洛必达法则失效的情况及处理方法

此部分内容不需要特别掌握，关键是要用这部分的讲解来让读者记住使用泰勒展开式的重要性！

洛必达法则是计算极限的一种最重要的方法，我们在使用它时，一定要注意到该法则是极限存在的充分条件，也就是说洛必达法则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的三个条件：

（1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$（或$\infty$），$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$（或$\infty$）；

（2）$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=a$ 点的某个去心邻域内可导；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$）。

其中第三个条件尤其重要。

其实，洛必达法则的条件中前两条是一望即知的，所以我们在解题过程中可以不用去细说，而第三个是通过计算过程的尝试验证来加以说明的，由于验证结束，结论也出来了，也就更加没有细说的必要了。所以在利用洛必达法则解题过程中，往往只用式子说话，不必用文字来啰嗦的。

而对于极限问题 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x|\sin x|\mathrm{d}x$ 来说，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}|\sin x|$ 不存在（既不是某个常数，也不是无穷大），而可知洛必达法则的第三个条件得不到验证。此时，我们只能说洛必达法则对本问题无效，绝对不能因此而说本问题之极限不存在。

实际上，我们利用“将连续问题离散化”的方法来处理，可以断定这个极限是存在的。

【问题 1】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x|\sin x|\mathrm{d}x$。

【解】对于任何足够大的正数 x，总存在正整数 n，使 $n\pi\le x<(n+1)\pi$，也就是说总存在正整数 n，使 $x=n\pi+r$，其中 $0\le r<\pi$。

这样 $x\to+\infty$ 就等价于 $n\to\infty$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin x|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi+r}\int_0^{n\pi+r}|\sin x|\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi+r}\left[\int_0^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x+\int_{n\pi}^{n\pi+r}|\sin x|\mathrm{d}x\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi+r}\left[n\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x+\int_0^{r}|\sin t|\mathrm{d}t\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+R}{n\pi+r}=\frac{2}{\pi},$$

这里前面一项注意到了函数$|\sin x|$的周期为π，而后面一项作了令$x=n\pi+t$的换元处理。最后注意到积分值R的有界性（$0\le R<2$）。

如果把上述洛必达法则失效的情况称为第一种情况，则洛必达法则还有第二种失效的情况：第三个条件永远也无法验证。

【问题 2】求极限（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$。

【分析与解】（1）这是$\frac{\infty}{\infty}$型待定型，本题显然满足洛必达法则的前面两个条件，至于第三个条件，尝试验证到第两次后可以得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x},$$

可知洛必达法则失效，处理的方法是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}=1。$$

（2）的情况与（1）的情况完全类似，尝试用了两次“洛必达法则”后可以得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}},$$

可知洛必达法则失效，处理的方法是分子分母同乘e^{-x}，得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}}=1。$$

【问题 3】求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$。

【分析与解】这是$\frac{0}{0}$型待定型，本题显然满足洛必达法则的前面两个条件，至于第三个条件，经过尝试，可

知洛必达法则的第三个条件

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{200x^{102}}$$

完全不可能得到验证，因为分子分母分别求导后愈来愈复杂，这也说明了洛必达法则对本题无效。正确有效的方法是作换元，令 $t=\frac{1}{x^2}$ ，这样就有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}=0$$

。

还有一种极限问题，原则上虽然也适合使用洛必达法则，但不具有实际可操作性，例：

【例 1】求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{6e^{-x^2}\sin x-x(6-7x^2)}{3\ln\frac{1+x}{1-x}-2x(3+x^2)}$ 问题，当时曾经分析说：本题如果不用泰勒公式，直接用洛必达法则，也能计算，但必须要用六次洛必达法则，而且导数越求越复杂，而用了泰勒公式就会方便得多了。