第7.2节 估计量的评价标准

一、问题的提出

二、无偏估计

三、有效估计

四、相合估计

五、小结

估计量的评选标准

- 由于对同一参数用不同的方法进行估计可能会得到不同的估计量，因此需要对估计量的好坏进行评选。

- 常用评选标准：
  - 无偏性；
  - 有效性；
  - 一致性\相合性。

- 估计量可以看作在未知参数 θ 附近摆动的随机变量，且摆动角度越小越好。（无偏性与有效性的实质）

一、无偏性

定义：若 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量，且它的数学期望存在，若 $E\hat{\theta}=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量.

- 直观意义：若相互独立的重复多次用无偏估计量做实际估计，则所得各估计量的算术平均值与未知参数的真值基本一致，只有随机误差而无系统误差。

- 例1.设$X_1,\cdots,X_n$为取自总体X的简单随机样本，则样本均值$\overline{X}$为总体均值的无偏估计，样本二阶中心矩$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$则不是总体方差$\sigma^2$的无偏估计。

当n非常大时，$\frac{n-1}{n}D(X)\approx D(X)$，则$\widehat{\sigma^2}$可以近似的作为$D(X)$的无偏估计。

当n不是很大时（即小样本），由上面推导可知

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{n-1}{n}D(X),$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=D(X).$$

即样本方差$S^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$才是$D(X)$的无偏估计。

因此一般总取S^2为σ^2的估计量。

例 2 设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k=E(X^k)(k\geq 0)$ 存在，又设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是 X 的一个样本，试证明不论总体服从什么分布，k 阶样本矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计量.

证 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 与 X 同分布，故有

$$E(X_i^k)=E(X^k)=\mu_k,\ i=1,2,\cdots,n.$$

即有

$$E(A_k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X^k)=\mu_k.$$

例4 设总体 X 服从参数为 $1/\theta$ 的指数分布, 概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$, 其中参数 $\theta>0$, 又设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，试证 $\overline{X}$ 和 $nZ=n[\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)]$ 都是 θ 的无偏估计.

证 因为 $\boldsymbol{E(\overline{X})=E(X)=\theta}$,

所以 $\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

而 $X_{(1)}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从参数为 $\dfrac{n}{\theta}$ 的指数分布,

概率密度 $f_{\min}(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}e^{-\frac{nx}{\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

故知 $E(X_{(1)})=\dfrac{\theta}{n}$, $E(nX_{(1)})=\theta$,

所以 $nX_{(1)}$ 也是 θ 的无偏估计量.

由以上两例可知,同一个参数可以有不同的无偏估计量.

二、有效性

- 若 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$都是$\theta$的无偏估计量；若$\mathrm{D}(\hat{\theta}_1)<\mathrm{D}(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效。

- 直观意义：$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$的均值都是$\theta$若$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效，则$\hat{\theta}_1$的分布较尖，$\hat{\theta}_2$较平坦。

例5.设$X_1,\cdots,X_n$为总体X的简单随机样本$(n>2)$，证明用样本均值估计$E(X)$，比单个子样X_i或者$\dfrac{X_1+X_2}{2}$估计$E(X)$更有效。

解：$E(\overline{X})=E(X),E(X_i)=E(X)$,

$$E\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)=\frac{1}{2}[E(X_1)+E(X_2)]=E(X),$$

因此$\overline{X}$、X_i、$\dfrac{X_1+X_2}{2}$均为无偏估计。

而$D(\overline{X})=\dfrac{D(X)}{n}, D(X_i)=D(X)$,

$$D\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)=\frac{1}{4}[D(X_1)+D(X_2)]=\frac{1}{2}D(X),$$

因此$D(\overline{X})<D\left(\dfrac{X_1+X_2}{2}\right)<D(X_i)$.

所以用$\overline{X}$比X_i、$\dfrac{X_1+X_2}{2}$更有效。

例6(续例4) 试证当$n>1$时, θ的无偏估计量

$\bar{X}$较θ的无偏估计量nZ有效.

- 证 由于$D(X)=\theta^2$, 故有

$$D(\bar{X})=\frac{\theta^2}{n}.$$

再者,由于$D(Z)=\dfrac{\theta^2}{n^2}$,故有$D(nZ)=\theta^2$,当

$n>1$时$D(nZ)>D(\bar{X})$,故$\bar{X}$较nZ有效.

三、一致性\相合性

- 若$\hat{\theta}=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，当

$n \longrightarrow \infty$时，若$\hat{\theta}$依概率收敛于θ，则称$\hat{\theta}$是θ的一致估计量。

- 如果当$n \to \infty$时，$\hat{\theta}$依概率收敛于θ，即任给$\varepsilon \succ 0$，

$\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|\hat{\theta}-\theta\right| \prec \varepsilon)=1$，则称$\hat{\theta}$为参数$\theta$的一致估计。

- 如样本均值和样本方差分别是总体期望和方差的一致估计量。

- 从统计方法要求看：
  - 一致性/相合性是对于极限性质而言的，它只在样本容量较大时才起作用；
  - 无偏性在直观上更合理，但并不是每一个参数都有无偏估计量；
  - 有效性无论在直观还是理论上都比较合理，用得最多。