2017 年概率 A 期末试卷答案

一填空题（3 分）

1. $\Omega=\{(x,y)\big|x+y=1,\text{且}\,0<x<1,0<y<1\}$； 2. 0.4； 3. $1/9$；

4. $f(x,y)=\begin{cases}6, & (0<x<1,x^2<y<x)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$； 5. 1/2

二选择题（3 分）

B； C；C；D；D。

三

11.（10 分）解：设 A 表示考生会解这道题，B 表示考生选出正确答案，则有

（1）根据全概率公式可得

$$P(A)=0.8,\ P(\overline{A})=0.2,P(B\big|A)=1,P(B\big|\overline{A})=\frac{1}{4}=0.25\,,$$

$$P(B)=P(A)\cdot P(B\big|A)+P(\overline{A})\cdot P(B\big|\overline{A})=0.8\times1+0.2\times0.25=0.85\,.$$

（2）根据条件概率公式可得

$$P(A\big|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B\big|A)}{P(B)}=\frac{0.8\times1}{0.85}=\frac{16}{17}\approx0.941$$

12. （6 分）

13. 解：（1）（6 分）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dy, & 0\le x\le1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\le x\le1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dx, & 0\le y\le2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{y}{6}+\frac{1}{3}, & 0\le y\le2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$， 所以X 和Y不独立.

（2）（4 分）$P(X+Y\ge1)=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=1-\int_0^1dx\int_0^{-x+1}\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dy=\frac{65}{72}.$

14.（10 分） **解：** 由独立性可得

(X,Y)	（1，2）	（1，4）	（3，2）	（3，4）
$P(X=x,Y=y)$	0.18	0.12	0.42	0.28
$X+Y$	3	5	5	7
$X-Y$	－1	－3	1	－1

所以 $Z=X+Y$ 的分布律为$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0.18 & 0.54 & 0.28 \end{pmatrix}$，$W=X-Y$ 的分布律为$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0.12 & 0.46 & 0.42 \end{pmatrix}$

15.（10 分） $E(X)=\int_0^1 dx\int_0^1 x(2-x-y)dy=\frac{5}{12}$， $E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^1 x^2(2-x-y)dy=\frac{1}{4}$

$D(X)=\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{11}{144}$， 由对称性 $E(Y)=\frac{5}{12}$， $D(Y)=\frac{11}{144}$

$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^1 xy(2-x-y)dy=\frac{1}{6}$， $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{144}$

所以 X和Y的相关系数为: $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-\frac{1}{11}$.

16.（8 分）解:（1)（3 分）X 服从二项分布，参数：$n=100,\ p=0.2$，即 $X\sim B(100,0.2)$，

其概率分布为

$$P(X=k)=C_{100}^k 0.2^k 0.8^{100-k},\quad k=0,1,\cdots,100\text{；}$$

（2)（5 分） $E(X)=np=20,\quad D(X)=np(1-p)=16$， 根据德莫弗–拉普拉斯定理

$$P\{14\le X\le 30\}=P\left\{\frac{14-20}{4}\le\frac{X-20}{4}\le\frac{30-20}{4}\right\}=P\left\{-1.5\le\frac{X-20}{4}\le 2.5\right\}$$

$$\approx\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=\Phi(2.5)-[1-\Phi(1.5)]$$

$$=\Phi(2.5)+\Phi(1.5)-1=0.994+0.933-1=0.927.$$

17.（8 分）解：似然函数为 $L(x_1,\cdots,x_n,\ \lambda)=\prod_{i=1}^n \lambda\alpha x_i^{\alpha-1}e^{-\lambda x_i^\alpha}$，

$(x_i>0,i=1,\cdots,n)\ \Rightarrow L(x_1,\cdots,x_n,\ \lambda)=\lambda^n\alpha^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i^\alpha}\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}$，

取对数，有 $\ln L=n\ln\lambda+\ln\alpha^n-\lambda\sum_{i=1}^n x_i^\alpha+(\alpha-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i$

令 $\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^n x_i^\alpha=0$，便得 λ 的最大似然估计量为：$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha}$.

18.（8 分）$\overline{x}=403$， $s=6.16$， $X\sim N(400,\sigma^2)$， $(\alpha=0.05)$，

因$\left|\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{403-400}{6.16/\sqrt{16}}\right|\approx 1.948<t_{0.025}(16-1)=2.1315$，所以合格。