Assignments 5.1

一、阅读（Reading）

1. 阅读教材.

2. 课外阅读:

Set Theory（1）-by Gerard O’ Regan.pdf.pdf	2019-10-30 11:59
康托尔与集合论.pdf	2019-10-30 11:59
三次数学危机.pdf	2019-10-30 11:59

二、问题解答（Problems）

1. 判断并证明下述命题:

（1）存在集合 A, B 和 C，使得 $A\in B$，$B\in C$ 且 $A\notin C$;

如，$A=\{a\}$, $B=\{\{a\},b\}$, $C=\{\{\{a\},b\},c\}$.

（2）如果 $A\in\{\{b\}\}$，那么 $b\in A$;

证明：由于 A 为集合$\{\{b\}\}$的元素，而集合$\{\{b\}\}$中只有一个元素$\{b\}$，所以 $A=\{b\}$;

又因为 $b\in\{b\}$，所以 $b\in A$.

（3）若 A, B 为集合, 有 $A\subseteq B$ 和 $A\in B$ 能同时成立;

如，$A=\{a\}$，$B=\{a，\{a\}\}$.

（4）对任意集合 A 和 B, 有 $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$;

证明：$\forall S\in P(A)\cap P(B)$，有 $S\in P(A)$且 $S\in P(B)$，所以 $S\subseteq A$ 且 $S\subseteq B$.从而 $S\subseteq A\cap B$，故 $S\in P(A\cap B)$.即 $P(A)\cap P(B)\subseteq P(A\cap B)$.

$\forall S\in P(A\cap B)$，有 $S\subseteq A\cap B$，所以 $S\subseteq A$ 且 $S\subseteq B$.从而 $S\in P(A)$且 $S\in P(B)$，故 $S\in P(A)\cap P(B)$.即 $P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$.

故 $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$.

（5）对任意集合 A 和 B，有 $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$；

仅当 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$ 时，等式成立. 反例：令 $A=\{1,2\}$，$B=\{3\}$.

（6）若 $A \cup B = A \cup C$，则 $B=C$；

反例：令 $A=\{1,2\}$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$.

（7）若 $A \cap B = A \cap C$，则 $B=C$.

反例：令 $A=\varnothing$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$.

（8）对任意集合 A，B，C，有 $(A \cup C)-(B \cup C) \subseteq A-B$.

证明：$(A \cup C)-(B \cup C)=(A \cup C) \cap (B \cup C)'=(A \cup C) \cap (B' \cap C')=(A \cap B' \cap C') \cup (C \cap B' \cap C')$

$=A \cap B' \cap C' \subseteq A \cap B' = A-B$.

（9）对任意集合 A，B 和 C，等式 $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ 当且仅当 $C \subseteq A$.

证明:必要性 $C \subseteq (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \subseteq A$ 即 $C \subseteq A$；充分性 若 $C \subseteq A$，则 $A \cup C = A$，

但 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$.

2 教材 P77：题 12.

（1）2n （2）2n-1 （3）无.

3 参考"无限公理"（The Axiom of Infinity）的描述，定义如下集合：

S = {2, 3, 4, 7, 8, 11, 15, 16, ... }.

$\exists S(2 \in S \wedge 3 \in S \wedge \forall x((x \in S \wedge x \text{ is even} \rightarrow 2x \text{ is in } S) \wedge (x \in S \wedge x \text{ is odd} \rightarrow x+4 \text{ is in } S)))$

三、项目实践（Programming）（Optional）

1. 编写程序，定义抽象数据类型（ADT）**集合**，定义集合的输入输出以及各种集合运算，并给出使用该抽象数据类型的使用范例.