第4.2节　方　差

一、随机变量方差的概念及性质

二、重要概率分布的方差

三、例题讲解

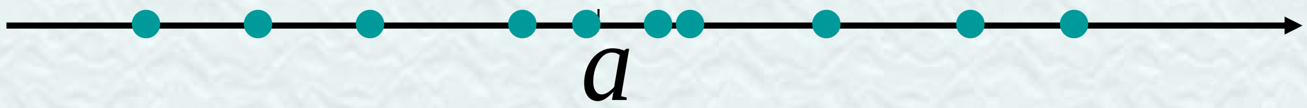
四、矩的概念

五、小结

上一节我们介绍了随机变量的数学期望，它体现了随机变量取值的平均水平，是随机变量的一个重要的数字特征.

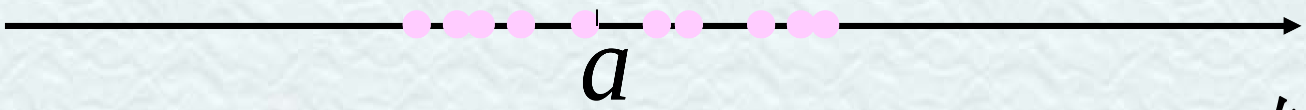
但是在一些场合，仅仅知道平均值是不够的.

例如，某零件的真实长度为a，现用甲、乙两台仪器各测量10次，将测量结果X用坐标上的点表示如图：



测量结果的均值都是 a

甲仪器测量结果



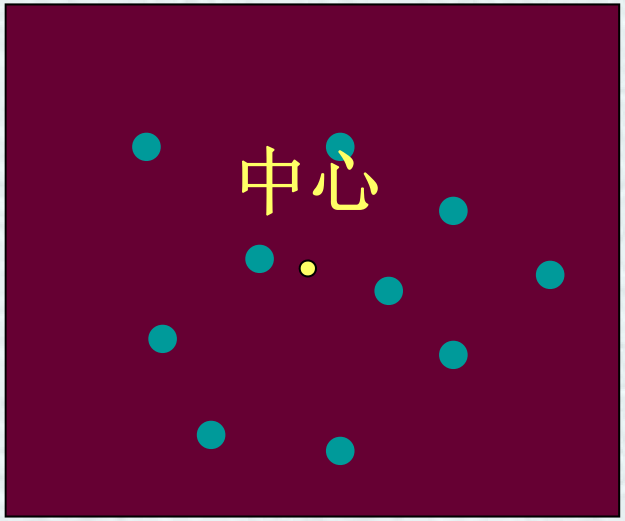
较好

乙仪器测量结果

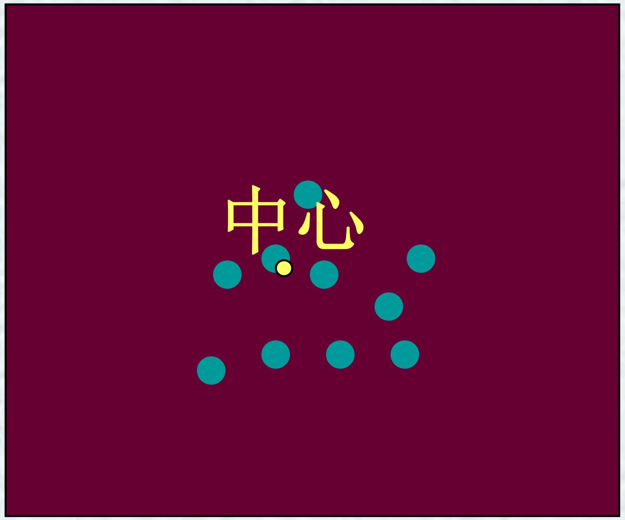
若让你就上述结果评价一下两台仪器的优劣，你认为哪台仪器好一些呢？

因为乙仪器的测量结果集中在均值附近

又如,甲、乙两门炮同时向一目标射击10发炮弹，其落点距目标的位置如图:



甲炮射击结果



乙炮射击结果

乙炮

你认为哪门炮射击效果好一些呢?

因为乙炮的弹着点较集中在中心附近.

由此可见,研究随机变量与其均值的偏离程度是十分必要的.那么,用怎样的量去度量这个偏离程度呢?容易看到

$$E\{|X - E(X)|\}$$

能度量随机变量与其均值**E(X)**的偏离程度. 但由于上式带有绝对值,运算不方便,通常用量

$$E\{[X - E(X)]^2\}$$

来度量随机变量**X**与其均值**E(X)**的偏离程度.

这个数字特征就是我们这一讲要介绍的

方差

一、随机变量方差的概念及性质

1. 方差的定义 (定义3.3)

设X是一个随机变量，若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，则称$E\{[X-E(X)]^2\}$为 X 的方差，记为 $D(X)$ 或 $\sigma^2(X)$，即

$$D(X)=\sigma^2(X)=E\{[X-E(X)]^2\}.$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差或均方差，记为$\sigma(X)$.

2. 方差的意义

方差是一个常用来体现随机变量X取值分散程度的量.如果$D(X)$值大, 表示X取值分散程度大, $E(X)$的代表性差;而如果$D(X)$值小, 则表示X的取值比较集中,以$E(X)$作为随机变量的代表性好.

方差刻划了随机变量的取值对于其数学期望的偏离程度 .

若X的取值比较集中，则方差$D(X)$较小；

若X的取值比较分散，则方差$D(X)$较大.

因此，$D(X)$是刻画X取值分散程度的一个量，它是衡量X取值分散程度的一个尺度。

3. 随机变量方差的计算

(1) 利用定义计算

离散型随机变量的方差

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$ 是 X 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 为X的概率密度.

(2) 利用公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

证明

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-E^2(X).$$

4. 方差的性质

(1) 设 C 是常数, 则有 $D(C)=0.$

证明 $D(C)=E(C^2)-[E(C)]^2=C^2-C^2=0.$

(2) 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有

$$D(CX)=C^2D(X).$$

证明 $D(CX)=E\{[CX-E(CX)]^2\}$

$$=C^2E\{[X-E(X)]^2\}$$

$$=C^2D(X).$$

(3) 设 X, Y 相互独立, $D(X), D(Y)$ 存在, 则

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

证明

$$D(X \pm Y) = E\{[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2\}$$

$$= E\{[X - E(X)] \pm [Y - E(Y)]\}^2$$

$$= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2$$

$$\pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

$$= D(X) + D(Y).$$

推广 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,则有

$$D(a_1X_1 \pm a_2X_2 \pm \cdots \pm a_nX_n)$$
$$= a_1^2D(X_1) + a_2^2D(X_2) + \cdots + a_n^2D(X_n).$$

(4) $D(X) = 0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 C,即 $P\{X = C\} = 1$.

(5) 若 $C \neq E(X)$,则 $D(X) < E(X - C)^2$

二、重要概率分布的方差

1. 两点分布

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $E(X)=1\cdot p+0\cdot q=p,$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=1^2\cdot p+0^2\cdot(1-p)-p^2=pq$$

2. 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,2,\cdots,n),$$

$$0<p<1.$$

则有

$$EX=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np[p + (1-p)]^{n-1}$$

$$= np.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(x)]^2$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)+X]$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$+ np$$

$$= n(n-1)p^2[p+(1-p)]^{n-2} + np$$

$$= (n^2-n)p^2 + np.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= (n^2-n)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p).$$

3. 泊松分布

设 $X \sim P(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots,\quad \lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = E[X(X-1) + X] = E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \cdot \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

所以 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

泊松分布的期望和方差都等于参数 λ.

4. 均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{1}{b-a}x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}(a+b).$$

结论 均匀分布的数学期望位于区间的中点.

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. 指数分布

设随机变量 X 服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad 其中\lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$=1/\lambda.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, dx - 1/\lambda^2$$

$$= 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}$$

指数分布的期望和方差分别为$1/\lambda$ 和$1/\lambda^2$.

6. 正态分布

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad \sigma>0,\quad -\infty<x<\infty.$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\mu+\sigma t,$

所以 $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

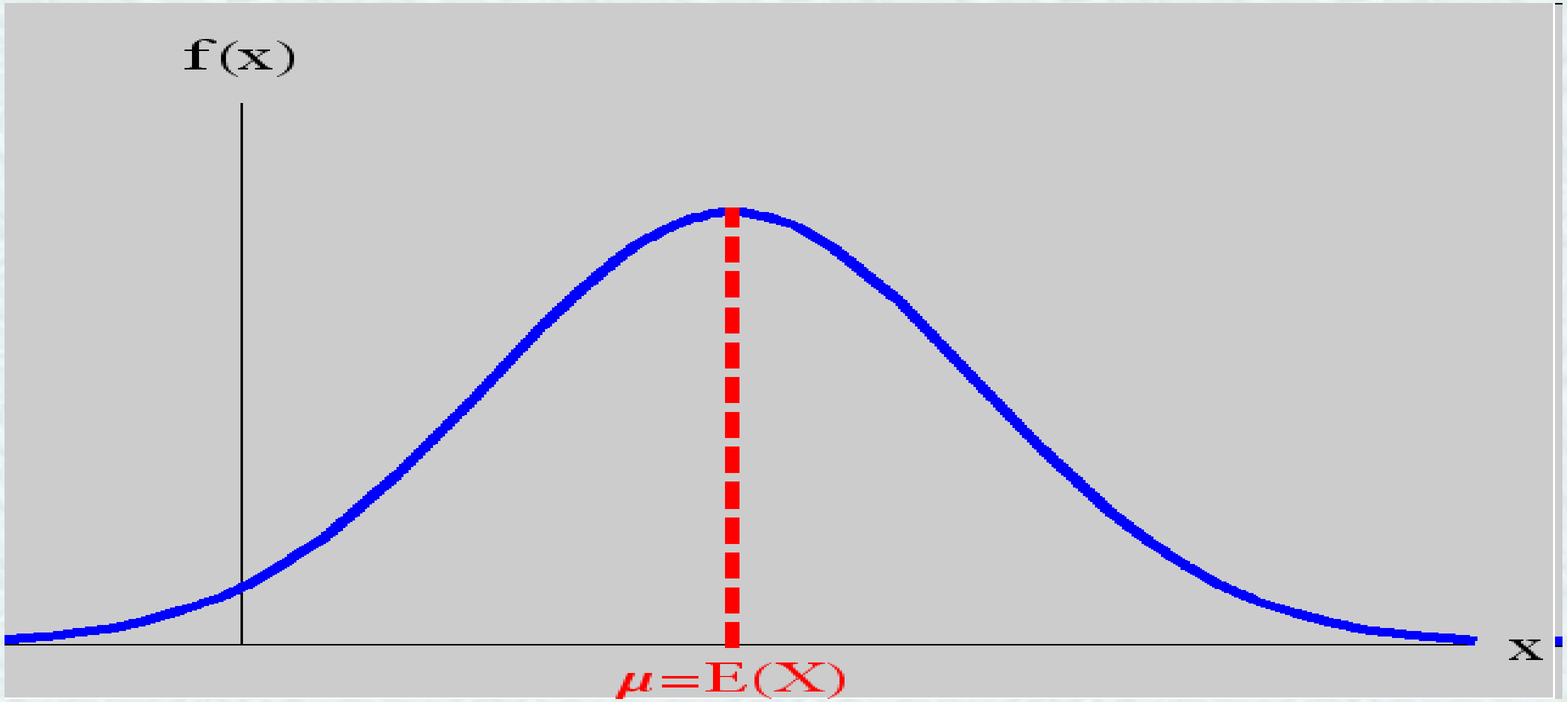
令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$,得

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

正态分布的期望和方差分别为两个参数 μ 和 σ^2.



分　　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0<p<1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n\geq 1,$ $0<p<1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda>0$	λ	λ
几何分布	$0<p<1$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
均匀分布	$a<b$	$a+b/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\lambda>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
正态分布	$\mu,\sigma>0$	μ	σ^2

分　布	参数	数学期望	方差
Gamma分布	$\alpha,\beta>0$	α/β	α/β^2

三、例题讲解

例1 设随机变量 X 具有概率密度

$$p(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $D(X)$.

解 $$E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x(1-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\,\mathrm{d}\,x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{6},$$

于是

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{1}{6}-0^2=\frac{1}{6}.$$

四、矩的概念

定义3.4 设 X 是随机变量,若$E(X^k)$, $k=1,2,\cdots$ 存在,称它为 X 的 k **阶原点矩**,简称 k **阶矩**.

记为 $\alpha_k = E(X^k)$

显然,当$k=1$时$\alpha_1 = E(X)$就是X的数学期望.

定义3.5 若 $E\{[X-E(X)]^k\}$, $k=2,3,\cdots$ 存在,称它为 X 的 k **阶中心矩**.记为

$$\mu_k = E(X-E(X))^k$$

显然$\mu_2 = D(X)$.

2. 说明

(1) 以上数字特征都是随机变量函数的数学期望；k阶原点矩和k阶中心矩可以互相唯一表示.

(2) 随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩,方差为二阶中心矩；

(3) 在实际应用中,高于 4 阶的矩很少使用.

三阶中心矩$E\{[X-E(X)]^3\}$主要用来衡量随机变量的分布是否有偏.

四阶中心矩 $E\{[X-E(X)]^4\}$ 主要用来衡量随机变量的分布在均值附近的陡峭程度如何.

五、小结

1. 方差是一个常用来体现随机变量X取值分散程度的量. 如果$D(X)$值大,表示X取值分散程度大, $E(X)$的代表性差; 而如果$D(X)$值小, 则表示X的取值比较集中, 以$E(X)$作为随机变量的代表性好.

2. 方差的计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2,$$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 p(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. 方差的性质

$$\begin{cases} 1^0 \ D(C)=0; \\ 2^0 \ D(CX)=C^2D(X); \\ 3^0 \ D(X\pm Y)=D(X)+D(Y). \end{cases}$$

4. 契比雪夫不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

5. 矩是随机变量的数字特征.

随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩;方差为二阶中心矩.

备份题

例1 已知 $E(X)=3, D(X)=5$,求 $E(X+2)^2$.

解 $E(X+2)^2=E(X^2+4X+4)$

$$=E(X^2+4X+4)=E(X^2)+4E(X)+4$$

$$=DX+(EX)^2+4EX+4$$

$$=5+3^2+4\times3+4=30.$$

所以 $E(X+2)^2=30.$

例2 设随机量 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<2, \\ cx+b, & 2\le x<4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

且已知 $E(X)=3$, $P\{1<X<3\}=\dfrac{4}{3}$, 求:

(1) a,b,c 的值;

(2) 随机变量 $Y=e^X$ 的数学期望与方差.

解 (1) 因为 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}\,x=1$,

所以 $1=\int_0^2 ax\,\mathrm{d}x+\int_2^4 cx+b\,\mathrm{d}x=2a+6c+2b,$

$E(X)=2,$

$\Rightarrow E(X)=\int_0^2 x\cdot ax\,\mathrm{d}x+\int_2^4 x\cdot(cx+b)\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}c+b=2,$$

$P\{1<X<3\}=\frac{3}{4},$

$\Rightarrow \int_1^2 ax\,\mathrm{d}x+\int_2^3 (cx+b)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}c+b=\frac{3}{4},$

因此有 $$\begin{cases} 2a+2b+6c=1, \\ \dfrac{8a}{3}+\dfrac{56c}{3}+b=2, \\ \dfrac{3a}{2}+b+\dfrac{5c}{2}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

解之得 $a=\dfrac{1}{4}, \quad b=1, c=-\dfrac{1}{4}.$

$$(2)\ E(e^X)=\int_0^2 e^x\cdot\frac{1}{4}x\,\mathrm{d}x+\int_2^4 e^x\cdot(-\frac{1}{4}x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}(e^2-1)^2,$$

$$E(e^X)^2=\int_0^2 e^{2x}\cdot\frac{1}{4}x\,\mathrm{d}x+\int_2^4 e^{2x}\cdot(-\frac{1}{4}x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{16}(e^4-1)^2,$$

得 $D(e^X)=E(e^{2X})-(Ee^X)^2$

$$=\frac{1}{16}(e^4-1)^2-[\frac{1}{4}(e^2-1)^2]^2=\frac{1}{4}e^2(e^2-1)^2.$$

例3 设随机变量 X 的分布密度为

$$p(x)=\begin{cases} x^n e^{-x}/n!, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

其中 n 为正整数，试证

$$P\{0 < X < 2(n+1)\} \ge \frac{n}{n+1}.$$

证明 因为$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n!}\int_0^{\infty} x\cdot x^n e^{-x}\mathrm{d}x$

$$=n+1,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^2\cdot x^n e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^2 \cdot x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = (n+2)(n+1),$$

所以 $D(X) = E(X^2) - (EX)^2$

$$= (n+2)(n+1) - (n+1)^2 = n+1.$$

又因为 $P\{0 < X < 2(n+1)\}$

$$= P\{-(n+1) < X - (n+1) < n+1\}$$

$$= P\{|X - (n+1)| < n+1\}$$

$$= P\{|X - E(X)| < n + 1\}$$

$$= 1 - P\{|X - E(X)| \geq (n+1)\} \geq 1 - \frac{D(X)}{(n+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}.$$

故得

$$P\{0 < X < 2(n+1)\} \geq \frac{n}{n+1}.$$

例5 设活塞的直径 (以cm计) $X \sim N(22.40, 0.03^2)$, 气缸的直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$, X, Y 相互独立. 任取一只活塞,任取一只气缸,求活塞能装入气缸的概率.

解 因为 $X \sim N(22.40, 0.03^2)$, $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$,

所以 $X - Y \sim N(-0.10, 0.0025)$,

故有 $P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\}$

$$= P\left\{\frac{(X-Y)-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}} < \frac{0-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}\right\} = \Phi(2) = 0.9772.$$

例6 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2$ 的方差 $D(Y)$.

解 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}-2,$$

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{\infty}x^4p(x)\,\mathrm{d}x\quad=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^4\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24,$$

因为 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2,$

所以 $D(X^2) = E(X^4) - [E(X^2)]^2$

$$= \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24 - \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)^2$$

$$= 20 - 2\pi^2.$$