离散数学

Discrete Mathematics

for Computer Science

计算机学院计科系
薛思清 xuesiqing@cug.edu.cn

第6讲 关系 Relation（4）

Good order is the foundation of all things.

—Edmund Burke (1729–1797)

Outline

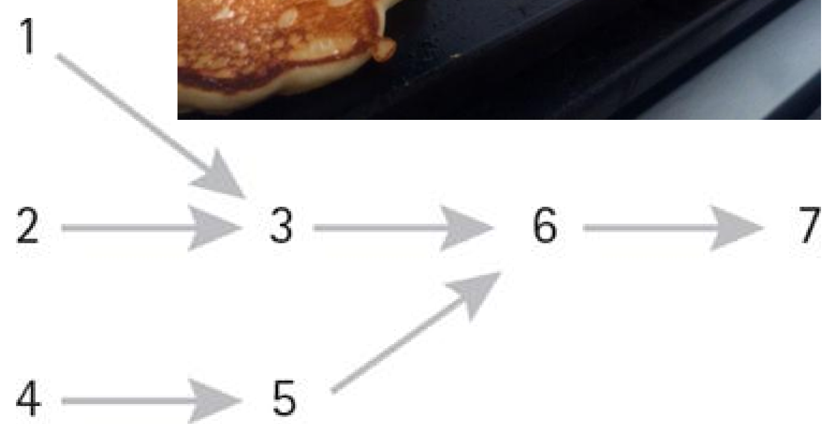
几个特殊的二元关系

- 等价关系
- 偏序关系
- 函数

A Pancake Recipe

Suppose we have the following recipe for making pancakes.

1. Mix the dry ingredients (flour, sugar, baking powder) in a
2. Mix the wet ingredients (milk, eggs) in a bowl.
3. Mix the wet and dry ingredients together.
4. Oil the pan. (It’ s an old pan.)
5. Heat the pan.
6. Make a test pancake and throw it away.
7. Make pancakes.

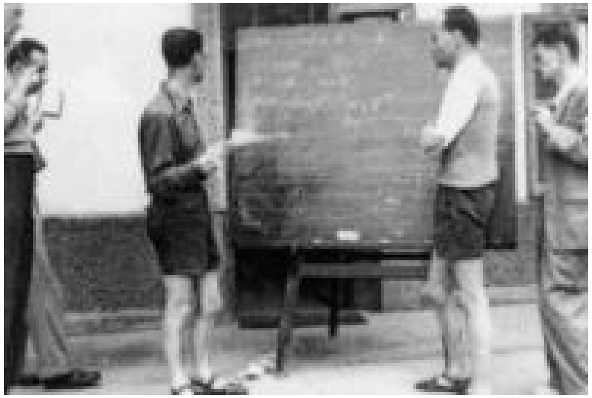


An ordering for the steps:

4, 5, 2, 1, 3, 6, 7.

尼古拉·布尔巴基（Nicolas Bourbaki）学派

- 序结构
- 代数结构
- 拓扑结构



1951年布尔巴基大会

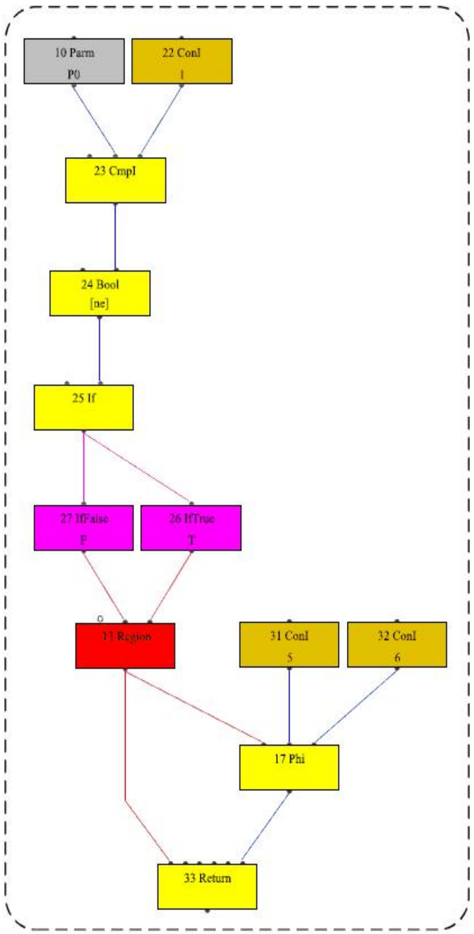
“结构主义” ——> “构造主义”

导弹拦截

某国为了防御敌国的导弹袭击，发展出一种导弹拦截系统。但是这种导弹拦截系统有一个缺陷：虽然它的第一发炮弹能够达到任意的高度，但是以后每一发炮弹都不能高于前一发的高度。某天，雷达捕捉到敌国的导弹来袭。由于该系统还在使用阶段，所以只有一套系统，因此有可能不能拦截所有的导弹。

输入导弹依次飞来的高度，计算这套系统最多能拦截多少导弹，如果要拦截所有导弹最少要配备多少套这种导弹系统。

Dilworth定理



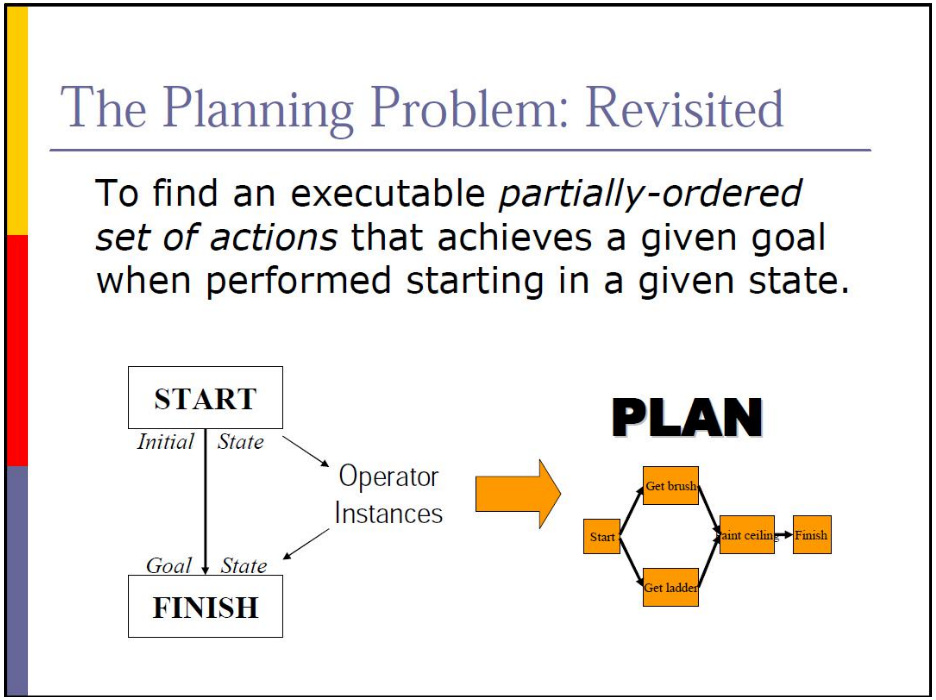

```
int test(int x) {
   if(x == 1) {
      return 5;
   } else {
      return 6;
   }
}
```

Graph when processing an `if` statement.

An Evolutionary Algorithm of Contracting Search Space Based on Partial Ordering Relation for Constrained Optimization Problems

Partial-Order Planning

An example is simple: given a set of actions I can perform, which ones do I choose (and in what order should I apply them) in order to reach my goal? I've got to get to work this morning - what should I do to get there? I might need to wake up, turn off the alarm, shower, take off my wet pajamas and put on something suitable for doing business, and so on, until I reach work in the morning.



偏序关系(Partial Order):

设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 若R是~~自反的~~, 反对称的, 传递的

通常用$\preccurlyeq$ 表示偏序关系,读作“小于等于”；

“严格小于”： $x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$

偏序集(Poset, Partial-Order Set): $<A, \preccurlyeq>$, $\preccurlyeq$ 是A上偏序关系

例: $<A,\leq>$, $<A,|>$, $<A,\subseteq>$

练习

设ρ是集合A上的偏序关系，$B \subseteq A$，试证明

$\rho \cap (B \times B)$是B上的偏序关系。

设$<A,\preccurlyeq>$是偏序集, $x, y\in A$

可比(comparable):

x与y可比 $\Leftrightarrow x\preccurlyeq y \vee y\preccurlyeq x$

覆盖(cover):

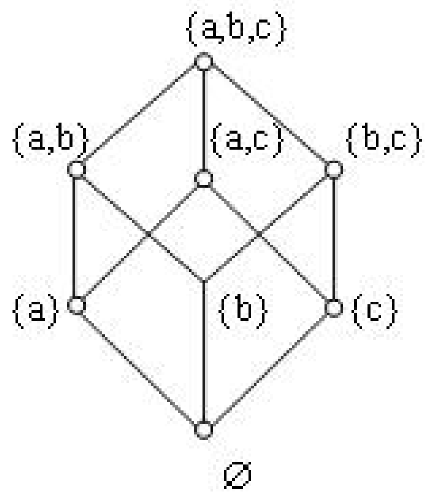
y覆盖$x \Leftrightarrow x\prec y \wedge \neg\exists z(z\in A \wedge x\prec z \wedge z\prec y)$

哈斯图(Hasse):

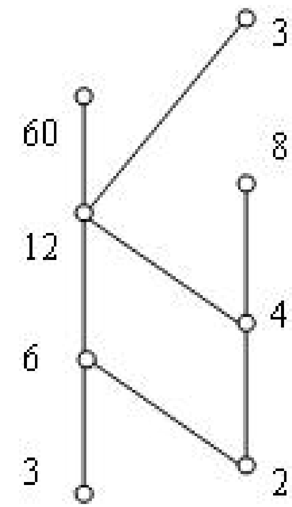
图中每个顶点代表A的一个元素,当且仅当y覆盖x时,在x与y之间画无向边, 并且x画在y下方

示例

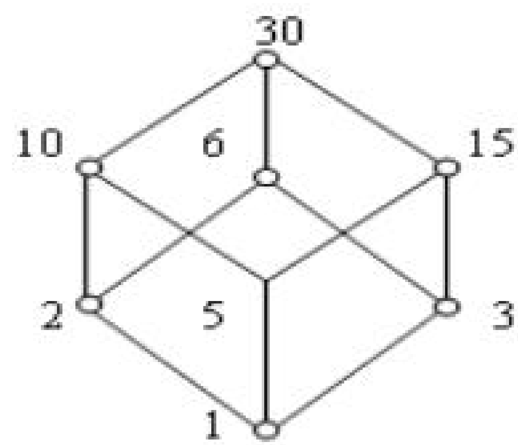
1 集合A={a, b, c}, A的幂集P(A)上的包含关系⊆是一个偏序关系



2 集合A={2, 3, 4, 6, 8, 12, 36, 60}上的整除关系“ | ”是一个偏序关系



3 设n是一个正整数, S_n是n的所有因子的集合。 例如, 当n=30时, S_{30}={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}。设“|”是整除关系, 则$<S_{30};\ |>$是偏序集



偏序集中的特殊元素

设 $<A, \preccurlyeq>$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in B$

最大元(maximum/greatest element):

y是B的最大元 $\Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$

最小元(minimum/least element):

y是B的最小元 $\Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$

极大元(maximal element):

y是B的极大元 $\Leftrightarrow \forall x(x \in B \wedge y \preccurlyeq x \rightarrow x = y)$

极小元(minimal element):

y是B的极小元 $\Leftrightarrow \forall x(x \in B \wedge x \preccurlyeq y \rightarrow x = y)$

全序

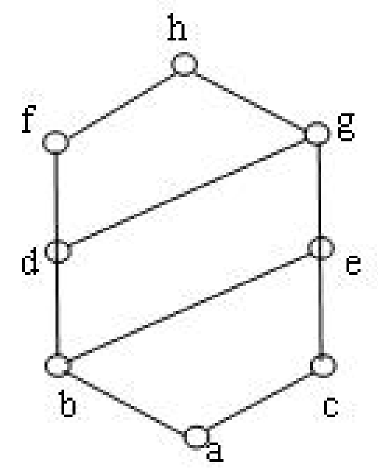
良序

示例

偏序集<{a,b,c,d,e,f,g,h},≤>，由下图的哈斯图给出。

（1）B_1={b,d,e,g}　（2）B_2={b,c,d,e,f,g}

（3）B_3={a,c,d}　（4）B_4={d,e}



解

（1）B_1的最大元为g； B_1的极大元为g； B_1的最小元为b； B_1的极小元也为b。

（2）B_2无最大元和最小元； B_2的极大元是f,g；极小元是b,c。

（3）B_3无最大元，其最小元为a； B_3的极大元为c,d；极小元为a。

（4）B_4无最大元，也无最小元； B_4的极大元是d,e；极小元也是d,e。

设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in A$

上界(upper bound): y是B的上界 $\Leftrightarrow \forall x(x\in B \to x\preccurlyeq y)$

下界(lower bound): y是B的下界 $\Leftrightarrow \forall x(x\in B \to y\preccurlyeq x)$

最小上界(least upper bound, lub):

设 $C = \{ y \mid y$是B的上界$\}$, C的最小元称为B的最小上界, 或上确界.

最大下界(greatest lower bound, glb):

设 $C = \{ y \mid y$是B的下界$\}$, C的最大元称为B的最大下界, 或下确界.

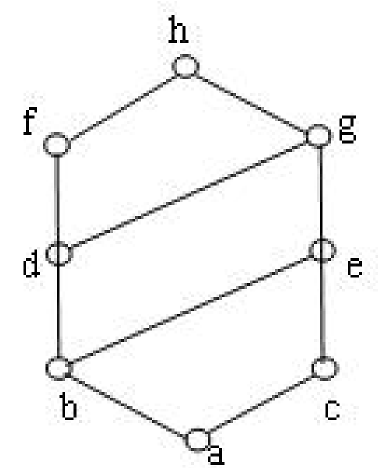
示例

偏序集<{a,b,c,d,e,f,g,h},≤>，由右图的哈斯图给出。

(1) B_1={b,c,d,e,g}

(2) B_2={b,e,d,f}

(3) B_3={a,c,d}　　(4) B_4={d,e}



1) 当B1={b,c,d,e,g}时，B1有上界g,h，下界a；最小上界g，最大下界a 。

2) 当B2={b,e,d,f}时，B2有上界h，下界b,a；最小上界h，最大下界b。

练习 下表中关于偏序集的子集B的判断是否正确?

	存在(B非空有穷)	存在(B无穷)	唯一	$\in B$
最大元				
最小元				
极大元				
极小元				
上界				
下界				
上确界				
下确界				

练习 下表中关于偏序集的子集B的判断是否正确?

	存在(B非空有穷)	存在(B无穷)	唯一	∈B
最大元	×(表示不一定)	×	√	√
最小元	×	×	√	√
极大元	√ (表示一定)	×	×	√
极小元	√	×	×	√
上界	×	×	×	×
下界	×	×	×	×
上确界	×	×	√	×
下确界	×	×	√	×

链、反链

一个链C是X的一个子集，它的任意两个元素都可比。

一个反链A是X的一个子集，它的任意两个元素都不可比。

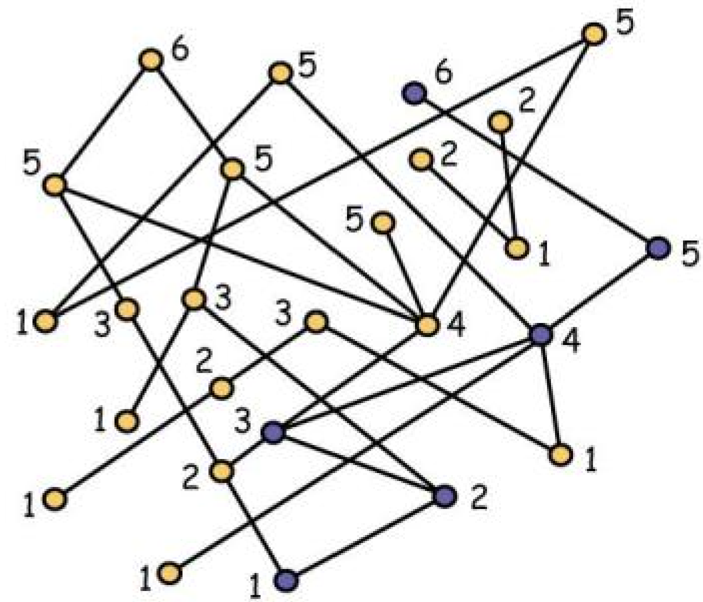
两个重要定理：

定理1 令$<X,\leq>$是一个有限偏序集，并令m是其最大链的大小，则X可以被划分成m个但不能再少的反链。（Mirsky)

其对偶定理称为Dilworth定理：

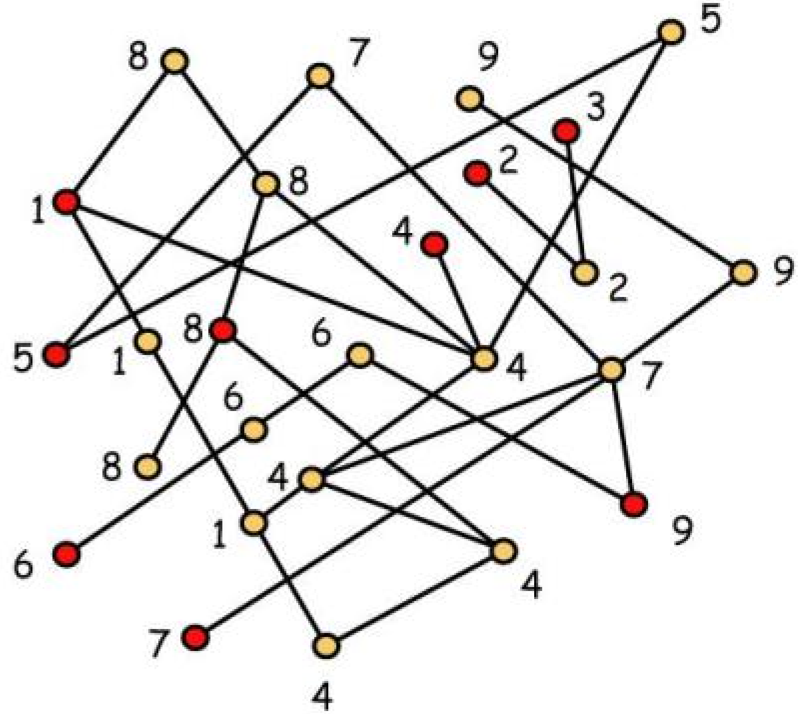
定理2 令（X,≤）是一个有限偏序集，并令m是反链的最大值，则X可以被划分成m个但不能再少的链。

Mirsky's Theorem (Dual Dilworth)



Theorem (1971) A poset of height h can be partitioned into h antichains.

Dilworth's Theorem



Theorem (1950) A poset of width w can be partitioned into w chains.

Equivalence of seven major theorems in combinatorics

Robert D. Borgersen
umborger@cc.umanitoba.ca

Abstract

The seven following theorems, while seemingly unrelated, are equivalent (i.e., any one of them may be proved by assuming any other is true). These theorems relate to graph theory, set theory, flow theory, and even marriage: Menger's theorem (1929), König's theorem for matrices (1931), the König-Egerváry theorem (1931), Hall's marriage theorem (1935), the Birkhoff-Von Neumann theorem (1946), Dilworth's theorem (1950) and the Max Flow-Min Cut theorem (1962). I will attempt to explain each theorem, and give some indications why all are equivalent.

——**Robert D. Borgersen,** ***Equivalence of seven major theorems in combinatorics***