中国地质大学（武汉）考试出题专用纸

教务处制

试卷类别 A B

使用班级 191041-4

使用学期 2005下

任课教师 吴杰、薛思清

教研室主任审核签字

考试课程名称：离散数学　　学时：80

考试方式：开卷，闭卷，笔试，口试，其它

考试内容：

注：1 本试卷共计12题，满分100分，考试时间120分钟；
　　2 每题均需要写出主要的求解步骤。

1.（5分）

求a,b,c,d这4个字母的全排列中不允许出现ab和cd的排列个数。

2.（10分）

设R是集合A={0,1,2,3}上的二元关系，已知R={(0,0),(0,3),(2,0),(2,1),(2,3),(3,2)}，则：

（1）写出R的关系矩阵；

（2）说明R是否是自反、反自反、对称、反对称、传递的；

（3）求r(R)，s(R)，t(R)。

3.（10分）

证明定义在实数集R上的关系S={(x,y)|x,y∈R，$\frac{x-y}{3}$是整数}是一个等价关系。

4.（6分）

判断下列命题公式的类型。

（1）$(P\equiv R)\wedge((\neg Q\wedge\neg S)\vee(Q\wedge S))$

（2）$(\neg P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow\neg P))$

（3）$(P\wedge Q)\equiv(P\vee Q)$

（4）$\neg((P\wedge Q)\rightarrow P)$

（5）$(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$

（6）$((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))\equiv(P\equiv Q)$

5.（9分）

求范式

（1）求命题公式$\neg(P\rightarrow Q)\equiv(P\rightarrow\neg Q)$的主析取范式和主合取范式；

（2）求谓词公式$\exists xP(x)\rightarrow(Q(y)\rightarrow\neg(\exists yR(y)\rightarrow\forall xS(x)))$的前束合取范式。

6.（10分）

将下列推理符号化并给出形式证明：

有理数都是实数，有的有理数是整数，因此有的实数是整数。

7.（10分）

h是代数结构V=<S;o>到代数结构V'=<S';*>的满同态映射，o与*为二元运算，ρ是S上的关系：对x,y∈S，xρy当且仅当h(x)=h(y)，则ρ是V上同余关系，V/ρ=<S/ρ;⊗>为V上的商代数，请证明：V/ρ与V'同构。

8.（8分）

（1）设S=R-{1}，S上定义运算⊗：a⊗b=a+b-a*b，其中，+，-，*是实数上的一般加法、减、乘法运算，请证明<S;⊗>是群；

（2）<P(S)，⊆>是集合S={1,2}的幂集P(S)及其上的包含关系构成偏序集合，请证明<P(S)，⊆>是格，并给出由其导出的格代数。

9.（7分）

设g、h是从群<G_1;*>到群<G_2;o>的同态，G={x|x∈G_1且g(x)=h(x)}，

（1）请证明：<G;*>是<G_1;*>的子群；

（2）<G;*>是<G_1;*>的正规子群吗？为什么？

10.（8分）

图G为n（n>2）个结点的完全简单图，则

（1）G是否为Euler图？

（2）G是否为平面图？

（3）若n=5，则G有多少棵生成树，有多少个不同构的有4条边的生成子图？

11.（6分）

设图G有n个结点，e条边，请证明：如果$e\geq C_{n-1}^{2}+2$，那么G为Hamilton图。

12.（11分）

若树T为完全m分树，其叶子结点数为t，

（1）T是否为二部图？T的色数是多少？

（2）若i为树T的分支结点数，请应用数学归纳法证明：t=(m-1)i+1；

（3）求解当m=5,t=9时树T的边数。

2005 下离散数学（A）参考答案

注：解答思路可能存在差异，描述方式也常常不唯一，下面仅仅给出典型的求解过程。

1. 设 E 为 a,b,c,d 这 4 个字母的全排列集合，A 为出现 ab 的排列集合，B 为出现 cd 的排列集合。由容斥原理，不允许出现 ab 和 cd 的排列个数为：
   $|E|-|A\cup B|=4!-(3!+3!-2!)=10$

2. （1）R 的关系矩阵是：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   （2）R 不是自反的，不是反自反的，不是对称的，不是反对称的，不是传递的；

   （3）r(R)={(0,0),(0,3),(1,1),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)}；

   s(R)={(0,0),(0,2),(0,3),(1,2),(2,0),(2,1),(2,3),(3,0),(3,2)}；

   t(R)={(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)}。

3. (1)对任意 x∈R,有 $\frac{x-x}{3}$=0，即(x, x)∈S,所以 S 是自反的；

   (2)对任意 x, y∈R,设(x, y)∈S,则 $\frac{x-y}{3}$ 为整数，那么 $\frac{y-x}{3}$ 也为整数，即(y, x)∈S,所以 S 是对称的；

   (3)对任意 x, y, z∈R,设(x, y)∈S 且(y, z)∈S，则 $\frac{x-y}{3}$，$\frac{y-z}{3}$ 为整数，那么 $\frac{x-y}{3}+\frac{y-z}{3}=\frac{x-z}{3}$ 也为整数，即(x, z)∈S,所以 S 是可传递的；

   由(1)(2)(3)知 S 是等价关系。

4.

（1）可满足式　（2）可满足式　（3）可满足式

（4）矛盾式　（5）重言式　（6）重言式

5. （1）主析取范式：$(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$　　主合取范式：$(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$

   （2）前束合取范式：$\forall x\exists z\exists u((\neg P(x)\vee\neg Q(y)\vee R(z))\wedge(\neg P(x)\vee\neg Q(y)\vee\neg S(u)))$

6. 令 Q(x)：x 是有理数　R(x)：x 是实数　I(x)：x 是整数　则整个命题符号化为：

   $\forall x(Q(x)\to R(x))$, $\exists x(Q(x)\wedge I(x))$ $|-$ $\exists x(R(x)\wedge I(x))$

证明：

(1)	$\exists x(Q(x)\wedge I(x))$	P
(2)	$Q(a)\wedge I(a)$	ES(1)
(3)	Q(a)	I(2)
(4)	I(a)	I(2)
(5)	$\forall x(Q(x)\to R(x))$	P
(6)	$Q(a)\to R(a)$	US(5)
(7)	R(a)	I(3)(6)

(8) R(a)∧I(a)　　　　　I(4)(7)

(9) ∃x(R(x)∧I(x))　　　EG(8)

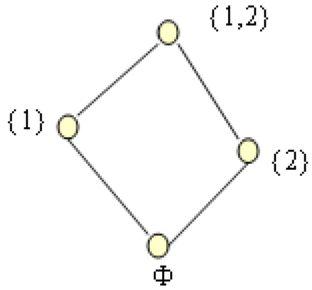
7. 要证明 Vρh 与 V'同构，需要证明如下几点：
1）同型：Vρh 与 V'同型？
2）双射： 定义映射 f，并证明其为双射
定义映射 f：因为 h 是一个从 S 到 S'的满射， S/ρh 的可允许划分，所以对于每一个[x]ρh ∈ S/ρh 必存在某个 x'∈S'，使得 x'=h(x)，于是可以如下定义函数：f: S/ρh → S'，使得 f([x]ρh)=h(x)。
f 为满射：对于任意 x'∈S'，必存在 x∈S，使得 h(x) =x'，从而存在[x]ρh ∈S/ρh， ，使得 f([x]ρh)=h(x)，所以 f 是满射。
f 为单射：若 h(x)=h(y)，则 xρhy，于是由ρh 的定义知[x]ρh=[y]ρh，所以 f 是单射
3）满足同态方程
由于 f([x]ρh⊗[y]ρh)=f([xoy]ρh)=h(xoy)=h(x)*h(y)

=f([x]ρh)*f([y]ρh).

所以，前述运算与双射函数满足同态方程。
综上， Vρh 与 V'同构。

8. （1）从以下几方面进行证明：
①封闭性：
∀a, b∈S, a⊗b=a+b−a*b∈R
若 a⊗b=1 即 a+b−a*b=1 (a−1)*(1−b)=0
a=1 或 b=1，矛盾，故 a⊗b≠1
但 a ⊗b∈R，故 a ⊗b∈S
②结合性:略.
③单位元: 对于∀a∈S, 若 e 为单位元，即需要满足 a⊗e=a 即 a+e−a*e=a, e*（1−a）=0, 所以 e=0（注意到 a≠1）.
即有 a⊗0=a 又 0⊗a=0+a−0*a=a, 故 e=0 为单位元。
④逆元:
∀a∈S, 若 a⊗b=0 即 a+b−a*b=0, 即 b=a/(a−1)∈S（注意到 a≠1）
即有 a⊗（a/(a−1)）=0
又，（a/(a−1)）⊗a
= a/(a−1) +a−（a*a）/(a−1)=0
故 a/(a−1)为 a 之逆元.
综合上述几方面知<S；⊗>是群.

（2）构造出偏序集合<P(S)，⊆>的哈斯图如下图所示，显然可以判断，∀a，b∈ P(S)，都有最大下界、最小上界，且 a∧b=a∩b, a∨b=a∪b，则<P(S)，⊆>为格。其导出的格代数为<P(S)，∧, ∨>.



9.（1）设 e,e’分别为 G_1,G_2 的单位元，显然，g(e)=h(e)=e’，故 $e\in G$，从而 $G\neq\phi$.
由题设 $G\subseteq G_1$，要证明 $\langle G;*\rangle$ 是 $\langle G_1;*\rangle$ 的子群，需要证明对于 $a,b\in G$，$a*b^{-1}\in G$.
而 $a*b^{-1}\in G1$ 是显然的，故只需要证明 $g(a*b^{-1})=h(a*b^{-1})$，
即：$g(a)\ o\ g(b^{-1})= h(a)\ o\ h(b^{-1})$，记为 (1)式.
而由 $a,b\in G$ 知，$g(a)=h(a)$ （记为（2）式），且 $g(b)=h(b)$（记为（3）式）.
而由 $g(e)=h(e)$ 即 $g(b*b^{-1})=h(b*b^{-1})$ 即 $g(b)\ o\ g(b^{-1})=h(b)\ o\ h(b^{-1})$，结合（3）式得：
$g(b^{-1})=h(b^{-1})$.
于是，再结合（2）式知（1）式成立.即：$g(a*b^{-1})=h(a*b^{-1})$.
所以，对于 $a,b\in G$，$a*b^{-1}\in G$.即 $\langle G;*\rangle$ 是 $\langle G_1;*\rangle$ 的子群.
（2）$\langle G;*\rangle$ 不是 $\langle G1;*\rangle$ 的正规子群，因为
要证明 $\langle G;*\rangle$ 是 $\langle G_1;*\rangle$ 的正规子群，需要证明对于 $b\in G,a\in G1$，有 $a*b*a^{-1}\in G$. 需要证明 $g(a*b*a^{-1})=h(a*b*a^{-1})$，
即：$g(a)\ o\ g(b) o\ g(a^{-1})= h(a)\ o h(b) o\ h(a^{-1})$，
这里，显然仅有条件 $g(b)=h(b)$，不能保证上式成立.

10.（1）G 显然是连通图，当 n 为奇数时，每结点度数均为偶数，存在欧拉回路，是欧拉图；当 n 为偶数是，每个结点度数均为奇数，不存在欧拉回路，不是欧拉图.
（2）当 n>=5 时，G 不是平面图.
（3）G 有（n=5）125 棵生成树，有 6 个不同构的四条边的生成子图.

11. 采用反证法.
假设 G 不是 Hamilton 图，则根据 Hamilton 图的判定定理，知至少存在两个结点的度数之和小于 n，则该二结点所关联的边的数目 m1 小于 n，即 m1<=n-1，而当其余 n-2 个结点构成完全图时，其所关联的边数目 m2 为最大值，即 m2<=(n-2)(n-3)/2.
G 的总的边数为 m1+m2，从而 m=m1+m2<=n-1+(n-2)(n-3)/2=C(n-1,2)+1<C(n-1,2)+2.与题设 m>=C(n-1,2)矛盾.
所以，图 G 为 Hamilton 图.

12.（1）由于树 T 的每层的结点均仅仅与其上一层或下一层结点相邻，因此，可以将树 T 的第一、三、五……层结点均置于集合 V1 中，第二、四、六……层结点均置于集合 V2 中，显然，T 的任意边相关联的两结点分别在上述二集合中，且二集合内任意二结点间不相邻.因此，树 T 是二部图.
按照（1），将 V1 种结点着色 r，V2 种结点着色 g. 这显然满足着色条件,因此，树 T 的色数为 2.
（2）对分支结点树 i 进行归纳.

1) 当 i=0，1 时，结论显然成立。

2) 设 i=k 时， $t=(m-1)i+1$ 成立。

考虑 i=k+1 时，设 T 是具有 k+1 个分枝点，t 片叶的完全 m 分树。从 T 中找到一个具有 m 片叶的分枝点 v，去掉 v 的 m 片叶，得到树 T'。T'仍是一个 m 分树，且具有 t-(m-1)片叶，k 个分枝点。由归纳假设，对于 T'有：

$$(t-(m-1)) = (m-1)\,(i-1)+1$$

即 $t=(m-1)i+1$，亦即对于 i=k+1 时，结论仍成立。

由归纳原理，得证。

（3）T 的边数为结点数减 1，即：$(i+t)-1=((t-1)/(m-1)+t)-1=m(t-1)/(m-1)=5(9-1)/(5-1)=10.$