# 第3.2节　边缘分布

一、边缘分布函数

二、离散型随机变量的边缘分布律

三、连续型随机变量的边缘分布

四、小结

# 一、边缘分布函数

问题：已知$(X,Y)$的分布,如何确定$X,Y$的分布?

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},\ F(x)=P\{X\le x\},$$

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)=F_X(x)$$

$(X,Y)$关于$X$的边缘分布函数.

**定义** 设$F(x,y)$为随机变量$(X,Y)$的分布函数，

则 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$ 令 $y\to\infty$, 称

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty),$$

为随机变量$(X,Y)$关于$X$的边缘分布函数 .

记为 $F_X(x)=F(x,\infty)$.

同理令 $x\to\infty$,

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=P\{X<\infty,Y\le y\}=P\{Y\le y\}$$

为随机变量$(X,Y)$关于$Y$的边缘分布函数.

# 二、离散型随机变量的边缘分布律

**定义** 设二维离散型随机变量 $(X,Y)$的联合分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots.$

记
$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}$ $(i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}$ $(j=1,2,\cdots)$ 为 $(X,Y)$ 关于 $X$ 和关于 $Y$ 的边缘分布律 .

| $Y \backslash X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_i$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $p_{11}$ | $p_{21}$ | $\cdots$ | $p_{i1}$ | $\cdots$ |
| $y_2$ | $p_{12}$ | $p_{22}$ | $\cdots$ | $p_{i2}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| $y_j$ | $p_{1j}$ | $p_{2j}$ | $\cdots$ | $p_{ij}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | |

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},\ i = 1,2,\cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij},\ j = 1,2,\cdots.$$

因此得离散型随机变量关于$X$和$Y$的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\sum_{y_j\le y}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}.$$

**例1** 已知下列分布律求其边缘分布律.

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{16}{49}$ | $\frac{12}{49}$ |
| 1 | $\frac{12}{49}$ | $\frac{9}{49}$ |

解

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | $p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{12}{42}$ | $\frac{12}{42}$ | $\frac{4}{7}$ |
| 1 | $\frac{12}{42}$ | $\frac{6}{42}$ | $\frac{3}{7}$ |
| $p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | 1 |

注意　联合分布 $\longrightarrow$ 边缘分布

联合分布 $\not\longleftarrow$ 边缘分布

# 三、连续型随机变量的边缘分布

**定义** 对于连续型随机变量 $(X,Y)$, 设它的概率密度为 $f(x,y)$, 由于

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x,$$

记

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$$

称其为随机变量 $(X,Y)$ 关于 $X$ 的边缘概率密度.

同理可得 $Y$ 的边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

$Y$ 的边缘概率密度.

**例2** 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 具有联合概率密度

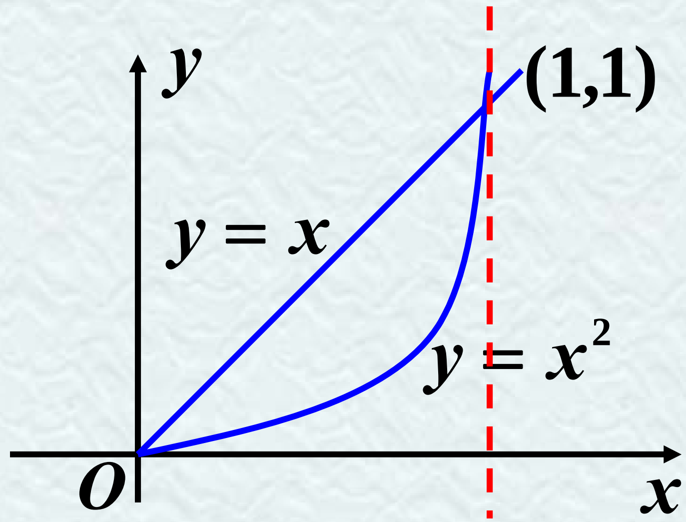
$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

**解** 当 $0\le x\le 1$时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

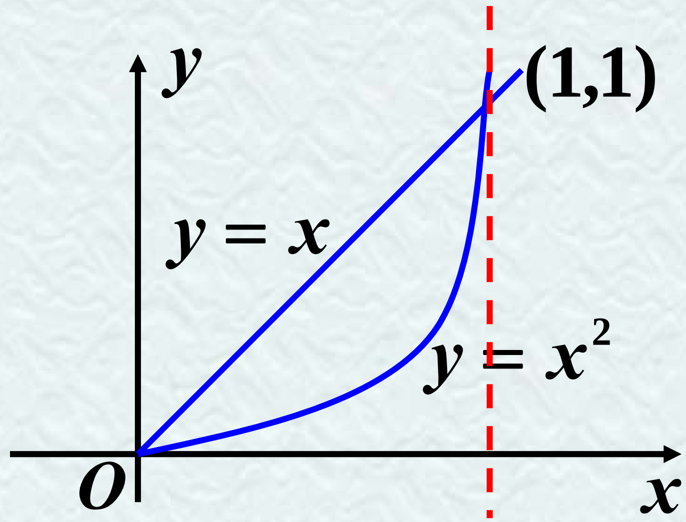
$$=\int_{x^2}^{x} 6\,\mathrm{d}y$$



$= 6(x - x^2).$

当 $x < 0$ 或 $x > 1$时,

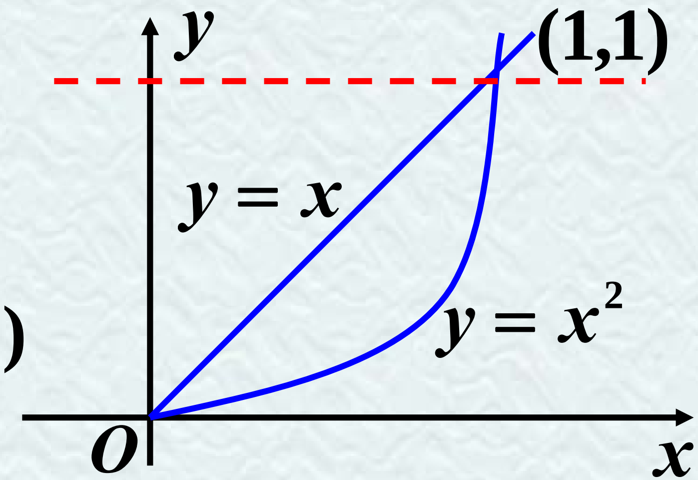
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}\,y = 0.$$




因而得 $$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

当 $0 \le y \le 1$ 时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$




$$= \int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,\mathrm{d}x = 6(\sqrt{y} - y)$$

$$= 6(\sqrt{y} - y).$$

当 $y < 0$ 或 $y > 1$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x = 0.$

得 $$f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

**例4** 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty,$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数,且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0,$

$-1 < \rho < 1.$

试求二维正态随机变量 的边缘概率密度.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$

由于 $$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$=\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

于是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-1}{2(1-\rho)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}dy,$$

令 $$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$$

则有 $$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

即 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<\infty.$$

同理可得

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty<y<\infty.$$

**二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且都不依赖于参数 $\rho$.**

## 请同学们思考

边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布一定是二维正态分布吗?

答 不一定．举一反例以示证明.

令 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),$$

显然, $(X,Y)$ 不服从正态分布, 但是

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}.$$

**因此边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布不一定是二维正态分布.**

# 四、小结

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x.$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}\,y.$$

$$F_Y(x) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\right]\mathrm{d}\,y.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x.$$

联合分布 $\underset{\cancel{\longleftarrow}}{\longrightarrow}$ 边缘分布

# 备份题

**例1** 设$(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

求 (1) $f_X(x)$;  (2) $P\{X+Y \le 1\}$.

**解** 当$x > 0$时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_x^{\infty} e^{-y}\,\mathrm{d}y = e^{-x}.$$

当 $x \le 0$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$

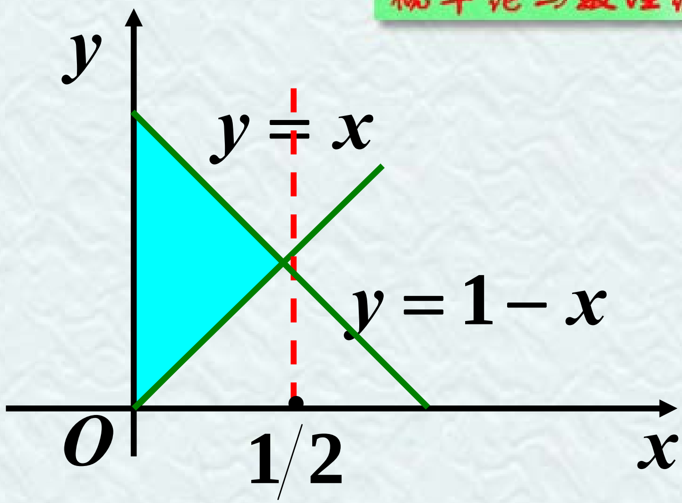
故 $$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

(2) $P\{X+Y\le 1\}$

$$= \iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} e^{-y}\,\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} [e^{-(1-x)} - e^{-x}]\,\mathrm{d}x = 1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}.$$



**例2** 一整数 $N$ 等可能地在 $1,2,3,\cdots,10$ 十个值中取一个值. 设 $D=D(N)$ 是能整除 $N$ 的正整数的个数，$F=F(N)$是能整除$N$的素数的个数.试写出 $D$ 和 $F$ 的联合分布律.并求边缘分布律.

**解**

| 样本点 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 |
| $F$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |

由此得 $D$ 和 $F$ 的联合分布律与边缘分布律：

| 样本点 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 |
| $F$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |

| $F \backslash D$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $P\{F=j\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $1/10$ | 0 | 0 | 0 | $1/10$ |
| 1 | 0 | $4/10$ | $2/10$ | $1/10$ | $7/10$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | $2/10$ | $2/10$ |
| $P\{D=i\}$ | $1/10$ | $4/10$ | $2/10$ | $3/10$ | 1 |

或将边缘分布律表示为

| $D$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $1/10$ | $4/10$ | $2/10$ | $3/10$ |

| $F$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_k$ | $1/10$ | $7/10$ | $2/10$ |