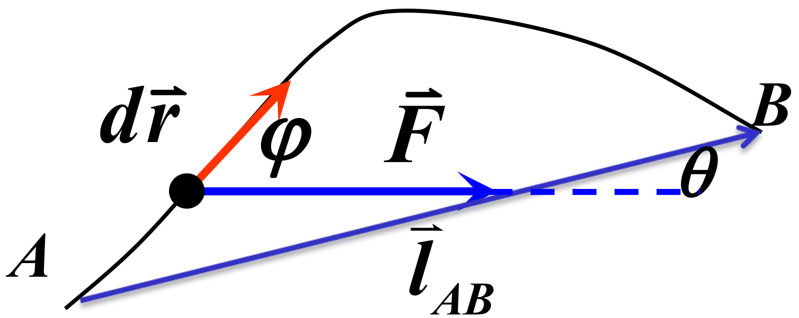
力 学(Mechanics)

第4章 功和能

一、功



对元位移 $\mathrm{d}\vec{r}$，$\boldsymbol{F}$ 做的元功为：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= F\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\varphi$$

从A 到B 沿路径L，$\boldsymbol{F}$ 做的功为：

$$A_{AB} = \int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}A = \int_{(A)}^{(B)}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

沿路径L的线积分

$$A_{AB}=\int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}A=\int_{(A)}^{(B)}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

1 功是矢量的标量积

当质点受力与位移夹角分别为锐角、钝角和直角时，该力分别做正功、负功和不做功;

2 功是过程量

恒力的功：当质点受力不随质点运动位置变化时，

$$\boldsymbol{A_{AB}=?}\quad \vec{F}\cdot\vec{l}_{AB}=Fl_{AB}\cos\theta$$

当质点受力大小不变，且力与运动方向一致时，

$$\boldsymbol{A_{AB}=?}\ FS_{AB}$$

变力的功：当质点受力随质点运动位置变化时，

$$\boldsymbol{A_{AB}=?}\quad \boxed{\int_{(A)}^{(B)}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$$

3合力的功=各分力的功的代数和

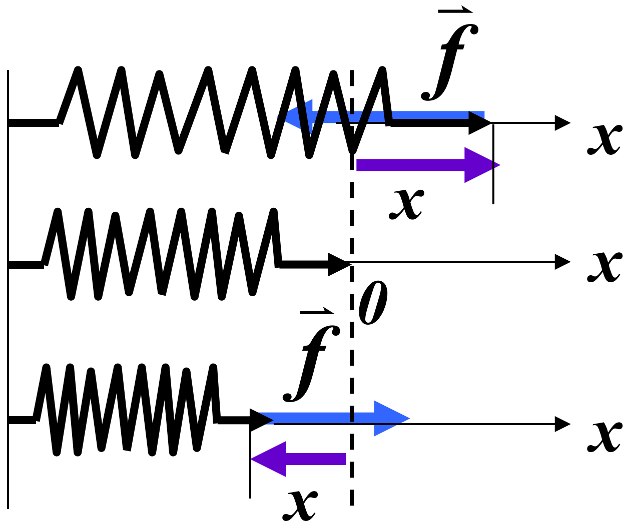
$$A_{AB}=\int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}A=\int_{(A)}^{(B)}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\boxed{=\int_{x_A}^{x_B}F_x\,\mathrm{d}x+\int_{y_A}^{y_B}F_y\,\mathrm{d}y+\int_{z_A}^{z_B}F_z\,\mathrm{d}z}$$

（1） 质点m的位置从x_1到x_2，弹力 $f=-kx$ 的功

$$A=\int_{x_1}^{x_2}-kx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}kx_1^{\ 2}-\frac{1}{2}kx_2^{\ 2}$$



弹簧被外力拉伸或压缩，弹力做负功

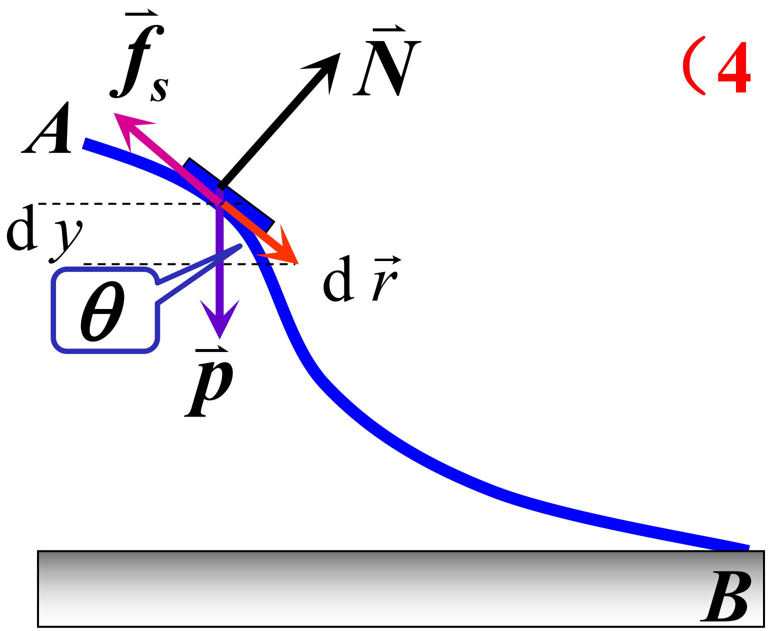
质量为m的滑块沿山坡从A滑到B，求　（2）重力 $\vec{p}$ 的功

$$A_{AB}=\int_{(A)}^{(B)}\vec{p}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{(A)}^{(B)} mg\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta=\int_{(A)}^{(B)} mg\,\mathrm{d}y=mgy_{AB}$$

（3）摩擦力 $\vec{f}_s$ 的功

$$A_{AB}=\int_{(A)}^{(B)}-\mu N\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\int_{(A)}^{(B)}-\mu N\mathrm{d}s$$

摩擦力方向与位移相反，大小随位置变化，做功为负



（4）支持力 $\vec{N}$ 的功

$$A_{AB}=\int_{(A)}^{(B)}\vec{N}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=0$$

支持力方向与位移垂直，大小随位置变化，做功为零

二、动能定理 质点的动能定理

变力做的功可以用动能的增量来计算

$$\boldsymbol{A_{AB}=\int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}} = \frac{1}{2}mv_B{}^2-\frac{1}{2}mv_A{}^2 \boldsymbol{= E_{kB}-E_{kA}}$$

质点的动能的增量等于质点受到合外力做的功

质点系的动能定理

$$A_{AB}=\int_A^B(\vec{F}_{外}+\vec{f}_{内})\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\sum_i(\frac{1}{2}m_i v_{iB}{}^2-\frac{1}{2}m_i v_{iA}{}^2)$$

质点系总动能的增量等于合外力和内力对质点系做的功的和

内力会影响质点系的总动能

例4.5 以 v_0 的速率将一石块扔到结冰的湖面，它能向前滑多远？

用动能定理解：

$$0-\frac{1}{2}mv_0^2=-f_s s$$

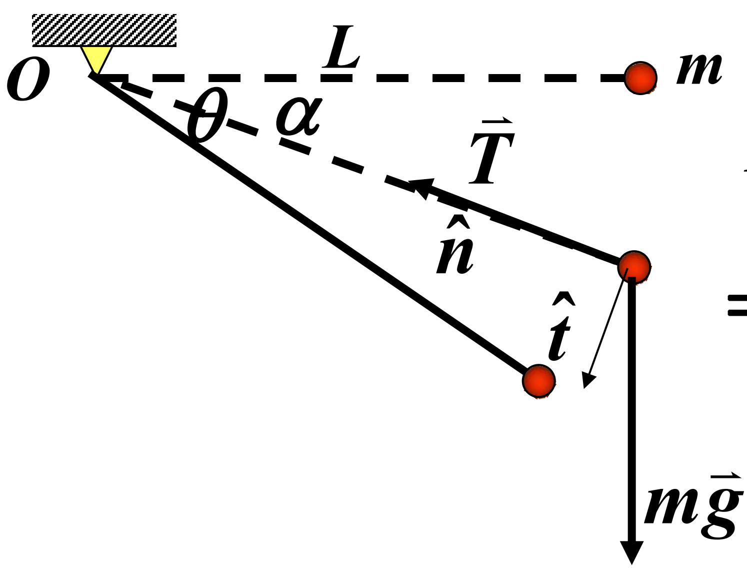
用牛顿定律解：

$$ma=-f_s\rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-f_s$$

$$\rightarrow m\frac{\mathrm{d}v\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}=-f_s$$

$$\rightarrow\int_{v_0}^{0}mv\,\mathrm{d}v=\int_0^s -f_s\,\mathrm{d}s$$

例4.6 求线摆下 θ 角时珠子的速率和线的张力



用动能定理解：

$$A_{AB}=\int_{(A)}^{(B)}(\vec{p}+\vec{T})\cdot\mathrm{d}\vec{r}\ =\frac{1}{2}mv^2-0$$

$$=\int_{(A)}^{(B)}\vec{p}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=mgh=mgl\sin\theta$$

用牛顿定律解：

$$mg\cos\alpha=ma_t=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$g\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}t}=\frac{v}{l}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\alpha}\rightarrow\int_0^\theta gl\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha=\int_0^v v\,\mathrm{d}v$$

三 保守力的功，势能，机械能守恒

1 只有在保守力场，才可以定义由物体位置决定的函数——势能函数。因为保守力做功只与始末位置有关。

2 定义：保守力做功等于势能的减少，即——
保守力做功等于初始位置的势能减去末位置的势能。

$$E_P(A)-E_P(B)=A_{AB}$$

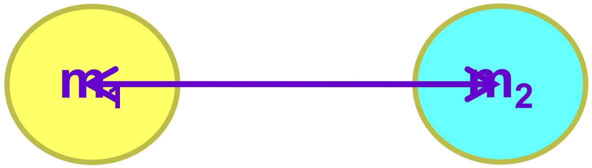
要给出保守力场中各个位置的势能，需要定义势能零点的位置

某位置的势能等于保守力沿任意路径从该位置到势能零点做的功

选势能零点，设B点为势能零点：$E_P(B)=0$

则：$$E_P(A)=A_{A\to \text{势能零点}}$$

3 势能属于有保守力相互作用的系统整体。



m_1和m_2之间的万有引力是保守力，万有引力势能属于m_1和m_2组成的系统

1、万有引力势能

规定两质点相距无穷远时万有引力势能为零

$$E_P(A)=\int_{r_A}^{\infty}-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{-Gm_1m_2}{r_A}$$

2、重力势能：地球与地球表面附近物体所具有的引力势能

3、弹性势能

$$A_{AB}=\int_A^B -kxdx=\frac{1}{2}kx_A^2-\frac{1}{2}kx_B^2$$

$$=E_P(A)-E_P(B)$$

自然长度 $x_B=0$，弹性势能为零 $E_P(A)=\frac{1}{2}kx_A^2$

定义机械能 $E=E_K+E_P$

对于封闭系统，只有保守内力做功时，系统的机械能守恒。

例4.12 求物体从地面出发的逃逸速度

第一宇宙速度(环绕速度) $F_n = m\frac{v_1^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

第二宇宙速度(逃逸速度)

$$-\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_2^2 \geq 0 \rightarrow v_2 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

例4.13 水星m绕日M的远日点为r_1,近日点为r_2, 求水星在两个点的速度大小。

角动量守恒

机械能守恒