

## 阿贝尔

河北师范学院 邓明立

阿贝尔, N. H. (Abel, Niels Henrik) 1802 年 8 月 5 日生于挪威芬岛; 1829 年 4 月 6 月卒于挪威弗鲁兰. 数学.

阿贝尔出生在挪威奥斯陆附近的芬岛, 父亲 S. G. 阿贝尔(Abel)是个牧师. 幼时, 他就显露出数学上的才能. 阿贝尔的启蒙教育得自于他的父亲. 但是家庭的极端贫困, 使他未能受到系统的教育. 1815 年, 年仅 13 岁的阿贝尔进入奥斯陆的一所教会学校学习. 起初, 学校里缺乏生机的教育方法没有引起他对数学的兴趣. 15 岁(1817)时, 他幸运地遇到一位优秀数学教师 B. M. 霍尔姆博(Holmboë). 后者在数学上的最大贡献也正是发现并培养了这位数学天才. 良师耐心细致的教诲, 唤起了他学习数学的愿望, 使他对数学产生了兴趣. 阿贝尔迅速学完了初等数学课程. 然后, 他在霍尔姆博的指导下攻读高等数学, 同时还自学了许多数学大师特别是 L. 欧拉(Euler)、J. L. 拉格朗日(Lagrange)和 C. F. 高斯(Gauss)的著作.

阿贝尔在学校最后两年时间里, 以“初生牛犊不怕虎”的姿态猛攻一些尚未解决的最深奥的数学问题, 尤其是如何求解五次方程问题吸引着他. 他注意博采众家之长, 在研读拉格朗日、高斯关于方程论著作的基础上, 按高斯对二项方程的处理方法, 着手探讨了高次方程的可解性问题. 最初, 他自认为解五次方程已获成功. 霍尔姆博与奥斯陆大学教授 C. 汉森丁(Hansteen)两人都看不出所以然, 又找不出论证中的破绽. 而在奥斯陆没有一个科学刊物可以发表它. 后来, 只好把这篇文章寄给丹麦数学家 F. 德根(Degen), 请求他帮助在丹麦科学院出版.

德根教授也没有发现论证本身的任何错误, 只是要求阿贝尔用例子说明他的方法, 并建议他把精力放到椭圆积分的研究上去. 阿贝尔获悉德根的答复后, 立即着手构造五次方程解的例子. 但结果失望地发现, 他的方法是错误的. 另外, 他还接受了德根关于搞椭圆积分的建议, 不多几年内就基本完成了他关于椭圆函数的理论.

1821 年秋, 阿贝尔在一些教授资助下进入了奥斯陆大学. 大学期间, 他的数学几乎全是自学的, 并把主要精力用在进一步研究上, 他写出了许多有价值的论文. 1823 年, 他完成了一篇题为“用定积分解某些问题”

(Opløsning af et par opgaver ved hjælp af bestemte Integraler) 的论文. 文中首次给出了积分方程的解, 这是历史上出现最早的积分方程, 但较长时期没有引起人们的重视. 1822—1823 年冬, 他还写了一篇关于函数表达式积分的长篇论文, 提交给大学委员会. 后来, 竟被学校当局弄丢了.

1823 年初夏, 阿贝尔在热心的 S. 拉斯穆森(Rasmussen)教授资助下, 有幸去哥本哈根拜见德根及其他数学家. 德根对他很赏识, 并对他的研究给予指导. 他返回奥斯陆后, 又重

新考虑了五次方程解的问题。这次他采取了相反的观点，终于获得成功。1824 年，他证明了五次或五次以上的代数方程没有一般的用根式求解的公式。该证明写进了“论代数方程——证明一般五次方程的不可解性”的著名论文中，从而结束了一般代数方程求根式通解的企图。他深知其结果的重要性，决定先以小册子形式自费出版它。为了节省经费，他把小册子压缩到 6 页，叙述很简洁，以致许多学者难以读懂。“数学王子”高斯也不相信一个青年能用这么短的篇幅，解决连他本人都尚未解决的难题。总之，这篇论文在当时没有得到任何一位外国数学家的重视。

1825 年，阿贝尔大学毕业，社会没有给这位天才提供用武之地。他决定申请经费出国，继续深造和谋求职位。1825 年夏季，他先到了德国柏林。这期间，他结识了一位很有影响的工程师 A. L. 克雷尔(Crelle)。这是阿贝尔一生中第二个对他的研究事业有极大帮助的人。克雷尔虽不是很强的数学家，但对数学有浓厚的兴趣。在阿贝尔建议及朋友的赞助下，克雷尔于 1826 年创办了著名的数学刊物《纯粹与应用数学杂志》(Journal für die Reine und Angewandte Mathematik)，后被称为克雷尔杂志。它的第一卷刊登了 7 篇阿贝尔的文章，其中有关于一般五次方程不能用根式求解的证明。克雷尔杂志头三卷共发表了他的 22 篇包括方程论、无穷级数、椭圆函数等方面的开创性论文。从此，欧洲大陆数学家才开始注意他的工作。

1826 年 7 月，阿贝尔从柏林来到巴黎，遇见了 A. M. 勒让德(Legendre)和 A. L. 柯西(Cauchy)等著名数学家。他写了一篇题为“关于一类极为广泛的超越函数的一个一般性质”的文章，于 1826 年 10 月 30 日提交给法国科学院，不幸未得到重视。当时科学院的秘书 J. B. J. 傅里叶(Fourier)读了论文的引言，然后委托勒让德和柯西对论文作出评价，柯西是主要负责人。这篇论文很长而且难懂，因为它包含了许多新概念。柯西把它放在一边，醉心于自己的工作。勒让德也把它忘了。事实上，这篇论文直到阿贝尔去世后的 1841 年才发表。

1826 年底，阿贝尔回到柏林。不久，他染上了肺结核病。克雷尔帮助了他，请他担任克雷尔杂志的编辑，同时为他谋求教授职位，但未获得成功。

1827 年 5 月 20 日，阿贝尔回到奥斯陆。回国后更失望，仍然没有找到职位的希望，他不得不靠作家庭教师维生。在贫病交迫、茹苦含辛的逆境中，他并没有倒下去，仍在坚持研究，取得了许多重大成果。他写下了一系列关于椭圆函数的文章，发现了椭圆函数的加法定理、双周期性，并引进了椭圆函数的反演。正是这些重大发现才使欧洲数学家们认识到他的价值。1828 年 9 月，四名法国科学院院士上书给挪威国王，请他为这位天才安排一个合适的职位。勒让德在 1829 年 2 月 25 日科学院会议上，也对阿贝尔及其工作大加称赞。同年 4 月 6 日，阿贝尔怀着强烈的求生欲望和继续为科学事业做贡献的理想，在病魔侵袭的忧伤中，与世长辞了。就在他去世两天后，克雷尔来信通知他已被柏林大学任命为数学教授。此后荣誉和褒奖接踵而来，1830 年 6 月 28 日，他和 C. G. J. 雅可比(Jacobi)共同获得了法国科学院大奖。

阿贝尔在数学上的贡献，主要表现在方程论、无穷级数和椭圆函数等方面。

所谓方程有根式解(代数可解)，就是这个方程的解可由该方程的系数经过有限次加减乘除以及开整数次方等运算表示出来。关于代数方程的求解，从16世纪前半叶起，已成为代数学的首要问题，一般的三次和四次方程解法被意大利的几位数学家解决。在以后的几百年里，代数学家们主要致力于求解五次乃至更高次数的方程，但是一直没有成功。对于方程论，拉格朗日比较系统地研究了方程根的性质(1770)，正确指出方程根的排列与置换理论是解代数方程的关键所在，从而实现了代数思维方式的转变。尽管拉格朗日没能彻底解决高次方程的求解问题，但是他的思维方法却给后人以启示。P. 鲁菲尼(Ruffini)于1799年首次证明了高于四次的一般方程的不可解性，但其“证明”存有缺陷。两年以后，高斯解决了分圆方程的可解性理论问题。拉格朗日和高斯的工作是阿贝尔研究工作的出发点。中学时，他就读过拉格朗日关于方程论的著作；大学一年级开始全面研究高斯的《算术研究》(Disquisitiones arithmeticae)。后来，他又了解了柯西关于置换理论方面的成果。然而，他当时并不晓得鲁菲尼的工作。阿贝尔就是在这种背景下思考代数方程可解性理论问题的。

1824年，阿贝尔首次作出了一般的五次方程用根式不可解的正确证明。更详细的证明，于1826年发表在克雷尔杂志第一期上。题目为“高于四次的一般方程的代数解法不可能性的证明”。在这篇论文中，阿贝尔讨论并修正了鲁菲尼论证中的缺陷。鲁菲尼的“证明”缺乏域的概念，所以不可能在由已知方程的系数所确定的基础域及域的扩张下进行工作。另外，鲁菲尼“证明”中还用到了一个未加证明的关键性命题，后称阿贝尔定理。该定理说，如果一个代数方程能用根式求解，则出现在根的表达式中的每个根式，一定可以表成方程诸根及某些单位根的有理函数。阿贝尔就是应用这个定理证明高于四次的一般方程不能有根式解的。

关于高次方程不能总是代数可解的结论，促使他进一步思考哪些方程才可用根式解的问题。他在深入研究《算术研究》第七部分关于分圆方程可解性理论的基础上，取得了独创性的进步。他于1828年3月29日完成了题为“关于一类特殊的代数可解方程”(Mémoire sur une classe particulière d'équations résoluble algébriquement)的文章，发表在克雷尔杂志第四卷(1829)上。它解决了任意次的一类特殊方程的可解性问题，分圆方程 $x^n - 1 = 0$ 就属于这一类。在这篇论文中，阿贝尔证明了下述定理：对于一个任意次的方程，如果方程所有的根都可用其中的一个根有理地表示(我们用 $x$ 表示)，并且任意两个根 $Q(x)$ 与 $Q_1(x)$ (这里 $Q, Q_1$ 均为有理函数)，满足关系 $QQ_1(x) = Q_1Q(x)$ ，那么所考虑的方程总是代数可解的。类似地，假定这个方程是不可约的，

它的阶数为 $\alpha_1^{\nu_1} \alpha_2^{\nu_2} \cdots \alpha_w^{\nu_w}$ ，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_w$ 均为不同的素

数，那么可把原方程的解法分别化成 $\nu_1$ 个 $\alpha_1$ 阶方程、 $\nu_2$ 个 $\alpha_2$ 阶方程、 $\nu_3$ 个 $\alpha_3$ 阶方程的解法，等等。

实际上，阿贝尔证明了下述事实(用现代术语叙述)：假定 $\varphi(x)$ 是具有 $n$ 个根 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 $n$  ( $n = \alpha_1^{\nu_1} \alpha_2^{\nu_2} \cdots \alpha_w^{\nu_w}$ ) 阶不可约方程，它所有的根均可表成其中一个根(如 $x_1$ )的有理函数。即 $x_1 = Q_1(x_1), x_2 = Q_2(x_1), \dots, x_n = Q_n(x_1)$ ,

这里  $Q_1$  是恒等映射. 阿贝尔证明了在有理函数  $Q_k(k=1, 2, \dots, n)$  中, 如果用另一个根  $x_i(1 < i \leq n)$  代替  $x_1$ , 那么  $Q_k(X_i)(k=1, 2, \dots, n)$  是以不同顺序排列的原方程的根. 或者说, 根

$$x_i = Q_1(X_i), Q_2(X_i), \dots, Q_n(X_i)$$

是根  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的一个置换. 方程根进行这样置换的个数是  $n$ . 阿贝尔考虑并证明了这些置换的性质, 如果方程根的置换群是可交换群, 则方程  $\varphi(x) = 0$  的解法可简化为低次的

辅助方程的解法, 这些辅助方程可依次用根式求解. 在分圆方程的情形, 方程的置换群是循环群. 阿贝尔没有在文章中明确构造这种置换群, 仅仅采用了有理函数所假定的可交换性:  $Q_1 Q_2(x) = Q_2 Q_1(x)$ . 现在通常把具有这种性质的方程称为阿贝尔方程, 具有可交换性的群叫做阿贝尔群. 他在工作中, 实质上引进了在给定数域中不可约多项式的概念, 即系数在域  $F$  中的一元多项式不能表示成两个系数在  $F$  中的次数较低的多项式的乘积,

阿贝尔遗作中有一篇值得深入研究的未完成的手稿, 即“关于函数的代数解法”(Sur la résolution algébrique des fonctions, 1839). 文中叙述了方程论的发展状况, 重新讨论了特殊方程可解性的问题, 为后来 E·伽罗瓦(Galois)遗作的出版开辟了道路. 在引言部分, 阿贝尔暗示出一种重要的思维方法, 他认为解方程之前, 应首先证明其解的存在性, 这样可使整个过程避免“计算的复杂性”. 在代数方程可解性理论研究中, 他还提出了一个研究纲领, 就是在他工作中需要解决两类问题: 一是构造任意次数的代数可解的方程; 二是判定已知方程是否可用根式求解. 他试图全部刻画可用根式求解的方程的特性. 但因早逝而没能完成这个工作, 他只解决了第一类问题. 几年后, 伽罗瓦接过他的工作, 用群的方法彻底解决了代数方程的可解性理论问题, 从而建立了现在所谓的伽罗瓦理论.

除了代数方程论之外, 阿贝尔还从事分析方面的研究.

分析学是 17 世纪以来在微积分基础上形成的一大数学分支. 18 世纪, 它已发展成为一门相对独立的学科, 具备了极为丰富的内容并被广泛应用, 但它自己尚未形成逻辑严密的理论体系. 到 19 世纪, 分析学中不严密的论证导致的局限性和矛盾愈益显著, 分析的严密化逐渐引起数学家的关注.

阿贝尔是 19 世纪分析严格化的倡导者和推动者. 他于 1826 年给汉森丁的一封信中明确写道: “将来我的工作一定要完全致力于纯粹数学抽象意义方面的研究. 我将把全部精力应用于进一步揭露人们在分析中确实发现的惊人的含糊不清的地方. 这样一个完全没有计划和体系的分析, 竟有那么多人研究过它, 真是奇怪. 最坏的是从来没有严格地对待过分析. 在高等分析中只有很少几个定理是用逻辑上站得住脚的方式证明的. 人们到处发现这种从特殊到一般的不可靠的推理方法, 而非常奇怪的是这种方法只导致了极少几个所谓的悖论. 真正有趣的是寻找这种原因.”这段话一方面如实地反映了当时分析学发展的情况; 另一方面也明确了阿贝尔工作的主要方向. 在这方面, 他一直强调分析中定理的证明, 特别关心当时数

学缺乏严密性的问题。他于 1826 年 1 月 16 日给霍尔姆博的信中写道：“我非常惊讶地看到下列事实。如果除开最简单的情况，那么在全部数学中没有一个无穷级数的和被严格定义的。换句话说，数学中最重要的部分是没有根基的。诚然，数学的大部分是正确的，而这正是令人惊讶的地方。我要努力找出这个道理，这是一个十分有趣的题目。”他于 1826 年最早使用一致收敛的思想证明了连续函数的一个一致收敛级数的和在收敛区域内部连续。在无穷级数工作方面，他还得到了一些收敛判别准则以及关于幂级数求和的定理。这些工作确立了他在分析学发展中的重要地位。

椭圆函数又称双周期的亚纯函数。它的名称来源于求椭圆的周长，它是利用椭圆积分的反演引入的特殊函数，是三角函数的广泛和自然的推广。椭圆函数论可以说是复变函数论在 19 世纪发展中最重要成就之一。阿贝尔和雅可比是公认的椭圆函数论的奠基者。

关于椭圆积分的研究可以追溯到 17 世纪后半叶，后来，数学家们如欧拉、勒让德和高斯等均做了大量的工作。欧拉的加法定理是椭圆积分理论的主要结果。勒让德作为椭圆积分理论的奠基人之一，在欧拉加法定理提出后的 40 年中，他是仅有的一个在这一领域提供重大成果的人。但他未能像阿贝尔和雅可比那样洞察到，探索椭圆积分的关键在于考察椭圆积分的反函数，即椭圆函数。勒让德高度评价了阿贝尔和雅可比的工作，认为他们两人都将跻身于“当代第一流分析学家之列”。对于椭圆函数论，高斯生前虽然没有发表过任何文章，但在他去世之后，人们在他的遗稿中发现，他已得到了椭圆函数论的许多关键性结果。阿贝尔也许就是从高斯所作的评论，特别是他的《算术研究》中的陈述受到启发而从事这一工作的。

1826 年，阿贝尔撰写论文“关于一类极为广泛的超越函数的一个一般性质”，对椭圆函数进行了创造性研究。在这篇文章中，他研究了  $y$  的有理函数，并且存在  $x$  和  $y$  的多元多项式  $f$ ，使  $f(x, y)=0$ 。他还证明了关于上述代数函数积分之和的定理，即所谓的阿贝尔定理：若干个这种积分之和可以用  $P$  个这样的积分加上一些代数的与对数的项表示出来，其中  $P$  只依赖于方程  $f(x, y)=0$ ，它是这个方程的亏格(genus)。这是亏格概念的首次出现。阿贝尔的定理是椭圆积分加法定理的推广，也是阿贝尔积分的一条关键性定理。

阿贝尔又于 1827 年发表了他的“关于椭圆函数的研究”，这是他最长的文章。在这篇论文中，他借助于椭圆积分的反函数把椭圆积分理论归结为椭圆函数的理论。具体地说，阿贝尔所考察的椭圆积分是这样一些积分，其中被积函数是三次或四次多项式的平方根的有理函数。在这些积分之中，重要的是函数

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

其反函数  $s(u)$  同样起着重要作用，它恰好是椭圆函数  $\operatorname{sn} u$ 。使用符号  $\operatorname{sn} u$  是为了表示它是普通的正弦函数的推广。椭圆函数名称便来源于此。在最基本的情形，即  $K=0$ ，我们可分别得到

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{sn}^{-1} x, \quad \operatorname{sn} u = \sin u$$

可见，椭圆函数是三角函数的一个广泛和自然的推广。

阿贝尔在他 1827 年的论文中还建立了椭圆函数的加法定理，它类似于椭圆积分的加法定理。借助于这个定理，他发现了椭圆函数的双周期性，从而奠定了椭圆曲线(它们都可以表示成平面中的三次曲线)的理论基础。另外，利用这种性质还可以对椭圆函数做出如下定义：只有极点的双周期解析函数是椭圆函数。

阿贝尔的一系列工作为后人留下丰厚的数学遗产，为群论、域论和椭圆函数论的研究开拓了道路。他的数学思想至今深刻地影响着其他数学分支。C. 埃尔米特(Hermite)曾这样评价阿贝尔的功绩：阿贝尔留下的一些思想，可供数学家们工作 150 年。克雷尔在他的杂志上，为阿贝尔写了长篇的颂辞：

“阿贝尔的全部著作镌刻着无比的创造天才和非凡的、有时是惊人的思维力量，如果考虑到这位作者的年龄，就更令人惊叹不已了。我们看到，他能够以一种不可抵抗的力量，透过一切障碍，向下深入到问题的本质上，以不可想象的能量向它进攻；又能够从上面来考虑问题，高高地翱翔于问题的目前状态之上，所有的困难在这个天才的无敌的攻击之下，都化为乌有。……然而，阿贝尔赢得人们的尊敬和无限怀念不仅是因为他的伟大的才能，而且由于他纯洁的品质和高尚的心灵，以及少有的谦虚，这些非凡的品德使得他作为一个人来说也同他的天才一样被人们所珍爱”。