# 第一章主要内容

## 一 、极限

1 定义：

2 运算法则：（1）四则运算（2）复合函数

3 性质：（1）有界性 （2）唯一性 （3）保号性

（4）有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量。

（5）$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，

其中$\lim \alpha(x)=0$。

4 无穷小量的阶：

## 5　求极限的方法:

(1)　定义，运算法则及性质;

(2)　夹逼定理;

(3)　单调有界原理（求数列极限);

(4)　单侧极限与极限的关系;

(5)　两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

(6) 利用等价无穷小代换；

(7) 罗必达法则（注意应用条件）；

(8）利用泰勒公式。

**常用的等价无穷小量：** 当 $x \to 0$时，

$\sin x \sim x$， $\tan x \sim x$， $\ln(1+x) \sim x$

$\arcsin x \sim x$， $\arctan x \sim x$， $e^x - 1 \sim x$,

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $a^x - 1 \sim x\ln x$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ，

# 二 、连续性

1 定义： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$； $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$。

2 性质： （1）初等函数在其定义域内是连续的。

（2）连续等价与左右连续且相等。

3 间断点的类型： （1）第一类间断点；

（2）第二类间断点。

4 闭区间上连续函数的性质：

（1） 零点存在定理；

（2） 介值定理；

（3） 最大值，最小值定理；

# 第二章主要内容

## 1、导数的定义

$$y'\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

函数$f(x)$在点$x_0$处可导$\Leftrightarrow$左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等.

## 2、基本导数公式（常数和基本初等函数的导数公式）

$$(C)'=0 \qquad (x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (\cos x)'=-\sin x$$

$$(\tan x)'=\sec^2 x \qquad (\cot x)'=-\csc^2 x$$

$$(\sec x)'=\sec x tg x \qquad (\csc x)'=-\csc x ctg x$$

$$(a^x)'=a^x\ln a \qquad (e^x)'=e^x$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad (\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

# 3、求导法则

## (1) 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x), v=v(x)$ 可导，则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$，（2）$(cu)'=cu'$（$c$是常数），

（3）$(uv)'=u'v+uv'$，（4）$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$.

## (2) 反函数的求导法则

如果函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数为 $y=f(x)$，则有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

## (3) 复合函数的求导法则

设 $y = f(u)$, 而 $u = \varphi(x)$ 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的导数为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ 或 $y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x).$

## (4) 对数求导法

先在方程两边取对数,然后利用隐函数的求导方法求出导数.

**适用范围:**

多个函数相乘和幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

## (5) 隐函数求导法则

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

## (6) 参变量函数的求导法则

若参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)};\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

**注意：** 1、熟记求导公式；

2、复合函数求导要熟练掌握；

3、求分段函数在分段点处得到是要用定义。

# 4、高阶导数 （二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数）



二阶导数 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$,

一般地，函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 $n$ 阶导数，记作 $f^{(n)}(x), y^{(n)}, \dfrac{d^n y}{dx^n}$ 或 $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$.

莱布尼兹公式.

$$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

# 常用的 高阶导数公式

$$(1)\ (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a>0) \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2)\ (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$(3)\ (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$(4)\ (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \qquad (x^n)^{(n)} = n!$$

$$(5)\ (\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \qquad (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$(\frac{1}{x\pm 1})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x\pm 1)^{n+1}} \qquad (\frac{1}{1-x})^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

# 5、微分的定义



**定义** 设函数$y = f(x)$在某区间内有定义，$x_0$及$x_0 + \Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

成立(其中$A$是与$\Delta x$无关的常数)，则称函数$y = f(x)$在点$x_0$可微，并且称$A \cdot \Delta x$为函数$y = f(x)$在点$x_0$相应于自变量增量$\Delta x$的微分，记作$dy\big|_{x=x_0}$或$df(x_0)$，即

$$dy\big|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x.$$

微分 $dy$ 叫做函数增量 $\Delta y$ 的线性主部.(微分的实质)

## 6、导数与微分的关系

**定理** 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可微的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，且 $A = f'(x_0)$.

## 7、 微分的求法

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

**求法：** 计算函数的导数，乘以自变量的微分.

# 8、 微分的基本法则

## 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

## 微分形式的不变性

无论 $x$ 是自变量还是中间变量，函数 $y = f(x)$ 的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(x)dx}$

# 基本初等函数的微分公式

$$d(C)=0 \qquad d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x)=\cos x dx \qquad d(\cos x)=-\sin x dx$$

$$d(\tan x)=\sec^2 x dx \qquad d(\cot x)=-\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x)=\sec x\tan x dx \qquad d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$$

$$d(a^x)=a^x\ln a dx \qquad d(e^x)=e^x dx$$

$$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx \qquad d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx \qquad d(\operatorname{arc}\cot x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

# 9、导数和微分的求法

1. 正确使用导数及微分公式和法则

2. 熟练掌握求导方法和技巧

(1) 求分段函数的导数

注意讨论分界点处左右导数是否存在和相等

(2) 隐函数求导法 $\longrightarrow$ 对数微分法

(3) 参数方程求导法 $\xleftarrow{\text{转化}}$ 极坐标方程求导

(4) 复合函数求导法 (可利用微分形式不变性)

(5) 高阶导数的求法 —— 逐次求导归纳；

间接求导法; 利用莱布尼兹公式.

# 第三章内容小结：

## 一、微分中值定理：

### 罗尔(Rolle)中值定理：

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得：$f'(\xi)=0$

### 拉格朗日(Lagrange)中值定理：

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得：$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

## 柯西(Cauchy)中值定理:

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $g'(x)$ 在 $(a,b)$ 内每一点处均不为零，则在 $(a,b)$ 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得：$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

## 二、洛比达法则：注意应用的条件

# 三、泰勒公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ ($\xi$ 在 $x_0$ 与 $x$ 之间)

或 $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$

# 麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

——带拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+o(x^n) \qquad (x\to 0)$$

——带佩亚诺余项的麦克劳林公式

# 常用函数的麦克劳林公式 当 $x\to 0$ 时



$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

# 四、导数的应用

## 1 函数单调性的判定法：

若 $f'(x)>0$，则 $y=f(x)$ 单调增加；

若 $f'(x)<0$，则 $y=f(x)$ 单调减少.

## 2 函数极值的判定法

**定理1（第一充分条件）：**

(1) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时， $f'(x)>0$； $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极大值.

(2) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时， $f'(x)<0$； $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$；则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极小值.

(3) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 及 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时， $f'(x)$ 的符号相同，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处无极值.

## 定理2 (第二充分条件)



设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处具有二阶导数,且 $f'(x_0)=0$,
$f''(x_0)\neq 0$, 则

(1) 当 $f''(x_0)<0$时，函数 $f(x)$在$x_0$处取得极大值;

(2) 当 $f''(x_0)>0$时，函数 $f(x)$在$x_0$处取得极小值。

## 3　求极值的步骤:

(1)　求导数 $f'(x)$;

(2)　求驻点，即方程 $f'(x)=0$ 的根;及不可导点。

(3)　检查 $f'(x)$ 在驻点及不可导点左右 的正负号
或 $f''(x)$ 在该点的符号,判断极值点;

(4)　求极值.

## 4 最大值、最小值问题



**求最值的步骤:**

(1) 求驻点和不可导点;

(2) 求区间端点及驻点和不可导点的函数值， 比较大小，最大的就是最大值，最小的就是最小值。

**实际问题求最值:** (1) 建立目标函数;

(2) 求最值;

**注意:** 若目标函数只有唯一驻 点，则该点的数值即为所求的最大值（或 最小值）.

# 5 曲线的凹凸与拐点

## （1）凹凸性的定义、拐点的定义：

## （2）凹凸性的判别：

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内具有二阶导数，若在$(a,b)$内

(1) $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上的图形是凹的；

(2) $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上的图形是凸的；

## （3）求拐点的步骤：

（1）求出 $f''(x)=0$的所有零点；

（2）求出 $f''(x)$不存在的点（但$f(x)$在此点有定义）；

（3）考查$f(x)$在这些点左右的凹凸性。

**6 曲率：** 曲率 $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. 曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{k}$,

**7 渐近线：**

(1) 水平渐近线：

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ ($b$ 为常数)

那么 $y=b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

（2）斜渐近线

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a, \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b.$$

那么 $y=ax+b$ 就是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

## 8、函数作图的步骤



第一步 确定函数$y=f(x)$的定义域，间断点。对函数进行奇偶性、周期性等性态的讨论；

第二步 求出$f'(x)=0$的点和$f'(x)$不存在的点，即求出$f(x)$的所有可能的极值点；

第三步 求出$f''(x)=0$的点和$f''(x)$不存在的点，即求出$f(x)$的所有可能的拐点；

第四步 列表，判断单调区间，凹凸区间，极值点，拐点等；

第五步 求曲线的渐近线；

第六步 必要时，定出曲线的某些特殊点，如截距等；

第七步 作图。

# 9 证明不等式常用的方法：

1． 利用单调性、极值、最值；

2． 利用拉格朗日中值定理；

3． 利用泰勒公式（带拉格朗日余项）；

4． 利用函数凹凸性的定义。

# 第四章内容小结

1、不定积分的概念：$\int f(x)dx = F(x)+C;$

2、不定积分的计算：

第一换元法（凑微分法）；

第二换元法（变量替换法）；

分部积分法。

## 常用的凑微分公式:



$$dx = \frac{1}{a} d(ax+b)\,; \quad x^n dx = \frac{1}{n+1} dx^{n+1};$$

$$\frac{1}{x} dx = d(\ln x); \quad \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d\sqrt{x}; \quad \frac{1}{x^2} dx = -d(\frac{1}{x})$$

$$\cos x dx = d \sin x; \quad \sin x dx = -d \cos x$$

$$\sec^2 x dx = d \tan x; \quad \csc^2 x dx = -d \cot x$$

$$\frac{1}{1+x^2} dx = d \arctan x; \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d \arcsin x$$

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = d(x-\frac{1}{x}); \quad e^x dx = de^x$$

# 基本积分表



(1) $\int k dx = kx + C \quad$ ($k$是常数)

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$

特别地 $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C, \quad \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,$

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

(4) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

(5) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

(6) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C;$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$

(10) $\int e^x dx = e^x + C;$ (11) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

(12) $\int shx\, dx = ch\, x + C;$ (13) $\int chx dx = shx + C;$

(14) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C;$

(15) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C;$

(16) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

# 第五章内容小结

## 1、定积分的概念：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \;,\; \lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

## 2、定积分的几何意义：曲边梯形的面积。

## 3、性质：

线性性质；区间可加性；不等式的性质；

估值定理；积分中值定理

## 4、 Newton-Leibniz 公式：

$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

## 5、 变上限积分：

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt\,, \quad \Phi'(x) = f(x)$$

**推广：** 若 $\Phi(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$，则

$$\Phi'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

**6、定积分计算法：** 换元法与分部积分法；

**注意：** 被积函数带绝对值或被积函数是分段函数时定积分的计算积分。

**一些特殊积分：**

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x) \text{偶函数} \\ 0, & f(x) \text{奇函数} \end{cases};$$

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \int_{0}^{nT} f(x)dx = n\int_{0}^{T} f(x)dx;$$

# 7、定积分应用

(1) 平面图形的面积

(2) 体积：① 旋转体的体积(切片法和柱壳法)；

② 已知平行截面的面积求立体的体积。

(3) 平面曲线的弧长

(4) 变力所作的功

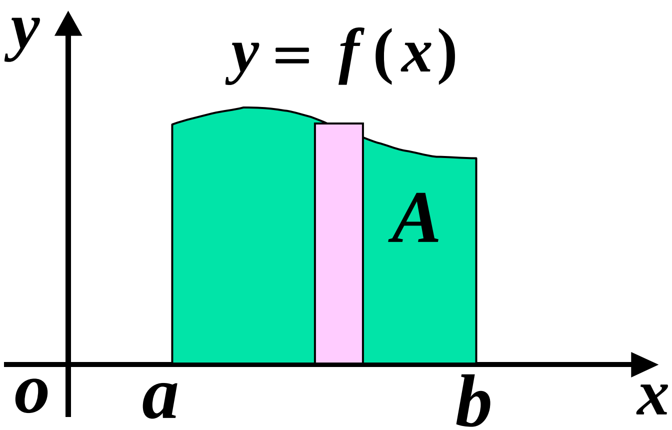
(5) 水的侧压力

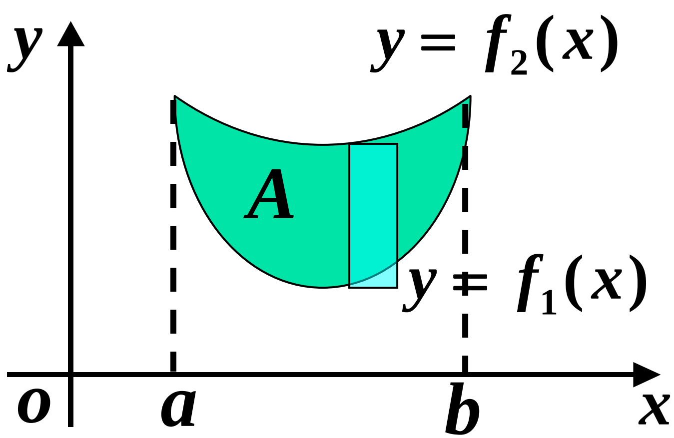
(6) 引力

# 定积分应用的常用公式

## (1) 平面图形的面积

### 直角坐标情形




$$A=\int_a^b f(x)dx$$

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

## 参数方程所表示的函数

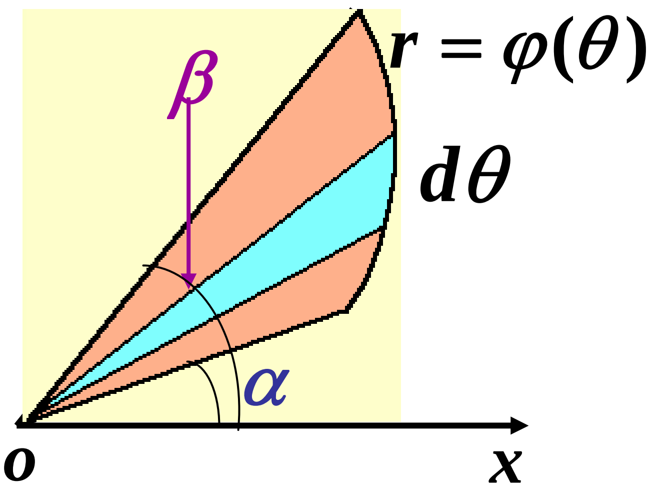
如果曲边梯形的曲边为参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

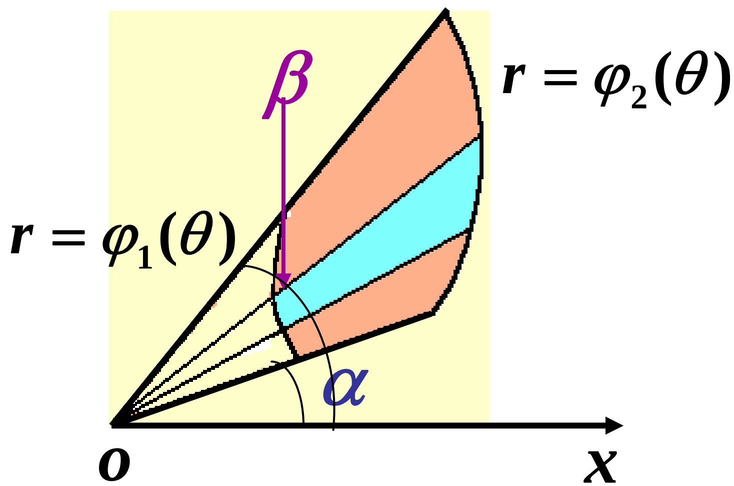
曲边梯形的面积 $A=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)dt$

（其中$t_1$和$t_2$对应曲线起点与终点的参数值）

在$[t_1,t_2]$（或$[t_2,t_1]$）上$x=\varphi(t)$具有连续导数，$y=\psi(t)$连续.

# 极坐标情形

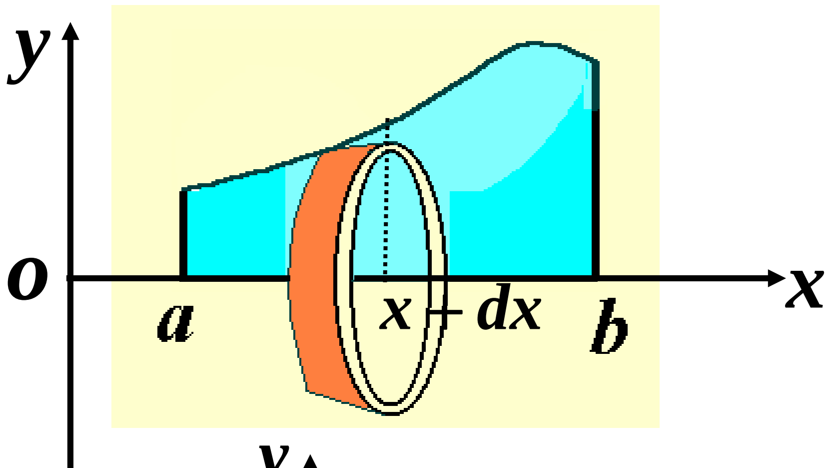


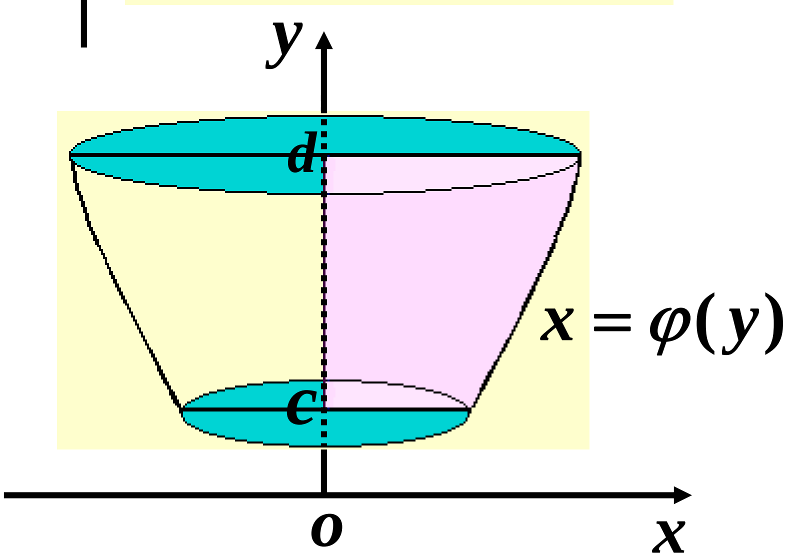

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi(\theta)]^2 d\theta$$

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi_2^2(\theta)-\varphi_1^2(\theta)]d\theta$$

## (2) 旋转体的体积

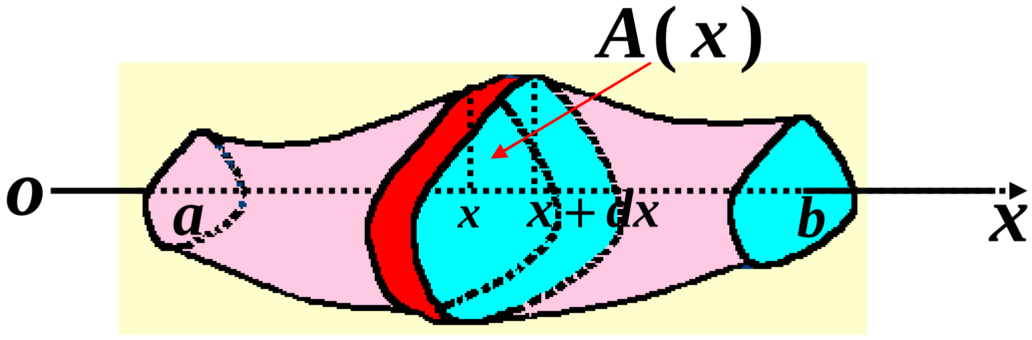



$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$




$$V = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy$$

# 平行截面面积为已知的立体的体积

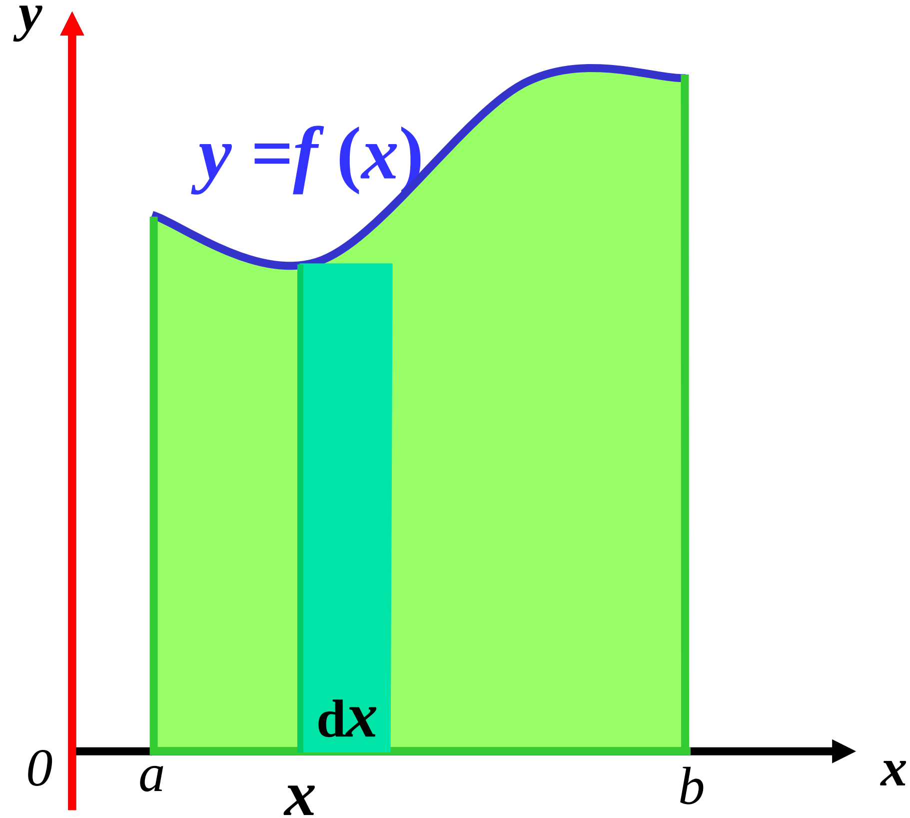



$$V=\int_a^b A(x)dx$$

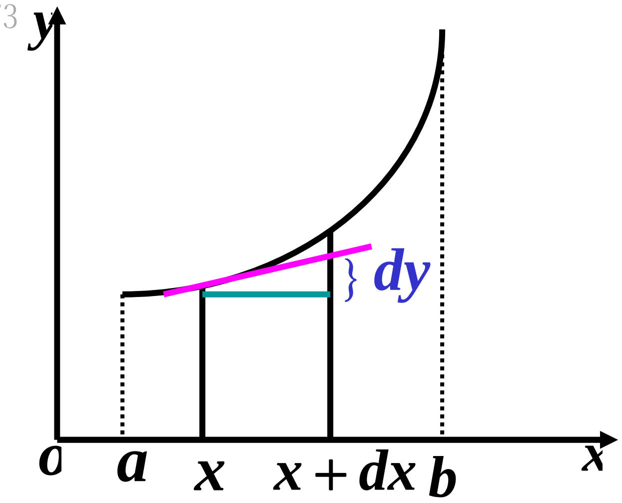
# 求旋转体体积— 柱壳法

曲边梯形 $y=f(x)$， $x=a,x=b,y=0$ 绕 $y$ 轴旋转

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$



# (3) 平面曲线的弧长




A. 曲线弧为 $y = f(x)$

弧长 $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

B. 曲线弧为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$

其中$\varphi(t), \psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有连续导数

弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$

C. 曲线弧为 $r = r(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$

弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta$