第 4 章 集合

1. （1）$\{0,1,2,3,4\}$

（2）$\{11,13,17,19\}$

（3）$\{12,24,36,48,60\}$

2. （1）$\{x \mid x=2n \wedge n\in I_+\}$

（2）$\{x \mid x\in N \wedge x\leqslant 100\}$

（3）$\{x \mid x=10n \wedge n\in I\}$

3. $A=\{a\}$，$B=\{\{a\},b\}$，$C=\{\{\{a\},b\},c\}$

4. 证明　由于 A 为集合$\{\{b\}\}$的元素，而集合$\{\{b\}\}$中只有一个元素$\{b\}$，所以 $A=\{b\}$；又因为 $b\in\{b\}$，所以 $b\in A$。

5. A=G，B=E，C=F

6. （1）正确　（2）错误　（3）正确　（4）正确

（5）正确　（6）错误　（7）正确　（8）错误

7. 是可能的。因为$A\subseteq B$，要求A中的元素都在B中，但B中除去A的元素外，还可能有其他元素。故如B中有元素为集合A时，则本命题就可能成立的。

例如：$A=\{a\}$，$B=\{a，\{a\}\}$，则就有$A\subseteq B \wedge A\in B$。

8. （1）有 8 个子集：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$

（2）有 4 个子集：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{\{2,3\}\}$，$\{1,\{2,3\}\}$

（3）有 2 个子集：$\varnothing$，$\{\{1,\{2,3\}\}\}$

（4）有 2 个子集：$\varnothing$，$\{\varnothing\}$

（5）有 4 个子集：$\varnothing$，$\{\varnothing\}$，$\{\{\varnothing\}\}$，$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

（6）有 2 个子集：$\varnothing$，$\{\{1,2\}\}$

（7）有 4 个子集：$\varnothing$，$\{\{\varnothing,2\}\}$，$\{\{2\}\}$，$\{\{\varnothing,2\},\{2\}\}$

9. （1）设$A=\{a,\{b\}\}$，则$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{b\}\},\{a,\{b\}\}\}$

（2）设 $B=\{1,\varnothing\}$，则 $P(B)=\{\varnothing，\{1\}，\{\varnothing\}，\{1，\varnothing\}\}$

（3）设 $C=\{x,y,z\}$，则 $P(C)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$

（4）设 $D=\{\varnothing,a,\{a\}\}$，则

$P(C)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\{a\}\},\{\varnothing,a\},\{\varnothing,\{a\}\},\{a,\{a\}\},\{\varnothing,a,\{a\}\}\}$

（5）因为$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$，则$P(P(\varnothing))=\{\varnothing，\{\varnothing\}\}$

10. $\forall S\in P(A)\cap P(B)$，有 $S\in P(A)$ 且 $S\in P(B)$，所以 $S\subseteq A$ 且 $S\subseteq B$。从而 $S\subseteq A\cap B$，故 $S\in P(A\cap B)$。即 $P(A)\cap P(B)\subseteq P(A\cap B)$。

$\forall S\in P(A\cap B)$，有 $S\subseteq A\cap B$，所以 $S\subseteq A$ 且 $S\subseteq B$。从而 $S\in P(A)$ 且 $S\in P(B)$，故 $S\in P(A)\cap P(B)$。即 $P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$。

故 $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

11. 当 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$ 时，等式成立。

12.（1）2^n （2）2^{n-1} （3）没有

13.（1）{0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，12，15，16，18，21，24，27，30，32，64}
（2）$\varnothing$
（3）{4，5}
（4）{0，2，3，4，5，6，8，16，32，64}

14.（1）{4} （2）{1,3,5} （3）{2,3,4,5} （4）{2,3,4,5}
（5）$\varnothing$ （6）{4} （7）{5} （8）{1,2}

15.（1）$B-E$ （2）$A\cap D$ （3）$A-B-E$ （4）$C-A$ （5）$(A\cap C)\cup(E-B)$

16.（1）命题不为真。举反例：令 $A=\{1,2\}$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$。
（2）命题不为真。举反例：令 $A=\varnothing$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$。

17. $(A\cup C)-(B\cup C)=(A\cup C)\cap(B\cup C)'=(A\cup C)\cap(B'\cap C')=(A\cap B'\cap C')\cup(C\cap B'\cap C')$
$=A\cap B'\cap C'\subseteq A\cap B'=A-B$

18.（1）$(A\cap B)-C=A\cap B\cap C'=A\cap(B\cap C')=A\cap(B-C)$
（2）$A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap(A\cup A')=A\cup B$
（3）$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B')\cap(A\cap C')=A\cap(B'\cap C')=A\cap(B\cup C)'=A-(B\cup C)$
（4）$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B')\cup(A\cap C')=A\cap(B'\cup C')=A\cap(B\cap C)'=A-(B\cap C)$
（5）$A-(A-B)=A\cap(A\cap B')'=A\cap(A'\cup B)=(A\cap A')\cup(A\cap B)=A\cap B$
（6）$(A-B)\cup(A\cap C)=(A\cap B')\cup(A\cap C)=A\cap(B'\cup C)=A\cap(B\cap C')'=A\cap(B-C)'=A-(B-C)$

19. 必要性 $C\subseteq(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)\subseteq A$ 即 $C\subseteq A$。
充分性 若 $C\subseteq A$，则 $A\cup C=A$，但 $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)=A\cap(B\cup C)$。

20.（1）$(A-B)\oplus B=(A\cap B')\oplus B=(A\cap B'-B)\cup(B-A\cap B')=(A\cap B')\cup B$
$=(A\cup B)\cap(B'\cup B)=A\cup B$

（2）$(A\oplus B)-C=(A\cap B')\cup(A'\cap B)\cap C'=((A\cap B')\cap C')\cup((A'\cap B)\cap C')$
$=(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')$
$(A-C)\oplus(B-C)=((A-C)-(B-C))\cup((B-C)-(A-C))$
$=(A\cap C'\cap(B-C)')\cup(B\cap C'\cap(A-C)')$
$=(A\cap C'\cap(B'\cup C))\cup(B\cap C'\cap(A'\cup C))$
$=(A\cap C'\cap B')\cup(A\cap C'\cap C)\cup(B\cap C'\cap A')\cup(B\cap C'\cap C)$
$=(A\cap C'\cap B')\cup(B\cap C'\cap A')$
所以有 $(A\oplus B)-C=(A-C)\oplus(B-C)$。

（3）$A\oplus(B\oplus(A\cap B))=A\oplus((B-A\cap B)\cup(A\cap B-B))$
$=A\oplus((B\cap(A\cap B)')\cup(A\cap B\cap B'))$
$=A\oplus(B\cap(A'\cup B'))$

$=A\oplus(A'\cap B)$
$=(A-A'\cap B)\cup(A'\cap B-A)$
$=(A\cap(A\cup B'))\cup(A'\cap B\cap A')$
$=A\cup(A\cap B')\cup(A'\cap B)$
$=(A\cup A')\cap(A\cup B)\cup(A\cap B')$
$=(A\cup B)\cup(A\cap B')$
$=(A\cup B\cup A)\cap(A\cup(B\cap B'))$
$=A\cup B$

所以有 $A\cup B=A\oplus(B\oplus(A\cap B))$。

第 5 章 关系

1. $P(A)\times A=\{(\varnothing,a),(\varnothing,b),(\{a\},a),(\{a\},b),(\{b\},a),(\{b\},b),(\{a,b\},a),(\{a,b\},b)\}$

2. （1）由于 $C\neq\varnothing$ ，有 $y\in C$；对于任意 $x\in A$，$(x,y)\in A\times C$。因为 $A\times C\subseteq B\times C$，故 $(x,y)\in B\times C$，进而 $x\in B$，$y\in C$。于是 $A\subseteq B$ 得证。

（2）对于任意 x,y

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in((A-C)\times B)\cup(A\times(B-D)) &\Leftrightarrow (x,y)\in((A-C)\times B)\vee(x,y)\in(A\times(B-D))\\
&\Leftrightarrow (x\in(A-C)\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in(B-D))\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin C\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin D)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\notin C\vee y\notin D)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\wedge\neg(x\in C\wedge y\in D)\\
&\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B\wedge\neg(x,y)\in C\times D\\
&\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)-(C\times D)
\end{aligned}
$$

因此 $(A\times B)-(C\times D)=((A-C)\times B)\cup(A\times(B-D))$。

（3）对于任意 x,y

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in(A-B)\times(C-D) &\Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge y\in(C-D)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge y\in C\wedge y\notin D\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C\wedge x\notin B\wedge y\notin D\\
&\Rightarrow (x,y)\in(A\times C)\wedge(x,y)\notin(B\times D)\\
&\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times C)-(B\times D)
\end{aligned}
$$

因此 $(A-B)\times(C-D)\subseteq(A\times C)-(B\times D)$

3. 若 $Y=\varnothing$，则 $Y\times Y=\varnothing$。从而 $X\times X=\varnothing$。故 $X=\varnothing$。从而 $X=Y$。
若 $Y\neq\varnothing$，则 $Y\times Y\neq\varnothing$。从而 $X\times X\neq\varnothing$。
对 $\forall x\in Y$，$(x,x)\in Y\times Y$。因为 $X\times X=Y\times Y$，则 $(x,x)\in X\times X$。从而 $x\in X$。故 $Y\subseteq X$。
同理可证，$X\subseteq Y$。故 $X=Y$。

4. 若 $Y=\varnothing$，则 $X\times Y=\varnothing$。从而 $X\times Z=\varnothing$。因为 $X\neq\varnothing$，所以 $Z=\varnothing$。即 $Y=Z$。
若 $Y\neq\varnothing$，则 $X\times Y\neq\varnothing$。从而 $X\times Z\neq\varnothing$。
对 $\forall x\in Y$,因为 $X\neq\varnothing$，所以存在 $y\in X$，使 $(y,x)\in X\times Y$。因为 $X\times Y=X\times Z$，则 $(y,x)\in X\times Z$。从而 $x\in Z$。故 $Y\subseteq Z$。
同理可证，$Z\subseteq Y$。故 $Y=Z$。

5. （1）$2^{n\times m}$

（2）$2^{n\times n}$

6. （1）R={(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)}
（2）R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1)};
（3）R={(1,1),(1,-1),(2,-2),(3,-3)}。

7. $R_1=\varnothing$, R_2={(a,d)}, R_3={(b,d)}, R_4={(c,d)}, R_5={(a,d),(b,d)}, R_6={(a,d),(c,d)}, R_7={(b,d),(c,d)}, R_8={(a,d),(b,d),(c,d)}

8. （1）R_1={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)}
（2）R_2={(1,1),(4,2)}
（3）R_3={(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)}
（4）R_4={(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)(0,4),(0,5),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)}
（5）R_5={(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)(0,4),(0,5),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)}

9. $P\cup Q$={(1,2),(1,3),(2,4),(3,3),(4,2)}, $P\cap Q$={(2,4)},
domP={1,2,3}, domQ={1,2,4}, ranP={2,3,4}, ranQ={2,3,4}
dom($P\cap Q$)={2}, ran($P\cap Q$)={4}

10. （1）对任意 x，

$$\begin{aligned} x\in dom(R\cup S) &\Leftrightarrow \exists y((x,y)\in R\cup S) \\ &\Leftrightarrow \exists y(xRy\vee xSy) \\ &\Leftrightarrow \exists y(xRy)\vee\exists y(xSy) \\ &\Leftrightarrow x\in dom(R)\vee x\in dom(S) \\ &\Leftrightarrow x\in dom(R)\cup dom(S) \end{aligned}$$

所以 $dom(R\cup S)=dom(R)\cup dom(S)$

（2）对任意 y，

$$\begin{aligned} y\in ran(R\cap S) &\Leftrightarrow \exists x((x,y)\in R\cap S) \\ &\Leftrightarrow \exists x(xRy\wedge xSy) \\ &\Rightarrow \exists x(xRy)\wedge\exists x(xSy) \\ &\Leftrightarrow y\in ran(R)\wedge y\in ran(S) \\ &\Leftrightarrow y\in ran(R)\cap ran(S) \end{aligned}$$

所以 $ran(R\cap S)\subseteq ran(R)\cap ran(S)$。

11. （1）{(1,1)}
（2）{(1,2),(2,1),(1,3)}
（3）{(1,2),(2,3),(1,3)}

12. （1）2^{n^2-n}

（2）$2^{(n^2+n)/2}$

（3）$2^n\cdot 3^{(n^2-n)/2}$

13. R 反自反、对称、反对称、传递时，$R\cap B\times B$ 依然是反自反、对称、反对称、传递的；当 $A\neq B$ 时，$R\cap B\times B$ 不是自反的。

14. 设 xR^2y，则存在 z 使得 xRz，zRy，又 R 传递，所以有 xRy，因此 $R^2\subseteq R$；
设 xRy。因为 R 自反，所以有 yRy，于是有 xR^2y，因此 $R\subseteq R^2$。综上 $R^2=R$。

15. $R_1\circ R_2=\{(b,a),(b,d)\}$
$R_2\circ R_1=\{(d,a)\}$
$R_1^2=\{(b,b),(b,c),(b,a)\}$
$R_2^2=\{(d,d),(d,a),(c,c)\}$

16. （1）设任意 x，$y\in A$，$xR_1\circ R_3y\Rightarrow\exists u(xR_1u\wedge uR_3y)$
$\Rightarrow\exists u(xR_2u\wedge uR_3y)$
$\Rightarrow xR_2\circ R_3y$
所以 $R_1\circ R_3\subseteq R_2\circ R_3$

（2）设任意 x，$y\in A$，若 $xR_3\circ R_1y$，则存在 $u\in A$ 使 $xR_3u\wedge uR_1y$ 成立；因为 $R_1\subseteq R_2$ 且 uR_1y，所以 uR_2y 成立，则 $xR_3u\wedge uR_2y$ 成立，所以 $xR_3\circ R_2y$。

17. （1）正确。证明略。
（2）错误。举反例：$A=\{a,b\}$，$R_1=\{(a,b)\}$，$R_2=\{(b,a)\}$。
（3）错误。举反例：$A=\{a,b,c\}$，$R_1=\{(a,b),(b,a)\}$，$R_2=\{(b,c),(c,b)\}$。
（4）错误。举反例：$A=\{a,b,c\}$，$R_1=\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$，$R_2=\{(b,c),(c,a),(b,a)\}$。

18.

由题意 $M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，$M_S=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，那么 $M_{R\circ S}=M_R*M_S=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

19. （1）$R^2=\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\}$，　$R^{-1}=\{(b,a),(c,b),(d,c),(a,d)\}$
（2）$r(R)=\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c),(c,d),(d,a),(d,d)\}$
$s(R)=\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(c,d),(d,c),(d,a),(a,d)\}$
$t(R)=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(c,a),(c,b),$
$(c,c),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c),(d,d)\}$

20. (1) $r(R_1)=R_1\cup I_A\subseteq R_2\cup I_A=r(R_2)$，因此 $r(R_1)\subseteq r(R_2)$。

(2) 由于 $R_1\subseteq R_2$，则 $R_1^{-1}\subseteq R_2^{-1}$，故 $s(R_1)=R_1\cup R_1^{-1}\subseteq R_2\cup R_2^{-1}=s(R_2)$，因此 $s(R_1)\subseteq s(R_2)$。

(3) 先证在 $R_1\subseteq R_2$ 时，对一切 $n\in N$，$R_1^n\subseteq R_2^n$，对 n 作归纳。n=0 时显然，n=1 时为题设，显然真。设 n 时真，现证 n+1 时亦真。

设$(x,y)\in R_1^{n+1}=R_1^n\circ R_1$，于是存在一 z，$z\in A$，并且$(x,z)\in R_1^n$，$(z,y)\in R_1$，根据归纳假设有$(x,z)\in R_2^n$，$(z,y)\in R_2$，所以$(x,y)\in R_2^n\circ R_2=R_2^{n+1}$。

$R_1^{n+1}\subseteq R_2^{n+1}$得证，即对一切 $n\in N$，$R_1^n\subseteq R_2^n$。

再证 $t(R_1)\subseteq t(R_2)$。设$(x,y)\in t(R_1)$，于是存在一 m，$(x,y)\in R_1^m$。由于 $R_1^m\subseteq R_2^m$，所以$(x,y)\in R_2^m$，$(x,y)\in t(R_2)$，故 $t(R_1)\subseteq t(R_2)$。

21. （1）$r(R_1\cup R_2)=R_1\cup R_2\cup I_A$
$=(R_1\cup I_A)\cup(R_2\cup I_A)$
$=r(R_1)\cup r(R_2)$

（2）$s(R_1\cup R_2)=(R_1\cup R_2)\cup(R_1\cup R_2)^{-1}$
$=(R_1\cup R_2)\cup(R_1^{-1}\cup R_2^{-1})$
$=(R_1\cup R_1^{-1})\cup(R_2\cup R_2^{-1})$
$=s(R_1)\cup s(R_2)$

（3）由于 $R_1\subseteq(R_1\cup R_2)$，$R_2\subseteq(R_1\cup R_2)$，故 $t(R_1)\subseteq t(R_1\cup R_2)$，$t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$，进而 $t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$

（4）令 $A=\{0,1,2\}$，$R_1=\{(0,1)\}$，$R_2=\{(1,2)\}$，则 $t(R_1)\cup t(R_2)=\{(0,1)，(1,2)\}$，而 $t(R_1\cup R_2)=\{(0,1)，(1,2)，(0,2)\}$。因此 $t(R_1\cup R_2)\neq t(R_1)\cup t(R_2)$。

22. 不一定。举反例：设 $A=\{1,2,3\}$，A 上的二元关系 $R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$是反对称关系，但 $t(R)=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$不是反对称关系。

23. 只需证 R 是自反的。

设 a 是 A 上任意元素，则有 $b\in A$ 使 aRb（R 连续），因而有 bRa（R 对称），所以有 aRa（R 传递）。因此 R 是自反的。故 R 为一等价关系。

24. 当 R 等价时，容易证明结论，下面证明另一方面。即证 R 等价。

① R 自反（题设）；

② 若 aRb，因 R 自反，有 aRa，从而由条件有：bRa，所以 R 对称；

③ 若 aRb, bRc，则由已证对称知，bRa，加上 bRc，由条件有：aRc，所以 R 传递。

综合①，②，③可知，R 是等价关系。

25. 设 R 为等价关系，故 R 是自反、对称、传递的。若 xRy，yRz，由 R 传递有 xRz，由 R 对称有 zRx，所以 R 是循环的。故 R 为等价关系时 R 是自反的和循环的；

设 R 是自反的和循环的，若 xRy，由 R 自反有 yRy，从而由 R 循环有 yRx，故 R 是对称的。若 xRy，yRz，由 R 循环有 zRx，从而由 R 对称有 xRz，因此 R 是传递的。故 R 是自反的和循环的时 R 为等价关系。

26. ① 自反性：$\forall(x,y)\in A$，因为 $xy=yx$，所以$((x,y),(x,y))\in R$，因此 R 是自反的；

② 对称性：$\forall(x,y),(u,v)\in A$，若$((x,y),(u,v))\in R\Rightarrow xv=yu\Rightarrow uy=vx\Rightarrow((u,v),(x,y)\in R$，因此 R 是对称的；

③ 传递性：$\forall(x,y)，(u,v)，(s,t)\in A$，若$((x,y),(u,v))\in R\wedge((u,v),(s,t))\in R\Rightarrow xv=yu\wedge ut=vs\Rightarrow xvut=yuvs\Rightarrow xt=ys\Rightarrow((x,y),(s,t))\in R$，因此 R 是传递的。

综合①，②，③可知，R 是一个等价关系。

27. 对任意 $s=(a+bi)\in C$，$a\neq 0$，有 $a\cdot a>0$，则 $(a+bi)R(a+bi)$，所以 R 是自反的；

若 $(a+bi)R(c+di)$，则有 $ac>0$，所以 $ca>0$，故 $(c+di)R(a+bi)$，R 是对称的；

若 $(a+bi)R(c+di)$，$(c+di)R(e+fi)$，则 $ac>0$，$ce>0$，因此 $ae>0$，所以 $(a+bi)R(e+fi)$，故 R 是传递的。

因此 R 为等价关系。

28. 先证 $R\circ R^{-1}$ 是 A 上的等价关系。

$dom(R)=A$，对任意 $x\in A$，有 $y\in A$，使 xRy，所以 $yR^{-1}x$，因此 $xR\circ R^{-1}x$，$R\circ R^{-1}$ 是自反的；

若 $xR\circ R^{-1}y$，则存在 $u\in A$，使得 xRu，$uR^{-1}y$，所以有 $uR^{-1}x$，yRu，因此 $yR\circ R^{-1}x$，$R\circ R^{-1}$ 是对称的；

若 $xR\circ R^{-1}y$，$yR\circ R^{-1}z$，则存在 u、$v\in A$，使得 xRu，$uR^{-1}y$，yRv，$vR^{-1}z$，所以 $(x,v)\in R\circ R^{-1}\circ R$，而 $R\circ R^{-1}\circ R=R$，所以有 $(x,v)\in R$，同时 $(v,z)\in R^{-1}$，因此 $xR\circ R^{-1}z$，$R\circ R^{-1}$ 是传递的；

综上所述，$R\circ R^{-1}$ 是 A 上的等价关系。同理易证 $R^{-1}\circ R$ 也是 A 上的等价关系。

29. ① 设对任意 $a\in A$，则必存在 A_i，使 $a\in A_i$，因 a 与 a 必可看作在同一块中，故有 $(a,a)\in R$。即 R 是自反的。

② 设 $a,b\in A$，若有 $(a,b)\in R$，则a与b必在同一块，故b与a亦在同一块，$(b,a)\in R$，即R是对称的。

③ 对任意 $a,b,c\in A$，$(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R$

$\Rightarrow\exists i(a\in A_i\wedge b\in A_i)\wedge\exists j(b\in A_j\wedge c\in A_j)$

$\Rightarrow\exists i\exists j(a\in A_i\wedge c\in A_j\wedge b\in A_i\cap A_j)$

$\Rightarrow\exists i\exists j(a\in A_i\wedge c\in A_j\wedge A_i\cap A_j\neq\varnothing)$

$\Rightarrow\exists i\exists j(a\in A_i\wedge c\in A_j\wedge i=j)$（$\because i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing$）

$\Rightarrow a,c$ 在同一块 $\Rightarrow(a,c)\in R$

$\therefore$ R是传递的。

综合①，②，③可知，R是一个等价关系。

30. π_1 所对应的等价关系 $R_1=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$；

π_2 所对应的等价关系 $R_2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$；

31. S 为 A 上的等价关系，那么对任意 x 有 $(x,x)\in S$，所以 $([x],[x])\in R/S$，R/S 是自反的；若 $([x],[y])\in R/S$，则 $(x,y)\in S$，由 S 对称知 $(y,x)\in S$，所以 $([y],[x])\in R/S$，R/S 是对称的；若 $([x],[y])\in R/S$，$([y],[z])\in R/S$，则 $(x,y)\in S$，$(y,z)\in S$，由 S 传递知 $(x,z)\in S$，所以 $([x],[z])\in R/S$，R/S 是传递的。故 R/S 为 A/R 上的等价关系。

32.（1）为真的命题有：dRa，aRa，eRa。

（2）关系图略。

（3）A 的极大元为 a，极小元为 d，e；最大元为 a，A 的最小元素不存在。

（4）子集 $B_1=\{c,d,e\}$ 的上界为 a 和 c，下界不存在，上确界为 c，下确界不存在；

子集 $B_2=\{b,c,d\}$ 的上界为 a，下界为 d，上确界为 a，下确界为 d；

子集 $B_3=\{b,c,d,e\}$ 的上界为 a，下界不存在，上确界为 a，下确界不存在。

33.（1）极大元为 4,5,6；极小元为 1；最大元不存在；最小元为 1。

（2）子集{2,3,6}的上界为 6，下界为 1，上确界为 6，下确界为 1；

子集{2,3,5}的上界不存在，下界为 1，上确界不存在，下确界为 1。

第 6 章 函数

1.（1）不是　（2）是　（3）是　（4）不是

2.（1） 若 $f=g$，则显然 $f\cap g=f$ 为 X 到 Y 的函数。

若 $f\cap g$ 为 X 到 Y 的函数，设 $f\neq g$，那么有 $x\in X$，$y\in Y$，使得 $(x,y)\in f$，并且 $(x,y)\notin g$，或者 $(x,y)\in g$，并且 $(x,y)\notin f$，于是 $x\notin dom(f\cap g)$，这与 $f\cap g$ 为 X 到 Y 的函数矛盾，因此 $f=g$。

因此 $f\cap g$ 为 X 到 Y 的函数当且仅当 $f=g$。

（2） 若 $f=g$，则显然 $f\cup g=f$ 为 X 到 Y 的函数。

若 $f\cup g$ 为 X 到 Y 的函数，设 $f\neq g$，那么有 $x\in X$，$y_1\in Y$，$y_2\in Y$，$y_1\neq y_2$，使得 $(x,y_1)\in f$，$(x,y_2)\in g$，因此 $(x,y_1)\in f\cup g$，$(x,y_2)\in f\cup g$，并且 $y_1\neq y_2$。这与 $f\cup g$ 为 X 到 Y 的函数矛盾，故 $f=g$。

因此 $f\cup g$ 为 X 到 Y 的函数当且仅当 $f=g$。

3. 对任意 $y\in Y$，

$$\begin{aligned}y\in f(A)&\Leftrightarrow\exists x(x\in A\wedge y=f(x))\\&\Rightarrow\exists x(x\in B\wedge y=f(x))\quad(A\subseteq B)\\&\Leftrightarrow y\in f(B)\end{aligned}$$

因此 $f(A)\subseteq f(B)$。

4.（1）设 $x\in X$，因 f 是函数，故必有某个 $y\in X$，使得 $(x, y)\in f$，但 $f\subseteq I_X$，故 $(x, y)\in I_X$，即 $x=y$，于是对任意 $x\in X$，必有 $(x, x)\in f$，所以 $(x, x)\in I_X\Rightarrow(x, x)\in f$，即 $I_X\subseteq f$，得 $f=I_X$。

（2）设 $I_X\subseteq f$，对任意 $(x, y)\in f$，则 $x\in X$，故 $(x, x)\in I_X$。因为 $I_X\subseteq f$，得 $(x, y)\in f\wedge(x, x)\in f$，但 f 是函数，故 $x=y$，所以 $(x, y)\in f\Rightarrow(x, y)\in I_X$，即 $f\subseteq I_X$。于是 $f=I_X$。

5. 8 个函数，其中 6 个满射。

6. 令 $f：X\rightarrow P(X)$

$f(x)=\{x\}$

则对任意 x_1，$x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，因此 f 是内射函数。

7.（1）$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$

（2）这一问题等价于先“把 n 个有区别的球放入 m 个相同的盒子中，要求无一空盒，记为：$S(m,n)$”，再对这 n 个盒子进行不同的排列（假定盒子有区别），其总数为所求得满射数。即所求的不同的满射有 $S(m,n)\cdot n!$个。

其中，$S(m,n)$称为 Stirling 数，满足下面递推公式（详见组合数学教材）

$S(m,0)=0$；$S(m,1)=1$；$S(m,n)=nS(m-1,n)+S(m-1,n-1)$

（3）$n!$

8. $g\circ f(x)=g(f(x))=-(2x^2+1)+7=-2x^2+6$

$f\circ g(x)=f(g(x))=2(-x+7)^2+1=2x^2-28x+99$

$f\circ f(x)=f(f(x))=2(2x^2+1)^2+1=8x^4+8x^2+3$

$g\circ g(x)=g(g(x))=-(-x+7)+7=x$

$f\circ h(x)=f(h(x))=2(2^x)^2+1=2^{2x+1}+1$

$f\circ k(x)=f(k(x))=2(\sin x)^2+1=2\sin^2 x+1$

$k\circ h(x)=k(h(x))=\sin(2^x)$

9. （反证法）假设 $f\neq g$，则必存在元素 $a\in A$，使得 $f(a)\neq g(a)$，因为 h 是内射，所以 $h(f(a))\neq h(g(a))$，即 $h\circ f(a)\neq h\circ g(a)$。这与题设 $h\circ f=h\circ g$ 相矛盾。故 $f=g$。

10. （1）对任意 $x\in X$，

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(A\cup B)&\Leftrightarrow f(x)\in A\cup B\\&\Leftrightarrow f(x)\in A\vee f(x)\in B\\&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)\vee x\in f^{-1}(B)\\&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$。

（2）对任意 x，

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(A\cap B)&\Leftrightarrow f(x)\in A\wedge B\\&\Leftrightarrow f(x)\in A\wedge f(x)\in B\\&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)\wedge x\in f^{-1}(B)\\&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ 。

（3）对任意 x，

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(A-B)&\Leftrightarrow f(x)\in A-B\\&\Leftrightarrow f(x)\in A\wedge f(x)\notin B\\&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)\wedge x\notin f^{-1}(B)\\&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)-f^{-1}(B)\end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$。

11. （1）否　（2）否

12. （1）$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R\times R$ 且 $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$，即 $x_1\neq x_2$ 或 $y_1\neq y_2$，所以 $x_1+y_1\neq x_2+y_2$ 或 $x_1-y_1\neq x_2-y_2$，故 $f(x_1,y_1)\neq f(x_2,y_2)$，因此 f 为内射。

（2）$\forall x,y\in R\times R$，$f((x+y)/2,(x-y)/2)=(x,y)\in R\times R$，所以 f 为满射。

（3）$((x+y)/2,(x-y)/2)$

（4）$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_{R\times R}$，或 $f^{-1}\circ f(x,y)=f\circ f^{-1}(x,y)=(x,y)$