离散数学
Discrete Mathematics
for Computer Science

计算机学院计科系
薛思清 xuesiqing@cug.edu.cn

第2讲 命题逻辑 Propositional Logic(2)

Mathematical logic is to computer science what calculus is to physics.
—J Strother Moore

2.3 命题演算(Propositional Calculus)

1 判断命题公式是否永真——真值表方法，当命题变量增多时？
2 真值函数的表达式(命题公式)？

命题公式等值或命题公式可以由一种形式转化位另一种形式，是逻辑/数理逻辑研究的重要课题。

2.3 命题演算(Propositional Calculus)

1 逻辑等价(Logical Equivalence)

函数相等?

命题公式相等?

定义 设 α,β 是两个命题公式。如果对于 α 与 β 的合成变元组(即这两个公式所有不同命题变元合在一起)的任意指派 π，均有

$$\alpha(\pi) = \beta(\pi)$$

则称 α 与 β 逻辑等价(Logically Equivalent)，也称永真等价或同真假。
记为 $\alpha \Leftrightarrow \beta$ 或 $\alpha \equiv \beta$ 。

2.3 命题演算(Propositional Calculus)

1 逻辑等价(Logical Equivalence)

函数相等?

命题公式相等?

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ 当且仅当$\alpha \leftrightarrow \beta$为重言式

$\Leftrightarrow$: 一种关系比较，自然语言中的符号

$\leftrightarrow$: 运算符号，可以计算（从而用于判断等价关系）可以作为程序语言的符号

示例 下列命题公式是否等价?

$\neg P \vee Q$ 与 $P \to Q$,

$\neg P$ 与 $\neg P \vee (Q \wedge \neg P)$,

$P \vee \neg P$ 与 $Q \to Q$.

P	Q	$\neg P \vee Q$	$P \to Q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee (Q \wedge \neg P)$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

$\alpha \Leftrightarrow \beta$当且仅当$\alpha \leftrightarrow \beta$为重言式，即 $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$ 永真.

2.3 命题演算(Propositional Calculus)

等值公式/命题定律(Equivalences,Basic Laws)

1 交换律、结合律、分配律

双否律、幂等律、德摩根律

2 吸收律、零一律、同一律、排中律、矛盾律

3 蕴含等值式

4 假言易位（逆否律）、等价等值式、等价否定律

5 归谬论

2.3 命题演算(Propositional Calculus)

- 吸收律 $\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)\Leftrightarrow\alpha$， $\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)\Leftrightarrow\alpha$
- 零一律 $\alpha\vee1\Leftrightarrow1$， $\alpha\wedge0\Leftrightarrow0$
- 同一律 $\alpha\vee0\Leftrightarrow\alpha$， $\alpha\wedge1\Leftrightarrow\alpha$
- 排中律 $\alpha\vee\neg\alpha\Leftrightarrow1$
- 矛盾律 $\alpha\wedge\neg\alpha\Leftrightarrow0$

2.3 命题演算(Propositional Calculus)

- 蕴含等值式 $\alpha\to\beta\Leftrightarrow\neg\alpha\vee\beta$
- 假言易位(逆否律) $\alpha\to\beta\Leftrightarrow\neg\beta\to\neg\alpha$
- 等价等值式 $\alpha\leftrightarrow\beta\Leftrightarrow(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)$，
  $\alpha\leftrightarrow\beta\Leftrightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$
- 等价否定等值式 $\alpha\leftrightarrow\beta\Leftrightarrow\neg\alpha\leftrightarrow\neg\beta$
- 归谬论 $(\alpha\to\beta)\wedge(\alpha\to\neg\beta)\Leftrightarrow\neg\alpha$

Basic Equivalences

Negation	Disjunction	Conjunction	Implication
$\neg\neg A\equiv A$	$A\vee\text{True}\equiv\text{True}$	$A\wedge\text{True}\equiv A$	$A\to\text{True}\equiv\text{True}$
	$A\vee\text{False}\equiv A$	$A\wedge\text{False}\equiv\text{False}$	$A\to\text{False}\equiv\neg A$
	$A\vee A\equiv A$	$A\wedge A\equiv A$	$\text{True}\to A\equiv A$
	$A\vee\neg A\equiv\text{True}$	$A\wedge\neg A\equiv\text{False}$	$\text{False}\to A\equiv\text{True}$
			$A\to A\equiv\text{True}$

Some Conversions	Absorption laws
$A\to B\equiv\neg A\vee B$	$A\wedge(A\vee B)\equiv A$
$\neg(A\to B)\equiv A\wedge\neg B$	$A\vee(A\wedge B)\equiv A$
$A\to B\equiv A\wedge\neg B\to\text{False}$	$A\wedge(\neg A\vee B)\equiv A\wedge B$
$\wedge$ and $\vee$ are associative.	$A\vee(\neg A\wedge B)\equiv A\vee B$
$\wedge$ and $\vee$ are commutative.	
$\wedge$ and $\vee$ distribute over each other:	*De Morgan's Laws*
$A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$	$\neg(A\wedge B)\equiv\neg A\vee\neg B$
$A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$	$\neg(A\vee B)\equiv\neg A\wedge\neg B$

2.3 命题演算(Propositional Calculus)

2 等值演算

如何进行等值演算？

两个定理

代入定理(Substitution Rule) 设α为命题公式，P是α中的命题变元。如果α是永真公式，那么对任意命题公式δ，有α[δ/P]为永真公式。

置换定理(Replacement Rule) 设β是α关于δ替换为γ的结果。如果δ ⇔ γ，则α ⇔ β。

2.3 命题演算(Propositional Calculus)

由代入定理知，每一个永真公式都是一族永真公式的代表

示例

由 $(P\wedge(P\to Q))\to Q$ 是永真公式可推知所有形如 $(\alpha\wedge(\alpha\to\beta))\to\beta$ 的命题公式均为永真公式。

因此，每个永真公式中的命题变元都可以理解为子命题公式的形式。

从而，将代入定理运用于命题公式之间的逻辑等价，有

推论 设 α,β 是命题公式。若 α ⇔ β，则 α[δ/P] ⇔ β[δ/P]

利用这个推论，可将基本逻辑等价式中的命题变元理解为命题公式。

如，$P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$ 可理解为 $\alpha\vee\beta\Leftrightarrow\beta\vee\alpha$等等。

2.3 命题演算(Propositional Calculus)

2 等值演算

如何进行等值演算？

两个定理

练习

(1) $A\to(B\to C) \Leftrightarrow B\to(A\to C)$

(2) $P\to(Q\to R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\to R$

一个性质

对偶式？

定理 1.4 （对偶定理）
设$\alpha(P_1, P_2, \cdots, P_n)$和$\beta(P_1, P_2, \cdots, P_n)$是两个公式，
若$\alpha\Leftrightarrow\beta$，则$\alpha^*\Leftrightarrow\beta^*$。

例子：

- 由$P\vee(P\wedge Q)=P$可得$P\wedge(P\vee Q)=P$
- 由$P\wedge Q=\neg(\neg P\vee\neg Q)$ 可得
  $P\vee Q=\neg(\neg P\wedge\neg Q)$
- 由$F\wedge P=F$ 可得
  $T\vee P=T$

一个性质

定理 1.3 设α和α^*是互为对偶的两个公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$是其命题变元，则
$\neg\alpha(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow\alpha^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$ （#）

定理 1.4 （对偶定理）
设$\alpha(P_1, P_2, \cdots, P_n)$和$\beta(P_1, P_2, \cdots, P_n)$是两个公式，
若$\alpha\Leftrightarrow\beta$，则$\alpha^*\Leftrightarrow\beta^*$。

证明 因为$\alpha(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow\beta(P_1, P_2, \cdots, P_n)$
所以 $\neg\alpha(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow\neg\beta(P_1, P_2, \cdots, P_n)$
由定理 1.3 $\neg\alpha(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow\alpha^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$
$\neg\beta(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow\beta^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$
于是 $\alpha^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)\Leftrightarrow\beta^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$
从而 $\alpha^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow\beta^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$。

定理 1.3 设α和α^*是互为对偶的两个公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$是其命题变元，则
$\neg\alpha(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow\alpha^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$ （#）

证明 对α中联结词的个数 m 进行归纳。

当 m=0 时，α为命题变元，（#）式显然成立。

当 m=1 时，α为以下三种情形之一：$\alpha=\neg P$，$\alpha=P_1\wedge P_2$或$\alpha=P_1\vee P_2$。

（1）若$\alpha(P_1)=\neg P_1$，则$\alpha^*(P_1)=\neg P_1$，显然 $\neg\alpha(P_1)\Leftrightarrow\neg(\neg P_1)\Leftrightarrow\alpha^*(\neg P_1)$。

（2）若$\alpha(P_1, P_2)=P_1\wedge P_2$，则$\alpha^*(P_1, P_2)=P_1\vee P_2$，由德摩根律知：
$\neg(P_1\wedge P_2)\Leftrightarrow\neg P_1\vee\neg P_2$
即 $\neg\alpha(P_1, P_2)\Leftrightarrow\alpha^*(\neg P_1, \neg P_2)$

（3）若$\alpha(P_1, P_2)=P_1\vee P_2$，则$\alpha^*(P_1, P_2)=P_1\wedge P_2$，由德摩根律知：
$\neg(P_1\vee P_2)\Leftrightarrow\neg P_1\wedge\neg P_2$
即 $\neg\alpha(P_1, P_2)\Leftrightarrow\alpha^*(\neg P_1, \neg P_2)$

由此证明了当 m=1 时，（#）式成立。

设（#）式在 $m\leqslant k-1$ 时皆成立，则当 m=k 时，（#）式的正确性证明如下：
$\alpha(P_1, P_2, \cdots, P_n)$的最后一个联结词仅可能为$\neg$、$\wedge$或$\vee$。

设（#）式在 $m\leqslant k-1$ 时皆成立，则当 m=k 时，（#）式的正确性证明如下：
$\alpha(P_1, P_2, \cdots, P_n)$的最后一个联结词仅可能为$\neg$、$\wedge$或$\vee$。

（1）若最后一个联结词为$\neg$，令
$\alpha(P_1, P_2, \cdots, P_n)=\neg\alpha_1(P_1, P_2, \cdots, P_n)$
则α_1的联结词的个数为 k-1。由归纳假设有：
$\neg\alpha_1(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow\alpha_1^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$
因此 $\neg\alpha(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow\neg(\neg\alpha_1(P_1, P_2, \cdots, P_n))$
$\Leftrightarrow\alpha_1(P_1, P_2, \cdots, P_n)$
$\Leftrightarrow(\alpha_1^*(P_1, P_2, \cdots, P_n))^*$
$\Leftrightarrow(\neg\alpha_1(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n))^*$
$\Leftrightarrow\alpha^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$

（2）若最后一个联结词为$\wedge$，

（3）若最后一个联结词为$\vee$，。

命题公式是真值函数，如：f(P, Q) = P ∧ Q，

任意真值函数可以用相应命题公式来表示否？

2.4 范式(Normal Form)

2.4 范式(Normal Form)

需求

- 命题公式规范化?
- AI (自动推理，Rough集数据约简)
- 电路设计(只根据真值表即可设计电路)

2.4 范式(Normal Form)

ELSEVIER Discrete Applied Mathematics 107 (2000) 1–26 DISCRETE APPLIED MATHEMATICS

Disjunctive and conjunctive normal forms of pseudo-Boolean functions

Stephan Foldes, Peter L. Hammer *
Rutgers University, RUTCOR, 640 Bartholomew Road, Piscataway, NJ 08844-8003, USA

Received 15 February 2000; revised 2 June 2000; accepted 23 June 2000

Pseudo-Boolean functions (pBf's) appear in numerous areas of discrete optimization, computer science, reliability theory, data analysis, graph theory, as well as in many interdisciplinary models of electronic circuit design, physics, telecommunications, etc.

…very pseudo-Boolean function (i.e. real-valued function with binary vari-…ted by a disjunctive normal form (essentially the maximum of several …the concepts of implicants and of prime implicants are analyzed in the …t, and a consensus-type method is presented for finding all the prime …-Boolean function. In a similar way the concepts of conjunctive normal …ime implicates, as well as the resolution method are examined in the case …ctions. © 2000 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

…function from the hypercube (n-cube) B^n to B is called a *Boolean* … from B^n to the set $\mathscr{R}$ of real numbers is called a *pseudo-Boolean* …

…$_1, \dots, v_n$) in B^n is the characteristic vector of the subset $\{i : v_i = 1\}$ …o-Boolean function is essentially a real-valued set function defined …sets of an n-element set. This interpretation contributes to the role that pseudo-Boolean functions play in operations research. For example, in the theory of cooperative games with n players, the coalition values associated to sets of players can be described by pseudo-Boolean functions. Another way of looking at a pseudo-Boolean function is as a valuation on the Boolean lattice B^n, or as an assignment of numbers to the vertices of the n-cube.

* Corresponding author.
E-mail address: hammer@rutcor.rutgers.edu (P.L. Hammer).

如何构造真值函数 f 相应的命题公式：

f(P, Q, R) = True if and only if either P = Q = False or Q = R = True.

注意到，

f(F, F, T) = True,

f(F, F, F) = True,

f(T, T, T) = True,

f(F, T, T) = True.

对应如下四个命题公式：

(¬P∧¬Q∧R),

(¬P∧¬Q∧¬R),

(P∧Q∧R),

(¬P∧Q∧R).

构造 f 的命题公式：

(¬P∧¬Q∧R)∨(¬P∧¬Q∧¬R)∨(P∧Q∧R)∨(¬P∧Q∧R).

2.4 范式(Normal Form)

需求

- 命题公式规范化?
- AI (自动推理，Rough集数据约简)
- 电路设计(只根据真值表即可设计电路)

可行

函数相等;

联接词功能完备集：$\{\neg, \wedge, \vee\}$

Every truth function is equivalent to a propositional wff defined in terms of the connectives $\neg$, $\wedge$, and $\vee$.

2.4 范式(Normal Form)

何为命题公式规范形式?

文字 P，$\neg P$ （P与$\neg P$称为互补对）

质合取/析取式

P，$\neg P$，$\neg P\wedge Q$，$P\wedge\neg Q\wedge R$

P，$\neg P$，$P\vee Q$，$\neg P\vee Q\vee\neg R$

析取/合取范式

主析取/合取范式

2.4 范式(Normal Form)

析取范式 (Disjunctive Normal Form)

$\alpha_1\vee\alpha_2\vee\ldots\vee\alpha_n$

$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$

合取范式 (Conjunctive Normal Form)

$\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\ldots\wedge\alpha_n$

$(P\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg R)$

2.4 范式(Normal Form)

练习 求命题公式的析取范式和合取范式

(1).求$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$的析取范式和合取范式

(2).求$(P\rightarrow Q)\vee(P\wedge R)$的析取范式和合取范式

2.4 范式(Normal Form)

解 (1)求$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$的析取范式:

$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$

$\Leftrightarrow(\neg\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$ // 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow\underline{(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)}$ // 双否律

$\Leftrightarrow(P\neg\wedge P)\vee(P\wedge R)\vee(Q\neg\wedge P)\vee(Q\wedge R)$ // 分配律

$\Leftrightarrow\underline{(P\wedge R)\vee(Q\neg\wedge P)\vee(Q\wedge R)}$ // $(P\neg\wedge P)$是矛盾式

显然$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$的合取范式为$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$。

(2)求$(P\rightarrow Q)\vee(P\wedge R)$的一个合取范式:

$(P\rightarrow Q)\vee(P\wedge R)\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\vee(P\wedge R)\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee P)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)$

显然$(P\rightarrow Q)\vee(P\wedge R)$的一个析取范式为$(\neg P)\vee Q\vee(P\wedge R)$。

2.4 范式(Normal Form)

注意到:

一个命题公式的合取范式和析取范式不具有唯一性。

- 主析取/合取范式

(Full Disjunctive/Conjunctive Normal Form)

如何构造?

极小项、极大项

1 真值表法

2 等值演算

2.4 范式(Normal Form)

P	Q	f	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$?			
			$P\wedge Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

2.4 范式(Normal Form)

P	Q	f	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$?			
			$P\wedge Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

2.4 范式(Normal Form)

P	Q	f	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$?			
			$P\wedge Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

2.4 范式(Normal Form)

P	Q	f	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$			
			$P\wedge Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

记： $f=(P\wedge Q)\vee((\neg P\wedge\neg Q)=m_{11}\vee m_{00}$ 试问： $\neg f=?$

2.4 范式(Normal Form)

P	Q	f	$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$?			
			$P\vee Q$	$\neg P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$\neg P\vee\neg Q$
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0

2.4 范式(Normal Form)

P	Q	f	$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$			
			$P\vee Q$	$\neg P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$\neg P\vee\neg Q$
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0

记： $f=(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)=M_{10}\wedge M_{01}$ 试问： $\neg f=?$

2.4 范式(Normal Form)

示例 求公式(¬P→R)∧(P↔Q)的主合取范式。

解 (¬P→R)∧(P↔Q)

⇔(P∨R)∧(¬P∨Q)∧(P∨¬Q)

⇔(P∨(Q∧¬Q)∨R)∧(¬P∨Q∨(R∧¬R))∧(P∨¬Q∨(R∧¬R))

⇔(P∨Q∨R)∧(P∨¬Q∨R)∧(¬P∨Q∨R)∧(¬P∨Q∨¬R)∧(P∨¬Q∨R)∧(P∨¬Q∨¬R)

⇔(P∨Q∨R)∧(P∨¬Q∨R)∧(P∨¬Q∨¬R)∧(¬P∨Q∨R)∧(¬P∨Q∨¬R)

⇔$M_0∧M_2∧M_3∧M_4∧M_5$

此即所求的主合取范式

2.4 范式(Normal Form)

练习 求命题公式的主范式

(1).求(¬P→Q)∧(P→R)的主析取范式和主合取范式

(2).求(P→Q)∨(P∧R)的主析取范式和主合取范式

(3).求 P → Q的主析取范式

2.4 范式(Normal Form)

(1)根据前例知(¬P→Q)∧(P→R)的一个析取范式是

(P∧R)∨(Q∧¬P)∨(Q∧R),

现在将其中的每个简单合取式展开为含有所有命题变元的极小项的析取

(P∧R)展开为(P∧Q∧R)∨(P∧¬Q∧R),(Q∧¬P)

展开为(¬P∧Q∧R) ∨(¬P∧Q∧¬R),(Q∧R)展开为(P∧Q∧R)∨(¬P∧Q∧R)

因此(¬P→Q)∧(P→R)的主析取范式为

(P∧Q∧R)∨(P∧¬Q∧R)∨(¬P∧Q∧R)∨(¬P∧Q∧¬R),

按极小项所对应的二进制数的大小重新排列为

(¬P∧Q∧¬R)∨(¬P∧Q∧R)∨(P∧¬Q∧R)∨(P∧Q∧R),

可记为$m_2∨m_3∨m_5∨m_7$。

2.4 范式(Normal Form)

讨论

1 范式一定存在，但主范式不一定存在?

2 如果命题公式数是矛盾式（永真式),则其无主析取范式(合取范式)?

3 两个命题公式若具有相同的主析取范式(或主合取范式)，则这两个命题公式逻辑等价.

4 如果命题公式存在主范式，则是唯一存在的?

5 如果已经求得某命题公式的主析取范式，则可以根据主析取范式求得该命题公式的主合取范式.

6 只要给定真值表，则可以求出相应真值函数的主范式?

7 n个变元可构成多少个不同的主析取范式?

小结

命题演算:

1 逻辑等价

2 等值公式

主范式求解方法:

1 真值表

2 等值演算