

## 逻辑、数学与人生，读王浩《哥德尔》有感

已有 3188 次阅读 2016-6-13 10:18 | 系统分类: [人文社科](#) | 关键词: 哲学, 逻辑 | [哲学](#), [逻辑](#)

逻辑一词源于希腊文  $\lambda \circ \gamma \circ \varsigma$ 。最初有思想、理性、词语等多种含义。亚里士多德使逻辑成为一门专门的学问，将其定义为关于证明的学问。也就是说，逻辑是一些推演规律与演绎规则，它们保证人们从前提到结论的推演是严格与正确的。亚里士多德对逻辑定义的解说已有了一些现代的味道。在以后人类知识的发展中，这样一套逻辑规律与推演规则成为人类所有知识可靠性与确定性的基础。由此推演出来的知识被认为是被证明了的。

其实人类一直在给自己已有的和未来的知识的确定性寻找一个坚实的基础，没有这样一个基础，人类就永远会对自己的知识表示怀疑。历史上无休无止的争论其实就是对我们的知识是否有确定性以及这种确定性的来源的争论。这是我们理解柏拉图、理解休谟、理解康德以及以后逻辑经验主义的一条路径。

数学家、逻辑学家与哲学家不同，他们不满足仅仅给知识的确定性一个形而上学的解释。他们企图用逻辑与数学为人类的知识建立一个严格的、自满自足的、与形而上学无关的基础。这就是20世纪以后逻辑发展的一个重要方向，即建立一个自足的完全的逻辑演算，这个逻辑演算不仅仅要包括一切的逻辑规律与推理形式，而且要对其一致性与完全性进行严格的证明。这

是一个伟大的计划，即便它以后遭遇了失败，它也比无数雕虫小技要高明得多。

与这个计划相关联的是关于数学基础的讨论。我们知道与逻辑有着天然联系的是数学。甚至有人认为逻辑只是数学的更为一般的形式，当然，也有人认为数学是逻辑的延伸。但不管二者关系如何，数学作为一门演绎的科学，它的确定性几乎与逻辑的确定性等价。但非欧几何的诞生以及它与欧几里德几何的相对一致性，更进一步的是集合论悖论的发现使数学家发现了一项必须去做的工作，这就是用一些简单的、可靠的逻辑与数学作为工具去证明我们已有的各个数学系统的绝对的一致性。这样，我们才可以放心地享用我们已有了的丰富的数学知识的宝藏，由此，我们也就找到了知识确定性的坚实无比的基础。这就是著名的希尔伯特方案。

希尔伯特方案的基础是一套形式系统方法。所谓形式系统方法就是只考虑符号的种类，符号的排列以及从符号序列到符号序列的变形而不考虑它们的意义的一种方法。一个形式系统通常由这样几部分组成：

- (1) 各种初始符号，它们是系统的字母表；
- (2) 形成规则，它们规定哪些符号序列是合式的，合式的符号序列称为合式公式；

(3) 公理，它们是被挑选出来的一些合式公式，作为系统推演的出发点；

(4) 变形规则，它们明确规定一个合式公式怎样可以变换为另一个合式公式。

形式系统是一个框架。我们之所以可以抽象地考虑这样的框架，是因为有弗雷格（Friedrich Ludwig Gottlob Frege, 1848年11月8日—1925年7月26日）与罗素的工作在前面的铺垫。弗雷格为了使逻辑的推理严密化，想到了发明一种表意的语言，使其与所表达的涵义在某些方面有了精确的对应，这项工作是逻辑发展史中的一个大手笔；而罗素对数学本质的论述则直接切入到了希尔伯特方案的核心，罗素认为，纯数学是这样一门学科，在数学中我们并不知道我们在谈论什么，或者我们不知道所谈论的内容是否是真的。

正是在这样一个框架下，数学的可证性成为一个技术上可操作的概念。在一个形式系统内，所谓证明就是有穷多个符号序列，其中每一个符号序列或者是一条公理，或者是从先行的符号序列应用变形规则得到的，最后一个符号序列被称为定理。全部定理构成了一个系统内可证的命题。

希尔伯特方案以形式系统为出发点，进一步则开始考虑数学结构，也就是把数学对象与形式系统的符号串相匹配，从而企图发现一个没有内在矛盾的并且其定理完全符合于全部算术的真

事实的形式系统。在希尔伯特方案以前，人们就已经知道作为整体的数学的一致性问题可以还原为算术一致性的问题。因此我们如果解决了算术形式系统的一致性问题，也就解决了整体数学的一致性问题。在希尔伯特方案提出不到三年，年轻的哥德尔就使希尔伯特极有希望的梦想变成了令人沮丧的恶梦。

哥德尔证明不存在也不可能存在满足希尔伯特方法全部要求的形式系统。即不存在能产生关于自然数的所有真理的规则。

这不是哥德尔定理的一个严格描述。比较严格的表述是：

(1) 一个包括初等数论的形式系统 $P$ ，如果是一致的，那么就是不完全的。(2) 如果这样的系统是一致的，那么其一致性在本系统中不可证。这就是哥德尔著名的两条不完全性定理。

哥德尔定理的证明显示了哥德尔精湛的数学才能和他在错综复杂以至相互重叠的关系中游刃有余地把握其层次与区别的哲学素质。哥德尔告诉我们，数学中的“真”与“可证性”是两个概念。可证的一定是真的，但真的不一定可证。客观数学真理与可证性相比是一个高度超穷的概念。由此，企图仅仅用逻辑与数学为人类知识的确定性建立一个自满自足的基础的努力也宣告失败，悖论的阴影将永远伴随着我们。

人们习惯说，哥德尔定理揭示了形式系统的局限性，从而也揭示了机器代替人类思维的局限性。但这只是问题的一个方面，而更重要的一个方面在于正是希尔伯特的形式系统方法引导哥德尔证明了所有只要包含了初等数论的数学系统都是不完全的，没有形式系统的方法，我们就没有一条路径去得出如此深刻的结论。试想一下，我们人类已有的理论与方法哪个没有局限性，但通过自身对其局限性作出如此确定的结论的理论与方法又有几个？为此，我们发现数理逻辑是那么美妙的学问，形式系统方法是那么有生命力的方法，从希尔伯特到哥德尔，他们在人类智力跋涉的艰难旅途上已走得那么遥远，他们为人类建立了又一种知识的模式，其深远意义至今还在被人们慢慢理解。如果我们依然相信知识的确定性，那些关于知识确定性来源的形形色色的哲学理论就还会存活。但它们的存在方式已被哥德尔深深影响过。

衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴。哥德尔最后因精神抑郁死于营养不良，也许很多人不喜欢如此惨淡的人生，但哥德尔所看到的灯火阑珊以及他的精神所迸放出的礼花之美令后人赞叹不已。

哥德尔的学问，我并没有吃透，但每个人都会遇到几本可以慢慢咀嚼的书，它们将逐步拓宽我们的精神，我们的理想，我们的人生。

转载本文请联系原作者获取授权，同时请注明本文来自郑小康科学网博客。

链接地址：<http://blog.sciencenet.cn/blog-882964-984259.html>