Ch8-T17 设 f、g 是从群<A；*>到群<B；o>的同态，$C=\{x|x\in A$ 且 $f(x)=g(x)\}$，请证明：<C；*>是<A；*>的子群.

证明：显然 $C\subseteq A$，需要证明对$\forall x,y\in C$，$xy^{-1}\in C$，

即 $f(xy^{-1})=g(xy^{-1})$，

亦即 $f(x)f(y^{-1})=g(x)g(y^{-1})$。

由 $x\in C$，有 $f(x)=g(x)$，只需要证明 $f(y^{-1})=g(y^{-1})$。

设 e′ 为 B 的单位元。

由 $e*e=e$，有 $f(e*e)=f(e)$，即 $f(e)of(e)=f(e)oe'$，从而 $f(e)=e'$，类似地，$g(e)=e'$，

由 $f(e)=g(e)=e'$,有 $f(yy^{-1})=g(yy^{-1})$，亦即 $f(y)f(y^{-1})=g(y)g(y^{-1})$，

由 $y\in C$，有 $f(y)=g(y)$，

于是群 B 中应用消去律可得 $f(y^{-1})=g(y^{-1})$。

综上，<C；*>是<A；*>的子群。

Ch8-T30 设 G 和 H 分别是 m 阶与 n 阶群，若 G 到 H 存在单一同态，则 $m|n$。

设 f 为 G 到 H 的单同态映射，则 f 的同态象 f(G)是 H 的子群($?_1$)，
f 为 G 到 f(G)的双射($?_2$)，f(G)为 m 阶群，从而知 $m|n$.

$?_1$:

需要证明对$\forall h_1,h_2\in f(G)$，$h_1h_2^{-1}\in f(G)$，即证明存在 $g\in G$，使得 $f(g)=h_1h_2^{-1}$。

注意到，$h_1,h_2\in f(G)$时，存在 $g_1,g_2\in G$，使得 $f(g_1)=h_1$，$f(g_2)=h_2$。

令 e，e'分别为 G，H 的单位元。

注意到，ee=e，从而 f(ee)=f(e)，即 $f(e)f(e)=f(e)e'$，在 H 中应用消去律得 $f(e)=e'$，

于是有，$f(g_2g_2^{-1})=f(g_2)f(g_2)^{-1}$，即 $f(g_2)f(g_2^{-1})=f(g_2)f(g_2)^{-1}$，在 H 中应用消去律得：

$f(g_2^{-1})=f(g_2)^{-1}$。

从而有 $h_1h_2^{-1}=f(g_1)f(g_2)^{-1}=f(g_1)f(g_2^{-1})=f(g_1g_2^{-1})$，

即，对$\forall h_1,h_2\in f(G)$，存在 $g_1g_2^{-1}\in G$，使得 $f(g_1g_2^{-1})=h_1h_2^{-1}$.，其中，$g_1,g_2\in G$，$f(g_1)=h_1$，$f(g_2)=h_2$。

Ch8-T33 设 f 是群<G; *>到群<G′; o>的同态映射, <H′; o>是<G′; o>的子群, $H=f^{-1}(H')$。证明<H；*>是<G；*>的子群，并且若<H′；o>是<G′；o>的正规子群，则<H；*>是<G；*>的正规子群。

设 e 为 G 上之单位元，e′ 为 G′ 上之单位元，

由题设 $H\subseteq G$，显然 $e'\in H'$

且注意到，ee=e，从而 f(ee)=f(e)，即 $f(e)f(e)=f(e)e'$，在 G′ 中应用消去律得 $f(e)=e'$。

故 $e\in H$ 从而 $H\neq\phi$。

下面首先证明 H 为 G 子群，之后证明其为 G 之正规子群。

对$\forall a$，$b\in H$,有 a'，$b'\in H'$，

使得 $a'=f(a)\in H'$，$b'=f(b)\in H'$，且$(f(b))^{-1}\in H'$ (H′ 为 G′ 之子群)，

又由 $f(b)\circ(f(b))^{-1}=e' =f(e)=f(b*b^{-1})=f(b)\circ f(b^{-1})$，有$(f(b))^{-1}= f(b^{-1})$,

于是,由 $f(a*b^{-1})=f(a)\circ f(b^{-1})=f(a)\circ (f(b))^{-1}\in H'$，

故 $a*b^{-1}\in H$ 所以 H 为 G 之子群。

进一步，类似地，对$\forall h\in H$,有 $a\in G$，有 $a'\in G'$，$h'\in H'$，

使得 $a' = f(a)\in G'$，$h' = f(h)\in H'$，且$(f(h))^{-1}\in H'$，

于是 $f(a*h*a^{-1}) = f(a)\circ f(h)\circ f(a^{-1}) = f(a)\circ f(h)\circ(f(a))^{-1}\in H'$ ($f(h)\in H'$，H' 为 G' 之正规子群).

从而 $a*h*a^{-1}\in H$。

所以 H 为 G 之正规子群。

关于格

Ch9-T7 设 $S=\{x \mid x\in R, 0\le x\le 1\}$，≤是 S 上的小于等于关系。证明<S；≤>是格。该格的运算是什么?

Ch9-T8 表 9.9 是一个关于格 L={a, b, c, d, e, f}中∨运算的运算表。

1）请完成该运算表；

2）画出 L 的哈斯图。

表 9.9 运算表

∨	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	e	e	a
b	a	b	a	d	e	b
c	a	a	c	e	e	c
d	e	d	e	d	e	d
e	e	e	e	e	e	e
f	a	b	c	d	e	f

1）注意到运算的对称性

2）注意到 e，f 的特殊性，并进一步分析结构，如 a 的特点，再进一步确定相关元素关系，最终确定哈斯图。

Ch9-T9 证明：在格<L；≤>中，如果 a≤b≤c，则有

1) $a\vee b=b\wedge c$

2) $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)=b=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

按照求最小上界、最大下界计算即可。

Ch9-T10 证明：格<L; ≤>中，对任意 $a,b,c,d\in L$，有

1) $(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\le(a\vee c)\wedge(b\vee d)$。

2) $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\le(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$。

1)任意 $a,b,c,d\in L$,有

$a\le a\vee c$, $b\le b\vee d$ 又 $a\wedge b\le a$，$a\wedge b\le b$,

于是由传递性有 $a\wedge b\le a\vee c$, $a\wedge b\le b\vee d$,

从而 $a\wedge b\le(a\vee c)\wedge(b\vee d)$. （1）

类似地，$c\wedge d\le(a\vee c)\wedge(b\vee d)$.（2）

于是由（1）（2）有$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\le(a\vee c)\wedge(b\vee d)$.

2) 由 $a\le a\vee b$, $b\le a\vee b$,

又 $a\wedge b\le a$, $b\wedge c\le b$, $c\wedge a\le a$,

于是由传递性有，$a\wedge b\le a\vee b$, $b\wedge c\le a\vee b$, $c\wedge a\le a\vee b$

从而有$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\le a\vee b$,

有$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\le(a\vee b)$，（1）

类似地，

$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\le(b\vee c)$，（2）

$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\le(c\vee a)$，（3）

由（1）（2）得

$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\le(a\vee b)\wedge(b\vee c)$，（4）

由（3）（4）有

$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\le(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$。

格的基本性质

4) 最大下界描述之一

$a\wedge b\le a$ 对偶 $a\vee b\ge a$

$a\wedge b\le b$ 对偶 $a\vee b\ge b$

5）最大下界描述之二

$c\le a, c\le b \Rightarrow c\le a\wedge b$

对偶 $c\ge a, c\ge b \Rightarrow c\ge a\vee b$

格的基本性质

10) $a\le c, b\le d \Rightarrow a\wedge b\le c\wedge d$

$a\vee b\le c\vee d$

Ch9-T11 证明：格<L；≤>中，对任意 $a,b,c\in L$，有

$((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))=a\wedge b$。

主要利用分配不等式证明：

分析左边表达式，有

$(a\wedge b)\vee((a\wedge c)\wedge(b\wedge c))\le((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))$

即$(a\wedge b)\vee((a\wedge b)\wedge c)\le((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))$

即 $a\wedge b\le((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))$ （1）

又

$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\le a\wedge(b\vee c)$

$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\le b\wedge(a\vee c)$

于是有

$((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))\le(a\wedge(b\vee c))\wedge(b\wedge(a\vee c))$

即 $((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))\le(a\wedge b)\wedge((b\vee c)\wedge(a\vee c))$

有 $((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))\le(a\wedge b)$（2）

由（1）（2）即得：

$((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))=a\wedge b$。

分配不等式

$a\vee(b\wedge c)\le(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

对偶 $a\wedge(b\vee c)\ge(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$