2.1　随机变量与分布函数

一、随机变量

二、分布函数

2.1.1 随机变量

在实际问题中，随机试验的结果可以和实数相对应，由此就产生了随机变量的概念.

1、有些试验结果本身与数值有关（本身就是一个数）

例如，掷一颗骰子面上出现的点数，则Ω＝{1, 2, 3, 4, 5, 6}中每个样本点$e_i=\{i\}$对应着事件“出现的点数为i”，i=1, 2, ⋯, 6;

如：某放射物在一段时间内放出的粒子数为k的概率。

令X为“在一段时间内放出的粒子数”，

即求$P\{X=k\}$， $k=0,1,2,\cdots$;

如：测定元件寿命，样本空间$S=\{t \mid t \geqslant 0\}$

令X为“元件使用寿命”，则“元件寿命大于500小时”可表为$P\{X>500\}$.

2、在有些试验中，试验结果看来与数值无关，但我们可以引进一个变量来表示它的各种结果. 也就是说，把试验结果数值化.

例1 将一枚硬币抛掷三次，观察正面与反面出现的情况，则S={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}，我们用X表示三次抛掷为正面的次数，则可得到下面这个定义域为S，值域为实数集合{0, 1, 2, 3}即

$$X = X(e) = \begin{cases} 3, & e = HHH \\ 2, & e = HHT, HTH, THH \\ 1, & e = HTT, THT, TTH \\ 0, & e = TTT. \end{cases}$$

裁判员在运动场上不叫运动员的名字，而叫号码一样，二者建立了一种对应关系.

例2 在一袋中装有编号分别为1,2,3的3只球. 在袋中任取一只球，放回. 再取一只球，记录它们的编号. 计算两只球的号码之和.

定义2.1

设 E 是随机试验，它的样本空间是$\Omega=\{e\}$. 如果对于每一个 $e\in\Omega$，有一个实数 $X(e)$ 与之对应，这样就得到一个定义在Ω上的实值单值函数 $X(e)$，称$X(e)$为随机变量.

随机变量通常用大写字母*X,Y,Z,…*或希腊字母，$\xi,\eta,\zeta,\ldots$.等表示.而以小写字母$x,y,z,w,\ldots$表示实数.

说明:

(1)随机变量与普通的函数不同

随机变量是一个函数 , 但它与普通的函数有着本质的差别 ,普通函数是定义在实数轴上的,而随机变量是定义在样本空间上的 (样本空间的元素不一定是实数).

(2)随机变量的取值具有一定的概率规律

随机变量随着试验的结果不同而取不同的值, 由于试验的各个结果的出现具有一定的概率, 因此随机变量的取值也有一定的概率规律.

实例 1 掷一个硬币, 观察出现的结果 , 共有两种

情况: $e_1 = (\text{反面朝上}),$ 

$e_2 = (\text{正面朝上}),$ 

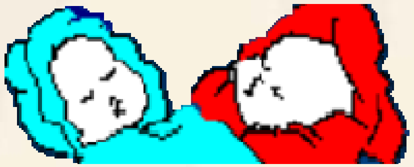
若用 X 表示掷一个硬币出现正面的次数, 则有

$$e_1 = (\text{反面朝上}) \xrightarrow{X(e)} 0 \rightarrow X(e_1) = 0$$

$$e_2 = (\text{正面朝上}) \xrightarrow{X(e)} 1 \rightarrow X(e_2) = 1$$

即 $X(e)$ 是一个随机变量.

实例 2　在有两个孩子的家庭中,考虑其性别 , 共有 4 个样本点:



$$e_1 = (\text{男},\text{男}), e_2 = (\text{男},\text{女}), e_3 = (\text{女},\text{男}), e_4 = (\text{女},\text{女}).$$

若用 X 表示该家女孩子的个数时 , 则有

$$X(e_1) = 0,\ X(e_2) = 1,\ X(e_3) = 1,\ X(e_4) = 2,$$

可得随机变量 $X(e)$,

$$X(e) = \begin{cases} 0, & e = e_1, \\ 1, & e = e_2, e = e_3, \\ 2, & e = e_4. \end{cases}$$

随机变量的分类

随机变量

离散型　　非离散型

连续型　　其它

(1)离散型　随机变量所取的可能值是有限多个或无限多个(可列个), 叫做离散型随机变量.

实例1　观察掷一个骰子出现的点数.

随机变量 X 的可能值是 :　1, 2, 3, 4, 5, 6.

实例2　若随机变量 X 记为“连续射击, 直至命中时的射击次数”, 则 X 的可能值是:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots.$$

实例3　设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手射了30次,则随机变量 X 记为“击中目标的次数”,则 X 的所有可能取值为:

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots,\quad 30.$$

(2)连续型　随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间,叫做连续型随机变量.

实例1　随机变量 X 为“灯泡的寿命”.

则 X 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

实例2　随机变量 X 为“测量某零件尺寸时的测误差”.

则 X 的取值范围为 (a,b) 内的任一值.

2.1.2 分布函数

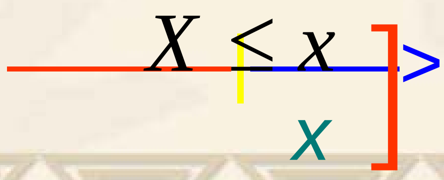
为了对离散型和连续型随机变量*r.v*（*random variable*）以及更广泛类型的*r.v*给出一种统一的描述方法，下面引进了分布函数的概念.

定义2.2 设 X 是一个 *r.v*，x是任意实数，称

$$F(x)=P(X\le x)\ (-\infty<x<+\infty)$$ 为 X 的分布函数.

记作 $X\sim F(x)$ 或 $F_X(x)$.

如果将X看作数轴上随机点的坐标,则分布函数$F(x)$的值就表示X落在区间$[-\infty, x]$的概率.



$$F(x)=P(X\le x),\quad -\infty<x<\infty$$

问：在上式中，X, x 皆为变量. 二者有什么区别？x起什么作用？$F(x)$ 是不是概率？

X是随机变量，x是参变量.

$F(x)$ 是r.v X取值不大于 x 的概率.

对任意实数 $x_1<x_2$，随机点落在区间（x_1，x_2] 的概率为：

$$P\{x_1<X\le x_2\}=P\{X\le x_2\}-P\{X\le x_1\}$$
$$=F(x_2)-F(x_1)$$

因此，只要知道了随机变量X的分布函数，它的统计特性就可以得到全面的描述.

说明

（1） 分布函数主要研究随机变量在某一区间内取值的概率情况.

（2） 分布函数是一个普通的函数，正是通过它，我们可以用数学分析的工具来研究 随机变量.

分布函数的性质

(1) $0 \le F(x) \le 1, \quad x \in (-\infty, \infty);$

(2) $F(x_1) \le F(x_2), \quad (x_1 < x_2);$ (单调不减性)

证明　由 $x_1 < x_2 \Rightarrow \{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\},$

得 $P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\},$

又 $F(x_1) = P\{X \le x_1\}, \quad F(x_2) = P\{X \le x_2\},$

故　$F(x_1) \le F(x_2).$

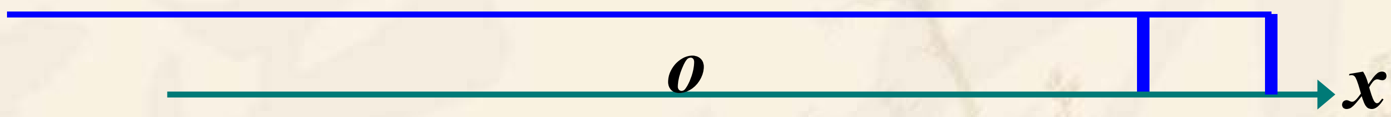
(3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \; F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1;$

证明 $F(x)=P\{X\le x\}$, 当 x 越来越小时,

$P\{X\le x\}$的值也越来越小， 因而当 $x\to-\infty$时,有

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=\lim_{x\to-\infty} P\{X\le x\}=0$$

同样,当 x 增大时 $P\{X\le x\}$的值也不会减小,而 $X\in(-\infty,x]$当 $x\to\infty$时,X 必然落在 $(-\infty,\infty)$内.

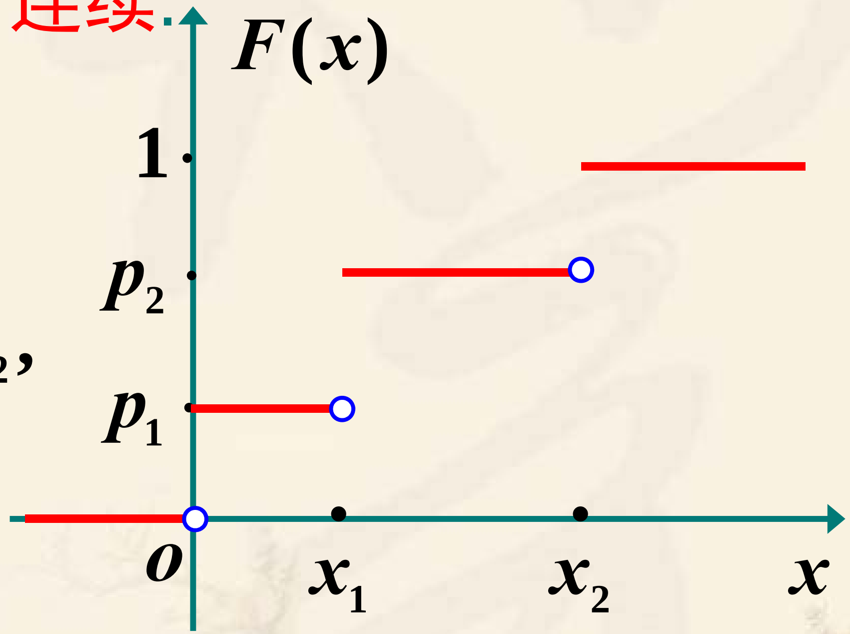


所以 $$\lim_{x\to\infty} F(x)=\lim_{x\to\infty} P\{X\le x\}=1.$$

$$(4)\ \lim_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0), \quad (-\infty < x_0 < \infty).$$

即任一分布函数处处右连续.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ p_1, & 0\le x<x_1,\\ p_2, & x_1\le x<x_2,\\ 1, & x\ge x_2.\end{cases}$$



反过来, 如果一个函数具有上述性质，则一定是某个 $r.v\ X$ 的分布函数. 也就是说，性质(1)−−(4)是鉴别一个函数是否是某$r.v$的分布函数的充分必要条件.

重要公式

$$(1)\ P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a),$$

$$(2)\ P\{X > a\} = 1 - F(a).$$

证明 因为 $\{X \le b\} = \{X \le a\} \cup \{a < X \le b\},$

$$\{X \le a\} \cap \{a < X \le b\} = \varnothing,$$

所以 $P\{X \le b\} = P\{X \le a\} + P\{a < X \le b\},$

故 $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a).$

例题讲解

例1 已知随机变量 X在整个实轴上取值，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

其中 $\lambda>0$为常数，求常数A,B的值.

解　由分布函数的性质知　$F(+\infty)=A=1.$

由分布函数的右连续性　$F(0)=A+B=0$

于是有$A=1, B=-1.$

请同学们思考

不同的随机变量,它们的分布函数一定也不相同吗?

答　不一定.例如抛均匀硬币, 令

$$X_1=\begin{cases}1, & \text{出正面;}\\ -1, & \text{出反面.}\end{cases}\qquad X_2=\begin{cases}-1, & \text{出正面;}\\ 1, & \text{出反面.}\end{cases}$$

X_1 与 X_2 在样本空间上的对应法则不同,是两个不同的随机变量,但它们却有相同的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ 1/2, & -1<x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

例2 一个靶子是半径为2米的圆盘,设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比,并设射击都能中靶,以X表示弹着点与圆心的距离.试求随机变量 X 的分布函数.

解 当 $x < 0$时,

$P\{X \le x\}$是不可能事件,

于是$F(x) = P\{X \le x\} = 0;$

当$0 \le x \le 2$时, $P\{0 \le X \le x\} = kx^2$, k是常数.

由$P\{0 \le X \le 2\} = 1$, 得$4k = 1$, 即 $k = \frac{1}{4}$.

因而$P\{0 \le X \le x\} = \frac{x^2}{4}$.

于是

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

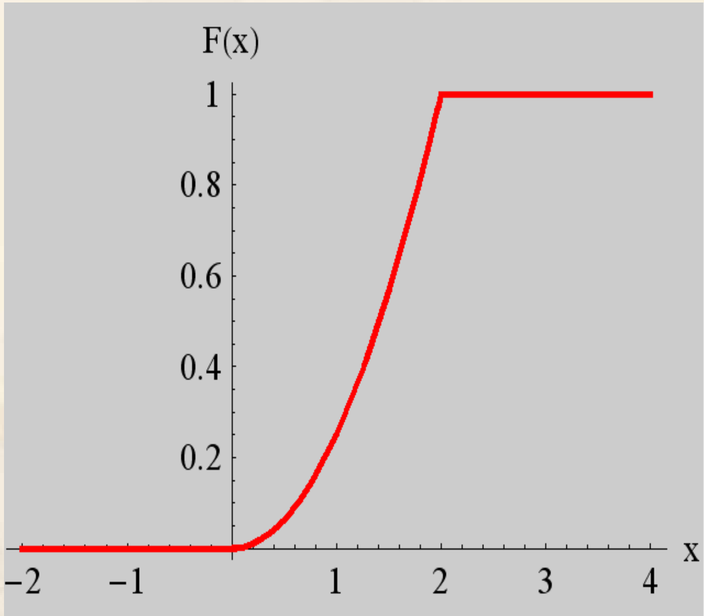
$$= P\{X < 0\} + P\{0 \le X \le x\} = \frac{x^2}{4}.$$

当 $x \ge 2$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = 1.$$

故 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$



其图形为一连续曲线

四、小结

1. 概率论是从数量上来研究随机现象内在规律性的, 因此为了方便有力地研究随机现象, 就需将随机事件数量化,把一些非数量表示的随机事件用数字表示时, 就建立起了随机变量的概念. 因此随机变量是定义在样本空间上的一种特殊的函数.

2. 随机变量的分类:离散型,非离散型（以连续性为主）.

3. 随机变量分布函数的概念

$$F(x) = P\{X \le x\}.$$

4. 分布函数的性质