

第 10 章 参考解答 (提示)

1. 8 个

2. 根据推论 10.1, 题述二序列均不能

3. 证明

设图 G 具有 $n (n \geq 2)$ 个结点。由于每个结点仅能与其它 $n-1$ 个结点邻接, 因此, 每个结点度数最大为 $n-1$ 。

假设 G 中不存在度数相同的结点。于是, 图 G 的 n 个结点度数分别为 $0, 1, 2, \dots, n-1$ 。

现在去掉图 G 中结点度数为 0 的孤立点, 得到 G' , 则 G' 结点度数序列为 $1, 2, \dots, n-1$ 。但注意到, G' 结点数为 $n-1$, 其结点的度数不超过 $n-2$, 矛盾。

因此, 图 G 中至少存在两个度数相同结点。

5. 可以对边数进行归纳, 注意到每条边对于图的总的出度、入度的度数和之影响均是 1 度

6. 证明: 在任何有向完全图中, 所有结点入度的平方和等于所有结点出度的平方和。

根据有向完全图的定义, 其每个结点的出度与入度相等, 因此, 结论是显然成立的。但需要注意的是, 此结论对于一个去掉方向后是完全图的有向图 D 是否也成立?

下面予以简单证明:

设图 D 有 n 个结点, 由图 D 的性质注意到:

对任意结点的出度、入度之和为 $n-1$, 即

$$\deg^+(v) + \deg^-(v) = n-1 \quad (*)$$

且所有结点出度之和等于所有结点入度之和, 即

$$\sum \deg^+(v) = \sum \deg^-(v) \quad (**)$$

现在需要证明 $\sum (\deg^+(v))^2 = \sum (\deg^-(v))^2$, 即

$$\sum (\deg^+(v))^2 - \sum (\deg^-(v))^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum ((\deg^+(v))^2 - (\deg^-(v))^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\deg^+(v) + \deg^-(v)) (\deg^+(v) - \deg^-(v)) = 0 \quad (***)$$

由 (*) 式, (***) 式左端即

$$\begin{aligned} & \sum (n-1) (\deg^+(v) - \deg^-(v)) \\ &= (n-1) \sum (\deg^+(v) - \deg^-(v)) \\ &= (n-1) (\sum \deg^+(v) - \sum \deg^-(v)) \\ &= (n-1) \cdot 0 \quad (\text{据 } (**) \text{ 式}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此, (***) 成立。

从而, $\sum (\deg^+(v))^2 - \sum (\deg^-(v))^2 = 0$

即 $\sum (\deg^+(v))^2 = \sum (\deg^-(v))^2$

7. 证明: K_n 的边数 $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$, 且对于一般的 n 个结点的图 G 其边数 $|E(G)| \leq \frac{n(n-1)}{2}$ 。

8. 设 G 是具有 4 个结点的完全图, (1) G 有多少个子图? (2) G 有多少个生成子图? 请将这些子图构造出来。

(1) 首先考虑结点, 再进一步考虑边, 事实上应用排列组合最容易。

第一类: 1 个结点的子图为 $C_4^1 = 4$

第二类: 2 个结点的子图为 $C_4^2 (C_1^0 + C_1^1) = 12$

第三类: 3 个结点的子图为 $C_4^3 (C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3) = 32$

第四类：4 个结点的子图为 C_4^4 ($C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + \dots + C_6^5 + C_6^6$) = 64

总计 K_4 有 112 个子图。

(2) 有 64 个生成子图

0 条边：1 个

1 条边： $C_6^1=6$ 个

2 条边： $C_6^2=15$ 个

3 条边、4 条边、5 条边、6 条边……

总计： $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + \dots + C_6^5 + C_6^6 = 64$

9. 证明思路：用结点表示计算机，如果二计算机可以进行直接数据传递，则在相应而结点间加边，从而可以将原问题表示为一个简单图 G ，如果图 G 是连通的，则表示在这 $2n$ 台计算机中任何两台之间都可以传递数据（也可能要通过其它的计算机）。

应用反证法来证明 G 是连通的。

假设 G 不连通，则至少存在两个分图，设其中二个分图的结点数分别为 n_1, n_2 ，结点 u, v 分别在这两个分图中，于是，容易得到： $d(u) + d(v) \geq 2n$ 与 $d(u) + d(v) \leq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = 2n - 2$ 的矛盾。

此题还可以用证明 G 为 Hamilton 图的方法来证明其连通性。

10. 用简单图来表示上述问题：结点表示相关人员，如果二人可以说同一语言，则在相应的二结点间加边。如果得到的图是连通图则表示上述七人可以任意二人进行交谈。

11. 反证法，假设不是连通图，至少有 2 个分图，根据定理 10.3，可知 $m \leq (n - w + 1)(n - w) / 2 \leq (n - 1)(n - 2) / 2$ 。矛盾。

14. 环图 C_n ： n ，轮图 $W_{1, n}$ ： $2n$ ，超立方体 Q_n ： $n \cdot 2^{n-1}$

15. 注意到自补图相应完全图边数为 $e = n(n - 1) / 2$ ，图 G 与其自补图的边数是相等的。

16. 对于 G' 中任意二结点 v_1, v_2 ，

(1) 若 v_1, v_2 分别在原图 G 的不同分图中，则根据补图性质，可知， v_1, v_2 在补图中连通；
(2) 若 v_1, v_2 分别在原图 G 的同一个分图 G_1 中，由于 G 不连通，则可以找到 G 的另一分图 G_2 中结点 v_3 ，由补图性质可知， v_1 与 v_3 连通， v_2 与 v_3 连通，从而 v_1, v_2 在 G' 中通过 v_3 连通

综上可知， G' 连通，原命题成立。

17. 用六个结点表示 6 个人，结点间存在边表示人员间相互认识，否则表示人员间相互不认识，于是得到一个简单图 G 。

考虑结点 v ，在 G 中或 G' 中与 v 关联的边有至少有 3 条。不妨设在 G 中与 v 关联的边有三条，这三边的另一个端点分别是 u_1, u_2, u_3 。再考虑 u_1, u_2, u_3 间的边情况，如果 u_1, u_2, u_3 中有二个结点间有边，不妨设 u_1, u_2 间有边，那么就已经得到一个由 v, u_1, u_2 组成的 K_3 ，如果 u_1, u_2, u_3 中任意二结点间没有边，那么在 G' 中存在由 u_1, u_2, u_3 组成的 K_3 。

18. 首先得到有向图 G (设其结点数为 n) 的邻接矩阵 A ，之后求解 A^n 。

对于 A^n ，

如果 A^n 的元素 (ij) 值均为 1，则表明 G 为强连通、

如果 (ij) 或 (ji) 值为 1，则 G 为单向连通，否则，

在不考虑边 G 的方向得到图 G' ， G' 的邻接矩阵 A' ，求解 $(A')^n$ 。如果 $(A')^n$ 的元素 (ij) 值均为 1，则表明 G 为弱连通，否则 G 不连通。

19. 不同构。

20. 两两同构。

21. 不同构子图数有 18 个。

22. 3 个

23. 4 个

24. 6 个

25. 5 个

26. 可以通过判断 K_n 中是否存在欧拉图来讨论：当 n 为奇数时，一笔可以画出；当 n 为偶数时需要 $n/2$ 笔画出。

27. (1) K_3 (2) K_5

28.

首先，容易根据定理 10.3 判断 G 是连通图。

其次，假设 G 不是 Hamilton 图，根据 Hamilton 图的判定定理 10.10，存在二结点 u, v ，其度数均之和小于 n ，于是，而其它结点构成完全图的情况下， G 度数之和最大，由握手定理：

$2m < 2((n-2)(n-2-1)/2) + 2n = (n-1)(n-2) + 4$ ，（或直接分析边数 m 的最大值）

于是 $m < (n-1)(n-2)/2 + 2$ 。

矛盾。

29. (3)(4) 证明：

设 n 个人分别为 v_1, v_2, \dots, v_n

对任意 $v_i, v_j \in V$ ，假设 v_i 与 v_j 不相邻（即 v_i, v_j 所代表的人不认识），则对任意 v_k ($k \neq i, j$)，必与 v_i, v_j 相邻，否则与已知矛盾，下面进行证明：

①不妨假设 v_k 与 v_i, v_j 均不相邻，则 $\deg(v_i) + \deg(v_j) \leq n-3$ ，即 v_i, v_j 所代表同起认识的人不超过 $n-3$ 个，与题设矛盾。

②进一步，假设 v_k 与 v_i 相邻而与 v_j 不相邻，则 v_k, v_i 所代表的人均不认识 v_j 所代表的人，这与已知矛盾。

所以， v_k 与 v_i, v_j 均相邻。

于是， v_i 与 v_j 都与其余 $n-2$ 个结点相邻

从而 $\deg(v_i) + \deg(v_j) = n-2 + n-2 = 2n-4$

由 $n \geq 3$ 知 $2n-4 \geq n-1$

根据定理可知图 G 中存在哈密顿路，即……（略）

又若 $n \geq 4$ 则 $2n-4 \geq n$ ，由定理可知， G 中存在哈密回路，即，…（略）

证毕。

30. 可以考虑用数学归纳法，需要注意 Q_n 的构造方式（笛卡尔积）。

第 11 章 习题参考解答（提示）

1 有 3 棵。

3 9 个度数为 1 的结点。

4 显然，如果不含边 e ，则其子图不连通，也得不到生成树。

5 如果某生成树不含该边 e ，则将该边加入该生成树，必将产生一个环，删除该环上原生成树的一边，则得到的新生成树即含边 e 。

6 错。注意到分割边。

7 注意到，一棵树的任二结点间添加一条边 e_1 则得到一条包含边 e_1 的回路 C_1 ，如果添加不同于 e_1 的另一条边 e_2 ，则得到不同于 C_1 的回路 C_2 ，因此，一个连通图中回路的数目是

其边数与其生成树边数之差。题中图 G 含有 k 个分图，容易求得所有分图的生成树的边数之和为 $n-k$ ，从而，图 G 中回路数即每个分图中回路数之和为 $m-(n-k)=m-n+k$ 。

8 (1) 可以。只需要将 Kruskal 算法的每次选择为权值最大的边即可

(2) 可以，执行算法，直到所有结点都访问过。

11 注意到有向图的邻接矩阵表明了结点间边的方向性。

12 请模仿例 11.5

14 设 T 的叶子结点数为 t ，则根据定理 11.5 知其分支结点数为 $t-1$ ，于是有：

T 的结点数 $n=i+t=2t-1$ ，故 n 为奇数且 T 的叶子结点数 $t=(n+1)/2$ 。（原题漏印“叶子”）

20 将分图加 $k-1$ 条边构成连通图，再应用欧拉公式即可得

22 利用 $2m=f \cdot l$ 以及欧拉公式即可得

23 注意到， K_5 的一个细分为题图的一个子图

24 分别是 2, 2, 1