第3.1节　二维随机变量

一、二维随机变量的联合分布函数

二、二维离散型随机变量

三、二维连续型随机变量

四、两个常用的分布

五、小结

n 维随机变量的概念

定义 设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $\Omega=\{e\}$，设 $X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \cdots, X_n=X_n(e)$，是定义在 Ω 上的随机变量，由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量.

对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{(X_1 \le x_1) \cap (X_2 \le x_2) \cap \cdots \cap (X_n \le x_n)\}$$

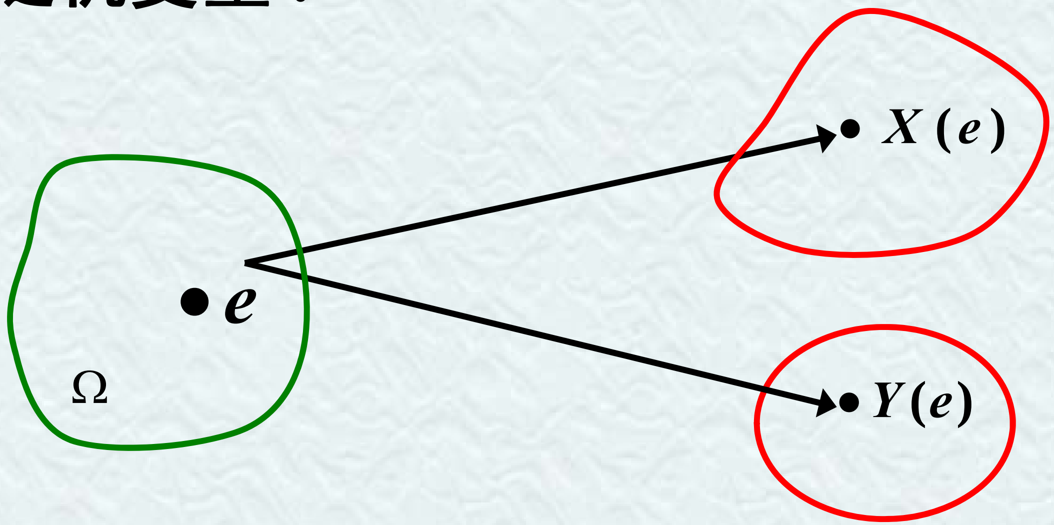
$$P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数 .

一、二维随机变量及其分布函数

1.定义 设E是一个随机试验，它的样本空间是$\Omega=\{e\}$，设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在Ω上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，叫作二维随机向量或二维随机变量．

图示



实例1 炮弹的弹着点的位置 (X,Y) 就是一个二维随机变量.

实例2 考查某一地区学前儿童的发育情况，则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量 (H,W).

说明

二维随机变量 (X, Y) 的性质不仅与 X、Y 有关,而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.

2.二维随机变量的分布函数

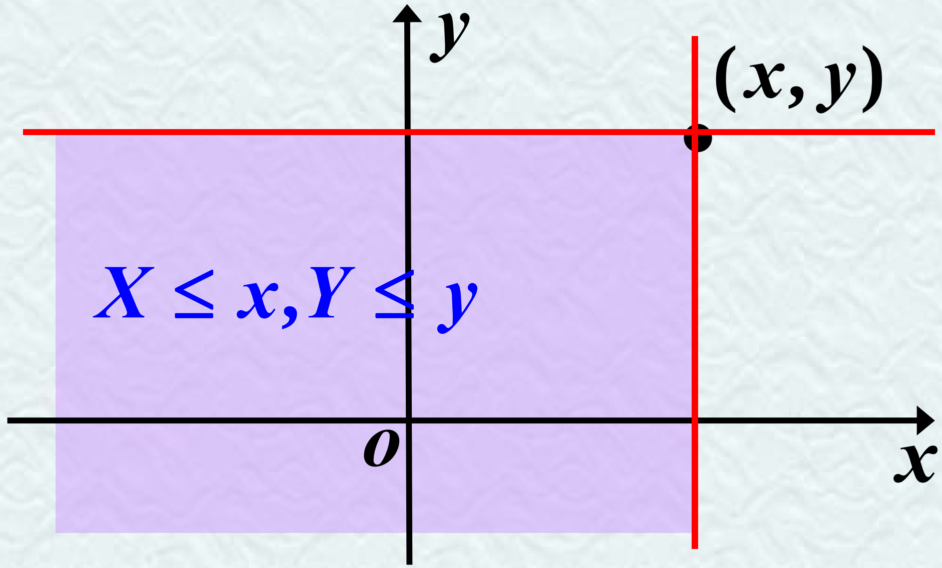
(1)分布函数的定义

设 (X,Y) 是二维随机变量,对于任意实数 $x,y,$ 二元函数:

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数,或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

$F(x, y)$的函数值就是随机点落在如图所示区域内的概率.



(2) 分布函数的性质

1° $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数，即对于任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$,

对于任意固定的 x, 当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.

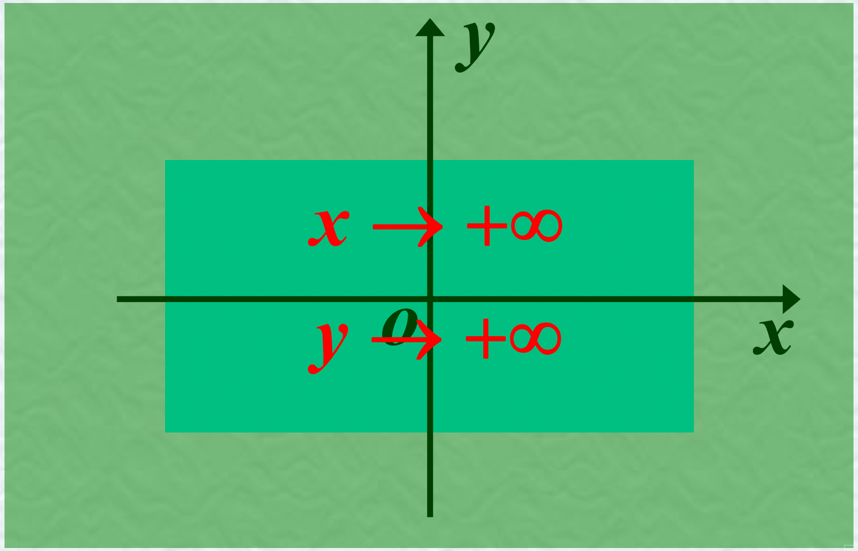
2° $0 \leq F(x,y) \leq 1$, 且有

对于任意固定的 y, $F(-\infty,y) = \lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$,

对于任意固定的 x, $F(x,-\infty) = \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$,

$$F(-\infty,-\infty) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0,$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$



3° $F(x,y)=F(x+0,y), F(x,y)=F(x,y+0),$

即 $F(x,y)$ 关于 x 右连续,关于 y 也右连续.

4° 对于任意 $(x_1, y_1),(x_2, y_2)$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$,

有 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0.$

证明 $P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\}$

$= P\{X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} - P\{X \leq x_1, y_1 < Y \leq y_2\}$

$= P\{X \leq x_2, Y \leq y_2\} - P\{X \leq x_2, Y \leq y_1\}$

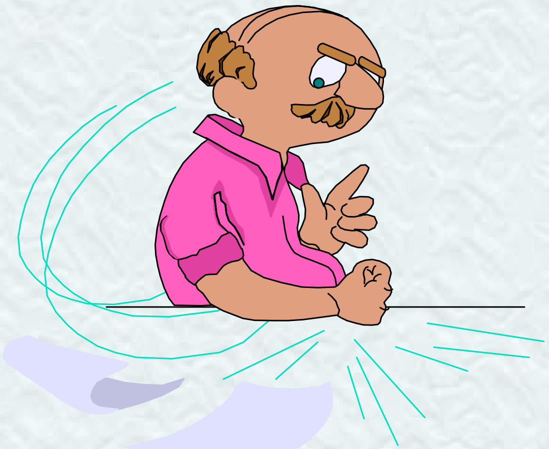
$- P\{X \leq x_1, Y \leq y_2\} + P\{X \leq x_1, Y \leq y_1\} \geq 0,$

故 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0.$

二、二维离散型随机变量

1. 定义2.4

若二维随机变量 (X, Y) 所取的可能值是有限对或无限可列多对,则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量.



2. 二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量 (X,Y)所有可能取的值为 $(x_i, y_j), i, j = 1,2,\cdots$,记

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1,2,\cdots,$$

称此为二维离散型随机 变量 (X,Y) 的分布律,或随机变量 X 和 Y 的联合分布律.

其中 $p_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

二维随机变量 (X,Y) 的分布律也可表示为

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

例1 设随机变量 X 在1,2,3,4四个整数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数值.试求 (X,Y) 的分布律.

解 $\{X=i, Y=j\}$ 的取值情况是： $i=1,2,3,4,$

j取不大于i的正整数. 且由乘法公式得

$$P\{X=i, Y=j\} = P\{Y=j \mid X=i\} P\{X=i\} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4},$$

$$i=1,2,3,4, \quad j \le i.$$

于是 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

例2 从一个装有3支蓝色、2支红色、3支绿色圆珠笔的盒子里，随机抽取两支，若 X、Y 分别表示抽出的蓝笔数和红笔数，求(X,Y)的分布律.

解 (X,Y) 所取的可能值是

$$(0,0),\quad (0,1),\quad (1,0),\quad (1,1),\quad (0,2),\quad (2,0).$$

抽取一支绿笔,一支红笔

$$P\{X=0,Y=0\}=\binom{3}{0}\cdot\binom{2}{0}\cdot\binom{3}{2}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{28},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{14},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{14},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{1}{28},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}\Big/\binom{8}{2}=\frac{9}{28},$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{28}.$$

故所求分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$3/28$	$9/28$	$3/28$
1	$3/14$	$3/14$	0
2	$1/28$	0	0

例3 一个袋中有三个球,依次标有数字 1, 2, 2, 从中任取一个, 不放回袋中 , 再任取一个, 设每次取球时,各球被取到的可能性相等,以 X, Y 分别记第一次和第二次取到的球上标有的数字 , 求 X, Y 的分布律.

1 2 2

解 (X,Y)的可能取值为 (1,2), (2,1), (2,2).

$$P\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{3},\quad P\{X=2,Y=1\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=2,Y=2\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

$$p_{11} = 0, \quad p_{12} = p_{21} = p_{22} = \frac{1}{3},$$

故 (X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	1	2
1	0	$1/3$
2	$1/3$	$1/3$

说明

离散型随机变量 (X,Y) 的分布函数归纳为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i \le x, y_j \le y$ 的 i, j 求和.

三、二维连续型随机变量

1.定义2.5

对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$，如果存在非负的函数 $f(x,y)$ 使对于任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变量，函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度，或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

2.性质

(1) $f(x,y) \geq 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(\infty,\infty) = 1.$

(3) 设G是xOy平面上的一个区域,点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(4)若$f(x,y)$在(x,y)连续,则有$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$

3.说明

几何上, $z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

表示介于 **$f(x, y)$和 xOy** 平面之间的空间区域的全部体积等于**1.**

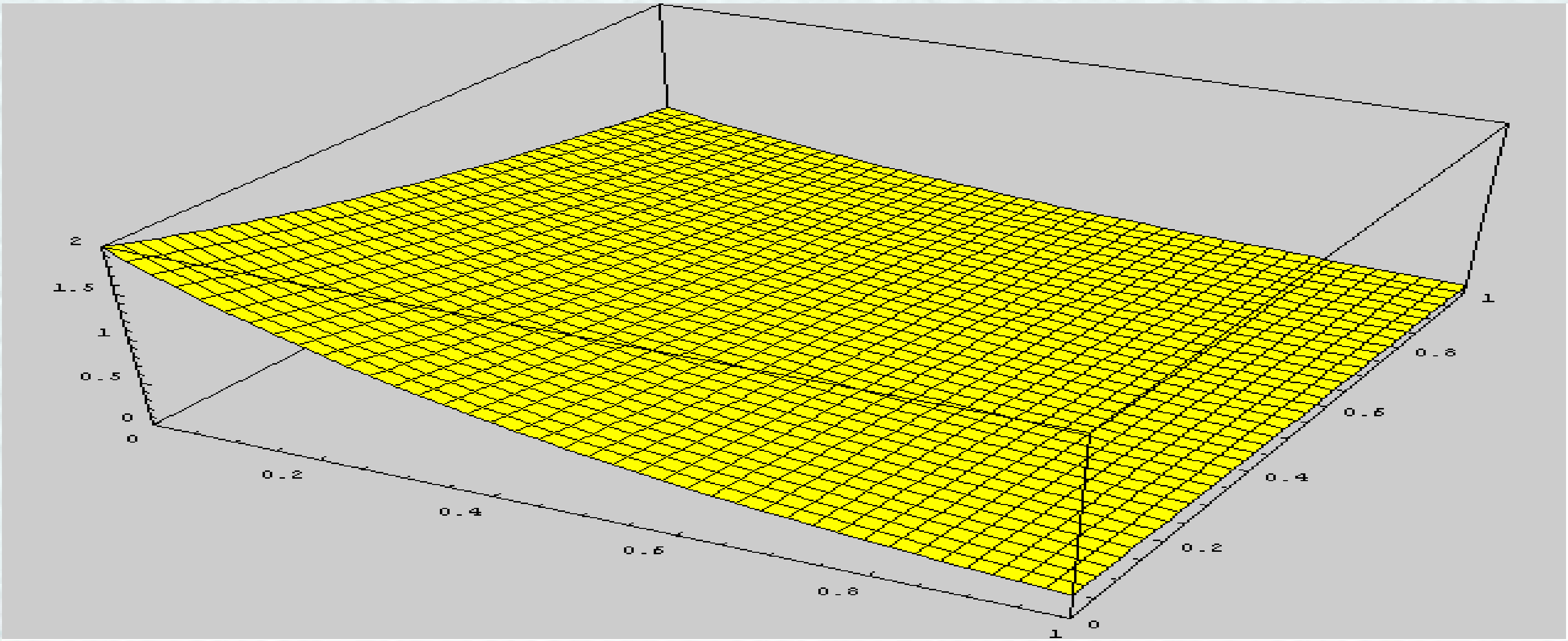
$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$P\{(X, Y) \in G\}$的值等于以G为底，以曲面$z = f(x, y)$为顶面的柱体体积.

例4 设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x,y)$; (2) 求概率 $P\{Y \le X\}$.



解 $(1)\ F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 2e^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

得

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) 将 **(X,Y)** 看作是平面上随机点的坐标,

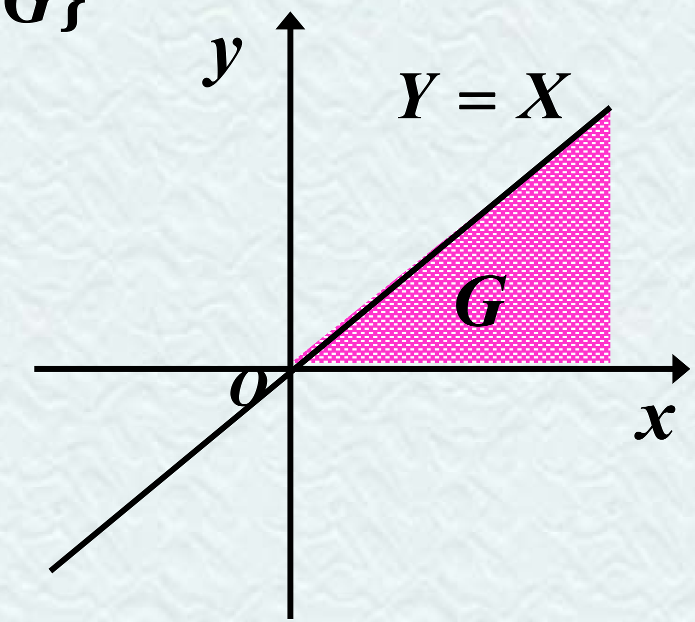
即有 $\{Y \le X\} = \{(X,Y) \in G\}$,

$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\}$$

$$= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} 2e^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}.$$

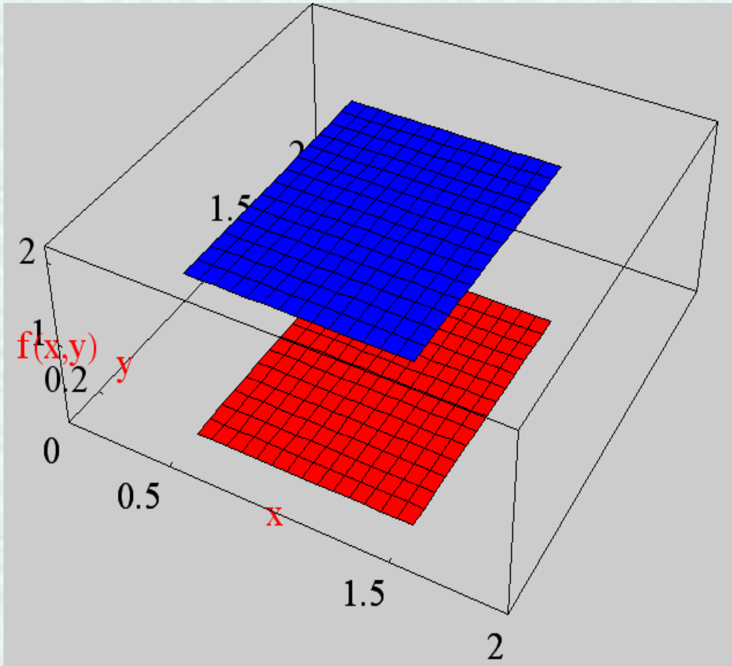


四、两个常用的分布

1.均匀分布

定义　设 D 是平面上的有界区域,其面积为 S,若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



则称(X, Y)在 D 上服从均匀分布.

2.二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

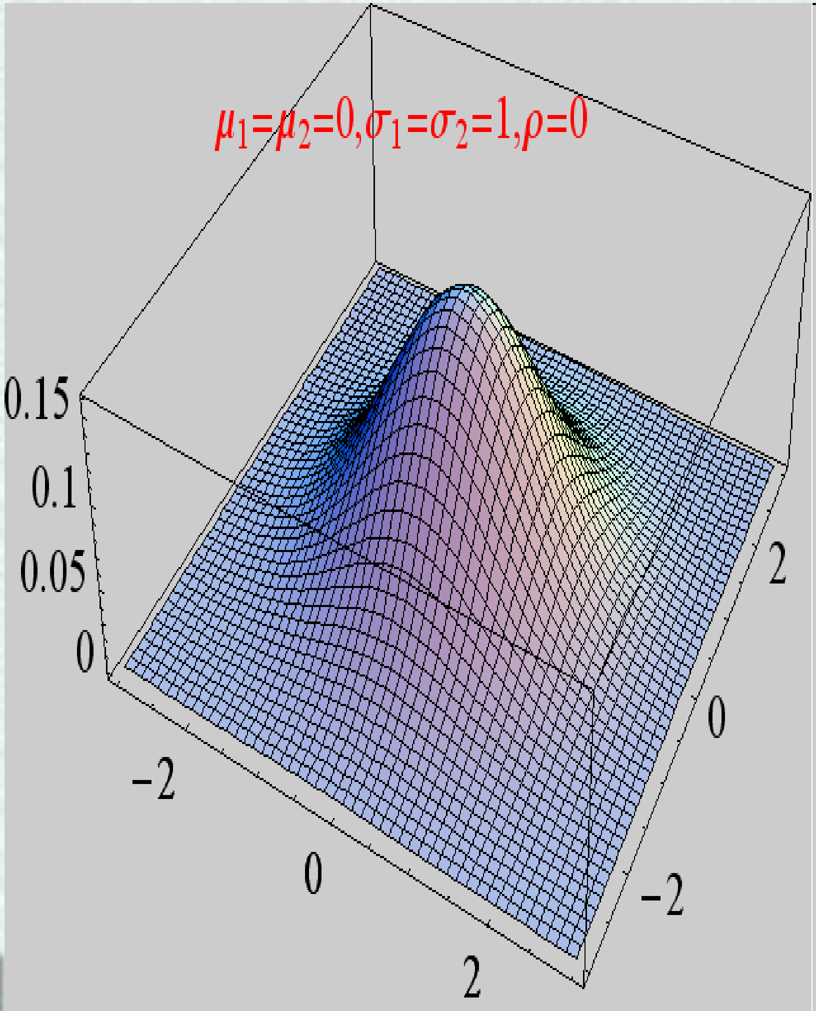
$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$

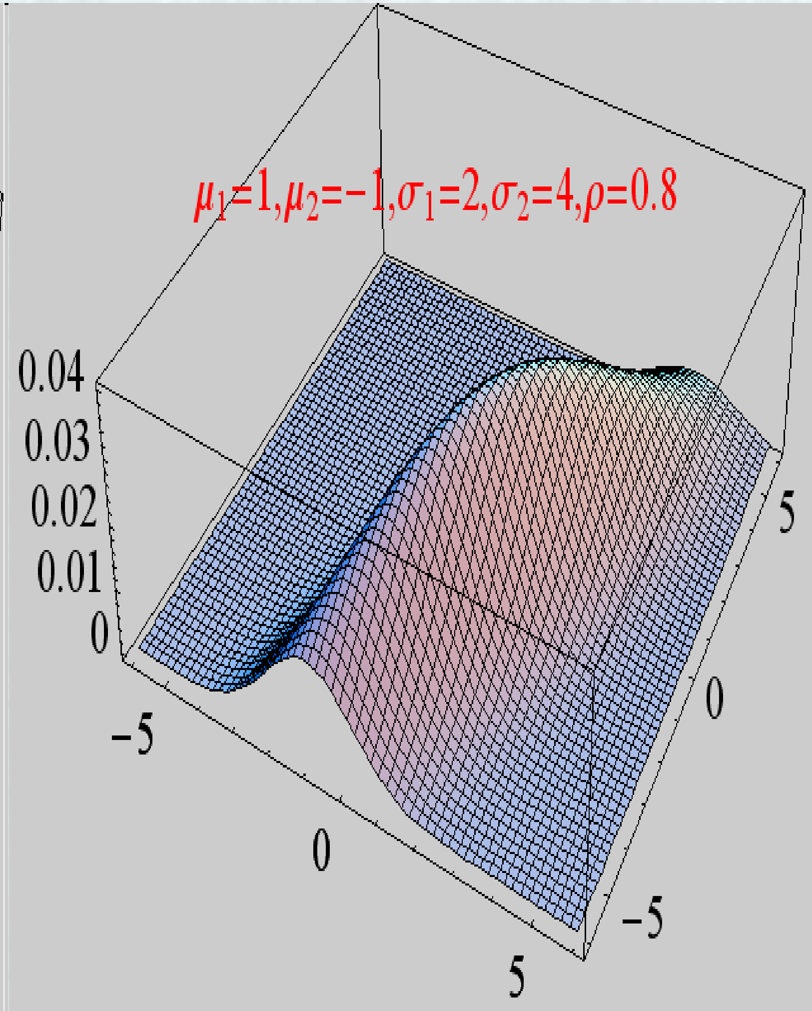
则称 (X,Y)服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布 .记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

二维正态分布的图形



$\mu_1=\mu_2=0,\sigma_1=\sigma_2=1,\rho=0$
0.15
0.1
0.05
0
-2
0
2
2
0
-2



$\mu_1=1,\mu_2=-1,\sigma_1=2,\sigma_2=4,\rho=0.8$
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-5
0
5
5
0
-5

五、小结

1. 二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}.$$

2. 二维离散型随机变量的分布律及分布函数

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots;$$

$$F(x,y)=\sum_{\substack{x_i\le x\\ y_j\le y}} p_{ij}.$$

3. 二维连续型随机变量的概率函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

备份题

例1 设二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$p(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 k;　　(2) 求 $P\{X<1, Y<3\}$;

(3) 求 $P\{X<1.5\}$; (4) $P\{X+Y\leq 4\}$.

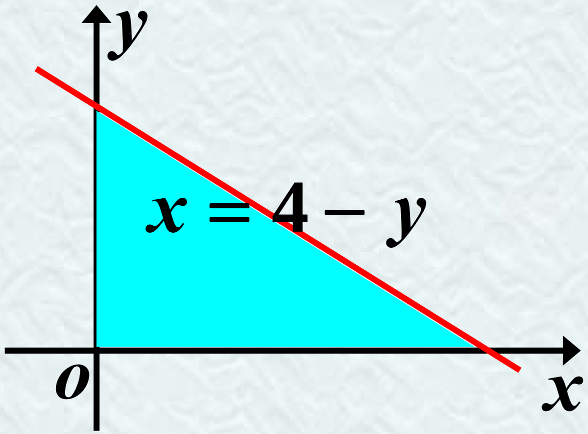
解　(1) 因为 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$,

所以 $\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=1 \Rightarrow k=\dfrac{1}{8}$;

$$(2)\ P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8};$$

$$(3)\ P\{X<1.5\}=\int_0^{1.5}\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\frac{27}{32};$$

$$(4)\ P\{X+Y\le 4\}=P\{X\le 4-Y\}$$



$$=\int_2^4\int_0^{4-y}\frac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}.$$