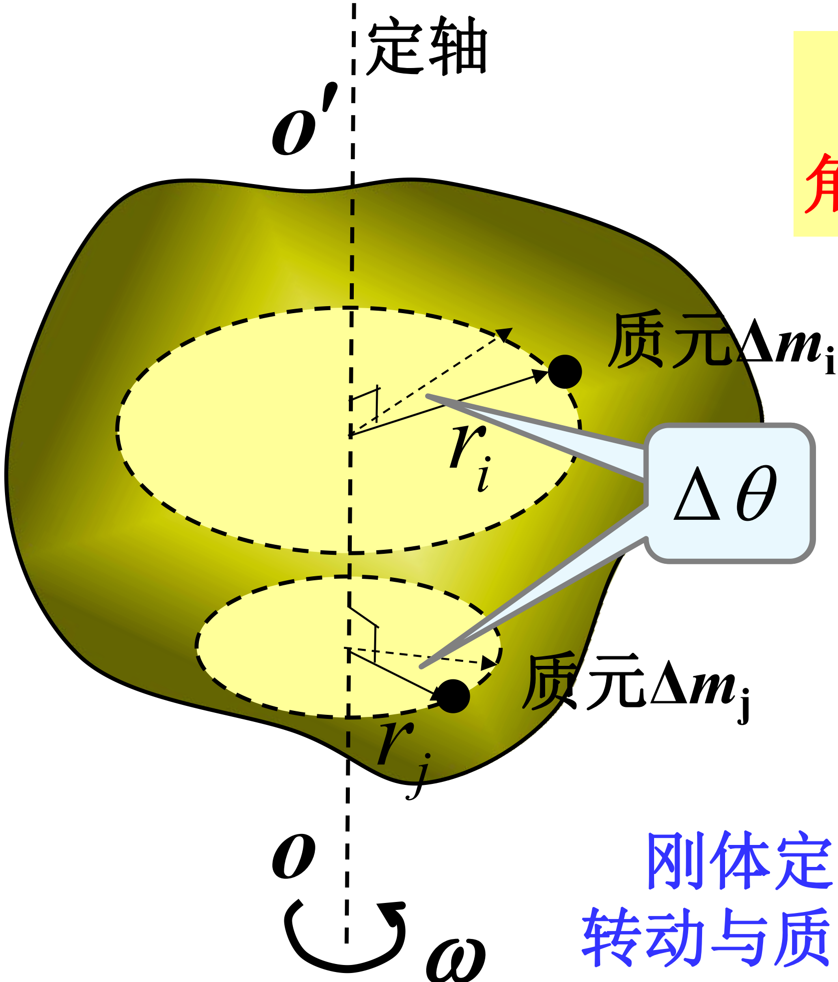
一、刚体的定轴转动：

各质元绕定轴在各自的转动平面上做圆周运动

刚体的定轴转动

刚体定轴转动的描述：



◆ 每个质元都做圆周运动，

每个质元具有相同的角位移、角速度和角加速度

角位移 $\Delta\theta$

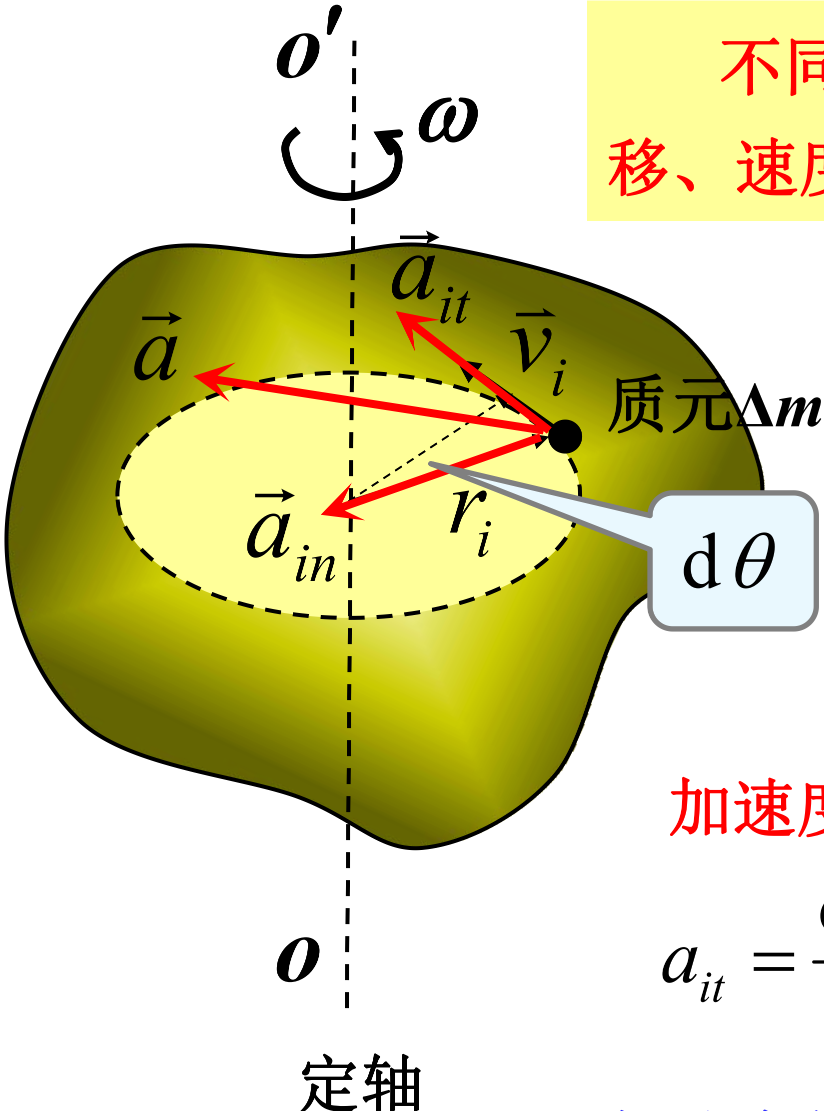
角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

角加速度 $\beta = \dfrac{d\omega}{dt}$

刚体定轴转动与质点直线运动的运动学关系一一对应

θ	x
$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$	$v=\dfrac{dx}{dt}$
$\beta=\dfrac{d\omega}{dt}$	$a=\dfrac{dv}{dt}$

◆ 每一个 质元的运动状态不相同



不同位置的质元转动半径不同，位移、速度、加速度不相同

位移的大小：$\left|\mathrm{d}\vec{r}_i\right| = r_i\,\mathrm{d}\theta$

速度的大小—速率：

$$v_i = \frac{\left|\mathrm{d}\vec{r}_i\right|}{\mathrm{d}t} = r_i\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r_i\omega$$

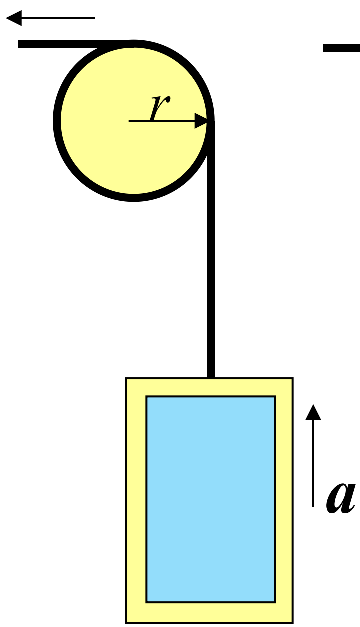
速度的方向：切向

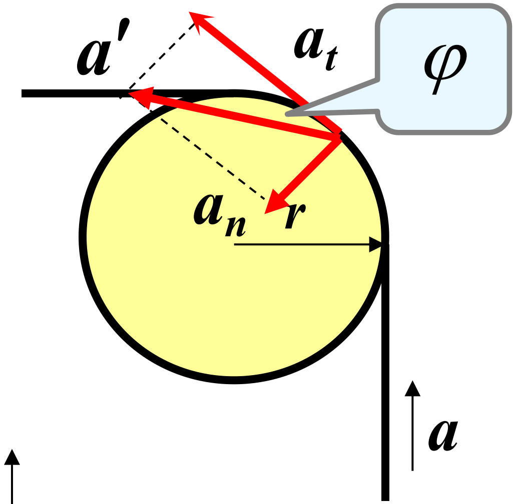
加速度是切向和法向加速度的矢量合成

$$a_{it} = \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = r_i\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \beta r_i \qquad a_{in} = \omega^2 r_i$$

加速度的大小：$a = \sqrt{a_{in}^{\ 2} + a_{it}^{\ 2}}$

例1 一条绳索绕过一定滑轮拉动一升降机，滑轮半径r，如果升降机从静止开始以加速度a匀加速上升，求开始上升后滑轮的角加速度β，任意 t 时刻的角速度ω和滑轮转过的角度θ，以及滑轮边缘上一点的加速度 a' 的大小（假设绳索与滑轮之间不打滑）。





滑轮边缘上一点的 切向加速度

$$a_t = a = \beta r \rightarrow \beta = \frac{a}{r}$$

滑轮做匀加速定轴转动

任意 t 时刻的角速度

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \beta \,\mathrm{d}\,t = \beta t = at/r$$

转过的角度 $\Delta\theta = \int_0^t \omega \,\mathrm{d}\,t = \int_0^t \beta t \,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\beta t^2$

边缘上一点的的加速度**是**切向与法向加速度的矢量和

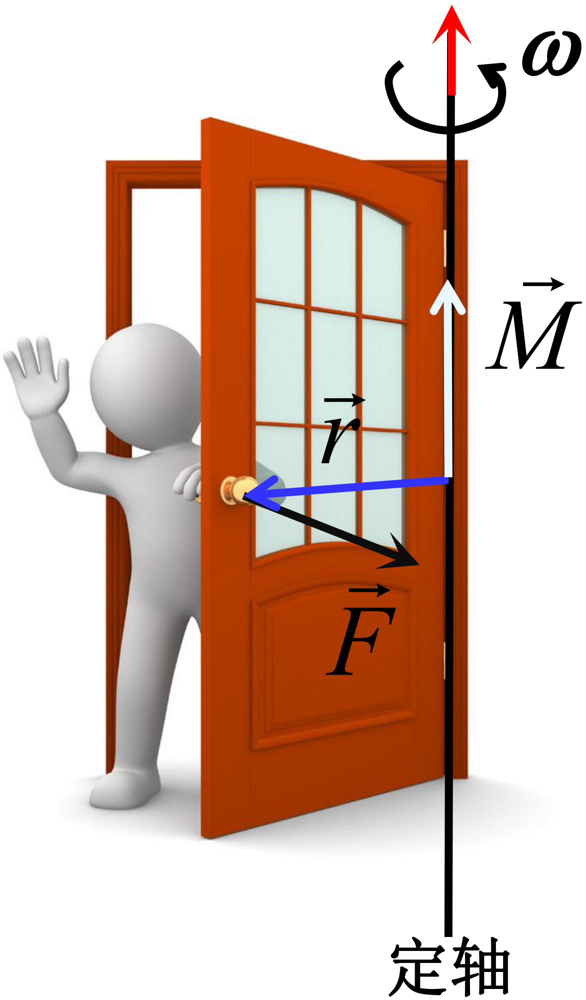
法向加速度 $a_n = \omega^2 r = a^2 t^2 / r$

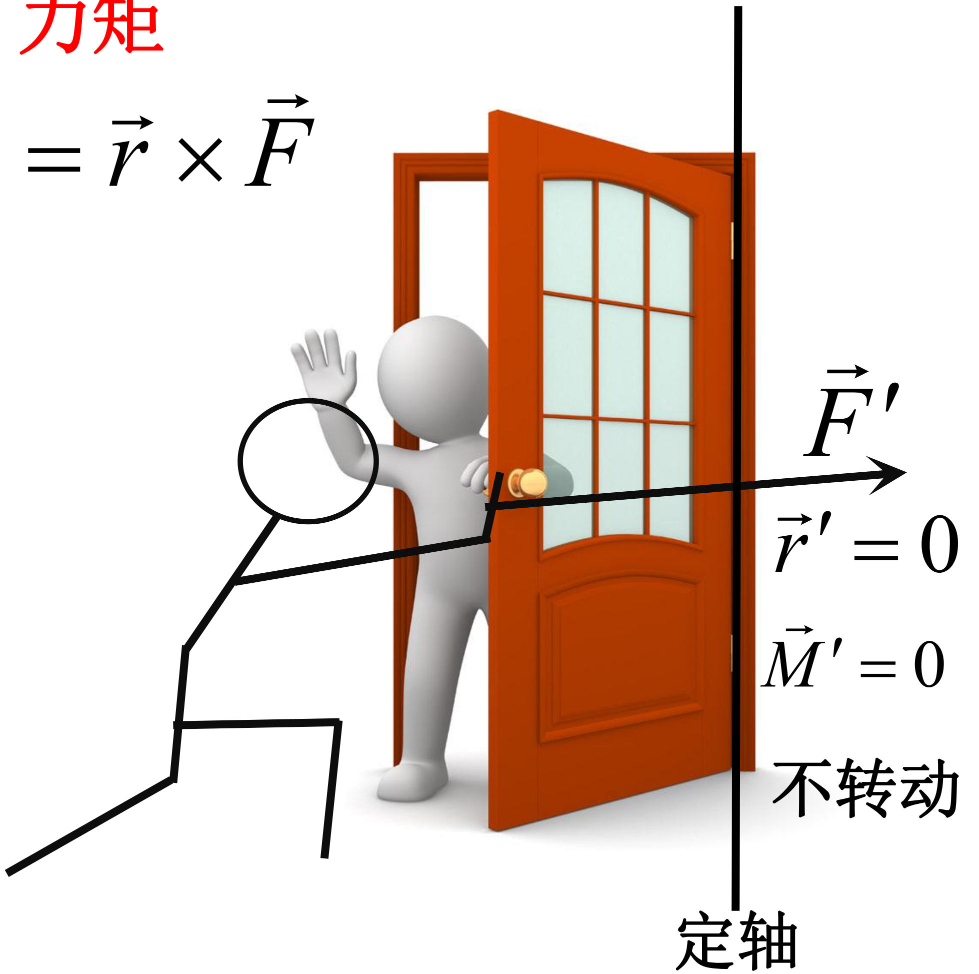
加速度大小 $a' = \sqrt{a_n{}^2 + a_t{}^2} = \sqrt{(a^2 t^2 / r)^2 + a^2} = a\sqrt{(at^2/r)^2 + 1}$

力矩是改变刚体的定轴转动状态的原因

力矩

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$





刚体定轴转动定律

二、刚体定轴转动定律

- **转动定律**

刚体定轴转动是一维转动

$$M = J\beta$$

——定轴转动定律标量形式

转动惯量，反映刚体保持原转动状态的惯性

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2$$

转动惯量不仅与质量有关，还与质量对轴的分布有关

- **牛顿第二定律**

质点运动是三维空间运动

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

——牛顿第二定律是矢量形式

惯性质量，反映质点保持原运动状态的惯性

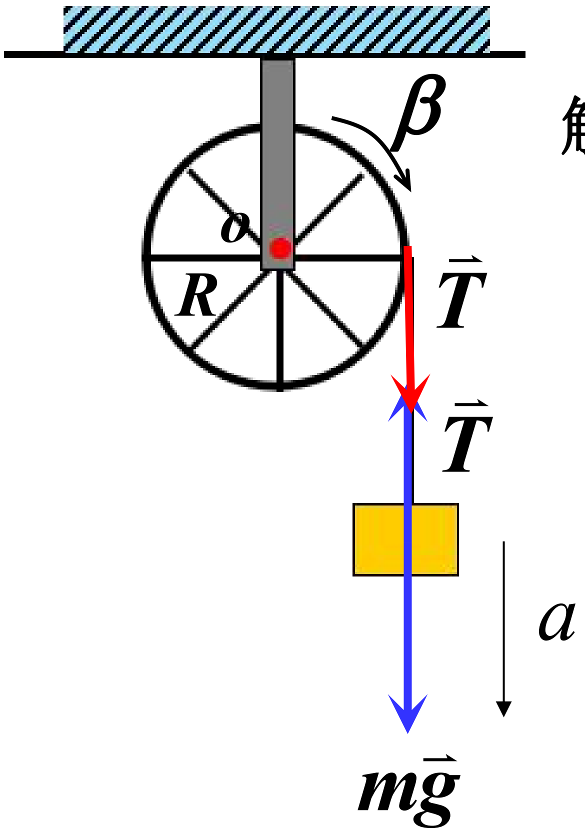
只有转动平面内的外力，且外力的作用线不通过轴线时，才能形成改变刚体的定轴转动状态的有效外力矩

刚体定轴转动定律的应用

例2 定滑轮（可视为均匀圆盘）质量M、半径R；重物质量m，忽略轴处摩擦及绳的质量。

求：重物由静止下落时的加速度。

结题思路



解：对重物

$$mg - T = ma$$

对定滑轮

$$TR = J\beta$$

且

$$a = \beta R$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2$$

$m + - M$

(1)根据牛顿第二定律列出质点的动力学方程

(2)根据定轴转动定律列出刚体的动力学方程

(3)找出质点和刚体的运动学联系

(4)综合求解

重物作匀加速直线运动，定滑轮作匀加速定轴转动

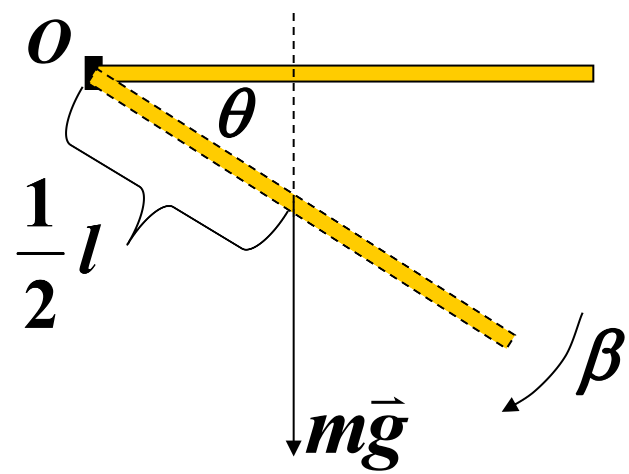
经过t时间，定滑轮转过的角度？

例3 已知均匀棒长l、质量m，在竖直面内转动；

求：棒由水平静止自由摆动到 θ 角时的角速度及角加速度。

解：以O点为轴，棒受到重力矩作用，

根据刚体定轴转动定律：



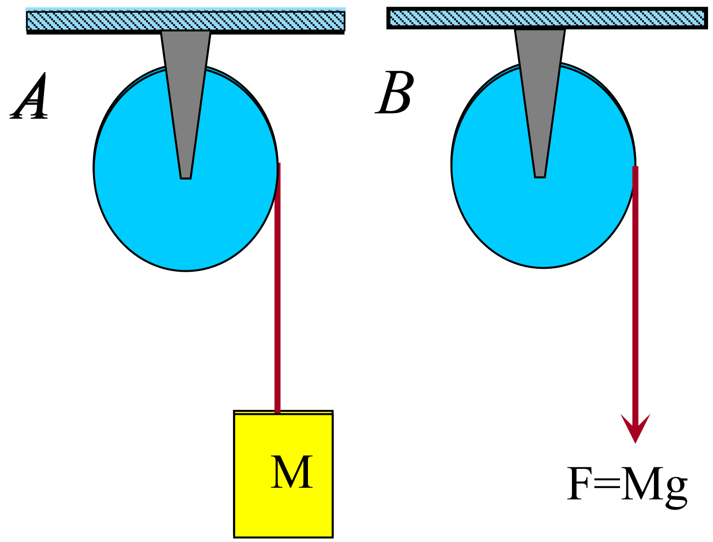
$$mg\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{3}ml^2\beta \rightarrow \beta = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3g\cos\theta}{2l} \rightarrow \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

$$\rightarrow \omega d\omega = \frac{3g\cos\theta}{2l}d\theta \rightarrow \int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \frac{3g\cos\theta}{2l}d\theta$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{3g\sin\theta}{l}$$

练习1 求图示A, B两定滑轮的角加速度 β_A, β_B。设两定滑轮的质量均为M,半径为R。



$$MgR = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right)\beta_A \rightarrow \beta_A = \frac{2g}{3R}$$

$$MgR = \frac{1}{2}MR^2\beta_B \rightarrow \beta_B = \frac{2g}{R}$$

刚体的角动量守恒定律

三、刚体的角动量守恒定律

当 $M_{外}=0,\ J\omega=$常量

当定轴转动的刚体受到的外力矩为零，刚体关于定轴的角动量守恒

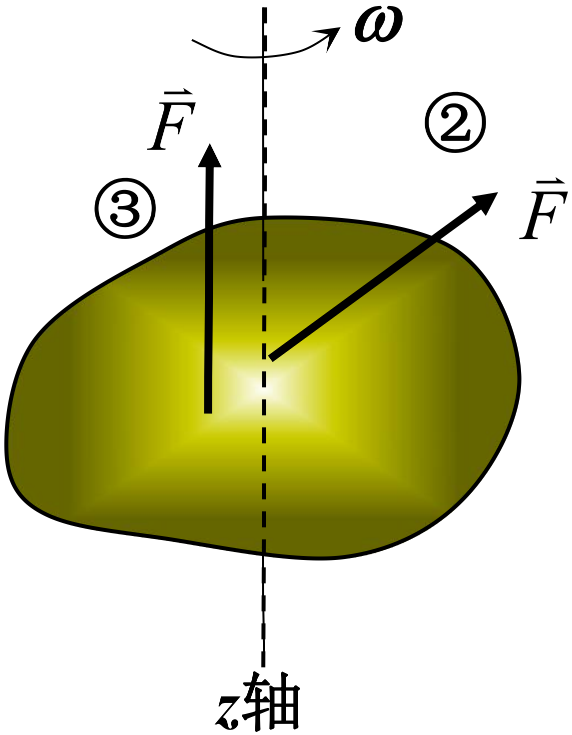
什么情况下定轴转动的刚体受到的外力矩为零？

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0, M=rF\sin\theta=0$$

①不受外力 $F=0$

②外力的作用线穿过轴线

③外力与轴线平行

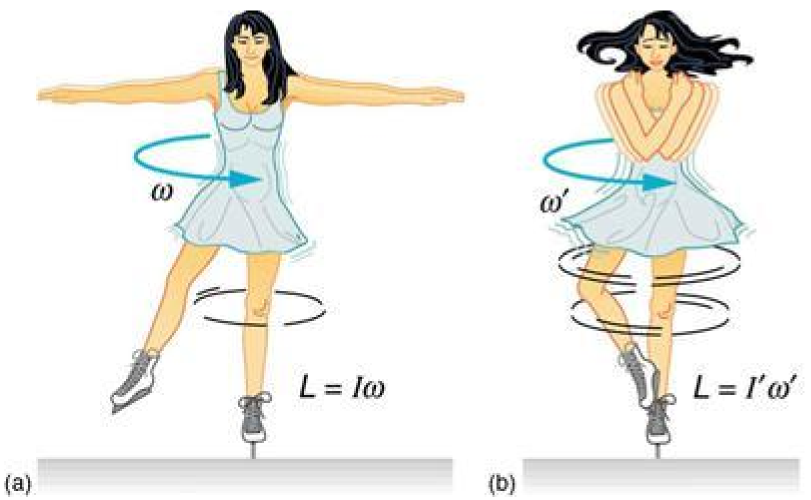


手持哑铃的人站在无摩擦的转台上与转台一起转动时，外力矩为零，角动量守恒

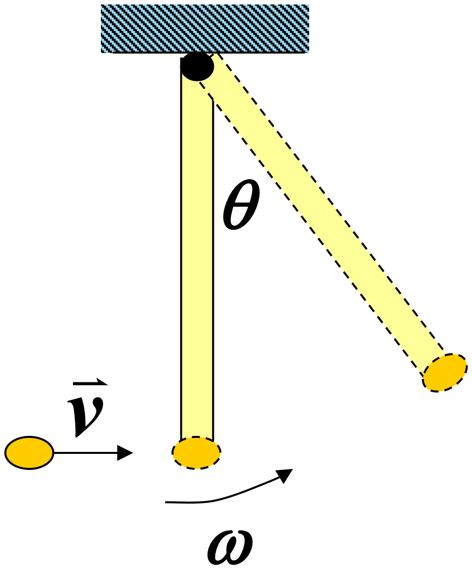
$$J\omega = \text{常量}$$

J增大，ω减小　J减小，ω增大

花样滑冰运动员旋转时，利用角动量守恒，通过改变质量分布，控制旋转快慢，



例4 已知均匀棒长l、质量M，在竖直面内转动，一质量为m的子弹以水平速度v射入棒的下端，求棒与子弹开始一起运动时的角速度。



解：子弹射入瞬间，（子弹+棒）关于定轴的外力矩为零，系统角动量守恒

碰撞前：$L_{子弹}=mvl$，$L_{杆}=0$

碰撞后：$L_{子弹}=mv'l=ml^2\omega$,

$$L_{杆}=J\omega=\frac{1}{3}Ml^2\omega$$

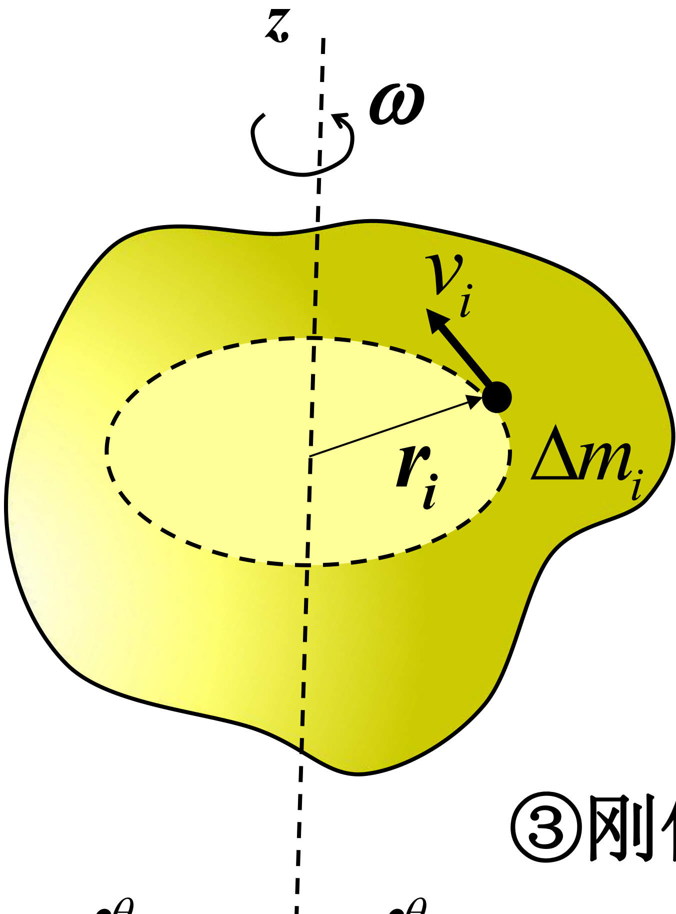
$$mvl=(ml^2+\frac{1}{3}Ml^2)\omega \rightarrow \omega=\frac{3m}{3m+M}\frac{v}{l}$$

质点与定轴转动的刚体的碰撞角动量守恒，动量不守恒

刚体定轴转动中的功和能

四、刚体定轴转动的功和能

1、动能定理



①刚体的转动动能

$$E_k=\sum_i E_{ki}=\sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

②外力矩的功

刚体在外力作用下角位置从 θ_1 到 θ_2 时，外力的总功

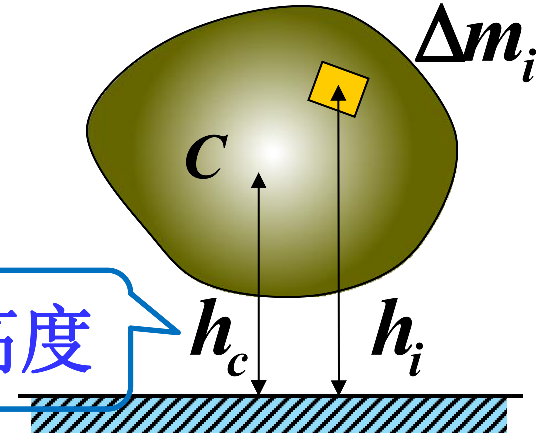
$$A=\int \mathrm{d}A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta$$

③刚体定轴转动的动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\beta\,\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

力矩的功=刚体定轴转动动能的增量

2、 刚体的重力势能



$$E_p = \sum_i E_{p_i} = \sum_i \Delta m_i g h_i$$

$$= mg \frac{\sum_i \Delta m_i h_i}{m}$$

质心的高度

$$= mgh_c$$

3、刚体定轴转动的机械能守恒定律

在重力场中，定轴转动的刚体的机械能包括

刚体重力势能和定轴转动动能

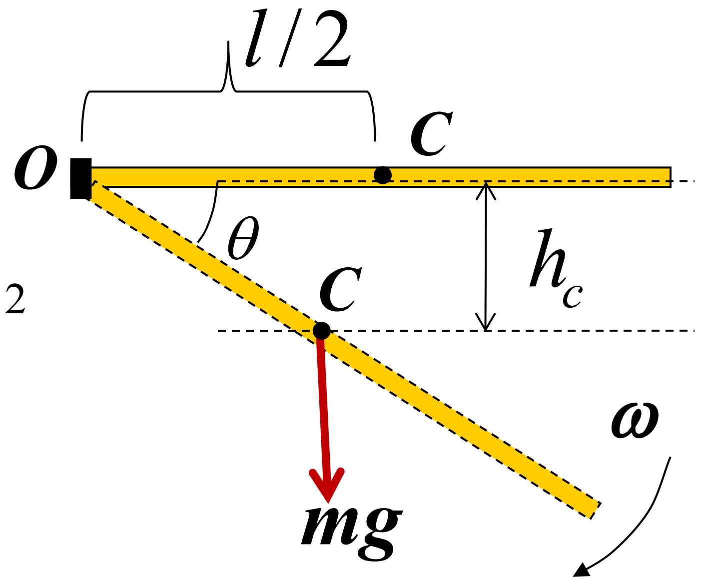
当只有保守力（重力）做功时，系统的机械能守恒

即 $E = E_k + E_p$ 不变

例 5 已知均匀杆长l、质量m，在竖直面内绕过o点的垂直轴转动；求：杆由水平静止自由摆动到与水平方向夹角为θ时的角速度。

解：均匀杆在竖直平面内、在重力场中做定轴转动，只有重力作功，

解法1：机械能守恒



初态： $E_{k1}=0$, 令 $E_{p1}=0$

末态： $E_{k2}=\frac{1}{2}J_o\omega^2$ $J_o=\frac{1}{3}ml^2$

$$E_{p2}=-mgh_c=-mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

$$E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2}$$

$$\frac{1}{2}J_o\omega^2-mg\frac{l}{2}\sin\theta=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$