<样卷>

一、填空题

1. （4 分）判定下列 4 个命题公式的类型（重言式、矛盾式、可满足式）：

（1） $P\rightarrow(Q\vee P)\vee R$______________，

（2） $((\neg(P\rightarrow Q))\wedge Q)\wedge R$______________，

（3） $(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$_____________，

（4） $\forall x\exists yG(x-y,x+y)\wedge(Q\vee\neg Q)$_____________，其中 x,y 的个体域为整数集，Q 为命题变元，G(x,y)表示 $x<y$.

重言式、矛盾式、重言式、重言式

2. （2 分）求 $\forall xP(x,y)\rightarrow(\forall xQ(x)\rightarrow\exists yP(y,z))$前束析取范式 $\exists x\exists v\exists y(\neg P(x,u)\vee\neg Q(v)\vee P(y,z))$.

3. （3 分）下列推理形式不正确是（多选二） （2），（8） .

（1） $\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$

（2） $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Leftrightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

（3） $\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

（4） $\exists x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$

（5） $\exists x(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

（6） $\exists x(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

（7） $\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

（8） $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

（9） $\forall x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y))\Leftrightarrow\exists xP(x)\rightarrow\forall yQ(y)$

4. （2 分）下列推理序列中，第 （4） 步推理是错误的.

（1）	$\exists xP(x)$	P
（2）	$P(c)$	ES,（1）
（3）	$\exists xQ(x)$	P
（4）	$Q(c)$	ES,（2）

5. （2 分）集合 A 基数为 n，则 $|P(A)|=$ 2^n .

6. （3 分）下列命题中，不正确有（多选一） （4） .

（1） 设 A，B 为任意两个集合，则以下条件互相等价：

1) $A\subseteq B$； 2) $A\cup B=B$； 3) $A\cap B=A$.

（2） 设 A，B 为任意两个集合，若 $A\subseteq B$，则 $P(A)\subseteq P(B)$.

（3） A,B 为集合，$A\subseteq B$ 和 $A\in B$ 能同时成立.

（4） 下述 2 个命题中，前者为假，后者为真：

1） 若 $A\cup B=A\cup C$，则 $B=C$；2） 若 $A\cap B=A\cap C$，则 $B=C$.

（5） 若 $A\subseteq B$ 且 $A\subseteq C$，则 $A\subseteq B\cap C$.

（6） 设ρ是集合 A 上的等价关系，则 A 关于ρ的商集 A/ρ是 A 的一个划分.

7. （2 分）设 A={x,y,z}，$\langle P(A),\subseteq\rangle$为偏序集，请给出 P(A)的最大元、最小元 {x,y,z},$\varnothing$.

8. （2 分）设 A={a,b,c}，B={1, 2}，试问有多少个由 A 到 B 的满射函数 6 .

9. （2 分）半群〈A; ∗〉的单位元为 e.若其元素 a,b 的逆元为 a^{-1},b^{-1}，则 a∗b 的逆元为 $b^{-1}*a^{-1}$.

10.（2 分）设 g 为代数结构<X; ο >到<Y; *>的同构映射，若<X; ο >存在单位元 e_x，则<Y; *>亦存在单位元，为 $\underline{\quad g(e_x)\quad}$.

11.（2 分）设 R 是代数结构<S; *>上的同余关系，*为二元运算，从而可以定义商代数<S/R; o>,请给出 o 的定义：$\underline{\quad \text{对于}\forall[a],[b]\in S/R, [a]o[b]=[a*b].\quad}$.

12.（4 分）下列表述不正确是（多选二）$\underline{\quad (3)、(5)\quad}$.

(1)代数结构间的同构关系是等价关系.

(2)<I; +>上等价关系 $R=\{(x, y)|x/y=2^m, m\in I\}$不是同余关系.

(3)A={a，b}，记 S 为 A^A，o 为 S 上函数复合运算，则<S;o>构成代数结构，但不存在单位元.

(4)设<G; *>是一个群,对于任意的 $a,b\in G$, 方程 $x*a*x*b*a=x*b*c$ 解存在且唯一.

(5)不存在有零元的群.

(6)有限群<G; *>的每一元素具有有限阶,且阶数至多为|G|.

(7)有限群<G; *>的非空子集 H 以及*运算构成<G; *>的子群的一个充要条件是：

对任意的 $a,b\in H$，有 $a*b\in H$.

(8)无限循环群<a>有两个生成元，即 a 与 a^{-1}，且<a>与整数加群 Z 同构.

(9)有限群<G,*>中的任何元素 a 的阶可整除 G 的阶.

13.（2 分）图 G 为 n 个结点、ω个分图的森林，则 G 边数为$\underline{\quad n-w\quad}$,G 的度数之和为$\underline{\quad 2(n-w)\quad}$.

14.（2 分）T 为有 t 片叶的完全两分树，则 T 有$\underline{\quad 2(t-1)\quad}$条边.

15.（2 分）无向完全图 K_4 的含 3 条边的所有非同构的生成子图数为$\underline{\quad 3\quad}$. 欧拉图 G 有$\underline{\ 0\ }$个度数为奇数的结点.

16.（2 分）n(n≥2)个结点的树、二分图的色数分别是多少？$\underline{\quad 2\quad}$、$\underline{\quad 2\quad}$.

17.（2 分）设有一个连通平面图 G，共有 n 个结点 e 条边 f 个面，则 n,e,f 关系为：$\underline{\quad n-e+f=2\quad}$，极大平面图的边数 e 与结点数 n(n≥3)关系为$\underline{\ e=3n-6\ }$.

二、解答题

1.（8 分）求 $(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$的主析取范式和主合取范式.

2.（8 分）将下列推理符号化并给出形式证明：

有理数都是实数，有的有理数是整数，因此有的实数是整数（设个体域为全总个体域）.

3.（9 分）设 R_1 是集合 A 上的一个二元关系，$R_2=\{(a,b)|a,b\in A$, 存在 $c\in A$，使 $(a,c)\in R_1$ 且 $(c,b)\in R_1\}$，请证明若 R_1 是 A 上的等价关系，则 R_2 也是 A 上的等价关系。

4.（10 分）设 S 为正实数集合，*为 S 上的一般乘法，R 为实数集合，+为 R 上的一般加法，

（1）试说明<S; *>,<R; +>均可构成代数结构.（2）证明：<S; *>与<R; +>同构.

5.（8 分）若群 G 中元素 x 的周期是 r，则 $H=\{x^0,x^1,x^2,\cdots,x^{r-1}\}$为 G 之 r 阶子群。

6.（9 分）图 G 为 n(n≥1)个结点、m 条边的一棵树，试用数学归纳法证明：m=n-1.

7.（8 分）图 G 有 n(n≥3)个结点，其每一对不相邻结点的度数之和都大于或等于 n，

（1）证明 G 是连通图.（2）给出证明 G 是哈密尔顿图的思路（不要求给出详细证明过程）.