Assignments 3.1 -Solution

一、阅读（Reading）

1. 阅读教材.

2. 课外阅读：

Predicate Logic（1）-by Gerard O' Regan.pdf.pdf

二、问题解答（Problems）

1. 教材 P51：题 1（1，3，5，7）

2. 教材 P51：题 5;

设 R(x)：x 是兔子；T(x)：x 是乌龟。F(x，y)：x 比 y 跑得快；S(x，y)：x 与 y 跑得同样快。

3. 教材 P52：题 7;

N(x)：x 是一个数；S(x，y)：y 是 x 的后继数

4. 教材 P52：题 10;

变量是否被约束.

5. 教材 P52：题 11（1，3，5）；

6. 教材 P52：题 12（1，3，5）；

解释; 讨论.

7. Given the wff $W = \exists x\, p(x) \rightarrow \forall x\, p(x)$.

a. Find all possible interpretations of W over the domain $D = \{a\}$. Also give the truth value of W over each of the interpretations.

b. Find all possible interpretations of W over the domain D ={a, b}. Also give the truth value of W over each of the interpretations.

a. $p(a) = True$, 于是$\forall x\, p(x)=True$, $\exists x\, p(x) =True$. 故 $W=True$.

b. $p(a) = False$, 于是$\forall x\, p(x) = False$, $\exists x\, p(x) = False$. 故 $W = False$.

8. Find a model for each of the following wffs.

a. $p(c) \wedge \exists x \neg p(x)$.

b. $\exists x\, p(x) \rightarrow \forall x\, p(x)$.

c. $\exists y \forall x\, p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y\, p(x, y)$.

d. $\forall x \exists y\, p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x\, p(x, y)$.

e. $\forall x\, (p(x, f(x)) \rightarrow p(x, y))$.

a. 论域 $D= \{1, 2\}$, $p(1) = True$，$p(2) =False$，$c = 1$.

b. $D= \{1, 2\}$, $p(1) = True$，$p(2) =True$.

c、d. 令对任意的论域中的任意元素 x，y 有：$p(x, y) = False$.

e. $D = \{a\}$, $f(a) = a$, $y = a$.

9. Given the wff $W = \forall x\, p(x, x) \rightarrow \forall x \forall y \forall z\, (p(x, y) \vee p(x, z) \vee p(y,z))$.

a. Show that W is true for any interpretation whose domain is a singleton.

b. Show that W is true for any interpretation whose domain has two elements.

c. Show that W is not valid.

d. Find an example of a wff that is true for any interpretation that has a domain with three or fewer elements but is not valid.

a. 不妨设论域 $D= \{a\}$.

若 $p(a, a) = False$，则 $\forall x\, p(x, x)=False$，于是 $W=True$.

若 $p(a, a) = True$，则 $\forall x\, p(x, x)=True$；而 $\forall x \forall y \forall z\, (p(x, y) \vee p(x, z) \vee p(y,z)$ 中的 x, y, z 都是 a，有 $\forall x \forall y \forall z\, (p(x, y) \vee p(x, z) \vee p(y,z)=True$，于是 $W=True$.

b. 类似地，对于任何解释，不妨设论域 $D= \{a, b\}$.

若 $p(a, a) = False$ 或若 $p(b, b) = False$，则 $\forall x\, p(x, x)=False$，于是 $W=True$.

若 $p(a, a) = True$ 且 $p(b, b) = True$，则 $\forall x\, p(x, x)=True$，而公式 $\forall x \forall y \forall z\, (p(x, y) \vee p(x, z) \vee p(y,z)$ 中的 x, y, z 都是总有其中的某 2 个取值一样，不妨设 $y=z=a$，于是 $p(y,z)=p(a,a)=True$，有 $\forall x \forall y \forall z\, (p(x, y) \vee p(x, z) \vee p(y,z)=True$，故 $W=True$.

c. 设论域 $D=\{a, b, c\}$，$p(a, a) = p(b, b) = p(c, c) = True$，$p(a,b) = p(a, c) = p(b, c) = False$. 此时，$W=False$. 故 W 不是有效谓词公式.

d. 基于(a)(b)(c)，可定义如下谓词公式：

$\forall x p(x, x) \rightarrow \forall x \forall y \forall z \forall w (p(x, y) \vee p(x, z) \vee p(x, w) \vee p(y, z) \vee p(y, w) \vee p(z, w))$.

10. Prove that each of the following wffs is valid, unsatisfiable,or invalid.

a. $\forall x\, (p(x) \rightarrow p(x))$.

a. 有效公式. 任意论域 D 中元素 d，$p(d) \rightarrow p(d)=True$. 因此，对任意解释，该公式都为真.

b. $\exists x\, (p(x) \wedge \neg p(x))$.

b. 不可满足公式. 任意论域 D 中元素 d，$p(d) \wedge \neg p(d)=False$. 因此，对任意解释，该公式都为假.

c. $\exists x \forall y\, (p(x, y) \wedge \neg p(x, y))$.

c. 不可满足公式. 假设有解释使得该公式为真，即存在 $d \in D$ 使得 $\forall y(p(d, y) \wedge \neg p(d, y))=True$，亦即任意 $c \in D$, $p(d, c) \wedge \neg p(d, c)=True$, 显然矛盾.

d. $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$.

d. 有效公式. 反证. 如果该公式非有效公式，则存在论域为 D 的解释，公式前件为真，但后件为假. 由后件为假可得，存在 $d \in D$ 使得 $A(d)=True$ 且 $B(d)=True$，于是，$\forall x\, A(x)=False$ 且 $\forall x\, B(x)=False$，从而前件为假，矛盾.

e. $\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x\, A(x) \rightarrow \exists x\, B(x))$.

e. 有效公式. 设论域为 D, 如果前件为真，则意味着任意 $d \in D$，有 $A(d) \rightarrow B(d)$. 于是，若任意 $d \in D$，$A(d)=True$, 则 $B(d)=True$. 从而，$\forall x\, A(x)=True$，存在 $d \in D$, $B(d)=True$. 即后件为真.