第7章 数值积分

回顾

7.1 数值积分概述

7.2 牛顿-柯特斯求积公式

7.3 复化求积公式

7.4 龙贝格求积公式

7.5 高斯型求积公式

7.2 牛顿-柯特斯求积公式

回顾

牛顿-柯特斯(Newton-cotes)求积公式

(1)梯形求积公式 $n=1, h=b-a$

$$Q[f]=\frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)], R[f]=-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

(2)Simpson求积公式 $n=2, h=(b-a)/2$

$$Q[f]=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] \qquad R[f]=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta)$$

(3) Simpson （辛普森）$\frac{3}{8}$求积公式 $n=3,\ h=\frac{b-a}{3}$

$$Q[f]=\frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)] \quad R[f]=-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\eta)$$

(4)Cotes求积公式 $n=4, h=(b-a)/4$

$$Q[f]=\frac{2h}{45}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

$$R[f]=-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\eta)$$

7.2 牛顿-柯特斯求积公式

回顾

代数精度

梯形公式的代数精度为1

Simpon求积公式的代数精度为3

Simpon $\frac{3}{8}$ 求积公式的代数精度为3

Cotes求积公式的代数精度为5

7.3 复化求积公式

回顾

由梯形、辛普森和柯特斯求积公式余项可知，随着求积节点数的增多，对应公式的精度也会相应提高。但由于n≥8时的牛顿—柯特斯求积公式开始出现负值的柯特斯系数。根据误差理论的分析研究，当积分公式出现负系数时，可能导致舍入误差增大，并且往往难以估计。因此不能用增加求积节点数的方法来提高计算精度。

在实际应用中，提高积分计算精度的常用两种方法

✓ 用 复化公式　　✓ 用 非等距节点

❑ 复化求积公式：将积分区间分割成多个小区间，然后在每个小区间上使用低次牛顿—科特斯求积公式。然后把所有小区间上的计算结果加起来得到整个区间上的求积公式。

7.3.1 复化梯形公式及其误差分析和算法实现

- 定步长：将$[a, b]$分成n等分$[x_i, x_{i+1}]$，其中节点：

$$x_i = a + i \cdot h, \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$ (k=0, 1, …, n−1) 上应用梯形公式

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

累加求和可得复化梯形公式

回顾

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]$$

同样的，若在每个小区间内采用Simpson公式，可得

$$S_n = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]$$

称为复化辛普森公式。

7.3.3 步长的选取

利用复化梯形公式、复化Simpson公式等计算定积分时，对指定的误差界，如何选取步长 h, 使之能够达到计算精度?

太大 → 计算精度难以保证

太小 → 增加额外的计算量

回顾

解决办法：采用 变步长算法

通常采取将区间不断对分的方法，即取 $n=2^k$，反复使用复化求积公式，直到相邻两次计算结果之差的绝对值小于指定的精度为止。

- 基本思想：将积分区间逐次分半
- 终止法则：前后两次近似值的误差小于已知精度

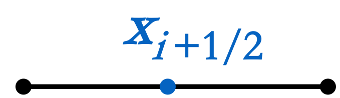
$$\left|I_{2n}-I_n\right|<\varepsilon$$

变步长梯形法

- 将$[a, b]$分成 n 等分 $[x_i, x_{i+1}]$， $x_i = a + i \cdot h,\quad h = \dfrac{b-a}{n}$

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$

- 步长折半： $[x_i\, , x_{i+1/2}]$， $[x_{i+1/2}\, , x_{i+1}]$



$$T_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{4}\left[\left(f(x_i) + f(x_{i+1/2})\right) + \left(f(x_{i+1/2}) + f(x_{i+1})\right)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{4}\left[f(x_i) + 2f(x_{i+1/2}) + f(x_{i+1})\right]$$

$$= \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2})$$

回顾

$$\boxed{T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2})}$$

$n = 2^0, 2^1, 2^2, \cdots$

终止条件： **回顾**

$f''(x)$ 变化不大时

由复化梯形公式的余项知

$$I-T_n=-\frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f''(\eta_1)$$

$$I-T_{2n}=-\frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 f''(\eta_2)$$

$$\boxed{\frac{I-T_n}{I-T_{2n}}\approx 4}$$

由此得到近似关系式 $I\approx T_{2n}+\frac{1}{4-1}(T_{2n}-T_n)$

误差控制条件 $\left|\frac{1}{4-1}(T_{2n}-T_n)\right|<\varepsilon$

这里构成了一个自动选步长的梯形积分公式

即 当 T_{2n}-$T_n<\varepsilon$,有$I(f)-T_{2n}<\varepsilon$

上述条件满足，程序终止；否则，继续分半计算。

7.3.3 步长的选取

类似于梯形公式, 可以得到自动选步长的Simpson公式

$$I-S_n=-\frac{b-a}{2880}h^4f^{(4)}(\eta)$$

$$I-S_{2n}=-\frac{b-a}{2880}\left(\frac{h}{2}\right)^4f^{(4)}(\eta')$$

回顾

假定$f^{(4)}(x)$在$[a,b]$上变化不大时, 可得

$$\frac{I-S_n}{I-S_{2n}}\approx 4^2$$

因此, $I-S_{2n}\approx\frac{1}{4^2-1}(S_{2n}-S_n)$, 自动选步长的Simpson公式

同理, $I-C_{2n}\approx\frac{1}{4^3-1}(C_{2n}-C_n)$, 自动选步长的Cotes公式

7.4 龙贝格法求积公式

获得高精度积分的方法

(1)减少步长

(2)使用高精度公式

缺点是函数计算量较大

自动选步长梯形求积法算法简单，但精度较差，收敛速度较慢，但可以利用梯形法算法简单的优点，形成一个新算法，这就是龙贝格求积公式，即考虑使用低精度公式，计算高精度积分的方法。

龙贝格公式又称逐次分半加速法。

7.4 龙贝格法求积公式

根据自动选步长的梯形积分公式，积分区间分成n等份和2n等份时的误差估计式

$$I-T_n=-\frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f''(\eta_1)$$

$$I-T_{2n}=-\frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 f''(\eta_2)$$

$f''(x)$ 变化不大时

$$\frac{I-T_n}{I-T_{2n}}\approx 4$$

可得 $I\approx T_{2n}+\frac{1}{4-1}(T_{2n}-T_n)$ 即 $I\approx T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$

所以积分值T_n的误差大致等于$(T_{2n}-T_n)/3$，如果用$(T_{2n}-T_n)/3$对T_{2n}进行修正时，$(T_{2n}-T_n)/3$与T_{2n}之和比T_{2n}更接近积分真值，所以可以将$(T_{2n}-T_n)/3$看成是对T_{2n}误差的一种补偿，因此，可得到具有更好效果的式子：

$$\overline{T}=T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n \qquad (7.4)$$

考查$\overline{T}$与n等分辛普森公式S_n之间的关系，$\overline{T}=T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$

将复化梯形公式 $T_n=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]$ 代入式(7.4) 得

$$I(f)=\frac{4T_{2n}-T_n}{4-1}=\frac{1}{3}\left[4\left(\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\right)-T_n\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[T_n+2h\sum_{k=1}^{n}f(\frac{x_{k-1}+x_k}{2})\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right)+2h\sum_{k=1}^{n}f(\frac{x_{k-1}+x_k}{2})\right]$$

$$=\frac{h}{6}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=1}^{n}f(\frac{x_{k-1}+x_k}{2})\right]=S_n$$

所以 $S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$

非常重要

上述公式说明：

用梯形法二分前后两个积分值T_n和T_{2n}，按照上式所做的线性组合，可得到具有更高精度的由复化辛普森公式计算的积分值S_n。

7.4 龙贝格法求积公式

可见,使用复化梯形公式通过适当的组合,可以得到精度更高的Simpson公式,其代数精度可以由1提高到3

同理,由复化Simpson公式可以得到

$$I \approx S_{2n} + \frac{1}{4^2-1}(S_{2n} - S_n) \quad 有 \quad \frac{4^2 S_{2n} - S_n}{4^2-1} = C_n$$

即,可以得到计算精度为$O(h^6)$,代数精度为5的Cotes公式

同理,由复化Cotes公式可以得到

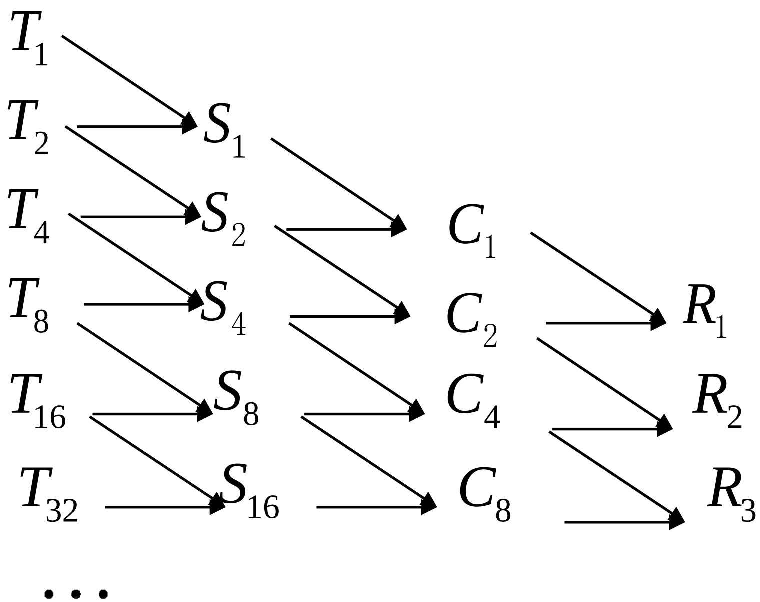
$$I \approx C_{2n} + \frac{1}{4^3-1}(C_{2n} - C_n) \quad 有 \quad \frac{4^3 C_{2n} - C_n}{4^3-1} = R_n$$

即,可以得到计算精度为$O(h^8)$,代数精度为7的*Romberg*公式

7.4 龙贝格法求积公式

非常非常重要

*Romberg*计算图



设 ε 为给定的误差限，当 $|R_{2^{k+1}} - R_{2^k}| < \varepsilon$ 时，取 $R_{2^{k+1}}$ 为积分的近似值。这样的一个计算过程称为Romberg 积分方法。

Romberg 积分方法表格形式

k	区间等分数$n=2^k$	梯形序列T^*_2	辛普森序列S^{k-1}_2	柯特斯序列C^{k-2}_2	龙贝格序列R^{k-3}_2
0	1	T1			
1	2	T2	S1		
2	4	T4	S2	C1	
3	8	T8	S4	C2	R1
4	16	T16	S8	C4	R2
5	32	T32	S16	C8	R4

龙贝格法求积公式的程序实现

表7.1 Romberg积分表

J	$R(J,0)$ 梯形公式	$R(J,1)$ 辛普森公式	$R(J,2)$ 布尔公式	$R(J,3)$ 第3次改进	$R(J,4)$ 第4次改进
0	$R(0,0)$				
1	$R(1,0)$	$R(1,1)$			
2	$R(2,0)$	$R(2,1)$	$R(2,2)$		
3	$R(3,0)$	$R(3,1)$	$R(3,2)$	$R(3,3)$	
4	$R(4,0)$	$R(4,1)$	$R(4,2)$	$R(4,3)$	$R(4,4)$

程序 7.4(龙贝格积分) 生成 $J \geq K$ 的逼近表 $R(J,K)$，并以 $R(J+1,J+1)$ 为最终解来逼近积分

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx R(J,J)$$

逼近 $R(J,K)$ 存在于一个特别的下三角矩阵中，第 0 列元素 $R(J,0)$ 用基于 2^J 个 $[a,b]$ 子区间的连续梯形方法计算，然后利用龙贝格公式计算 $R(J,K)$。当 $1 \leq K \leq J$ 时，第 J 行的元素为

$$R(J,K) = R(J,K-1) + \frac{R(J,K-1) - R(J-1,K-1)}{4^K - 1}$$

当 $|R(J,J) - R(J+1,J+1)| < \mathrm{tol}$ 时，程序在第 $(J+1)$ 行结束。

Matlab程序： Romberg.m

```
function [R,quad,err,h]=Romberg(f,a,b,n,tol)
%Input    - f is the integrand
%           - a and b are upper and lower limits of integration
%           - n is the maximum number of rows in the table
%           - tol is the tolerance
%Output - R is the Romberg table
%          - quad is the quadrature value
%          - err is the error estimate
%          - h is the smallest step size used
% f=@(x) 20.*x.^3+sin(x)-6.*x-3;
% a=1; b=3; n=5; tol=1e-6;
%  [R,quad,err,h]=Romberg(f,a,b,n,tol)

M=1;
h=b-a;
err=1;
J=0;
R=zeros(4,4);
R(1,1)=h*(f(a)+f(b))/2;
while((err>tol)&(J<n))|(J<4)
   J=J+1;
   h=h/2;
   s=0;
   for p=1:M
      x=a+h*(2*p-1);
      s=s+f(x);
   end
   R(J+1,1)=R(J,1)/2+h*s;
   M=2*M;
   for K=1:J
      R(J+1,K+1)=R(J+1,K)+(R(J+1,K)-R(J,K))/(4^K-1);
   end
   err=abs(R(J,J)-R(J+1,K+1));
end

quad=R(J+1,J+1);
```

作业7.3

5. 对 $J=2$ 的情况，证明关系式 $B(J)=(16S(J)-S(J-1))/15$。利用信息：

$$S(1)=\frac{2h}{3}(f_0+4f_2+f_4)$$

和

$$S(2)=\frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+f_4)$$

算法与程序

3. 正态概率密度函数为 $f(t)=(1/\sqrt{2\pi})e^{-t^2/2}$，而累积分布为由积分 $\Phi(x)=\frac{1}{2}+(1/\sqrt{2\pi})\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ 定义的函数。计算有 8 位有效数字的 $\Phi(0.5)$，$\Phi(1.0)$，$\Phi(1.5)$，$\Phi(2.0)$，$\Phi(2.5)$，$\Phi(3.0)$，$\Phi(3.5)$和 $\Phi(4.0)$的值。

7.5 高斯型求积公式

非常重要

7.5.1、 Gauss积分问题的提法

积分公式的一般形式:

$$\boxed{I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)}$$

➢前述Newton—Cotes求积公式中求积节点是取等距节点，求积系数计算方便，但代数精度要受到限制;

➢而Gauss积分问题是指:

①当求积节点个数确定后，上述一般形式的积分公式所具有的最高代数精度是多少?

②具有最高代数精度的求积公式中求积节点如何选取?

高斯（Gauss）求积公式

非常重要

定义7.3 若存在 $n+1$ 个节点 $x_i \in [a, b]$ 及求积系数 ω_i，使得下面的求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度，则称节点 x_i 为高斯点，ω_i 为高斯系数，求积公式为高斯(Gauss)求积公式。

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) \qquad (*)$$

注：(1)Gauss求积公式仍然是插值型求积公式；

(2)Gauss系数可通过Gauss点和Lagrange基函数得到.

高斯（Gauss）求积公式

定理7.7　用 $n+1$ 个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 构造的插值型求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

的代数精度不超过 $2n+1$。

即Gauss公式是插值型求积公式中代数精度最高的。

证明：略。

例7.10：试确定 x_0, x_1 以及系数 ω_0, ω_1，导出两点Gauss求积公式:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

非常重要

注：两个节点（n=1），代数精度为3

解：将 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 代入，使其精确成立得

$$\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2 \\ \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 = \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0 \\ \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = 2/3 \\ \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3 = \int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{解得}} \begin{cases} \omega_0 = \omega_1 = 1 \\ x_0 = -x_1 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

是非线性方程组,不易求解

因此，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = f\left(-1/\sqrt{3}\right) + f\left(1/\sqrt{3}\right)$$

同理： 区间[-1,1]上几个简单的Gauss 公式

非常非常重要

$n=1$: $P_n(x)=2x,\quad x_0=0,\quad \omega_0=2$

一点Gauss公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = 2f(0)$$

$n=2$: $P_n(x)=12x^2-4,\quad x_0=-1/\sqrt{3},\ x_1=1/\sqrt{3},\quad \omega_0=\omega_1=1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = f\left(-1/\sqrt{3}\right)+f\left(1/\sqrt{3}\right)$$

两点Gauss公式

$n=3$: $P_n(x)=120x^3-72x,\quad x_0=-\sqrt{3/5},\ x_1=0,\ x_2=\sqrt{3/5}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{15}/5\right)+\frac{8}{9} f(0)+\frac{5}{9} f\left(\sqrt{15}/5\right)$$

三点Gauss公式

更多的区间[-1,1]上Gauss公式

非常重要

当 $n > 3$ 时，可用数值方法计算 $P_{n+1}(x)$ 的零点(三项递推)

n	节点个数	Gauss点	Gauss系数	代数精度
0	1	0	2	1
1	2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1	3
2	3	0 $\pm\sqrt{3/5}$	8/9 5/9	5
3	4	±0.8611363 ±0.3399810	0.3478548 0.6521452	7
4	5	±0.9061798 ±0.5384693 0.0000000	0.2369269 0.4786287 0.5688889	9
5	6	±0.93246951 ±0.66120939 ±0.23861919	0.17132449 0.36076157 0.46791393	11

下面讨论一般积分形式：

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx$$ 其中 $\rho(x)\geq 0$ 为权函数

构造积分公式 $\boxed{\int_a^b f(x)\rho(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n}\omega_k f(x_k)}$ 具有2n+1次代数精度。

其中

求积节点 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leq b$

求积系数 $\omega_k \quad k = 0,1,\cdots,n$ 仅与求积节点有关

$$\omega_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx = \int_a^b \rho(x) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx$$

由代数精度定义，当 $f(x) = 1, x, \cdots, x^{2n}, x^{2n+1}$ 时，求积公式

$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\omega_k f(x_k)$ 精确成立： $\sum_{k=0}^{n}\omega_k x_k^j = \int_a^b \rho(x) x^j dx \quad j = 0,1,\cdots,2n+1$

$$\sum_{k=0}^{n}\omega_k x_k^j=\int_a^b \rho(x)x^j dx \quad j=0,1,\cdots,2n+1$$

2n+2个未知数，2n+2个方程的非线性方程组

定义7.4 如果一组节点$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subseteq [a,b]$，使得上述插值型求积公式具有2n+1次代数精度，则称该组节点为Gauss点，相应的公式为Gauss型求积公式。

➢ Gauss求积公式的余项

$$R_n[f]=I-\sum_{k=0}^{n}\omega_k f(x_k)=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega_{n+1}^2(x)\rho(x)dx$$

证明略.

➢ Gauss求积公式的稳定性

定理7.8 Gauss型求积公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$ 总是稳定的。

证明： 略。

➢ Gauss求积公式的收敛性

定理7.9 设 $f \in C[a,b]$，Gauss型求积公式是收敛的。

证明： 略。

❑ 例7.11：用Gauss求积公式计算

$$I=\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

解：令 $x=(t+1)/2$，则 $t\in[-1,1]$

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{\sin\left(\left(t+1\right)/2\right)}{(t+1)/2}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^1 \frac{\sin\left(\left(t+1\right)/2\right)}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

两点Gauss公式:

$$I\approx\frac{\sin\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}+1\right)\Big/2\right)}{\frac{-1}{\sqrt{3}}+1}+\frac{\sin\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)\Big/2\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}=0.9460411$$

三点Gauss公式：

$$I\approx\frac{1}{2}\left[\frac{5}{9}f\left(-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{15}}{5}+\frac{1}{2}\right)+\frac{8}{9}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{9}f\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{15}}{5}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=0.9460831$$

精确值0.946083070...

Gauss 公式的优缺点

- **Gauss求积公式的优点：**

计算精度高；可计算无穷区间上的积分和奇异积分。

- **Gauss求积公式的缺点：**

需计算Gauss点和Gauss系数；增加节点时需重新计算。

本章教学要求及重点难点

- 理解数值积分的基本思想、方法和理论
- 重点：代数精度的概念
- 熟练掌握数值求积公式的代数精度的计算方法
- 掌握各类牛顿-柯特斯求积公式构造方法及误差分析
- 重点：复化梯形求积法和复化Simpson求积法的算法设计思想
- 重点：龙贝格法求积公式的构造与误差分析
- 难点：高斯型求积公式的构造与误差分析

课堂作业

用Romberg积分方法计算如下定积分

$$I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$$

要求精度 $\varepsilon < 10^{-4}$.