

1.2 频率与概率

一、什么是频率？

二、概率的统计定义

三、概率的公理化定义

四、概率的基本性质

随机事件的发生是带有偶然性的，但随机事件发生的可能性还是有大小之别的，是可以设法度量的。而在生活、生产和经济活动中人们关心的恰是一个随机事件发生的可能性的的大小。

例如：市场占有率、中签率、废品率、命中率、出生率。。。。。

都是用来度量随机事件发生的可能性大小

尽管用的术语不同，但其共同点是用0到1之间的一个数(也称为比率)来表示一个随机事件发生的可能性大小，在概率论中，这种比率就是概率的原形。

研究随机现象，不仅关心试验中会出现哪些事件，更重要的是想知道事件出现的可能性大小，也就是事件的概率。

概率是随机事件发生可能性大小的度量
事件发生的可能性越大，概率就越大

了解事件发生的可能性即概率的大小，对人们的生活有什么意义呢？

例如：

- 了解发生意外人身事故的可能性大小，确定保险金额.
- 了解来商场购物的顾客人数的各种可能性大小，合理配置服务人员.
- 了解每年最大洪水超警戒线可能性大小，合理确定堤坝高度.

一、什么是频率？

定义：在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数.

比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，并记成 $f_n(A)$.

频率的基本性质：

(1) $0 \leq f_n(A) \leq 1$;

(2) $f_n(S) = 1$;

(3) 若 A_1, A_2, \dots, A_k 是两两互不相容的事件，则
$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k).$$

例1 将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率.

试验 序号	$n = 5$		$n = 50$		$n = 500$	
	n_H	f	n_H	f	n_H	f
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	21	0.42	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	254	0.508
5	1	0.2	25	0.50	251	0.502
6	2	0.4	18	0.36	252	0.504
7	4	0.8	27	0.54	258	0.516



在 $\frac{1}{2}$ 处波动较大

随 n 的增大, 频率 f 呈现出稳定性

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较小



波动最小

从上述数据可得

- (1) 频率有随机波动性,即对于同样的 n , 所得的 f 不一定相同;
- (2) 抛硬币次数 n 较小时, 频率 f 的随机波动幅度较大, 但随 n 的增大, 频率 f 呈现出稳定性. 即当 n 逐渐增大时频率 f 总是在 **0.5** 附近摆动, 且逐渐稳定于 **0.5**.

实验者	n	n_H	f
德.摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K.皮尔逊	12000	6019	0.5016
K.皮尔逊	24000	12012	0.5005

$$f(H) \xrightarrow{n \text{ 的增大}} \frac{1}{2}.$$



重要结论

频率当 n 较小时波动幅度比较大,当 n 逐渐增大时,频率趋于稳定值,这个稳定值从本质上反映了事件在试验中出现可能性的大小.它就是事件的概率.

二、概率的统计定义

定义 在随机试验中, 若事件***A***出现的频率***m/n***随着试验次数***n***的增加, 趋于某一常数***p***, $0 \leq p \leq 1$ 则定义事件***A***的概率为***p***, 记作 **$P(A)=p$** .

概率统计定义的性质

- (1) 对任一事件***A*** ,有 $0 \leq p(A) \leq 1$;
- (2) $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$;

(3) 对于两两互斥的有限多个事件 A_1, A_2, \dots, A_m ,
$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m)$$

概率的统计定义直观地描述了事件发生的可能性大小，反映了概率的本质内容，但也有不足，即无法根据此定义计算某事件的概率。

三、概率的公理化体系

定义1.2 设 Ω 为一个随机试验 E 的样本空间, 对于 Ω 中任一事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的概率, 如果 $P(\bullet)$ 满足下列条件:

- ①非负性: 对于每一个事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
- ②规范性: 对于必然事件 Ω , 有 $P(\Omega) = 1$;
- ③可列可加性: 设 A_1, A_2, \dots 是可列个两两互不相容事件, 即对于 $i \neq j$, $A_i A_j = \phi$, $i, j = 1, 2, \dots$, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \quad (1.1)$$

这就是著名的“概率公理化定义”

四、概率的基本性质

性质1 $P(\emptyset)=0$.

性质**2**(有限可加性) 若 A_1, A_2, \dots, A_n 是两两互不相容的事件, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (1.2)$$

性质**3**(对立事件的概率) 对任一事件**A**, 有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

性质4 设 A, B 是两个事件, 若 $A \subset B$, 则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$

$$P(B) \geq P(A) \quad (1.4)$$

性质5 对于任一事件 $A, P(A) \leq 1$

性质**6**(加法公式) 对任意两事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.5)$$

推广到多个事件, 设 A, B, C 为任意三个事件, 则有

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) \\ & - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \end{aligned} \quad (1.6)$$

为何需要概率的公理化体系？

由于等可能性的定义可能导致互相矛盾，

如：贝朗特奇论

因此需要严密定义，在勒贝格测度论和积分理论基础上，前苏联数学家柯尔莫哥洛夫于1933年提出概率的公理化体系。

例2 某城市共发行A, B, C三种报纸，调查表明居民家庭中订购C报纸的占30%，同时订购A, B及B, C两报的各占8%，5%，三报都订的占3%. 今在该城中任找一户，问该户只订A, B两报和只订C报的概率各位多少？