回 顾

第四章 插值法

4.1 引言

4.2 多项式插值

4.3 拉格朗日插值

4.4 均差与牛顿插值

4.5 埃尔米特插值

4.6 分段插值

4.7 三次样条插值

4.2 多项式插值

回顾

取 $\Phi = P_n := \text{span}\left\{1, x, x^2, \cdots, x^n\right\}$，即

$$P_n = \left\{\varphi(x) | \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,\ a_i \in \mathbf{R},\ 0 \le i \le n\right\}$$

插值区间　插值节点

定义4.1　设 $y = f(x)$ 在区间[a,b]上有定义，且已知它在 n+1个互异点 $a \le x_0 < x_1 \ldots < x_n \le b$ 上的函数值 y_0, $y_1, \ldots, y_n$，若存在一个次数不超过 n 次的多项式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

满足条件

插值条件

$$p(x_i) = y_i \quad (i = 0, \ldots n)$$

则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次插值多项式。

4.3 拉格朗日（Lagrange）插值　回顾

定义4.2 若存在一个次数为 n 的多项式 $l_k(x)$，在n+1个节点 $x_0, \ldots, x_n$ 上满足：

$$l_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

则称 $l_k(x)$ 为节点 $x_0, \ldots, x_n$ 上的拉格朗日插值基函数。

- 设 $f(x)$ 的 n 次插值多项式为

$$p(x) = a_0 l_0(x) + a_1 l_1(x) + \cdots + a_n l_n(x)$$

满足插值条件：$p(x_i) = y_i \ (i = 0, \ldots n)$

将 $x_0, \ldots, x_n$ 分别代入即可得：$a_i = y_i \ (i = 0, \ldots n)$

所以 $p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x)$

称为拉格朗日插值多项式，记作 $L_n(x)$，即

下面我们介绍如何构造 $l_k(x),\ k=0,1,2,\cdots,n.$

回顾

根据点斜式，过点(x_0,y_0)和(x_1,y_1)的方程可写为

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0),$$

变形可得：

$$y=y_0\underbrace{\frac{x-x_1}{x_0-x_1}}_{l_0}+y_1\underbrace{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}_{l_1}.$$

与节点有关，但与$f(x)$无关.

- 由构造法可得

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$k=0,1,2,\ldots,n$$

- 可以证明 $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ 线性无关，即它们构成线性空间 $P_n(x)$ 的一组基。

回顾

4.4 均差与牛顿插值

牛顿插值的格式

- 将*Lagrange*插值公式改写成

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n\prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)$$

- 为保证它是满足插值条件$P_n(x_i)=y_i$，需且只需满足

$$\begin{cases} y_0=P_n(x_0)=a_0 \\ y_1=P_n(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0) \\ y_2=P_n(x_2)=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) \\ \cdots \\ y_n=P_n(x_n)=a_0+a_1(x_n-x_0)+a_2(x_n-x_0)(x_n-x_1)+\ldots \\ +a_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}) \end{cases}$$

问题 **怎样确定参数** $a_0,\ldots,a_n$ ？

$$a_0 = f(x_0)$$

回顾

$$a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)} = f[x_0, x_1, x_2]$$

一般，用数学归纳法可证明

$$a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \quad (k = 0,1,\cdots,n)$$

所以n次牛顿(Newton)插值公式为

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1 \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

其余项

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1 \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

4.5 埃尔米特（Hermite）插值 回顾

- 拉格朗日和牛顿插值多项式的插值条件只要求在插值节点上，插值函数与被插值函数的函数值相等，即$L_n(x_i)=f(x_i)$和$N_n(x_i)=f(x_i)$。

- 有时，为保证插值函数能更好地和原来的函数相重合，不但要求“过点”，即两者在节点上有相同的函数值，且要求“相切”，即在节点上还有相同的导数值，或者更高阶导数也相等。

这类插值称为埃尔米特插值。

我们这里仅介绍满足条件 $H(x_i) = H(x_i)$ 和$H'(x_i) = f'(x_i)$ 的插值多项式。

4.5 埃尔米特插值 回顾

定义4.4. 已知n+1个互异点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$上的函数值$f(x_i)$和导数值$f'(x_i)$，若存在一个次数不超过2n+1的多项式H(x)，满足

$$H(x_i)=H(x_i),\ H'(x_i)=f'(x_i),\ i=0,1,2,\cdots,n, \quad (4.5.1)$$

则称H(x)为f(x)的2n+1次埃尔米特插值多项式。

式中给出了2n+2个条件，可唯一确定一个次数不超过2n+1的多项式$H_{2n+1}(x)$，采用类似于拉格朗日插值多项式基函数的方法，求出埃尔米特多项式$H_{2n+1}(x)$。

4.6 分段插值法

在区间[a, b]上用插值多项式P逼近函数f时，f和P在每个节点上的差异(理论上)应该为零。自然，我们期望在一切中间点上也能很好地逼近f. 根据插值多项式余项公式，插值节点越多，一般说来误差越小，函数逼近越好，但这也不是绝对的。因为余项的大小既与插值节点的个数有关，也与函数f(x)的高阶导数有关。换句话说，适当地提高插值多项式的次数，有可能提高计算结果的准确程度，但并非插值多项式的次数越高越好。

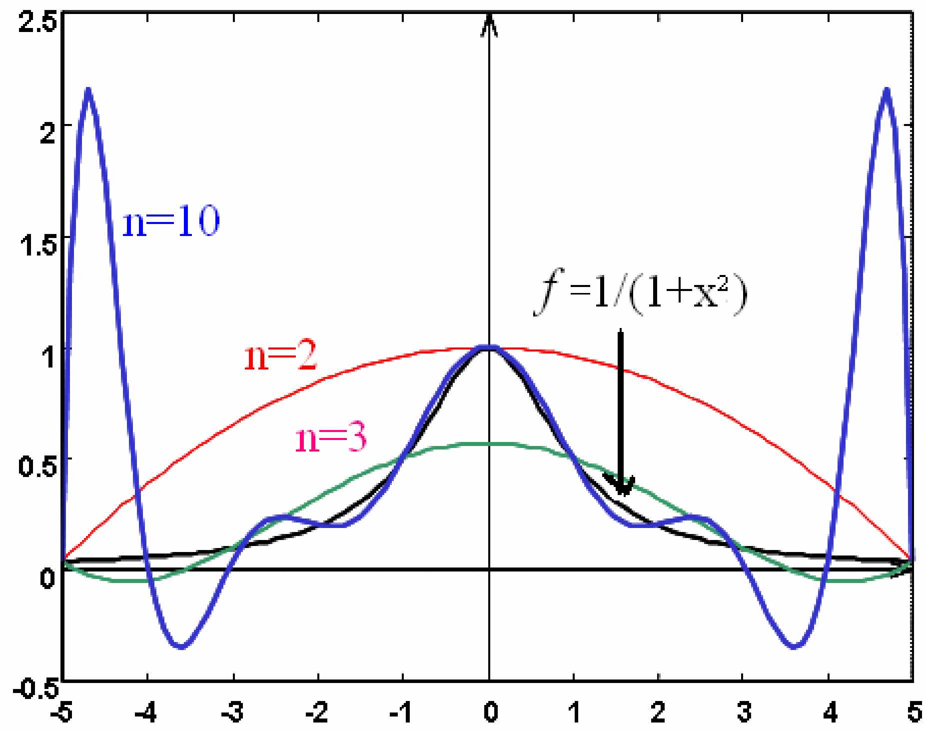
但上述的期望不可能实现的。当认识到这一点时，在数学界曾引起强烈的震动。

This is 为什么要研究分段插值

- **考察函数**

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad -5\le x\le 5$$

非常重要



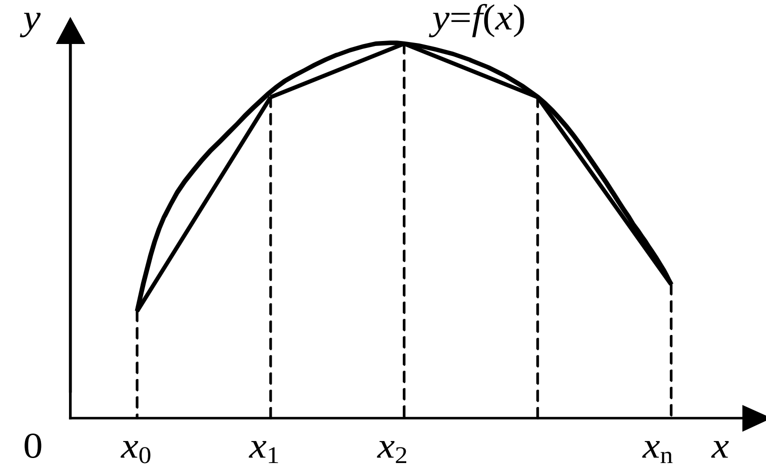
将区间[-5,5]分成n等分，以$P_n(x)$表示取$n+1$个等分的插值多项式，右上图给出了$P2(x)$、$P3(x)$、$P10(x)$的图象，可以看出：随着插值节点数增加，插值多项式的次数也相应增加，而对于高次插值时，**$P_n(x)$在两端会出现激烈的振荡**，带来数值不稳定；越靠近端点逼近的效果越差(Runge现象)。

该现象表明，在大范围内使用高次插值，逼近的效果往往是不理想的。因此，既要增加插值结点，减小插值区间，又要不增加插值多项式的次数以减少误差，我们可以采用分段插值的办法。

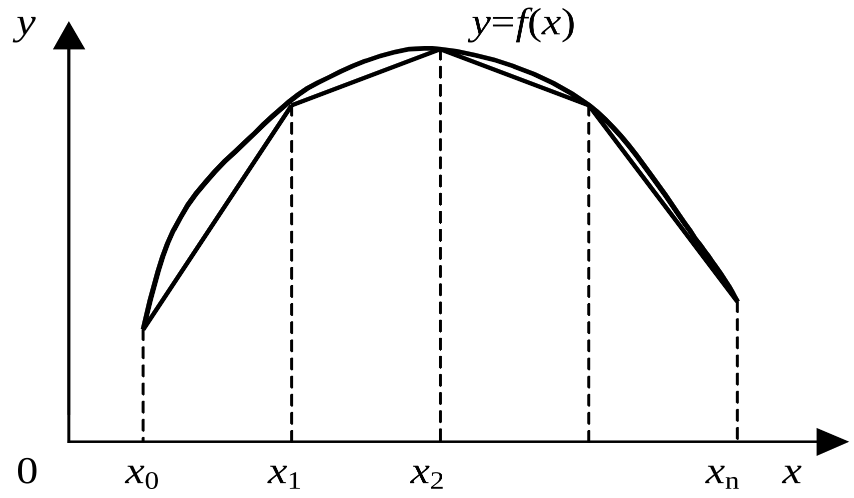
4.6.1 高次插值的龙格现象

另外，从舍入误差来看，高次插值误差的传播也较为严重。在一个节点上产生的舍入误差会在计算中不断扩大，并传播到其它节点上。

因此，为克服在区间上进行高次插值所造成的龙格现象，采用分段插值的方法，将插值区间分成若干个小的区间，在每个小区间进行线性插值，然后相互连接，用连接相邻节点的折线逼近被插函数，这种把插值区间分段的方法就是分段线性插值法。



□ 在处理实际问题时，总是希望将所得到的数据点用得越多越好。最简单的方法是用直线将函数值点直接连接。



□ 分段低次插值

基本思想：**用分段低次多项式来代替单个多项式。**

具体作法：**(1) 把整个插值区间分割成多个小区间；**

(2) 在每个小区间上作低次插值多项式；

(3) 将所有插值多项式拼接整一个多项式。

优点：**公式简单、 运算量小、稳定性好、收敛性 …**

缺点：**节点处的导数不连续，失去原函数的光滑性。**

重要

4.6.2 分段线性插值公式

非常
重要

若用插值基函数表示，则在[a,b]上

$$S(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i) \quad (a\le x\le b) \qquad (5.28)$$

其中，$l_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1}\le x\le x_i\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x_i\le x\le x_{i+1}\\ 0, \quad x\in[a,b], x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$

显然，$l_i(x)$ 是分段线性连续函数，且 $l_i(x_k)=\begin{cases}1, & i=k\\0, & i\ne k\end{cases}$

称S(x)为f(x)的分段线性插值函数。

由线性插值的余项估计式知，f(x)在每个子段$[x_i,x_{i+1}]$上有误差估计式

$$|f(x)-S(x)|\le\frac{h_i^2}{8}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f''(x)|$$

但不光滑！

其中，$h_i=x_{i+1}-x_i$

例4.8 已知函数 $y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在区间[0, 5]上取等距插值节点（如下表），求区间上分段线性插值函数，并利用它求出 $f(4.5)$ 近似值。

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1	0.5	0.2	0.1	0.05882	0.03846

解：在每个分段区间 $[k,k+1]$ 上，

$$P(x)=\frac{x-(k+1)}{k-(k+1)}y_k+\frac{x-k}{(k+1)-k}y_{k+1}$$

$$=-y_k(x-k-1)+y_{k+1}(x-k)$$

非常重要

$$P(x)=\begin{cases}-(x-1)+0.5x, & x\in[0,1]\\ -0.5(x-2)+0.2(x-1), & x\in[1,2]\\ -0.2(x-3)+0.1(x-2), & x\in[2,3]\\ -0.1(x-4)+0.05882(x-3), & x\in[3,4]\\ -0.05882(x-5)+0.03846(x-4), & x\in[4,5]\end{cases}$$

$$P(4.5)=-0.05882\times(4.5-5)+0.03846\times(4.5-4)=0.04864$$

实际值：$f(4.5)=0.04705882352941$

当n=7时，$P(4.5)$=0.04762270321996

当n=10时，$P(4.5)$=0.04705882352941

由此可见，对于光滑性要求不高的插值问题，分段线性插值的效果非常好！计算也简单！

根据拉格朗日一次插值函数的余项，可以得到分段线性插值函数的插值误差估计：

对$x\in[a, b]$，当$x\in[x_k, x_{k+1}]$时，

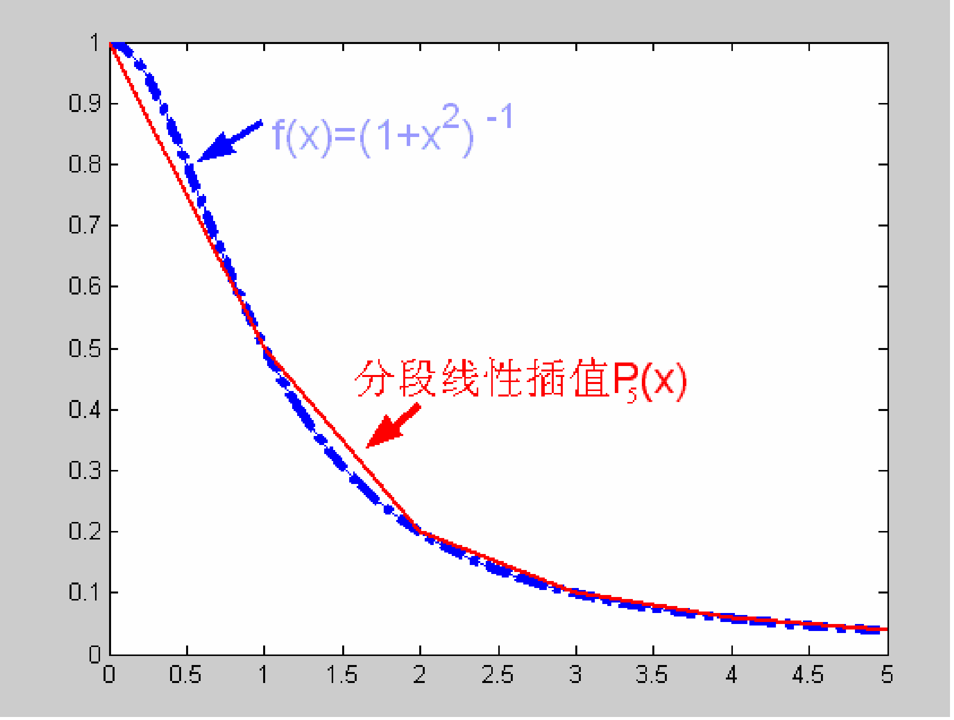
$$R(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_k)(x-x_{k+1}) \quad 则 \quad |R(x)|\le\frac{h^2}{8}M$$

其中

$$h=\max_{0\le k\le n-1}|x_{k+1}-x_k| \qquad M=\max_{x\in(a,b)}|f''(x)|$$

于是可以加密插值结点，缩小插值区间，使h减小，从而减小插值误差。

非常重要



例4.9 已知f(x)在4个节点上的函数值如下表：

x_i	30	45	60	90
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

非常重要

求f(x)在区间[30,90]上的分段连续线性插值函数S(x)

解 将插值区间[30,90]分成连续的三个小区间：[30,45], [45,60], [60,90]，则S(x)在三个区间上的线性插值分别为：

$$S(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)=\frac{\sqrt{2}-1}{30}x+\frac{3}{2}-\sqrt{2}$$

$$S(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{30}x+2\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$S(x)=\frac{x-x_3}{x_2-x_3}f(x_2)+\frac{x-x_2}{x_3-x_2}f(x_3)=\frac{2-\sqrt{3}}{60}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}-2$$

非常重要

将各小区间的线性插值函数连接在一起，得

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}-1}{30}x+\dfrac{3}{2}-\sqrt{2} & 30\le x\le 45\\ \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{30}x+2\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}\sqrt{3} & 45\le x\le 60\\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{60}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-2 & 60\le x\le 90\end{cases}$$

4.7 三次样条插值

高次插值函数可以保证曲线的光滑性，但计算量大，有剧烈振荡，数值稳定性差；采用分段线性插值，虽然计算简单，但在分段点上仅连续而不光滑(导数不连续)，这往往不能满足某些工程技术的高精度要求。如在船体、飞机等外形曲线的设计中，不仅要求曲线连续，而且要有二阶光滑度，即有连续的二阶导数。

样条函数可以同时解决这两个问题，使插值函数既是低阶分段函数，又是光滑的函数。

课本的第5.3节

4.7.1 样条函数的概念

重要

1： 在[a, b]上取n+1个插值结点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,已知函数 $y=f(x)$ 在这n+1个点的函数值为 $y_k=f(x_k)$, 则在[a, b]上函数$y=f(x)$的m次样条插值函数$S(x)$满足：

(1) $S(x)$在(a, b)上直到m-1阶导数连续；

(2) $S(x_k)=y_k$， $k=0,1,\cdots,n$；

(3) 在区间 $[x_k,x_{k+1}](k=0,1,\cdots,n-1)$ 上， $S(x)$是m次多项式。

从数学上看，样条曲线实际上是由分段曲线“装配”而成的，且在连接点处具有边疆的二阶导数。样条曲线由于具有非常好的光滑性，从数学上加以概括，就得到样条函数这一概念。

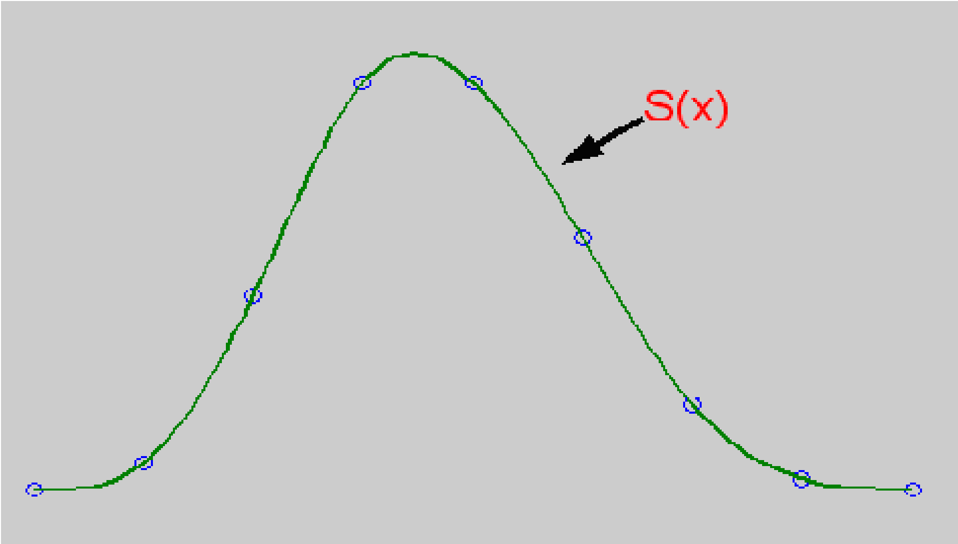
4.7.2 三次样条插值公式

由样条函数的定义可知，三次样条插值函数S(x)是一个分段三次多项式。要求出S(x)，在每个小区间[x_k,x_{k+1}]上要确定4个待定参数。若用 $s_k(x)$表示它在第k个子区间[x_k,x_{k+1}]上的表达式，则

$$s_k(x) = a_{k0}+a_{k1}x+a_{k2}x^2+a_{k3}x^3 ,\ k=0,1,\cdots,n-1 \quad \text{(4n个待定系数)}$$

其中四个待定系数为a_{k0},a_{k1},a_{k2},a_{k3}，子区间共有n个，所以要确定S(x)需要4n个待定系数。

另一方面，要求分段多项式S(x)及其一阶、二阶导数在整值区间[a,b]上连续，则要求它们在各个子区间的连接点x_0,x_1,$\cdots$$x_{n-1}$上连续。



重要

非常重要

4.7.2 三次样条插值公式

定义4.5 设函数S(x)定义在区间[a,b]上，给定n+1个节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，和一组与之对应的函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots f(x_n)$，若函数S(x)满足：

(1)在每个节点上满足 $S(x_k)=f(x_k)$ $(k=0,1,\cdots,n)$;

(2)在[a,b]上有连续的零阶、一阶、二阶导数;

(3)在每个小区间 $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 上是一个三次多项式.

则称 $S(x)$ 为三次样条插值函数。

4.7.3 三次样条插值的存在性

已知S(x)是分段三次多项式，

由二阶导数连续，设$S''(x_k)=m_k$，$k=0,1,\cdots,n$，m_k 是未知、待定的数。

因为$S(x)$是分段三次多项式，则$S''(x)$是分段一次多项式，在每个区间$[x_k,x_{k+1}]$内，

$$S''(x)=\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}m_k+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}m_{k+1}$$

记 $h_k=x_{k+1}-x_k$，则

$$S''(x)=\frac{x_{k+1}-x}{h_k}m_k+\frac{x-x_k}{h_k}m_{k+1}$$

将上式在区间$[x_k,x_{k+1}]$上积分两次，并且由$S(x_k)=y_k$，$S(x_{k+1})=y_{k+1}$来确定两个积分常数。

当$x\in[x_k,x_{k+1}]$时，

$$S(x)=-\frac{(x-x_{k+1})^3}{6h_k}m_k+\frac{(x-x_k)^3}{6h_k}m_{k+1}-(y_k-\frac{h_k^2}{6}m_k)\frac{x-x_{k+1}}{h_k}+(y_{k+1}-\frac{h_k^2}{6}m_{k+1})\frac{x-x_k}{h_k}$$

利用$S(x)$一阶导数连续的性质，对上式求导，得：

$$S'(x)=-\frac{(x-x_{k+1})^2}{2h_k}m_k+\frac{(x-x_k)^2}{2h_k}m_{k+1}-\frac{h_k}{6}(m_{k+1}-m_k)+\frac{1}{h_k}(y_{k+1}-y_k)$$

在上式中，令$x=x_k$，得：

$$S'(x_k+0)=-\frac{h_k}{6}m_{k+1}-\frac{h_k}{3}m_k+\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}$$

将上式中的k换成 **k-1**，得$S'(x)$在$[x_{k-1},x_k]$上的表达式，用$x=x_k$代入，

$$S'(x_k-0)=\frac{h_{k-1}}{6}m_{k-1}+\frac{h_{k-1}}{3}m_k+\frac{y_k-y_{k-1}}{h_k}$$

而 $S'(x_k+0)=S'(x_k-0)$，

联立上述两式，得到关于m_k的方程：

$$\frac{h_{k-1}}{6}m_{k-1}+\frac{h_k+h_{k-1}}{3}m_k+\frac{h_k}{6}m_{k+1}=\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

两边乘以$\frac{6}{h_k+h_{k-1}}$，得：

$$\frac{h_{k-1}}{h_k+h_{k-1}}m_{k-1}+2m_k+\frac{h_k}{h_k+h_{k-1}}m_{k+1}=\frac{6}{h_k+h_{k-1}}\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}\right)$$

4.7.3 三次样条插值的存在性

上式中，等式左边含未知量 m_{k-1}，m_k，m_{k+1}，等式右边 y_{k-1}，y_k，y_{k+1} 是已知的，令

$$\lambda_k = \frac{h_{k-1}}{h_k + h_{k-1}}, \quad \mu_k = \frac{h_k}{h_k + h_{k-1}} = 1 - \lambda_k, \quad C_k = \frac{6}{h_k + h_{k-1}}\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}}\right)$$

则得：

$$\lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = C_k \quad k = 1, 2, \cdots, n-1$$

这是含有n+1个未知量 $m_0, m_1, \cdots, m_n$，共有n-1个方程组成的线性方程组。欲确定方程的解，尚缺2个方程。因此，求三次样条函数还要2个附加条件。

通常在区间端点a=x0, b=xn上各加一个条件，称为端点约束。常用端点约束有三种类型。

常用端点约束有三种类型：

类型1：给定两端点$f(x)$的一阶导数值：

$$S'(x_0) = f'(x_0), \quad S'(x_n) = f'(x_n)$$

三转角方程

类型2：给定两端点$f(x)$的二阶导数值：

$$S''(x_0) = f''(x_0), \quad S''(x_n) = f''(x_n)$$

三弯矩方程

作为特例，$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$称为自然边界条件。

满足自然边界条件的三次样条插值函数称为自然样条插值函数。

类型3：当$f(x)$是以(x_n,x_0)为周期的函数时，则要求$S(x)$也是周期函数.这时边界条件应满足

当$f(x_0)=f(x_n)$时，

$$S'(x_0) = S'(x_n), \quad S''(x_0) = S''(x_n).$$

自然样条

第一类端点约束：三转角方程

给出边界端点的一阶导数值：

$$S'(x_0)=y'_0\,,\quad S'(x_n)=y'_n。$$

利用前面已推导的公式，

当 $x\in[x_k,x_{k+1}]$ 时，

$$S'(x)=-\frac{(x-x_{k+1})^2}{2h_k}m_k+\frac{(x-x_k)^2}{2h_k}m_{k+1}-\frac{h_k}{6}(m_{k+1}-m_k)+\frac{1}{h_k}(y_{k+1}-y_k)$$

取 $k=0$， $x=x_0$， 得：

$$y'_0=-\frac{h_0}{3}m_0-\frac{h_0}{6}m_1+\frac{y_1-y_0}{h_0}$$

取 $k=n-1$， $x=x_n$， 得：

$$y'_n=\frac{h_{n-1}}{6}m_{n-1}+\frac{h_{n-1}}{3}m_n+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

移项得

具体推导过程不做要求仅供了解

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = \dfrac{6}{h_0}\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - y_0'\right) = C_0 \\ m_{n-1} + 2m_n = \dfrac{6}{h_{n-1}}\left(y_n' - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right) = C_n \end{cases}$$

具体推导过程不做要求仅供了解

于是，我们可以建立如下方程组：

$$\begin{cases} 2m_0 \quad +m_1 & = C_0 \\ \lambda_1 m_0 \quad +2m_1 \quad +\mu_1 m_2 & = C_1 \\ \quad \cdots \qquad \cdots & \\ \lambda_{n-1} m_{n-2} \quad +2m_{n-1} \quad +\mu_{n-1} m_n & = C_{n-1} \\ m_{n-1} \quad +2m_n & = C_n \end{cases}$$

其系数矩阵是严格对角占优的三对角矩阵：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

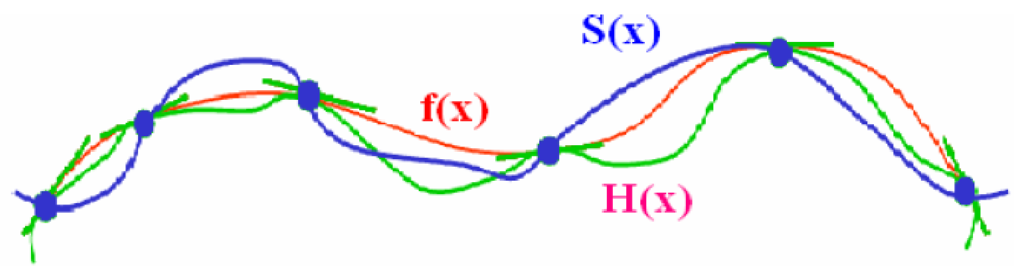
系数矩阵严格对角占优，故矩阵可逆，方程组存在唯一解。

从而可以解出 $m_0, m_1, \cdots, m_n$。解出后可以得到三次样条函数的分段表达式，

即当 $x\in[x_k,x_{k+1}]$ 时，

$$S(x)=-\frac{(x-x_{k+1})^3}{6h_k}m_k+\frac{(x-x_k)^3}{6h_k}m_{k+1}-(y_k-\frac{h_k^2}{6}m_k)\frac{x-x_{k+1}}{h_k}+(y_{k+1}-\frac{h_k^2}{6}m_{k+1})\frac{x-x_k}{h_k}$$

注：三次样条插值与Hermite插值的区别。



具体推导过程不做要求仅供了解

第二类端点约束：三弯矩方程

附加条件为 $S''(x_0)=m_0 \quad S''(x_n)=m_n$

则方程组为：

$$\begin{cases} 2m_1+\mu_1 m_2 = C_1-\lambda_1 m_0 \\ \lambda_2 m_1+2m_2+\mu_2 m_3 = C_2 \\ \lambda_3 m_2+2m_3+\mu_3 m_4 = C_3 \\ \cdots\cdots \\ \lambda_{n-2}m_{n-3}+2m_{n-2}+\mu_{n-2}m_{n-1}=C_{n-2} \\ \lambda_{n-1}m_{n-2}+2m_{n-1}=C_{n-1}-\mu_{n-1}m_n \end{cases}$$

第二类端点约束：三弯矩方程

其系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，方程组存在唯一解。

这是一个三对角矩阵，由于 $\lambda_k+\mu_k=1<2$，因而它是严格对角占优的。原方程组是个三对角方程组，可以用追赶法求解。

具体推导过程不做要求仅供了解

第三类端点约束

具体推导过程不做要求仅供了解

- 第三类端点约束： $s'(x_0) = s'(x_n)$, $s''(x_0) = s''(x_n)$

可得 $m_0 = m_n,\ \lambda_n m_1 + \mu_n m_{n-1} + 2m_n = d_n$

其中 $\lambda_n = h_1/(h_1 + h_n)\,, \mu_n = h_n/(h_1 + h_n)\,,$
$d_n = 6((y_1 - y_0)/h_1 - (y_n - y_{n-1})/h_n)/(h_1 + h_n)$

与前面的 *n*-1 个方程联立得 *n* 阶线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，方程组存在唯一解。

具体计算过程

$\boxed{\text{重要}}$

- 综上所述，满足插值条件 $s(x_j)=y_j$ 和某一类边界条件的三次样条函数存在且唯一！

- 具体计算过程
  - ✓ **根据插值条件$s(x_j)=y_j$和给定的边界条件列出相应得方程组；**
  - ✓ **解出该线性方程组的解 $m_0, m_1, \cdots, m_n$；**

    $\boxed{\textbf{具体求解方法参见第五章和第六章}}$
  - ✓ **将 $m_0, m_1, \cdots, m_n$ 代入 $s_j(x)$ 的表达式，写出三次样条函数 $s(x)$ 在整个插值区间上的分段表达式。**

例4.10 已知y=f(x)的函数值如

x	1	2	4	5
f(x)	1	3	4	2

在区间[1, 5]上求三次样条插值函数S(x)，使它满足边界条件$S''(1)=S''(5)=0.$

解 这是在第二种边界条件下的插值问题，故确定M_i(i=0, 1, 2, 3)的方程组形如三弯矩方程所示，

由已知边界条件，有$S''(x_0)=f''(x_0)=M_0=0$;

$S''(x_3)=f''(x_3)=M_3=0.$ 则得求解M_1, M_2的方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

根据给定数据和边界条件算出μ_i、λ_i、g_i，及

$h_1=1$， $h_2=2$， $h_3=1$

$f[x_0, x_1]=2$， $f[x_1, x_2]=1/2$， $f[x_2, x_3]=-2$

$\lambda_1=h_1/(h_1+h_2)=1/3$， $\mu_1=h_2/(h_2+h_1)=2/3$

$g_1=6(f[x_1, x_2]-f[x_0, x_1])/(h_1+h_2)=-3$

$g_2=6(f[x_2, x_3]-f[x_1, x_2])/(h_2+h_3)=-5$

则得方程组

$$\begin{cases} 2M_1+\dfrac{2}{3}M_2=-3 \\ \dfrac{2}{3}M_1+2M_2=-5 \end{cases}$$

解得 $M_1=-3/4$， $M_2=-9/4$

又因为 $M_0=M_3=0$

即得S(x)在各子区间上的表达式$S_i(x)$ (i=1, 2, 3)，由式(5.32)知，S(x)在区间$[x_0, x_1]$上的表达式为

$$S_1(x)=M_0\frac{(x_1-x)^3}{6h_1}+M_1\frac{(x-x_0)^3}{6h_1}+\left(y_0-\frac{M_0}{6}h_1^2\right)\frac{(x_1-x)}{h_1}+\left(y_1-\frac{M_1}{6}h_1^2\right)\frac{(x-x_0)}{h_1}$$

将$x_0=1$, $x_1=2$, $y_0=1$, $y_1=3$, $h_1=1$, $M_0=0$, $M_1=-3/4$代入上式化简后得

$$S_1(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{7}{4}x-1$$

同理，S(x)在$[x_1, x_2]$和$[x_2, x_3]$上的表达式为

$$S_2(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1$$

$$S_3(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{45}{8}x^2 + \frac{91}{4}x - 19$$

故所求的三次样条插值函数S(x)在[1，5]上的表达式为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1 & (1 \le x \le 2) \\ -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1 & (2 \le x \le 4) \\ \frac{3}{8}x^3 - \frac{45}{8}x^2 + \frac{91}{4}x - 19 & (4 \le x \le 5) \end{cases}$$

4.7.4 三次样条插值函数的求法

用三次样条绘制的曲线不仅有很好的光滑度，而且当节点逐渐加密时，其函数值在整体上能很好地逼近被插函数，相应的导数值也收敛于被插函数的导数，不会发生龙格现象。

因此三次样条在计算机辅助设计中有广泛的应用。

程序实现: SanciyangtiaoChazhi.m

```
function S=SanciyangtiaoChazhi(X,Y,dx0,dxn)
%Input  - X is the 1xn abscissa vector
% - Y is the 1xn ordinate vector
%  - dxo = S'(x0) first derivative boundary condition
%        - dxn = S'(xn) first derivative boundary
condition
%Output   - S: rows of S are the coefficients for the
cubic interpolants
% X=[0,1,2,3];  Y=[0,0.5,2,1.5];  dx0=0.2; dxn=-1;
% C=SanciyangtiaoChazhi(X,Y,dx0,dxn)
% »Í¼
% x1=0:0.01:1; y1=polyval(C(1,:),x1-X(1));
x2=1:0.01:2; y2=polyval(C(2,:),x2-X(2));
%x3=2:0.01:3; y3=polyval(C(3,:),x3-
X(3));plot(x1,y1,x2,y2,x3,y3,X,Y,'.')
N=length(X)-1;
H=diff(X);
D=diff(Y)./H;
A=H(2:N-1);
B=2*(H(1:N-1)+H(2:N));
C=H(2:N);
C=H(2:N);
U=6*diff(D);
%Clamped spline endpoint constraints
B(1)=B(1)-H(1)/2;
U(1)=U(1)-3*(D(1)-dx0);
B(N-1)=B(N-1)-H(N)/2;
U(N-1)=U(N-1)-3*(dxn-D(N));

for k=2:N-1
   temp=A(k-1)/B(k-1);
   B(k)=B(k)-temp*C(k-1);
   U(k)=U(k)-temp*U(k-1);
end

M(N)=U(N-1)/B(N-1);

for k=N-2:-1:1
   M(k+1)=(U(k)-C(k)*M(k+2))/B(k);
end

%Clamped spline endpoint constraints

M(1)=3*(D(1)-dx0)/H(1)-M(2)/2;
M(N+1)=3*(dxn-D(N))/H(N)-M(N)/2;

for k=0:N-1
   S(k+1,1)=(M(k+2)-M(k+1))/(6*H(k+1));
   S(k+1,2)=M(k+1)/2;
   S(k+1,3)=D(k+1)-
H(k+1)*(2*M(k+1)+M(k+2))/6;
   S(k+1,4)=Y(k+1);
end
```

```
34 –    U=6*diff(D);
```

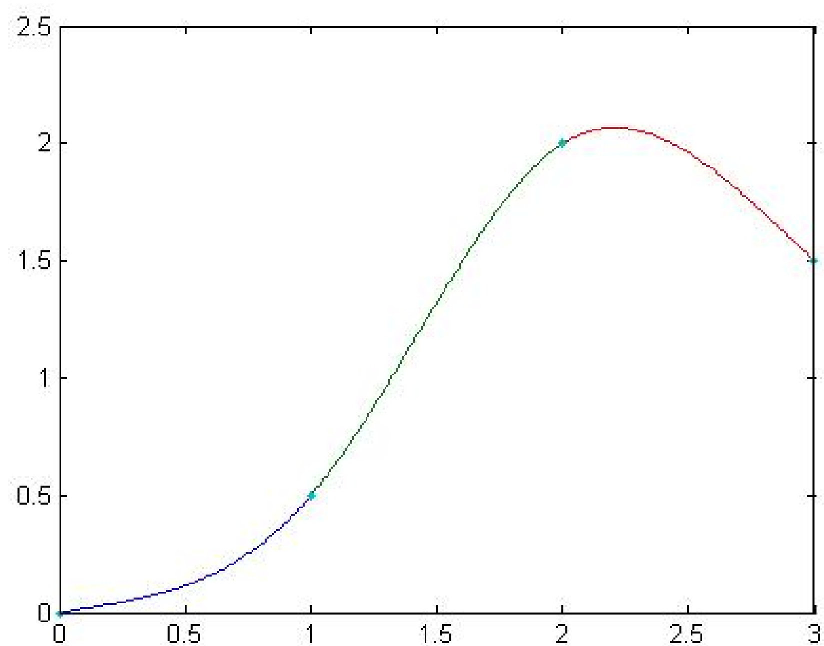
命令行窗口

```
>> X=[0,1,2,3];  Y=[0,0.5,2,1.5];  dx0=0.2; dxn=-1;
C=SanciyangtiaoChazhi(X,Y,dx0,dxn)
% 画图
 x1=0:0.01:1; y1=polyval(C(1,:),x1-X(1));  x2=1:0.01:2; y2=polyval(C(2,:),x2-X(2));
x3=2:0.01:3; y3=polyval(C(3,:),x3-X(3)); plot(x1,y1,x2,y2,x3,y3,X,Y,'.')

C =

    0.4800   -0.1800    0.2000         0
   -1.0400    1.2600    1.2800    0.5000
    0.6800   -1.8600    0.6800    2.0000

>>
```



作业

2. 设有多项式 $S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$。

(a) 证明根据条件 $S(1)=3$, $S'(1)=-4$, $S(2)=1$ 和 $S'(2)=2$ 可得到如下方程组：

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 3 \\
a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= -4 \\
a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 1 \\
a_1 + 4a_2 + 12a_3 &= 2
\end{aligned}
$$

(b) 求解(a)中的方程组，并根据结果画出三次多项式曲线。

4. 求三次紧压样条曲线，经过点$(-3,2)$，$(-2,0)$，$(1,3)$和$(4,1)$，而且一阶导数边界条件 $S'(-3)=-1$ 和 $S'(4)=-1$。

算法与程序

1. 推广研究另外两种端点约束的Matlab程序。

本章教学要求及重点难点

- 理解插值的基本概念
- 掌握Lagrange插值法、Newton插值法、Hermite插值法、三次样条插值
- 掌握各种插值法的插值余项及误差分析
- 掌握Lagrange插值法、Newton插值法的算法设计思想
- 重点：Lagrange插值法、Newton插值法、Hermite插值法以及三次样条插值
- 难点：计算各种插值法的插值余项及误差分析

课堂作业

验证Runge现象。即编程实现第10页PPT右上角的图。

注：用QQ软件自带的作业功能上交课程作业

作业上交需要求在下周一下午上课前完成