第7章 数值积分

7.1 数值积分概述

7.2 牛顿-柯特斯求积公式

7.3 复化求积公式

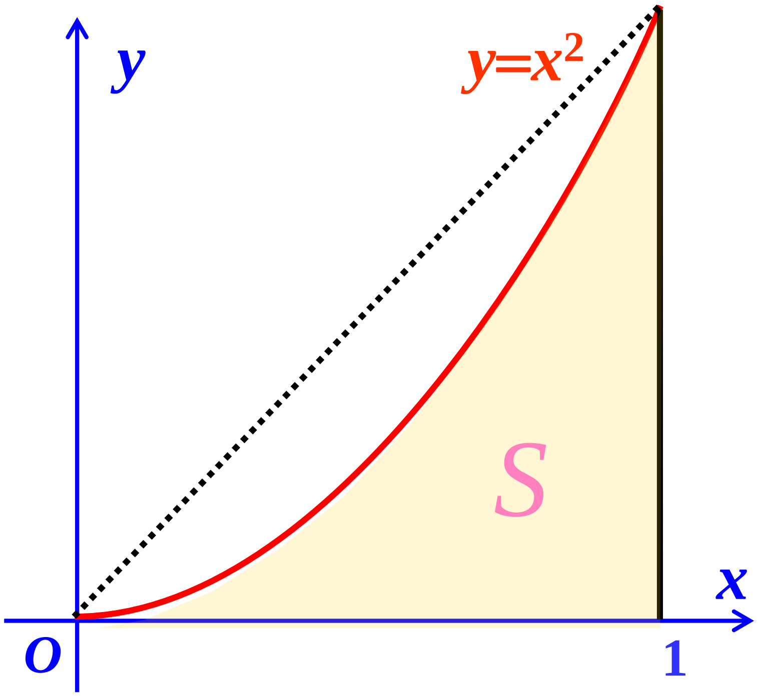
7.4 龙贝格求积公式

7.5 高斯型求积公式

7.1 数值积分概述

7.1.1定积分回顾

例: 求曲线 $y=x^2$、直线 $x=1$和 x轴所围成的曲边三角形的面积。



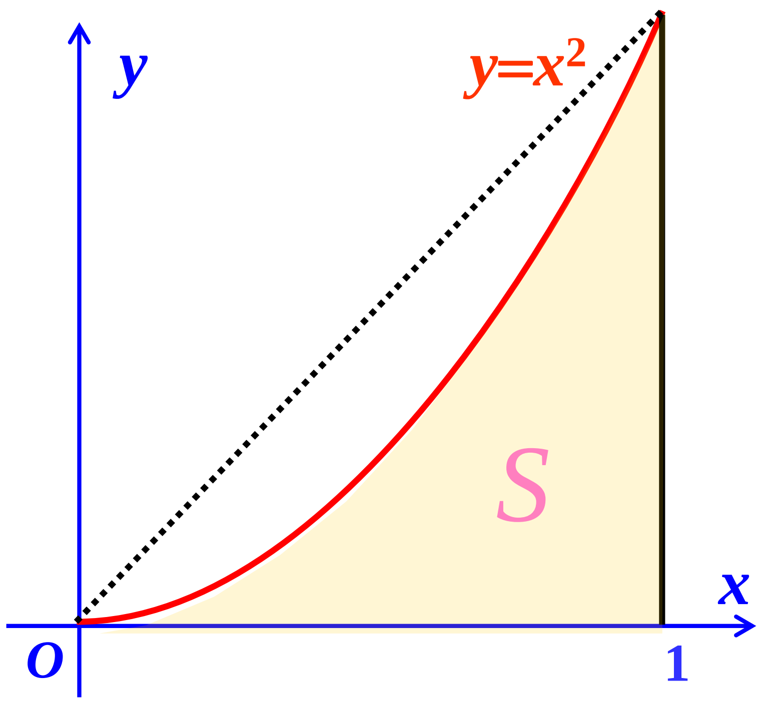
7.1 数值积分概述

非常重要

7.1.1定积分回顾

例： 求曲线 $y=x^2$、直线 $x=1$ 和 x 轴所围成的曲边三角形的面积。

1. **分 割**　把整体的问题分成局部的问题
2. **近 似**　在局部上“以直代曲”，求出局部的近似值；
3. **求 和**　得到整体的一个近似值；
4. **取极限**　得到整体量的精确值；



(1)分割 将区间[0,1]分成n个相等的小区间。

直线 $x=\dfrac{i}{n}\ (i=1,2,\ldots,n-1)$把曲边三角形分成$n$个小曲边梯形。

$$S=\Delta s_1+\Delta s_2+\ldots+\Delta s_i+\ldots+\Delta s_{n-1}+\Delta s_n$$

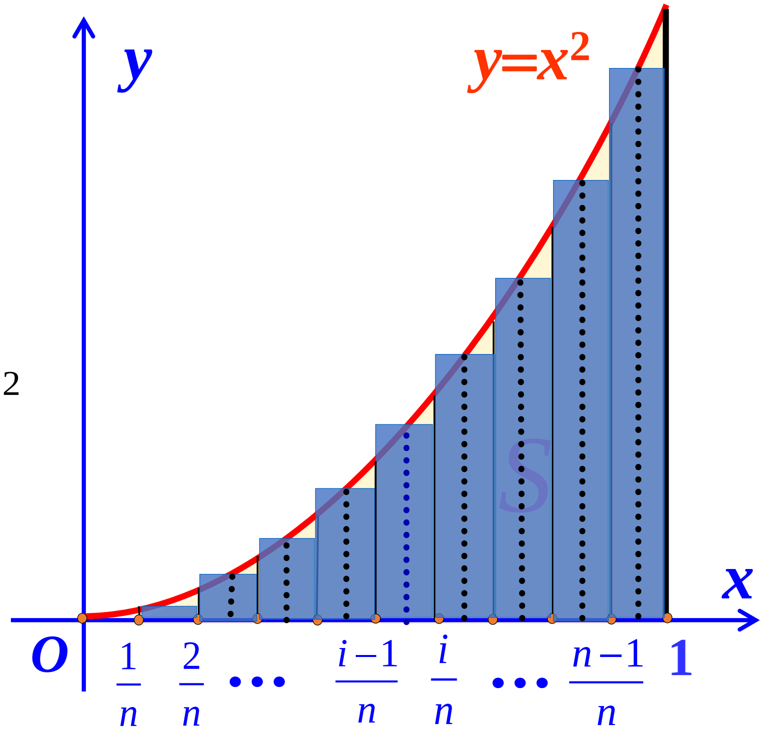
(2)近似 第i个小曲边梯形面积:

$$\Delta s_i \approx \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

(3)求和 小矩形面积的总和:

$$S_n=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\ 。$$



(4)取极限 取S_n的极限，得曲边三角形面积:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{3}$$

非常重要

7.1 数值积分概述

7.1.2 引言

由高等数学的微积分学可知，若函数f(x)在区间[a, b]上连续，且其原函数为F(x)，则可用Newton-Leibniz公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

求定积分的值。牛顿-莱布尼兹公式无论在理论上还是在解决实际问题上，都起了很大作用。

但它并不能完全解决定积分的计算问题，因为积分学涉及的实际问题极为广泛，而且极其复杂，在实际计算问题中经常遇到以下三种情况：

(1) 被积函数f(x)并不一定能够找到用初等函数的有限形式表示的原函数F(x)，例如：

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \text{和} \int_0^1 e^{-x^2}dx$$

$\boxed{\text{重要}}$

牛顿-莱布尼兹公式就无能为力了。

(2) 如果被积函数f(x)的原函数能用初等函数表示，但表达式太复杂，例如

$$f(x) = x^2\sqrt{2x^2+3}$$

本身并不复杂，但积分后其表达式却很复杂，积分后其原函数F(x)为：

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2\sqrt{2x^2+3} + \frac{3}{16}x\sqrt{2x^2+3} - \frac{9}{16\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}x + x^2\sqrt{2x^2+3})$$

7.1.2 引言

重要

(3) $f(x)$ **表达式未知**，只有通过测量或实验得来的数据表示，其函数关系由表格或图形表示。对于这些情况，要计算积分的准确值都是十分困难的。

由此可见，通过原函数来计算积分有它的局限性，因而研究一种新的积分方法来解决牛顿-莱布尼兹公式所不能或很难解决的积分问题。

此时需要利用数值方法来近似计算定积分.

7.1 数值积分概述

7.1.3 数值积分的基本思想

对于函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

若能求得$f(x)$的原函数$F(x)$, 即$F'(x)=f(x)$. 则由Newton-Leibnitz公式

$$I(f)=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

但由于实际情况中, $f(x)$的原函数很难求出,因此, 只能计算定积分的近似值.

重要

考虑用函数$f(x)$在一些点处的值的适当组合,作为定积分$I(f)$的近似

$$I(f)\approx Q(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k) \qquad (7.1)$$

用有限来逼近无限

其中: $\boldsymbol{x_k}$是适当选取的点,称为节点　A_k称为求积系数

公式（7.1）称为求积公式，以上方法称为**数值积分**.

7.1 数值积分概述

7.1.3 数值积分的基本思想

重要

数值积分要考虑的问题

$$I(f) \approx Q(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

如何通过

(1) 选择合适节点x_k;

(2) 确定合适的求积系数A_k;

使误差

$$E(f) = I(f) - Q(f)$$

尽可能的小

求积公式可以分成两大类

（1） $Newton$-$Cotes$型公式,基于等距分布的节点

（2） $Gauss$型公式,取相应的正交多项式的根作为节点

7.1 数值积分概述

7.1.3 数值积分的基本思想

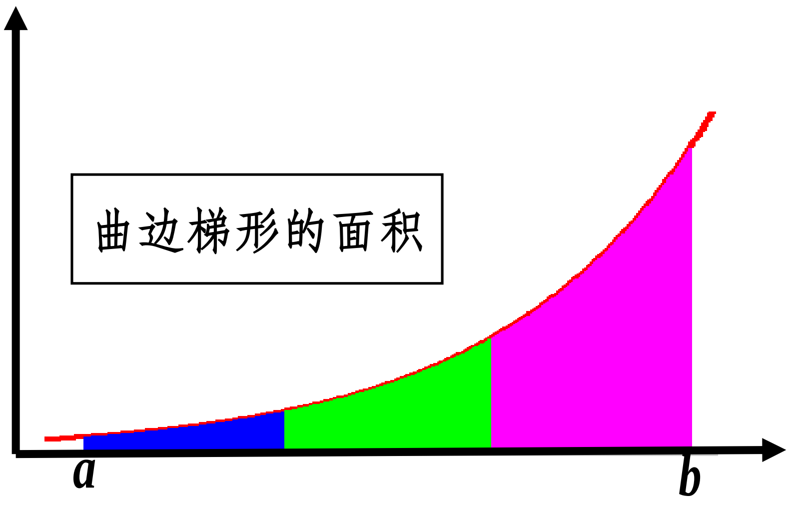
- 取$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一些离散点

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

上的值加权平均作为 $f(\xi)$ 的近似值，从而构造出

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx Q(f)=\sum_{k=0}^{n} A_k f\left(x_k\right)$$

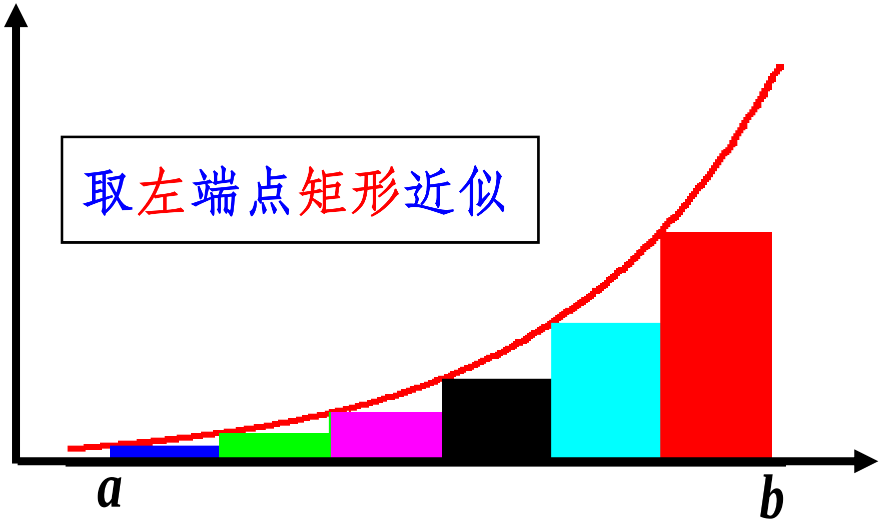
则截断误差或余项为 $\boxed{R(f)=I(f)-Q(f)}$

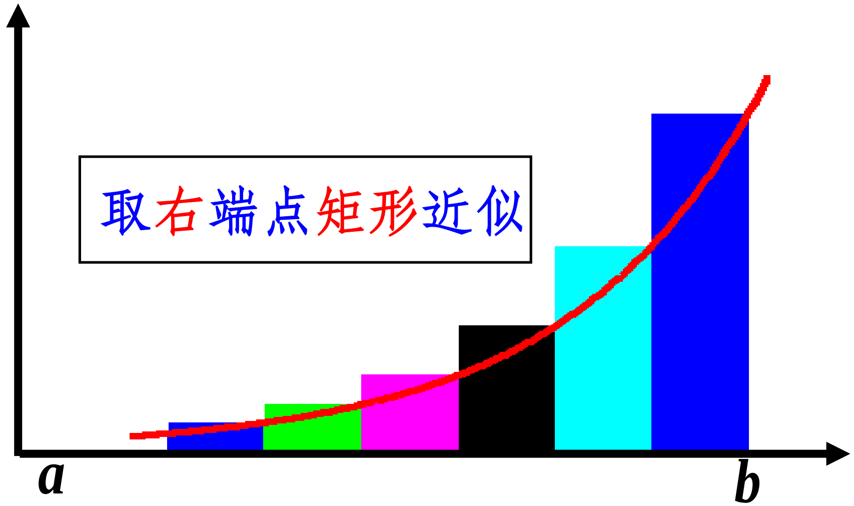


7.1 数值积分概述

7.1.3 数值积分的基本思想

分割、近似、求和





问题：

无论是是左端点近似或右端点近似，什么样的求积公式误差可能会比较小呢？

答案后续揭晓

7.2 牛顿-柯特斯求积公式

7.2.1 引言

若取插值多项式为*Lagrange*多项式，得到

$$Q(f)=\int_a^b \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)dx=\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b l_k(x)dx\right) f(x_k)$$

记$A_k=\int_a^b l_k(x)dx, k=0,1,2,\ldots,n$，有

$$Q(f)=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

误差

$$E(f)=I(f)-Q(f)\ =\int_a^b R_n(x)dx=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)dx$$

7.2 牛顿-柯特斯求积公式

非常重要

7.2.1 引言

由$A_k=\int_a^b l_k(x)dx$确定的A_k仅与节点$x_i(i=0,1,\dots,n)$的选择有关,

与被积函数$f(x)$无关, 若节点$x_i(i=0,1,2,\dots,n)$满足关系

$a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$,求积系数由$A_k=\int_a^b l_k(x)dx$确定,

则此种方法形成的计算$I(f)$的求积公式$Q(f)$称为内插求积公式

若被积函数$f(x)$是不超过n次的多项式,则$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$,则有$E(f)=0$

即$I(f)=Q(f)$

7.2 牛顿-柯特斯求积公式

7.2.2 代数精度

非常非常重要！！！

定义7.1. 如果对任一不超过m次的多项式$p_m(x)$，内插求积公式$Q(f)$总有$I(p_m)=Q(p_m)$，而对某一个$m+1$次多项式$p_{m+1}(x)$，$I(p_{m+1})\neq Q(p_{m+1})$

则称此求积公式的代数精度为m，或称此公式具有m次代数精度

❑ **要验证一个求积公式具有 m 次代数精度，只需验证对 $f(x)=1, x, x^2, \ldots, x^m$ 精确成立，但对 $f(x)=x^{m+1}$ 不精确成立即可，即：**

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^k = \int_a^b x^k \, dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} & (k=0, 1, \ldots, m) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^{m+1} \neq \int_a^b x^{m+1} \, dx = \frac{b^{m+2}-a^{m+2}}{m+2} \end{cases}$$

性质7.1: 求积公式有m次代数精度的充要条件为(*)式对$f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^m$精确成立，但对$f(x) = x^{m+1}$不精确成立.

简证：(*)式对$f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^m$精确成立，但对$f(x) = x^{m+1}$不精确成立, 则对于任意$m$次多项式

非常非常重要

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= a_0\int_a^b 1\mathrm{d}x + a_1\int_a^b x\mathrm{d}x + \ldots a_m\int_a^b x^m\mathrm{d}x \\
&= a_0\sum_{i=0}^{n}\omega_i \cdot 1 + a_1\sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i + \ldots + a_m\sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^m \\
&= \sum_{i=0}^{n}\omega_i a_0 + \sum_{i=0}^{n}\omega_i a_1 x_i + \ldots + \sum_{i=0}^{n}\omega_i a_m x_i^m \\
&= \sum_{i=0}^{n}\omega_i (a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^m) = \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)
\end{aligned}$$

从而，求积公式有m次代数精度。

7.2.2 代数精度

非常重要

由于 n 次拉格朗日插值对 $f(x)=1, x, x^2, \dots, x^n$ 精确成立，所以 n 次插值型求积公式的代数精度至少为 n 次。

反之，如果求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$ 的代数精度至少为 n 次，则它必定是插值型的。

简证:求积公式对n次拉格朗日插值基函数 $l_k(x)$精确成立，即有

$$\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n}\omega_i l_k(x_i) \xrightarrow{l_k(x_i)=\delta_{ki}} \omega_k = \int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$$

定理 7.1 求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$ 至少具有 n 次代数精度的充要条件是：它是插值型的。

❑ 例7.1：试确定系数 ω_i，使得下面的求积公式具有至少2次代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1)$$

非常重要

解：将 $f(x) = 1, x, x^2$ 代入求积公式，使其精确成立得

$$\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = \int_{-1}^{1} 1dx = (1^1 - (-1)^1)/1 = 2 \\ -\omega_0 \qquad + \omega_2 = \int_{-1}^{1} xdx = (1^2 - (-1)^2)/2 = 0 \\ \omega_0 \qquad + \omega_2 = \int_{-1}^{1} x^2dx = (1^3 - (-1)^3)/3 = 2/3 \end{cases}$$

奇函数在对称区间的积分为0

解得 ω_0 =1/3, ω_1 =4/3, ω_2 =1/3，所以求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx [f(-1) + 4f(0) + f(1)]/3$$

代数精度为2次吗？

易验证该公式对 $f(x) = x^3$ 也精确成立，但对 $f(x) = x^4$ 不精确成立，所以此求积公式具有 3 次代数精度。

7.2 牛顿-柯特斯求积公式

在以上公式中，节点x_k按等距分布，令

$$h=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+kh,\ k=0,1,2,\cdots,n.$$

则称内插求积公式为$Newton-Cotes$公式

通常取n=1, 2, 3, 4等值，那么

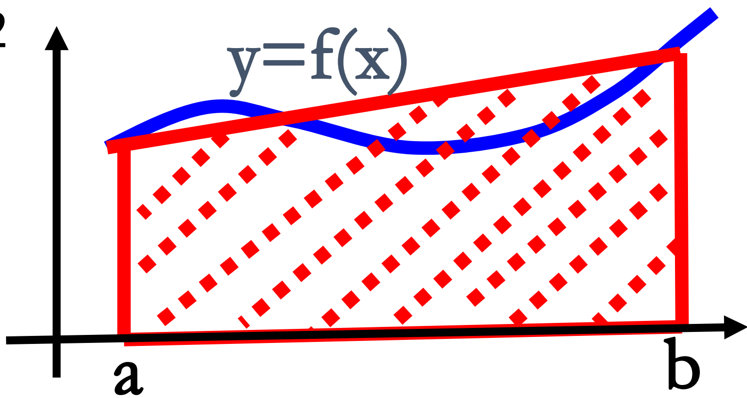
(1)$n=1$ 则$x_0=a, x_1=b$ 插值函数公式为

$$p_1(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

由$A_k=\int_a^b l_k(x)dx, k=0,1,2,\ldots,n$，可求得$A_0=A_1=\dfrac{b-a}{2}$

求积公式为

$$Q(f)=T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$



称为梯形求积公式

7.2 牛顿-柯特斯求积公式

定理7.3 设$f''(x)$在$[a,b]$上连续，则梯形求积公式的误差是

$$E_1=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta),a<\eta<b$$

证明：

$$E_1=\int_a^b R_1(x)dx=\int_a^b f[a,b,x](x-a)(x-b)dx$$

由于$f''(x)$存在，可知，关于x的二阶差商$f[a,b,x]$连续

在$[a,b]$上，有$(x-a)(x-b)\le 0$，由积分中值定理，差商性质2，知

存在$\eta\in(a,b)$，使

$$E_1=\int_a^b f[a,b,x](x-a)(x-b)dx$$

$$=f[a,b,\xi]\int_a^b (x-a)(x-b)dx \quad \xi\in(a,b)$$

$$=-\frac{1}{12}f''(\eta)(b-a)^3 \qquad \eta\in(a,b)$$

7.2 牛顿-柯特斯求积公式

$$(2) n=2 \quad 则 h=\frac{b-a}{2}, x_0=a, x_1=\frac{a+b}{2}, x_2=b$$

插值多项式为

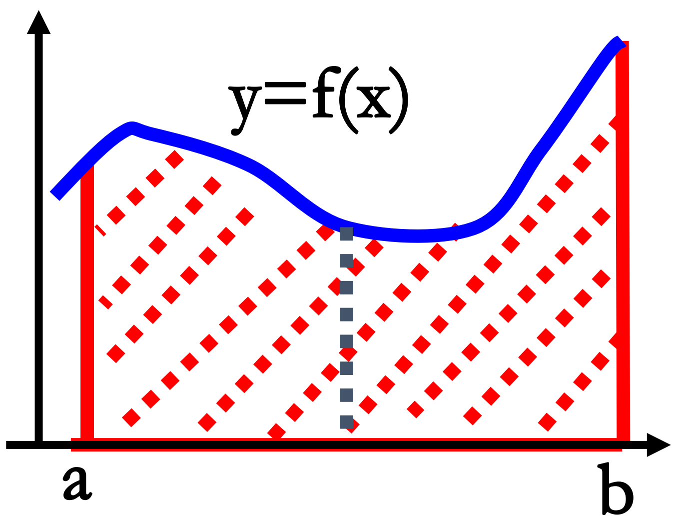
$$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

可求得 $A_0=\frac{h}{3}, A_1=\frac{4h}{3}, A_2=\frac{h}{3}$

求积公式为

$$Q(f)=S_1=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$



称为Simpson（辛普森）求积公式

定理7.4 设$f^{(4)}(x)$在$[a,b]$上连续, 则Simpson求积公式的误差是

$$E_2=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta),a<\eta<b$$

证明:取 $\mathrm{R}(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$

则 $\mathrm{E}_2=\int_a^b\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx$

$$\overset{x-a=t}{\underset{dx=dt}{=}}\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_0^h t\left(t-\frac{b-a}{2}\right)^2(t-(b-a))dt$$

$$=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\left[\frac{32}{5}h^5-16h^5-4h^5+\frac{40}{3}h^5\right]\Bigg|_0^h$$

$$=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)$$

7.2 牛顿-柯特斯求积公式

(3) n=3，则 $h=\frac{b-a}{3}$, $x_0=a$, $x_1=\frac{2a+b}{3}$, $x_2=\frac{a+2b}{3}$, $x_3=b$.

插值多项式为

$$p_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3)$$

可求得 $A_0=\frac{3h}{8}$, $A_1=\frac{9h}{8}$, $A_2=\frac{9h}{8}$, $A_3=\frac{3h}{8}$.

求积公式为

$$Q(f)=S_{3/8}=\frac{b-a}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{2b+a}{3}\right)+f(b)\right]$$

称为Simpson（辛普森）$\frac{3}{8}$ 求积公式

定理7.5 设 $f^{(4)}(x)$在[a,b]上连续，则Simpson $\frac{3}{8}$求积公式分误差是

$$E_3 = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\eta),\ a < \eta < b.$$

证明： 作业7.0.

课堂作业

分别求出梯形求积公式、Simpson求积公式以及Simpson $\frac{3}{8}$求积公式的代数精度。