离散数学课堂测验（数理逻辑）

说明：闭卷，可携带考试者本人设计的笔记（A4 纸大小，1 页）；需要写出详细求解步骤，尽量展示你的工作，独立完成，不可讨论.

1. (20 分)求$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$ 的主析取范式与主合取范式（用符号 m、M 表示且其下标用十进制整数）.

等值变换原公式，易得：$(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$,

析取范式：$m_{010}\vee m_{011}\vee m_{101}\vee m_{111}$，即 $m_2\vee m_3\vee m_5\vee m_7$.

从而，合取范式：$M_0\wedge M_1\wedge M_4\wedge M_6$.

2. (20 分)请用 CP 规则来证明如下破坏性二难推理：

前提：$\neg C\vee\neg D$， $A\rightarrow C$， $B\rightarrow D$.　　结论：$\neg A\vee\neg B$.

(1) A　　P(附加，为证明结论$\neg A\vee\neg B \equiv A\rightarrow\neg B$)

(2) $A\rightarrow C$	P	(5) $\neg D$	T,I (3)(4)	(8) $A\rightarrow\neg B$	CP(1)-(7)
(3) C	T,I (1)(2)	(6) $B\rightarrow D$	P	(9) $\neg A\vee\neg B$	R,E(8)
(4) $\neg C\vee\neg D$	P	(7) $\neg B$	T,I (5)(6)		

3. (15 分)分析谓词公式的类型（有效/不可满足/无效/可满足），需要给出详细证明，或用解释例证：$\exists x\forall y\,(P(y)\rightarrow Q(x, y))$.

该谓词公式式可满足公式，也是无效公式：

定义解释：论域 D= {3}, P(3) = True，Q(3, 3) = True. 此时，公式为 True，为可满足公式；

定义解释：论域 D= {3}, P(3) = True，Q(3, 3) = False. 此时，公式为 False，为无效公式.

4. (20 分)请用相关基本等值式证明等值式：$\exists x(A(x)\rightarrow B(x))\equiv\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$.

$\exists x(A(x)\rightarrow B(x))$

$\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$.

5. (25 分)形式化并证明如下推理过程：

所有的有理数都是实数；所有的无理数也是实数；虚数不是实数。因此，虚数既不是有理数，也不是无理数。（个体域为全总域）

需要引入的谓词包括：

$Q(x)$: x 是有理数；$R(x)$: x是实数；$N(x)$: x是无理数；$C(x)$: x是虚数。上述推理可符号化为：

前提：$\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$、$\forall x(N(x)\rightarrow R(x))$、$\forall x(C(x)\rightarrow \neg R(x))$

结论：$\forall x(C(x)\rightarrow (\neg Q(x)\wedge\neg N(x))$,

验证该结论的公式序列如下：

(1). $\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$	// P	(8). $\neg R(y)$	// T, I (6)(7)
(2). $Q(y)\rightarrow R(y)$	// US (1)	(9). $\neg Q(y)$	// T, I (8)(2)
(3). $\forall x(N(x)\rightarrow R(x))$	// P	(10). $\neg N(y)$	// T, I (8)(4)
(4). $N(y)\rightarrow R(y)$	// US (3)	(11). $\neg Q(y)\wedge\neg N(y)$	// T, I (9)(10)
(5). $\forall x(C(x)\rightarrow \neg R(x))$	// P	(12). $C(y)\rightarrow(\neg Q(y)\wedge\neg N(y)$	// CP (7)-(11)
(6). $C(y)\rightarrow \neg R(y)$	// US (5)	(13). $\forall x(C(x)\rightarrow (\neg Q(x)\wedge\neg N(x))$	//UG (12)
(7). $C(y)$	// P(附加)		