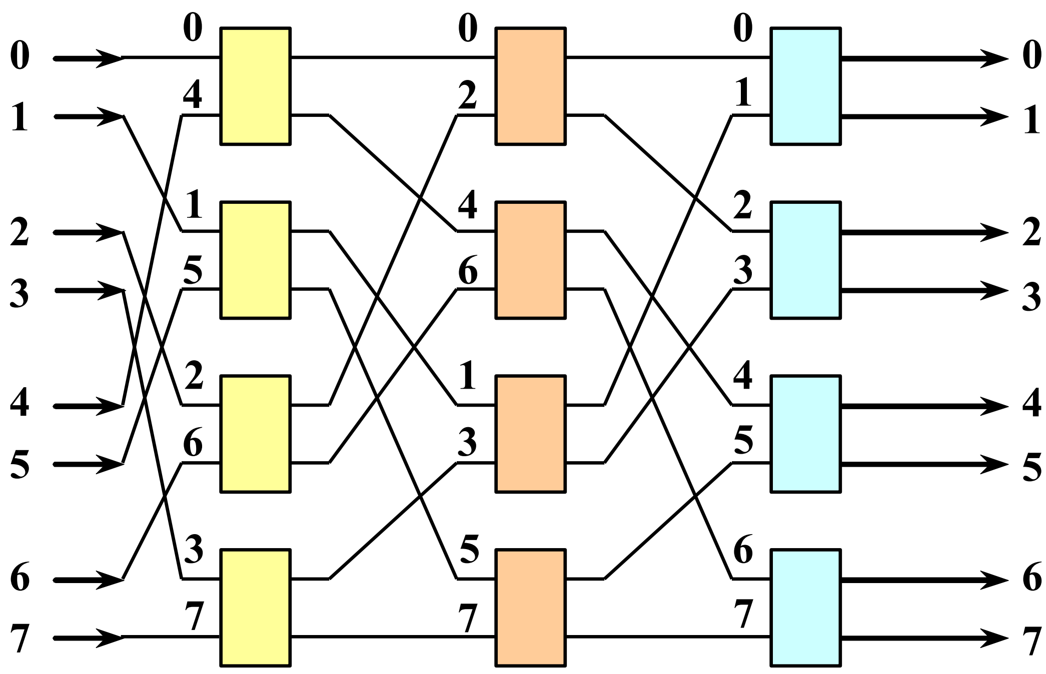
级控制信号 $k_2k_1k_0$	连接的输出端号序列（入端号序列：01234567）	实现的分组交换	实现的互连函数
000	0 1 2 3 4 5 6 7	恒等	I
001	1 0 3 2 5 4 7 6	4组2元交换	$Cube_0$
010	2 3 0 1 6 7 4 5	4组2元交换＋2组4元交换	$Cube_1$
011	3 2 1 0 7 6 5 4	2组4元交换	$Cube_0$＋$Cube_1$
100	4 5 6 7 0 1 2 3	2组4元交换＋1组8元交换	$Cube_2$
101	5 4 7 6 1 0 3 2	4组2元交换＋2组4元交换＋1组8元交换	$Cube_0$＋$Cube_2$
110	6 7 4 5 2 3 0 1	4组2元交换＋1组8元交换	$Cube_1$＋$Cube_2$
111	7 6 5 4 3 2 1 0	1组8元交换	$Cube_0$＋$Cube_1$＋$Cube_2$

- 当STARAN网络用作移数网络时，采用部分级控制，控制信号的分组和控制结果。

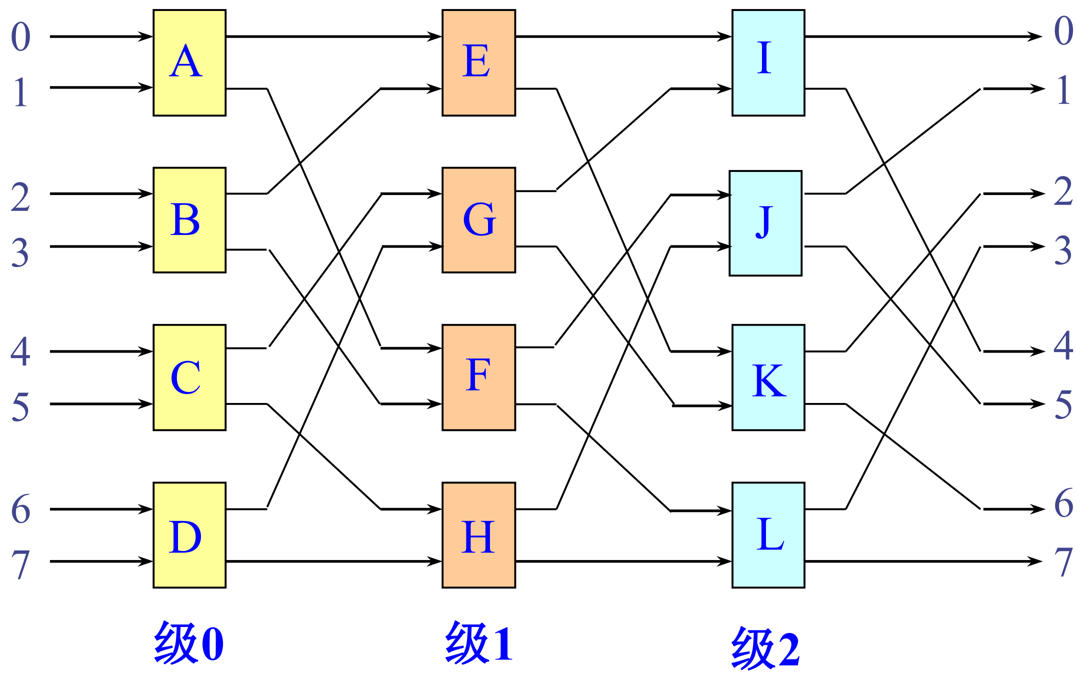
部分级控制信号						连接的输出端号序列（入端号序列：01234567）	所实现的移数功能
第0级	第1级		第2级				
A B C D	E G	F H	I	J	K L		
1	1	0	1	0	0	1 2 3 4 5 6 7 0	移1 mod 8
0	1	1	1	1	0	2 3 4 5 6 7 0 1	移2 mod 8
0	0	0	1	1	1	4 5 6 7 0 1 2 3	移4 mod 8
1	1	0	0	0	0	1 2 3 0 5 6 7 4	移1 mod 4
0	1	1	0	0	0	2 3 0 1 6 7 4 5	移2 mod 4
1	0	0	0	0	0	1 0 3 2 5 4 7 6	移1 mod 2
0	0	0	0	0	0	0 1 2 3 4 5 6 7	不移 全等

3. Omega网络

- 一个8×8的Omega网络
  - 每级由4个4功能的2×2开关构成
  - 级间互连采用均匀洗牌连接方式



- 一个N输入的Omega网络
  - 有$\log_2 N$级，每级用N/2个2×2开关模块，共需要$N\log_2 N/2$个开关。
  - 每个开关模块均采用单元控制方式。
  - 不同的开关状态组合可实现各种置换、广播或从输入到输出的其它连接。
- N=8的多级立方体互连网络的另一种画法


0
1
2
3
4
5
6
7
A
B
C
D
E
G
F
H
I
J
K
L
0
1
2
3
4
5
6
7
级0
级1
级2

9.4.4 动态互连网络的比较

网络特性	总线系统	多级网络	交叉开关
单位数据传送的最小时延	恒定	$O(\log_k n)$	恒定
每台处理机的带宽	$O(w/n)$至$O(w)$	$O(w)$至$O(nw)$	$O(w)$至$O(nw)$
连线复杂性	$O(w)$	$O(nw\log_k n)$	$O(n^2w)$
开关复杂性	$O(n)$	$O(n\log_k n)$	$O(n^2)$
连接特性和寻径性能	一次只能一对一	只要网络不阻塞，可实现某些置换和广播	全置换，一次一个
典型计算机	Symmetry S1，Encore Multimax	BBNTC-2000 IBM RP3	Cray Y-MP/816 Fujitsu VPP 500
说明	总线上假定有n台处理机；总线宽度为w位	n×n MIN采用k×k开关，其线宽为w位	假定n×n交叉开关的线宽为w位