静电场中的电介质

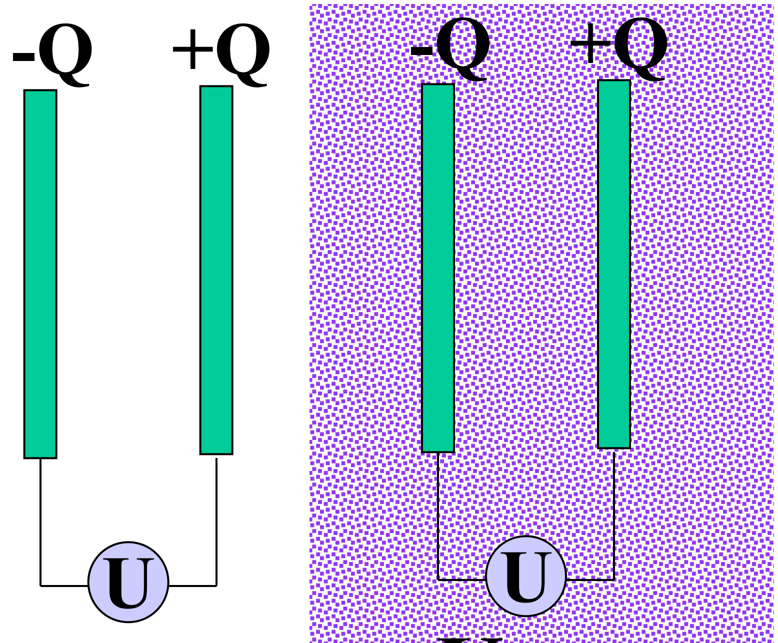
一、 电介质的极化

充满电介质前后场强之间的关系为：

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \qquad \varepsilon_r \geq 1$$

相对介电常数

$\vec{E}_0 > \vec{E}$



$U_0 > U$

场强为什么减小了？

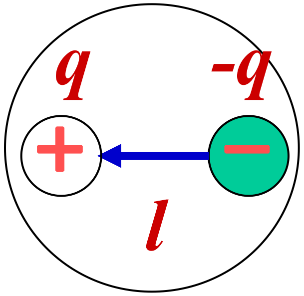
与静电场中的导体比较

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'}$$

介质中　真空中　介质中某种电荷分布产生

$\because \vec{E}'$ 与 $\vec{E}_0$反向　$\therefore \vec{E} < \vec{E}_0$

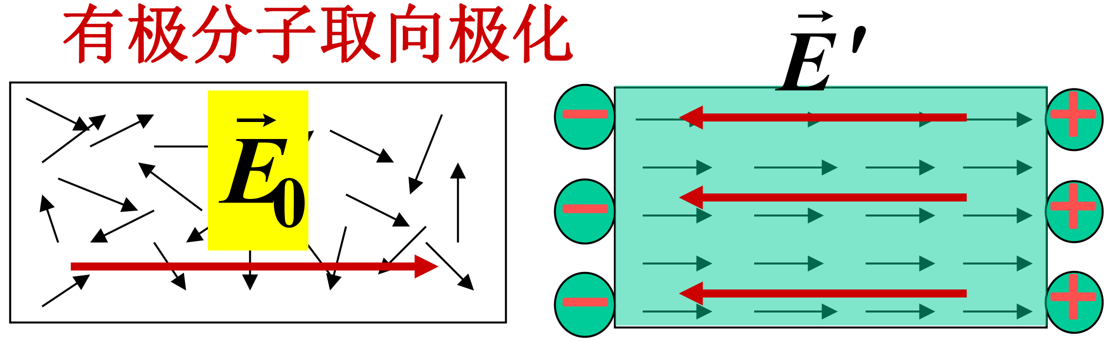
1、 电介质的极化机制和图像



1、分子的正负电荷重心不重合时，存在分子固有电矩，用 $\vec{p}$ 表示，大小等于 ql，称为有极分子。

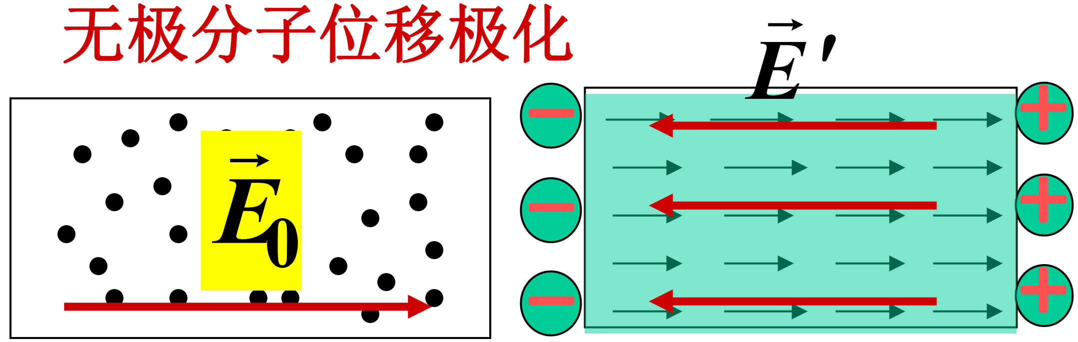
2. 外加电场 $\vec{E}_0$ 时，有极分子的分子电矩发生转动，沿电场同方向排列，

有极分子取向极化



3. 外加电场时，无极分子的正负电荷重心分离，产生的分子感生电矩, 方向与电场同向，

无极分子位移极化



4. 极化会使得在介质表面出现极化电荷分布；外电场越强，面极化电荷越多。

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' < \vec{E}_0$$

5. 极化电荷改变电场的分布

2、 电极化强度矢量

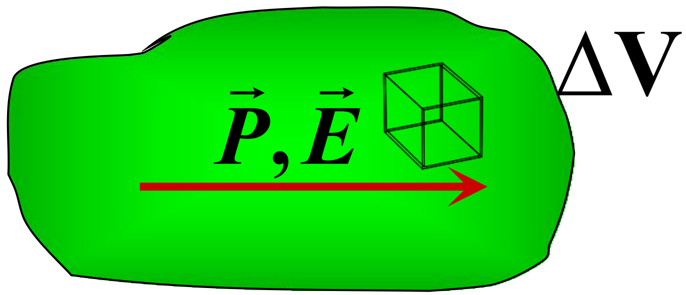
极化强度矢量 $\vec{P}$ 定义为单位体积分子电矩的矢量和，

外加电场越强，极性分子电矩排列越整齐；极化强度越大；

定义

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

单位 C/m^2



以下说法正确的是：

A导体和介质区别在导体内有大量电子

B导体和介质区别在导体内有大量自由电子

C极化的介质内无束缚（极化）电荷

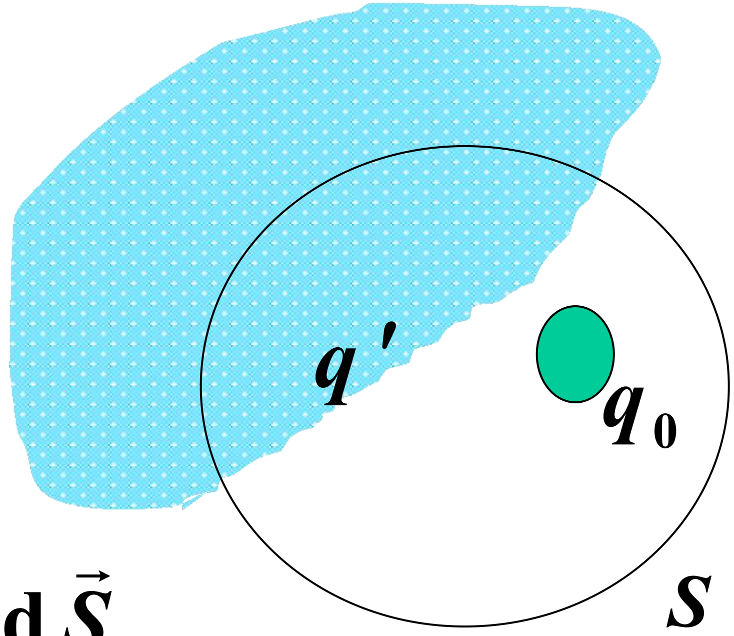
D极化的介质内无净束缚（极化）电荷

E介质表面有净束缚（极化）电荷分布

F极化介质表面有净束缚（极化）电荷分布

二 $\vec{D}$ 的高斯定律

有介质存在时，电场由自由电荷与极化电荷共同决定



由 $\vec{E}$ 的高斯定理

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0}}$$

$$q' = -\oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{\oint_S \varepsilon_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0 + q'} \longrightarrow \boxed{\oint_S \left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0}$$

令 $\boxed{\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \vec{D}}$ 称电位移矢量，C/m²

则 $\vec{D}$ 的高斯定理 $\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0}$

有介质存在时静电场的求解：

1. 根据自由电荷分布由高斯定理求 $\vec{D}$

电场分布具有对称性 $\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_{0内}}$

2. 根据 $\vec{D}$ 求 $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}}$$

例1. 一带电金属球，半径R，带电量q，浸在一个大油箱里，油的相对介电常数为ε_r，求球外电场分布及贴近金属球表面的油面上的极化电荷总量。

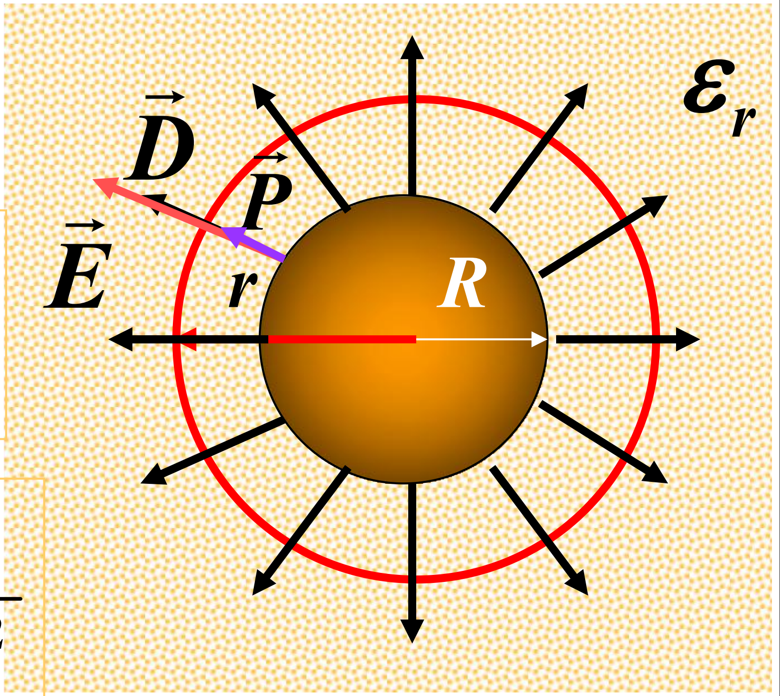
解：1 根据自由电荷分布求 $\vec{D}$

电场对称分布，取半径 r 的同心球面

$$\oint_{4\pi r^2} \vec{D}\cdot d\vec{S} = q \quad \rightarrow \quad \vec{D} = \frac{q\hat{r}}{4\pi r^2}$$

2 根据 $\vec{D}$求 $\vec{E}$

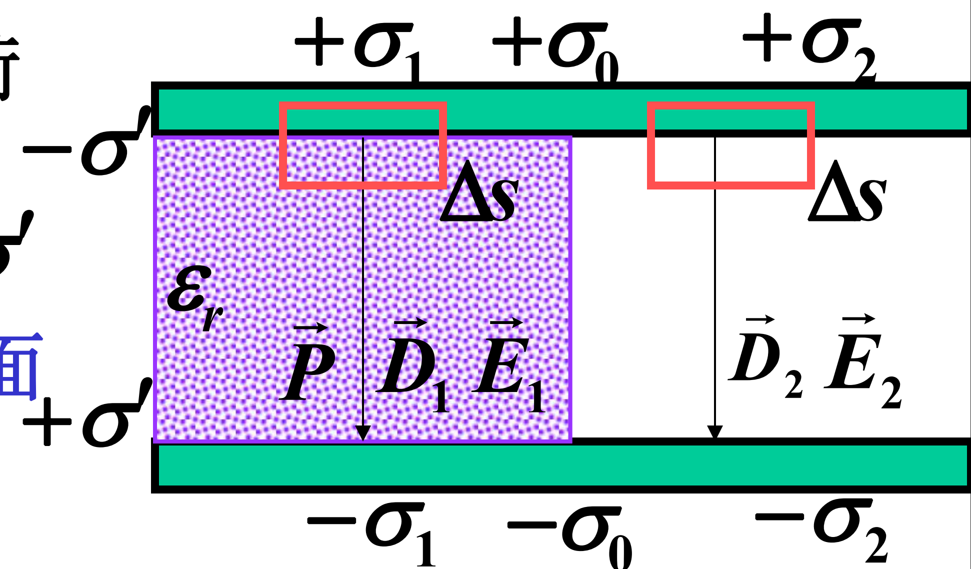
$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{q\hat{r}}{4\varepsilon_0\varepsilon_r\pi r^2}$$



例2. 两块平行金属板原为真空，分别带有等量异号电荷$+\sigma_0$、$-\sigma_0$，两板间电压为U_0，保持两板上电量不变，将板间一半空间充以相对介电常数ε_r的电介质。

求板间电压及电介质上下表面的束缚电荷面密度。

解：设介质部分金属板电荷面密度 σ_1，真空部分σ_2；介质表面束缚电荷面密度σ'



在介质部分取如图所示高斯面

$$\oint \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sigma_1 \Delta s \rightarrow \boxed{D_1 = \sigma_1}$$

$$\boxed{E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} \quad \boxed{P = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_1}$$

同理 $\boxed{D_2 = \sigma_2}$ $\boxed{E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}}$

两部分板间电压相等

（金属板是等势体）

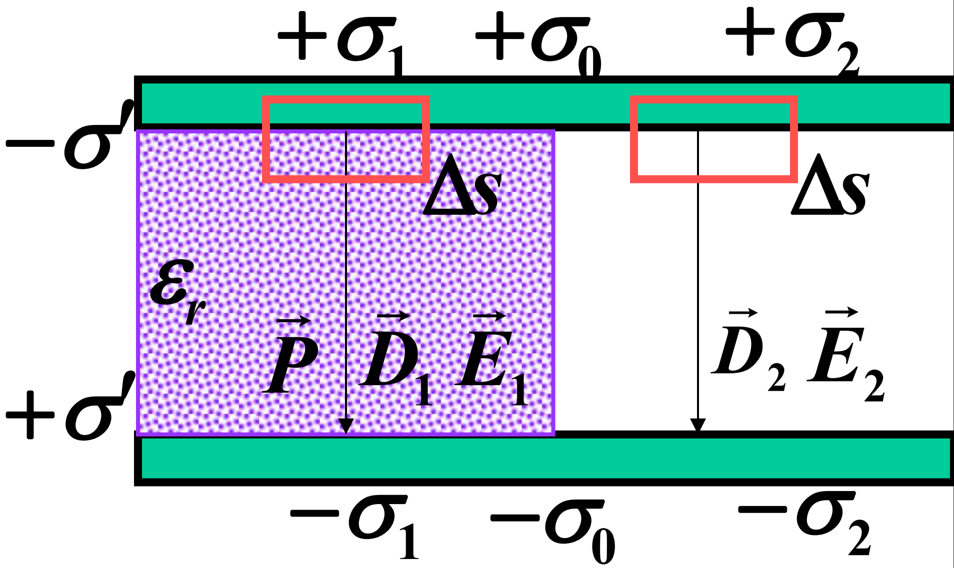
$\because U = Ed$

$\therefore E_1 = E_2$

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}}$$

电荷守恒：

$$\boxed{\sigma_1+\sigma_2=2\sigma_0}$$

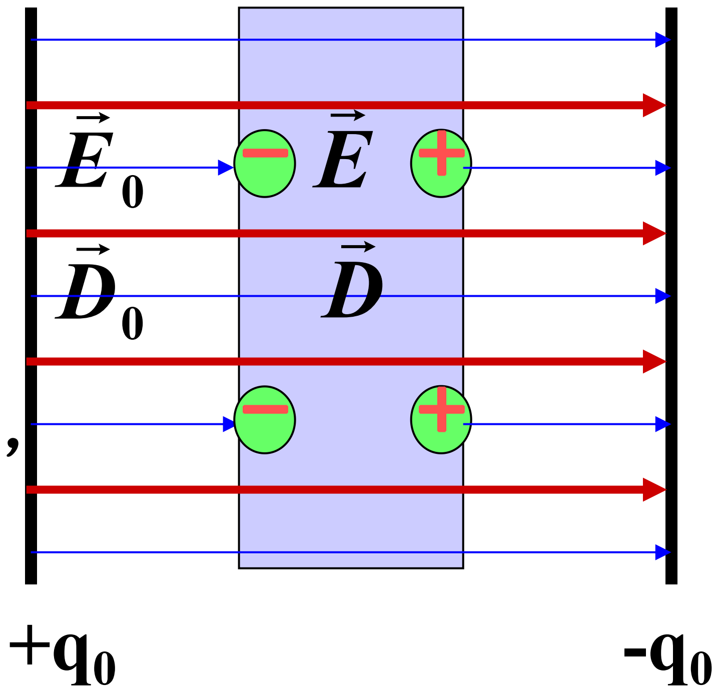


$$\boxed{\sigma_1=\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}\sigma_0} \qquad \boxed{\sigma_2=\frac{2}{\varepsilon_r+1}\sigma_0}$$

板间电压：

$$U=E_1 d=\frac{2\varepsilon_r\sigma_0}{\varepsilon_r+1}\frac{d}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{2}{\varepsilon_r+1}\frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0}\boxed{=\frac{2}{\varepsilon_r+1}U_0}$$

图中为两带等量异号电荷的金属板之间放一介质平板（紫色区，介电常数ε），



根据判断 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{q_0+q'}{\varepsilon_0}$ 和 $\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=q_0$

1电场线是用图中___（$\boxed{\text{兰}}$、红）色线表示，绿色电荷表示<u>极化</u>电荷

说明电场线起止于正负电荷，电位移线起止于正负<u>自由电荷</u>。

2 介质中$\vec{D}$和真空中$\vec{D}_0$的关系是：A $\vec{D}<\vec{D}_0$ $\boxed{\text{B } \vec{D}=\vec{D}_0}$ C $\vec{D}>\vec{D}_0$

3介质中$\vec{E}$和介质中$\vec{D}$的关系是：$\boxed{\text{A } \vec{E}=\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon}}$ B $\vec{E}=\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_r}$ C $\vec{E}=\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0}$

4介质中$\vec{E}$和真空中$\vec{E}_0$的关系是：$\boxed{\text{A } \vec{E}=\dfrac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}}$ B $\vec{E}=\dfrac{\vec{E}_0}{\varepsilon}$ C $\vec{E}=\dfrac{\vec{E}_0}{\varepsilon_0}$

五、 电容器及其电容

1、孤立导体的电容

孤立导体的电势 $\varphi \propto Q$ 　定义 $\boxed{C \equiv \dfrac{Q}{\varphi}}$ 电容

单位:法拉 F 　$1\mu F = 10^{-6} F$

球形孤立导体的电容的计算:

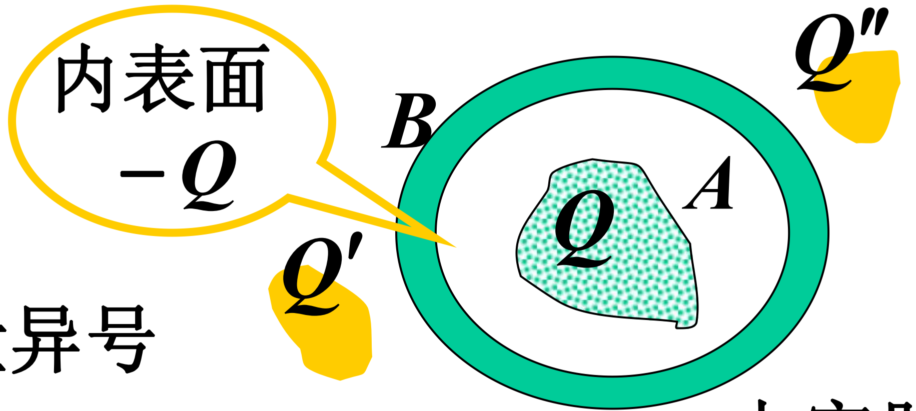
设导体球半径R，带电量Q，

$$\varphi = \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad C = \frac{Q}{\varphi} \boxed{= 4\pi\varepsilon_0 R}$$

2、 电容器及其电容

导体A的电势通常受到周围其他带电体的影响，可以采取静电屏蔽的方法—用导体壳B将导体A包围起来

定义 $$\boxed{C=\frac{Q}{U_{AB}}}$$



电容器

AB相对表面总是带等量异号电荷，是电容器的极板

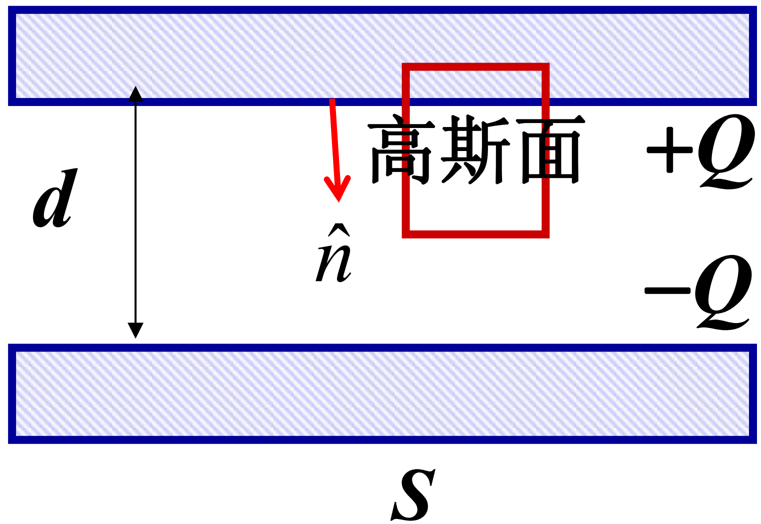
3、 电容的计算（电场电势的计算问题）

设电容器带电量Q $\longrightarrow$ $\boldsymbol{E}$ $\longrightarrow$ U $\longrightarrow$ $C = \dfrac{Q}{U}$

（一）平行板电容器的电容

设极板带电量Q，

极板间介质ε_r



1.可以用高斯定律判断电荷分布、求解电场，

高斯面采用__圆柱__面；

2.首先根据高斯定律 $\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0$，求得极板间 $\boxed{\vec{D} = \dfrac{Q}{S}\hat{n}}$

再由 $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ ，求得极板间 $\boxed{\vec{E} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}\hat{n}}$

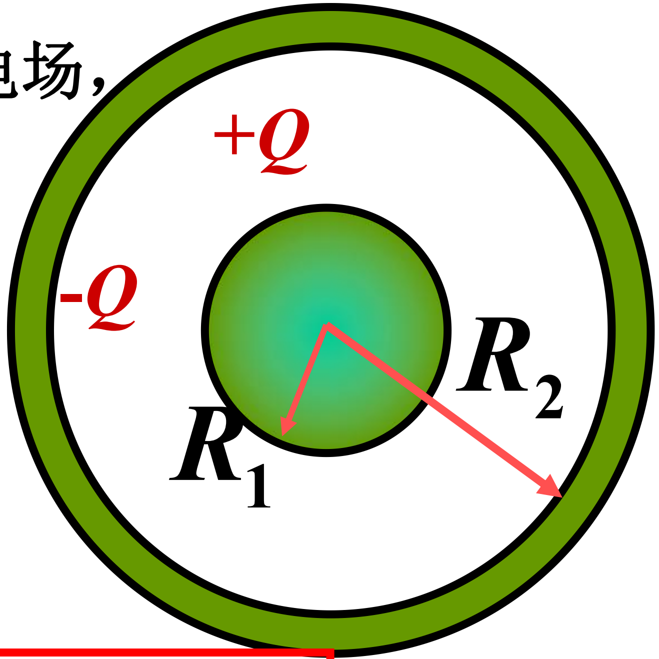
由极板间电势差 $U = Ed$ ，

求得电容

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$$

（二）球形电容器的电容

设极板带电量Q　极板间介质ε_r



1.可以用高斯定律判断电荷分布、求解电场，高斯面采用<u>同心球</u>面；

2.首先根据高斯定律 $\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0$

求得极板间 $\boxed{\vec{D} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}}$

再由 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ ，求得极板间 $\boxed{\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}}$

极板间电势差 $\boxed{U = \int_{R_1}^{R_2} E\,\mathrm{d}r}$，

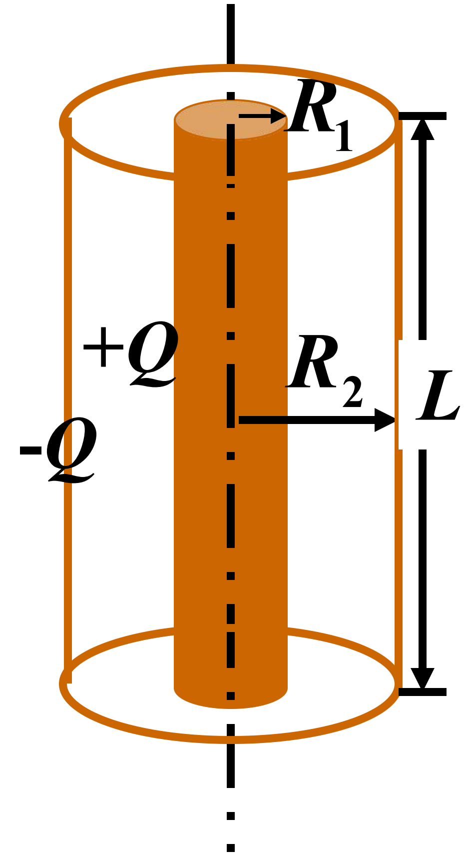
求得电容

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

（三）柱形电容器的电容

设极板带电量Q　极板间介质ε_r

1.可以用高斯定律判断电荷分布、求解电场，高斯面采用同轴圆柱面；



2.首先根据高斯定律求得极板间

$$D=\frac{Q}{2\pi rL}$$

再由$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$，求得极板间电场

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r rL}$$

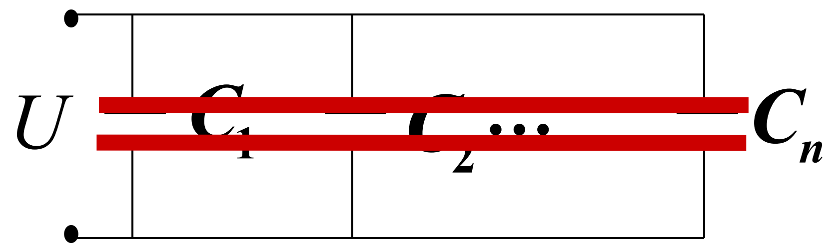
极板间电势差

$$U=\int_{R_1}^{R_2}E\,\mathrm{d}r$$

求得电容

$$C=\frac{Q}{U}=2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L\left(\ln\frac{R_2}{R_1}\right)^{-1}$$

4、电容器的串并联

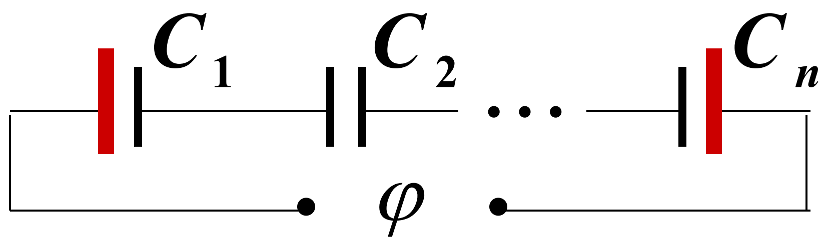


并联电容器 <u>U</u> 相等

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n}{U}$$

并联电容 $\boxed{C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n}$

串联电容器 <u>Q</u> 相等

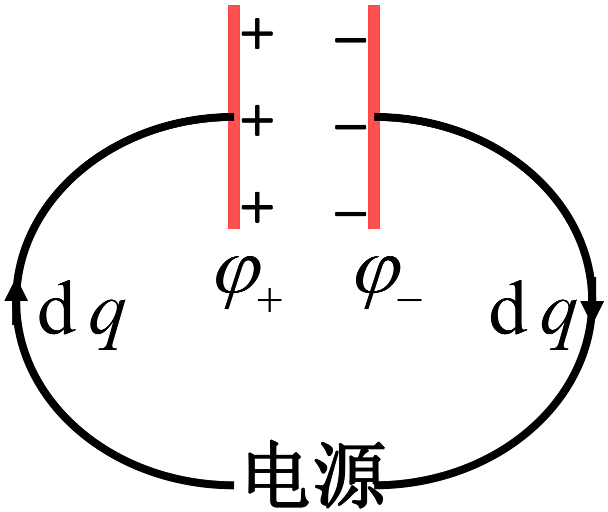


$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n}$$

串联电容 $\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_i} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$

六　电容器的能量和电场的能量

一、电容器的储能



以充电过程为例计算平行板电容器的储能

d*q* 从负极板到正极板，电源克服电场力作功使平行板电容器电势能增大：

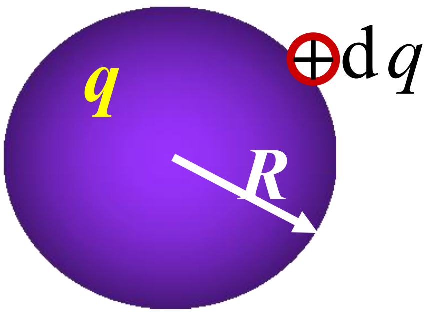
$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}q(\varphi_+ - \varphi_-) = U\,\mathrm{d}q$$

极板电量从0增加到***Q***，电势能总的增量为：

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^Q U\mathrm{d}q = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

孤立导体电容器的储能——

d*q* 从 ∞ 到导体表面，外力克服电场力作功使 **d*q***电势能增大：



$$\mathrm{d}W = U\,\mathrm{d}q = \frac{q\,\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$W = \int_0^Q \frac{q\,\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q^2}{2C}$$

二、电场的能量

电容器的储能就是电容器中电场的能量

以平行板电容器为例：

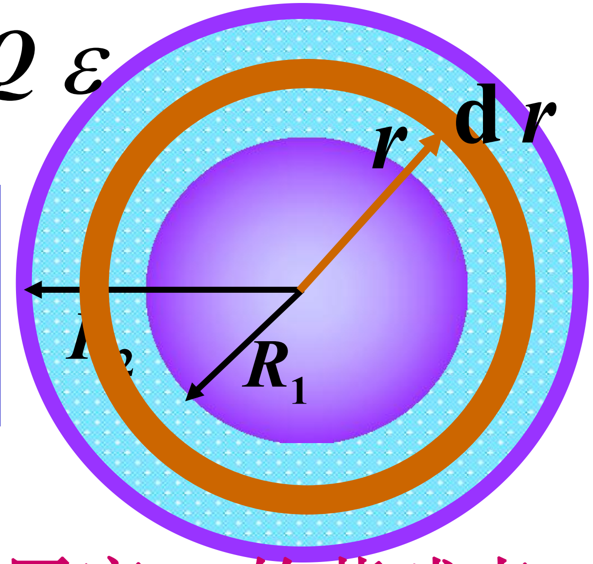
$$W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0\varepsilon_r S^2}Sd=\boxed{\frac{1}{2}DE}V$$

电场能量密度 w_e

$$\boxed{W_e=\int_V w_e\,\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}DE\,\mathrm{d}V}$$

适用于任何电场

例1.求球形电容器（如图）带电Q时所储存的静电能。



解：1）电容器的储能公式

$$\left.\begin{array}{l} W=\dfrac{Q^2}{2C} \\ C=4\pi\varepsilon\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)^{-1} \end{array}\right\} \boxed{W=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

2）电场的能量公式　　取半径r，厚度dr的薄球壳

$$w_e=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi r^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}$$

$$W_e=\int_V w_e\,\mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}4\pi r^2\,\mathrm{d}r\ \boxed{=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

另：$W=\dfrac{Q^2}{2C}=\displaystyle\int_V\frac{1}{2}DE\,\mathrm{d}V\longrightarrow\boxed{C}$