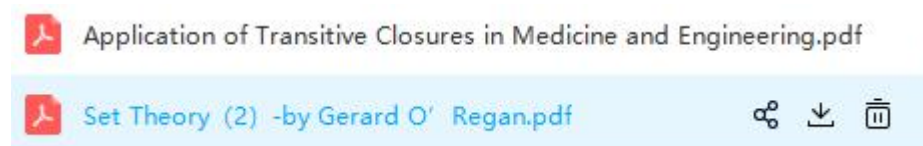


Assignments 6.2

一、阅读 (Reading)

1. 阅读教材.

2. 课外阅读:



二、问题解答 (Problems)

1. 设 R_1, R_2 为 A 上关系, 判断并证明下述命题:

(1) R_1 反对称 $\Rightarrow t(R)$ 反对称;

反例: 设 $A = \{1, 2, 3\}$, A 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ 是反对称关系, 但 $t(R) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ 不是反对称关系.

(2) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$;

$r(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2 \cup I_A = (R_1 \cup I_A) \cup (R_2 \cup I_A) = r(R_1) \cup r(R_2)$.

(3) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$;

$s(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1^{-1} \cup R_2^{-1}) = (R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (R_2 \cup R_2^{-1}) = s(R_1) \cup s(R_2)$.

(4) $t(R_1 \cup R_2) \subseteq t(R_1) \cup t(R_2)$;

由 $R_1 \subseteq (R_1 \cup R_2)$, $R_2 \subseteq (R_1 \cup R_2)$, 有 $t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$, $t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$, 进而 $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$.

(5) $t(R_1 \cup R_2) = t(R_1) \cup t(R_2)$;

反例: 令 $A = \{0, 1, 2\}$, $R_1 = \{(0, 1)\}$, $R_2 = \{(1, 2)\}$, 则 $t(R_1) \cup t(R_2) = \{(0, 1), (1, 2)\}$, 而 $t(R_1 \cup R_2) = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2)\}$. 因此 $t(R_1 \cup R_2) \neq t(R_1) \cup t(R_2)$.

$$(6) R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow r(R_1) \subseteq r(R_2);$$

注意到 $r(R_1) = R_1 \cup I_A \subseteq R_2 \cup I_A = r(R_2)$.

$$(7) R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow s(R_1) \subseteq s(R_2);$$

由 $R_1 \subseteq R_2$, 则 $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$, 有 $s(R_1) = R_1 \cup R_1^{-1} \subseteq R_2 \cup R_2^{-1} = s(R_2)$, 于是 $s(R_1) \subseteq s(R_2)$.

$$(8) R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow t(R_1) \subseteq t(R_2).$$

先证在 $R_1 \subseteq R_2$ 时, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $R_1^n \subseteq R_2^n$, 对 n 进行归纳.

$n=0$ 时显然, $n=1$ 时为题设, 显然真. 设 $n=k$ 时真, 现证 $n=k+1$ 时亦真.

设 $(x, y) \in R_1^{k+1} = R_1^k \circ R_1$, 于是存在一 z , $z \in A$, 并且 $(x, z) \in R_1^k$, $(z, y) \in R_1$, 根据归纳假设

有 $(x, z) \in R_2^k$, $(z, y) \in R_2$, 所以 $(x, y) \in R_2^k \circ R_2 = R_2^{k+1}$. 从而 $R_1^{k+1} \subseteq R_2^{k+1}$ 得证.

于是对任意 $n \in \mathbb{N}$, $R_1^n \subseteq R_2^n$.

再证 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$. 设 $(x, y) \in t(R_1)$, 于是存在一 m , $(x, y) \in R_1^m$. 由于 $R_1^m \subseteq R_2^m$, 所以 $(x, y) \in R_2^m$,

$(x, y) \in t(R_2)$, 故 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

三、项目实践 (Programming) (Optional)

1. 编写程序, 设计并实现关系闭包求解算法.