力 学(Mechanics)

第3章 动量与角动量

一、质点的冲量与动量 定理

动量定理

$$\boxed{\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t}$$

$\vec{p} = m\vec{v}$ 动量是状态量

$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t$ 冲量是过程量

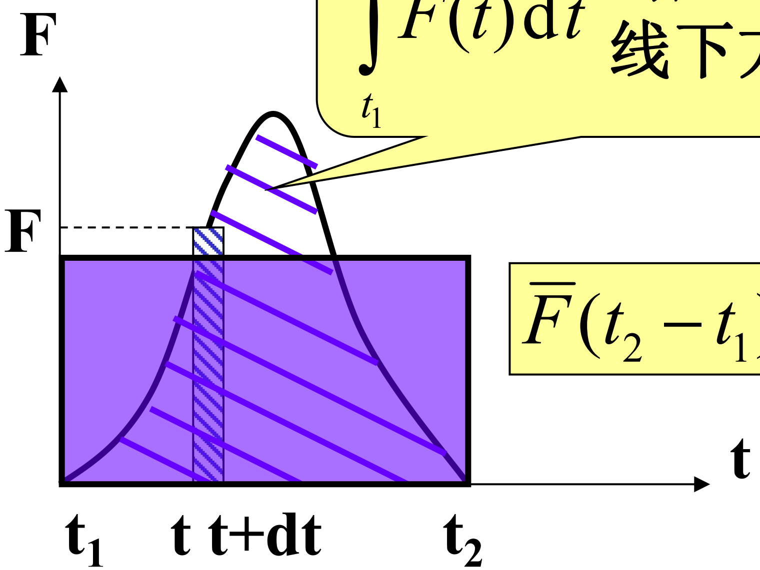
1.积分计算变力的冲量

2.状态量的改变计算变力的冲量）

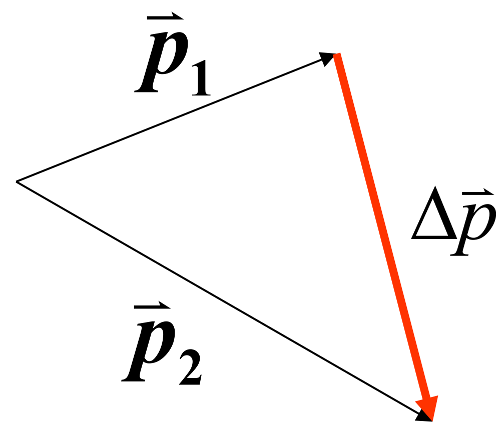
◆ 平均冲力

$\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,\mathrm{d}t$ 对应*F*-*t*曲线下方面积

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$



$\overline{F}(t_2 - t_1)$



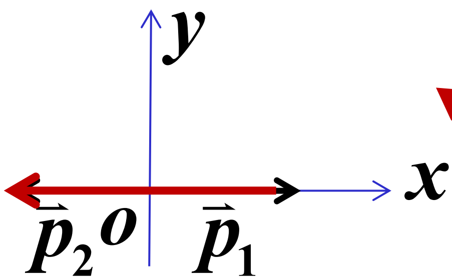
◆ 矢量的解析表达和图示

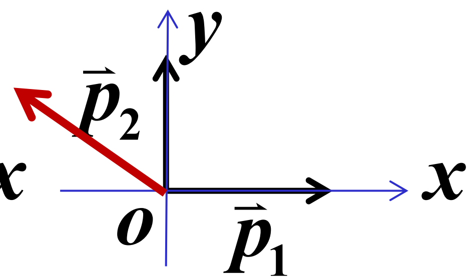
$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t$$

以直角坐标系中x轴分量为例：

$$\Delta p_x = p_{2x} - p_{1x} = \int_{t_1}^{t_2} F_x\,\mathrm{d}t = \overline{F}_x \Delta t$$

练习1：根据下图写出对应冲力的矢量表达，已知：





$$\Delta t = 1s,$$

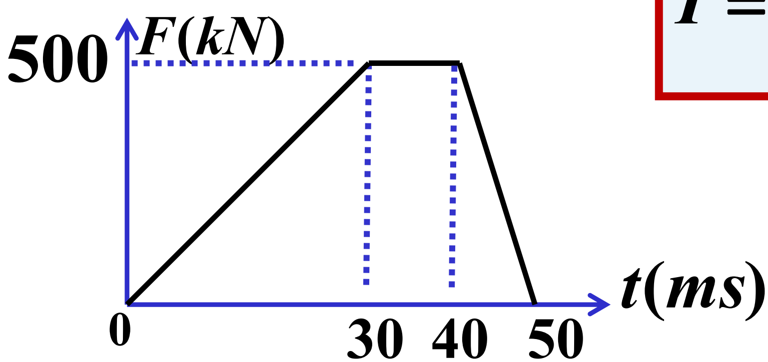
$$p_2 = 3N \cdot s,$$

$$p_1 = 4N \cdot s$$

$$\boxed{\overline{\vec{F}_1} = -7\hat{i}}$$

$$\boxed{\overline{\vec{F}_2} = 3\hat{j} - 4\hat{i}}$$

练习2：图为汽车撞击试验中汽车受到冲力大小随时间变化曲线，冲力方向保持不变，求汽车受到冲量和平均冲力大小

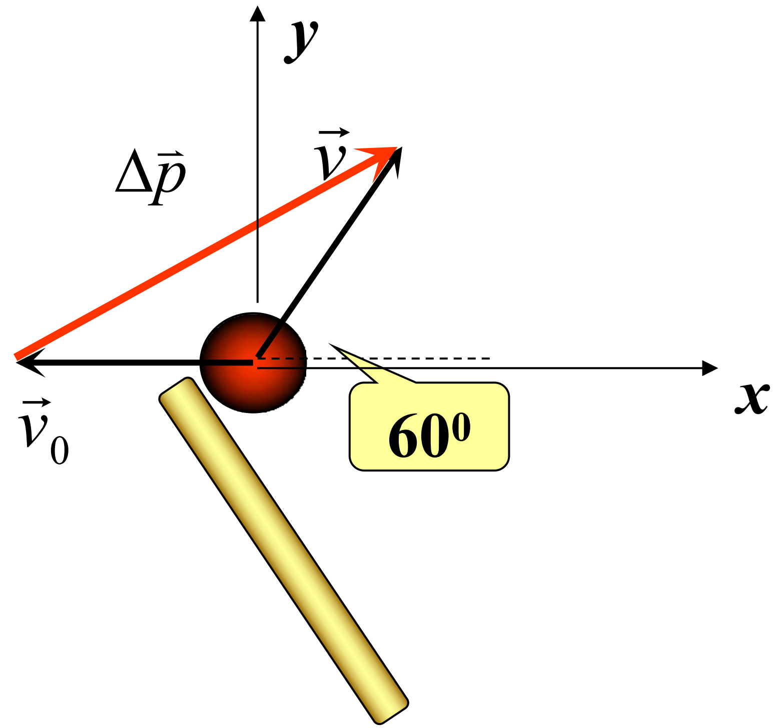


$$\boxed{I = \frac{1}{2}(50+10)ms \times 500kN = 15000\,N \cdot s}$$

$$\boxed{\overline{F} = \frac{1500\,N \cdot s}{50ms} = 300kN}$$

例1 重约100g的垒球以40m/s水平飞向垒球手, 被击后以相同速率沿60^0仰角飞出, 求平均打击力,设作用时间1.2ms.

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{\Delta \mathrm{t}}$$



$$\vec{v} = 40(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j})$$

$$\vec{v}_0 = -40\vec{i}$$

$$\overline{\vec{F}} = \frac{0.080}{1.2}(60\vec{i} + 20\sqrt{3}\vec{j})\mathrm{N}$$

例2、质量为m的小球自高为y_0处沿水平方向以速率v_0抛出，与地面碰撞后跳起的最大高度为$1/2y_0$，水平速率为$1/2v_0$，求在碰撞过程中地面对小球的冲量。

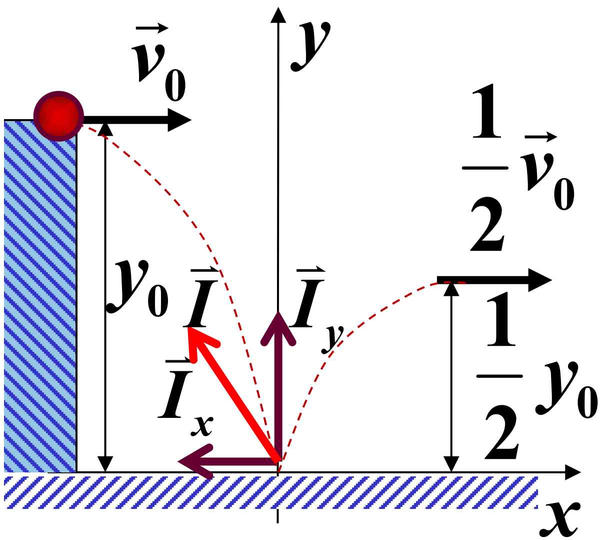
$$I_x = mv_x - mv_{x0} = \frac{1}{2}mv_0 - mv_0$$

$$= -\frac{1}{2}mv_0$$

$$I_y = mv_y - mv_{y0}$$

$$= m\sqrt{gy_0} - (-m\sqrt{2gy_0})$$

$$= (1+\sqrt{2})m\sqrt{gy_0}$$



$$\vec{I} = -\frac{1}{2}mv_0\vec{i} + (1+\sqrt{2})m\sqrt{gy_0}\,\vec{j}$$

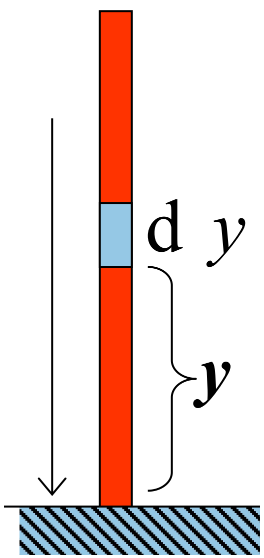
例3一段均匀的绳铅直地挂着，绳的下端恰好触到水平桌面上，如果把绳的上端放开，试证明：在绳落下后的一时刻，作用于桌面上的压力三倍于已落到桌面上那部分绳的重量。

解：设绳密度为ρ ，考虑高为y处，长为dy的线元

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}y$$

dm接近桌面时，速度 $v=\sqrt{2gy}$（向下），
落在桌面时，速度为 0

$$F\mathrm{d}t = 0 - v\mathrm{d}m$$



桌面的支持力 $\vec{F}$ 与dm对桌面的压力$\vec{F}'$
是一对作用力与反作用力

$$\therefore F' = v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = v\rho\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v^2\rho$$

$$N = mg + F' = \rho gy + 2\rho gy = 3\rho gy$$

二、质点系的动量定理和动量守恒

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i1}=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\,\mathrm{d}t$$

内力不改变质点系的总动量

质点系总动量的增量=质点系的冲量；

当合外力的冲量为零，质点系总动量保持不变，即为动量守恒定律；

（1）当合外力为零，或外力远小于内力时，质点系动量守恒；

（2）当某方向的外力为零，质点系在该方向上动量守恒；

例4 质量为M的滑块正沿着光滑水平地面向右滑动，一质量为m的小球水平向右飞行，以速度 $\vec{v}_1$（相对地面）与滑块斜面相碰，碰后竖直向上弹起，速度为 $\vec{v}_2$（相对地面）。若碰撞时间为Δt，试计算此过程中滑块对地面的平均作用力和滑块速度的增量。

解：根据动量守恒求滑块速度的增量

x 方向合外力为零，系统在该方向动量守恒。

$$m_1 v_1 + MV_1 = 0 + MV_2 \quad \therefore V_2 - V_1 = \frac{m}{M} v_1$$

滑块对地面的平均作用力N沿竖直方向，

$$N = Mg + N_y$$

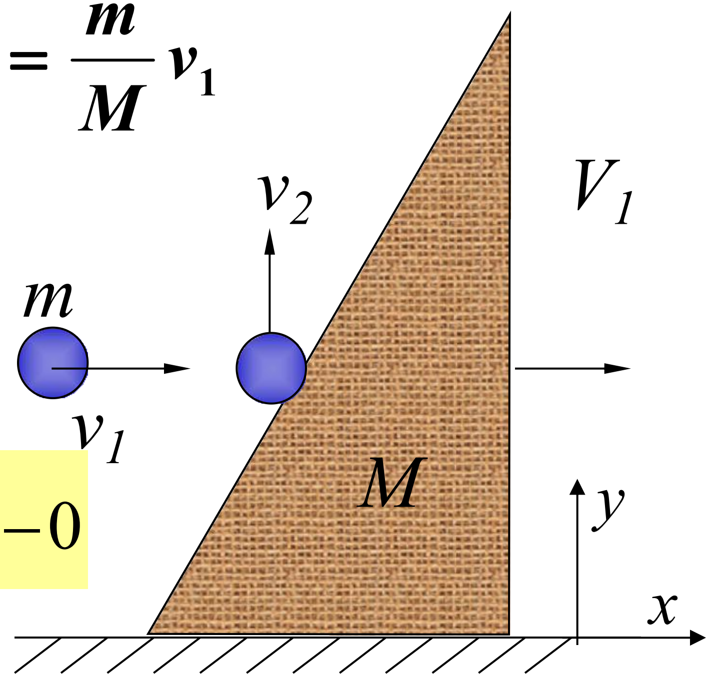
滑块对小球的冲力N_y' 与 N_y是一对力，

由动量定理

$$N_y' = \frac{mv_2}{\Delta t} + mg \qquad (N_y' - mg)\Delta t = mv_2 - 0$$

因此

$$N = Mg + \frac{mv_2}{\Delta t} + mg$$

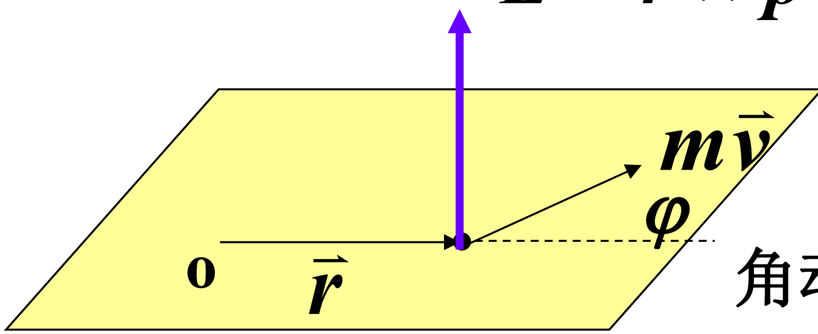


三、质点的角动量，角动量守恒定律

1、质点的角动量

一般用于处理质点的定点或定轴运动

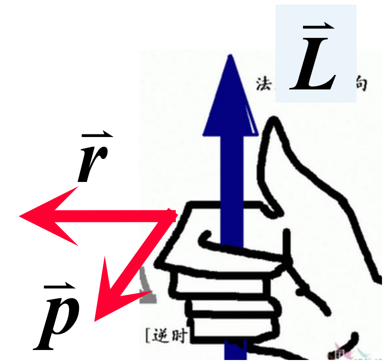
角动量的定义 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$



角动量大小

$$L = mvr\sin\varphi$$

角动量方向　右手螺旋



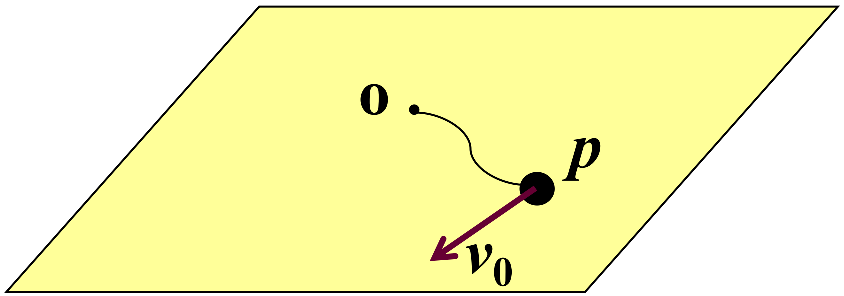
2、角动量守恒定律

若 $\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} =$ 常矢量

什么情况下外力矩为零？

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \begin{cases} F = 0 & \text{不受力} \\ \theta = 0, r = 0 & \text{有心力} \end{cases}$$

例5 长为l的轻绳, 一端固定在光滑桌面上的O点, 另一端系有一质量为m 的滑块p, 开始滑块距O点op=a ($a<l$) , 在垂直op方向上给滑块一个初速度v_0, 滑块与O点之间的轻绳被拉紧, 此后滑块绕O点作圆周运动, 求滑块作圆周运动的速度



因为轻绳被拉紧前滑块不受力，被拉紧后滑块受绳的拉力为有心力，所以滑块绕O点的角动量守恒

$$L = mv_0 a = mvl$$