3.4 随机变量的独立性

随机变量相互独立的定义

设$F(x,y)$为(X,Y)的分布函数，$F_X(x)$,$F_Y(y)$为(X,Y)关于X,Y的边缘分布函数，若对任意的x,y, 有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

$$\text{即} F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称 X 和 Y 相互独立.

两事件 A, B 独立的定义是：若$P(AB)=P(A)P(B)$
则称事件 A, B 独立.

说 明

(1). 由于

$$F(x,\ y) = P\{X \le x,\ Y \le y\}$$

以及 $F_X(x) = P\{X \le x\}$，$F_Y(y) = P\{Y \le y\}$

可知，随机变量 X 与 Y 相互独立，实际上是指：对于任意的 x，y，随机事件

$$\{X \le x\} \quad 与 \quad \{Y \le y\}$$

相互独立.

(2). 如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则由

$$F(x, \ y) = F_X(x)F_Y(y)$$

可知，

二维随机变量 $(X, \ Y)$ 的联合分布函数 $F(x, \ y)$ 可由其边缘分布函数 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$ 唯一确定.

例： 设二维随机变量(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{10}\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty)$$

试判断X与Y是否相互独立？

若（X,Y）是二维离散型随机变量，则上述独立性的定义等价于：

对(X,Y)的所有可能取值(x_i, y_j)（$i, j=1, 2, \cdots$），有

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

$\Leftrightarrow$ X 和 Y 相互独立.

例1 设二维离散型随机变量$(X, \ Y)$的联合分布律为

Y / X	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求α与β应满足的条件;

(2) 若 X 与 Y 相互独立,求 α与β 的值.

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3} + \alpha + \beta$
$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9} + \alpha$	$\frac{1}{18} + \beta$	$\frac{2}{3} + \alpha + \beta$

(1) 由分布律的性质知 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \frac{2}{3} + \alpha + \beta = 1,$

故α与β应满足的条件是 : $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 且 $\alpha + \beta = \frac{1}{3}.$

（2）因为 X 与 Y 相互独立，所以有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \quad (i = 1,2;\ j = 1,2,3)$$

特别有

$$p_{12} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \alpha\right) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{9},$$

又 $\alpha + \beta = \dfrac{1}{3}$，得 $\beta = \dfrac{1}{9}.$

若 (X,Y) 是二维连续型随机变量，则上述独立性的定义等价于：

对任意的 x, y，有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

几乎处处成立，则称 X 和 Y 相互独立 .

其中 $f(x,y)$ 是 X 和 Y 的联合密度，$f_X(x), f_Y(y)$

分别是 X 的边缘密度和 Y 的边缘密度 .

这里“几乎处处成立”的含义是：在平面上除去面积为 0 的集合外，处处成立.

特别地，上式对 $f(x, \quad y)$ 的所有连续点 $(x, \quad y)$ 必须成立.

例 设随机变量X和Y的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求证X与Y相互独立.

证:因为 $f_X(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

- **故有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 因而X,Y是相互独立的.**

例2 设(X,Y)的概率密

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)}, \\ 0, \end{cases}$$

问X和Y是否独立？

对一切x, y，均有：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

故X,Y独立

解：$f_X(x)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+y)}dy = \boldsymbol{xe^{-x}}$ $\quad x>0$

$$f_Y(y)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+y)}dx \quad = \boldsymbol{e^{-y}} \qquad y>0$$

即：

$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例3 设随机变量 X 和 Y 相互独立,并且 X 服从 $N(a,\sigma^2)$,Y 在 $[-b,b]$ 上服从均匀分布,求 (X,Y) 的联合概率密度.

解 由于 X 与 Y 相互独立,

所以 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

又 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<\infty;$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2b}, & -b\le y\le b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

得 $$f(x,y)=\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

其中 $-\infty<x<\infty,\quad -b\le y\le b.$

当 $|y|>b$ 时, $f(x,y)=0.$

例4　设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 (X,Y) 的分布律.

解　因为X与Y相互独立，所以

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\,P\{Y=y_j\}$$

于是

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}\,P\{Y=2\}$$

$$=0.3\times 0.6=0.18,$$

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}=0.3\times 0.6=0.18,$$

$$P\{X=1,Y=4\}=P\{X=1\}P\{Y=4\}=0.3\times 0.4=0.12,$$

$$P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3\}P\{Y=2\}=0.7\times 0.6=0.42,$$

$$P\{X=3,Y=4\}=P\{X=3\}P\{Y=4\}=0.7\times 0.4=0.28.$$

因此 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

例5 设

$$(X,Y) \sim f(x,y)=\begin{cases} Cy(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x. \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1)求 C 的值;

(2)求关于 X,关于 Y 的边缘概率密度;

(3)判断 X,Y 的独立性.

解 (1) 因为 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$,

可得 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^x \boldsymbol{Cy(1-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$

$$=\int_0^1 C(1-x)\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{C}{24}=1\Rightarrow C=24.$$

故 $f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x.\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

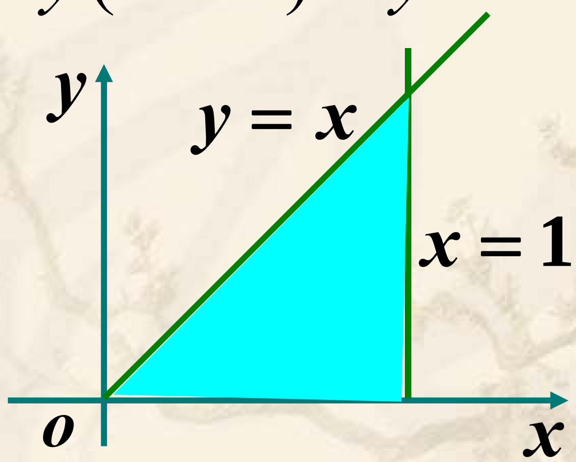
当 $0\le x\le 1$时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^x 24y(1-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=12x^2(1-x).$$

当 $x<0$,或 $x>1$时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$



于是 (X,Y)关于X 的边缘概率密度为

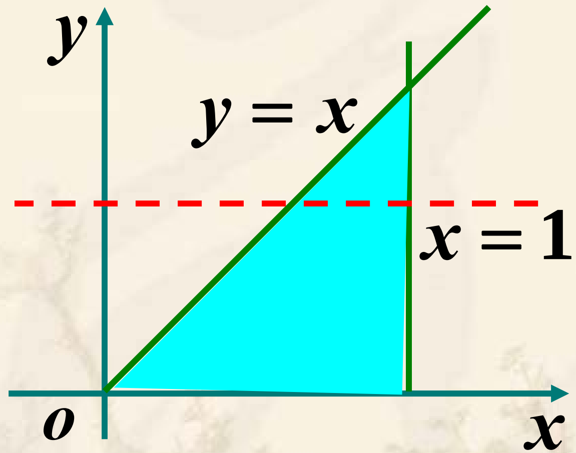
$$f_X(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

当 $0\le y\le 1$时,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

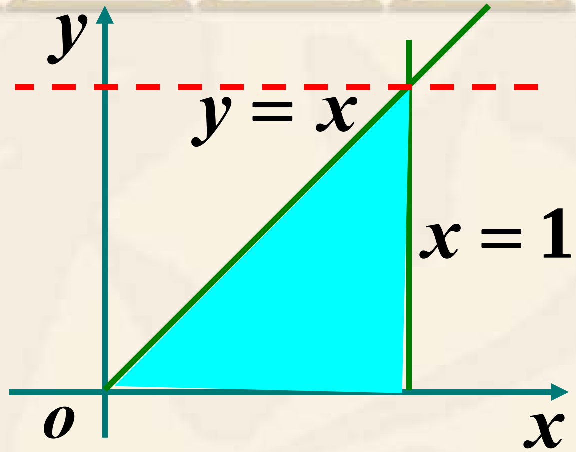
$$=\int_y^1 24y(1-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=12y(1-y)^2.$$



当 $y<0$, 或 $y>1$ 时,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=0.$$

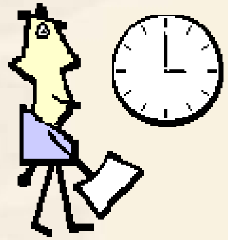


因而得 $f_Y(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(3) 由于 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$,

所以 X,Y 不相互独立 .

例6 一负责人到达办公室的时间均匀分布在**8~12**时,他的秘书到达办公室的时间均匀分布在**7~9**时,设他们两人到达的时间相互独立,求他们到达办公室的时间相差不超过 **5** 分钟的概率.



解　设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间,由假设 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1/4, & 8<x<12,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1/2, & 7<x<9,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

由于 X,Y 相互独立,得 (X,Y) 的概率密度为

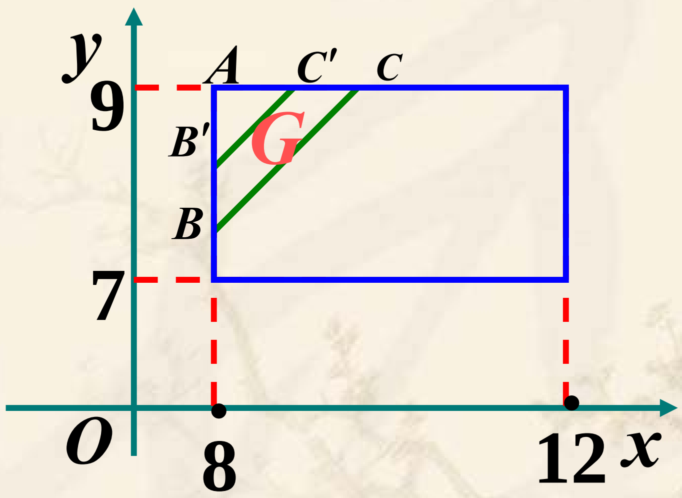
$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

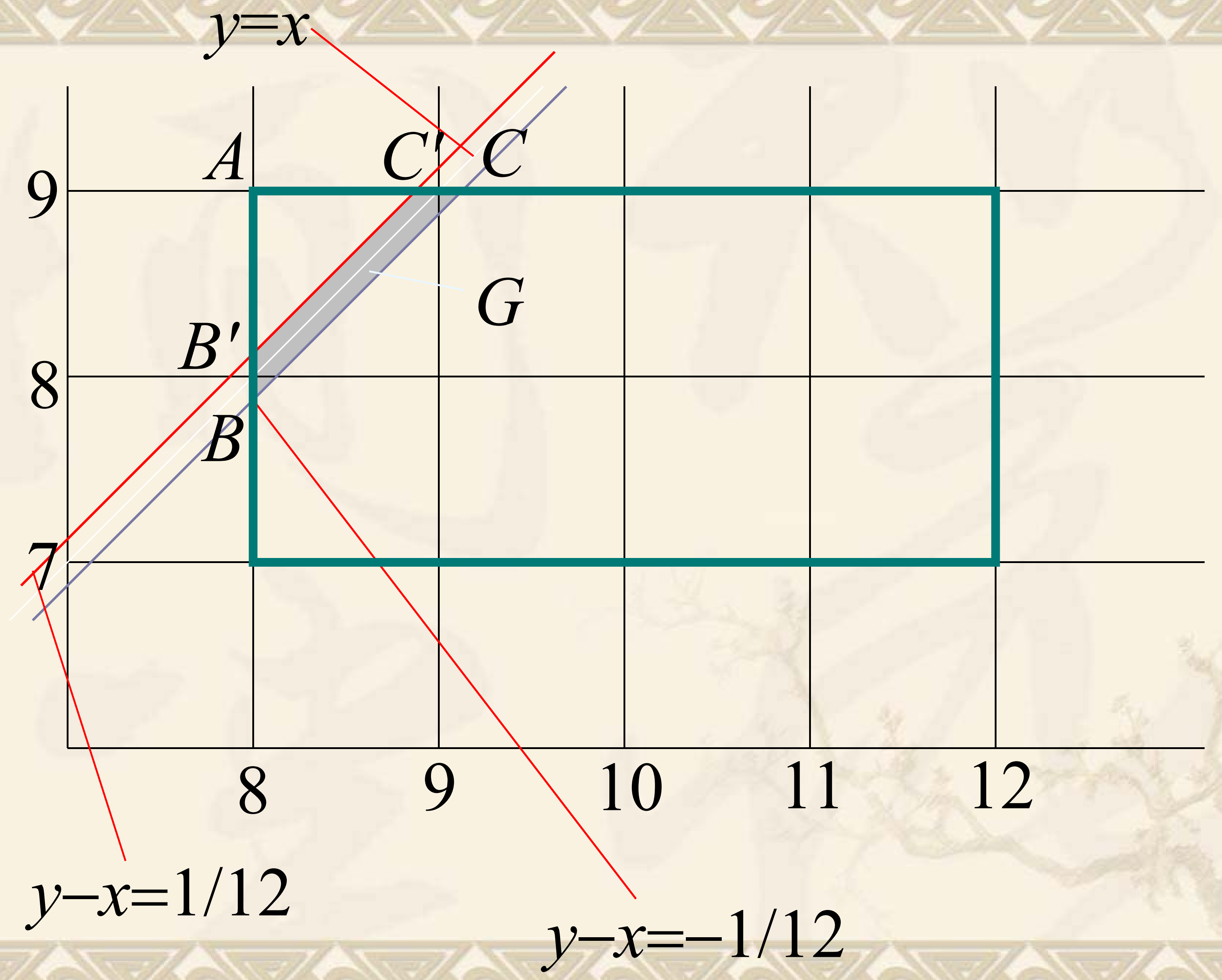
$$=\begin{cases}1/8, & 8<x<12, 7<y<9,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$P\{|X-Y|\le 1/12\}$$

$$=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{的面积}).$$

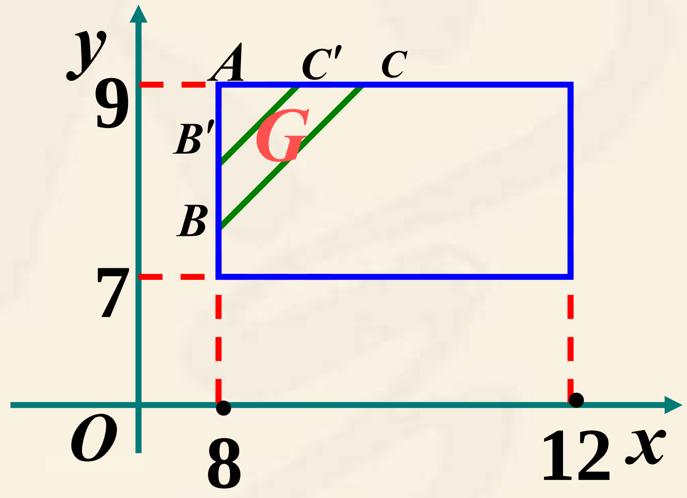




y=x
A
C'
C
9
G
B'
8
B
7
8
9
10
11
12
y–x=1/12
y–x=–1/12

而 G的面积 $=\Delta ABC$的面积 $-\Delta AB'C'$的面积

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{1}{6}.$$



于是 $P\{|X-Y|\le 1/12\}$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{的面积})=\frac{1}{48}.$$

因此负责人和他的秘书 到达办公室的时间相差

不超过 5分钟的概率为 $\frac{1}{48}$.

例4：问二维正态随机变量X和Y是否相互独立？

解：(*X*,*Y*)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

其边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$ 的乘积为:

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}$$

.

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$