第8.1节　假设检验

一、假设检验的基本原理

二、假设检验的相关概念

三、假设检验的一般步骤

四、小结

一、假设检验的基本原理

在总体的分布函数完全未知或只知其形式、但不知其参数的情况下，为了推断总体的某些性质，提出某些关于总体的假设.

例如，提出总体服从泊松分布的假设；

又如，对于正态总体提出数学期望等于 μ_0 的假设等.

假设检验就是根据样本对所提出的假设作出判断：是接受，还是拒绝.

假设检验的基本概念

若对参数一无所知 → 用参数估计的方法处理

若对参数有所了解 → 但有怀疑猜测需要证实之时 → 用假设检验的方法来处理

假设检验问题是统计推断的另一类重要问题.

如何利用样本值对一个具体的假设进行检验?

通常借助于直观分析和理论分析相结合的做法,其基本原理就是人们在实际问题中经常采用的所谓小概率原理:“**一个小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的**”.

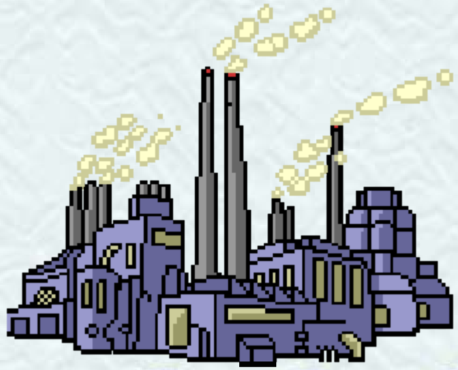
下面结合实例来说明假设检验的基本思想.

实例 某车间用一台包装机包装葡萄糖,包得的袋装糖重是一个随机变量,它服从正态分布.当机器正常时,其均值为0.5公斤,标准差为0.015公斤.某日开工后为检验包装机是否正常,随机地抽取它所包装的糖9袋,称得净重为(公斤):

0.497 0.506 0.518 0.524 0.498 0.511

0.520 0.515 0.512, 问机器是否正常?

分析: 用 μ 和 σ 分别表示这一天袋装糖重总体 X 的均值和标准差,



由长期实践可知, 标准差较稳定, 设 $\sigma = 0.015$,

则 $X \sim N(\mu,\ 0.015^2)$, 其中 μ 未知.

问题: 根据样本值判断 $\mu = 0.5$ 还是 $\mu \neq 0.5$.

提出两个对立假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 0.5$ 和 $H_1: \mu \neq \mu_0$.

再利用已知样本作出判断是接受假设 H_0(拒绝假设 H_1), 还是拒绝假设 H_0(接受假设 H_1).

如果作出的判断是接受 H_0, 则 $\mu = \mu_0$,

即认为机器工作是正常的, 否则, 认为是不正常的.

由于要检验的假设涉及总体均值, 故可借助于样本均值来判断.

因为 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计量,

所以若 H_0 为真, 则 $|\overline{x}-\mu_0|$ 不应太大,

当 H_0 为真时, $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

衡量 $|\overline{x}-\mu_0|$ 的大小可归结为衡量 $\dfrac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的大小,

于是可以选定一个适当的正数 k,

当观察值 $\bar{x}$ 满足 $\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k$时，拒绝假设$H_0$，

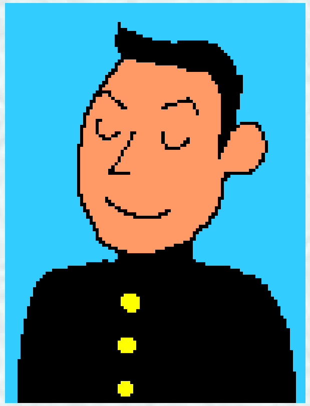
反之,当观察值 $\bar{x}$ 满足 $\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < k$时，接受假设$H_0$.

因为当H_0为真时$U = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

由标准正态分布分位点的定义得 $k = u_{\alpha/2}$,

当$\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq u_{\alpha/2}$时,拒绝$H_0$,$\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{\alpha/2}$时,接受$H_0$.

假设检验过程如下:



在实例中若取定 $\alpha = 0.05$,

则 $k = u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$,

又已知 $n = 9$, $\sigma = 0.015$,

由样本算得 $\bar{x} = 0.511$, 即有 $\dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} = 2.2 > 1.96$,

于是拒绝假设H_0, 认为包装机工作不正常.

以上所采取的检验法是符合小概率原理的.

由于通常 α 总是取得很小, 一般取 $\alpha = 0.01, \alpha = 0.05$,

因而当 H_0 为真, 即 $\mu = \mu_0$ 时, $\left\{ \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq u_{\alpha/2} \right\}$ 是一个小概率事件,

在假设检验中，数α 称为显著性水平.

二、假设检验的相关概念

1. 原假设与备择假设

假设检验问题通常叙述为：在显著性水平α下，

检验假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0.$

H_0称为原假设或零假设，H_1 称为备择假设.

2. 拒绝域与临界点

当检验统计量取某个区域 W_1 中的值时,我们拒绝原假设H_0,则称区域 W_1 为**拒绝域**, 拒绝域的边界点称为**临界点**.

如在前面实例中,

拒绝域为 $|u| \geq u_{\alpha/2}$,

临界点为$-u_{\alpha/2}$及$u_{\alpha/2}$.

3. 两类错误及记号

假设检验是根据样本的信息并依据小概率原理，作出接受还是拒绝H_0的判断。由于样本具有随机性，因而假设检验所作出的结论有可能是错误的. 这种错误有两类:

(1) 当原假设H_0为真, 观察值却落入拒绝域, 而作出了拒绝H_0的判断, 称做**第一类错误**, 又叫**弃真错误**. 犯第一类错误的概率是显著性水平α.

(2) 当原假设H_0不真, 而观察值却落入接受域, 而作出了接受H_0的判断, 称做**第二类错误**, 又叫**取伪错误**.

犯第二类错误的概率记为 β

$$\beta = P\{接受\ H_0 \mid H_0不真\} 或\ P_{\mu \in H_1}\{接受\ H_0\}.$$

当样本容量 n 一定时, 若减少犯第一类错误的概率, 则犯第二类错误的概率往往增大.

若要使犯两类错误的概率都减小, 除非增加样本容量.

两类错误

		总体情况	
		H_0 为真	H_0不为真
决策	H_0 落入拒绝域，拒绝	犯第一类错误	正确
	H_0 落入接受域，接受	正确	犯第二类错误

三、假设检验的一般步骤

1. 根据实际问题的要求，提出原假设 H_0 及备择假设 H_1；

2. 选择适当的检验统计量，在 H_0 成立的条件下，确定它的概率分布；

3. 给定显著性水平 α，确定拒绝域 W_1；

4. 根据样本观察值计算统计量的值；

5. 根据统计量值是否落入拒绝域 W_1 中，作出拒绝或者接受 H_0 的判断.

五、小结

假设检验的基本原理、相关概念和一般步骤.

假设检验的两类错误

真实情况 (未知)	所作决策	
	接受H_0	拒绝H_0
H_0为真	正确	犯第I类错误
H_0不真	犯第II类错误	正确