回顾

# 第7章 数值积分

7.1 数值积分概述

7.2 牛顿-柯特斯求积公式

7.3 复化求积公式

7.4 龙贝格求积公式

7.5 高斯型求积公式

# 7.1 数值积分概述

回顾

7.1.1定积分回顾

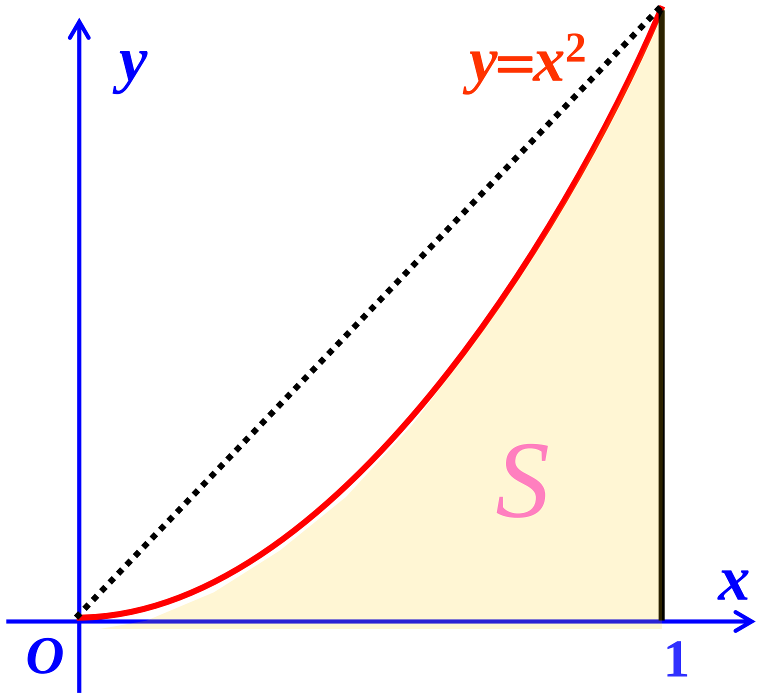
**例：** 求曲线 $y=x^2$、直线 $x=1$和 $x$轴所围成的曲边三角形的面积。

1 分割 把整体的问题分成局部的问题

2 近似 在局部上“以直代曲”，求出局部的近似值；

3 求和 得到整体的一个近似值；

4 取极限 得到整体量的精确值；



# 7.1 数值积分概述

## 7.1.3 数值积分的基本思想

**回顾**

对于函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

若能求得$f(x)$的原函数$F(x)$, 即$F'(x)=f(x)$. 则由Newton-Leibnitz公式

$$I(f)=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a)$$

但由于实际情况中, $f(x)$的原函数很难求出,因此, 只能计算定积分的近似值.

考虑用函数$f(x)$在一些点处的值的适当组合,作为定积分$I(f)$的近似

$$I(f)\approx Q(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k) \qquad (7.1)$$

用有限来逼近无限

其中:$x_k$是适当选取的点, 称为节点 $A_k$称为求积系数

公式（7.1）称为求积公式，以上方法称为**数值积分**.

# 7.1 数值积分概述

## 7.1.3 数值积分的基本思想

回顾

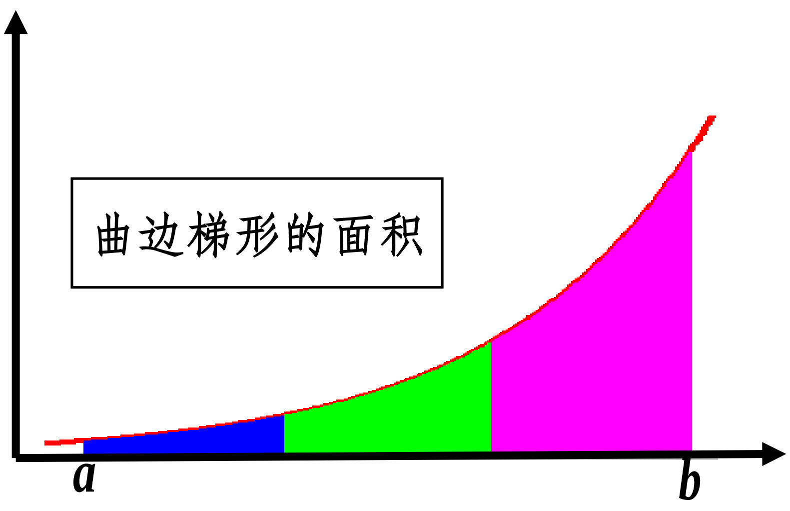
- 取$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一些离散点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

上的值加权平均作为 $f(\xi)$ 的近似值，从而构造出

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx Q(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

则截断误差或余项为 $\boxed{R(f) = I(f) - Q(f)}$



# 7.2 牛顿-柯特斯求积公式

回顾

## 7.2.1 引言

若取插值多项式为*Lagrange*多项式, 得到

$$Q(f)=\int_a^b \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)dx=\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b l_k(x)dx\right) f(x_k)$$

记$A_k=\int_a^b l_k(x)dx, k=0,1,2,\ldots,n$, 有

$$Q(f)=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

误差

$$E(f)=I(f)-Q(f)\ =\int_a^b R_n(x)dx=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)dx$$

# 7.2 牛顿-柯特斯求积公式

回顾

## 7.2.2 代数精度

定义7.1. 如果对任一不超过$m$次的多项式$p_m(x)$，内插求积公式$Q(f)$总有$I(p_m)=Q(p_m)$，而对某一个$m+1$次多项式$p_{m+1}(x)$，$I(p_{m+1})\neq Q(p_{m+1})$

则称此求积公式的代数精度为$m$，或称此公式具有$m$次代数精度

❑ **要验证一个求积公式具有 $m$ 次代数精度，只需验证对 $f(x)=1, x, x^2, \ldots, x^m$ 精确成立，但对 $f(x)=x^{m+1}$ 不精确成立即可，即：**

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^k = \int_a^b x^k \, dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} & (k=0, 1, \ldots, m) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^{m+1} \neq \int_a^b x^{m+1} \, dx = \frac{b^{m+2}-a^{m+2}}{m+2} & \end{cases}$$

## 7.2.2 代数精度

回顾

**由于 $n$ 次拉格朗日插值对 $f(x)=1, x, x^2, \ldots, x^n$ 精确成立，所以 $n$ 次插值型求积公式的代数精度至少为 $n$ 次。**

**反之，如果求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$ 的代数精度至少为 $n$ 次，则它必定是插值型的。**

**简证:求积公式对$n$次拉格朗日插值基函数 $l_k(x)$精确成立，即有**

$$\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i l_k(x_i) \xrightarrow{l_k(x_i)=\delta_{ki}} \omega_k = \int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$$

**定理 7.1** 求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$ 至少具有 $n$ 次代数精度的充要条件是：它是插值型的。

# 7.2 牛顿-柯特斯求积公式

回顾

在以上公式中，节点$x_k$按等距分布，令

$$h=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+kh,\ k=0,1,2,\cdots,n.$$

则称内插求积公式为$Newton-Cotes$公式

**通常取n=1, 2, 3, 4等值，那么**

(1)$n=1$ 则$x_0=a, x_1=b$ 插值函数公式为

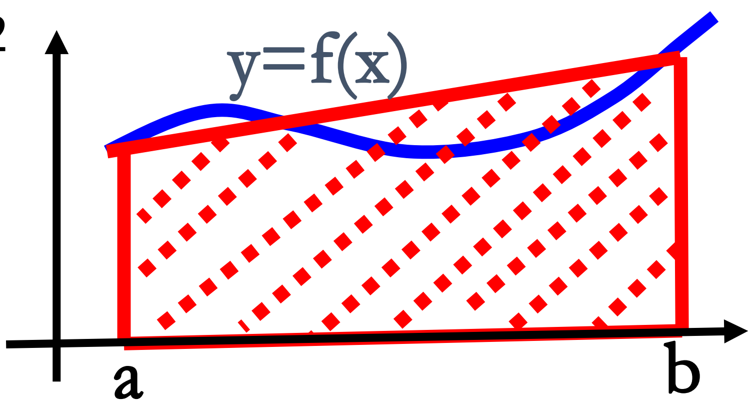
$$p_1(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

由$A_k=\int_a^b l_k(x)dx, k=0,1,2,\ldots,n$，可求得$A_0=A_1=\dfrac{b-a}{2}$

求积公式为

$$Q(f)=T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

称为梯形求积公式



# 7.2 牛顿-柯特斯求积公式

回 顾

$$(2)n=2 \quad 则 h=\frac{b-a}{2}, x_0=a, x_1=\frac{a+b}{2}, x_2=b$$

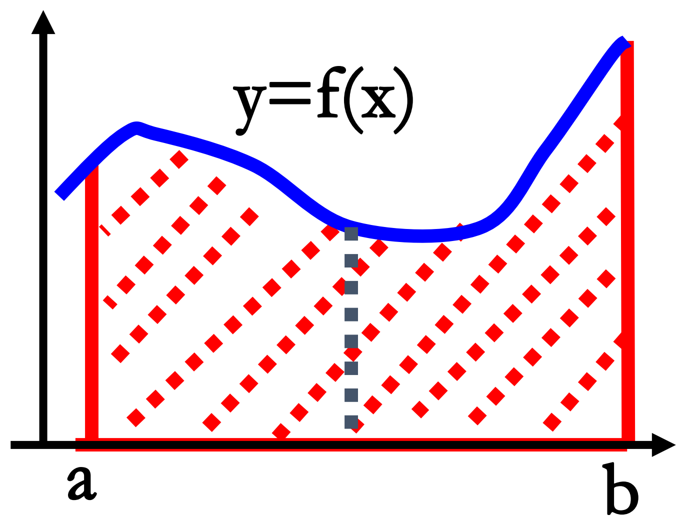
插值多项式为

$$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$可求得 A_0=\frac{h}{3}, A_1=\frac{4h}{3}, A_2=\frac{h}{3}$$

求积公式为

$$Q(f)=S_1=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$




称为Simpson（辛普森）求积公式

# 7.2 牛顿-柯特斯求积公式

回顾

(3) n=3， 则 $h=\frac{b-a}{3},\ x_0=a,\ x_1=\frac{2a+b}{3},\ x_2=\frac{a+2b}{3},\ x_3=b.$

插值多项式为

$$p_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3)$$

可求得 $A_0=\frac{3h}{8},\ A_1=\frac{9h}{8},\ A_2=\frac{9h}{8},\ A_3=\frac{3h}{8}.$

求积公式为

$$Q(f)=S_{3/8}=\frac{b-a}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{2b+a}{3}\right)+f(b)\right]$$

称为Simpson （辛普森）$\frac{3}{8}$ 求积公式

## 7.2 牛顿-柯特斯求积公式

**重要**

(4) n=4, 则$h=\dfrac{b-a}{4}, x_0=a, x_1=a+h, x_2=a+2h, x_3=a+3h, x_4=b$

插值多项式为

$$p_4(x)=l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1)+l_2(x)f(x_2)+l_3(x)f(x_3)+l_4(x)f(x_4)$$

可求得$A_0=\dfrac{14h}{45}, A_1=\dfrac{64h}{45}, A_2=\dfrac{24h}{45}, A_3=\dfrac{64h}{45}, A_4=\dfrac{14h}{45}$

求积公式为

$$Q(f)=C_1=\frac{b-a}{90}[7f(a)+32f(a+h)+12f(a+2h)$$
$$+32f(a+3h)+7f(b)]$$

称为Cotes求积公式

# 7.2 牛顿-柯特斯求积公式

定理7.6 设$f^{(6)}(x)$在$[a,b]$上连续, 则Cotes求积公式的误差是

$$E_4 = -\frac{8}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 f^{(6)}(\eta), a<\eta<b$$

上周课堂作业的答案

代数精度

梯形公式的代数精度为1

Simpon求积公式的代数精度为3

Simpon$\frac{3}{8}$求积公式的代数精度为3

Cotes求积公式的代数精度为5

# 7.2 牛顿-柯特斯求积公式

牛顿–柯特斯(Newton–cotes)求积公式

(1)梯形求积公式 $n=1, h=b-a$

$$Q[f]=\frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)], R[f]=-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

(2)Simpson求积公式 $n=2, h=(b-a)/2$

$$Q[f]=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] \qquad R[f]=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta)$$

(3) Simpson （辛普森）$\frac{3}{8}$求积公式 $n=3,\ h=\frac{b-a}{3}$

$$Q[f]=\frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)] \quad R[f]=-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\eta)$$

(4)Cotes求积公式 $n=4, h=(b-a)/4$

$$Q[f]=\frac{2h}{45}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

$$R[f]=-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\eta)$$

# 系数特点和稳定性

❑牛顿-柯特斯系数具有以下特点：

重要

(1) $\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} = \text{b-a}$

(2) $C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)}$

(3) 当 $n \geq 7$ 时，出现负数，稳定性得不到保证。而且当 $n$ 较大时，由于Runge现象，收敛性也无法保证。

故一般不采用高阶的牛顿-柯特斯求积公式。

❑ 当 $n \leq 6$ 时，牛顿–柯特斯公式是稳定的。

例7.2 设积分区间[a,b]为[0,2]，取f(x)=1, x, $x^2$, $x^3$, $x^4$, $e^x$时，分别用梯形和辛普森公式

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0)+f(2) \qquad \int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0)+4f(1)+f(2)]$$

计算其积分结果并与准确值进行比较。

解 梯形和辛普森的计算结果与准确值比较如下表

| $f$(x) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 准确值 | | | | | | |
| 梯形公式计算值 | | | | | | |
| 辛普森公式计算值 | | | | | | |

非常重要

例7.2 设积分区间[a,b]为[0,2]，取f(x)=1, x, $x^2$, $x^3$, $x^4$, $e^x$时，分别用梯形和辛普森公式

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0)+f(2) \qquad \int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0)+4f(1)+f(2)]$$

计算其积分结果并与准确值进行比较。

解 梯形和辛普森的计算结果与准确值比较如下表

| $f(x)$ | 1 | x | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $e^x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 准确值 | | | | | | |
| 梯形公式计算值 | | | | | | |
| 辛普森公式计算值 | | | | | | |

非常重要

例7.2 设积分区间[a,b]为[0,2]，取f(x)=1, x, $x^2$, $x^3$, $x^4$, $e^x$时，分别用梯形和辛普森公式

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0)+f(2) \qquad \int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0)+4f(1)+f(2)]$$

计算其积分结果并与准确值进行比较。

解 梯形和辛普森的计算结果与准确值比较如下表

| $f(x)$ | 1 | x | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $e^x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 准确值 | 2 | 2 | 2.67 | 4 | 6.40 | 6.389 |
| 梯形公式计算值 | 2 | 2 | 4 | 8 | 16 | 8.389 |
| 辛普森公式计算值 | 2 | 2 | 2.67 | 4 | 6.67 | 6.421 |

从表中可知，当f(x)是$x^2$, $x^3$, $x^4$时，辛普森公式比梯形公式更精确。
一般说来，代数精度越高，求积公式越精确。梯形公式和中矩形公式具有1次代数精度，辛普森公式有3次代数精度。

非常重要

例7.3：分别用梯形公式和Simpson公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$

解：$a=0, b=1, f(x)=e^{-x}$，

由梯形公式可得

$$T=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]=\frac{1}{2}\left[e^{0}+e^{-1}\right]=0.6839$$

由 Simpson 公式可得

$$S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=\frac{1}{6}\left[e^{0}+4e^{-0.5}+e^{-1}\right]=0.6323$$

与精确值 0.6321... 相比得误差分别为 0.0518 和 0.0002。

1. 应用面积公式(4)～公式(7)，计算函数 $f(x)$ 在固定区间 $[a,b]=[0,1]$ 上的积分。梯形公式、辛普森公式、辛普森 $\frac{3}{8}$ 公式和布尔公式的步长分别为 $h=1, h=\frac{1}{2}, h=\frac{1}{3}$ 和 $h=\frac{1}{4}$。

(a) $f(x)=\sin(\pi x)$

(b) $f(x)=1+e^{-x}\cos(4x)$

(c) $f(x)=\sin(\sqrt{x})$

**批注** 定积分的真解为：(a) $2/\pi=0.636619772367\cdots$，(b) $(18e-\cos(4)+4\sin(4))/(17e)=1.007459631397\cdots$，(c) $2(\sin(1)-\cos(1))=0.602337357879\cdots$

函数的曲线分别在图 7.5(a)～图 7.5(c)中给出。

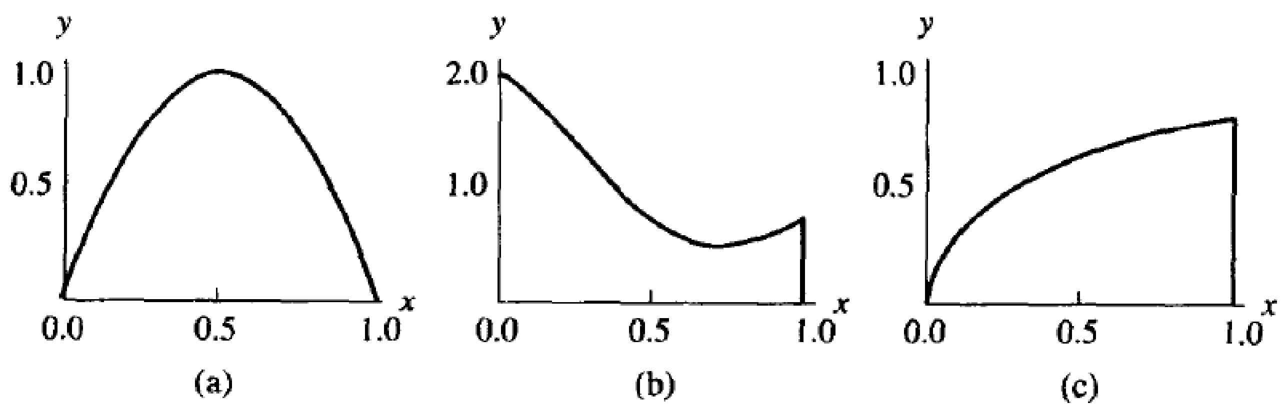



图 7.5 (a) $y=\sin(\pi x)$；(b) $y=1+e^{-x}\cos(4x)$；(c) $y=\sin(\sqrt{x})$

作业7.1

2. 分别应用组合梯形公式(17)、组合辛普森公式(18)和布尔公式(7)，使用 5 个等距节点上的函数值，步长为 $h=\frac{1}{4}$，计算函数 $f(x)$ 在固定区间 $[a,b]=[0,1]$ 上的积分。

(a) $f(x)=\sin(\pi x)$

(b) $f(x)=1+e^{-x}\cos(4x)$

(c) $f(x)=\sin(\sqrt{x})$

## 7.3 复化求积公式

由梯形、辛普森和柯特斯求积公式余项可知，随着求积节点数的增多，对应公式的精度也会相应提高。但由于$n \geqslant 8$时的牛顿—柯特斯求积公式开始出现负值的柯特斯系数。根据误差理论的分析研究，当积分公式出现负系数时，可能导致舍入误差增大，并且往往难以估计。因此不能用增加求积节点数的方法来提高计算精度。

在实际应用中，提高积分计算精度的常用两种方法

- ✓ 用 复化公式
- ✓ 用 非等距节点

# 7.3 复化求积公式

- 复化求积公式：将积分区间分割成多个小区间，然后在每个小区间上使用低次牛顿－科特斯求积公式。然后把所有小区间上的计算结果加起来得到整个区间上的求积公式。

## 7.3.1 复化梯形公式及其误差分析和算法实现

- 定步长：将$[a, b]$分成 $n$ 等分 $[x_i, x_{i+1}]$，其中节点：

$$x_i = a + i \cdot h, \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$上应用梯形公式

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

累加求和可得

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})) + f(x_n)]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]$$

非常非常重要

## 7.3.1 复化梯形公式及其误差分析和算法实现

记 $T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]$ (7.2)

式(7.2)称为复化梯形公式。

当f(x)在[a,b]上有连续的二阶导数，在子区间$[x_k,x_{k+1}]$上梯形公式的余项为

$$R_{T_k} = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_k) \qquad \eta_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

在[a,b]上的余项为

$$\boldsymbol{R_n(f) = I - T_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{h^3}{12} f''(\eta_k)\right]}$$

设$f''(x)$在[a,b]上连续，根据介值定理知，存在η∈[a,b]，使

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k) = f''(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

因此余项

$$\boldsymbol{R_n(f) = I - T_n(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta)}$$

## 7.3.1 复化梯形公式及其误差分析和算法实现

$$T_n = \frac{h}{2}\left[ f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]$$

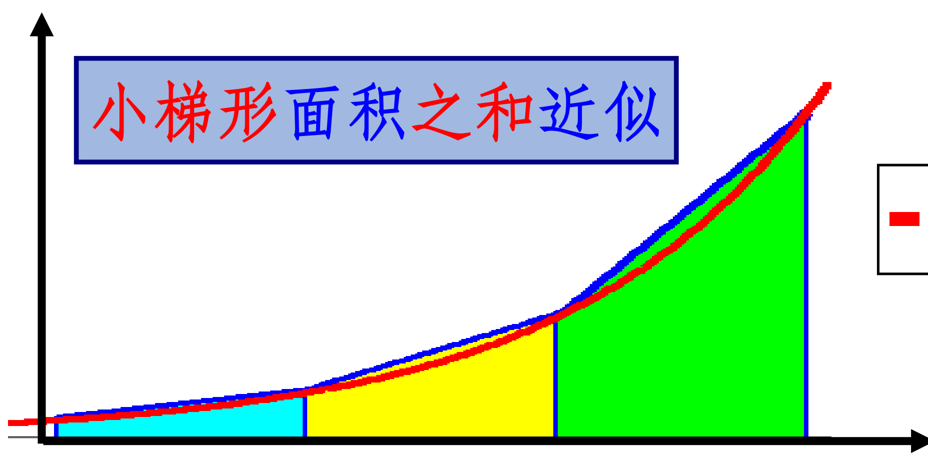
非常重要

$$= \frac{1}{2}\left[ \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \right] \to \int_a^b f(x)dx \ (n \to \infty)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta x_k}$$

其中定积分与区间分法和$\eta_k$的取法无关

复化梯形公式的几何意义




$y = f(x)$

# 7.3.1 复化梯形公式及其误差分析和算法实现

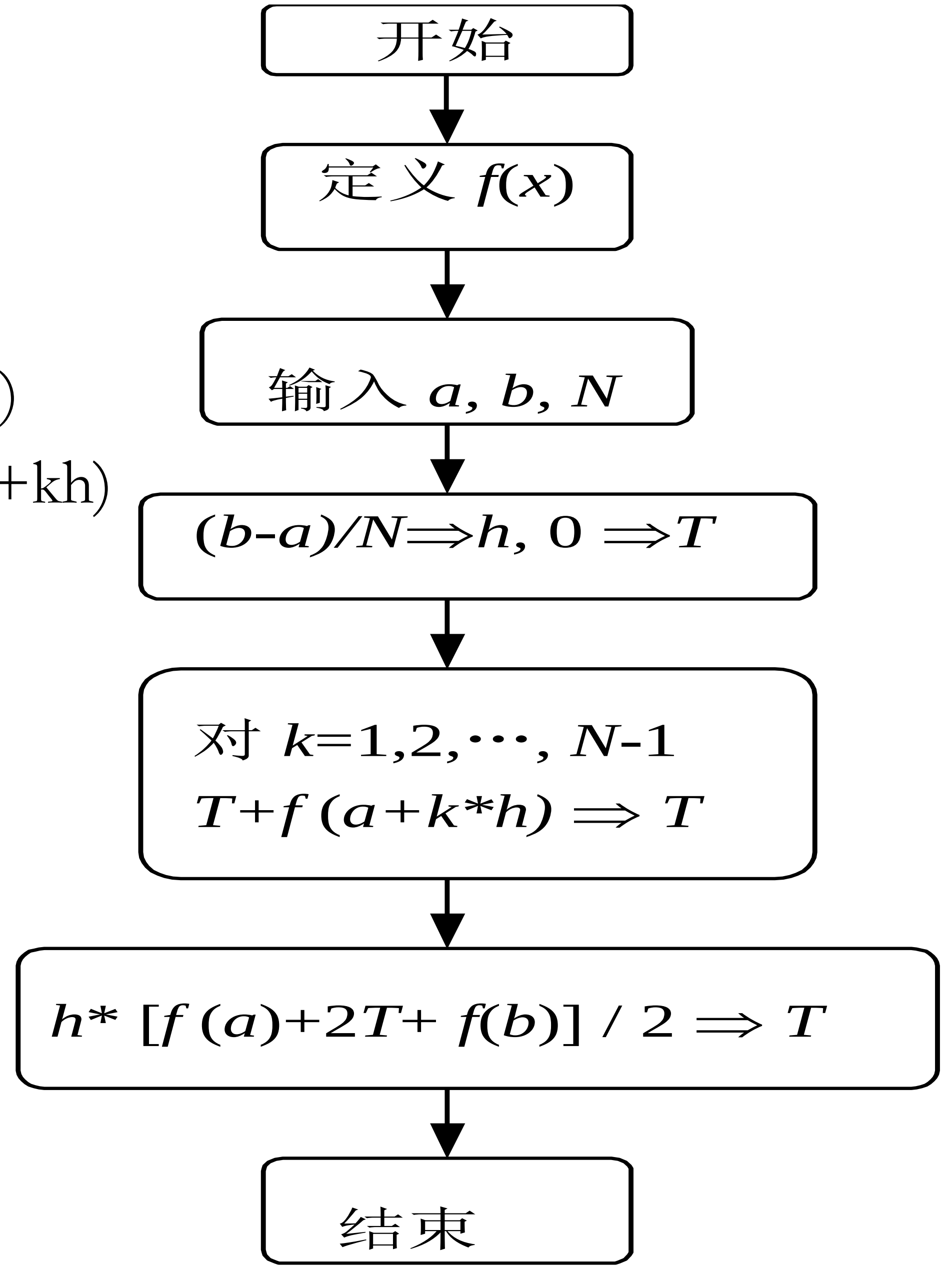
(1)复化梯形公式计算步骤

1)确定步长h=(b-a)/n (n为等分数)

2)对k=1,2,···,n-1， 计算T=T+f(a+kh)

3)T=h[f(a)+2T+f(b)]/2

(2)复化梯形公式的算法流程图



## (3)复化梯形公式的程序实现 FuheTixing.m

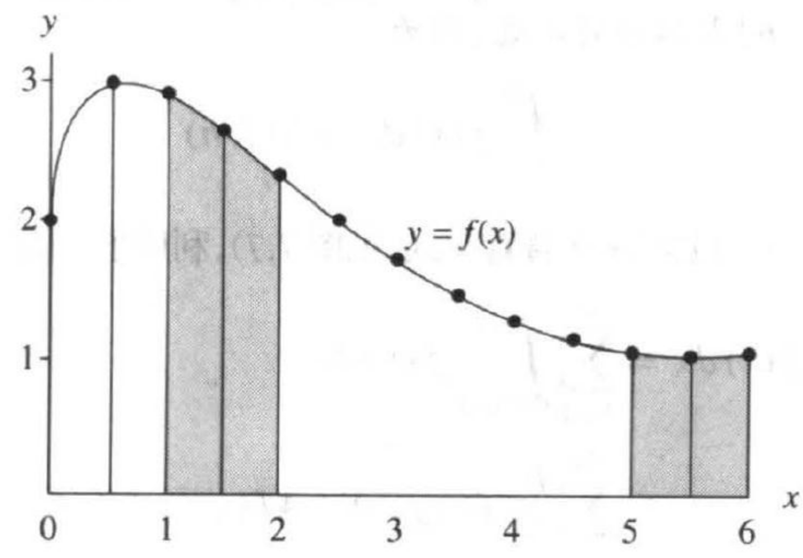
```
function s=FuheTixing(f,a,b,M)

%Input      - f is the integrand
%           - a and b are upper and lower limits of integration
%           - M is the number of subintervals
%Output   - s is the trapezoidal rule sum
% f=@(x) 20.*x.^3+sin(x)-6.*x-3;
% a=1; b=3; M=10;
% s=FuheTixing(f,a,b,M)

h=(b-a)/M;
s=0;

for k=1:(M-1)
   x=a+h*k;
   s=s+f(x);
end

s=h*(f(a)+f(b))/2+h*s;
```

例7.4 对函数 $f(x)=2+\sin(2\sqrt{x})$，利用组合梯形公式和 11 个采样点计算区间$[1,6]$上的 $f(x)$的积分的近似值。

(7.2)

解：用 $M=10$ 和 $h=(6-1)/10=1/2$ 生成 11 个采样点，利用公式(1c)，计算得

$$
\begin{aligned}
T(f,\tfrac{1}{2}) &= \frac{1/2}{2}(f(1)+f(6)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(f(\tfrac{3}{2})+f(2)+f(\tfrac{5}{2})+f(3)+f(\tfrac{7}{2})+f(4)+f(\tfrac{9}{2})+f(5)+f(\tfrac{11}{2})) \\
&= \frac{1}{4}(2.90929743+1.01735756) \\
&\quad + \frac{1}{2}(2.63815764+2.30807174+1.97931647+1.68305284+1.43530410 \\
&\quad + 1.24319750+1.10831775+1.02872220+1.00024140) \\
&= \frac{1}{4}(3.92665499)+\frac{1}{2}(14.42438165) \\
&= 0.98166375+7.21219083=8.19385457
\end{aligned}
$$



## 7.3.2 复化辛普森公式及其误差分析和算法实现

将积分区间 $[a,b]$ n等分：分点 $x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{n}$

在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ $k = 0,1,\cdots,n-1$ 上采用Simpson公式

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}\left[f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]$$

$$记 S_n = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right] \quad (7.3)$$

称为复化辛普森公式。

非常非常重要

## 7.3.2 复化辛普森公式及其误差分析和算法实现

**复化Simpson公式的余项** 设$f(x)\in C^{(4)}[a,b]$

$$R_n(f)=I-S_n(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta_k)\right]$$

$$\boxed{m=\min_{a\le x\le b} f^{(4)}(x)\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(\eta_k)\le\max_{a\le x\le b} f^{(4)}(x)=M}$$

由介值定理 $\exists\eta\in[a,b]$

$$f^{(4)}(\eta)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(\eta_k)$$

余项估计式

$$R_n(f)=I-S_n(f)=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$$

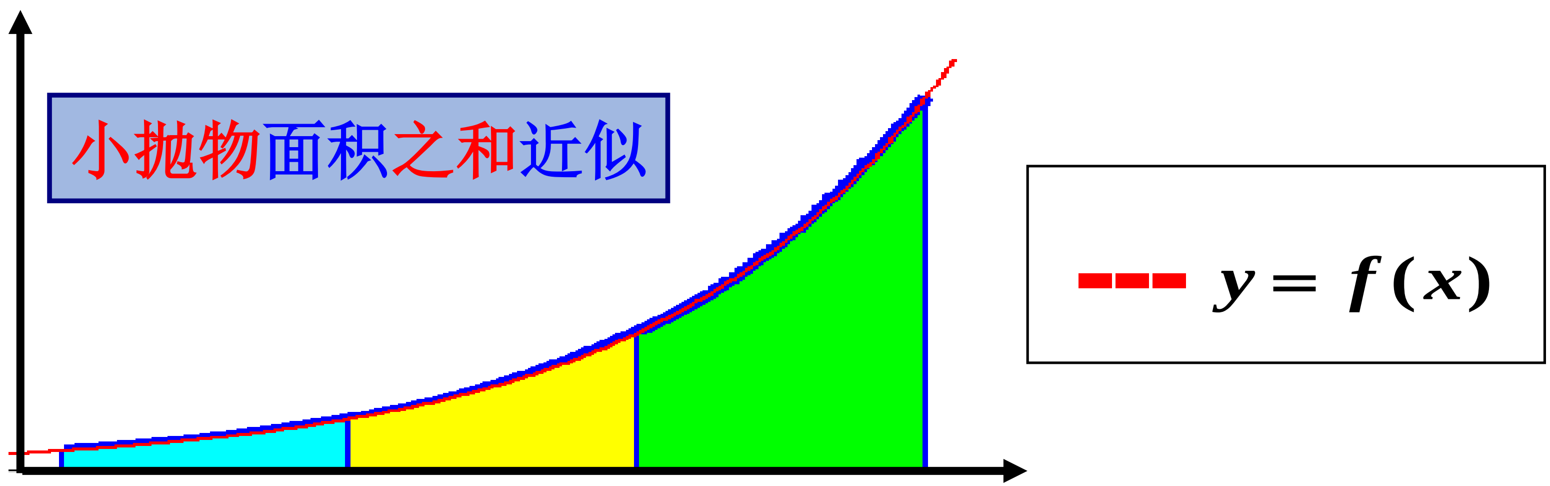
## 复化Simpson公式的收敛性

$$S_n(f)=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

$$\to\int_a^b f(x)dx\ (n\to\infty)$$

非常重要

## 复化Simpson公式的几何意义



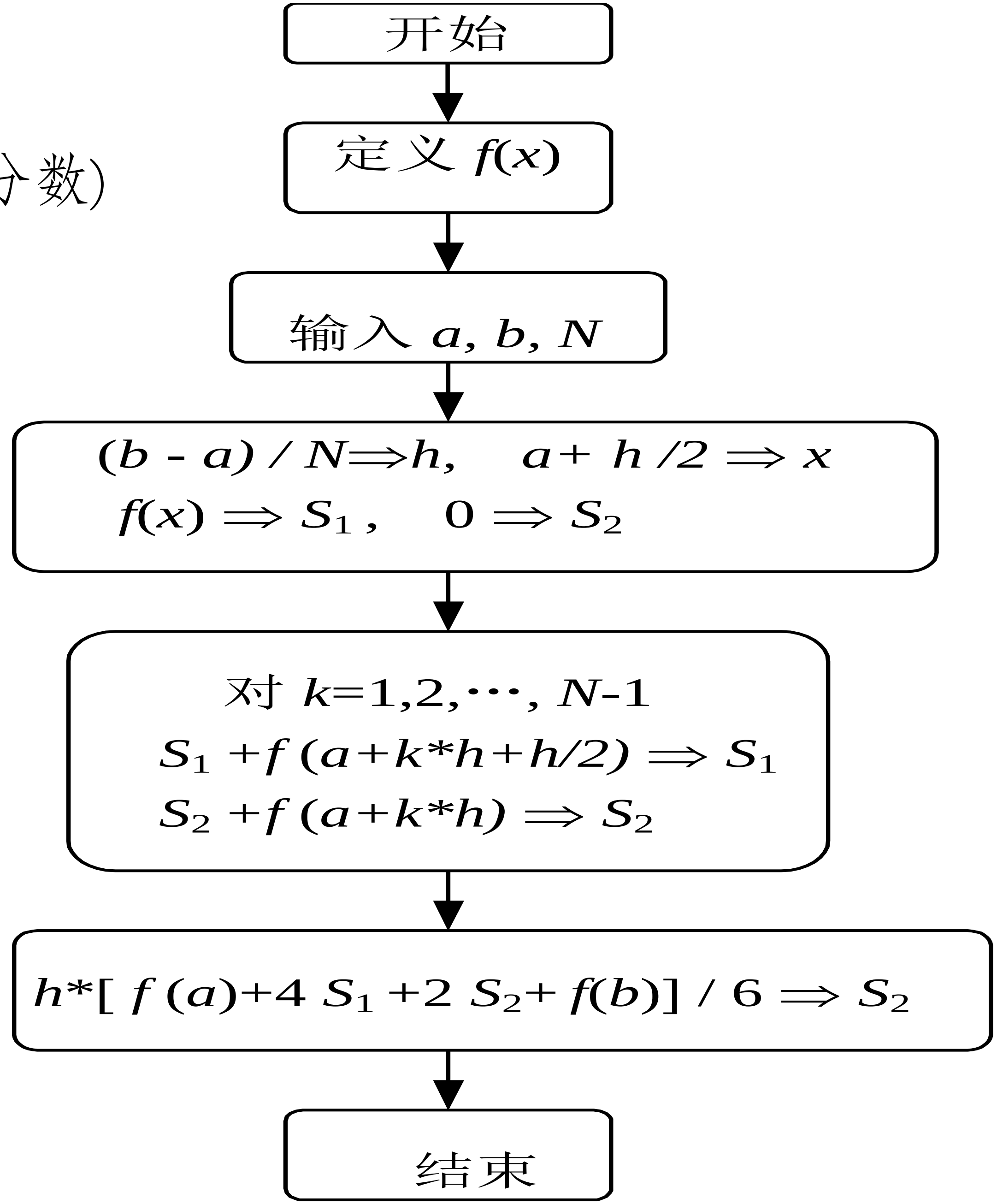
## (1)复化辛普森公式计算步骤

1)确定步长h=(b-a)/n (n为等分数)

2)对k=1,2,⋯,n-1，计算S1, S2

3) S2=h[f(a)+4S1+2S2+f(b)]/6

## (2)复化辛普森公式算法的流程图



## (3)复化辛普森公式算法的程序实现 FuheSimpson.m

```
function s=FuheSimpson(f,a,b,M)
%Input    - f is the integrand
%          - a and b are upper and lower limits of integration
%          - M is the number of subintervals
%Output  - s is the simpson rule sum
% f=@(x) 20.*x.^3+sin(x)-6.*x-3;
% a=1; b=3; M=10;
% s=FuheSimpson(f,a,b,M)

h=(b-a)/(2*M);
s1=0;
s2=0;

for k=1:M
   x=a+h*(2*k-1);
   s1=s1+f(x);
end
for k=1:(M-1)
   x=a+h*2*k;
   s2=s2+f(x);
end
s=h*(f(a)+f(b)+4*s1+2*s2)/3;
```

## 7.3.3 步长的选取

**非常非常重要**

注意事项：

（1）使用复化梯形公式、Simpson公式，首先要确定步长 $h$；

（2）而步长要根据余项确定，这就涉及到高阶导数的估计；

（3）高阶导数的估计一般比较困难，且估计值往往偏大；

（4）计算机上实现起来不方便，通常采用“事后估计法”。

利用复化梯形公式、复化Simpson公式等计算定积分时，对指定的误差界，如何选取步长 $h$，使之能够达到计算精度？

| | |
|---|---|
| 太大 → | 计算精度难以保证 |
| 太小 → | 增加额外的计算量 |

## 解决办法：采用 变步长算法

通常采取将区间不断对分的方法，即取 $n=2^k$，反复使用复化求积公式，直到相邻两次计算结果之差的绝对值小于指定的精度为止。

- 基本思想：将积分区间逐次分半
- 终止法则：前后两次近似值的误差小于已知精度

$$\left|I_{2n}-I_n\right|<\varepsilon$$

计算步骤

(1) 先取 $n=1, h=b-a$, 计算 $T_n$

(2) 缩小步长一半, 计算 $T_{2n}$

(3) 计算误差, 如果满足要求, 则停止,

否则转(2)

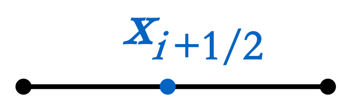
非常重要

# 变步长梯形法

- 将$[a, b]$分成 $n$ 等分 $[x_i, x_{i+1}]$，  $x_i = a + i \cdot h, \quad h = \dfrac{b-a}{n}$

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$

- 步长折半：$[x_i\,, x_{i+1/2}]$ ， $[x_{i+1/2}\,, x_{i+1}]$




$$T_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{4}\left[\left(f(x_i) + f(x_{i+1/2})\right) + \left(f(x_{i+1/2}) + f(x_{i+1})\right)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{4}\left[f(x_i) + 2f(x_{i+1/2}) + f(x_{i+1})\right]$$

$$= \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2})$$

非常重要

$$\boxed{T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2})}$$

$n = 2^0, 2^1, 2^2, \cdots$

终止条件：

非常重要

由复化梯形公式的余项知

$$I-T_n=-\frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f''(\eta_1)$$

$$I-T_{2n}=-\frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 f''(\eta_2)$$

$f''(x)$ 变化不大时

$$\boxed{\frac{I-T_n}{I-T_{2n}}\approx 4}$$

由此得到近似关系式 $I\approx T_{2n}+\frac{1}{4-1}(T_{2n}-T_n)$

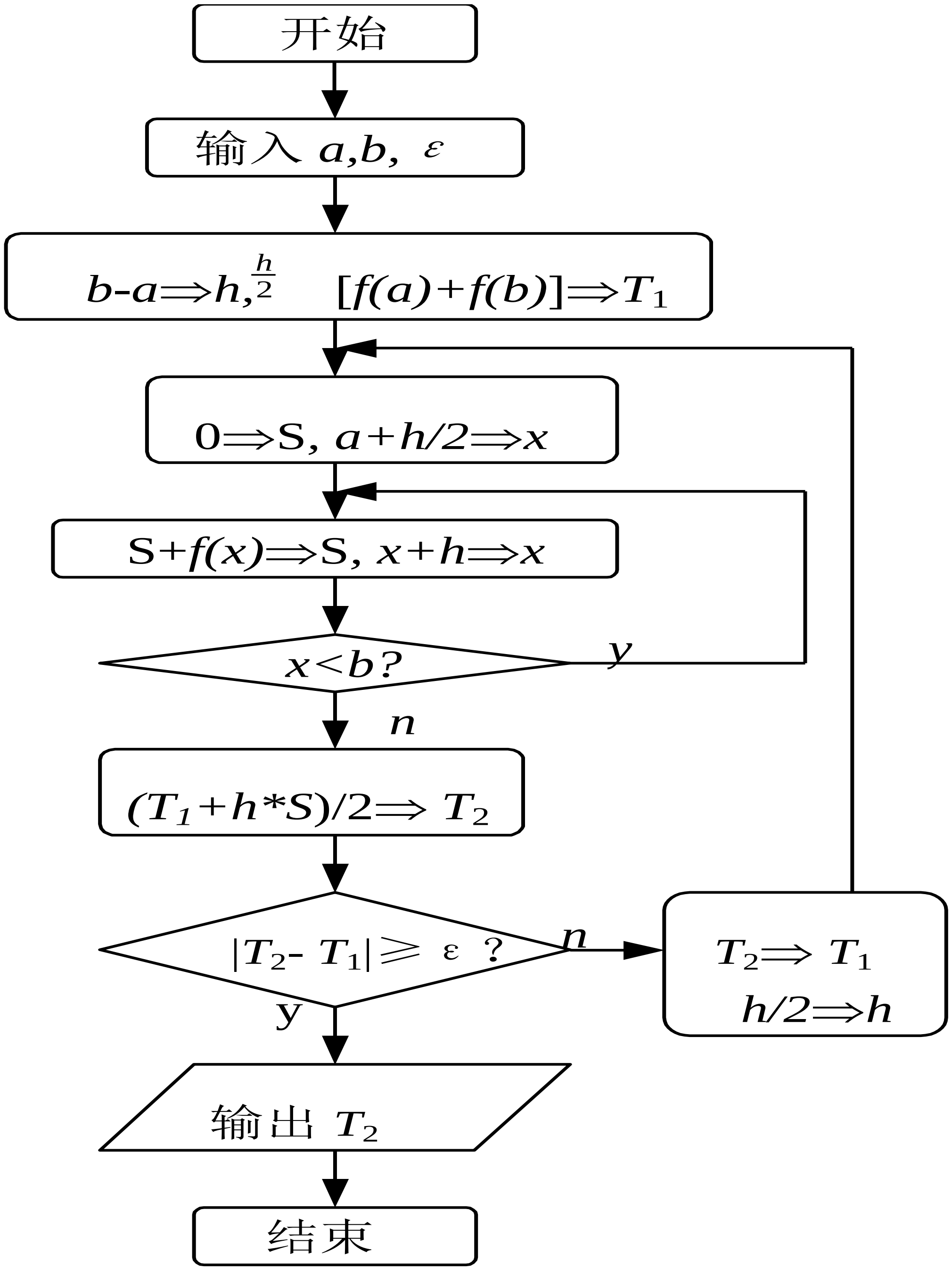
误差控制条件 $\left|\frac{1}{4-1}(T_{2n}-T_n)\right|<\varepsilon$

这里构成了一个自动选步长的梯形积分公式

即 当 $T_{2n}$-$T_n<\varepsilon$,有$I(f)-T_{2n}<\varepsilon$

上述条件满足，程序终止；否则，继续分半计算。

# 自动选步长梯形求积法的算法流程



## 7.3.3 步长的选取

类似于梯形公式, 可以得到自动选步长的Simpson公式

$$I - S_n = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta)$$

$$I - S_{2n} = -\frac{b-a}{2880} \left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta')$$

假定$f^{(4)}(x)$在$[a,b]$上变化不大时, 可得

$$\frac{I - S_n}{I - S_{2n}} \approx 4^2$$

因此, $I - S_{2n} \approx \frac{1}{4^2 - 1}(S_{2n} - S_n)$, 自动选步长的Simpson公式

同理, $I - C_{2n} \approx \frac{1}{4^3 - 1}(C_{2n} - C_n)$, 自动选步长的Cotes公式

## 7.3.3 步长的选取

例7.6　计算积分 $\int_0^1 e^x dx$

| h | 梯形公式 | Simpson公式 | Cotes公式 |
|---|---|---|---|
| 0.5 | 1.753925 | 1.71885 | |
| 0.25 | 1.7272219 | 1.7183188 | 1.7408548 |
| 0.125 | 1.7205186 | 1.7182841 | 1.7182818 |
| 0.0625 | 1.7188411 | 1.7182820 | 1.7182818 |
| 0.03125 | 1.7184216 | 1.7182818 | 1.7182818 |

若 $\varepsilon = 10^{-4}$, 则由于 $M_K = \max\limits_{0\le x\le 1}\left|f^{(k)}(x)\right| = e = 2.71828...$

由梯形公式的误差公式有

$$\left|E_T\right| = \frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta) \le \frac{1}{12}h^2 M_k \le 10^{-4}$$

因此, $h \le 2\times 10^{-2} = 0.02$　　同理, 对Simpson公式, 可得 $h \le 0.0313$

# 课堂作业

给定函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，已知 $f(x)$ 满足如下取值

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1.000 | 5 | 0.625 | 0.946 |
| 1 | 0.125 | 0.997 | 6 | 0.75 | 0.909 |
| 2 | 0.25 | 0.989 | 7 | 0.875 | 0.877 |
| 3 | 0.375 | 0.977 | 8 | 1 | 0.841 |
| 4 | 0.5 | 0.959 | | | |

请分别用n=8的复化梯形公式、n=4的复化辛普森公式以及用满足计算精度 $|T_{2n}-T_n|<\varepsilon=10^{-7}$ 的自动选步长梯形公式计算定积分

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

注：该积分准确值I=0.9460831