谓词逻辑

习题参考答案与提示

1. （1）设 W(x)：x 是工人；c：小张。原命题可符号化为：$\neg W(c)$。
（2）设S(x)：x是田径运动员；B(x)：x是球类运动员；h：他。原命题可符号化为：
$S(h)\vee B(h)$。
（3）设C(x)：x是聪明的；B(x)：x是美丽的；l：小莉。原命题可符号化为：
$C(l)\wedge B(l)$。
（4）设O(x)：x是奇数。原命题可符号化为：$O(m)\rightarrow\neg O(2m)$
（5）设P(x，y)：直线x平行于直线y；G(x，y)：直线x相交于直线y。原命题可符号化为：
$P(x,y)\leftrightarrow\neg G(x,y)$。
（6）设O(x)：x是老的；V(x)：x是健壮的；j：王教练。原命题可符号化为：
$\neg O(j)\wedge\neg V(j)$。
（7）设 L(x, y)：x 大于 y。原命题可符号化为：$L(5,4)\rightarrow L(4,6)$。

2. （1）存在自然数 x，对任意自然数 y 满足 xy=1；
a)0　b)0　c)0　d)0
（2）对每个自然数 x，存在自然数 y 满足 xy=1；
a)0　b)0　c)0　d)1
（3）对每个自然数 x，存在自然数 y 满足 xy=0；
a)1　b)1　c)0　d)0
（4）存在自然数 x，对任意自然数 y 满足 xy=1；
a)1　b)1　c)0　d)0
（5）对每个自然数 x，存在自然数 y 满足 xy=x；
a)1　b)1　c)1　d)1
（6）存在自然数 x，对任意自然数 y 满足 xy=x；
a)1　b)1　c)0　d)0
（7）对任意自然数 x,y，存在自然数 z 满足 x-y=z。
a)1　b)1　c)0　d)0

3. （1）$\neg\exists xL(x,0)$
（2）$\forall x\forall y\forall z((L(x,y)\wedge L(y,z))\rightarrow L(x,z))$
（3）$\forall x\forall y((L(x,y)\rightarrow\exists z(L(z,0)\wedge G(xz,yz)))$
（4）$\exists x\forall yM(x,y,y)$
（5）$\forall x\exists yA(x,y,x)$

4. $\exists!xP(x)$可用以下具有相同的意义的谓词公式表示
$$\exists x(P(x)\wedge\forall y(P(y)\rightarrow E(y,x)))$$
E(y,x)表示 y 等于 x

5. 设R(x)：x是兔子；T(x)：x是乌龟。F(x，y)：x比y跑得快；S(x，y)：x与y跑得同样快。

（1）$\forall x\forall y(R(x)\wedge T(y)\rightarrow F(x, y))$

（2）$\exists x(R(x)\wedge\forall y(T(y)\rightarrow F(x, y)))$

（3）$\neg\forall x\forall y(R(x)\wedge T(y)\rightarrow F(x, y))$

（4）$\neg\exists x\exists y(R(x)\wedge R(y)\wedge S(x, y))$

6.（1）设 M(x)：x 是数学家；A(x)：x 是天文学家；g：高斯，则原命题可表示为：
$M(g)\wedge\neg A(g)$

（2）设 O(x)：x 是奇数；E(x)：x 是偶数，则原命题可表示为：
$\neg\exists x(O(x)\wedge E(x))$

（3）设 P(x)：x 是质数；E(x)：x 是偶数，则原命题可表示为：
$\forall x(P(x)\wedge E(x)\leftrightarrow x=2)$

（4）设 C(x)：x 是猫；M(x)：x 是耗子；G(x)：x 是好的；K(x, y)：x 会捉 y，则原命题可表示为：
$\exists x(C(x)\wedge\forall y(M(y)\rightarrow\neg K(x,y))\wedge\forall x(C(x)\wedge\forall y(M(y)\rightarrow K(x,y))\rightarrow G(x))$

（5）设 G(x)：x 是金子；L(x)：x 是发亮的，则原命题可表示为：
$\neg\forall x(L(x)\rightarrow G(x))$

（6）设 M(x)：x 是男人；F(x)：x 是女人；H(x, y)：x 比 y 高，则原命题可表示为：
$\neg\forall x(M(x)\rightarrow\exists y(F(y)\wedge H(x,y)))\wedge\exists x(M(x)\wedge\forall y(F(y)\rightarrow H(x,y)))$

（7）设 M(x)：x 是人；B(x,y)：x 相信 y，则原命题可表示为：
$\forall x(M(x)\wedge\neg\exists y(M(y)\wedge x\neq y\wedge B(x,y))\rightarrow\neg\exists z(M(z)\ \wedge x\neq z\wedge B(z,x)))$

（8）设 C(x)：x 是星球；M(x)：x 是人；A(x)：x 是天文学家；e：地球；H(x,y)：x 有 y；S(x)：x 惊讶，则原命题可表示为：
$\exists x(C(x)\wedge x\neq e\wedge\exists y(M(y)\wedge H(x,y)))\rightarrow\forall x(A(x)\rightarrow\neg S(x))$

（9）设 Q(x,y)：x 指向 y；J(x,y)：x 奔向 y；p：党；w：我们，则原命题可表示为：
$\forall x(Q(p, x)\rightarrow J(w, x))$

（10）设 M(x)：x 是人；K(x)：x 游戏人生；L(x)：x 一事无成；H(x, y)：x 主宰 y；N(x)：x 是奴隶，则原命题可表示为：
$\forall x(M(x)\wedge K(x)\rightarrow L(x))\wedge\forall x(\neg H(x, x)\rightarrow N(x))$

7. 设N(x)：x是一个数；S(x, y)：y是x的后继数（即x是y的直接先行者，例如2的直接先行者是1）

（1）$\forall x(N(x)\rightarrow\exists! y(N(y)\wedge S(x, y)))$

（2）$\neg\exists x(N(x)\wedge S(x, 1))$

（3）$\forall x(N(x)\wedge\neg S(x, 2)\rightarrow\exists! y(N(y)\wedge S(y, x)))$

8.（1）5是质数。

（2）2是偶数且2是质数。

（3）所有能被2除尽的数必是偶数。

（4）存在6能被其除尽的偶数。

（5）不是偶数的数，必不能被2除尽。

（6）对所有x，若x是偶数，则对任意y，若y能被x除尽，则y也是偶数。

（7）对任意质数x，必存在偶数y，且y能被x除尽。

（8）对任意奇数，所有的质数均不能被它除尽。

9.（1）对正整数集个体域，$\forall x(x>0)$为真。

（2）对{5，6}，$\forall x(x=5\vee x=6)$为真。

（3）对整数集，$\forall x\exists y(x+y=3)$为真。

（4）使得$\exists y\forall x(x+y<0)$为真的整数集的尽可能大的子集不存在。

10. （1）量词$\forall x$ 的辖域是 $P(x)\vee Q(x)$，其中 x 为约束变元，$\forall x(P(x)\vee Q(x))\wedge R$ 是命题。
（2）量词$\forall x$ 的辖域是 $P(x)\wedge Q(x)$，其中 x 为约束变元。
量词$\exists x$ 的辖域是 $S(x)$，其中 x 为约束变元。
$T(x)$中 x 为自由变元。$\forall x(P(x)\wedge Q(x))\wedge\exists xS(x)\rightarrow T(x)$不是命题。
（3）量词$\forall x$ 的辖域是 $P(x)\rightarrow\exists y(B(x,y)\wedge Q(y))\vee T(y)$，其中 x 为约束变元，$T(y)$中 y 为自由变元。
量词$\exists x$ 的辖域是 $B(x,y)\wedge Q(y)$，其中 y 为约束变元。
$\forall x(P(x)\rightarrow\exists y(B(x,y)\wedge Q(y))\vee T(y))$不是命题。
（4）量词$\forall y$ 的辖域$\exists x(P(x)\wedge B(x,y))$，其中 y 为约束变元。
量词$\exists x$，辖域 $P(x)\wedge B(x,y)$，其中 x 为约束变元。
不在量词辖域中的 $P(x)$中的 x 为自由变元。
但 $P(x)\rightarrow(\forall y\exists x(P(x)\wedge B(x,y))\rightarrow P(x))$可以经过演算简化为：
$\exists y\forall x(\neg P(x)\vee\neg B(x,y))\vee 1$，即真值 1。
故 $P(x)\rightarrow(\forall y\exists x(P(x)\wedge B(x,y))\rightarrow P(x))$是命题。

11. （1）真　（2）假　（3）真　（4）真　（5）假　（6）真

12. （1）永真式　（2）永假式　（3）可满足式
（4）可满足式　（5）可满足式　（6）可满足式

13. （1）前束合取范式：$\exists x\forall y(A(x)\wedge\neg B(y))$
前束析取范式：$\exists x\forall y(A(x)\wedge\neg B(y))$
（2）前束合取范式：$\forall x\exists y(\neg A(x)\vee B(x,y))$
前束析取范式：$\forall x\exists y(\neg A(x)\vee B(x,y))$
（3）前束合取范式：$\forall x\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w((\neg A(x,y,z)\vee B(x,y,u))\wedge(\neg B(x,y,v)\vee A(x,y,w)))$
前束析取范式：$\forall x\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w((\neg A(x,y,z)\wedge\neg B(x,y,v))\vee(\neg A(x,y,z)\wedge A(x,y,w))\vee(B(x,y,u)\wedge\neg B(x,y,v))\vee(B(x,y,u)\wedge A(x,y,w)))$
（4）前束合取范式：$\exists x\exists y\forall z(A(x,y)\vee\neg B(z)\vee C(x))$
前束析取范式：$\exists x\exists y\forall z(A(x,y)\vee\neg B(z)\vee C(x))$
（5）前束合取范式：$\forall x\exists z\exists u((\neg P(x)\vee\neg Q(y)\vee R(z))\wedge(\neg P(x)\vee\neg Q(y)\vee\neg S(u)))$
前束析取范式：$\forall x\exists z\exists u(\neg P(x)\vee\neg Q(y)\vee(R(z)\wedge\neg S(u)))$
（6）前束合取范式：$\forall x\exists z\exists t((\neg P(x)\vee\neg R(x,t))\wedge(\neg Q(z,y)\vee\neg R(x,t)))$
前束析取范式：$\forall x\exists z\exists t((\neg P(x)\wedge\neg Q(z,y))\vee\neg R(x,t))$
（7）前束合取范式：$\forall x\exists t(P(t,y)\vee\neg Q(z)\vee R(x))$
前束析取范式：$\forall x\exists t(P(t,y)\vee\neg Q(z)\vee R(x))$

14. 先将上述推理形式化。设个体域为全总个体域。令 w：小王；F(x)：x 是一年级生；E(x)：x 是理科生；L(x)：x 是文科生；D(x, y)：x 是 y 的辅导员，则推理可以形式化为
$\forall x(F(x)\wedge\neg L(x)\rightarrow\exists yD(y,x))$，$F(w)$，$E(w)$，$\forall x(D(x,w)\rightarrow E(x))$，$\forall x(E(x)\rightarrow\neg L(x))$
$\Rightarrow\exists x\exists y(\neg L(x)\wedge D(x,y))$

证明：
（1）$\forall x(E(x)\rightarrow\neg L(x))$　　P

(2) $E(w)\rightarrow\neg L(w)$ US,(1)

(3) $E(w)$ P

(4) $\neg L(w)$ T,I,(2),(3)

(5) $F(w)$ P

(6) $F(w)\wedge\neg L(w)$ T,I,(4),(5)

(7) $\forall x(F(x)\wedge\neg L(x)\rightarrow\exists yD(y,x))$ P

(8) $F(w)\wedge\neg L(w)\rightarrow\exists yD(y, w)$ US,(7)

(9) $\exists yD(y, w)$ T,I,(6),(8)

(10) $D(e, w)$ ES,(9)

(11) $\forall x(D(x, w)\rightarrow E(x))$ P

(12) $D(e, w)\rightarrow E(e)$ US,(11)

(13) $E(e)$ T,I,(10),(12)

(14) $E(e)\rightarrow\neg L(e)$ US,(1)

(15) $\neg L(e)$ T,I,(13),(14)

(16) $\neg L(e)\wedge D(e, w)$ T,I,(10),(15)

(17) $\exists y(\neg L(e)\wedge D(e, y))$ EG,(16)

(18) $\exists x\exists y(\neg L(x)\wedge D(x, y))$ EG,(17)

因此，该推理是有效的。

15.（1）设个体域为全总个体域。

令 Q(x)：x 是有理数； R(x)：x 是实数；I(x)：x 是整数，则推理可以形式化为：

$\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$, $\exists x(Q(x)\wedge I(x))\Rightarrow\exists x(R(x)\wedge I(x))$

证明：1) $\exists x(Q(x)\wedge I(x))$ P

2) $Q(a)\wedge I(a)$ ES,(1)

3) $Q(a)$ T,I(2)

4) $I(a)$ T,I(2)

5) $\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$ P

6) $Q(a)\rightarrow R(a)$ US,(5)

7) $R(a)$ T,I,(3),(6)

8) $R(a)\wedge I(a)$ T,I,(4),(7)

9) $\exists x(R(x)\wedge I(x))$ EG,(8)

（2）设个体域为全总个体域。

令F(x)：x是无理数；Q(x)：x是有理数；H(x)：x能表示成分数，则推理可以形式化为：

$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$，$\forall x(Q(x)\rightarrow H(x))\Rightarrow\forall x(Q(x)\rightarrow\neg F(x))$

证明：1）$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$ P

2）$\forall x\neg(F(x)\wedge H(x))$ R,E,(1)

3）$\neg(F(y)\wedge H(y))$ US,(2)

4）$H(y)\rightarrow\neg F(y)$ R,E,(3)

5）$\forall x(Q(x)\rightarrow H(x))$ P

6）$Q(y)\rightarrow H(y)$ US,(5)

7）$Q(y)\rightarrow\neg F(y)$ T,I,(4),(6)

8）$\forall x(Q(x)\rightarrow\neg F(x))$ UG,(7)

（3）设个体域为全总个体域。

令 P(x)：x 是牛；Q(x)：x 有角；R(x)：x 是动物，则推理可以形式化为：

$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$，$\exists x(P(x)\wedge R(x))\Rightarrow\exists x(Q(x)\wedge R(x))$

证明：	1）$\exists x(P(x)\wedge R(x))$	P
	2）$P(a)\wedge R(a)$	ES,(1)
	3）$P(a)$	T,I,(2)
	4）$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
	5）$P(a)\rightarrow Q(a)$	US,(4)
	6）$Q(a)$	T,I,(3),(5)
	7）$R(a)$	T,I,(2)
	8）$Q(a)\wedge R(a)$	T,I,(6),(7)
	9）$\exists x(Q(x)\wedge R(x))$	EG,(8)

（4）设个体域为全总个体域。

令 B(x)：x 是鸟；M(x)：x 是猴子；F(x)：x 会飞，则推理可以形式化为：

$\forall x(B(x)\rightarrow F(x))$，$\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))\Rightarrow\forall x(M(x)\rightarrow\neg B(x))$

证明：	1）$\forall x(B(x)\rightarrow F(x))$	P
	2）$B(y)\rightarrow F(y)$	US,(1)
	3）$\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$	P
	4）$M(y)\rightarrow\neg F(y)$	US,(3)
	5）$\neg F(y)\rightarrow\neg B(y)$	R,E,(2)
	6）$M(y)\rightarrow\neg B(y)$	T,I,(4),(5)
	7）$\forall x(M(x)\rightarrow\neg B(x))$	UG,(6)

（5）设个体域为全总个体域。

令 M(x)：x 是人；C(x)：x 长期吸烟；K(x)：x 长期酗酒；J(x)：x 身体健康；P(x)：x 能参加体育比赛，则推理可以形式化为：

$\forall x((M(x)\wedge(C(x)\vee K(x)))\rightarrow\neg J(x))$，$\forall x((M(x)\wedge\neg J(x))\rightarrow\neg P(x))$，$\exists x(M(x)\wedge P(x))$
$\Rightarrow\exists x(M(x)\wedge\neg K(x))$

证明：	1）$\exists x(M(x)\wedge P(x))$	P
	2）$M(c)\wedge P(c)$	ES,(1)
	3）$\forall x((M(x)\wedge\neg J(x))\rightarrow\neg P(x))$	P
	4）$(M(c)\wedge\neg J(c))\rightarrow\neg P(c)$	US,(3)
	5）$P(c)$	T,I,(2)
	6）$\neg(M(c)\wedge\neg J(c))$	T,I,(4),(5)
	7）$\neg M(c)\vee J(c)$	R,E,(6)

8）$M(c)$ T, I, (2)

9）$J(c)$ T, I, (7), (8)

10）$\forall x((M(x)\wedge(C(x)\vee K(x)))\to\neg J(x))$ P

11）$(M(c)\wedge(C(c)\vee K(c)))\to\neg J(c)$ US, (10)

12）$\neg(M(c)\wedge(C(c)\vee K(c)))$ T, I, (9), (11)

13）$\neg M(c)\vee(\neg C(c)\wedge\neg K(c))$ R, E, (12)

14）$\neg C(c)\wedge\neg K(c)$ T, I, (8), (13)

15）$\neg K(c)$ T, I, (14)

16）$M(c)\wedge\neg K(c)$ T, I, (8), (15)

17）$\exists x(M(x)\wedge\neg K(x))$ EG, (16)

（6）设个体域为全总个体域。

令 $M(x)$：x 是人；$K(x)$：x 是科学工作者；$Q(x)$：x 勤奋；$T(x)$：x 聪明；$S(x)$：x 将获得成功；a：王大志，则推理可以形式化为：

$\forall x((M(x)\wedge K(x))\to Q(x))$，$\forall x((M(x)\wedge Q(x)\wedge T(x))\to S(x))$，$M(a)\wedge K(a)\wedge T(a)\Rightarrow S(a)$

证明：1）$M(a)\wedge K(a)\wedge T(a)$ P

2）$\forall x((M(x)\wedge K(x))\to Q(x))$ P

3）$(M(a)\wedge K(a))\to Q(a)$ US, (2)

4）$M(a)\wedge K(a)$ T, I, (1)

5）$Q(a)$ T, I, (2), (4)

6）$M(a)\wedge T(a)$ T, I, (1)

7）$M(a)\wedge Q(a)\wedge T(a)$ T, I, (5), (6)

8）$\forall x((M(x)\wedge Q(x)\wedge T(x))\to S(x))$ P

9）$(M(a)\wedge Q(a)\wedge T(a))\to S(a)$ US, (8)

10）$S(a)$ T, I, (7), (9)