回顾

第三章 线性方程组$Ax=b$的数值解法

3.1 引言
3.2 线性代数的基础知识
3.3 直接解法：
- 3.3.1 Gauss消去法
- 3.3.2 三角分解法
- 3.3.3 直接解法的误差分析

3.4 迭代解法
- 3.4.1 迭代法的基本概念
- 3.4.2 Jacobi迭代法
- 3.4.3 Gauss-Seidel迭代法
- 3.4.4 超松弛(SOR)迭代法（选讲）

§ 3.4.1 迭代法的基本概念

➢回顾向量范数：

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

❶ 1-范数：$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

❷ 2-范数：$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}=\sqrt{(x,x)}$

❸ ∞-范数：$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$

非常重要

上述定义说明：根据向量范数的等价性，如果向量序列收敛，则对任何一种向量范数而言均收敛。

§ 3.4.1 迭代法的基本概念

回顾矩阵范数

非常重要

记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

❶1范数: $\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ 列和范数

❷ ∞ 范数: $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ 行和范数

❸2范数:

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1}=\left[\rho(A^TA)\right]^{1/2}$$

其中λ_1是A^TA 的最大特征值

$$\boxed{\rho(A)=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|}$$

谱半径

§3.3.2 三角分解法（LU分解）

回顾

本质

它是基本Gauss消元法的一种等价变形

在3.3.1节可以看到，求解上三角矩阵方程组很容易。现在介绍将给定矩阵A分解为下三角矩阵L和上三角矩阵U的乘积的概念，其中下三角矩阵L的主对角线为1，上三角矩阵U的对角线元素非零。

定义 3.4 如果非奇异矩阵A可表示为下三角矩阵L和上三角矩阵U的乘积

$$A = LU$$

则A存在一个三角分解。

如果 $|A| \neq 0$ 可三角分解，则4×4维矩阵表示如下，其中 $u_{kk} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

定理3.1 如果非奇异矩阵 $A \in R^{n\times n}$ 存在三角分解，即存在矩阵L和U满足

$$A = LU$$

则有

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

回顾

下面讨论如何得到矩阵的三角分解。

构造下列矩阵的三角分解：

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

解：通过将单位矩阵放在 A 的左边来构造矩阵 L。对每个用来构造上三角矩阵的行变换，将倍数 m_{ij} 放在左边的对应位置。初始矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3&-1\\-2&-4&5\\1&2&6\end{bmatrix}$$

用第 1 行消去矩阵 A 的第 1 列中 a_{11} 下面的元素。第 2 行和第 3 行分别减去第 1 行乘以倍数 $m_{21}=-0.5$和 $m_{31}=0.25$。将倍数放到矩阵的左边相应位置，结果为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&0\\0.25&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3&-1\\0&-2.5&4.5\\0&1.25&6.25\end{bmatrix}$$

用第 2 行消去第 2 列中对角线下方的元素。第 3 行减去第 2 行乘以倍数 $m_{32}=-0.5$，再将倍数放入矩阵左边，则可得到矩阵 A 的三角分解：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&0\\0.25&-0.5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3&-1\\0&-2.5&4.5\\0&0&8.5\end{bmatrix}\tag{8}$$

回顾

L　　U

§ 3.3.3 直接解法的误差分析

一、扰动方程组的误差界

由实际问题得到的方程组的系数矩阵或者常数向量的元素，本身会存在一定的误差；这些初始数据的误差在计算过程中就会向前传播，从而影响到方程组的解。

初始数据误差和方程组的近似解的误差之间关系

例3.5 考察方程组：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3.0001 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 4.0001 \end{bmatrix}$$

精确解为 $x^* = (1 \quad 1)^T$

设方程组存在扰动

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2.9999 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 4.0002 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -0.0001 & 0 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

精确解为 $x^* = (-2 \quad 10)^T$

上例说明该方程组的解对初始元素的扰动非常敏感。

设方程组为$Ax=b$ 系数矩阵A和常数向量b的扰动δA和δb，

实际求解的方程组为 $(A+\delta A)x=(b+\delta b)$

定义3.3

如果 δA 和 δb 很小，而 δx 很大，则成方程组$Ax=b$是病态方程组，称系数矩阵A为关于求解方程组或求逆的病态矩阵。反之，称方程组$Ax=b$是良态方程组，称系数矩阵A为关于求解方程组或求逆的良态矩阵。

$$\boxed{\text{病态方程组对任何算法都将产生数值不稳定性}}$$

➢求解病态方程组时，常用的几种处理原则

❶采用高精度的算术运算；

❷采用某些特殊的数值方法求解；

❸重新寻找出现病态的原因，改变原问题的提法。

❹采用预处理方法；

$$Ax=b \Leftrightarrow PAQQ^{-1}x=Pb \Leftrightarrow \bar{A}\bar{x}=\bar{b}$$

选讲

其中 $\bar{A}=PAQ;\bar{x}=Q^{-1}x;\bar{b}=Pb$

可逆矩阵 P和Q 的选择要求满足：PAQ的条件数大于A的条件数，其中矩阵A的条件数记为

$$cond(A) := \|A\|\,\|A^{-1}\|$$

更多关于条件数的介绍，详见相关数学论著

3.4 线性方程组的迭代解法

这一节主要讲述如何把第2章介绍的迭代法扩展到更高维数。

思路

与解$f(x)=0$ 的不动点迭代相似，将方程组$\boldsymbol{Ax=b}$等价改写成 $\boldsymbol{x=Bx+f}$ 形式，从而建立迭代格式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

从 x0 出发，生成迭代序列$\{x^{(k)}\}$

迭代法是一种逐次逼近的方法,与直接法比较,具有:
程序简单,存储量小的优点。
特别适用于求解系数矩阵为大型稀疏矩阵的方程组。

上述定义说明：根据矩阵范数的等价性，如果矩阵序列收敛，则对任何一种矩阵范数而言均收敛。

定义3.4（矩阵序列的极限）

定义了矩阵范数$\|\cdot\|$的空间$\boldsymbol{R}^{n\times n}$，如果$\exists \boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$使得

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A}\right\|=0$$

则称$\{A^{(k)}\}$收敛于A，记作$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}$

选用F-范数

$$\lim_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|_F=0\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}a_{ij}^{(k)}=a_{ij};i,j=1,2,\cdots,n$$

例3.6：

$$A^{(k)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{k} & 1 & \frac{k}{2k+1}\\ 0 & ke^{-k} & k^2e^{-k}\\ \frac{1}{k^2} & -1 & e^{-k}\sin k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

迭代公式的构造

➢迭代法的一般迭代格式：

$$x^{(k+1)} = F_k(x^{(k)}, x^{(k-1)}, \cdots, x^{(k-m)}); k = 0,1,\cdots$$

第k+1步与前m+1步有关，称之为多步迭代法 $(m \geq 1)$

m=0称之为单步迭代法 $x^{(k+1)} = F_k(x^{(k)}); k = 0,1,\cdots$

如果F_k是线性的，称之为单步线性迭代法，即

$$x^{(k+1)} = B_k x^{(k)} + f_k; k = 0,1,\cdots$$

迭代矩阵

如果B_k 和 f_k 与k无关，称之为单步定常线性迭代法：

$$\boxed{x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f;k = 0,1,\cdots}$$

设 $A \in R^{n\times n}, b \in R^n, \det(A) \neq 0$ 如果方程组

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Bx + f$$

则可以构造单步定常线性迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

当迭代公式产生的序列$\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$收敛到方程组的解 x^*

即 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$，则称该迭代法是收敛的。

定义3.5　下面三个命题是等价的：

重要

❶ 迭代法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$ 收敛；

❷ $\rho(\boldsymbol{B}) < 1$

❸ 至少存在一种从属矩阵范数 $\|\cdot\|$，使得 $\|B\| < 1$

由于谱半径不易计算，实际验证时主要利用❸，采用矩阵的1-范数、∞-范数或者F-范数。

➢迭代法的收敛速度：

设迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 收敛，即 $\rho(B) < 1$

定义3.6

$$R_k(B) = -\ln \|B^k\|^{\frac{1}{k}}$$

平均压缩率

称之为迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 的平均收敛率。

$$x^{(k)} - x^* = B(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = B^k(x^{(0)} - x^*)$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \|B^k\| \|(x^{(0)} - x^*)\|$$

上式说明：$\|B^k\|$可看作第k次迭代误差范数的压缩率

记 $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ $\qquad e^{(k)} = B^k e^{(0)}$

$$\left\| e^{(k)} \right\| \le \left\| B^k \right\| \left\| e^{(0)} \right\| \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \exists K, k > K, \left\| B^k \right\| \le \varepsilon$$

$$\left\| B^k \right\| \le \varepsilon \Leftrightarrow k \ge \frac{-\ln \varepsilon}{-\frac{1}{k}\ln \left\| B^k \right\|} = \boxed{\frac{-\ln \varepsilon}{-\ln \left\| B^k \right\|^{\frac{1}{k}}}}$$

上式说明：最小迭代次数与 $-\ln \left\| B^k \right\|^{\frac{1}{k}}$ 成反比

定义3.7

$$\boxed{R(B) = -\ln \rho(B)}$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}\left\|B^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \rho(B)}$$

称之为迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 的渐进收敛率，或者渐进收敛速度，简称收敛速度。

迭代次数的近似估计式 $k \approx \dfrac{-\ln \varepsilon}{R(B)}$

上式说明：谱半径$\rho(B)$越小，收敛速度越快。

§3.4.2 Jacobi（雅可比）迭代法

设方程组 $Ax = b; A = (a_{ij})_{n\times n}, b = (b_i)_{1\times n}; \det(A) \neq 0$

将系数矩阵分裂为： $A = D - L - U$

其中 $D = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

$$-L = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad -U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \cdots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

如果 $a_{ii} \neq 0(i=1,2,\cdots,n)$ 原方程组可化为

$$x = D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b \boxed{= Bx + f}$$

其中 $B = D^{-1}(L+U) = (I - D^{-1}A);\ f = D^{-1}b$

相应的迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f;k = 0,1,2,\cdots$

非常重要

上述方法称为Jacobi迭代法，简称J法或简单迭代法

分量形式：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}};i = 1,2,\cdots,n$$

例3.7

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15 \end{aligned}$$

上述方程可表示成如下形式:

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$

$$y = \frac{21 + 4x + z}{8}$$

$$z = \frac{15 + 2x - y}{5}$$

这样就提出了下列雅可比迭代过程:

$$x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4}$$

$$y_{k+1} = \frac{21 + 4x_k + z_k}{8}$$

$$z_{k+1} = \frac{15 + 2x_k - y_k}{5}$$

如果从 $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1,2,2)$ 开始,则上式中的迭代将收敛到解(2,4,3)。将 $x_0 = 1, y_0 = 2$ 和 $z_0 = 2$ 代入上式中每个方程的右边,即可得到如下新值:

$$x_1 = \frac{7 + 2 - 2}{4} = 1.75$$

$$y_1 = \frac{21 + 4 + 2}{8} = 3.375$$

$$z_1 = \frac{15 + 2 - 2}{5} = 3.00$$

新的点 $P_1=(1.75,3.375,3.00)$ 比 P_0 更接近(2,4,3)。使用迭代过程(3)生成点的序列 $\{P_k\}$ 将收敛到解(2,4,3)(如表 3.2 所示)。 ■

表 3.2　求解线性方程组(1)的收敛的雅可比迭代

k	x_k	y_k	z_k
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.375	3.0
2	1.84375	3.875	3.025
3	1.9625	3.925	2.9625
4	1.99062500	3.97656250	3.00000000
5	1.99414063	3.99531250	3.00093750
⋮	⋮	⋮	⋮
15	1.99999993	3.99999985	2.99999993
⋮	⋮	⋮	⋮
19	2.00000000	4.00000000	3.00000000

这个过程称为**雅可比迭代**,可用来求解某些类型的线性方程组。经过 19 步迭代,迭代过程收敛到一个精度为 9 位有效数字的近似值(2.00000000,4.00000000,3.00000000)。

§3.4.3 Gauss-Seidel（高斯-赛德尔）迭代法

在Jacobi迭代公式中，计算$x_i^{(k+1)}$时，利用已经算出来的新的$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$值，从而得到Gauss-Seidel迭代法。

Gauss-Seidel迭代法是Jacobi迭代法的一种改进

非常重要

➢ G-S迭代法的分量形式：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}; i = 1, 2, \cdots, n$$

例3.8：利用Jacobi和Gauss-Seidel迭代法求解方程组

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}$$

重要

解：

Jacobi 迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (14 - 3x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \big/ 10 \\ x_2^{(k+1)} = (-5 - 2x_1^{(k)} - 3x_3^{(k)}) \big/ (-10) \\ x_3^{(k+1)} = (14 - x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) \big/ 10 \end{cases}$$

Gauss-Seidel迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(14 - 3x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \Big/ 10 \\ x_2^{(k+1)} = \left(-5 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)}\right) \Big/ (-10) \\ x_3^{(k+1)} = \left(14 - x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)}\right) \Big/ 10 \end{cases}$$

取初值 $x = (0 \quad 0 \quad 0)^T$

重要

计算结果

Jacobi迭代法

要求精度	迭代次数	方程组的近似解
0.001	9	(1.0002507 1.0000694 1.0002507)
0.0001	10	(0.9999541 1.0001253 0.9999541)
0.00001	14	(0.9999981 1.0000020 0.9999981)

Gauss-Seidel迭代法

要求精度	迭代次数	方程组的近似解
0.001	5	(0.9997916 0.9998479 1.0000664)
0.0001	7	(0.9999929 0.9999949 1.0000022)
0.00001	8	(1.0000013 1.0000009 0.9999996)

假设线性方程组Ax=b的矩阵A是严格对角占优的。则Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法的Matlab程序实现如下：

Jacobi.m

GaussSeidel.m

Jacobi.m

```
function X=jacobi(A,B,P,delta, max1)

% Input    - A is an N x N nonsingular matrix
%          - B is an N x 1 matrix
%          - P is an N x 1 matrix; the initial guess
%          - delta is the tolerance for P
%          - max1 is the maximum number of iterations
% Output - X is an N x 1 matrix: the jacobi approximation to
%            the solution of AX = B

N = length(B);
for k=1:max1
   for j=1:N
      X(j)=(B(j)-A(j,[1:j-1,j+1:N])*P([1:j-1,j+1:N]))/A(j,j);
   end
   err=abs(norm(X'-P));
   relerr=err/(norm(X)+eps);
   P=X';
      if (err<delta)|(relerr<delta)
     break
   end
end

X=X';
```

GaussSeidel.m

```
function X=GaussSeidel(A,B,P,delta, max1)
% Input    - A is an N x N nonsingular matrix
%          - B is an N x 1 matrix
%          - P is an N x 1 matrix; the initial guess
%          - delta is the tolerance for P
%          - max1 is the maximum number of iterations
% Output - X is an N x 1 matrix: the gauss-seidel
approximation to
%            the solution of AX = B

N = length(B);

for k=1:max1
   for j=1:N
      if j==1
        X(1)=(B(1)-A(1,2:N)*P(2:N))/A(1,1);
      elseif j==N
         X(N)=(B(N)-A(N,1:N-1)*(X(1:N-1))')/A(N,N);
      else
%X contains the kth approximations and P the (k-1)st
        X(j)=(B(j)-A(j,1:j-1)*X(1:j-1)'-
A(j,j+1:N)*P(j+1:N))/A(j,j);
      end
   end
 err=abs(norm(X'-P));
   relerr=err/(norm(X)+eps);
   P=X';
     if (err<delta)|(relerr<delta)
      break
   end
end

X=X';
```

作业3.3

在习题 1 到习题 8 中：

(a) 初始值 $P_0=0$，利用雅可比迭代求解 P_k，$k=1,2,3$。雅可比迭代收敛到解吗？

(b) 初始值 $P_0=0$，利用高斯－赛德尔迭代求解 P_k，$k=1,2,3$。高斯－赛德尔迭代收敛到解吗？

5.
$$\begin{aligned} 5x - y + z &= 10 \\ 2x + 8y - z &= 11 \\ -x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} 2x + 8y - z &= 11 \\ 5x - y + z &= 10 \\ -x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

算法与程序

4. 利用高斯－赛德尔迭代法求解下列带状方程。

$$\begin{array}{rrrrrrl}
12x_1 & -\ 2x_2 & +\ x_3 & & & & = 5 \\
-2x_1 & +\ 12x_2 & -\ 2x_3 & +\ x_4 & & & = 5 \\
x_1 & -\ 2x_2 & +\ 12x_3 & -\ 2x_4 & +\ x_5 & & = 5 \\
& x_2 & -\ 2x_3 & +\ 12x_4 & -\ 2x_5 & +\ x_6 & = 5 \\
& \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
& x_{46} & -\ 2x_{47} & +\ 12x_{48} & -\ 2x_{49} & +\ x_{50} & = 5 \\
& & x_{47} & -\ 2x_{48} & +\ 12x_{49} & -\ 2x_{50} & = 5 \\
& & & x_{48} & -\ 2x_{49} & +\ 12x_{50} & = 5
\end{array}$$

§ 3.4.4 超松弛(SOR)迭代法（选讲）

类似于Gauss-Seidel迭代法的改进方法，利用第k次迭代值和第k +1次的Gauss-Seidel迭代值作加权平均

Gauss-Seidel迭代法的计算公式：

$$\overline{x}_i^{(k+1)} \Leftarrow x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

作加权平均

$$x_i^{(k+1)} = \omega \overline{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega) x_i^{(k)}$$

➢超松弛(SOR)迭代法的分量形式：

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

其中ω称为松弛因子； $\omega = 1$时即为Gauss-Seidel迭代

➢**SOR迭代法的迭代矩阵：** 记 $A = D - L - U$

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega D^{-1}(b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = Sx^{(k)} + f$$ 其中 $$f = \omega(D - \omega L)^{-1} b$$

迭代矩阵 $$S = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$$

例3.9：写出SOR迭代法求解下列方程组的迭代格式

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{pmatrix}$$

解： SOR迭代法的迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \dfrac{1}{4}\omega(24 - 3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \dfrac{1}{4}\omega(30 - 3x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \dfrac{1}{4}\omega(-24 + x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

取初始向量 $x^{(0)} = (1 \quad 1 \quad 1)^T$

选取不同的 ω值进行计算，结果见下表

ω的值	要求精度	迭代次数	方 程 组 的 近 似 解
$\omega=1$	0.001	12	(3.0012790 3.9989342 -5.0002665)
	0.0001	16	(3.0001952 3.9998374 -5.0000407)
	0.00001	21	(3.0000186 3.9999845 -5.0000039)
$\omega=0.95$	0.001	12	(3.0020191 3.9982705 -5.0004444)
	0.0001	18	(3.0001673 3.9998567 -5.0000368)
	0.00001	23	(3.0000210 3.9999820 -5.0000046)
$\omega=1.25$	0.001	8	(2.9997451 4.0000653 -4.9998924)
	0.0001	10	(2.9999853 4.0000031 -4.9999935)
	0.00001	12	(2.9999993 4.0000001 -4.9999996)
$\omega=1.5$	0.001	13	(3.0006104 4.0001741 -5.0007434)
$\omega=1.95$	0.001	151	(2.9995106 4.0017780 -5.0027919)

二、SOR迭代法的收敛性：

定理3.5 对 $\forall A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$， 设其对角元皆非零，

则对所有实数ω，有 $\rho(S)\geq|\omega-1|$

其中 $S=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$

证明： $A=D-L-U$

设迭代矩阵S的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

$$\det(S)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

$$\begin{aligned}\det(S)&=\det(D-\omega L)^{-1}\det([(1-\omega)D+\omega U])\\&=\det D^{-1}\det[(1-\omega)D]=(1-\omega)^n\end{aligned}$$

$$|1-\omega|^n \le |\lambda_1||\lambda_2|\cdots|\lambda_n| \le \left(\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|\right)^n$$

$$\boxed{|1-\omega| \le \rho(S)}$$

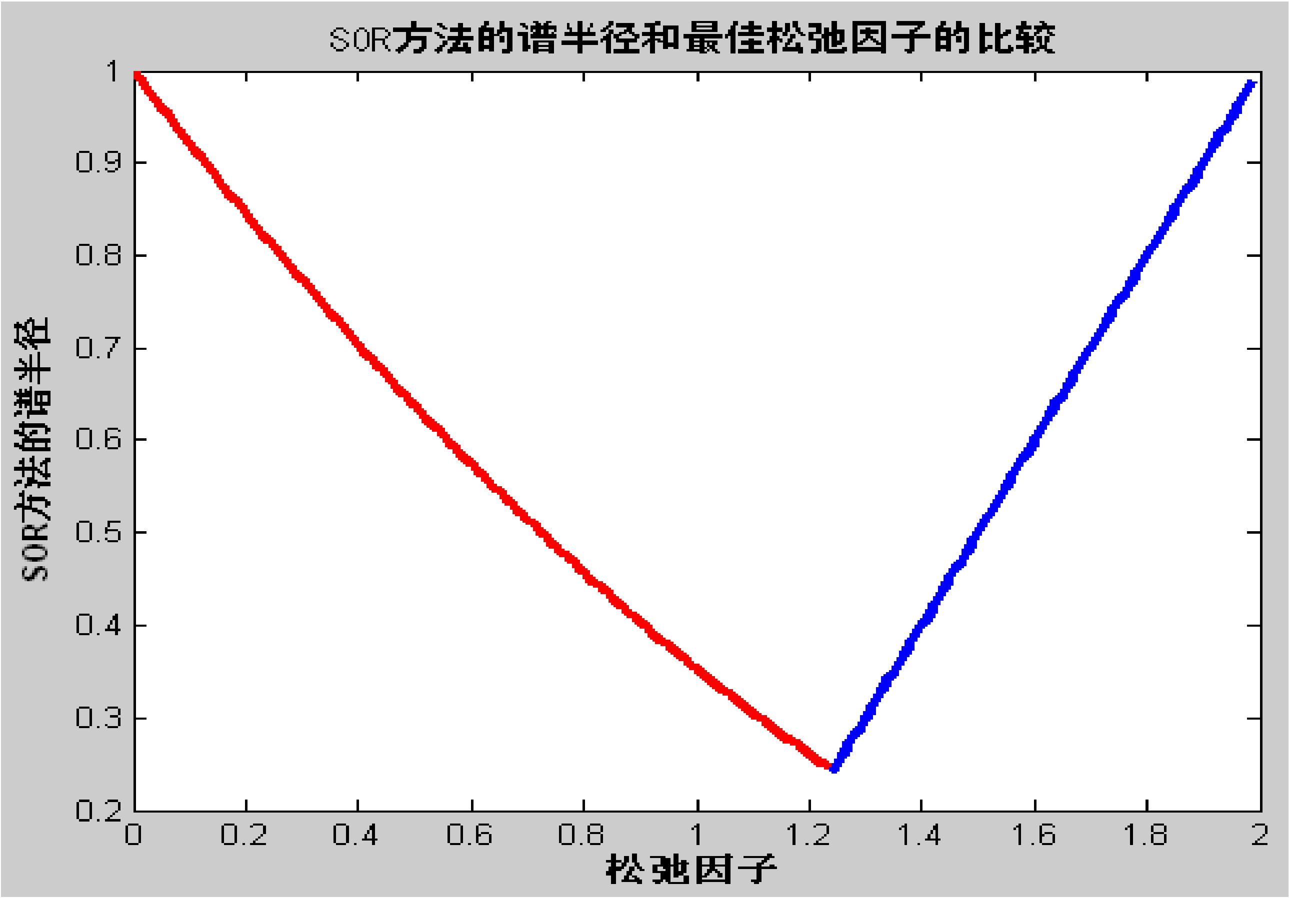
谱半径

推论3.1　如果求解方程组 $Ax=b$ 的SOR法收敛，则

$$|1-\omega|<1 \quad (0<\omega<2)$$

推论3.2　设 $A\in R^{n\times n}$为对称正定矩阵，且$0<\omega<2$

则求解方程组 $Ax=b$的**SOR**法收敛。



关于最佳松弛因子的进一步讨论，可参考文献

《数值计算方法》（下册），林成森著

《矩阵迭代分析》，**R.S.Varga**著，蒋尔雄等译

本章教学要求及重点难点

- 回顾线性代数基本知识
- 掌握Gauss消去法、三角分解法及其误差分析
- 掌握迭代过程的稳定性、敛散性证明
- 掌握迭代法的基本思想
- 重点： Jacobi迭代法、Gauss-Seidel迭代法的基本原理
- 难点：迭代法的收敛性分析与证明
- 了解超松弛(SOR)迭代法

课堂作业

分别用Jacobi和Gauss-Seidel迭代法编程求解下列方程组（结果保留4位小数）

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 23 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 29 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

注：用QQ软件自带的作业功能上交课程作业

作业上交需在周三下午上课前完成