伽罗瓦

河北师范学院 邓明立

伽罗瓦，E．(Galois， Evariste) 1811 年 10 月 25 日生于法国巴黎附近的拉赖因堡；1832 年 5 月 31 日卒于巴黎．数学．

伽罗瓦的父亲 N．G．伽罗瓦(Galois)是法国资产阶级革命的支持者，为人正直厚道．他在 1815 年拿破仑发动"百日政变"期间，当选为拉赖因堡市的市长．伽罗瓦的母亲是一位当地法官的女儿，聪明而有教养，但个性倔强，甚至有些古怪．她是伽罗瓦的启蒙老师，为他的希腊语和拉丁语打下了基础，并且把她自己对传统宗教的怀疑态度传给了儿子．

1823 年 10 月，12 岁的伽罗瓦离别双亲，考入路易·勒格兰皇家中学，开始接受正规教育．在中学的前两年，他因希腊语和拉丁语成绩优异而多次获奖；但在第三年(1826)，伽罗瓦对修辞学没有下足够的功夫，因而只得重读一年．在这次挫折之后，他被批准选学第一门数学课．这门课由 H．J．韦尼耶(Vernier)讲授，他唤起了伽罗瓦的数学才能，使他对数学发生了浓厚的兴趣.他一开始就对那些不谈推理方法而只注重形式和技巧问题的教科书感到厌倦，于是，他毅然抛开教科书，直接阅读数学大师们的专著．A．M．勒让德(Legendre)的经典著作《几何原理》(Eléments de géo - me tre，1792)，使他领悟到数学推理方法的严密性; J. L. 拉格朗日(Lagrange)的《解数值方程》(Rélution des équations nume - riques，1769)、《解析函数论》(Théorie des fonctions analytiques，1797)等著作，不仅使他的思维更加严谨，而且其中的思想方法对他的工作产生了重要的影响；接着他又研究了 L．欧拉(Euler)、C. F. 高斯(Gauss)和 A. L. 柯西(Cauchy)的著作，为自己打下了坚实的数学基础.学习和研究数学大师的经典著作、是伽罗瓦获得成功的重要途径．他深信自己能做到的，决不

会比他们少．他的一位教师说：“他被数学的鬼魅迷住了心窍．”然而，他忽视了其他学科，导致了他首次(1828)报考巴黎综合工科学校失败．

1828 年 10 月，伽罗瓦从初级数学班升到 L．P．E．里查德(Richard)的数学专业班．里查德是一位年轻而富有才华的教授，并且具有发掘科学英才的敏锐判断力和高度责任感．他认为伽罗瓦是最有数学天赋的人物，“只宜在数学的尖端领域中工作”．于是，年仅 17 岁的伽罗瓦开始着手研究关于方程理论、整数理论和椭圆函数理论的最新著作．他的第一篇论文“周期连分数的一个定理的证明”(Démonstration d’un théoréme sur les fractionscontinues périodiques)，于 1829 年 3 月发表在 J．D．热尔岗(Gergonne)主办的《纯粹与应用数学年刊》(Annales de Mathé - matiques Pures et Appliquées)上，它更为清楚地论述和说明了欧拉与拉格朗日关于连分式的结果．

据伽罗瓦说，他在 1828 年犯了和 N．H．阿贝尔(Abel)在 8 年前犯的同样错误，以为自己解出了一般的五次方程．但他很快意识到了这一点，并重新研究方程理论，他坚持不懈，直到成功地用群论阐明了这个带普遍性的问题．1829 年 5 月 25 日和 6 月 1 日，他先后将他的两篇关于群的初步理论的论文呈送法国科学院．科学院请柯西做论文的主审．然而，一些事件挫伤了这个良好的开端，而已在这位年轻数学家的个性上留下了深深的烙印．首先，伽罗瓦的父亲由于受不了保守的天主教牧师的恶毒诽谤于 7 月 2 日自杀身亡．之后不到一个月，伽罗瓦参加了巴黎综合工科学校的入学考试，由于他拒绝采用主考官建议的解答方法，结果又遭失败．最后他不得已报考了高等师范学院，于 1829 年 10 月被录取．

柯西审核的伽罗瓦的论文，新概念较多，又过于简略，因此柯西建议他重新修改．1830 年 2 月，伽罗瓦将他仔细修改过的论文再次呈送科学院，科学院决定由 J．B．J．傅里叶(Fourier)主审．不幸，傅里叶 5 月份去世，在他的遗物中未能找到伽罗瓦的手稿．

1830 年 4 月，伽罗瓦的论文"关于方程代数解法论文的分析"发表在 B．D．费吕萨克(Férussac)的《数学科学通报》(Bulle - tetin des Sciences Mathématiques)上．同年 6 月，他又在同一杂志上发表了两篇论文——"关于数值方程解法的注记"和"数的理论"，这期杂志上还刊登着柯西和 S．D．泊松(Poisson)的文章，这充分说明了伽罗瓦已在数学界赢得了声誉．

伽罗瓦进入师范学院一年，正当他做出卓越的研究工作之时，法国历史上著名的 1830 年"七月革命"爆发了．伽罗瓦作为一名勇敢追求真理的共和主义战士，反对学校的苛刻校规，抨击校长在"七月革命"期间的两面行为．为此，他于 1830 年 12 月 8 日被校方开除．于是，他便根据自己的意志投身于政治活动．1831 年 5 月 9 日，在一个共和主义者的宴会上，伽罗瓦举杯对国王进行了挑衅性的祝酒，于第二天被捕．罪名是教唆谋害国王生命的未遂罪．6 月 15 日被塞纳陪审法院释放．在此期间，伽罗瓦继续进行数学研究．他于 1831 年 1 月 13 日开了一门关于高等代数的公开课，以讲授自己独创的学术见解谋生．但是，这个设想并未获得多大成功．1831 年 1 月 17 日，他向科学院呈送了题为"关于方程根式解的条件"的论文，这次负责审查论文的是泊松和 S．F．拉克鲁瓦(Lacroix)．虽然泊松认真地审阅了它，可得出的结论却是"不可理解"．在他们给科学院的报告中说："我们已经尽了最大努力来研究伽罗瓦的证明，他的推理显得不很清楚，到目前为止，我们还不能对它作出正确评价，因为有说服力的证明还没有得到．因此，在这篇报告中，我们甚至不能给出他的证明思想．"最后，泊松建议伽罗瓦进一步改进并详细阐述他的工作．

1831 年 7 月 14 日，伽罗瓦率众上街示威游行时，再次被捕，他被关押在圣佩拉吉监狱．他在狱中顽强地进行数学研究，一面修改他关于方程论的论文，研究椭圆函数，一面着手撰写将来出版他著作时的序言．1832 年 3 月 16 日，由于宣布霍乱正在流行，伽罗瓦被转移到一

家私人医院中服刑．他在那里陷入恋爱，后因爱情纠纷而卷入一场决斗． 4 月 29 日，伽罗瓦获释．5 月 29 日，即决斗的前一天，伽罗瓦给共和主义者的朋友们写了绝笔信．尤其在给 A．舍瓦列耶(Cheralier)的信中，表明他在生命即将结束的时候，仍在整理、概述他的数学著作．第二天清晨，在冈提勒的葛拉塞尔湖附近，他与对手决斗，结果中弹致伤后被送进医院．1832 年 5 月 31 日，这位未满 21 岁的数学家与世长辞了．

伽罗瓦最主要的成就是提出了群的概念，用群论彻底解决了代数方程的可解性问题．人们为了纪念他，把用群论的方法研究代数方程根式解的理论称之为伽罗瓦理论．它已成为近世代数学的最有生命力的一种理论．

群论起源于代数方程的研究，它是人们对代数方程求解问题逻辑考察的结果．对于方程论，拉格朗日有过卓越的概括．在 1770 年前后，他利用统一的方法(现在称为拉格朗日预解式方法)，详细分析了二次、三次、四次方程的根式解法，提出了方程根的排列置换理论是解决问题的关键所在．他的方法对于求解低次方程卓有成效，但对一般的五次方程却没有任何明确的结果，致使他对高次方程的求解问题产生了怀疑．P．鲁菲尼(Ruffini)于 1799 年首次证明了高于四次的一般方程的不可解性，但其证明并不完善．在 1824—1826 年，阿贝尔修正了鲁菲尼证明中的缺陷，严格证明了一般的五次或五次以上的代数方程不可能有根式解．其间，高斯于 1801 年建立了分圆方程理论，解决了二项方程的可解性问题，这对于伽罗瓦理论的创立至关重要．1815 年，柯西对于置换理论的发展做出了贡献．固然高于四次的一般方程不能有根式解，但是有些特殊类型的方程(如二项方程、阿贝尔方程割仍然可以用根式求解．因此，全面地刻画可用根式求解的代数方程的特性问题，乃是一个需要进一步解决的问题．伽罗瓦的理论正是在这样的背景上发展起来的．

伽罗瓦继承和发展了前人及同时代人的研究成果，融会贯通了各流派的数学思想，并且凭着他对近代数学概念特性的一种直觉，超越了他们．他系统地研究了方程根的排列置换的性质，首次定义了置换群的概念，他认为了解置换群是解决方程理论的关键．在 1831 年的论文中，伽罗瓦把具有封闭性的置换的集合称为”群”．当然，这只是抽象群的一条重要性质而已．群是近代数学中最重要的概念之一，它不仅对数学的许多分支有深刻的影响，而且在近代物理、化学中也有许多重要的作用．因此，群的概念需要以高度抽象的形式来表达．现在公认群是元素间存在二元运算(例如乘法)并具有下列四条性质的集合：

(1)(封闭性)集合中任意两个元素的乘积仍属于该集合；

(2)(结合性)乘法满足结合律，即(a·b)·c=a·(b·c)；

(3)(存在单位元)集合中存在单位元 I，对集合中任意元素 a 满足 I·a=a·I=a；

(4)(存在逆元)对集合中任一元素 a，存在唯一元素 a-1，使得 a-1·a=a·a-1=I．

伽罗瓦是利用群论的方法解决代数方程可解性问题的．他注意到每个方程都可以与一个置换群联系起来，即与它的根之间的某些置换组成的群联系；现在称这种群为伽罗瓦群．对于任一个取有理数值的关于根的多项式函数,伽罗瓦群中的每个置换都使该函数的值不变.反过来，如果伽罗瓦群中的每个置换都使一个根的多项式函数的值不变，则这多项式函数的值是有理的．因此，一个方程的伽罗瓦群完全体现了它的根(整体)的对称性．伽罗瓦的思想方法大致是这样的：他将每个方程对应于一个域，即含有方程全部根的域(现在称之为方程的伽罗瓦域)，这个域又对应一个群，即这个方程的伽罗瓦群．这样，他就把代数方程可解性问题转化为与方程相关的置换群及其子群性质的分析问题．这是伽罗瓦工作的重大突破．

具体说来，假设方程 $x^n+a_1x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\dots+a^n{}_{-1}x+a^n=0$ 的系数生成的域为 F，E 是方程的伽罗瓦域，它是将方程的根添加到 F 上所生成的域，现在称之为伽罗瓦扩张．让 G 表示方程的伽罗瓦群．这个方程是否可用根式求解的关键问题是：数域 F 是否可以经过有限次添加根式而扩张为根域 E．也就是说是否存在有限多个中间域：F_1，F_1，…，F_{s-1}，$F_s=E$，使 $F=F_0F_1F_1\dots F_s=E$．其中每个 F_i 都是由 F_{i-1} 添加 F_{i-1} 中的数的根式所生成的扩域．不妨假定，F 是含有这个方程的系数及 1 的各次方根的最小域，且每次所添加的根式均为素数次根．那么，这样的中间域 Fi 与 Fi-1 之间有何关系呢？伽罗瓦经过认真的研究，认为关键取决于使 Fi-1 保持不变的 Fi 的自同构变换群的结构．可以证明，这样的自同构群是素数阶的循环群，且阶数为[Fi:Fi-1]．域上的自同构群概念的引入，使域与群发生了联系．即建立了伽罗瓦域的子域与伽罗瓦群的子群之间的一一对应关系．事实上，保持 F=F0 的元素不动的 E 的每个自同构决定方程根的一个置换，它属于伽罗瓦群 G；反之，G 中每个置换引起 E 的一个自同构，它使 F 的元素不动．这样就建立了 E 的自同构群和方程的伽罗瓦群之间的同构．由此建立 E 的子域(包含 F)和 G 的子群之间的一一对应：保持子域 Fi 元素不动的 G 中全部置换构成 G 的一个子群 Gi，让 Gi 与 Fi 对应，而且反过来也可用 Gi 来刻划 Fi，即 Fi 是 E 中对 Gi 的每个置换保持不动的元素全体．

伽罗瓦还利用方程根的 n！值的线性系数θ(n 表示方程根的个数)来定出方程的伽罗瓦群．虽然这种计算并非易事，但的确给出了计算伽罗瓦群的一种方法，而且伽罗瓦在这里给出了域扩张的本原元素的概念．

在代数方程可解性的研究中，伽罗瓦的主要思想是对给定方程的系数以及经过有限次扩张的中间域给出了一个群的序列，使得每个扩域相对应的群是它前一个域相应的群的子群．伽罗瓦基本定理就描述了中间域与伽罗瓦群的子群之间的对应关系．利用这种关系，可由群的

性质描述域的性质；或由域的性质描述群的性质．因此，伽罗瓦的理论是域与群这两种代数结构综合的结果．

伽罗瓦的工作主要基于两篇论文——"关于方程根式解的条件"和"用根式求解的本原方程"．这两篇论文于 1846 年由 J．刘维尔(Liouille)编辑出版．此后，人们便开始介绍和评价伽罗瓦的工作，他的思想方法逐渐为人们所接受．在这些论文中，伽罗瓦将其理论应用于代数方程的可解性问题，由此引入了群论的一系列重要概念．

当伽罗瓦将二项方程作为预解方程研究时，他发现其相应的置换子群应是正规子群且指数为素数才行．正规子群概念的引入及其性质和作用的研究，是伽罗瓦工作的又一重大突破．属于伽罗瓦的另一个群论概念是两个群之间的同构．这是两个群的元素之间的一一对应，使得如果在第一个群中有 a·b=c，则对第二个群的对应元素，有 a′·b′=c′．他还引进了单群和合成群的概念．一个没有正规子群的群是单群，否则是合成群．他表述了最小单群定理：阶是合成数的最小单群是 60 阶的群．

伽罗瓦还利用正规子群判别已知方程能否转化为低次方程的可解性问题．用现代语言可将他的思想方法描述如下：首先定义正规子群的概念，即群 G 的子群 N 叫做 G 的正规子群，是指对于每个 $g \in G$，$g^{-1}Ng=N$；其次是寻找极大正规子群列，确定极大正规子群列的一系列合成因子．如果一个群所生成的全部合成因子都是素数，伽罗瓦就称这个群为可解的．他利用可解群的概念全面刻画了用根式解方程的特性，给出了判别方程可解性的准则：一个方程可用根式解的充要条件是这个方程的伽罗瓦群是可解群．虽然这一准则不能使一个确定方程的精确求解更为简单，但它确实提供了一些方法，可以用来得出低于五次的一般方程，以及二项方程和某些特殊类型方程的可解性的有关结果，还可以直接推导出高于四次的一般方程的不可解性．因为一般的 n 次方程的伽罗瓦群是 n 个文字的对称群 S_n；当 $n>4$ 时，n

次交错群 An 是非交换的单群(不可解)，An 又是 Sn 的极大正规子群．由此可推出 Sn 是不可解的．既然对于所有这样的 n 值，都存在其 Sn 是伽罗瓦群的 n 次方程，所以一般的高于四次的方程不可能得到根式解．

在"关于方程代数解法论文的分析"中，伽罗瓦提出了一个重要定理(未加证明)：一个素数次方程可用根式求解的充要条件是这个方程的每个根都是其中两个根的有理函数．伽罗瓦用它判别特殊类型方程的根式解问题．他所研究的这种方程，现在称之为伽罗瓦方程，是阿贝尔方程的推广．在"数的理论"一文中，伽罗瓦用现在所谓的"伽罗瓦虚数"对同余理论作了推广并将之应用于研究本原方程可用根式求解的情况．关于伽罗瓦虚数，在伽罗瓦之前只知道特征 0 的域，如有理数域、实数域、复数域等，伽罗瓦在这篇论文中给出了一类新的域，即伽罗瓦域，现在称为有限域，它们是素数特征的城．有限域在现在通讯中的重要作用是尽人皆知的．

伽罗瓦的数学遗作，首次(1846)发表在刘维尔主办的《纯粹与应用数学杂志》(Journal de Mathématiques Pures et Appliquées)上．1897 年，E．皮卡(Picard)再次出版了《伽罗瓦数学手稿》(Ocuvres mathématiques d'Evariste Galois)．之后，J．塔涅伊(Tannery)编辑的《伽罗瓦的手稿》(Manuscriste d'Evariste Galo - is)于 1908 年正式出版．1962 年，R．布尔哥涅(Bourgne)和 J．P．阿兹拉(Azra)编辑出版了带有评论性的典型版本《伽罗瓦数学论文全集》(Ecrists et mémoires mathématiques d'EvaristeGalois)，它汇集了伽罗瓦所有已发表的著作，以及绝大部分还保存的数学提纲、信件和原稿．这些史料证实了伽罗瓦的数学研究，与他对数学本质尤其对数学方法的追求、探索是密不可分的，展示了他对现代数学精神的远见卓识．从中精选出的有关数学观、方法论的原文，已成为当今研究的方向．

伽罗瓦不仅研究具体的数学问题，而且研究能概括这些具体成果并决定数学长期发展及人们思维方式转变的新理论——群论．由此还发展了域论．D．希尔伯特(Hilbert)曾把伽罗瓦的理论称为“一个明确的概念结构的建立”．这种理论，对于近代数学、物理学、化学的发展，甚至对于 20 世纪结构主义哲学的产生和发展，都发生了巨大影响．正象 E．T．贝尔(Bell)所说的：“无论在什么地方，只要能应用群论，从一切纷乱混淆中立刻结晶出简洁与和谐，群的概念是近世科学思想的出色的新工具之一．”

伽罗瓦还是头一位有意识地以结构研究代替计算的人．他使人们从偏重“计算”研究的思维方式转变为用“结构”观念研究的思维方式，他的理论是群与域这两种代数结构综合的结果．在他的论文序言部分明确表述了这种思想，他提出：“使计算听命于自己的意志，把数学运算归类，学会按照难易程度，而不是按照它们的外部特征加以分类——这就是我所理解的未来数学家的任务，这就是我所要走的道路．”这种深邃的数学思想，已明显地具有现代数学的精神．

伽罗瓦“把数学运算归类”这句话，毫无疑问是指现在所谓群论．群的功能正是将所研究的对象进行分类，而不管研究对象本身及其运算的具体内容，它是在错综复杂的现象中探讨共同的结构．一般说来，一个抽象的集合不过是一组元素而已，无所谓结构，一旦引进了运算或变换就形成了结构；所形成的结构中必须包含着元素间的关系，这些关系通常是由运算或变换联系着的．“把数学运算归类，而不是按照它们的外部特征加以分类”，其思想实质是：数学由研究具体的数和形的外部特征转变成研究一般的、抽象的结构．伽罗瓦对代数结构的探索，深化了人们关于数学研究对象的认识——按照这种观念，数学的研究对象不是孤立的量，而是数学的结构．从自发到自觉转变的意义上说，伽罗瓦已经处于近代数学的开端．他

为 19 世纪数学家们提出的问题及任务，导致了公理方法的系统发展和代数基本结构的深入研究．因此，伽罗瓦是近世代数学的创始人．

伽罗瓦在数学上做出了巨大的贡献，他在数学观、认识论方面也有不少独立的见解．他认为科学是人类精神的产物，与其说是用来认识和发现真理，不如说是用来研究和探索真理．科学作为人类的事业，它始于任何一个抓住它的不足并重新整理它的人．伽罗瓦指出："科学通过一系列的结合而得到进展，在这些结合中，机会起着不小的作用，科学的生命是无原由的、没有计划的(盲目的)，就像交错生长的矿物一样．"在数学中，正像在所有的科学中一样，每个时代都会以某种方式提出当时存在的若干问题，其中有一些迫切的问题，它们把最聪慧的学者吸引在一起，这既不以任何个人的思想和意识为转移，也不受任何协议的支配．伽罗瓦向往着科学家之间的真诚合作，认为科学家不应比其余的人孤独，他们也属于特定时代，迟早要协同合作的．

伽罗瓦的奠基性工作及其思想中孕育的开创精神，并未得到他同时代人的充分赏识和理解，其原因不是人为的偏见，而是当时人们认识上的不足．直到伽罗瓦去世 14 年后的 1846 年，刘维尔编辑出版了他的部分文章；1866 年，J．A．塞雷特(Serret)出版的《高等代数教程》(第三版)(Cours d'algébre superieure)，澄清了伽罗瓦关于代数方程可解性理论的思想，建立了置换理论；1870 年，C．若尔当(Jordan)出版的《置换和代数方程专论》(Traitédes substitutions et des équations algébriques)，全面介绍了伽罗瓦的理论．从此，群论和伽罗瓦的全部工作才真正被归入数学的主流．伽岁瓦的理论导致了抽象代数学的兴起．