2.3 连续型随机变量及其分布

一、概率密度的概念与性质

二、常见连续型随机变量的分布

三、小结

一、概率密度的概念与性质

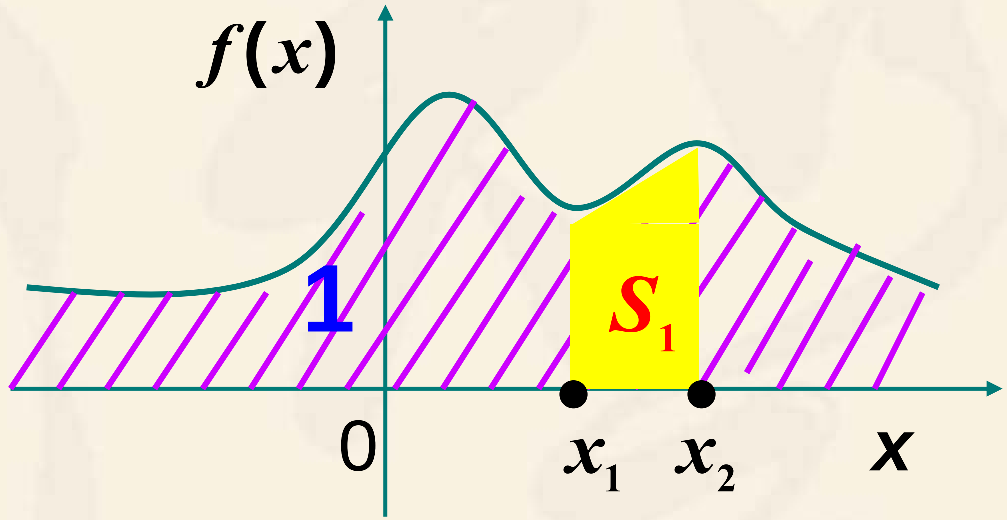
1.定义

设X为随机变量，$F(x)$为X 的分布函数,若存在非负函数$f(x)$,使对于任意实数 x 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则称 X 为连续型随机变量,其中 $f(x)$ 称为 X的概率密度函数,简称概率密度.

性质 (1) 对任意的x, $f(x)\geq 0$. (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1.$



(3) $P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

同时得以下计算公式

$$P\{X \le a\} = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$P\{X > a\} = 1 - P\{X \le a\} = 1 - F(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{-\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续,则有 $F'(x) = f(x)$.

注意 对于任意可能值 a ,连续型随机变量取 a 的概率等于零.即

$$P\{X=a\}=0.$$

证明 $P\{X=a\} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\int_a^{a+\Delta x} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0.$

由此可得

$$\boxed{P\{a\le X\le b\}} = P\{a<X\le b\} = P\{a\le X<b\}$$
$$= P\{a<X<b\}.$$

连续型随机变量的概率与区间的开闭无关

注意

设X为连续型随机变量，$X=a$ 是不可能事件,则有

$$P\{X=a\}=0.$$

若 $P\{X=a\}=0,$

则不能确定 $\{X=a\}$ 是不可能事件

连续型

若 X 为离散型随机变量,

$\{X=a\}$ 是不可能事件 $\Leftrightarrow P\{X=a\}=0.$

离散型

例1　设随机变量 X 具有概率密度

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} \boldsymbol{kx}, & 0\le \boldsymbol{x}<3, \\ 2-\dfrac{\boldsymbol{x}}{2}, & 3\le \boldsymbol{x}\le 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 k;　(2) 求 X 的分布函数;

(3) 求 $P\{1<X\le \dfrac{7}{2}\}$.

解　(1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x=1,$

得 $\int_0^3 kx\,\mathrm{d}x+\int_3^4\left(2-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=1$, 解之得 $k=\frac{1}{6}$.

(2) 由 $k=\frac{1}{6}$ 知 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6}, & 0\le x<3,\\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 得

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \int_0^x \frac{x}{6}\,\mathrm{d}\,x, & 0\le x<3, \\ \int_0^3 \frac{x}{6}\,\mathrm{d}\,x+\int_3^x (2-\frac{x}{2})\,\mathrm{d}\,x, & 3\le x<4, \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$$

即 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3,\\ -3+2x-\dfrac{x^2}{4}, & 3\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

(3) $P\{1<X\le \frac{7}{2}\}=F(\frac{7}{2})-F(1)=\frac{41}{48}.$

二、常见连续型随机变量的分布

1. 均匀分布

定义　设连续型随机变量 X 具有概率密度

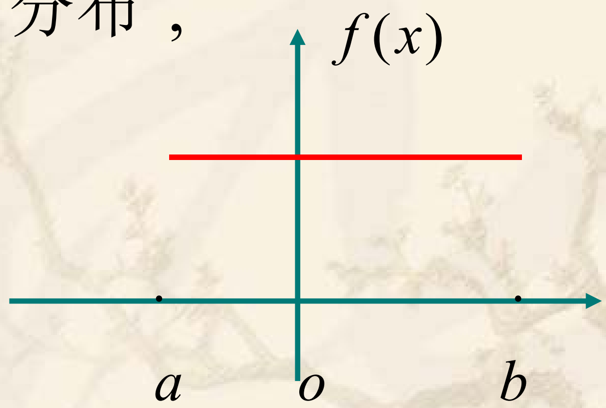
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 区间上服从均匀分布，

记为　$X\sim U(a,b)$.

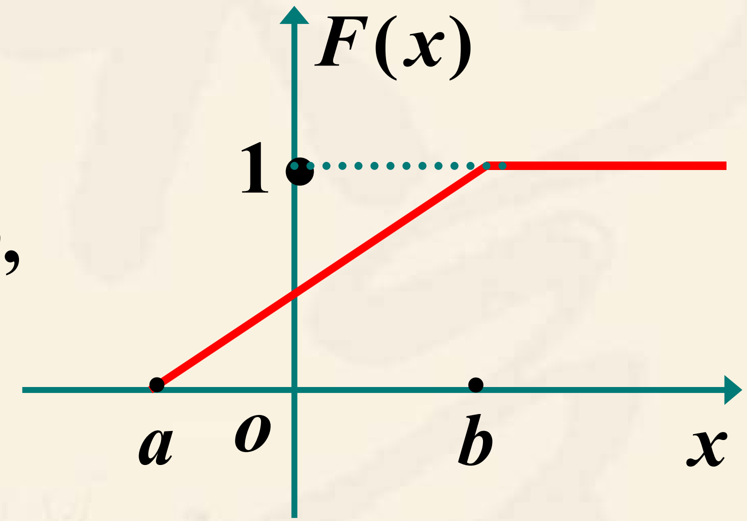
概率密度

函数图形



分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$



对$\forall x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2$有

$$P\{x_1<X<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\frac{x_2-x_1}{b-a}$$

即均匀分布随机变量落入(a,b)的任意子区间的概率与子区间的长度成正比，而与子区间位置无关。

均匀分布常见于下列情形：

如在数值计算中，由于四舍五入，小数点后某一位小数引入的误差；

公交线路上两辆公共汽车前后通过某汽车停车站的时间，即乘客的候车时间等.

例3 设随机变量 X 在 **[2, 5]**上服从均匀分布, 现对 X 进行三次独立观测 ,试求至少有两次观测值大于**3** 的概率.

解 X 的分布密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\le x\le 5,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

设 A 表示“对 X 的观测值大于 **3** 的次数”,

即 $A=\{X>3\}$.

由于 $P(A)=P\{X>3\}=\int_3^5 \frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$,

设Y表示3次独立观测中观测值大于3的次数,

则 $Y \sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$.

因而有

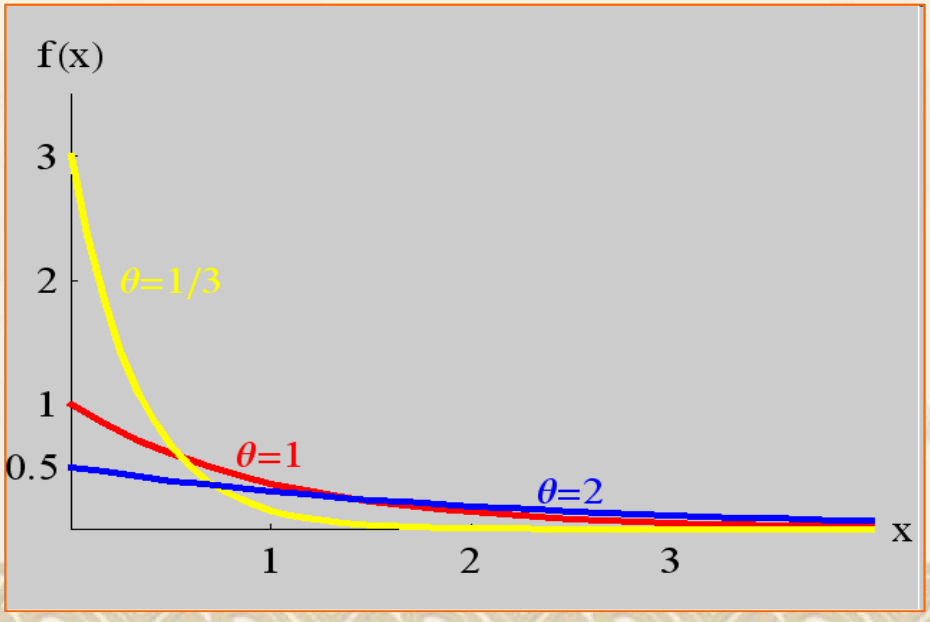
$$P\{Y\geq 2\}=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(1-\frac{2}{3}\right)^0=\frac{20}{27}.$$

2. 指数分布

定义　设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\quad\left(\text{或}f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\right)$$

其中 $\theta>0\left(\text{或}\lambda>0\right)$ 为常数,则称 X 服从参数为 $\theta\left(\text{或}\lambda\right)$ 的指数分布.



分布函数

$$F(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(\theta > 0)$$

应用与背景

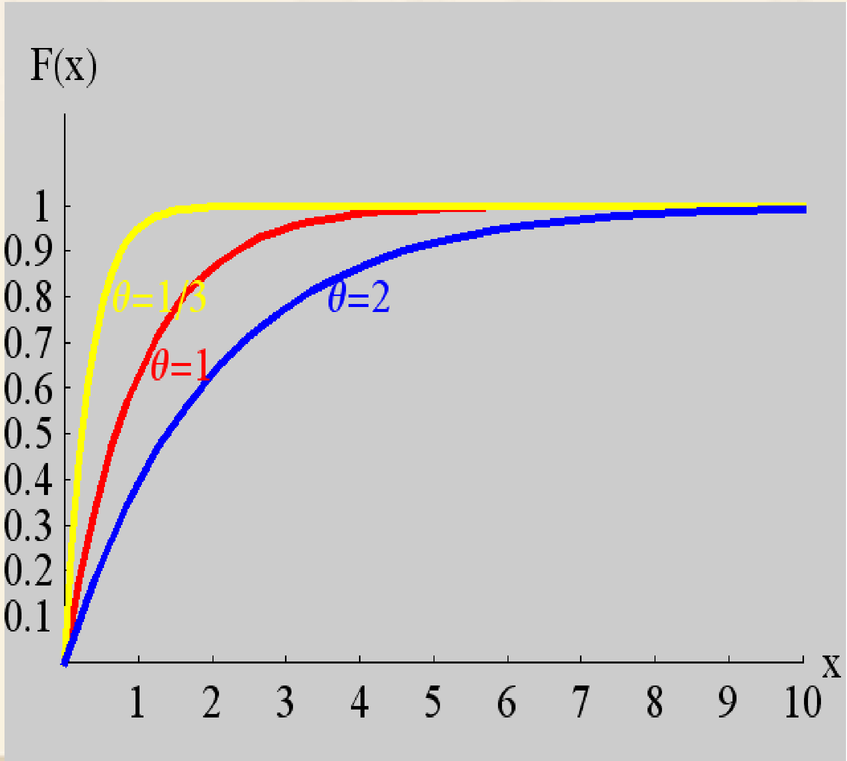
某些元件或设备的寿命服从指数分布.例如无线电元件的寿命，电力设备的寿命，动物的寿命等都服从指数分布.

性质：（1）$f(x) \geqslant 0$；（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 1$

（3）X的分布函数为

$$F(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(\theta > 0)$$



应用与背景

某些元件或设备的寿命服从指数分布.例如无线电元件的寿命，电力设备的寿命，动物的寿命等都服从指数分布.

4. 如X服从指数分布，则任给$s,t>0$，有

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\}$$

这一条性质称为无记忆性. 指数分布在可靠性理论和排队论中有广泛的运用.

例4 设某类日光灯管的使用寿命 *X* 服从参数为 **Θ=2000**（或**λ=1/2000**）的指数分布**(**单位**:**小时**)**

(1)任取一只这种灯管**,** 求能正常使用**1000**小时以上的概率**.**

(2) 有一只这种灯管已经正常使用了**1000** 小时以上**,**求还能使用**1000**小时以上的概率**.**

解 *X* 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{2000}x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

$$(1)\ P\{X > 1000\} = 1 - P\{X \le 1000\}$$

$$= 1 - F(1000)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607.$$

$$(2)\ P\{X > 2000 \mid X > 1000\}$$

$$= \frac{P\{X > 2000, X > 1000\}}{P\{X > 1000\}}$$

$$= \frac{P\{X > 2000\}}{P\{X > 1000\}}$$

$$= \frac{1 - P\{X \le 2000\}}{1 - P\{X \le 1000\}}$$

$$= \frac{1 - F(2000)}{1 - F(1000)}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607.$$

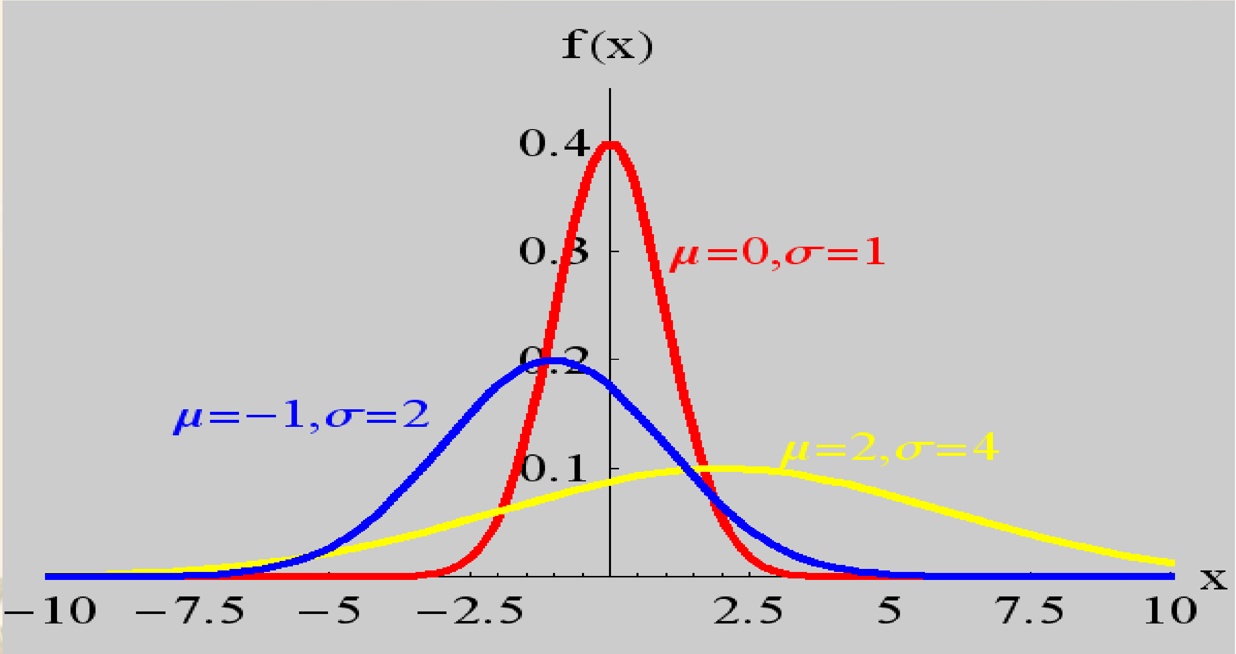
指数分布的重要性质 :“无记忆性”.

3. 正态分布(或高斯分布)

定义：若连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty,$$

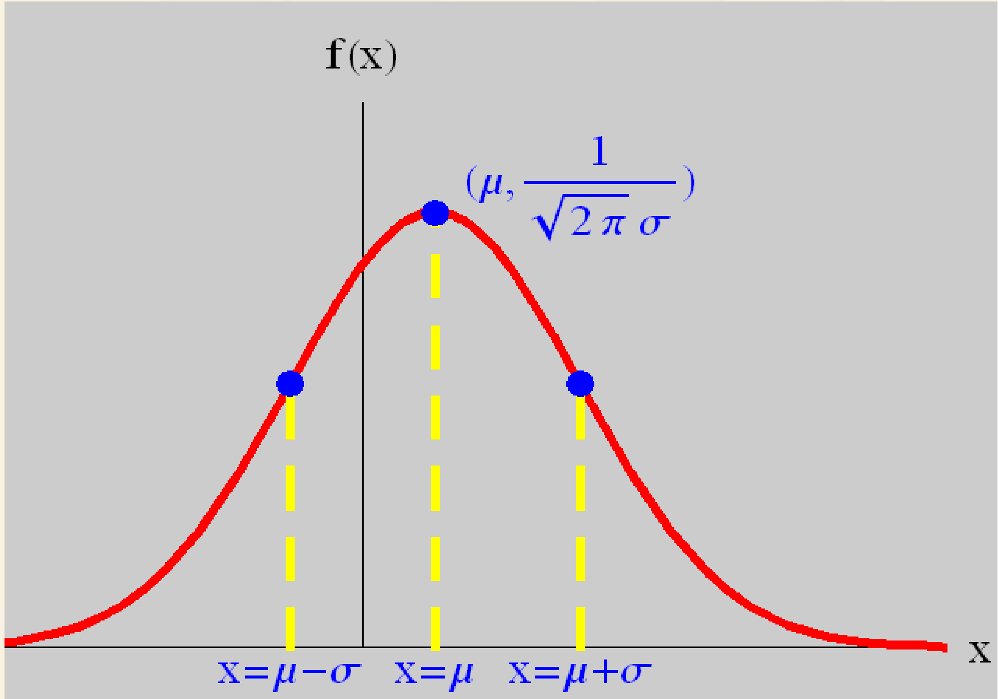
其中 μ 和 $\sigma(\sigma>0)$都是常数, 则称X服从参数为μ和σ的正态分布或高斯分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.



正态概率密度函数的几何特征

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$-\infty<x<\infty$$



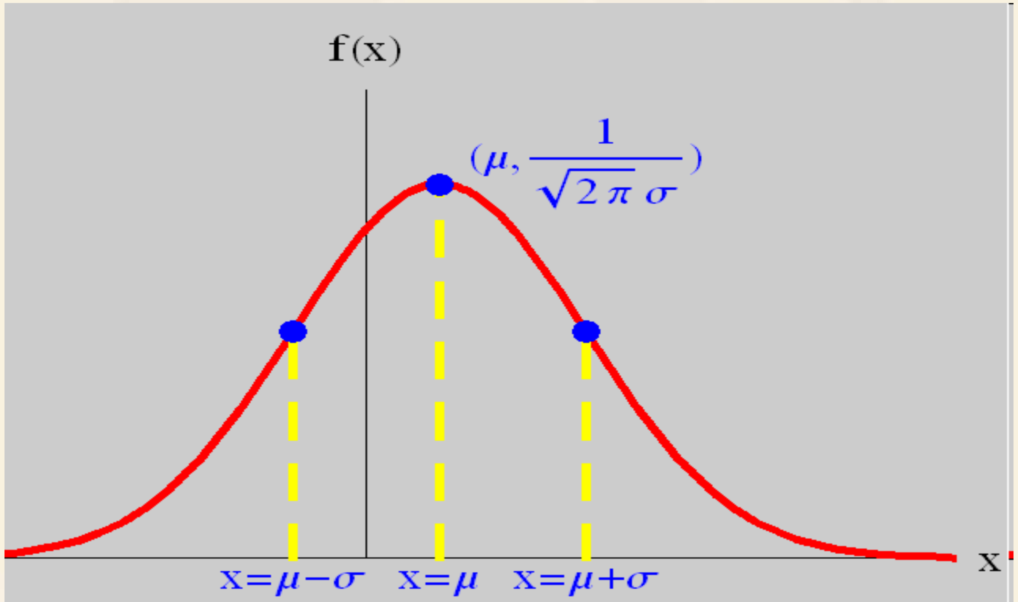
(1) 曲线关于 $\boldsymbol{x=\mu}$ 对称;

$$\Downarrow$$

$$P(\mu-h<X\leq\mu)=P(\mu<X\leq\mu+h)\quad(h>0)$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

(2) 当$x=\mu$时，$f(x)$取得最大值$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$，在$(-\infty,\mu]$上单调增加，在$[\mu,+\infty)$上单调减少.



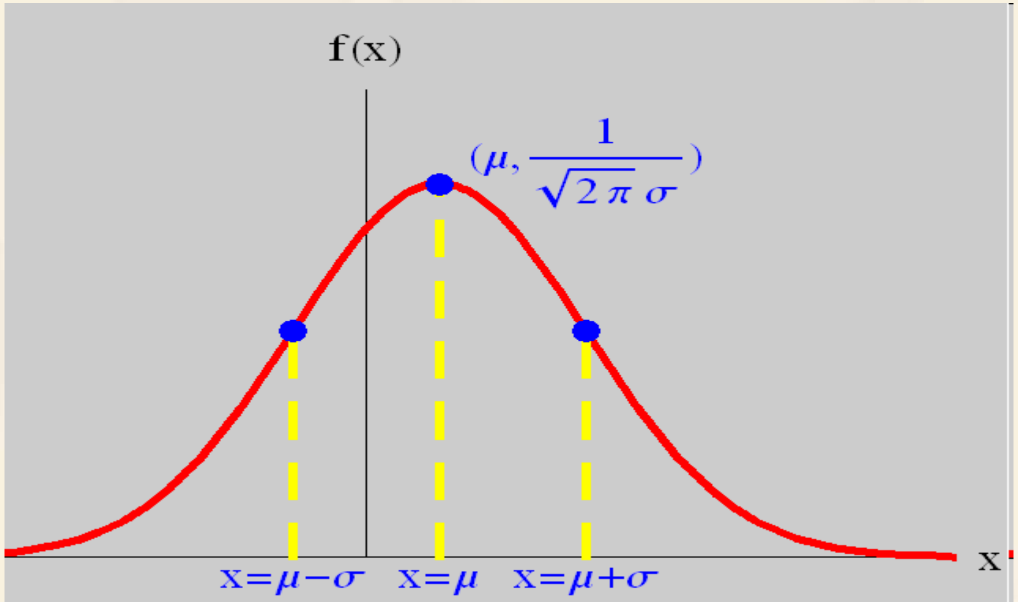
这表明对于同样长度的区间，当区间离μ越远，X落在这个区间上的概率越小.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty < x < \infty$$

(3) 当 $x \to \pm\infty$ 时,

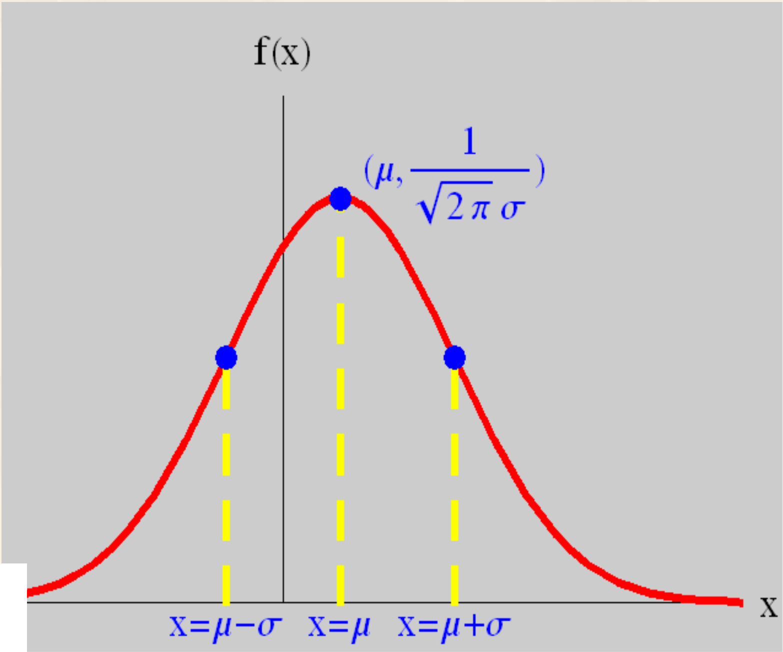
$f(x) \to 0$;

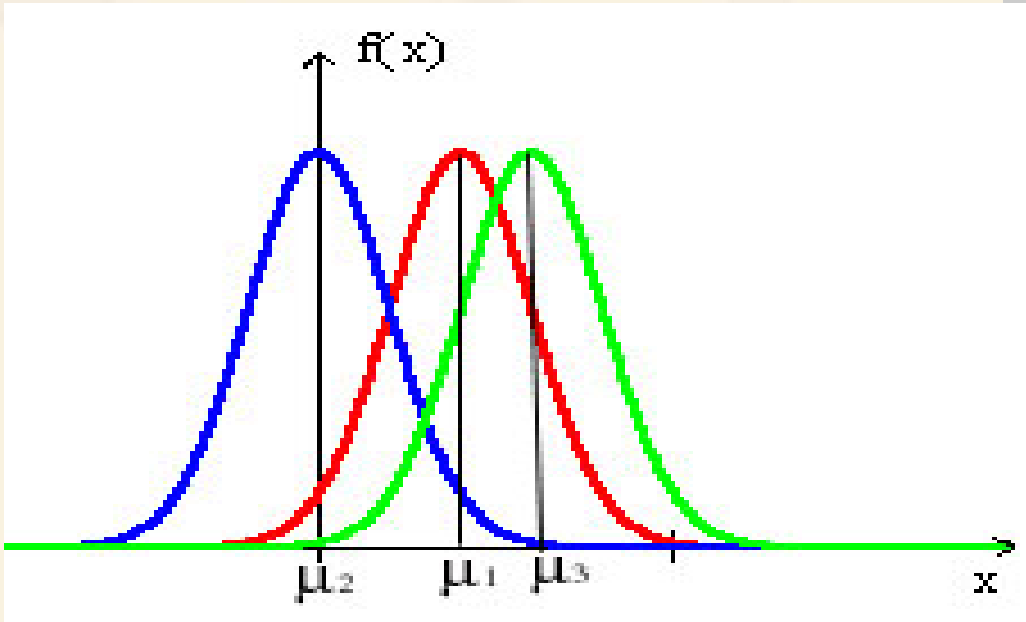
(4) 曲线以 x 轴为渐近线;



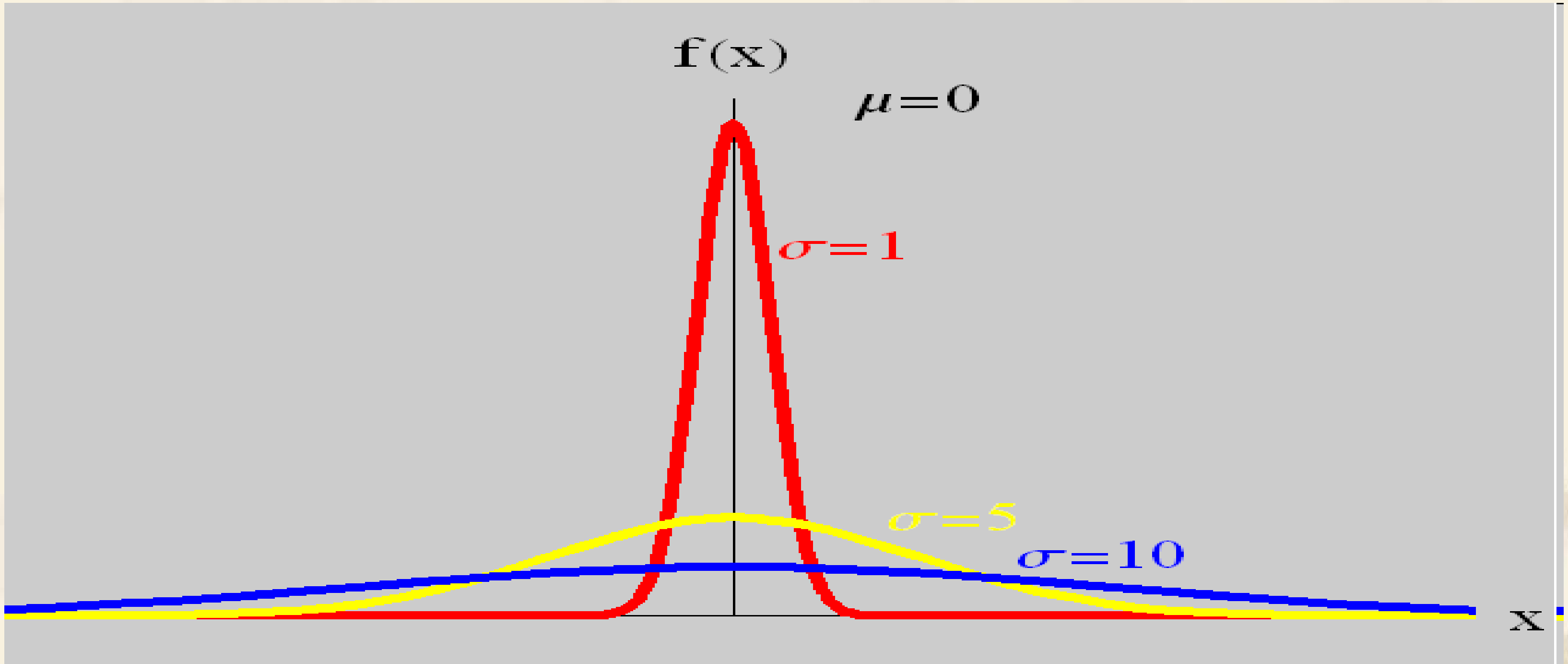
(5) 曲线在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点;

(6) 当固定 σ, 改变 μ 的大小时, $f(x)$ 图形的形状不变,只是沿着 x 轴作平移变换;





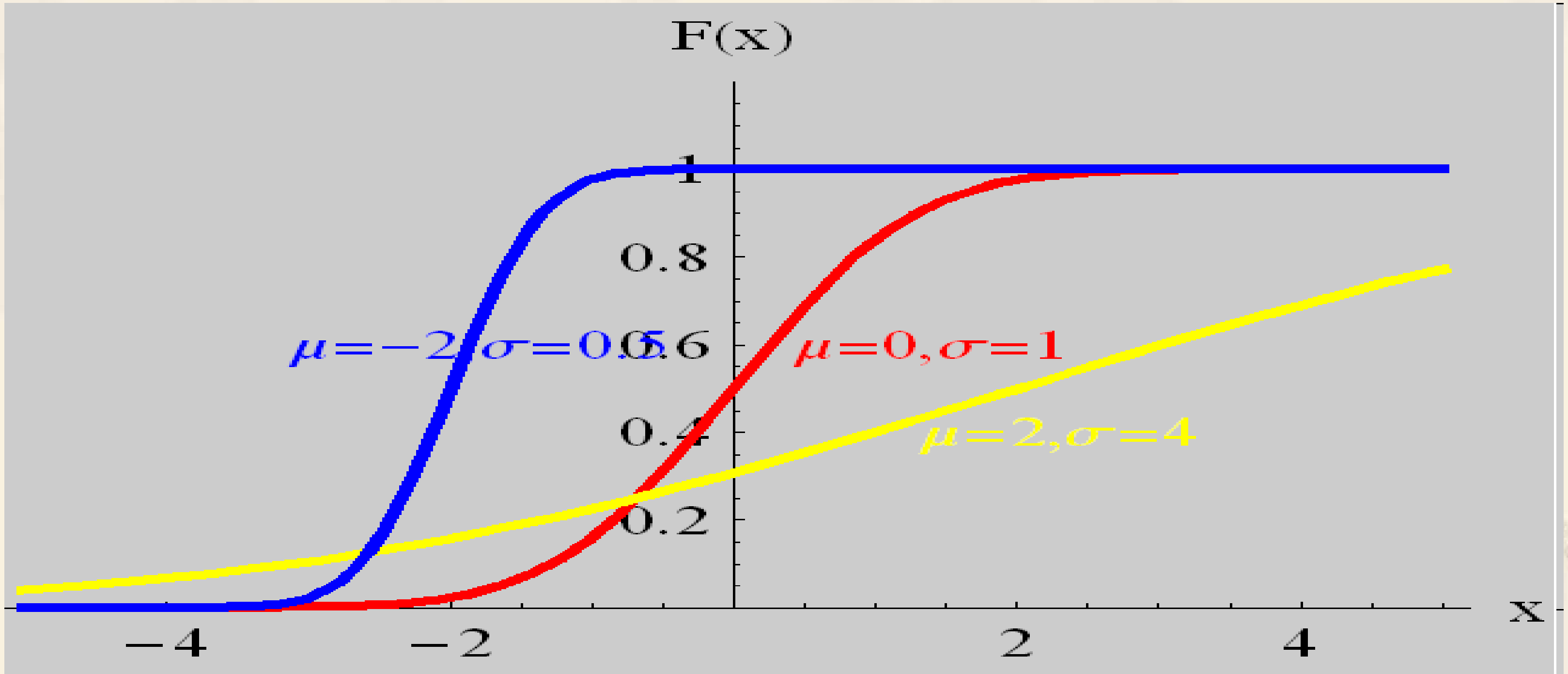
(7) 当固定 μ, 改变 σ 的大小时, $p(x)$ 图形的对称轴不变,而形状在改变, σ 越小,图形越高越瘦, σ越大,图形越矮越胖.



正态分布密度函数图形演示

正态分布的分布函数

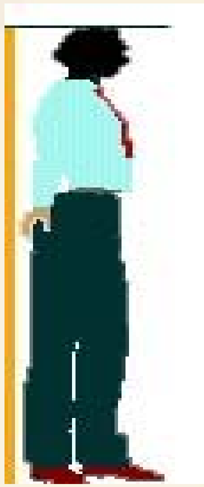
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$



正态分布由它的两个参数**μ**和**σ**唯一确定， 当**μ**和**σ**不同时，是不同的正态分布。

正态分布的应用与背景

正态分布是最常见最重要的一种分布,例如测量误差; 人的生理特征尺寸如身高、体重等 ; 正常情况下生产的产品尺寸:直径、长度、重量高度等都近似服从正态分布.



标准正态分布

当正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 中的 $\mu=0,\sigma=1$ 时,这样的正态分布称为标准正态分布,记为 $N(0,1)$.

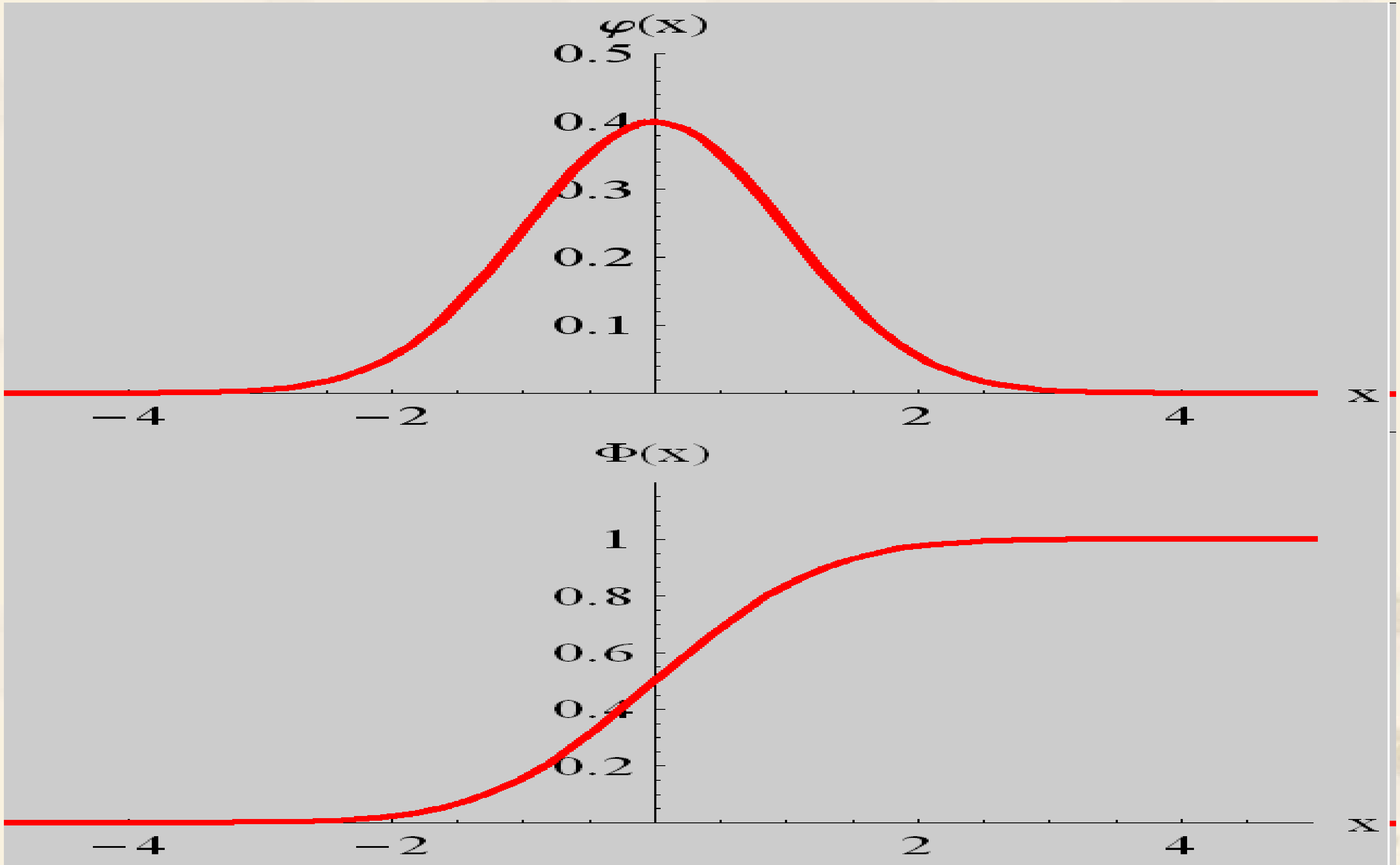
标准正态分布的概率密度表示为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty,$$

标准正态分布的分布函数表示为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<\infty.$$

标准正态分布的图形

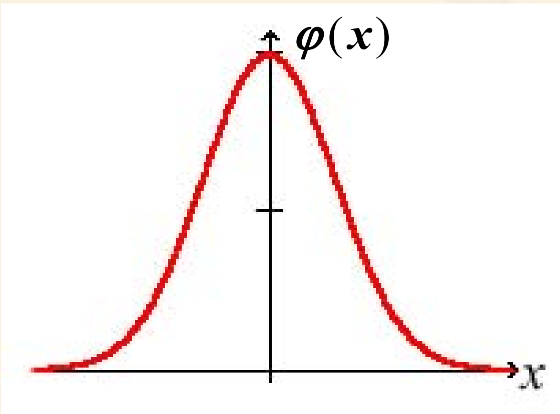


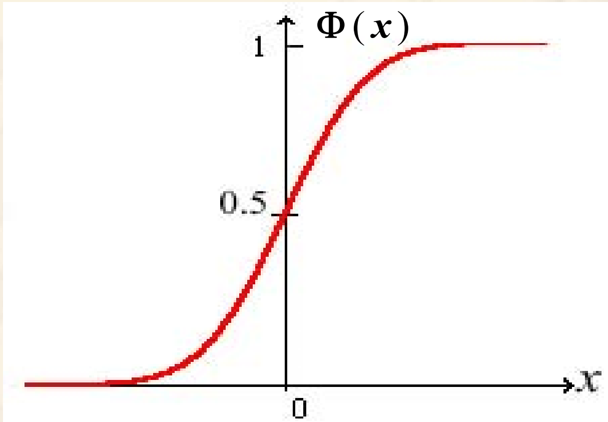
性质 ：

(1) $\varphi(x)\geq 0$ (当$x\to +\infty$时， $\varphi(x)\to 0$);

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$ ；

（3）$\varphi(-x)=\varphi(x)$，因此，$\varphi(x)$为偶函数，图形关于 y 轴对称，x轴为曲线的水平渐近线；当$x=0$时，有最大值 $\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$；当 $x=\pm 1$时，曲线上对应拐点；





(4) $\Phi(0)=\frac{1}{2}$，

$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

例6 已知 $X \sim N(0,1)$,求 $P\{1.25 \le X < 2\}$.

解 $P\{1.25 \le X < 2\}$

$= \Phi(2) - \Phi(1.25)$

$= 0.9772 - 0.8944$

$= 0.0828.$

正态分布下的概率计算

$$P\{X \le x\} = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\boxed{\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t}$$

原函数不是初等函数

$$= ?$$

转化为标准正态分布查表计算

引理 若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$

引理 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

证明 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$的分布函数为

$$P\{Z \le x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le x\right\}=P\{X \le \mu+\sigma x\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t,$$

令$\dfrac{t-\mu}{\sigma}=u$,得 $P\{Z \le x\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u=\Phi(x)$,

故 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

例7 已知$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,求$P\{c \le X \le d\}$.

解 $$P\{c \le X \le d\} = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = u$, $$= \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \sigma \,\mathrm{d}u$$

$$= \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{d-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\cdot \mathrm{d}u-\int_{-\infty}^{\frac{c-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\cdot \mathrm{d}u$$

$$=\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).$$

因而 $P\{c\le X\le d\}=F(d)-F(c)$

$$=\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).$$

即 $P\{c\le X\le d\}=\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).$

标准正态分布的重要性在于，任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换转化为标准正态分布.

因此我们有

$$(1)\, F(x) = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right);$$

$$(2) P\{x_1 < X \le x_2\}$$

$$= F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

通常，若某个数量指标X是很多随机因素的和，而每个因素所起的作用均匀微小，则X为服从正态分布的随机变量。如：大量生产某产品，当设备、技术、原料、操作等可控制生产条件都相对稳定且不存在产生系统误差的明显因素，则产品的质量指标近似服从正态分布；

注意：正态分布也是许多概率分布的极限分布。

如X~$B(n,p)$，n充分大，p不是很小时，X近似服从$N(np,npq)$，则

$$P\{\alpha \le \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \le \beta\} \approx \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

正态分布表

书末附有标准正态分布函数数值表，有了它，可以解决一般正态分布的概率计算查表.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

表中给的是 $x>0$ 时，$\Phi(x)$ 的值.

当 $x<0$ 时，$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

若 $X \sim N(0,1)$,

$$P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ $\sim N(0,1)$

$$P(a < X < b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Y \le \frac{b-\mu}{\sigma})$$

$$= \Phi(\frac{\boldsymbol{b}-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\boldsymbol{a}-\mu}{\sigma})$$

3σ准则

由标准正态分布的查表计算可以求得，

当$X\sim N(0,1)$时，

$$P(|X|\leqslant 1)=2\Phi(1)-1=0.6826$$

$$P(|X|\leqslant 2)=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$$P(|X|\leqslant 3)=2\Phi(3)-1=0.9974$$

这说明，X的取值几乎全部集中在[-3,3]区间内，超出这个范围的可能性仅占不到0.26%.

将上述结论推广到一般的正态分布,

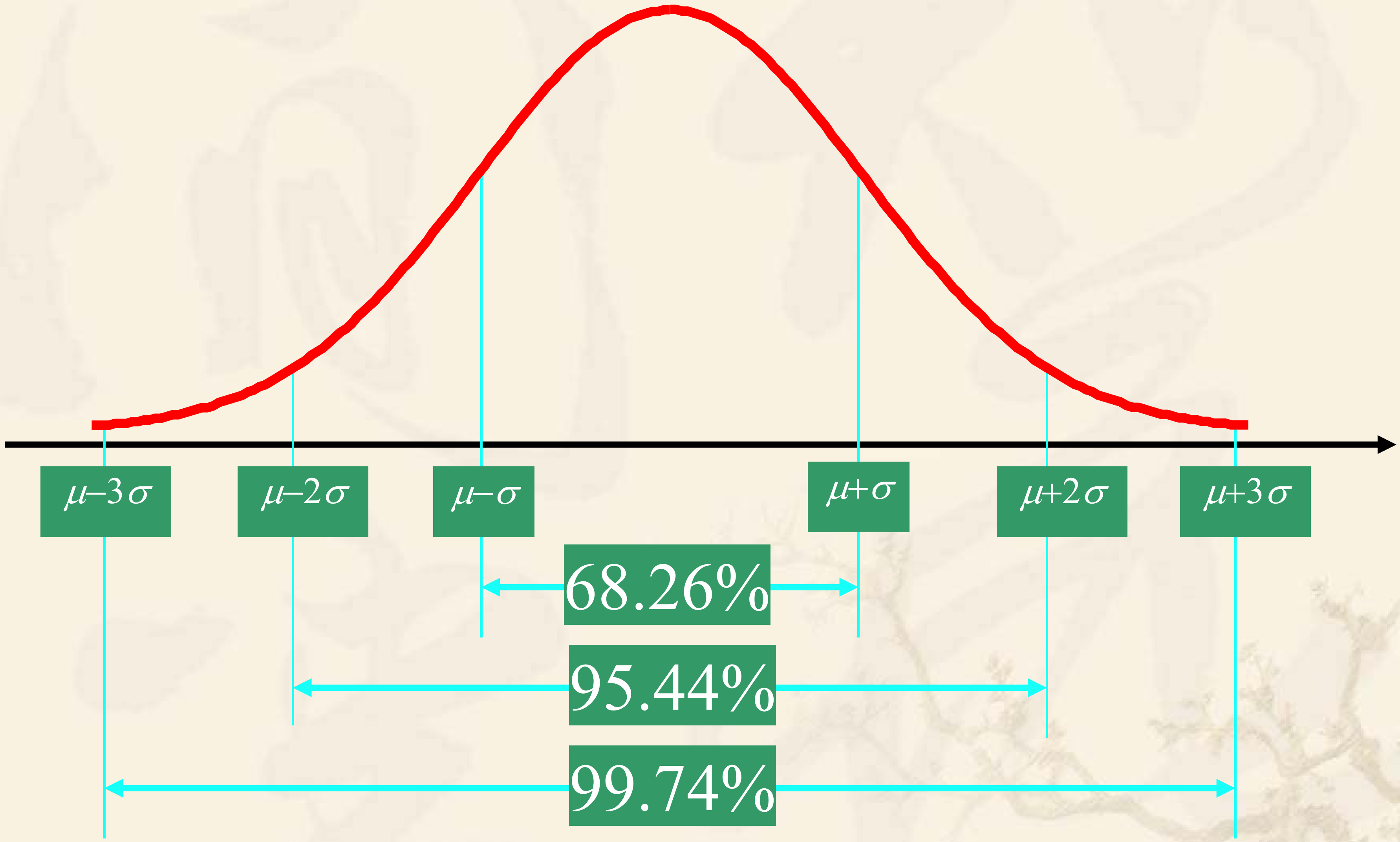
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 时， $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ ~ $N(0, 1)$

$$P(|\frac{X-\mu}{\sigma}|\le 1)=0.6826$$

$$P(|\frac{X-\mu}{\sigma}|\le 2)=0.9544$$

$$P(|\frac{X-\mu}{\sigma}|\le 3)=0.9974$$

可以认为，Y的取值几乎全部集中在 $[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 区间内. 这在统计学上称作“3σ准则” .



$\mu-3\sigma$
$\mu-2\sigma$
$\mu-\sigma$
$\mu+\sigma$
$\mu+2\sigma$
$\mu+3\sigma$
68.26%
95.44%
99.74%

看一个应用正态分布的例子:

例 公共汽车车门的高度是按男子与车门顶头碰头机会在 0.01 以下来设计的.设男子身高$X \sim N(170, 6^2)$,问车门高度应如何确定?

例8 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内. 调节器整定在d°C，液体的温度X(以°C计)是一个随机变量， 且$X \sim N(d, 0.5^2)$.

(1) 若$d=90$, 求X小于89的概率.

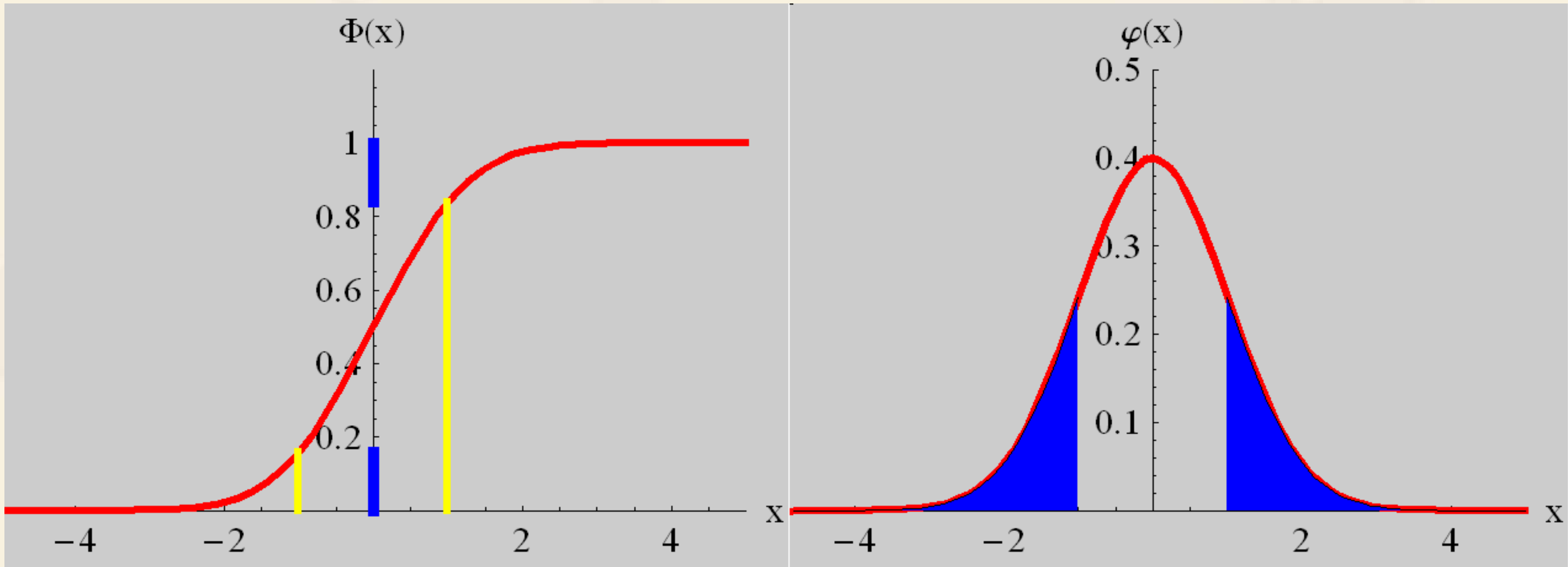
(2) 若要求保持液体的温度至少为80的概率不低于0.99, 问d 至少为多少?

例9　证明　$\Phi(-x)=1-\Phi(x).$

证明　$$\Phi(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=1-\Phi(x).$$



三、小结

1. **连续型随机变量** $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t$

分布函数　概率密度

2. 常见连续型随机变量的分布

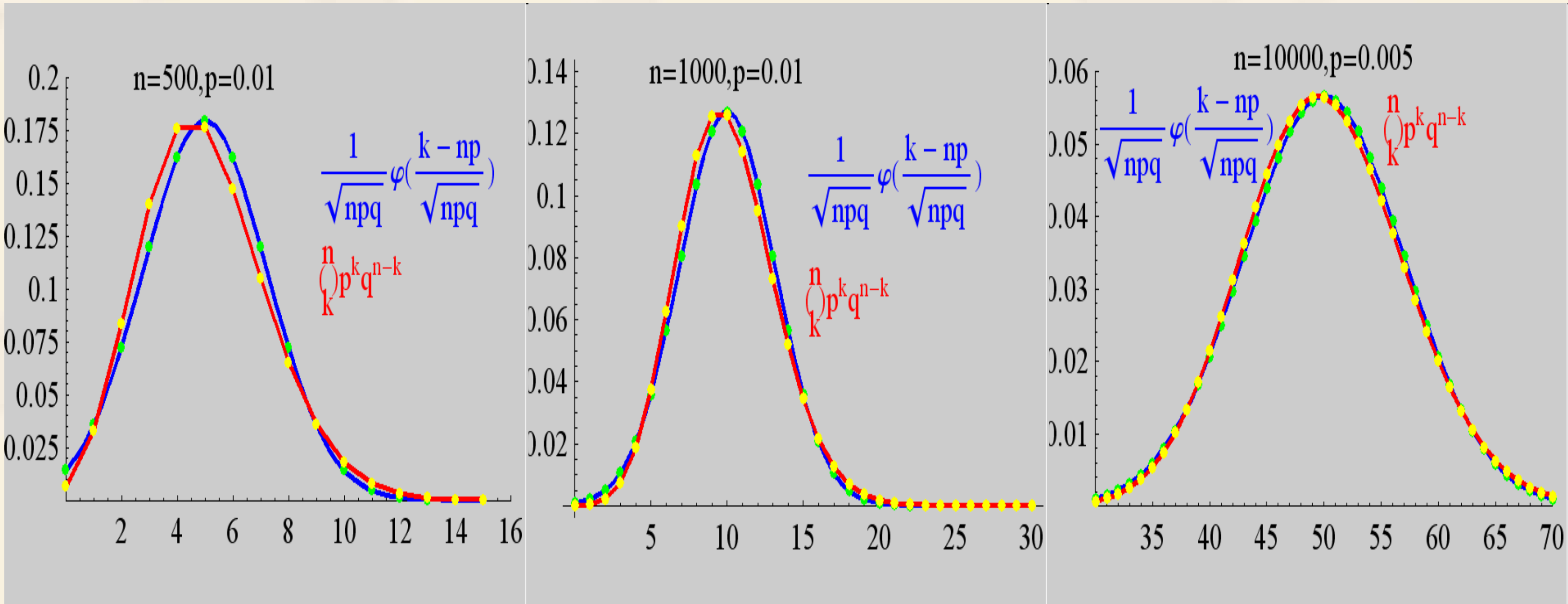
$$\begin{cases}\text{均匀分布}\\ \text{正态分布(或高斯分布)}\\ \text{指数分布}\end{cases}$$

3. 正态分布是概率论中最重要的分布

正态分布有极其广泛的实际背景, 例如测量误差; 人的生理特征尺寸如身高、体重等 ; 正常情况下生产的产品尺寸:直径、长度、重量高度; 炮弹的弹落点的分布等, 都服从或近似服从正态分布.可以说,正态分布是自然界和社会现象中最为常见的一种分布, 一个变量如果受到大量微小的、独立的随机因素的影响, 那么这个变量一般是一个正态随机变量.

另一方面,有些分布(如二项分布、泊松分布)的极限分布是正态分布.所以,无论在实践中,还是在理论上,正态分布是概率论中最重要的一种分布.

二项分布向正态分布的转换



备份题

例1 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}Ke^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试确定常数 K,并求 $P\{X>0.1\}$.

解 由 $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,\mathrm{d}x=1 \Rightarrow \int_{0}^{\infty}Ke^{-3x}\,\mathrm{d}x=1$, 得 $K=3$,

得 $p(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

$$P\{X>0.1\}=\int_{0.1}^{\infty}p(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0.1}^{\infty}3e^{-3x}\,\mathrm{d}x=0.7408.$$

例2　设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a,\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a,\\ 1, & x>a.\end{cases}$$

求：(1) 系数 A, B 的值;

(2) $P\{-a<X<\dfrac{a}{2}\}$;

(3) 随机变量 X 的概率密度.

解 (1) 因为 X 是连续型随机变量, 所以 $F(x)$ 连续,

故有 $F(-a)=\lim\limits_{x\to -a} F(x)$,

$$F(a)=\lim_{x\to a} F(x),$$

即 $$A+B\arcsin\left(\frac{-a}{a}\right)=A-\frac{\pi}{2}B=0,$$

$$A+B\arcsin\left(\frac{a}{a}\right)=A+\frac{\pi}{2}B=1,$$

解之得 $A=\dfrac{1}{2},\quad B=\dfrac{1}{\pi}.$

所以 $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a,\\ 1, & x>a.\end{cases}$$

$$(2)\ P\{-a < X < \frac{a}{2}\} = F(\frac{a}{2}) - F(-a)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(\frac{a}{2a}) - 0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}.$$

(3) 随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 1/\pi\sqrt{a^2 - x^2}, & -a < x < a, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

例3 设 k 在 $(0,5)$ 上服从均匀分布,求方程

$$4x^2+4kx+k+2=0$$

有实根的概率.

解 当 $16k^2-16(k+2)\geq 0$ 时,

即 $k\geq 2$ 或 $k\leq -1$ 时,有实根,

则有实根的概率为

$$\int_2^5 \frac{1}{5}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}.$$

Gauss

Carl Friedrich Gauss

Born: 30 April 1777 in Brunswick, Duchy of Brunswick (now Germany)

Died: 23 Feb 1855 in Göttingen, Hanover (now Germany)