

离散数学课堂测验（抽象代数与图论）

说明：开卷，仅可查阅课堂讲义、课程笔记、教材；需要写出详细求解步骤，尽量展示你的工作，独立完成，不可讨论。

1. (25 分) 设代数结构 $V = \langle S; * \rangle$, $V' = \langle S'; *' \rangle$, ϕ 是从 V 到 V' 的满同态映射，在 S 上定义一个关系 ρ_ϕ ，使得当且仅当 $\phi(x) = \phi(y)$ 时 $x \rho_\phi y$ 。则 ρ_ϕ 是 V 上的同余关系，请证明： V/ρ_ϕ 与 V' 同构。

2. (25 分) 设 f, g 是从群 $\langle A; * \rangle$ 到群 $\langle B; \circ \rangle$ 的同态， $C = \{x \mid x \in A \text{ 且 } f(x) = g(x)\}$ ，请证明： $\langle C; * \rangle$ 是 $\langle A; * \rangle$ 的子群。

3. (25 分)请用数学归纳法证明: 若 (n,m) 图 G 是连通图且不存在环, 则 $m=n-1$.

4. (25 分)证明: 连通平面图至少有一个结点度数小于等于 5.