Assignments 6.2

一、阅读（Reading）

1. 阅读教材.

2. 课外阅读：

- Application of Transitive Closures in Medicine and Engineering.pdf
- Set Theory（2）-by Gerard O' Regan.pdf

二、问题解答（Problems）

1. 设 R_1，R_2 为 A 上关系，判断并证明下述命题：

（1）R_1反对称$\Rightarrow t(R)$反对称；

反例:设 A={1,2,3}, A 上的二元关系 R={(1,2),(2,3),(3,1)}是反对称关系，

但 t(R)={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)}不是反对称关系.

（2）$r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$；

$r(R_1\cup R_2)=R_1\cup R_2\cup I_A=(R_1\cup I_A)\cup(R_2\cup I_A)=r(R_1)\cup r(R_2)$.

（3）$s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$；

$s(R_1\cup R_2)=(R_1\cup R_2)\cup(R_1\cup R_2)^{-1}=(R_1\cup R_2)\cup(R_1^{-1}\cup R_2^{-1})=(R_1\cup R_1^{-1})\cup(R_2\cup R_2^{-1})=s(R_1)\cup s(R_2)$.

（4）$t(R_1\cup R_2)\subseteq t(R_1)\cup t(R_2)$；

由 $R_1\subseteq(R_1\cup R_2)$，$R_2\subseteq(R_1\cup R_2)$，有 $t(R_1)\subseteq t(R_1\cup R_2)$，$t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$，进而 $t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$.

（5）$t(R_1\cup R_2)=t(R_1)\cup t(R_2)$；

反例：令 A={0,1,2}, R_1={(0,1)}, R_2 ={(1,2)}, 则 $t(R_1)\cup t(R_2)$={(0,1), (1,2)}, 而 $t(R_1\cup R_2)$={(0,1), (1,2)，(0,2)}。因此 $t(R_1\cup R_2)\neq t(R_1)\cup t(R_2)$。

（6）$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow r(R_1) \subseteq r(R_2)$；

注意到 $r(R_1)=R_1 \cup I_A \subseteq R_2 \cup I_A = r(R_2)$.

（7）$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow s(R_1) \subseteq s(R_2)$；

由 $R_1 \subseteq R_2$，则 $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$，有 $s(R_1)=R_1 \cup R_1^{-1} \subseteq R_2 \cup R_2^{-1}=s(R_2)$，于是 $s(R_1) \subseteq s(R_2)$.

（8）$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

先证在 $R_1 \subseteq R_2$ 时，对任意 $n \in N$，$R_1^n \subseteq R_2^n$，对 n 进行归纳.

n=0 时显然，n=1 时为题设，显然真。设 n=k 时真，现证 n=k+1 时亦真.

设$(x,y) \in R_1^{k+1}=R_1^k \circ R_1$，于是存在一 z，$z \in A$，并且$(x,z) \in R_1^k$，$(z,y) \in R_1$，根据归纳假设有$(x,z) \in R_2^k$，$(z,y) \in R_2$，所以$(x,y) \in R_2^k \circ R_2=R_2^{k+1}$. 从而 $R_1^{k+1} \subseteq R_2^{k+1}$ 得证.

于是对任意 $n \in N$，$R_1^n \subseteq R_2^n$.

再证 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.设$(x,y) \in t(R_1)$，于是存在一 m，$(x,y) \in R_1^m$.由于 $R_1^m \subseteq R_2^m$，所以$(x,y) \in R_2^m$，$(x,y) \in t(R_2)$，故 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

三、项目实践（Programming）（Optional）

1. 编写程序，设计并实现关系闭包求解算法.