§ 4 矩,协方差矩阵

定义 设X和Y是随机变量, 若$E(X^k)$, $k=1,2,\ldots$存在, 称它为X的<u>k阶原点矩</u>, 简称k阶矩.

若$E\{[X-E(X)]^k\}$, $k=1,2,\ldots$存在, 称它为X的<u>k阶中心矩</u>.

若$E(X^kY^l)$, $k,l=1,2,\ldots$存在, 称它为X和Y的<u>$k+l$阶混合矩</u>.

若 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$, $k,l=1,2,\ldots$存在, 称它为X和Y的<u>$k+l$阶混合中心矩</u>.

因此, $E(X)$是X的一阶原点矩, $D(X)$是X的二阶中心矩, $\mathrm{Cov}(X,Y)$是X和Y的二阶混合中心矩.

二维随机变量(X_1,X_2)有四个二阶中心矩(设它们都存在), 分别记为

$$c_{11}=E\{[X_1-E(X_1)]^2\},$$
$$c_{12}=E\{[X_1-E(X_1)][X_2-E(X_2)]\},$$
$$c_{21}=E\{[X_2-E(X_2)][X_1-E(X_1)]\},$$
$$c_{22}=E\{[X_2-E(X_2)]^2\}.$$

将它们排成矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

- 这个矩阵称为随机变量(X_1,X_2)的协方差矩阵.

设n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的二阶混合中心矩

$$c_{ij}=\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E\{[X_i-E(X_i)][X_j-E(X_j)]\},$$

$$i,j=1,2,\ldots,n$$

都存在, 则称矩阵

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

- 为n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的协方差矩阵, 易知此矩阵是一个对称矩阵.

二维正态随机变量(X_1,X_2)的概率密度为

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

- 现要将上式用矩阵形式表示, 引入下面列矩阵:

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix}$$

(X_1,X_2)的协方差矩阵为

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

- 它的行列式**det $C=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$, C**的逆阵为

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

可以证明

$$(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)$$

$$=\frac{1}{\det C}(x_1-\mu_1 \quad x_2-\mu_2)\begin{bmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right].$$

- 于是**(X_1,X_2)**的概率密度可写成

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^{2/2}(\det C)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'C^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

引入列矩阵

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{和} \quad \boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{bmatrix}$$

- ***n*维正态随机变量(*X*$_1$,*X*$_2$,…,*X*$_n$)的概率密度为**

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'C^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

n维正态随机变量有四条重要性质:

(1)n维正态变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的每一个分量X_i, $i=1,2,\ldots,n$都是正态变量; 反之, 若$X_1,X_2,\ldots,X_n$都是正态变量, 且相互独立, 则$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是n维正态变量.

(2)n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$服从n维正态分布的充要条件是$X_1,X_2,\ldots,X_n$的任意线性组合:

$$l_1X_1+l_2X_2+\ldots+l_nX_n$$

服从一维正态分布(其中$l_1,l_2,\ldots,l_n$)不全为零.

(3) 若$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$服从n维正态分布, 设$Y_1,Y_2,\ldots,Y_k$是$X_1,X_2,\ldots,X_n$的线性函数, 则$Y_1,Y_2,\ldots,Y_k$也服从多维正态分布.

这一性质称为正态变量的线性变换不变性.

(4) 设$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$服从n维正态分布, 则"$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立"与"$X_1,X_2,\ldots,X_n$两两不相关"是等价的.

n维正态分布在随机过程和数理统计中常会遇到.