数理统计的任务：

研究怎样用有效的方法去收集和使用带随机性影响的数字信息。

数理统计的定义：

数理统计以概率论为理论基础，根据试验或观察到的数据，对被研究的统计对象的统计特征，如分布、期望和方差等作出科学的统计推断。

数理统计的内容：

如何收集、整理数据资料；如何对所得的数据资料进行分析、研究，从而对所研究的对象的性质、特点作出推断.

概率论与数理统计的区别:

在概率论中，我们所研究的随机变量，它的分布都是假设已知的，在这一前提下去研究它的性质、特点和规律性，例如求出它的数字特征，讨论随机变量函数的分布，介绍常用的各种分布等。

在数理统计中，我们研究的随机变量，它的分布是未知的，或者是不完全知道的，人们是通过对所研究的随机变量进行重复独立的观察，得到许多观察值，对这些数据进行分析，从而对所研究的随机变量的分布作出种种推断的.

- 数理统计方法在各个领域都有广泛的应用：
  - 在农业中，对田间试验进行适当的设计和统计分析。
  - 实验设计法、回归设计和回归分析、方差分析、多元分析等统计方法，在工业生产的试制新产品和改进老产品、改革工艺流程、使用代用原材料和寻求适当的配方等问题中起着广泛的作用，统计质量管理在控制工业产品的质量中起着十分重要的作用。

- 医学是较早使用数理统计方法的领域之一 。在防治一种疾病时， 需要找出导致这种疾病的种种因素。统计方法在发现和验证这些因素上，是一个重要工具。另一方面的应用是，用统计方法确定一种药物对治疗某种疾病是否有用，用处多大，以及比较几种药物或治疗方法的效力。
- 在自然科学和技术科学中，如统计方法用于地震、气象和水文方面的预报、地质资源的评介等。
- 在社会、经济领域方面，如人口调查和预测，心理学中能力方面的分析等。

- 本章我们介绍总体、随机样本及统计量等基本概念，并着重介绍几个常用统计量及抽样分布.

第6.1节 基本概念

一、总体与样本

二、简单随机样本

三、经验分布函数

四、小结

1、总体与样本

一个统计问题总有它明确的研究对象.

研究对象的全体称为总体(母体),

总体中每个成员称为个体.

研究某批灯泡的质量

考察国产 轿车的质量

然而在统计研究中，人们往往关心每个个体的一项(或几项)数量指标和该数量指标在总体中的分布情况. 这时，每个个体具有的数量指标的全体就是总体.

该批灯泡寿命的全体就是总体

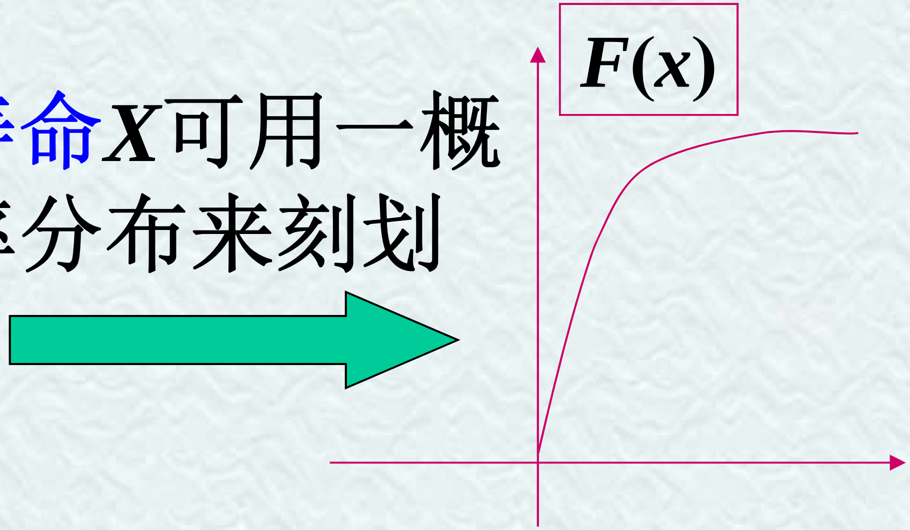
所有国产轿车每公里耗油量的全体就是总体

由于每个个体的出现带有随机性，即相应的数量指标值的出现带有随机性。从而可把此种数量指标看作随机变量，我们用一个随机变量或其分布来描述总体。为此常用随机变量的符号或分布的符号来表示总体。

通常，我们用随机变量X , Y , Z,…, 等表示总体。当我们说到总体，就是指一个具有确定概率分布的随机变量。

如:研究某批灯泡的寿命时，我们关心的数量指标就是寿命，那么，此总体就可以用随机变量X表示，或用其分布函数$F(x)$表示.

寿命X可用一概率分布来刻划



因此，在统计学中，总体这个概念的要旨是：

总体就是一个概率分布.

有限总体和无限总体

实例　某工厂10月份生产的灯泡寿命所组成的总体中, 个体的总数就是10月份生产的灯泡数, 这是一个有限总体; 而该工厂生产的所有灯泡寿命所组成的总体可**近似地**看成一个无限总体, 它包括以往生产和今后生产的灯泡寿命.

当有限总体包含的个体的总数很大时, 可近似地将它看成是无限总体.

2.随机样本的定义

例1. 有一批灯泡，其质量以使用寿命衡量，规定寿命不超过1000小时的为次品，问如何估计次品率？

这里用X表示灯泡寿命，显然X为一个随机变量，若随机变量X的分布已知，则其次品率就是概率

$$P\{X\leq 1000\}=F(1000).$$

例2. 测量某标准件厂生产的10万个螺丝的直径，问如何估计直径的分布情况。

理想方式：逐一测试。

例3. 某建筑材料厂生产空心砖，其抗压强度是一个随机变量X，我们衡量产品质量好坏的一个重要指标是平均抗压强度的大小，以及随机变量X的期望E(X)的大小。

在数理统计中,我们往往研究有关对象的某一项数量指标(例如研究某种型号灯泡的寿命这一数量指标).为此,考虑与这一数量指标相联系的随机试验,对这一数量指标进行试验或观察.

样本的定义

为推断总体的分布及各种特征, 按一定的规则从总体中抽取若干个体进行观察试验, 以获得有关总体的信息. 这一抽取过程称为"抽样".

所抽取的部分个体称为样本. 通常记为

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

样本中所包含的个体数目n称为样本容量.

容量为n的样本可以看作n维随机变量.但是,一旦取定一组样本,得到的是n个具体的数

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

称此为样本的一次观察值,简称样本值.

- **1.** 总体：

  研究对象的某项数量指标取值的全体。

  即，总体就是研究的随机变量**X**可能取值得全体所成的集合。

  总体的分布就是指随机变量**X**的分布。

- **2.** 子体：组成总体的各个元素。
- **3.** 样本：从总体中随机抽取**n**个个体，称为容量（或大小）为**n**的样本（或称子样）。

- 如：例1中如果总体为全体灯泡，则每个灯泡就是个体，选取的部分做寿命试验的灯泡就是样本；如果把灯泡的寿命看作一个总体，每一个灯泡的寿命是一个个体；

  例2中如果把10万个螺丝看成一个总体，则每个螺丝就是一个个体，选取的部分做测试的螺丝即为样本；

  例3中若总体为整批空心砖，则每块空心砖为一个个体，选取的部分作为测试的砖的为样本。
- 在例1-例3中，只能根据部分个体（样本）对总体作出某种推断。

- 在实际中，总体的分布一般是未知的，或只知道它具有某种形式而其中　包含着未知参数．在数理统计中人们都是通过从总体中抽去一部分个体，根据获得的数据来对总体分布得出推断的，被抽出的部分叫样本．

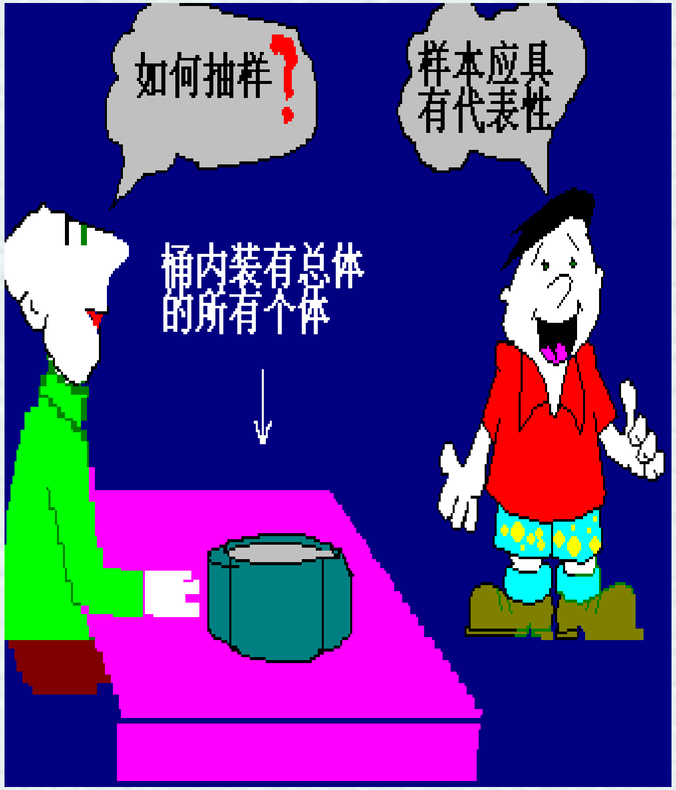
从例**1**-例**3**中可知，我们研究的对象是整体（总体），但是观察的只是局部（样本），这使得：

某种程度上局部的特征能反映整体的特性；

局部不能完全准确的反映整体的特性。

3. 简单随机样本

抽取样本的目的是为了利用样本对总体进行统计推断，这就要求样本能很好的反映总体的特性且便于处理. 为此，需对抽样提出一些要求，通常有两条：



1. 代表性： $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 中每一个与所考察的总体X有相同的分布.

2. 独立性： $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是相互独立的随机变量.

满足上述两条性质的样本称为简单随机样本.

获得简单随机样本的抽样方法称为简单随机抽样.

注：

1、简单随机抽样即重复独立试验；

2、抽得的样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 成为一组样本观察值。则由抽样的随机性和独立性可知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，并且 X_i 与 X 有相同分布。

3、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的容量为 **n** 的样本，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且每个都与总体 X 有相同分布，则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 **X** 容量为 **n** 的简单随机样本，简称样本。其观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为样本值。

由定义知：若$X_1,\cdots,X_n$为X的一个样本，则 $X_1,\cdots,X_n$的联合分布函数为：

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$$

若设X的概率密度为f，则 $X_1,\cdots,X_n$的联合概率密度为：

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

若总体**X**为离散型随机变量，则 $X_1,\cdots,X_n$的联合概率分布为

$$P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}$$

- **例如：** 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}.$$

例1 设总体 X 服从参数为 $\lambda\ (\lambda>0)$ 的指数分布, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体的样本, 求样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度.

解 总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且与 X 有相同的分布,

所以 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度为

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}, & x_i>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例2 设总体 X 服从两点分布 $B(1,p)$, 其中 $0<p<1$, $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体的样本，求样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布律.

解 总体 X 的分布律为

$$P\{X=i\}=p^i(1-p)^{1-i} \qquad (i=0,1)$$

因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立,

且与 X 有相同的分布,

所以$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布律为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$

$$= P\{X_1 = x_1\}P\{X_2 = x_2\}\cdots P\{X_n = x_n\}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在集合 $\{0,1\}$ 中取值.

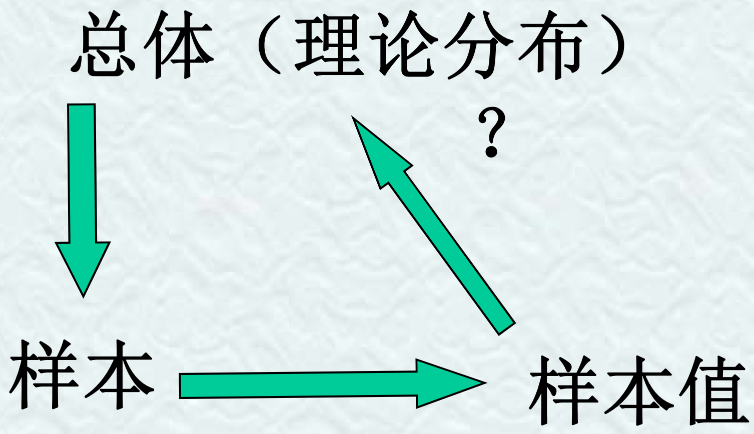
数理统计的任务就是研究有效地收集、整理、分析所获得的有限的资料，对所研究的问题，尽可能地作出精确而可靠的结论.

在数理统计中，不是对所研究的对象全体 (称为总体)进行观察，而是抽取其中的部分(称为样本)进行观察获得数据（抽样），并通过这些数据对总体进行推断.

数理统计方法具有“部分推断整体”的特征 .

总体、样本、样本值的关系

事实上我们抽样后得到的资料都是具体的、确定的值. 如我们从某班大学生中抽取10人测量身高, 得到10个数, 它们是样本取到的值而不是样本. 我们只能观察到随机变量取的值而见不到随机变量.



统计是从手中已有的资料--样本值，去推断总体的情况---总体分布$F(x)$的性质.

样本是联系二者的桥梁

总体分布决定了样本取值的概率规律，也就是样本取到样本值的规律，因而可以由样本值去推断总体.

4. 经验分布函数

定义6. 3 设$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$是总体X的一个容量为n的样本值. 先将$x_1,x_2,\ldots,x_n$按自小到大的次序排列, 并重新编号, 设为

$$x_{(1)}\le x_{(2)}\le\ldots\le x_{(n)}.$$

则经验分布函数$F_n(x)$ 为

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & 若x<x_{(1)},\\ \dfrac{k}{n}, & 若x_{(k)}\le x<x_{(k+1)}, \qquad (k=1,2,\cdots,n-1)\\ 1, & 若x\ge x_{(n)}.\end{cases}$$

性质

（1）$F_n(x)$为不减左连续函数；

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)=0, \lim\limits_{x\to\infty} F_n(x)=1$

因此，$F_n(x)$是一个分布函数，被称为总体**X**的经验分布函数或样本分布函数。

$F_n(X)$的值表示在***n***次独立重复试验中事件“$X \le x$ ”发生的频率。

例1 设总体 F 具有一个样本值 $1, 2, 3,$

则经验分布函数 $F_3(x)$ 的观察值为

$$F_3(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1}{3}, & 1\le x<2,\\ \dfrac{2}{3}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

例2 设总体 F 具有一个样本值 $1,1,2,$ 则经验分布函数 $F_3(x)$ 的观察值为

$$F_3(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{2}{3}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

由定义可知对于不同的样本，样本分布函数 $F_n(x)$ 也不同。但当**n**充分大时，事件“ $X \le x$ ”发生的频率渐近于事件“ $X \le x$ ”发生的概率，即样本分布函数 $F_n(x)$ 渐近于总体分布函数 $\boldsymbol{F(X)}$。这就是格利汶科定理。

格里汶科定理

格利文

对于任一实数 x,当 $n \to \infty$ 时,$F_n(x)$ 以概率1一致收敛于分布函数 $F(x)$,即

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty<x<+\infty} \left|F_n(x)-F(x)\right| = 0\right\} = 1.$$

对于任一实数 x 当 n 充分大时,经验分布函数的任一个观察值 $F_n(x)$ 与总体分布函数 $F(x)$ 只有微小的差别,从而在实际中可当作 $F(x)$ 来使用.

- 因此, 对于任一实数x当n充分大时, 经验分布函数的任一个观察值$F_n(x)$与总体分布函数$F(x)$只有微小的差别, 从而在实际上可以当作$F(x)$来使用.

- 这就是用样本来推断总体的理论依据.

例4 某厂生产袋装食盐，先从生产线上随机任取6袋，称毛重（单位：g）分别为：501，498，502，504，502，501，求出关于此样本的样本分布函数。

四、小结

基本概念：个体　总体 $\begin{cases} \text{有限总体} \\ \text{无限总体} \end{cases}$ 随机样本

说明1　一个总体对应一个随机变量X, 我们将不区分总体和相应的随机变量, 统称为总体X.

说明2　在实际中遇到的总体往往是有限总体, 它对应一个离散型随机变量; 当总体中包含的个体的个数很大时, 在理论上可认为它是一个无限总体.

总体,样本,样本值的关系

$$\begin{tikzcd}
\text{总体(理论分布)} \arrow[d] & \\
\text{样本} \arrow[r] & \text{样本值} \arrow[ul, "?"']
\end{tikzcd}$$

统计是从手中已有的资料--样本值,去推断总体的情况--总体的分布$F(x)$的性质.

样本是联系二者的桥梁.

总体分布决定了样本取值的概率规律,也就是样本取到样本值的规律,因而可以由样本值去推断总体.

格里汶科资料

Boris Vladimirovich Gnedenko

Born: 1 Jan 1912 in Simbirsk (now Ulyanovskaya), Russia

Died: 27 Dec 1995 in Moscow, Russia