高数小结论

1． 等价无穷小（x→0）

$(1).\sin x\sim x\sim\tan x\sim e^x-1\sim\ln[1+x]\sim arc\sin x\sim\arctan x$

$(2).1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

$(3).(1+x)^a-1\sim ax$

$(4).a^x-1\sim x\ln a$

$(5).1-\sqrt[n]{1-x}\sim\frac{x}{n}$

$(6).\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$

$(7).\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$

2． $0<x<\frac{\pi}{2}$时 $\sin x<x<\tan x$ ； $0<|x|<\frac{\pi}{2}$时 $1-\cos x<\frac{1}{2}x^2$

3． 如果$\lim U=1,\lim V=\infty$

则$\lim U^V=e^{\lim(U-1)V}$

4． $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$表示偶函数,$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$表示奇函数

5． 直线$L:y=kx+b$为函数$y=f(x)$的渐近线的充分必要条件为：

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ $\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$ 这里的∞包括$+\infty$和$-\infty$

6． 常见函数的导数 (记熟后解题快)

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$ $\quad(x^x)'=x^x(1+\ln x)$

7.关于 n 阶导数的几个重要公式

$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ $\quad(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ $\quad(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

$(x^n)^{(n)}=n!$ $\quad(a^x)^{(n)}=(a^x)(\ln a)^n$

$(e^x)^{(n)}=e^x$ $\quad(\frac{1}{t-x})^{(n)}=\frac{n!}{(t-x)^{n+1}}$

$(\frac{1}{t+x})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(t+x)^{n+1}}$ $\quad[\ln(t+x)]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(t+x)^n}$

8. 泰勒公式(用来求极限)

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$

$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + o(x)$

$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 = o(x^3)$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\tan(\tan x) = x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

9. 重要不定积分

$$\int \frac{dx}{(\sin x)^{(2n+1)}\cos x} = \int \frac{\sec x dx}{(\sin x)^{2n+1}} = \int \frac{(\sec x)^{(2n+2)}\, dx}{(\sin x)^{(2n+1)}(\cos x)^{(2n+1)}} = \int \frac{(\sec x)^{2n}\, d(\tan x)}{(\tan x)^{(2n+1)}}$$

$$\int \frac{dx}{(\cos x)^{(2n+1)}\sin x} = -\int \frac{[1+(\cot x)^2]^n}{(\cot x)^{(2n+1)}} dx$$

$$\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \tan\frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{1}{1+\sin x} dx = \tan x - \sec x + C = \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$$

$$\int (\tan x)^n dx = \int (\tan x)^n \frac{(\sec x)^2}{(\sec x)^2} dx = \int (\tan x)^n \frac{d(\tan x)}{1+(\tan x)^2}$$

$$\int (\cot x)^n dx = \int (\cot x)^n \frac{(\csc x)^2}{(\csc x)^2} dx = -\int \frac{(\cot x)^n d(\cot x)}{1+(\cot x)^2}$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int (\sin x)^2 dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int (cox)^2 dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int (\tan x)^2 dx = \tan x - x + C$$

$$\int (\cot x)^2 dx = -\cot x - x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \pm\frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

10.　y=sinwx(w>0)

它的半个周期与 x 轴围成的面积为 s=2/w

把它的半个周期分成三等分,中间的那部分面积为 s’=1/w

显然 s=2s’

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{w}} \sin wx dx = \frac{2}{w}$$

$$S' = \int_{\frac{2\pi}{3w}}^{\frac{\pi}{3w}} \sin wx dx = \frac{1}{w}$$

11. 定积分部分

（1）如果函数 f（x）在[-a,a]上连续

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx = \frac{0(\text{如果f}(x)\text{为奇函数})}{2\int_0^a f(x)dx(\text{如果}f(x)\text{为偶函数})}$$

（2）

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)^2 dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx)^2 dx = \pi$$

(3) 设$k,l\in N^+$,且$k\neq l$,则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lxdx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lxdx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lxdx=0$$

(4). 设 f(x)是以周期为 T 的连续函数

$$(1).\int_{a}^{a+T}f(x)dx=\int_{0}^{T}f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx$$

$$(2).\int_{a}^{a+nT}f(x)dx=n\int_{0}^{T}f(x)dx$$

(5). 特殊积分

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a}(a>0)$$

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}\sin wtdt=\frac{w}{p^2+w^2}(p>0,w>0)$$

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}\cos wtdt=\frac{p}{p^2+w^2}(p>0,w>0)$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

(6). 关于三角函数定积分简化(注意：f(x)是定义在[0,1]上的函数)

$(1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$ 特别的 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx$

$(2)\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$

特别的 $\int_{0}^{\pi}(\sin x)^n dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx$

$$(3)\int_{0}^{\pi}(\cos x)^n dx=\begin{cases}0 & (n\text{为奇数})\\ 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx & (n\text{为偶数})\end{cases}$$

$$(4)\int_{0}^{2\pi}(\sin x)^n dx=\begin{cases}0 & (n\text{为奇数})\\ 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx & (n\text{为偶数})\end{cases}$$

$$(5)\int_{0}^{2\pi}(\cos x)^n dx=\begin{cases}0 & (n\text{为奇数})\\ 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx & (n\text{为偶数})\end{cases}$$

$$(6)\int_{0}^{2\pi}(\sin x)^n dx=\int_{0}^{2\pi}(\cos x)^n dx$$

$$(7)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{2}{3}\quad(n\text{为正奇数})$$

$$=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\quad(n\text{为正偶数})$$

$$(8)\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx$$

11. 图像分段的函数不一定是分段函数（如 y=1/x）
分段函数的图像也可以是一条不断开的曲线（如 y=|x|）

12. 如何证明一个数列是发散的？
（1）只要找到的两个子数列收敛于不同的值
（2）找一个发散的子数列

13. 必记极限

$$(1)\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$(3)\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0$$

$$(4)\lim_{x\to 0^+}x^x=1$$

14. 函数 f(x)在[a,b]有定义，且|f(x)|在[a,b]上可积，此时 f(x)在[a,b]上的积分不一定存在列如：

$$f(x)=\frac{1\quad x\text{为有理数}}{-1\quad x\text{为无理数}}$$

15. 注意

若$f'(a)>0$，只能得到结论：$f(x)$在a点严格增加。即$\forall x\in(a-\delta,a)$ 有$f(x)<f(a)$
$\forall x\in(a,a+\delta)$有$f(x)>f(a)$;但不能得到结论：$f(x)$ 在U（a,δ） 内单调增大

16.

设f(x)=|x-a|g(x),其中g(x)在x=a处连续，则f(x)在x=a处可导$\Leftrightarrow$ g(a)=0
应用：求函数f(x)=|x(x-1)(x-2)|(x^2-3x+2)的可导的点
显然为 1,2

17. 函数取得极值的第二充分条件

设$f(x)$在x_0处n阶可导，且$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$
$f^{(n)}(x_0)\neq 0\quad(2\le n)$
(1) $n=2k$且$f^{(n)}(x_0)<0\Rightarrow f(x_0)$为极大值
(2) $n=2k$且$f^{(n)}(x_0)>0\Rightarrow f(x_0)$为极小值
(3) n=2k+1 $\quad f(x_0)$不是极值点

18. 拐点的第二充分条件

设$f(x)$在x_0处n阶可导（n>2且为奇数）
若$f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$
则$(x_0,f(x_0))$为拐点

19 .用求导法判断数列的单调性

设$A_{n+1}=f(A_n)$, $A_n\in I$　若$f(x)$在区间I上单调递增

则：(1)　$A_2>A_1$　$\{A_n\}\nearrow$

　　(2)　$A_2<A_1$　$\{A_n\}\searrow$

注意：若$f(x)$在区间I上单调递减

则：$\{A_{2n-1}\}$与$\{A_{2n}\}$两数列具有相反的单调性

20. 题目中如果出现$f''(x)\neq 0\Rightarrow f'(x)$单调

21. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x\quad(x\to 0)$

22. **无穷小小谈**

当$x\to 0$时，有

(1)当 $0<n\le m\Rightarrow x^m=o(x^n)$

(2)当 $0<n\le m\Rightarrow o(x^m)+o(x^n)=o(x^n)$

(3)当 $0<n\le m\Rightarrow \dfrac{o(x^m)}{x^n}=o(x^{m-n})$

注意：两个$o()$不可以相除

(4)当 $m,n>0\Rightarrow x^m\bullet o(x^n)=o(x^{m+n})$

$o(x^m)\bullet o(x^n)=o(x^{m+n})$

23. **无穷个无穷小之和与无穷个无穷小之积一定都是无穷小吗？？？？？**

哈哈！显然都是NO

之和：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots+\frac{1}{n})=1$　(其中$\frac{1}{n}$有无穷多个)

之积：取$\dfrac{k^n}{n!}\to 0$　(其中$n\to\infty, k=1,2,3\cdots\cdots$)

显然$\dfrac{1^n}{n!}\dfrac{2^n}{n!}\dfrac{3^n}{n!}\cdots\cdots\dfrac{n^n}{n!}=\dfrac{(n!)^n}{(n!)^n}=1$

24. **反三角**

(1) $\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$

(2) $\arcsin(\sin t)=\dfrac{t\quad ,0\le t\le\frac{\pi}{2}}{\pi-t\quad ,\quad \frac{\pi}{2}\le t\le\pi}$

25.

求$A(b)=\int_{a_1}^{a_2}|x-b|dx$的最小值

结论：当$b=\dfrac{a_1+a_2}{2}$时　$A_{\min}(b)=\dfrac{1}{4}(a_1-a_2)^2$

26. $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})dx=0$

27. $\int_0^1 \ln x dx=-1$

28. $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

作用：$\int_0^1 x(1-x)^9 dx=\int_0^1 x^9(1-x)dx$　　这下就好求了

29.

若f(x)在[a, b]上可积

则$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(b-x)]dx$

特别的当$a=0$时，有如下推论：

（1）$\int_0^b f(x)dx=\int_0^b f(b-x)dx$

（2）$\int_0^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^b [f(x)+f(b-x)]dx$

若f(x)在[a, b]上可积,则：

30. $\int_0^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})]dx$

31. $\int f(x)f'(x)dx=\frac{f^2(x)}{2}+C$

32. **连续函数必有原函数且原函数连续，若 f（x）是不连续的分段函数，则 f（x）的原函数就一定不存在**

33.

$$\begin{tikzcd}
\text{有极限} & \text{连续} \arrow[l] \arrow[ddl] & & \\
& & \text{可微} \arrow[ul] \arrow[dl] & \text{偏导连续} \arrow[l] \\
\text{有定义} & \text{偏导存在} \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

34. 对

$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$进行推广：

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$a+b=n\pi(n=0,1,2...)$

有以下结论：

（1）n为奇数 $\int_a^b xf(\sin x)dx = \frac{n\pi}{2}\int_a^b f(\sin x)dx$

n为偶数 $\int_a^b xf(\cos x)dx = \frac{n\pi}{2}\int_a^b f(\cos x)dx$

（2）若f(x) 为偶函数，则

$$\int_a^b xf(\sin x)dx = \frac{n\pi}{2}\int_a^b f(\sin x)dx$$

$$\int_a^b xf(\cos x)dx = \frac{n\pi}{2}\int_a^b f(\cos x)dx$$

35. 线、面积分中的对称简化

（1）对弧长的曲线积分

设连续且分段光滑的平面线弧L关于y轴对称，函数f(x,y)在L上有定义且连续，$\frac{L}{2}$为$x \ge 0$的半个区域，则：

若f(-x,y)=f(x,y) $\int_L f(x,y)ds = 2\int_{\frac{L}{2}} f(x,y)ds$

若f(-x,y)=-f(x,y) $\int_L f(x,y)ds = 0$

例一 $I=\int_L (xy+x^2)ds, L$为$y=\sqrt{a^2-x^2}$

解：$I=\int_L (xy+x^2)ds = \int_L xyds + \int_L x^2ds = 0 + 2\int_{\frac{L}{2}} x^2ds$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta \bullet ad\theta = \frac{\pi}{2}a^3$$

例二 $I = \oint_L (x+y^3)ds, L$为$x^2+y^2=R^2$

解：$I = \oint_L (x+y^3)ds = \oint_L xds + \oint_L y^3ds = 0+0=0$（自己体会一下，为什么？）

（2）对坐标的曲线积分

A.设连续且分段光滑的平面有向曲线弧L关于y轴对称，函数P(x,y)在L上有定义且连续，$\frac{L}{2}$为$x \ge 0$的半个区域，则：

若P(-x,y)=P(x,y) $\int_L P(x,y)dx = 2\int_{\frac{L}{2}} P(x,y)dx$

若P(-x,y)=-P(x,y) $\int_L P(x,y)dx = 0$

例一 $I = \int_L xy(ydx - xdy)$，其中L为$y=\sqrt{R^2-x^2}$，方向为从左到右

解：$I = \int_L xy(ydx-xdy) = \int_L xy^2dx - \int_L x^2ydy = 0 - \int_L x^2ydy = 0$（这要用到下面$B$的结论）

例二 $I = \oint_L x^2ydy$，其中L为双纽线的右半支：$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，$x \ge 0$的逆时针方向

解： 由于图像关于x轴对称，则$I=0$

B.设连续且分段光滑的平面有向曲线弧L关于y轴对称，函数P(x,y)在L上有定义且在左半平面部分L1与右半平面部分L2方向相反，则：

若P(-x,y)=P(x,y)　　$\int_L P(x,y)dy=0$(上面讲到的就是用的这个结论)

若P(-x,y)=-P(x,y)　　$\int_L P(x,y)dy=2\int_{L1} P(x,y)dy$

注意：这里的方向相反是指：关于哪个轴对称就关于谁的方向相反

对于关于x轴对称的情况就不写了，其实是一个道理！一定要把A,B好好的比较看看两者之间的区别与联系

例一　　$I=\int_L x|y|dx$，其中L为$y^2=x$上从$A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧

解：L关于x轴对称且方向相反且被积函数$x|y|$为y的偶函数

故I=0

例二　　$I=\int_{ABCD}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$，其中ABCD是A(1,0)B(0,1)C(-1,0)D(0,-1)为顶点的正方形的边界线，方向为逆时针方向

解：$I=\int_{ABCD}\frac{dx}{|x|+|y|}+\int_{ABCD}\frac{dy}{|x|+|y|}$

第一部分积分：曲线关于x轴对称，且方向相反，而函数$\frac{1}{|x|+|y|}$是y的偶函数，故积分为0，同理第二部分积分也为0

故I=0

(3)对面积的曲面积分

设分片光滑的曲面$\sum$关于yoz平面对称，$f(x,y,z)$在$\sum$上连续，$\frac{\sum}{2}$是$\sum$中$x\geq 0$的一半

则有：当f(-x,y,z)=-f(x,y,z)时，　　$\iint_{\sum} f(x,y,z)ds=0$

当f(-x,y,z)=f(x,y,z)时　　$\iint_{\sum} f(x,y,z)ds=2\iint_{\frac{\sum}{2}} f(x,y,z)ds$

对于关于zox,xoy的平面对称有类似的性质

例一　　$I=\iint_{\sum}(x+y+z)ds$，其中$\sum$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上$z\geq h$（$0<h<a$）的部分

解：$\sum$关于yoz,xoz面对称，故$I=\iint_{\sum} zds=\pi a(a^2-h^2)$

例二　　$I=\iint_{\sum}(xy+yz+zx)ds$，其中$\sum$为$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截的部分

解：$\sum$关于xoz面对称，故$I=\iint_{\sum} zxds=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$

(4)对坐标的曲面积分

设分片光滑的曲面$\sum$关于yoz面对称，函数$p(x,y,z)$在$\sum$上连续，$\frac{\sum}{2}$是$\sum$中$x\geq 0$的一半，则：

当f(−x, y, z)=f(x, y, z)时， $$\iint_{\sum} f(x,y,z)dydz=0$$

当f(−x, y, z)=-f(x, y, z)时 $$\iint_{\sum} f(x,y,z)dydz=2\iint_{\frac{\sum}{2}} f(x,y,z)dydz$$

例一　$I=\iint_{\sum} xyzdxdy$，其中$\sum$是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧在$x\geq 0, y\geq 0$的部分。

解：$\sum$关于xoy面对称，故$I=\iint_{\sum} xyzdxdy=2\iint_{\frac{\sum}{2}} xyzdxdy=\frac{2}{\sqrt{5}}$

例二　$I=\iint_{\sum} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中$\sum$为曲线弧段z=y^2$(x=0, 1\leq z\leq 4)$绕$z$轴旋转所成的旋转曲面的非封闭侧。

解：显然曲面$\sum$关于yoz, zox面对称，故$I=\iint_{\sum} z^2dxdy=21\pi$

36．轮换对称性在积分计算中的应用举例

1.设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，D对坐标x, y具有轮换对称性，则：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(y,x)dxdy$$

何为轮换对称性：将x, y互换后D不变

例一　$I=\iint_D (3x+2y)dxdy$，其中D为$x+y=2$与两坐标轴围成

解：D关于x,y具有轮换对称性，则：

$$I=\iint_D (3x+2y)dxdy=\iint_D (3y+2x)dxdy=\frac{5}{2}\iint_D (x+y)dxdy=5\iint_D xdxdy=\frac{20}{3}$$

例二　$I=\iint_{x^2+y^2\leq R^2} (y^2-x^2)dxdy$

解：$I=\iint_{x^2+y^2\leq R^2} (y^2-x^2)dxdy=\iint_{x^2+y^2\leq R^2} (x^2-y^2)dxdy=-I$，故$I=0$

2.设函数$f(x,y,z)$在空间有界闭区域Ω上连续，Ω对坐标x, y具有轮换对称性，则：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} f(y,x,z)dv$$

例一　　求$\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv, \Omega$为$x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2+z^2=R^2$

解：由于积分区域关于x, y, z具有轮换对称性，则：

$$\iiint_{\Omega} xdv=\iiint_{\Omega} ydv=\iiint_{\Omega} zdv$$

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv = 3\iiint_{\Omega} zdv = \frac{3}{16}\pi R^4$$

例二　　求$I=\iiint_{\Omega}(z-x^2+y^2)dv, \Omega$为$z=x^2+y^2$和$z=h$（$h>0$）围成的区域

解：积分区域关于x, y具有轮换对称性

$$I=\iiint_{\Omega}(z-x^2+y^2)dv=\iiint_{\Omega}(z-y^2+x^2)dv=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}2zdv=\frac{\pi}{3}h^3$$

3.设L是xoy面上一条光滑的曲线弧，L对坐标x, y具有乱换对称性，f(x, y)在L上连续，则：

$$\int_L f(x,y)ds = \int_L f(y,x)ds$$

例一　　$I=\oint_L x^{\frac{2}{3}}ds, L$为星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

解：显然L对x, y具有乱换对称性，则：

$$I=\oint_L x^{\frac{2}{3}}ds=\oint_L y^{\frac{2}{3}}ds=\frac{1}{2}\oint_L(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})ds=\frac{1}{2}a^{\frac{2}{3}}\oint_L ds=3a^{\frac{5}{3}}$$

例二　　求$\oint_F(x^2+z)ds, F$是圆周$x^2+y^2+z^2=R^2, x+y+z=0$

解：F关于x, y, z具有乱换对称性，则：

$$\oint_F x^2ds=\oint_F y^2ds=\oint_F z^2ds,\qquad \oint_F xds=\oint_F yds=\oint_F zds$$

$$故\oint_F(x^2+z)ds=\frac{1}{3}\oint_F(x^2+y^2+z^2)ds+\frac{1}{3}\oint_F(x+y+z)ds=\frac{R^2}{3}\oint_F ds=\frac{2\pi R^3}{3}$$

4.设L是xoy面上一条光滑的或者分段光滑的有向曲线弧，L对坐标x, y具有轮换对称性，$f(x,y)$在L上连续，则：

$$\int_L f(x,y)ds=-\int_L f(y,x)ds$$

$$或者\int_L f(x,y)ds+\int_L f(y,x)ds=0$$

例一 $I=\int_L ydx+xdy, L$为$x+y=R$上A$(R,0)$到B$(0,R)$的一段弧

解：L对坐标x,y具有轮换对称性，故$\int_L ydx+xdy=0$

例二 $I=\oint_L y^{\frac{2}{3}}dx+y^{\frac{2}{3}}dx, L$为双纽线$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$位于第一象限部分取逆时针方向

解：L关于x,y具有轮换对称性，则$\int_L y^{\frac{2}{3}}dx+x^{\frac{2}{3}}dy=0$

5.设$\sum$是光滑曲面或者分片光滑曲面，$\sum$对坐标x, y具有轮换对称性，$f(x, y, z)$在$\sum$上连续，则：

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)ds=\iint_{\Sigma} f(y,x,z)ds$$

例一 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2)ds, \sum: x^2+y^2+z^2=R^2$

解：$\iint_{\Sigma} x^2ds=\iint_{\Sigma} y^2ds=\iint_{\Sigma} z^2ds$

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2)ds=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\iint_{\Sigma} z^2ds$$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{7}{3}\pi R^4$$

例二 $I=\iint_{\Sigma}(ax+by+cz)ds, \sum: x^2+y^2+z^2=R^2$位于第一挂限部分

解：$\iint_{\Sigma} xds=\iint_{\Sigma} yds=\iint_{\Sigma} zds$

$$I=(a+b+c)\iint_{\Sigma} zds=\frac{1}{4}\pi R^3(a+b+c)$$

6.设$\sum$是光滑曲面或者分片光滑曲面，$\sum$对坐标x, y具有轮换对称性，$f(x, y, z)$在$\sum$上连续，则：

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dydz=\iint_{\Sigma} f(y,x,z)dzdx$$

例一 $I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$, $\sum$为$z=\sqrt{x^2+y^2}$

$(0\le z\le h)$的外侧

解:$\sum$关于x,y具有轮换对称性，则:

$$\iint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz=\iint\limits_{\Sigma}(x-z)dxdz$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}(y-x)dydx=0$$

所以$I=0$

例二 $I=\iint\limits_{\Sigma}xydydz+yzdzdx+zxdxdy$, $\sum$为平面$x+y+z=1$位于第一挂限的外侧

解:$\sum$关于x,y,z具有轮换对称性，则:

$$\iint\limits_{\Sigma}xydydz=\iint\limits_{\Sigma}zydydx=\iint\limits_{\Sigma}zxdxdy$$

$$I=3\iint\limits_{\Sigma}xydydz=\frac{1}{8}$$

37. 广义的罗尔定理

设$f(x)$满足：(1)在区间$(a,+\infty)$上连续

(2)在区间$(a,+\infty)$内可导

(3) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

则：$\exists\xi>a$ 使得$f'(\xi)=0$

38. 需要记忆的反例

(1) $f(x)=|x|$在$x=0$处不可导

(2) $f(x)=1$ $x\ne0$

$f(x)=0$ $x=0$ 在$x=0$点不可导

应用：设$f(0)=0$,则$f(x)$在$x=0$点处可导的充分必要条件为:

$(A)\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$存在 $(B)\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$存在

$(C)\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$存在 $(D)\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$存在

用(1)检验AC,用(2)检验D,答案为B

39.

(1)若$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$且$\lim\frac{\alpha}{\beta}\neq 1$

则:$(\alpha-\beta)\sim(\alpha'-\beta')$

(2)若$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$且$\lim\frac{\alpha}{\beta}\neq -1$

则:$(\alpha+\beta)\sim(\alpha'+\beta')$

40. 特别要注意的地方

设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续，函数F(x)为$f(x)$的一原函数，则：

(1)$f(x)$为奇函数$\Leftrightarrow f(x)$任意原函数F(x)为偶函数

(2)$f(x)$为偶函数$\Leftrightarrow f(x)$的原函数只有一个是奇函数,即为$\int_0^x f(t)dt$

(3)$f(x)$任意原函数F(x)为周期函数$\Rightarrow f(x)$为周期函数

(4)$f(x)$以T为周期的函数且$\int_0^T f(x)dx=0\Rightarrow f(x)$任意原函数F(x)以T为周期

(5)函数的单调性与其原函数的单调性之间没有逻辑上的因果关系