3.3 条件分布

一、离散型随机变量的条件分布

二、连续型随机变量的条件分布

三、小结

一、离散型随机变量的条件分布

问题

考虑一大群人,从其中随机挑选一个人,分别用 X 和 Y 记此人的体重和身高,则 X 和 Y 都是随机变量,他们都有自己的分布.

现在如果限制 Y 取值从1.5米到1.6米,在这个限制下求 X 的分布.

定义 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量,对于固定的 j,若 $P\{Y=y_j\}>0$,则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

对于固定的 i,若 $P\{X=x_i\}>0$,则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

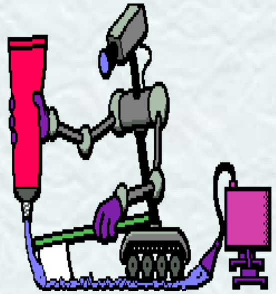
其中 $i,j=1,2,\cdots$.

例1 在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的. 其一是紧固 3 只螺栓,其二是焊接2 处焊点.以X表示由机器人紧固的螺栓紧固得不良的数目,以Y表示由机器人焊接的不良焊点的数目.据积累的资料知(X,Y)具有分布律:

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1) 求在 $X=1$ 的条件下, Y 的条件分布律;

(2) 求在 $Y=0$ 的条件下, X 的条件分布律.



解 由上述分布律的表格可得

$$P\{Y=0 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1, Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.030}{0.045},$$

$$P\{Y=1 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1, Y=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.010}{0.045},$$

$$P\{Y=2 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1, Y=2\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.005}{0.045},$$

即在 $X=1$ 的条件下，Y 的条件分布律为

$Y=k$	0	1	2
$P\{Y=k \mid X=1\}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

同理可得在 $Y=0$ 的条件下，X 的条件分布律为

$X=k$	0	1	2	3
$P\{X=k \mid Y=0\}$	$\frac{84}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{90}$

二、连续型随机变量的条件分布

定义 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$.若对于固定的 y, $f_Y(y)>0$, 则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度,记为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}x$ 为在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件分布函数,记为

$$P\{X \le x | Y = y\} \text{ 或 } F_{X|Y}(x|y),$$

即 $F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x | Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}x.$

同理定义在 $X = x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{X = x | Y \le y\} = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\,\mathrm{d}y.$$

请同学们思考

为什么不能用条件概率的定义来直接定义条件分布函数 $F_{X|Y}(x|y)$?

答 条件分布是指在一个随机变量取某个确定值的条件下,另一个随机变量的分布,即

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x|Y = y\}.$$

由于$P\{Y = y\}$可能为零(连续型时一定为零).故直接用条件概率来定义时,会出现分母为零.

因此,在条件分布中,作为条件的随机变量的取值是确定的数.

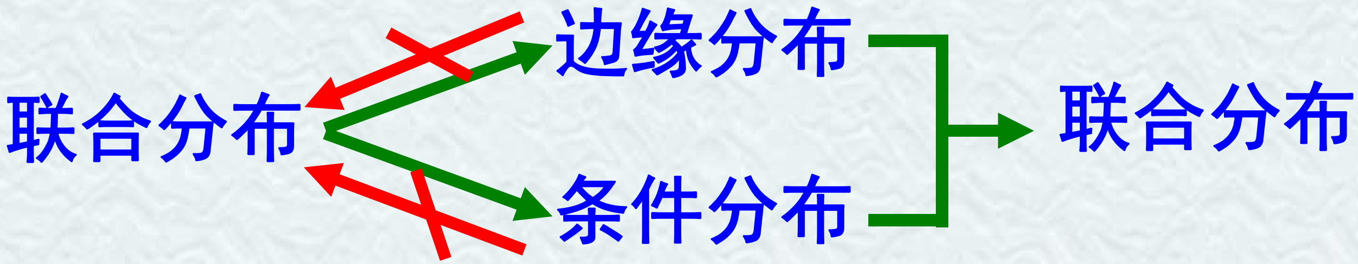
条件分布函数与条件密度函数的关系

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}[f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{y}[f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}y.$$

说明

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下



例3 设 G 是平面上的有界区域,其面积为 A. 若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

设 (X,Y) 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布,求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解 由题意知随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

又知边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}\,x = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

于是当 $-1 < y < 1$ 时,有

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

例4 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机地取值,当观察到 $X=x\ (0<x<1)$ 时,数 Y 在区间 $(x,1)$ 上随机地取值.求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 由题意知 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

对于任意给定的值 $x(0<x<1)$, 在$X=x$的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因此 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

故得 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

四、小结

条件分布

1. 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量, $p_{ij}(i,j=1,2\cdots)$ 为其联合分布律,在给定 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律为

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

在给定 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律为

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

其中$i,j=1,2,\cdots.$

2. 设 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 是二维连续型随机变量，则有

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{x} [f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{y} [f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}y.$$

例1 已知分布律

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$3/28$	$9/28$	$3/28$
1	$3/14$	$3/14$	0
2	$1/28$	0	0

求 Y=1 时 X 的条件分布.

解 由于 $P\{Y=1\}=\dfrac{3}{14}+\dfrac{3}{14}+0=\dfrac{3}{7}$,

因此,在 Y=1 的条件下 X 的分布律为

X	0	1	2
$P\{X=x_i \mid Y=1\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$P\{X=x_i \mid Y=1\}=\frac{P\{X=x_i, Y=1\}}{P\{Y=1\}}, \qquad (i=0,1,2)$$

得 $P\{X=0 \mid Y=1\}=\dfrac{7}{3}\times\dfrac{3}{14}=\dfrac{1}{2}$,

$$P\{X=1 \mid Y=1\}=\frac{7}{3}\times\frac{3}{14}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=2 \mid Y=1\}=\frac{7}{3}\times 0=0.$$

例2 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le x<1, 0\le y<x,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $P\{Y\le \frac{1}{8}\,|\,X=\frac{1}{4}\}$?

解 因为 $\boldsymbol{P\{X=\frac{1}{4}\}=0}$,

所以 $$\boldsymbol{P\{Y\le \frac{1}{8}\,\Big|\,X=\frac{1}{4}\}=\frac{P\{X=\frac{1}{4},Y\le\frac{1}{8}\}}{P\{X=\frac{1}{4}\}}}$$ 不存在.

正确解法为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases}\int_0^x 3x\,\mathrm{d}y, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{2}, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因此 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$$=\begin{cases}3x\Big/\dfrac{3}{2}x^2=2/x, & 0\le y<x,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

于是 $P\{Y\le \frac{1}{8}\Big|X=\frac{1}{4}\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{8}} f_{Y|X}(y|\frac{1}{4})\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{1}{8}} 8\,\mathrm{d}y=1.$$