代数结构 习题解答提示

2. （1）、（3）、（4）封闭，（2）不封闭

3. ∀x，y∈Z, x-y∈Z, 由 x-x∈Z 即 0∈Z，知 0-y∈Z 即-y∈Z

所以 x-(-y) ∈Z 即 x+y∈Z。

5

1）是代数结构，可结合，有单位元 0，任意 A 中元素 a 的逆元为-a/(1+a)

2）是代数结构，可结合，有单位元ϕ，任意元素逆元为其自身

3）不是代数结构

6 运算表如下表所示。从表中可以看出<S;。>有单位元 f_2, 没有零元。f_2, f_3 有逆元，为其自身。

x	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_4	f_3	f_2	f_1
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

7 满足（1）、（2）、（10）：<{a}; *>, a*a=a;

满足（3）：<{a, b}; *1>;

满足（4）：<{a, b}; *2>;

满足（5）：<{a, b}; *3>;

满足（6）、（7）：<{a, b}; *4>;

满足（8）：<{a, b}; *5>;

满足（9）：<{a, b}; *6>;

运算*1 到*6 分别如下所示。

*1	a	b
a	a	a
b	a	b

*2	a	b
a	a	b
b	b	a

*3	a	b
a	a	a
b	a	a

*4	a	b
a	a	b
b	a	a

*5	a	b
a	a	a
b	b	b

*6	a	b
a	b	a
b	b	b

8 注意到，任意 a, b∈A，如果 a*b=b*a 必有 a=b。如（1）对 a∈A, a* (a*a)= (a*a)*a，从而 a*a=a。（2）、（3）证明类似，但需要应用已经得到的结论。

9 （1）显然*在 S 上是封闭的，∀x, y, z∈S，(x*y)*z=x*z=x=x*(y*z)，即满足结合性。

（2）显然，原集合 S 中的元素不能是单位元，只需要增加一个元素 e，并定义 x∈S, e*x=x*=x, e*e=e.

11 （2）封闭性是显然的。∀a, b, c∈N_k

$(a*_k b)*_k c=(ab-n_1k)*_k c=abc-n_1kc-n_2k= abc-(n_1c+n_2)k$

（n_1满足 0≤ab-n_1k<k，进而 n_2满足 0≤（ab- n_1k）c-n_2k <k）
=abc(modk)
类似地，可以得到 $a*_k(b*_kc)$=…=abc(modk)
∴$(a*_kb)*_kc=a*_k(b*_kc)$运算满足结合律。

12 由于 f，g 都是 S 到 S′ 的函数，*′ 是 S′ 上的运算， h(x) = f(x)*′ g(x) ，所以 h 是 S 到 S′ 的函数。又∀x,y∈S，
h(x*y)=f(x*y)*′ g(x*y)=(f(x)*′ f(y))*′ (g(x)*′ g(y))
=f(x)*′ (f(y)*′ g(x))*′ g(y)
=f(x)*′ (g(x))*′ f(y))*′ g(y)
=(f(x)*′ g(x))*′ (f(y)*′ g(y))
=h(x) *′ h(y)
h 是<S; * >到<S′ ;*′ >的同态。

13 f 是 X 到 Y 的映射，g 是从 X 到 Y 的映射，因此 f、g 的复合函数 gof 是 X 到 Z 的映射。而 gof(x1° x2) =g(f(x1)*f(x2))=g(f(x1))×g(f(x2))= gof (x1)×gof (x2)。因此，gof：X→Z 是从 A 到 C 的同态。

14 建立从 A 到 Z 的映射 f: 任意 x∈A，f(x)=$\left\lfloor \dfrac{x}{m} \right\rfloor$（m 除 a，结果取整数部分）

15 设复数的集合 C={a+bi|a+bi 为复数,a,b∈R},相应地可以定义 2×2 矩阵集合 M={$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$|a,b∈R }。建立映射 f: C—>M, f(a+bi)= $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$。可以证明 f 是从<C; +,*>到<M; +,*>的同构映射。
16 同构
17 R 是半群元素间的同构关系，在理解同构关系的基础上根据等价关系的定义是很容易证明的。事实上，代数结构间的同构关系是等价关系，下面对此进行了证明：

<u>代数结构间的同构关系是等价关系。</u>
证明 设〈X; ° 〉,〈Y; *〉,〈Z; +〉是任意的三个代数结构，并设同构关系用“≌”表示，下面≌证明满足自反性、对称性以及传递性。

(1) 自反性：显然有〈X; ° 〉≌〈X; °)，即是自反的。

(2) 对称性：如果〈X; ° 〉≌〈Y; *〉则必存在一个双射 g: X→Y，使得若 x1，x2∈X，并有：

g(x1° x2)=g(x1)*g(x2)

根据双射的定义，必存在一个双射的逆映射 g^{-1}: Y→X。

现要证对 g^{-1}: Y→X，若 y1，y2∈Y，必有：

g^{-1}(y1*y2)=g^{-1}(y1)° g-1(y2)

设对任意的 y1,y2∈Y 必存在 x1,x2∈X,使得 g(x1)=y1,g(x2)=y2,亦即 g^{-1}(y1)=x1,g^{-1}(y2)=x2，故有：

g^{-1}(y1*y2) = g^{-1}(g(x1)*g(x2)) =g^{-1}(g(x1° x2)) =x1° x2

又

$$g^{-1}(y1)^\circ\ g^{-1}(y2)=x1^\circ\ x2$$

所以

$$g^{-1}(y1*y2)=g^{-1}(y1)^\circ\ g^{-1}(y2)$$

因此，〈Y；∗〉≌〈X；°〉，所以≌是对称的。

(3) 传递性：如果有〈X；°〉≌〈Y；∗〉，且〈Y；∗〉≌〈Z；+〉，要证明〈X；°〉≌〈Z；+〉。由条件亦即存在双射 g: X→Y 与 h: Y→Z，使得对任意 x1，x2∈X 和 y1，y2∈Y，必有：

$$g(x1^\circ\ x2)=g(x1)*g(x2),\quad h(y1*y2)=h(y1)+h(y2)$$

下面证明存在一个双射 f: X→Z，使得对任意 x1，x2∈X，有 $f(x1^\circ\ x2)=f(x1)+f(x2)$，令 f=h•g，即 h 与 g 的复合映射，由于 g，h 均是双射射，所以 f 亦是双射。

$$\begin{aligned}
&f(x1^\circ\ x2)\\
&=h\bullet g(x1^\circ\ x2)\\
&=h(g(x1)*g(x2))\\
&=h(g(x1))+h(g(x2))\\
&=h\bullet g(x1)+h\bullet g(x2)\\
&=f(x1)+f(x2)
\end{aligned}$$

所以，≌是传递的。

综上，≌是等价关系，即代数结构间的同构关系是等价关系。

证毕。

18 反证法。假设题设代数结构<A；∗>，<B；o>同构，根据定理或直接证明后者也有单位元，与题设矛盾。

19

要证明 R 为同余关系，需要按照定义来证明。

商代数<V/R;o_1^*, o_2^*>,其中 V/R={{a_1,a_3},{a_2, a_5},{a_4}}。

运算表如下表所示：

	o_1^*	o_2^*
[a_1]	[a_4]	[a_1]
[a_2]	[a_1]	[a_2]
[a_4]	[a_2]	[a_1]

显然，<V/R;o_1^*,o_2^*>为一代数结构，建立 V 到 V/R 的映射 h:

h（a_1）= h（a_3）= [a_1]，

h（a_2）= h（a_5）= [a_2]，

h（a_4）= [a_4]

进而可以根据满同态定义证明 h 为 V 到 V/R 的满同态。

20 注意到：同余的代换性质以及集合运算。