第 四 章

随 机 变 量 的 数 字 特 征

第4.1节　数学期望

一、随机变量的数学期望

二、随机变量函数的数学期望

三、数学期望的性质

四、小结

在前面的课程中，我们讨论了随机变量及其分布，如果知道了随机变量*X*的概率分布，那么*X*的全部概率特征也就知道了.

然而，在实际问题中，概率分布一般是较难确定的. 而在一些实际应用中，人们并不需要知道随机变量的一切概率性质，只要知道它的某些数字特征就够了.

例如, 在评定某一地区的粮食产量的水平时, 在许多场合只要知道该地区的平均产量; 又如在研究水稻品种优劣时, 时常是关心稻穗的平均稻谷粒数; 再如检查一批棉花的质量时, 即需要注意纤维的平均长度, 又需要注意纤维长度与平均长度的偏离程度. 因此, 与随机变量的有关数值, 能够描述随机变量的重要特征.

因此，在对随机变量的研究中，确定某些数字特征是重要的．

在这些数字特征中，最常用的是

数学期望、方差、协方差和相关系数

一、随机变量的数学期望

1. 离散型随机变量的数学期望

我们来看一个引例.

例1 某车间对工人的生产情况进行考察. 车工小张每天生产的废品数X是一个随机变量. 如何定义X的平均值呢?

我们先观察小张100天的生产情况

若统计100天,

32天没有出废品;
30天每天出一件废品;
17天每天出两件废品;
21天每天出三件废品;

（假定小张每天至多出现三件废品 ）

可以得到这100天中每天的平均废品数为

$$0\cdot\frac{32}{100}+1\cdot\frac{30}{100}+2\cdot\frac{17}{100}+3\cdot\frac{21}{100}=1.27$$

这个数能否作为*X*的平均值呢？

可以想象，若另外统计**100**天，车工小张不出废品，出一件、二件、三件废品的天数与前面的**100**天一般不会完全相同，这另外**100**天每天的平均废品数也不一定是**1.27.**

一般来说, 若统计n天,

(假定小张每天至多出三件废品)

n_0天没有出废品;
n_1天每天出一件废品;
n_2天每天出两件废品;
n_3天每天出三件废品.

可以得到n天中每天的平均废品数为

$$0\cdot\frac{n_0}{n}+1\cdot\frac{n_1}{n}+2\cdot\frac{n_2}{n}+3\cdot\frac{n_3}{n}$$

$$0\cdot\frac{n_0}{n}+1\cdot\frac{n_1}{n}+2\cdot\frac{n_2}{n}+3\cdot\frac{n_3}{n}$$

这是
以频率为权的加权平均

当**n**很大时，频率接近于概率，所以我们在求废品数X的平均值时，用概率代替频率，得平均值为

$$0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3$$

这是
以概率为权的加权平均

这样得到一个确定的数．我们就用这个数作为随机变量X的平均值．

定义4.1 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛,则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望,记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k .$$

请注意 :离散型随机变量的数学期望是一个绝对收敛的级数的和.数学期望简称期望，又称为均值。

关于定义的几点说明

(1) $E(X)$是一个实数,而非变量,它是一种加权平均,与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正平均值,也称均值.

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变,之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X取可能值的平均值,它不应随可能值的排列次序而改变.

(3) 随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同.

例1 **谁的技术比较好?**

甲,乙两个射手,他们的射击技术分别为

甲射手

击中环数	8	9	10
概率	0.3	0.1	0.6

乙射手

击中环数	8	9	10
概率	0.2	0.5	0.3

试问哪个射手技术较好?

解 设甲,乙射手击中的环数分别为 X_1, X_2.

$$E(X_1)=8\times 0.3+9\times 0.1+10\times 0.6=9.3(\text{环}),$$

$$E(X_2)=8\times 0.2+9\times 0.5+10\times 0.3=9.1(\text{环}),$$

故甲射手的技术比较好.

例2 如何确定投资决策方向?

某人有10万元现金, 想投资于某项目, 欲估成功的机会为 30%, 可得利润8万元 , 失败的机会为70%, 将损失 2 万元.若存入银行, 同期间的利率为5% , 问是否作此项投资?

解 设 X 为投资利润,则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$E(X)=8\times0.3-2\times0.7=1$(万元), 存入银行的利息:

$10\times5\%=0.5$(万元), 故应选择投资.

例3 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n,p 二项分布,
其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,2,\cdots,n),$$

则有 $0<p<1.$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np[p + (1-p)]^{n-1}$$

$$= np$$

则两点分布$b(1,p)$的数学期望为 p.

例4 泊松分布

设 $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots,\quad \lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

例5　按规定,某车站每天 $8:00\sim9:00$, $9:00\sim10:00$都恰有一辆客车到站,但到站的时刻是随机的,且两者到站的时间相互独立.其规律为

到站时刻	$8:10$ $9:10$	$8:30$ $9:30$	$8:50$ $9:50$
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

(i) 一旅客$8:00$到车站,求他候车时间的数学期望.

(ii) 一旅客$8:20$到车站,求他候车时间的数学期望.

解 设旅客的候车时间为 X(以分计).

(i) X的分布律为

X	10	30	50
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{6} + 30 \times \frac{3}{6} + 50 \times \frac{2}{6}$$

$$= 33.33(\text{分}).$$

(ii) X 的分布律为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X)=$$

$$10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+70\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+90\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$$

$$=27.22(\text{分}).$$

2.连续型随机变量数学期望的定义

定义4.2 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$.即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例6 顾客平均等待多长时间?

设顾客在某银行的窗口等待的服务的时间 X(以分计)服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty}x\cdot\frac{1}{5}e^{-x/5}\,\mathrm{d}x=5$(分钟).

因此,顾客平均等待5分钟就可得到服务.

例7 均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \dfrac{1}{b-a} x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}(a+b).$$

结论 均匀分布的数学期望位于区间的中点.

例8 指数分布

设随机变量 X 服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad \text{其中 } \lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}+\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}.$$

例9 正态分布

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma>0, \quad -\infty<x<\infty.$$

则有 $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\mu+\sigma t,$

所以 $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu.$$

可见,$N(\mu,\sigma^2)$中的μ正是它的数学期望。

二、随机变量函数的数学期望

1. 离散型随机变量函数的数学期望

若X为离散型随机变量，分布律为

$P\{X = x_k\} = p_k, \quad (k = 1,2,\cdots),$ $Y=g(X)$为X的函数

则Y的期望为

$$E(g(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k.$$

2. 连续型随机变量函数的数学期望

若 X 是连续型的,它的概率密度为 $f_X(x)$ 则

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

3. 二维随机变量函数的数学期望

(1) 设 X, Y 为离散型随机变量, $g(x, y)$ 为二元函数,则 $E[g(X,Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}.$

其中 (X,Y) 的联合概率分布为 p_{ij}.

(2) 设 X, Y 为连续型随机变量, $g(x, y)$ 为二元函数,则

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

其中 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$.

例10　设 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求: $E(X)$,　$E(Y)$,　$E(Y/X)$,　$E[(X-Y)^2]$.

解　X 的分布律为

X	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

得 $E(X)=1\times0.4+2\times0.2+3\times0.4=2.$

Y 的分布律为

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

得 $E(Y)=-1\times0.3+0\times0.4+1\times0.3=0.$

由于

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	(1,−1)	(1,0)	(1,1)	(2,−1)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
Y/X	-1	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	$1/3$

于是

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=-1\times0.2+0\times0.1+1\times0.1-\frac{1}{2}\times0.1+\frac{1}{2}\times0.1+0\times0.3+\frac{1}{3}\times0.1$$

$$=\frac{1}{15}.$$

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	(1,−1)	(1,0)	(1,1)	(2,−1)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
$(X-Y)^2$	4	1	0	9	1	9	4

得 $E[(X-Y)^2]=4\times0.3+1\times0.2+0\times0.1+9\times0.4$

$$=5.$$

三、数学期望的性质

1. 设C是常数, 则有 $E(C)=C$.

证明 $E(X)=E(C)=1\times C=C$.

2. 设 X 是一个随机变量,C 是常数, 则有

$$E(CX)=CE(X).$$

证明 $E(CX)=\sum_k Cx_k p_k = C\sum_k x_k p_k = CE(X)$.

例如 $E(X)=5$, 则 $E(3X)=3E(X)=3\times 5=15$.

3. 设 X、Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

证明 $$E(X+Y)=\sum_{k}(x_k+y_k)p_k$$

$$=\sum_{k}x_k p_k+\sum_{k}y_k p_k=E(X)+E(Y).$$

推广 $$E\left(\sum_{i=1}^{n}a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i E(X_i).$$

4. 设 X、Y 是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

说明 连续型随机变量 X 的数学期望与离散型随机变量数学期望的性质类似.

例11* 一民航送客车载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车,以 X 表示停车的次数, 求 $E(X)$(设每位旅客在各个车站下车是等可能的, 并设各旅客是否下车相互独立).

解 引入随机变量 X_i，

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 } i \text{ 站没有人下车}, \\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, 10.$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$.

则有 $P\{X_i=0\}=\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$， $P\{X_i=1\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$，

$i=1,2,\cdots,10.$

由此 $E(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$， $i=1,2,\cdots.$

得 $E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_{10})$

$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})$$

$$=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]=8.784(\text{次}).$$

四、小结

1. 数学期望是一个实数, 而非变量,它是一种**加权平均**, 与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**.

2. 数学期望的性质

$$
\begin{cases}
1^0 \quad E(C) = C; \\
2^0 \quad E(CX) = CE(X); \\
3^0 \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y); \\
4^0 \quad X, Y \text{ 独立} \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y).
\end{cases}
$$

3. 常见离散型随机变量的数学期望

分布	分布律	$E(X)$
(0-1)分布 $X \sim B(1, p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p
二项分布 $X \sim B(n, p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\ldots,n$	np
泊 松 分 布 $X \sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\ldots$	λ
几何分布	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots$	$\dfrac{1}{p}$

4.常见连续型随机变量的数学期望

分布名称	概率密度	$E(X)$
均匀分布 $X\sim U[a,b]$	$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ
指数分布 $X\sim E(\lambda)$	$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $(\lambda>0)$	$\dfrac{1}{\lambda}$

备份题

例1 你知道自己该交多少保险费吗?

根据生命表知，某年龄段保险者里，一年中每个人死亡的概率为0.002, 现有10000个这类人参加人寿保险,若在死亡时家属可从保险公司领取 2000 元赔偿金 . 问每人一年须交保险费多少元?

解　设**1**年中死亡人数为X, 则 $X \sim b(10000,0.002)$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{10000} k\cdot\binom{1000}{k}(0.002)^k(1-0.002)^{10000-k}$$

$$=20(\text{人}).$$

被保险人所得赔偿金的期望值应为

$$20\times 2000=40000(\text{元}).$$

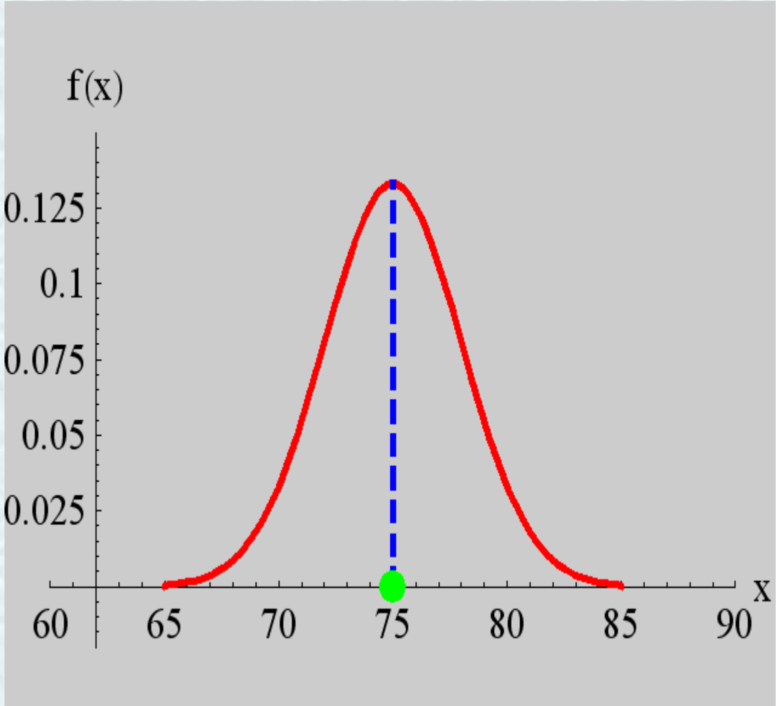
若设每人一年须交保险费为a 元,

由被保险人交的“纯保险费”与他们所能得到的赔偿金的期望值相等知

$$10000a = 40000 \Rightarrow a = 4(\text{元}),$$

故每人1年应向保险公司交保险费4元.

例2 某大学二年级学生进行了一次数学统考,设其成绩 X 服从 $N(75, 9)$ 的正态分布,试求学生成绩的期望值.



解 因为 $X \sim N(75,9),$

知 $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-75)^2}{3^2}},$

故 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-75)^2}{3^2}}\,\mathrm{d}x = 75(\text{分}).$$

例3 设

X	-2	0	1	3
p	$1/3$	$1/2$	$1/12$	$1/12$

求: $E(2X^3+5)$.

解 $E(2X^3+5)=2E(X^3)+E(5)$

$$=2E(X^3)+5,$$

又 $E(X^3)=(-2)^3\times\frac{1}{3}+0^3\times\frac{1}{2}+1^3\times\frac{1}{12}+3^3\times\frac{1}{12}=-\frac{1}{3},$

故 $E(2X^3+5)=2E(X^3)+5=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+5=\frac{13}{3}.$

例4 设一电路中电流 $I(A)$ 与电阻 $R(\Omega)$是两个相互独立的随机变量,其概率密度分别为

$$g(i)=\begin{cases}2i, & 0\le i\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad h(r)=\begin{cases}\dfrac{r^2}{9}, & 0\le r\le 3,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试求电压 $V=IR$ 的均值.

解
$$E(V)=E(IR)=E(I)E(R)$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{\infty} i g(i)\,\mathrm{d}i\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} r h(r)\,\mathrm{d}r\right]$$

$$=\left[\int_0^1 2i^2\,\mathrm{d}i\right]\left[\int_0^3 \frac{r^2}{9}\,\mathrm{d}r\right]=\frac{3}{2}(V).$$

例5　商店的销售策略

某商店对某种家用电器 的销售采用先使用后付款的方式 ,记使用寿命为 X(以年计),规定 :

$X \le 1$,一台付款 1500元;$1 < X \le 2$,一台付款 2000元;

$2 < X \le 3$,一台付款 2500元;$X > 3$,一台付款 3000元.

设寿命 X 服从指数分布 ,概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}e^{-x/10}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求该商店一台收费 Y 的数学期望 .

解 $$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-0.1} = 0.0952,$$

$$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10}\,\mathrm{d}x$$

$$= e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861,$$

$$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10}\,\mathrm{d}x$$

$$= e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779,$$

$$P\{X > 3\} = \int_3^{\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} \,\mathrm{d}\,x$$

$$= e^{-0.3} = 0.7408.$$

因而一台收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

得 $E(Y) = 2732.15$, 即平均一台收费 2732.15.