七章内容 九道大题(六道计算 三道编程) 有两章考两道大题(上机 + 计算)

可以参考课本后面的练习

每道题至少两问?

要写步骤

第1章 预备知识

只考有效数字判断

第2章 非线性方程的解法

非线性方程的解法

二分法

试值法(即使用(a,f(a))和(b,f(b))的割线L与x轴的交点（c,0)加速区间收敛)

不动点迭代 **线性收敛**

> **计算步骤**
>
> (1) **准备**
>
> 选取初值 x_0，确定 $f(x)=0$ 的等价方程 $x=\varphi(x)$；
>
> (2) **迭代**
>
> 依公式
>
> $$x_1 = \varphi(x_0)$$
>
> 迭代一次得新近似值 x_1；
>
> (3) **控制**
>
> 若 $|x_1 - x_0| < \epsilon$，则终止迭代，x_1 即为所求的根；否则转(4)；
>
> (4) **准备迭代**
>
> 若迭代次数超过预先指定的次数 N，则方法失败；
>
> 否则
>
> $$x_1 \to x_0,$$
>
> 转(2)继续迭代。

定理

设有方程 $x=\varphi(x)$，若

(1) 当 $x\in[a,b]$ 时，$\varphi(x)\in[a,b]$

(2) $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且有 $|\varphi'(x)|\le L<1,\ x\in[a,b]$

则

(1) $x=\varphi(x)$ 存在惟一解 $x^\star$

(2) 对任意初值 $x_0\in[a,b]$，迭代公式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\quad k=0,1,2,\cdots$$

产生的数列 $\{x_k\}$ 收敛于方程的惟一根 $x^\star$，即 $\lim_{k\to\infty}x_k=x^\star$

牛顿迭代

单根：Newton 法至少二阶 局部收敛

重根：线性收敛。且重数 m 越高，收敛越慢

满足关系式$f(x_0)f''(x_0)>0$的 x0 都可做初值

计算步骤

(1) 准备

选取初值 x_0，计算 $f(x_0)$，$f'(x_0)$

(2) 迭代

依公式

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

迭代一次得新近似值 x_1，并计算 $f(x_1)$，$f'(x_1)$

(3) 控制

若 $|f(x_1)|<\epsilon$，则终止迭代，x_1 即为所求的根；否则转(4)

(4) 准备迭代

若迭代次数超过预先指定的次数 N，或 $f'(x_1)=0$，则方法失败；

否则

$$x_1\to x_0,\quad f(x_1)\to f(x_0),\quad f'(x_1)\to f'(x_0),$$

收敛条件

定理

设 $x^\star$ 为 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内的根，若

- $\forall x\in[a,b]$，$f'(x)$，$f''(x)$ 连续且不变号
- 选取 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)f''(x_0)>0$

则牛顿迭代所产生的数列收敛到 $x^\star$。

割线法

单重零点：弦截法的收敛速度为$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$

计算步骤

(1) 准备　选取初值 x_0,x_1，计算 $f(x_0)$, $f(x_1)$

(2) 迭代　依公式

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}(x_1-x_0)$$

迭代一次得新近似值 x_2，并计算 $f(x_2)$

(3) 控制　若 $|f(x_2)|<\epsilon_1$ 或 $|x_2-x_1|<\epsilon_2$，则终止迭代，x_2 即为所求的根；否则转(4)

(4) 准备迭代　若迭代次数超过预先指定的次数 N，则方法失败；否则

$$(x_1,f(x_1))\to(x_0,f(x_0)),\quad (x_2,f(x_2))\to(x_1,f(x_1)).$$

转(2)继续迭代

埃特金加速 没看

给非线性方程 要求构造迭代过程 求出0解 （ f(x)=0

大题

1)不动点迭代判断是否收敛?

2)设计牛顿迭代 并分别说出几种迭代法的收敛阶是几阶

3)割线法 迭代过程和收敛阶

收敛阶

线性收敛： p=1 且 0<C <1
平方收敛： p=2
超线性收敛： p>1

定理

(1) 若在根 $x^\star$ 的某个邻域内有 $\varphi'(x)\neq 0$，则不动点迭代线性收敛

(2) 若在根 $x^\star$ 的某个邻域内连续，且有

$$\varphi'(x^\star)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^\star)=0$$

而 $\varphi^{(p)}(x^\star)\neq 0$，则不动点迭代 p 阶收敛

(3) 牛顿迭代平方收敛

第3章 线性方程组的解法

给线性方程组类似课堂作业（考虑出上机?

1. 经典的方程求解：

   LU分解

   追赶法求线性方程组

2. 对线性方程组设计迭代过程 **判断收敛条件**

将系数矩阵分裂为：$A=D-L-U$

其中 $D=diag(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$

$$-L=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad -U=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \cdots & \vdots \\ & & & \ddots\ 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

雅阁比

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}_J\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_J &= -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}), \\ \boldsymbol{g} &= -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

高斯赛德尔

$$\forall \boldsymbol{x}^{(0)}, \quad \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}_{GS}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{GS} &= -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}, \\ \boldsymbol{g} &= (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

超松弛算法

即迭代矩阵特征值最大值小于1

定理

迭代法 (3) 收敛的充分必要条件是 $\rho(M) < 1$.

迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半径，而与初始向量的选取和常数项无关。

第4章 插值法

可能出两道大题 上机 + 计算

类似课堂作业 给一组数据分析特征，各种插值做一遍?

1)拉格朗日插值

$f(x)$ 的二次 Lagrange 插值多项式

$$L_2(x) = y_0\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$f(x)$ 的 n 次 Lagrange 插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

其中

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

2)牛顿插值

$$\begin{aligned} N_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \\ R_n^*(x) &= f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n). \end{aligned}$$

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

3)埃尔米特插值

分段插值和三次样条插值不会考 不会考后面很难的

第5章 曲线拟合

考虑出上机

slide 06

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}, \quad \rightarrow \quad \text{法方程组}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

第6章 数值微分+第9章 微分方程求解

可能出两道大题 上机 + 计算

重点

给微分方程，设计求根公式?

求解方程组 拉分?

精度的概念

直接回答：xxx求解微分方法精度是多少?

隐式欧拉公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

预估校正欧拉

$$\begin{cases} \text{预估} \quad \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ \text{校正} \quad y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

经典的四阶龙格－库塔公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

> 若某算法的局部截断误差为O(h^(p+1)，则称该算法有p 阶精度 (整体截断误差)
>
> 隐式欧拉格式具有 1 阶精度
>
> 欧拉法具有1阶精度
>
> 改进欧拉法(梯形格式)具有2阶精度
>
> 两步欧拉格式具有 2 阶精度
>
> 4 阶龙格库塔法 有4阶精度

7 数值积分

可能出两道大题 上机 + 计算

重点

代数精度

> 梯形公式： 1
>
> Simpson求积公式：3
>
> Simpson’s 3/8求积公式：3
>
> 含 n + 1 个节点 xi (i = 0,1,⋯ ,n) 的插值型求积公式的代数精度至少为 n
>
> romberg：7次
>
> 牛顿-科特斯公式的代数精度至少为 n。
>
> 特别地，当 n 为偶数时，牛顿-科特斯公式的代数精度可以达到 n + 1

1)梯形公式

- $n=1$ （梯形 (Trapezoidal) 公式）

$$C_0^{(1)}=C_1^{(1)}=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

2)辛普森公式 辛普森3/8公式

- $n=2$ （辛普森 (Simpson) 公式）

$$C_0^{(2)}=C_2^{(2)}=\frac{1}{4}\int_0^2 t(t-1)\,dt=\frac{1}{6},\quad C_1^{(2)}=\frac{1}{4}\int_0^2 t(t-2)\,dt=\frac{4}{6}$$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

- $n=3$ （辛普森 (Simpson)3/8 公式）

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]$$

3)科特斯

$n=4$ （柯特斯 (Cotes) 公式）

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

4)**复化梯形求积公式**

5)**复化辛普森求积公式**

6)高斯型求积公式

因为总可以利用变换

$$x = \frac{b+c}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

将区间（a, b）变成（-1, 1）而积分变为:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)dt$$

$n=2$: $P_n(x) = 12x^2-4$, $x_0 = -1/\sqrt{3}, x_1 = 1/\sqrt{3}$, $\omega_0=\omega_1=1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = f\left(-1/\sqrt{3}\right) + f\left(1/\sqrt{3}\right)$$ 两点Gauss公式

$n=3$: $P_n(x) = 120x^3 - 72x$, $x_0 = -\sqrt{3/5}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3/5}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{15}/5\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{15}/5\right)$$ 三点Gauss公式

7)**龙贝格求积公式** 可能会考++

8 数值优化

只考

1)黄金分割搜索法

2)斐波那契搜索法