回 顾

第四章 插值法

4.1 引言

4.2 多项式插值

4.3 拉格朗日插值

4.4 均差与牛顿插值

4.5 埃尔米特插值

4.6 分段插值

4.7 三次样条插值

在生产和科研中出现的函数是多种多样的。常遇到这样的情况：

- 函数表达式过于复杂不便于计算,而又需要计算许多点处的函数值
- 仅有几个采样点处的函数值（即函数表）,而又需要知道非采样点处的函数值

4.4 均差与牛顿插值

拉格朗日插值多项式,公式结构紧凑，在理论分析中非常方便。但当插值点增加时，全部插值基函数 $l_k, k=1,2,\cdots,n$ 均要随之变化，整个公式也要发生变化，这在实际计算中是很不方便的，还造成计算量的浪费。为解决这一缺陷，我们可尝试构造一种具有承袭性的插值多项式，也就是说，每增加一个节点时，只需增加相应的一项即可。

这就是牛顿插值多项式。

非常重要

4.4 均差与牛顿插值

牛顿插值的格式

- 将*Lagrange*插值公式改写成

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n\prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)$$

- 为保证它是满足插值条件$P_n(x_i)=y_i$，需且只需满足

$$\begin{cases} y_0=P_n(x_0)=a_0 \\ y_1=P_n(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0) \\ y_2=P_n(x_2)=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) \\ \cdots \\ y_n=P_n(x_n)=a_0+a_1(x_n-x_0)+a_2(x_n-x_0)(x_n-x_1)+\ldots \\ +a_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}) \end{cases}$$

问题 **怎样确定参数** $a_0,\ldots,a_n$ ？

非常重要

可见，牛顿插值多项式是插值多项式p(x)的另一种表示形式，与拉格朗日多项式相比。当增加一个节点时，牛顿插值公式只需在原来的基础上增加一项，前面的计算结果仍然可以使用。与拉格朗日插值相比，牛顿插值具有**灵活增加节点**的优点，且克服了“增加一个节点时整个计算工作重新开始”的缺点。

为了确定牛顿插值多项式$P_n(x)$中的系数

$$a_0, a_1, \ldots, a_n$$

的计算公式，先介绍均差的概念。

非常重要

4.4.1 均差及其性质

定义4.3 $f(x)$在点x_i处零阶均差定义为函数值本身：$f[x_i]=f(x_i)$。

函数$y=f(x)$在区间$[x_i,x_{i+1}]$上的平均变化率 $\dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$

称为$f(x)$关于x_i,x_{i+1}的一阶均差，并记为$f[x_i,x_{i+1}]$。

一阶均差的平均变化率 $\dfrac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}$

称为$f(x)$的二阶均差，并记为$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$。

一般地，在定义了$f(x)$的m-1阶均差后，可定义$f(x)$的m阶均差为

$$f[x_0,x_1,\cdots x_m]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots x_m]-f[x_0,x_1,\cdots x_{m-1}]}{x_m-x_0}$$

即高阶均差可由低一阶的两个均差组合而得到。

给定函数表4.1，相应的一、二、三阶均差如表4.2。

表4.1				
x	x_0	x_1	x_2	x_3
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$

非常重要

表4.2					
i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	x_0	$f(x_0)$			
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
3	x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

例4.4 求 $f(x_i)=x^3$在节点x=0, 2, 3, 5, 6上的各阶均差值。

解 由于n=4，可得到4阶均差，如下表：

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+32}, x_{i+4}]$
0	0	0				
1	2	8	(8−0)/(2−0) =4			
2	3	27	(27−8)/(3−2) =19	(19−4)/(3−0) =5		
3	5	125	(125−27)/(5−3) =49	(49−19)/(5−2) =10	(10−5)/(5−0) =1	
4	6	216	(216−125)/(6−5) =91	(91−49)/(6−3) =14	(14−10)/(6−2) =1	(1−1)/(6−0)=0

4.4.1 均差及其性质

性质1 函数 $f(x)$ 的 **n阶均差** $f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ 可由函数值 $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\cdots$, $f(x_n)$ 的**线性组合表示**，且

$$f[x_0, x_1, \cdots x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

其中， $\omega'(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i)$

重要

这个性质可用数学归纳法证明。

性质2 均差具有对称性，与节点的顺序无关。

例如

$$f[x_0, x_1]= f[x_1, x_0]$$

$$f[x_0, x_1, x_2]=f[x_1, x_2, x_0]=f[x_0, x_2, x_1]=\cdots\cdots$$

性质3 若$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_k]$是$x$的$k$次多项式，则k+1阶均差$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}]$是$x$的$k-1$次多项式。

证 由均差定义

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}]=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}]-f[x,x_0,x_1,\cdots,x_k]}{x_{k+1}-x}$$

右端分子为k次多项式，且当$x=x_{k+1}$时分子为0，故分子含有因子$x_{k+1}-x$，与分母相消后，右端为$k-1$次多项式。

性质4 若f(x)是n次多项式，则f[x, x0, x1, …, xn]恒为0。

证 f(x)是n次多项式，则f[x, x0]是n−1次多项式，

f[x, x0, x1]是 n−2 次多项式，依次递推，

f[x, x0, x1, …, xn−1]是零次多项式，所以

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] \equiv 0$$

性质5 k阶均差f[x, x_0, x_1, …, x_k]和k阶导数之间有下列关系：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \qquad \xi \in (\min_{0 \le i \le n} x_i, \max_{0 \le i \le n} x_i)$$

这个性质可直接用罗尔(Rolle)定理证明。

4.4.2 牛顿插值公式

非常重要

牛顿插值多项式

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

的系数a_0, a_1, ⋯, a_n可根据插值条件推出，即由

$$N_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0,1,\cdots,n$$

有

$$N_n(x_0) = a_0 = f(x_0) \qquad N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

$$N_n(x_2) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

$$N_n(x_n) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) = f(x_n)$$

这是关于a0, a1, ⋯, an的下三角方程组，可求得

$$a_0 = f(x_0)$$

非常重要

$$a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)} = f[x_0, x_1, x_2]$$

一般，用数学归纳法可证明

$$a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \quad (k = 0,1, \cdots, n)$$

所以n次牛顿(Newton)插值公式为

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1 \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

其余项

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1 \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

例4.5

例3：已知$f(x)$在六个点的函数值如下表，运用牛顿型插值多项式求$f(0.596)$的近似值。

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商	五阶差商	$x-x_k$
0.40	0.41075						0.196
0.55	0.57815	1.1160					0.046
0.65	0.69675	1.1860	0.2800				-0.054
0.80	0.88811	1.2757	0.3588	0.1970			-0.204
0.90	1.02652	1.3841	0.4336	0.2137	0.0344		-0.454
1.05	1.25386	1.5156	0.5260	0.2310	0.0346	0.0003	

4.4.3 牛顿插值误差分析

由插值多项式的唯一性可知：满足同一组插值条件的拉格朗日插值多项式P(x)与牛顿插值多项式而$N_n(x)$实际上是同一个多项式，仅是同一插值多项式的不同表达形式而已。因此，他们误差也完全相等。故有：

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1 \cdots, x_n] \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$f[x, x_0, x_1 \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

重要

可以看出，牛顿插值公式计算方便，增加一个插值点，只要多计算一项，而$N_n(x)$的各项系数恰好是各阶均差值，很有规律。

非常重要

拉格朗日插值与牛顿插值的比较

1) $P_n(x)$和$N_n(x)$均是n次多项式，且均满足插值条件：

$$P_n(x_k)=N_n(x_k)=f(x_k),\ \ k=0,1,\cdots,n$$

由多项式的唯一性：$P_n(x)\equiv N_n(x)$，因而，两个公式的余项是相等的，即

$$f[x,x_0,x_1\cdots,x_n]\omega_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

2) 当插值多项式从n-1次增加到n次时，拉格朗日型插值必须重新计算所有的基本插值多项式；而对于牛顿型插值，只需用表格再计算一个n阶差商，然后加上一项即可。

4.4.4 牛顿插值的算法实现

1. 计算公式

(1) 用一维数组$x_1(i)$, $y_1(i)$存放插值点和对应的函数值x_i, y_i

(2) 计算各阶均差$f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$，即

$F[i,0]=y_1(i) \quad i=0,1,\ldots,n$

$F[i,j]=[f[i,j-1]-f[i,j]]/[x_1(i)-x_1(i-j)]$
$j=1,2,\ldots,n;\ i=j,j+1,\ldots,n$

(3) 按式(5.13)计算出所求插值点x_k处的函数值

$P=F(n,n)$

$P=P*[x-x_1(k)]+F(k,k),\ k=n-1,n-2,\ldots,0$

4.4.4 牛顿插值法的算法实现

构造和计算过$(x_k,y_k)=(x_k,f(x_k)),k=0,1,\cdots,N$的次数小于等于$N$的牛顿多项式：

$$P(x)=d_{0,0}+d_{1,1}(x-x_0)+d_{2,2}(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+d_{N,N}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{N-1})$$

其中

$$d_{k,0}=y_k,\qquad d_{k,j}=\frac{d_{k,j-1}-d_{k-1,j-1}}{x_k-x_{k-j}}$$

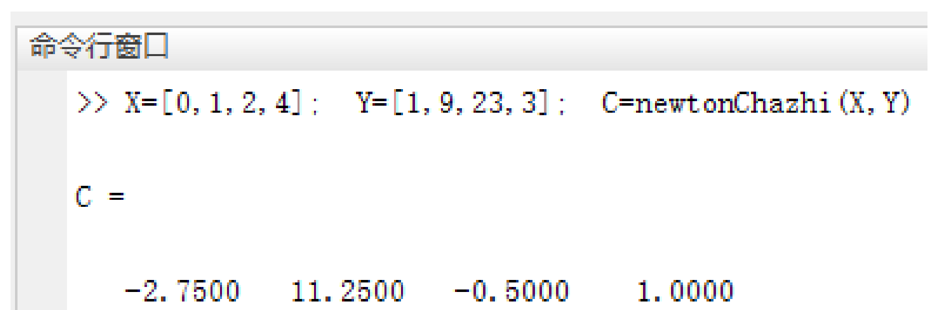
程序实现： newtonChazhi.m

```
function C=newtonChazhi(X,Y)

%Input     - X is a vector that contains a list of abscissas
%          - Y is a vector that contains a list of ordinates
%Output  - C is a vector that contains the coefficients
%            of the Newton intepolatory polynomial
%          - D is the divided difference table
% X=[0,1,2,4];  Y=[1,9,23,3];  C=newtonChazhi(X,Y)

n=length(X);
D=zeros(n,n);
D(:,1)=Y';

%form the divided difference table
for j=2:n
  for k=j:n
    D(k,j)=(D(k,j-1)-D(k-1,j-1))/(X(k)-X(k-j+1));
  end
end
%Determine the coefficients of the Newton
interpolatory polynomial
C=D(n,n);
for k=(n-1):-1:1
  C=conv(C,poly(X(k)));
  m=length(C);
  C(m)=C(m)+D(k,k);
end
```



命令行窗口

```
>> X=[0,1,2,4];  Y=[1,9,23,3];  C=newtonChazhi(X,Y)

C =

   -2.7500   11.2500   -0.5000    1.0000
```

作业4.2

7. $f(x) = 3\sin^2(\pi x/6)$

$x = 1.5, 3.5$

k	x_k	$f(x_k)$
0	0.0	0.00
1	1.0	0.75
2	2.0	2.25
3	3.0	3.00
4	4.0	2.25

8. $f(x) = e^{-x}$

$x = 0.5, 1.5$

k	x_k	$f(x_k)$
0	0.0	1.00000
1	1.0	0.36788
2	2.0	0.13534
3	3.0	0.04979
4	4.0	0.01832

4.5 埃尔米特（Hermite）插值

- 拉格朗日和牛顿插值多项式的插值条件只要求在插值节点上，插值函数与被插值函数的函数值相等，即$L_n(x_i)=f(x_i)$和$N_n(x_i)=f(x_i)$。

- 有时，为保证插值函数能更好地和原来的函数相重合，不但要求“过点”，即两者在节点上有相同的函数值，且要求“相切”，即在节点上还有相同的导数值,或者更高阶导数也相等。

这类插值称为埃尔米特插值。

我们这里仅介绍满足条件$H(x_i)=H(x_i)$和$H'(x_i)=f'(x_i)$的插值多项式。

4.5 埃尔米特插值

非常重要

定义4.4. 已知n+1个互异点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$上的函数值$f(x_i)$和导数值$f'(x_i)$，若存在一个次数不超过2n+1的多项式H(x)，满足

$$H(x_i)=H(x_i),\ H'(x_i)=f'(x_i),\ i=0,1,2,\cdots,n, \quad (4.5.1)$$

则称H(x)为f(x)的2n+1次埃尔米特插值多项式。

式中给出了2n+2个条件，可唯一确定一个次数不超过2n+1的多项式$H_{2n+1}(x)$，采用类似于拉格朗日插值多项式基函数的方法，求出埃尔米特多项式$H_{2n+1}(x)$。

4.5 埃尔米特插值

定理4.3 满足插值条件（4.5.1）的埃尔米特多项式是唯一的。

证 设$H_{2n+1}(x)$ 和 $\overline{H}_{2n+1}(x)$ 都满足上述插值条件，令

$$\phi(x) = H_{2n+1}(x) - \overline{H}_{2n+1}(x)$$

则每个节点x_k (k=0, 1, …n) 均为φ(x) 的二重根，即有2n+2个根，但φ(x) 是不高于2n+1次的多项式，所以φ(x) ≡0，即

$$H_{2n+1}(x) = \overline{H}_{2n+1}(x)$$

唯一性得证。

例4.7 已知函数f(x)在两个节点上的函数值及导数值如表：

x_i	1	2
$f(x_i)$	2	3
$f'(x_i)$	0	-1

非常重要

求f(x)的三次埃尔米特插值多项式。

解 令所求的埃尔米特插值多项式为

$$H_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

由插值条件有

$$\begin{cases} H_3(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 2 \\ H_3(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 3 \\ H_3'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ H_3'(2) = 12a_3 + 4a_2 + a_1 = -1 \end{cases}$$

解之得

$$a_3 = -3, a_2 = 13, a_1 = -17, a_0 = 9$$

所以有

$$H_3(x) = -3x^3 + 13x^2 - 17x + 9$$

4.5 埃尔米特插值误差分析

定理4.4 若f(x)在[a, b]上存在2n+2阶导数，则2n+1次埃尔米特插值多项式的余项为

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega^2(x)$$

其中，

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \qquad \xi \in (a,b)$$

定理的证明，可仿照拉格朗日插值余项的证明方法。

课堂作业

已知$y=f(x)$的函数表

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	9	23	3

构造牛顿插值多项式。

注：用QQ软件自带的作业功能上交课程作业

作业上交需要求在周三下午上课前完成