回顾

第三章 线性方程组$Ax = b$的数值解法

§3.4.2 Jacobi（雅可比）迭代法 回顾

设方程组 $Ax=b; A=(a_{ij})_{n\times n}, b=(b_i)_{1\times n}; \det(A)\neq 0$

将系数矩阵分裂为： $A=D-L-U$

其中 $D=diag(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})$

$$-L=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad -U=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \cdots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

如果 $a_{ii} \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$ 原方程组可化为

$$x = D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b \boxed{= Bx + f}$$

其中 $B = D^{-1}(L+U) = (I - D^{-1}A);\ f = D^{-1}b$

相应的迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f;\ k = 0,1,2,\cdots$

上述方法称为Jacobi迭代法，简称J法或简单迭代法

回顾

分量形式：

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}};\ i = 1,2,\cdots,n}$$

§3.4.3 Gauss-Seidel（高斯-赛德尔）迭代法

在Jacobi迭代公式中，计算$x_i^{(k+1)}$时，利用已经算出来的新的$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 值，从而得到Gauss-Seidel迭代法。

Gauss-Seidel迭代法是Jacobi迭代法的一种改进

回顾

➢ G-S迭代法的分量形式：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}; i = 1, 2, \cdots, n$$

第四章 插值法

4.1 引言

4.2 多项式插值

4.3 拉格朗日插值

4.4 牛顿插值

4.5 埃尔米特插值

4.6 分段插值

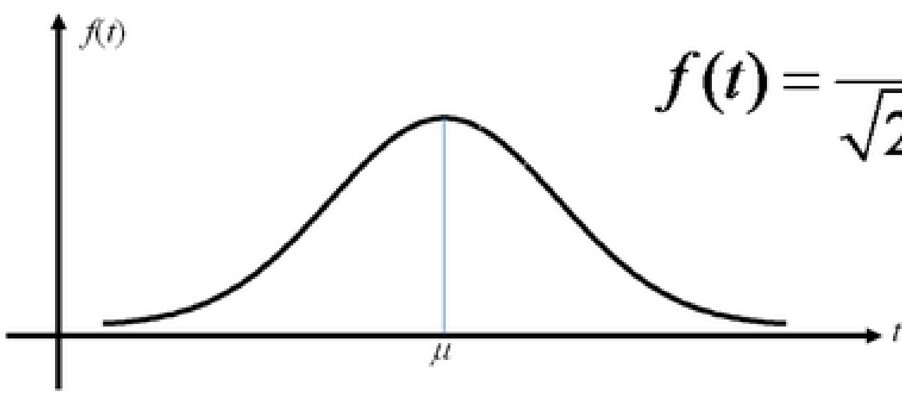
4.7 三次样条插值(课本在第五章)

4.1 引言

在生产和科研中出现的函数是多种多样的。常遇到这样的情况:

- 函数表达式过于复杂不便于计算, 而又需要计算许多点处的函数值
- 仅有几个采样点处的函数值（即函数表），而又需要知道非采样点处的函数值

正态分布的概率密度函数$f(t)$和分布函数$F(x)$



$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

4.1 引言

重要

✓ 上述问题的一种解决思路：

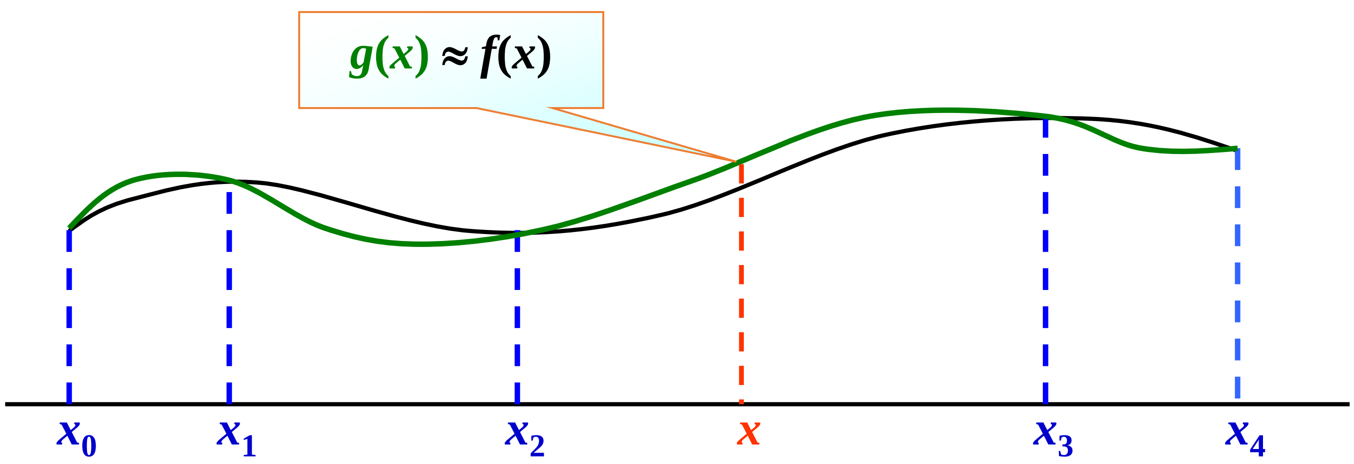
允许有一定误差的基础上，建立复杂函数或者未知函数的一个便于计算的近似解析函数表达式，从而使问题得到简化，这也是开发计算机软件是使用的技术之一。

✓ 解决方法—插值法：

即利用邻近点上已知函数值的加权平均来估计位置函数值。

插值问题定义

- 当函数 $y=f(x)$ 非常复杂或未知时，在一系列节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处测得函数值 $y_0=f(x_0), \cdots, y_n=f(x_n)$，由此构造一个简单易算的近似函数 $g(x)\approx f(x)$，满足条件 $g(x_i)=f(x_i)$ $(i=0,\cdots n)$。称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数。



插值法背景介绍

插值法是一种古老的数学方法，它来自生产实践。早在一千多年前的隋唐时期制定历法时就应用了二次插值，隋朝刘焯（公元6世纪）将等距节点二次插值应用于天文计算。但插值理论都是在17世纪微积分产生以后才逐步发展的，牛顿的等距节点差值公式及均差插值公式都是当时的重要成果。近半世纪，由于计算机的广泛使用和造船、航空、精密机械加工等实际问题的需要，使得插值法在理论上和实践上得到了进一步的发展，尤其是20世纪40年代后期发展起来的样条（Spline）插值，更获得了广泛应用，成为计算机图形学的基础。

插值基函数 重要

- 令 $P_n(x)$={次数不超过 n 的多项式的全体}，则$P_n(x)$构成一个 $n+1$ 维线性空间，设其一组基为

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$$

则插值多项式 $p_n(x)$可以被这组基线性表出，即：

$$p_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

这样就可以通过不同的基来构造插值多项式 $p_n(x)$项，这样的方法称为基函数法。

令 $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_1\}$，则对于不同的函数族Φ的选择，得到不同的插值问题，所求得的逼近效果就不同。

- 当Φ为三角函数的多项式集合时:三角插值;
- 当Φ为有理分式集合时：有理插值;
- 当Φ为多项式集合时：多项式插值（代数插值）

重要

- 基函数法基本步骤：

1) 寻找特殊的基函数组（插值基函数）

2) 确定插值多项式在这组基下的表示系数。

4.2 多项式插值

需指出的是，计算机软件中经常要用到的库函数，如sin(x), cos(x)和指数函数，他们都是用多项式逼近来计算的。虽然目前最先进的逼近方法是有理函数逼近，但多项式逼近理论更适于作为数值计算的入门课程，因此本章讨论多项式逼近。

Taylor级数回顾

定理 4.1(泰勒多项式逼近) 设 $f \in C^{N+1}[a,b]$，而 $x_0 \in [a,b]$ 是固定值。如果 $x \in [a,b]$，则有

$$f(x) = P_N(x) + E_N(x) \tag{1}$$

其中 $P_N(x)$ 为用来近似 $f(x)$ 的多项式：

$$f(x) \approx P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{2}$$

误差项 $E_N(x)$ 形如

$$E_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}$$

c 为 x 和 x_0 之间的某个值 $c = c(x)$。

4.2 多项式插值

表 4.1 一些常用函数的泰勒级数展开

$\sin(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots$	对所有 x
$\cos(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots$	对所有 x
$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots$	对所有 x
$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots$	$-1\leqslant x\leqslant 1$
$\arctan(x)=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots$	$-1\leqslant x\leqslant 1$
$(1+x)^p=1+px+\dfrac{p(p-1)}{2!}x^2+\dfrac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3+\cdots$	其中 $\lvert x\rvert<1$

4.2 多项式插值

非常
重要

取 $\Phi = P_n := \operatorname{span}\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$，即

$$P_n = \{\varphi(x) | \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,\ a_i \in \mathbf{R},\ 0 \le i \le n\}$$

插值区间　插值节点

定义4.1　设 $y = f(x)$ 在区间[a,b]上有定义，且已知它在 $n+1$ 个互异点 $a \le x_0 < x_1 \ldots < x_n \le b$ 上的函数值 y_0, $y_1, \ldots, y_n$，若存在一个次数不超过 n 次的多项式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

满足条件　插值条件

$$p(x_i) = y_i \quad (i = 0, \ldots n)$$

则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次插值多项式。

插值多项式的唯一性

设所要构造的插值多项式为：

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

由插值条件

$$P_n(x_i) = y_i, \qquad i = 0,\ 1, \cdots, n$$

得到如下线性代数方程组：

$$\begin{cases} 1 \cdot a_0 + x_0 a_1 + \cdots + x_0^n a_n = y_0 \\ 1 \cdot a_0 + x_1 a_1 + \cdots + x_1^n a_n = y_1 \\ \cdots\cdots \\ 1 \cdot a_0 + x_n a_1 + \cdots + x_n^n a_n = y_n \end{cases}$$

存在唯一性定理证明（续）

此方程组的系数行列式为

- $$D=\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots\cdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

范德蒙行列式 ！

当 $x_i \neq x_j \quad i=1,2,\cdots n;\ \ j=1,2,\cdots n$ 时，

$\boldsymbol{D \neq 0}$， 因此，$P_n(x)$ 由 a_0，a_1, …, a_n 唯一确定。

插值多项式的唯一性

重要

定理 4.2 (**唯一性**) 满足$n+1$个插值条件的n 次插值多项式存在且唯一。

注：该定理的证明过程实质上给出了一种求插值多项式的一个方法，

但此方法不适合计算机求解。我们要寻找用计算机的求解方法。

4.3 拉格朗日（Lagrange）插值

定义4.2 若存在一个次数为 n 的多项式 $l_k(x)$，在n+1个节点 $x_0, \ldots, x_n$ 上满足：

$$l_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

则称 $l_k(x)$ 为节点 $x_0, \ldots, x_n$ 上的拉格朗日插值基函数。

非常重要

- 设 $f(x)$ 的 n 次插值多项式为

$$p(x) = a_0 l_0(x) + a_1 l_1(x) + \cdots + a_n l_n(x)$$

满足插值条件： $p(x_i) = y_i \ (i = 0, \ldots n)$

将 $x_0, \ldots, x_n$ 分别代入即可得： $a_i = y_i \ (i = 0, \ldots n)$

所以 $p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x)$

称为拉格朗日插值多项式，记作 $L_n(x)$，即

下面我们介绍如何构造 $l_k(x), k=0,1,2,\cdots,n.$

根据点斜式，过点(x_0,y_0)和(x_1,y_1)的方程可写为

$$y = y_0 + \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0),$$

变形可得：

$$y = y_0\underbrace{\frac{x-x_1}{x_0-x_1}}_{l_0} + y_1\underbrace{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}_{l_1}.$$

非常重要

- 由构造法可得

与节点有关，但与f(x)无关.

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$k=0,1,2,\ldots,n$$

- 可以证明 $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ 线性无关，即它们构成线性空间 $P_n(x)$ 的一组基。

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

为便于上机计算

非常重要

- 当 $n=1$ 时

$$L_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

线性插值多项式（一次插值多项式）

- 当 $n=2$ 时

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

抛物(线)插值多项式（二次插值多项式）

❑ 例4.1：已知函数 $y=\ln x$ 的函数值如下

x	10	11	12	13	14
$\ln x$	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649	2.6391

试分别用线性插值和抛物插值计算 ln11.75的近似值。

解：在插值计算中，为了减小截断误差，通常选取与插值点 x 邻接的插值节点。

线性插值：取 $x_0=11$, $x_1=12$ 得

$$L_1(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}y_0+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}y_1=0.087x+1.4409$$

将 $x=11.75$ 代入可得：$\ln 11.75 \approx L_1(11.75) \approx 2.4632$

抛物插值：

$$L2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

取 $x_0=11, x_1=12, x_2=13$ 。将 $x=11.75$ 代入可得：

$$\ln 11.75 \approx L_2(11.75) \approx 2.4638$$

可以计算出 ln11.75 的近似值为：

$$\boxed{\ln 11.75 \approx 2.4638532405902}$$

可见，抛物插值的精度比线性插值要高。

Lagrange插值多项式简单方便，只要取定节点就可写出基函数,进而得到插值多项式。易于计算机实现。

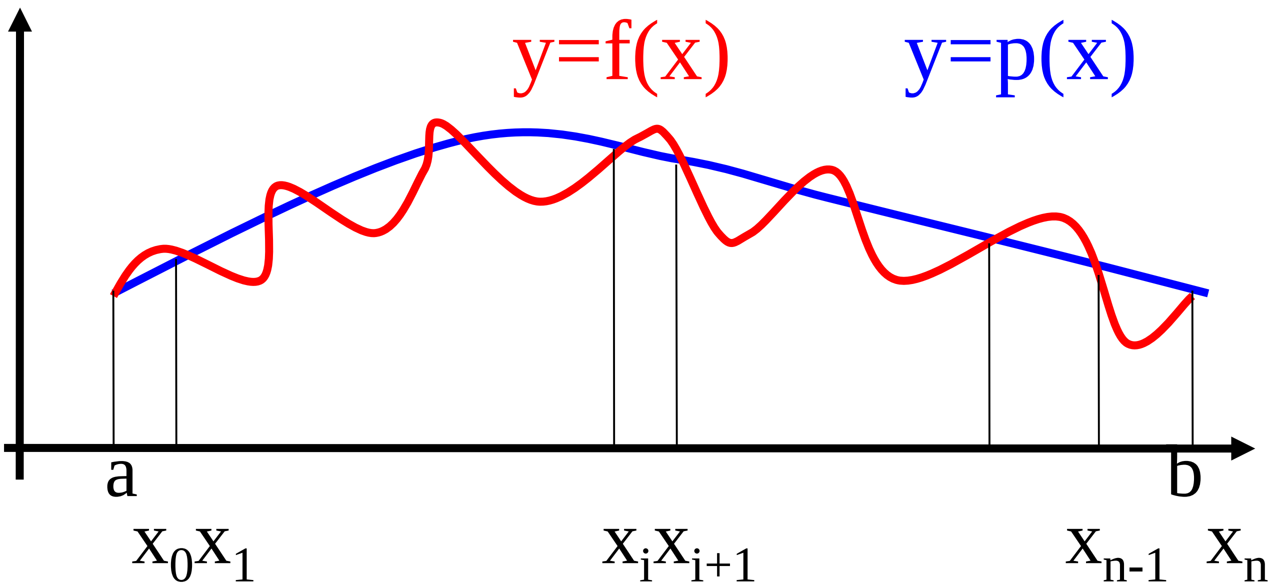
拉格朗日插值的误差分析

在插值区间[a, b]上通过n+1个节点的n次插值多项式，除了在插值节点x_i上没有误差，即满足

$$P(x_i)=y_i \qquad i=0, 1, \cdots n$$

在其它点上，只是y=f(x)的近似值，一般是存在误差的，称

$R(x)=f(x)-P(x)$



为插值多项式的截断误差，或称为插值多项式的余项。

定理 2 (误差估计)　设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在. $\varphi(x)$ 是满足插值条件(1)的不超过 n 次的插值多项式. 则对任意 $x\in[a,b]$，存在 $\xi=\xi(x)\in(a,b)$，使得

$$R_n(x)=f(x)-\varphi(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

成立，式中 $\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

进而当 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ 在区间 (a,b) 有上界 M_{n+1} 时，有

$$|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|.$$

证明:

证明：因为 $R_n(x_i)=f(x_i)-L_n(x_i)=0 \quad (i=0,1,\cdots,n)$

于是可假定$R_n(x)$具有如下形式：

$$R_n(x)=k(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=k(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

仅供了解

作辅助函数

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-k(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

$$=f(t)-L_n(t)-k(x)\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$$

容易看出，$\varphi(t)$有$x,x_0,x_1,\cdots,x_n$共 n+2个相异零点，且在[a, b]上存在n+1阶导数。根据Rolle'Principle，在$\varphi(t)$的两个零点之间至少有一个零点，故$\varphi(t)$在[a, b]上至少有n+1个零点。如此类推，$\varphi^{(n+1)}(t)$在(a, b)上至少有1个零点ξ，使得

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-L_n^{(n+1)}(\xi)-k(x)\frac{d^{(n+1)}}{dt^{(n+1)}}\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)|_{t=\xi}=0.$$

注意到 L_n是n次多项式，$L_n^{(n+1)}(t)\equiv 0$ ；$\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$的首项为 t^n，故 $\dfrac{d^{(n+1)}}{dt^{(n+1)}}\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)=(n+1)!$。 由上述方程解得

$$k(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\quad \xi\in(a,b)$$

于是

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

注1： 如果 $f^{(n+1)}(x)$在(a, b)上有界，即

$$\exists M>0,\quad \left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M,\forall x\in(a,b)$$

则有余项估计：

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

注2： 当$f(x)$为任一个次数$\le n$的多项式时， 由$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$，可知$R_n(x)\equiv 0$， 因此， 插值多项式$L_n(x)$对于次数$\le n$的多项式的估计是精确的。

拉格朗日插值的误差分析

对于线性插值，其误差为

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1) \quad \xi \in (a, b)$$

对于抛物插值（二次插值），其误差为

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - P(x) \\ &= \frac{1}{6} f'''(\xi)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \quad \xi \in (a, b) \end{aligned}$$

例4.2 已知x_0=100，x_1=121，用线性插值估计

$f(x)=\sqrt{x}$ 在x=115时的截断误差。

解 由插值余项公式，有 $R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega(x)$

因为 $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ **所以** $R_1(x)=-\frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(x-x_0)(x-x_1)$

$$
\begin{aligned}
R_1(115)&=-\frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(115-100)(115-121)\\
&\le\frac{1}{8}\times|(115-100)(115-121)|\times\max_{\xi\in[100,121]}\xi^{-\frac{3}{2}}\\
&\le\frac{1}{8}\times10^{-3}\times|(115-100)(115-121)|\\
&=\frac{1}{8}\times15\times6\times10^{-3}\\
&=0.01125
\end{aligned}
$$

拉格朗日插值的算法实现

1.计算步骤

(1)输入**n, xi, yi (i=0,1,…,n)**，给出初始值**P(x)=0**

(2)对**i=0,1,…,n**，计算

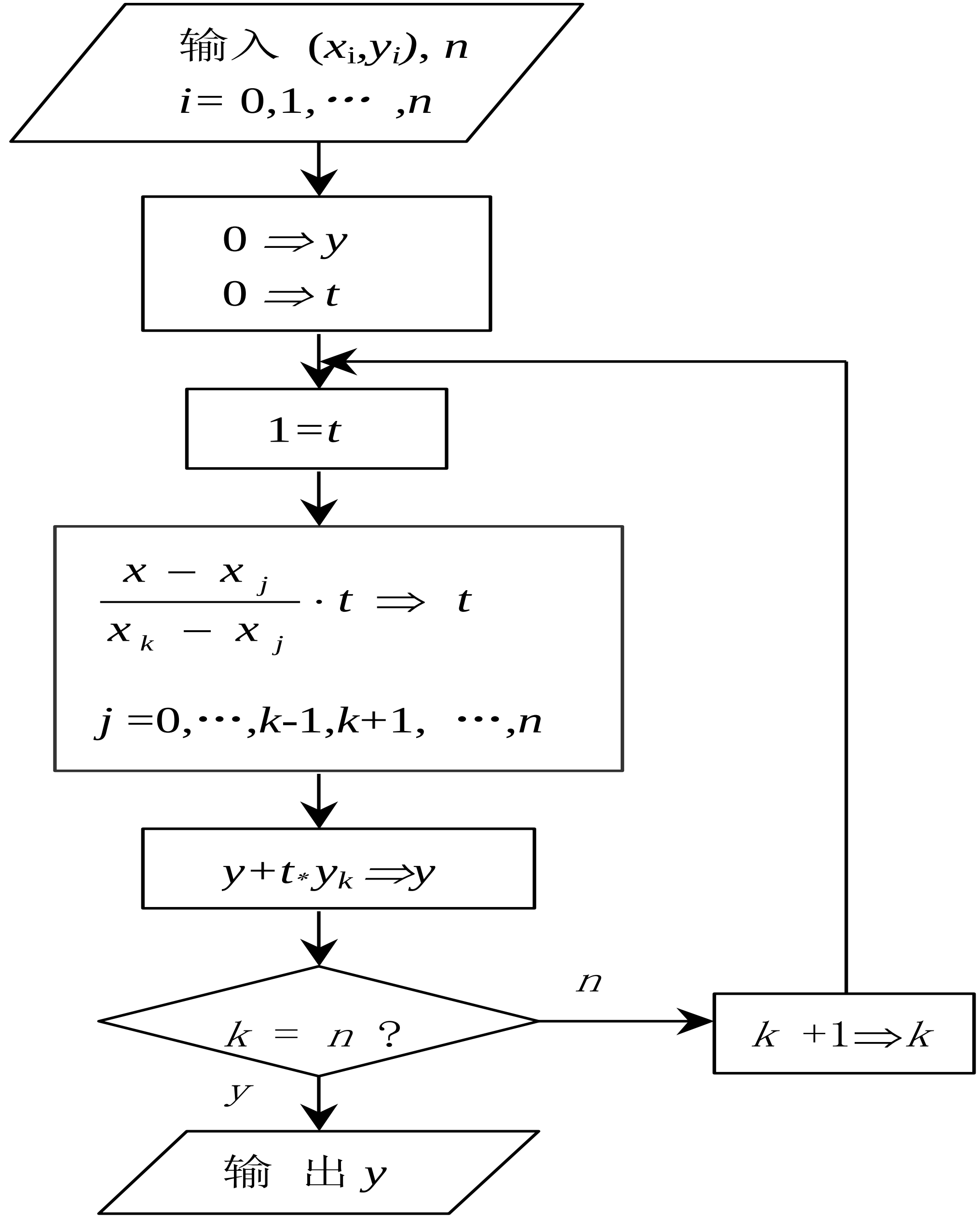
$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$P(x) = P(x) + l_i(x) y_i$$

(3)输出P(x)。

拉格朗日插值的算法实现

2. 算法流程图

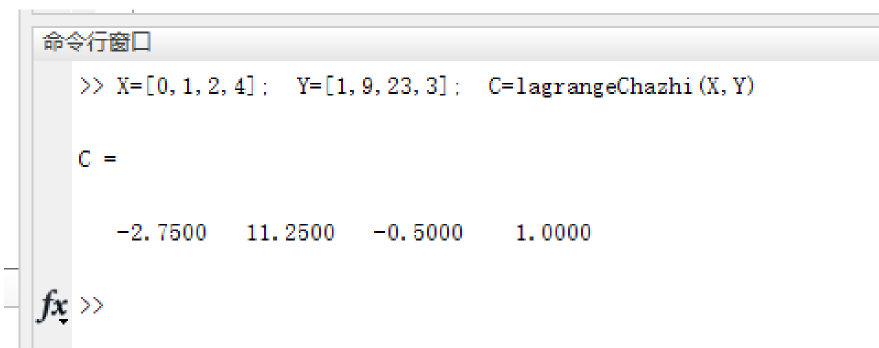


3. 程序实现

lagrangeChazhi.m

```
function C=lagrangeChazhi(X,Y)

%Input    - X is a vector that contains a list of abscissas
%           - Y is a vector that contains a list of ordinates
%Output - C is a matrix that contains the coefficents of
%             the Lagrange interpolatory polynomial
% - L is a matrix that contains the Lagrange coefficient polynomials
% X=[0,1,2,4];  Y=[1,9,23,3];  C=lagrangeChazhi(X,Y)
w=length(X);
n=w-1;
L=zeros(w,w);
%Form the Lagrange coefficient polynomials
for k=1:n+1
  V=1;
  for j=1:n+1
    if k~=j
      V=conv(V,poly(X(j)))/(X(k)-X(j));
    end
  end
  L(k,:)=V;
End
%Determine the coefficients of the Lagrange interpolator polynomial
C=Y*L;
```



作业 4.1

5. 写出 $f(x)$的 3 次拉格朗日插值多项式的误差项 $E_3(x)$，在节点 $x_0=-1, x_1=0, x_2=3$ 和 $x_4=4$处插值结果精确。$f(x)$为

(a) $f(x)=4x^3-3x+2$

(b) $f(x)=x^4-2x^3$

(c) $f(x)=x^5-5x^4$

2. 下表给出了 11 月 8 日美国洛杉矶的一个郊区在 5 小时内的测量温度。

(a) 利用程序 4.1，对表中的数据构造一个拉格朗日插值多项式。

(b) 利用算法 4.1(iii)，估计在这 5 小时内的平均温度。

(c) 在同一坐标系中画出表中的数据和由(a)得到的多项式。讨论用(a)中的多项式计算平均温度可能产生的误差。

时间(下午)	华氏度
1	66
2	66
3	65
4	64
5	63
6	63

课堂作业

已知$y=f(x)$的函数表

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	9	23	3

构造拉格朗日插值多项式。

注：用QQ软件自带的作业功能上交课程作业

作业上交需在下周一下午上课前完成