离散数学课堂测验（集合论）

说明：闭卷，可携带考试者本人设计的笔记（A4 纸大小，1 页）. 需要写出详细求解步骤，尽量展示你的工作，独立完成，不可讨论.

1. (10 分)设 A，B 为任意两个集合，证明：若 $A\subseteq B$，则 $P(A)\subseteq P(B)$.

对$\forall x$,

$x\in P(A)$，有 $x\subseteq A$，又 $A\subseteq B$，于是 $x\subseteq B$，从而 $x\in P(B)$，

故 $P(A)\subseteq P(B)$.

2. (20 分)证明：$R_1 o(R_2\cap R_3)\subseteq(R_1 o R_2)\cap(R_1 o R_3)$.

$\forall<x,y>$，$<x,y>\in R_1 o(R_2\cap R_3)$
$\Leftrightarrow\exists z(xR_1z\wedge z(R_2\cap R_3)\,y)\Leftrightarrow\exists z(xR_1z\wedge(zR_2y\wedge zR_3y))$
$\Leftrightarrow\exists z((xR_1z\wedge zR_2y)\wedge(xR_1z\wedge zR_3y))$
$\Rightarrow\exists z(xR_1z\wedge zR_2y)\wedge\exists z(xR_1z\wedge zR_3y)$
$\Leftrightarrow x(R_1 o R_2)y\wedge x(R_1 o R_3)y\Leftrightarrow x((R_1 o R_2)\cap(R_1 o R_3))y$
$\Leftrightarrow<x,y>\in(R_1 o R_2)\cap(R_1 o R_3)$.

3. (20 分)证明：有关系 R, G，若 $R\subseteq G$ 且 G 传递，则 $R^n\subseteq G$，$n\in N$, $n>0$.

用归纳法证明，对 n 进行归纳.

n=1 时，$R^n=R\subseteq G$.

n=2 时，$\forall<x,y>$，$<x,y>\in R^2$，即$\exists z(<x,z>\in R\wedge<z,y>\in R)$， 而 $R\subseteq G$，于是$<x,z>\in G\wedge<z,y>\in G$，又 G 传递，从而$<x,y>\in G$. 故 $R^2\subseteq G$.

现假设 n<k 时，$R^n\subseteq G$ 成立. 下面证明 n=k 时，$R^n\subseteq G$ 成立.

n=k 时，$\forall<x,y>$，$<x,y>\in R^n=RoR^{k-1}$，即$\exists z(<x,z>\in R\wedge<z,y>\in R^{k-1})$， 而 $R\subseteq G$ 且 $R^{k-1}\subseteq G$，于是$<x,z>\in G\wedge<z,y>\in G$，又 G 传递，从而$<x,y>\in G$. 故 $R^k\subseteq G$, 即 $R^n\subseteq G$.

综上，原命题得证.

4. (25 分)定义整数集合 Z 上同余关系 $R=\{(x,y)|x\equiv y(\mathrm{mod}\ n)$即 $x-y=kn\ (k\in Z)$, $x,y\in Z$, $n\in\{2,3,4,\ldots\}\}$. 证明 R 为等价关系，并给出相应等价类.

(1)对$\forall x\in Z$，有 $x-x=0=0\cdot n$，于是$(x, x)\in R$，所以 R 自反；

(2)$\forall(x,y)\in R$，有 $x-y=kn$，有 $y-x=(-k)n$，于是$(y, x)\in R$，故 R 对称；

(3)$\forall(x,y)\in R$，$(y,z)\in R$，有 $x-y=k1n$，$y-z=k2n$，于是 $x-z=(k1+k2)n$，从而$(x,z)\in R$，故 R 传递.

综上，R 是 Z 上等价关系.

R 在 Z 上定义了 n 个等价类：

$[0]=\{kn|k\in Z\}$，$[1]=\{1+kn|k\in Z\}$，$[2]=\{2+kn|k\in Z\}$，…，

$[n-1]=\{(n-1)+kn|k\in Z\}$.

5. (25 分)定义 P(A)上的包含关系 $R=\{(x, y) | x\subseteq y, x, y\in P(A)\}$，请证明 R 是一个偏序关系，并画出 $A=\{a, b, c\}$时的哈斯图.

(1)对$\forall x\in P(A)$，有 $x\subseteq x$，于是$(x, x)\in R$，所以 R 自反；

(2)$\forall(x,y)\in R$ 且$(y,x)\in R$，有 $x\subseteq y$ 且 $y\subseteq x$，于是 $x=y$，故 R 是反对称的；

(3)$\forall(x,y)\in R$，$(y,z)\in R$，有 $x\subseteq y$ 且 $y\subseteq z$，于是 $x\subseteq z$，从而$(x,z)\in R$，故 R 传递.

综上，R 是 P(A)上偏序关系.

其哈斯图如下：