离散数学

Discrete Mathematics

for Computer Science

计算机学院计科系

薛思清 xuesiqing@cug.edu.cn

第6讲 关系 Relation（1）

Good order is the foundation of all things.

—Edmund Burke (1729–1797)

An Example： Relational Database

关系

关系数据库：

关系数据结构

关系模型

关系代数

关系演算

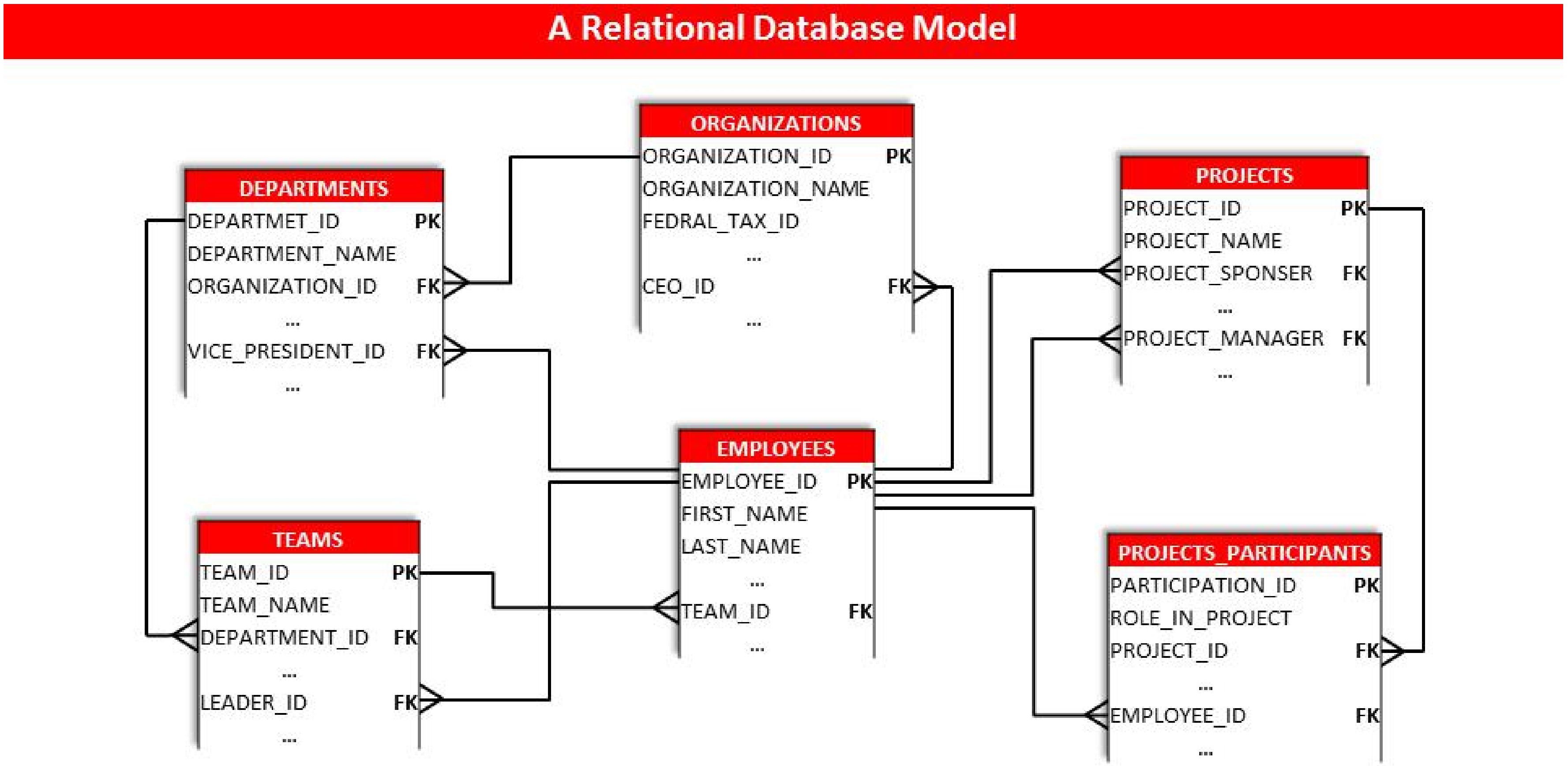
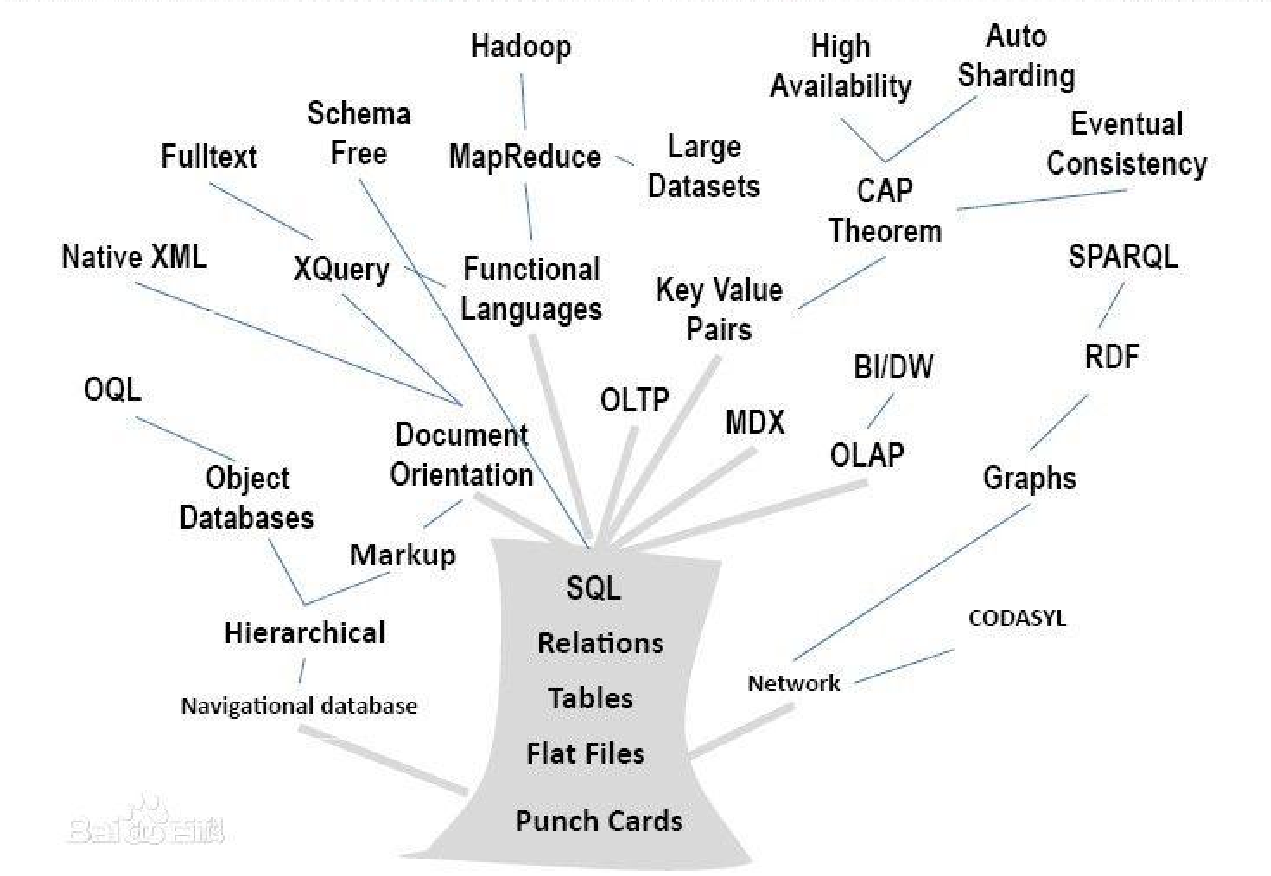

A Relational Database Model
ORGANIZATIONS
ORGANIZATION_ID PK
ORGANIZATION_NAME
FEDRAL_TAX_ID
...
CEO_ID FK
...
DEPARTMENTS
DEPARTMET_ID PK
DEPARTMENT_NAME
ORGANIZATION_ID FK
...
VICE_PRESIDENT_ID FK
...
PROJECTS
PROJECT_ID PK
PROJECT_NAME
PROJECT_SPONSER FK
...
PROJECT_MANAGER FK
...
EMPLOYEES
EMPLOYEE_ID PK
FIRST_NAME
LAST_NAME
...
TEAM_ID FK
...
TEAMS
TEAM_ID PK
TEAM_NAME
DEPARTMENT_ID FK
...
LEADER_ID FK
...
PROJECTS_PARTICIPANTS
PARTICIPATION_ID PK
ROLE_IN_PROJECT
PROJECT_ID FK
...
EMPLOYEE_ID FK
...

Figure 1: *A NoSQL Concept Tree*



Outline

- 关系及其表示
- 关系运算
- 关系性质
- 等价关系
- 序关系
- 函数关系

- 序偶(序对, Ordered Pair): (a,b)或者<a,b>
  - 序偶<a，b>中两个元素不一定来自同一个集合，它们可以代表不同类型的事物。例如，a代表操作码，b代表地址码，则序偶<a，b>就代表一条单地址指令；哈密尔顿引进有序偶(a，b)来表示复数a+bi
  - $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$
  - $a \neq b \Rightarrow (a,b) \neq (b,a)$
- 有序n元组: $(a1,a2,\ldots,an)=((a1,a2,\ldots,an-1),an)$
- 有序n元组相等: $(a1,a2,\ldots,an)=(b1,b2,\ldots,bn)$

笛卡尔积(Cartesian product，卡氏积):

$$A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}.$$

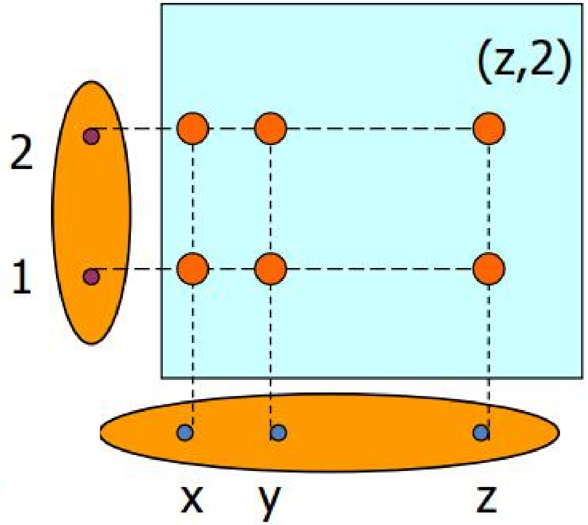
René Descartes
(1596-1650)

示例

$A = \{1,2\}$, $B = \{x,y,z\}$

$A \times B = \{(1,x), (1,y), (1,z), (2,x), (2,y), (2,z)\}$

$B \times A = \{(x,1), (x,2), (y,1), (y,2), (z,1), (z,2)\}$



示例

$A=\{\varnothing,a\}$，$B=\{1,2,3\}$.

$A\times B=\{<\varnothing,1>,<\varnothing,2>,<\varnothing,3>,<a,1>,<a,2>,<a,3>\}$.

$B\times A=\{<1,\varnothing>,<1,a>,<2,\varnothing>,<2,a>,<3,\varnothing>,<3,a>\}$.

$A\times A=\{<\varnothing,\varnothing>, <\varnothing,a>, <a,\varnothing>, <a,a>\}$.

$B\times B=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,1>,<3,2>,<3,3>\}$.

n维笛卡尔积

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

$= \{<x_1, x_2, \ldots, x_n> \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \}$

$A^n = A \times A \times \ldots \times A$

令$|A_i| = n_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

显然$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_n$.

笛卡尔积一些性质

$A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing$

非交换

$A\times B \neq B\times A$ (除非 $A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$)

非结合

$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$ (除非 $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$)

分配律

$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

示例 试证明分配律

$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

证明: $\forall <x,y>, <x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow(<x,y>\in A\times B)\vee(<x,y>\in A\times C)$

$\Leftrightarrow x\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以, $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

1. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$
2. $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$
3. $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$
4. $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$

示例 设A,B,C,D是任意集合,

(1) 若$A\neq\varnothing$, 则 $A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

(2) $A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$,

且当$(A=B=\varnothing)\vee(A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing)$时,

$A\times B\subseteq C\times D \Rightarrow A\subseteq C\wedge B\subseteq D$.

证明 (1) 若$A\neq\varnothing$, 则$A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

($\Rightarrow$) 若 $B=\varnothing$, 则 $B\subseteq C$.

设 $B\neq\varnothing$, 由$A\neq\varnothing$, 设$x\in A$.

$\forall y$, $y\in B \Rightarrow \langle x,y\rangle \in A\times B$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in A\times C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C \Rightarrow y\in C$.

所以，$B\subseteq C$

$(\Leftarrow)$若$B=\varnothing$,则$A\times B\subseteq A\times C$.

设 $B\neq\varnothing$.

$\forall <x,y>, <x,y>\in A\times B \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

$\Rightarrow x\in A\wedge y\in C \Leftrightarrow <x,y>\in A\times C$

所以，$A\times B\subseteq A\times C$.

2 二元关系（Binary Relations）

设$n \in I+$，$A1,A2,\ldots,An$为任意n个集合，$\rho \subseteq A1 \times A2 \times \ldots \times An$，则

(1)称ρ为A1,A2,…,An间的n元关系；

(2)若n=2，则称ρ为从A1到A2的二元关系；

(3)若$\rho=\Phi$，则称ρ为空关系；

(4)若$\rho = A1 \times A2 \times \ldots \times An$，则称ρ为普遍关系；

(5)若A1=A2=…=An=A，则称ρ为A上的n元关系；

(6)若$\rho=\{(x,x)|x \in A\}$，则称ρ为A上的恒等关系。

若ρ是由A到B的一个关系，且$(a,b) \in \rho$，则a对b有关系ρ，记为 aρb。中缀(infix)、前缀(prefix)、后缀(suffix)记号

A relation is a particular type of set.
A function is a particular type of relation.
A predicate is a particular type of function.

对集合A上的关系R, 可以定义:

定义域(domain) : $\text{dom } R = \{ x \mid \exists y(y \in A \wedge xRy) \}$

值域(range): $\text{ran } R = \{ y \mid \exists x(x \in A \wedge xRy) \}$

域(field): $\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$

示例

1. {<1,2>,<α,β>,<a,b>}是二元关系，{<1,2>,<3,4>,<白菜,小猫>}是二元关系，A={<a,b>,<1,2,3>,a,α,1}不是关系
2. 设A={1,2,4,7,8}，B={2,3,5,7}，定义由A到B的关系ρ={(a,b)| 5|(a+b)}，|表示整除，求关系ρ。
3. 设A={2,3,4,5,9,25}，定义A上的关系ρ，对于任意的a,b∈A，当且仅当$(a-b)^2 \in A$时，有aρb，试问ρ由哪些序偶组成?
4. 设A={0,1,2}，求A上的普遍关系U_A和A上的恒等关系I_A。
5. A到B不同的二元关系共有多少个？A上不同的二元关系共有多少个?

示例

6. 设$A\subseteq R$, 则可以定义A上的:

小于等于(less than or equal to)关系:

$$LE_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in A \wedge x\le y \}$$

小于(less than)关系,$L_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in A \wedge x<y \}$

大于等于(greater than or equal to)关系

大于(great than)关系

7. 设A为任意集合, 则可以定义P(A)上的:

包含关系: $\subseteq_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\subseteq A \wedge y\subseteq A \wedge x\subseteq y \}$

真包含关系: $\subset_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\subseteq A \wedge y\subseteq A \wedge x\subset y \}$

示例

8 自然数上的二元关系

$D=\{(m,n)\in N^2 \mid m|n\}$

自然数上的同余关系

$R_k=\{(m,n)\in N^2 \mid (k,|m-n|)\in D\}$

$m\equiv n \pmod k$

- 集合论方法（序对之集合）
- 代数表示（矩阵表示法）
- 几何表示（图）

关系R的集合表达式,关系矩阵,关系图三者均可以唯一互相确定

设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$, $R\subseteq A\times B$, 则R的关系矩阵 $M(R)$ (或者记为M_R) $=(r_{ij})_{m\times n}$, 其中，

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & x_i R x_j\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

如, $A=\{2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9\}$, 由A到B的关系 $\rho=\{(2,7),(2,9),(3,7),(3,8),(4,7),(4,9),(5,6),(5,7),(5,8),(5,9)\}$,

所以关系矩阵

$$M_\rho=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

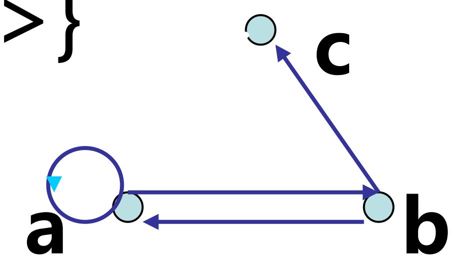
集合A到B的关系R的关系图G(R)或G_R：

由结点(表示集合元素)与边(表示结点代表的元素之间具有关系R)

构成的图。结点数为|A|+|B|，有向边数为|R|

如，$A=\{a,b,c\}$,

$\rho=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$



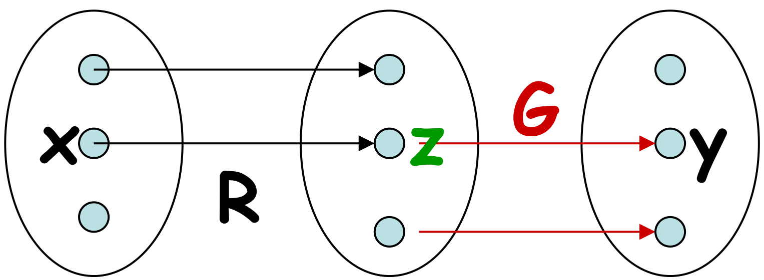
对任意关系R,G，有:

- 逆(Inverse Operation) :

$$R^{-1} = \{ <x,y> \mid yRx \}$$

- 复合(合成)(Composite Operation)

$$R \circ G = \{ <x,y> \mid \exists z(xRz \wedge zGy) \}$$



示例 **Grandparents**

To construct the “isGrandparentOf” relation, we can compose “isParentOf” with itself.

isGrandparentOf = isParentOf ○ isParentOf.

Similarly, we can construct the “isGreatGrandparentOf” relation by the following composition:

isGreatGrandparentOf = isGrandparentOf ○ isParentOf.

$$\text{isParentOf}^2 = \text{isGrandparentOf},$$
$$\text{isParentOf}^3 = \text{isGreatGrandparentOf}.$$

示例

1 $A=\{a,b,c\}$, $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$, $R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$, 试根据关系矩阵求解 R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 o R_1$

$$M(R_1)=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad M(R_2)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$M(R_1^{-1})=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M(R_2^{-1})=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$M(R_1 \circ R_1)=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \bullet \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

2 设F是任意集合, 则

(1) $\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$; (2) $\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$; (3) $(F^{-1})^{-1} = F$.

证明: (1) $\forall x$, $x \in \mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(xF^{-1}y) \Leftrightarrow \exists y(yFx) \Leftrightarrow x \in \mathrm{ran}F$

于是，$\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$.

(2)可类似证明.

(3) $\forall <x,y>, <x,y> \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow x(F^{-1})^{-1}y \Leftrightarrow yF^{-1}x \Leftrightarrow xFy \Leftrightarrow <x,y> \in F$.

所以，$(F^{-1})^{-1} = F$.

设A为任意集合，ρ为A上的任意二元关系， m,n∈N，有:

(1) ρ^0是A上的恒等关系，即$\rho^0 = I_A$

(2) $\rho^{n+1} = \rho \circ \rho^n$， $n \in N$

(3) $\rho^m \circ \rho^n = \rho^{m+n}$

(4) $(\rho^n)^m = \rho^{m \cdot n}$

3 设R_1,R_2,R_3为集合A上二元关系, 则

$(R_1 o R_2)\ o R_3 = R_1 o\ (R_2 o R_3)$

证明: $\forall$<x,y>, $\langle x,y \rangle \in (R_1 o R_2)\ o R_3$

$\Leftrightarrow \exists z(x(R_1 o R_2)z \wedge zR_3y)$

$\Leftrightarrow \exists z(\exists t(\ xR_1t \wedge tR_2z\ ) \wedge zR_3y)$

$\Leftrightarrow \exists z\exists t(\ (xR_1t \wedge tR_2z) \wedge zR_3y\ )\ )$

$\Leftrightarrow \exists t\exists z(\ xR_1t \wedge\ tR_2z \wedge zR_3y)$

$\Leftrightarrow \exists t(xR_1t \wedge \exists z(\ tR_2z \wedge zR_3y)\ )$

$\Leftrightarrow \exists t(xR_1t \wedge t(R_2 o R_3)y)$

$\Leftrightarrow xR_1 o\ (R_2 o R_3)y$

$\Leftrightarrow \langle x,y \rangle \in R_1 o (R_2 o R_3)$

$\therefore\ (R_1 o R_2)\ o R_3 = R_1 o\ (R_2 o R_3)$.

4 设R_1,R_2,R_3是集合,则

(1) $R_1 o(R_2 \cup R_3) = (R_1 o R_2) \cup (R_1 o R_3)$

(2) $(R_1 \cup R_2) o R_3 = (R_1 o R_3) \cup (R_2 o R_3)$

(3) $R_1 o(R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 o R_2) \cap (R_1 o R_3)$

(4) $(R_1 \cap R_2) o R_3 \subseteq (R_1 o R_3) \cap (R_2 o R_3)$

(5) $(R_1\ o R_2)^{-1} = R_2^{-1} o\ R_1^{\ -1}$

(1) $R_1 o (R_2 \cup R_3) = (R_1 o R_2) \cup (R_1 o R_3)$

证明: $\forall <x,y>$, $<x,y> \in R_1 o (R_2 \cup R_3)$

$\Leftrightarrow \exists z(xR_1z \wedge z(R_2 \cup R_3)y)$

$\Leftrightarrow \exists z(xR_1z \wedge (zR_2y \vee zR_3y))$

$\Leftrightarrow \exists z((xR_1z \wedge zR_2y) \vee (xR_1z \wedge zR_3y))$

$\Leftrightarrow \exists z(xR_1z \wedge zR_2y) \vee \exists z(xR_1z \wedge zR_3y)$

$\Leftrightarrow x(R_1 o R_2)y \vee x(R_1 o R_3)y \Leftrightarrow x((R_1 o R_2) \cup (R_1 o R_3))y$

$\Leftrightarrow <x,y> \in (R_1 o R_2) \cup (R_1 o R_3)$

(3) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

证明: $\forall <x,y>$, $<x,y> \in R_1 \circ (R_2 \cap R_3)$

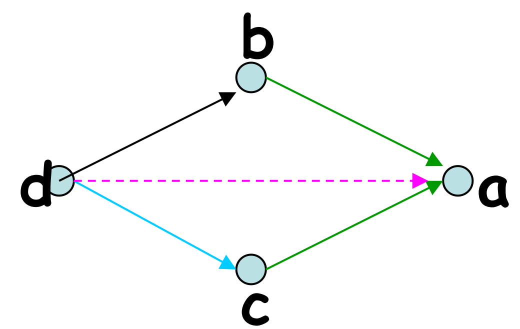
$\Leftrightarrow \exists z(xR_1z \wedge z(R_2 \cap R_3)\ y) \Leftrightarrow \exists z(xR_1z \wedge (zR_2y \wedge zR_3y))$

$\Leftrightarrow \exists z((xR_1z \wedge zR_2y) \wedge (xR_1z \wedge zR_3y))$

$\Rightarrow \exists z(xR_1z \wedge zR_2y) \wedge \exists z(xR_1z \wedge zR_3y)$

$\Leftrightarrow x(R_1 \circ R_2)y \wedge x(R_1 \circ R_3)y \Leftrightarrow x((R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3))y$

$\Leftrightarrow <x,y> \in (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$.



反例(说明=不成立):

设$R_1=\{<d,b>,<d,c>\}$, $R_2=\{<b,a>\}$, $R_3=\{<c,a>\}$. 则$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) = R_1 \circ \varnothing = \varnothing$, $R_1 \circ R_2=\{<d,a>\}$, $R_1 \circ R_3=\{<d,a>\}$, $(R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)=\{<d,a>\}$.

- 自反性(Reflexivity)
- 反自反性(Anti-reflexivity)
- 对称性(Symmetry)
- 反对称性(Anti-symmetry)
- 传递性(Transitivity)

设$R \subseteq A \times A$, 说R是自反的(Reflexive),如果 $\forall x(x \in A \rightarrow xRx)$.

R是非自反的 $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \neg xRx)$

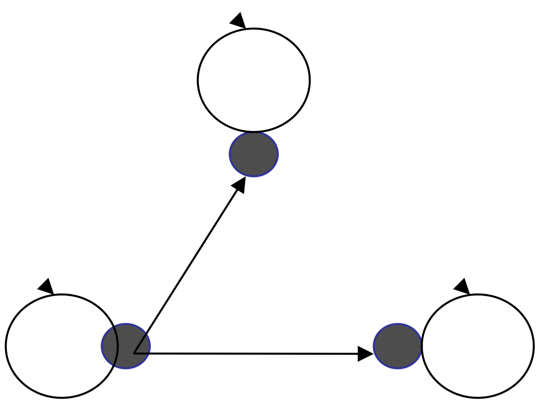
性质：R是自反的

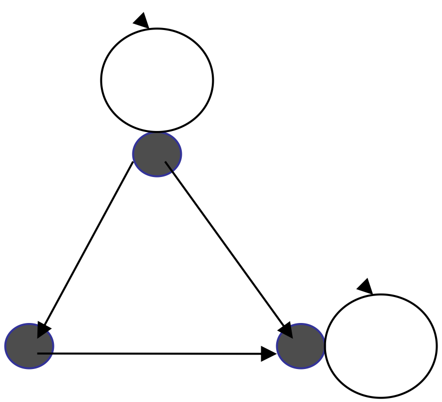
$\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

$\Leftrightarrow R^{-1}$是自反的

$\Leftrightarrow$ M(R)主对角线上的元素全为1

$\Leftrightarrow$ G(R)的每个顶点处均有环.





设$R \subseteq A \times A$, 说R是反自反的(irreflexive), 如果

$$\forall x(x \in A \rightarrow \neg xRx).$$

R是非反自反的 $\Leftrightarrow \exists x(\ x \in A \wedge xRx)$

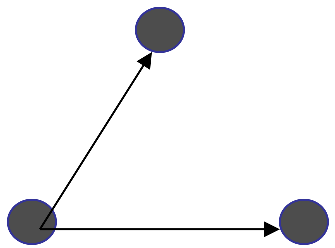
性质：R是反自反的

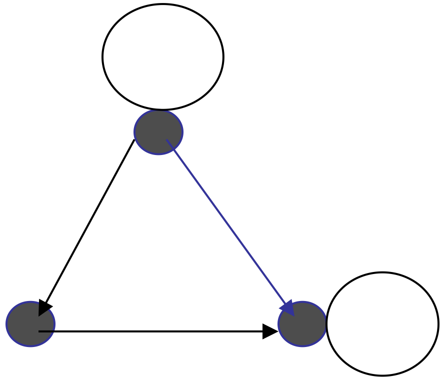
$\Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing$

$\Leftrightarrow R^{-1}$是反自反的

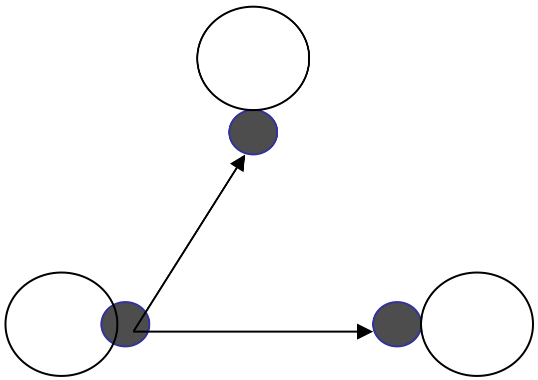
$\Leftrightarrow$ M(R)主对角线上的元素全为0

$\Leftrightarrow$ G(R)的每个顶点处均无环.

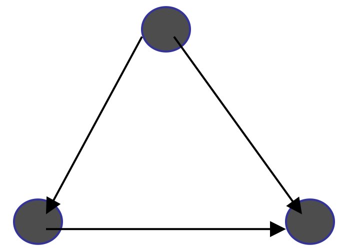




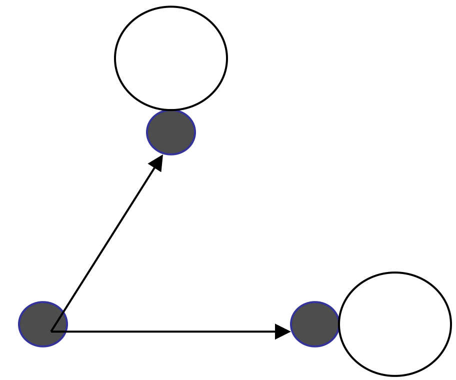
5 关系性质-自反性



自反



反自反



非自反，非反自反

自反，
反自反？

$\varnothing$上的空关系

设R⊆A×A, 说R是对称的(Symmetric),如果

$\forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$.

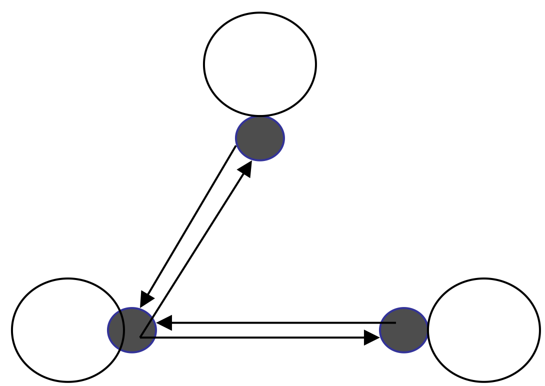
R非对称 $\Leftrightarrow \exists x \exists y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge \neg yRx)$

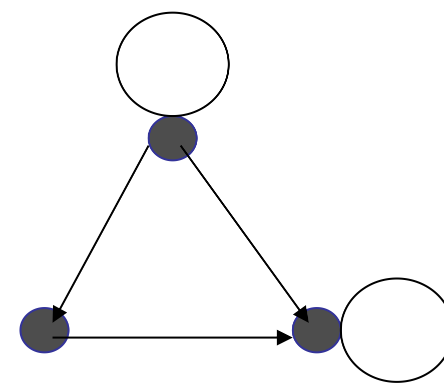
性质：R是对称的

$\Leftrightarrow R^{-1} = R$

$\Leftrightarrow R^{-1}$是对称的

$\Leftrightarrow M(R)$是对称的





$\Leftrightarrow G(R)$的任何两个顶点之间若有边, 则必有两条方向相反的有向边.

设$R\subseteq A\times A$, 说R是反对称的(Anti-symmetric),若

$\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge yRx\rightarrow x=y)$.

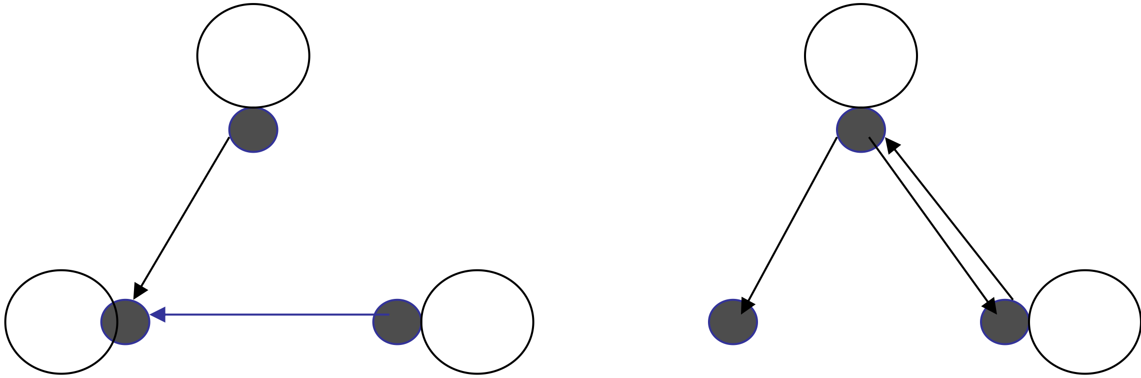
R非反对称$\Leftrightarrow\exists x\exists y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge yRx\wedge x\neq y)$

性质：R是反对称的

$\Leftrightarrow R^{-1}\cap R\subseteq I_A$

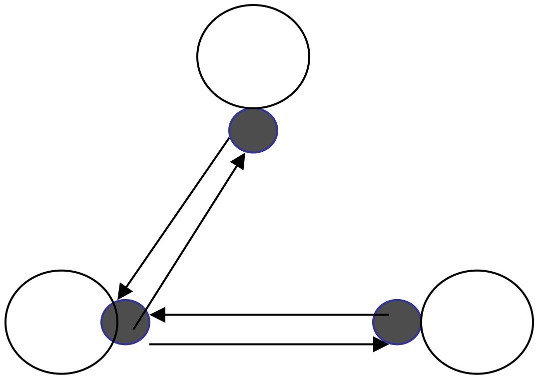
$\Leftrightarrow R^{-1}$是反对称的

$\Leftrightarrow$ 在M(R)中, $\forall i\forall j(i\neq j\wedge r_{ij}=1\rightarrow r_{ji}=0)$

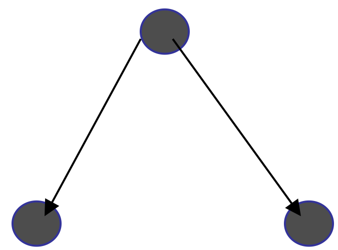


$\Leftrightarrow$ 在G(R)中, $\forall x_i\forall x_j(i\neq j)$, 若有有向边$<x_i,x_j>$, 则必没有$<x_j,x_i>$.

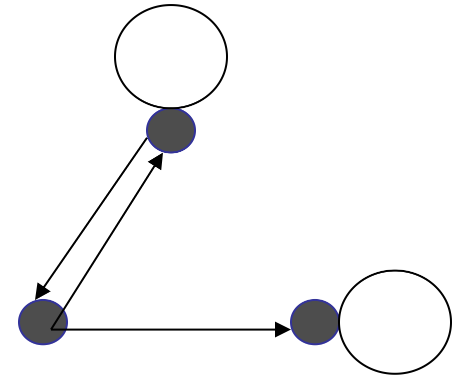
5 关系性质-对称性



对称

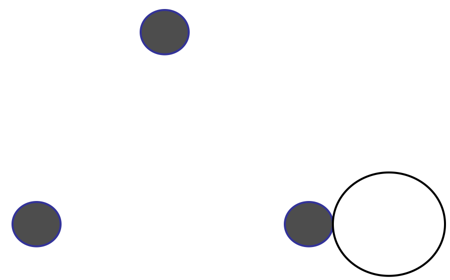


反对称



非对称， 非反对称

对称，
反对称？



设$R \subseteq A \times A$, 说R是传递的(Transitive), 如果

$$\forall x \forall y \forall z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz).$$

R非传递$\Leftrightarrow \exists x \exists y \exists z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \wedge \neg xRz)$

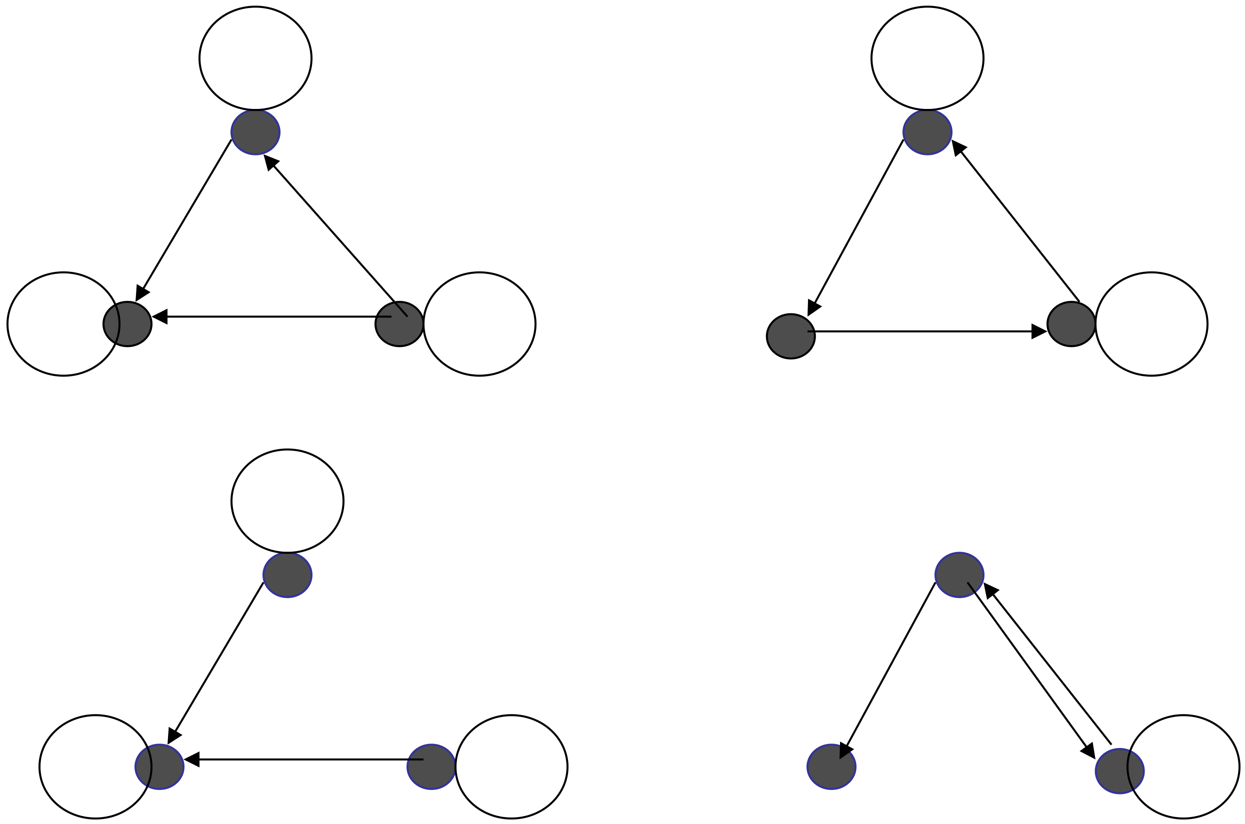
性质：R是传递的

$\Leftrightarrow$ $RoR \subseteq R$

$\Leftrightarrow$ R^{-1}是传递的

$\Leftrightarrow$ 在M(RoR)中, $\forall i \forall j$, 若$r_{ij}' = 1$,则M(R)中相应元素 $r_{ij}=1$.

$\Leftrightarrow$ 在G(R)中, $\forall x_i \forall x_j \forall x_k$, 若有有向边$<x_i,x_j>$,$<x_j,x_k>$, 则必有有向边$<x_i,x_k>$.



示例

在 N = {0,1,2,...} 上:

- $\leq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\leq y\}$自反,反对称,传递
- $\geq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\geq y\}$自反,反对称,传递
- $<=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x<y\}$反自反,反对称,传递
- $>=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x>y\}$反自反,反对称,传递
- $|=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x|y\}$反对称,传递$(\neg 0|0)$

a) $I_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x=y\}$自反,对称,反对称,传递

b) $U_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\}=N\times N$自反,对称,传递.

示例

$A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$,

$R_2=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$,

$R_3=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$,

$R_4=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$,

$R_5=\{<a,a>,<a,b>,<b,b>,<c,c>\}$,

$R_6=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<a,a>\}$,

示例

设$R_1,R_2 \subseteq A\times A$都具有某种性质

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}					
$R_1 \cup R_2$					
$R_1 \cap R_2$					
$R_1 o R_2$, $R_2 o R_1$					
$R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$					
R_1', R_2'					

示例

设$R_1,R_2 \subseteq A \times A$都具有某种性质

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√		
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$	√				
$R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$		√	√	√	
R_1', R_2'			√		

示例

(1) R_1,R_2自反 $\Rightarrow R_1 o R_2$自反.

证明:$\forall x$,

$x \in A$

$\Rightarrow xR_1x \wedge xR_2x$

$\Rightarrow xR_1 o R_2x$

$\therefore R_1,R_2$自反 $\Rightarrow R_1 o R_2$自反.

示例

(2) R_1,R_2反自反 $\Rightarrow$ $R_1 \cap R_2$反自反.

证明: (反证) 若$R_1 \cap R_2$非反自反, 则

$\exists x \in A$,

$x(R_1 \cap R_2)x$

$\Leftrightarrow xR_1x \wedge xR_2x$

与R_1,R_2反自反矛盾!

$\therefore$ R_1,R_2反自反 $\Rightarrow$ $R_1 \cap R_2$反自反.

示例

(3) R_1,R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称.

证明:$\forall x,y\in A$,

$$
\begin{aligned}
& x(R_1-R_2)y \\
\Leftrightarrow\ & xR_1y \wedge \neg xR_2y \\
\Leftrightarrow\ & yR_1x \wedge \neg yR_2x \\
\Leftrightarrow\ & y(R_1-R_2)x
\end{aligned}
$$

$\therefore$ R_1,R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称.

示例

(4) R_1对称 $\Rightarrow R_1'$ 对称.

证明: $\forall x,y \in A$,

$$x(R_1')y \Leftrightarrow x(U_A-R_1)y$$

$$\Leftrightarrow xU_Ay \wedge \neg xR_1y$$

$$\Leftrightarrow yU_Ax \wedge \neg yR_1x$$

$$\Leftrightarrow y(U_A-R_1)x \Leftrightarrow y(R_1')x$$

$\therefore$ R_1对称 $\Rightarrow R_1'$ 对称.

示例

(5) R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称.

证明: (反证) 若R_1^{-1}非反对称, 则

$\exists x,y \in A$,

$xR_1^{-1}y \wedge yR_1^{-1}x \wedge x \neq y$

$\Leftrightarrow yR_1x \wedge xR_1y \wedge x \neq y$

与R_1反对称矛盾!

$\therefore$ R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称.