第14章 电磁感应

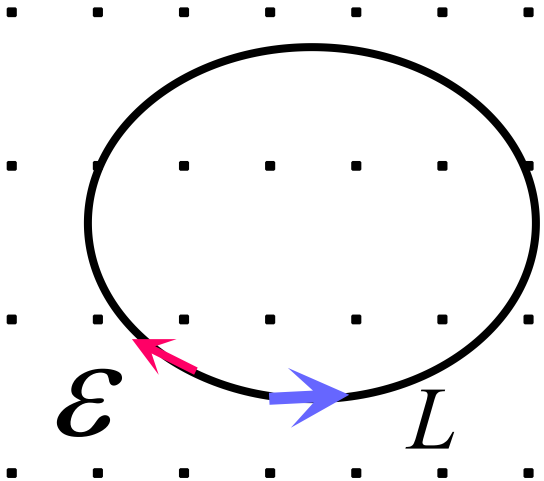
一 法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$ 该式可以确定感应电动势的大小和方向

首先规定回路正方向——按照磁场方向取右手螺旋

$$\phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} > 0$$

均匀磁场 $\vec{B}$



当磁场增强， 即 $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} > 0$

则 $\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} < 0$

说明 ε 与 L 的绕行方向相反

1、磁链 *magnetic flux linkage*

是N匝串联回路的总磁通： $\boxed{\psi = \sum_i \phi_i}$

则有 $\boxed{\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}}$

2、纯电阻回路中的感应电流和感应电荷

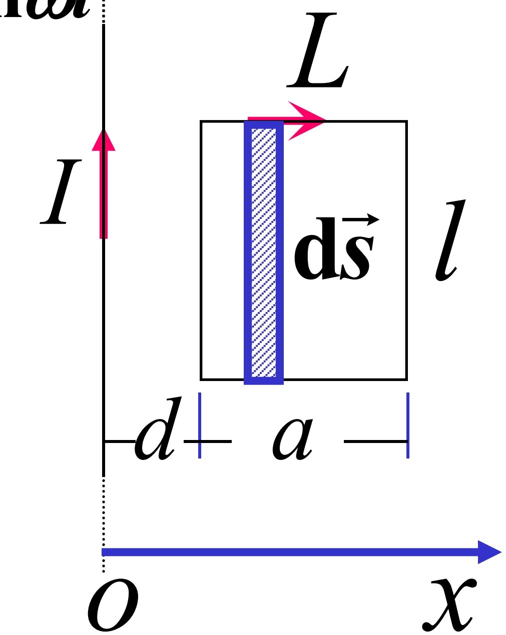
回路中的感应电流 $I = \dfrac{\varepsilon}{R} = -\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$

Δt时间通过的电量

$$q = \int_{\Delta t} I\,\mathrm{d}t = \int_{\Delta t} -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\Delta\phi$$

例1. 直导线通交流电，置于磁导率为μ 的介质中求：与其共面的N 匝矩形回路中的感应电动势。已知$I = I_0 \sin\omega t$

其中I_0和ω是大于零的常数



解：设当$I > 0$时，电流方向向上，取回路L方向为__（顺、逆）时针

建立x轴，在坐标x处取**宽dx**的窄条作为面元

$d\vec{S}$ 的方向为垂直于黑板向__（里\外），

dS 的磁通量$d\varphi = \underline{?}$ $\dfrac{\mu I}{2\pi x} l\mathrm{d}x$

积分求N 匝矩形回路的磁链为 $\Psi = N\displaystyle\int_d^{d+a} \frac{\mu I}{2\pi x} l\,\mathrm{d}x = \frac{N\mu Il}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$

感应电动势 $\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mu_0\mu_r N I_0 l\omega}{2\pi}\cos\omega t \ln\dfrac{d+a}{d}$

交变的电动势，当$\varepsilon_i > 0$ 回路中的电动势为顺时针方向

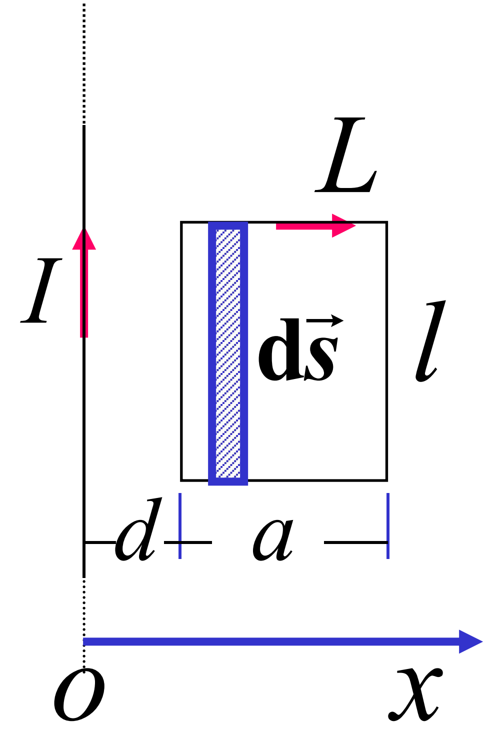
I恒定，平面线圈以速率v匀速向右运动，结果如何？

设t=0时刻，平面线圈的位置如图示。

$$\Psi = N\int_{d+vt}^{d+a+vt}\frac{\mu I}{2\pi x}l\mathrm{d}x$$

$$= N\frac{\mu Il}{2\pi}\ln\frac{d+a+vt}{d+vt}$$

感应电动势 $\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$



$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{d}{dt}\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

B的变化—感生

S的变化—动生

引起回路中磁通量变化的方式有：

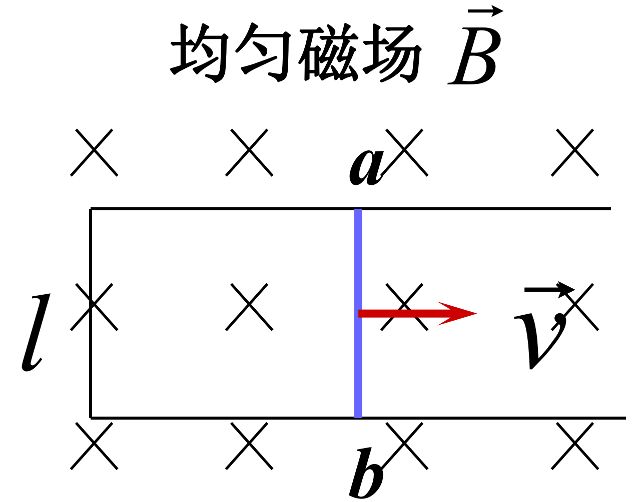
1. 导线回路所在磁场不变，导线相对磁场的运动引起导线回路面积的变化，形成动生电动势；

2. 导线回路面积不变，导线回路所在磁场变化，形成感生电动势；

电动势的定义是：将单位正电荷从负极通过电源内部移动到正极，非静电力作的功

3. 产生动生电动势的非静电力是洛伦兹力，产生感生电动势的非静电力是涡旋电场力。

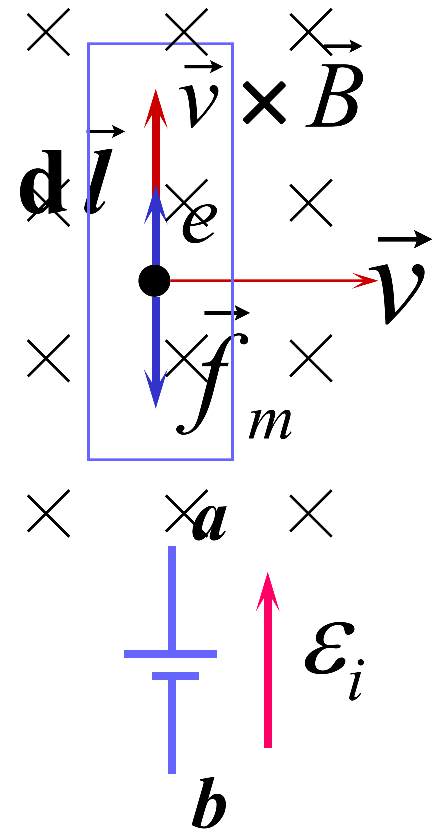
二、动生电动势



导体内的自由电子随导体以速率v 运动，受到洛伦兹力：

$$\boxed{\vec{f}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}}$$

因此形成动生电动势非静电力——洛仑兹力



作用在单位正电荷上的非静电力 $\boxed{\vec{K} = \vec{v} \times \vec{B}}$

$$\boxed{\varepsilon = \int \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l}} = \int_{(ba)} vB\mathrm{d}l = vBl$$

电势高的方向

小测试

$$\varepsilon_{ab}=\int_{(a)}^{(b)}\vec{K}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{(a)}^{(b)}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

导线ab在均匀磁场中做图示匀速运动时，$\varepsilon_{ab}=$ _b_，

$a.vBl_{ab}$

$b.0$

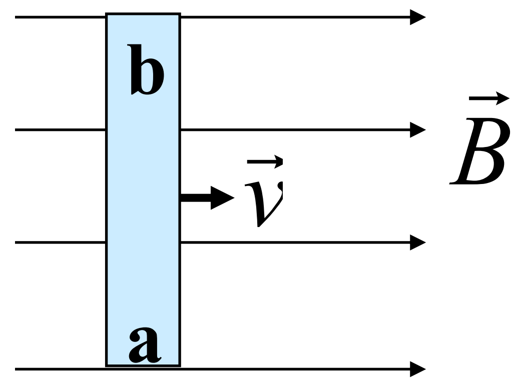
原因分别为：

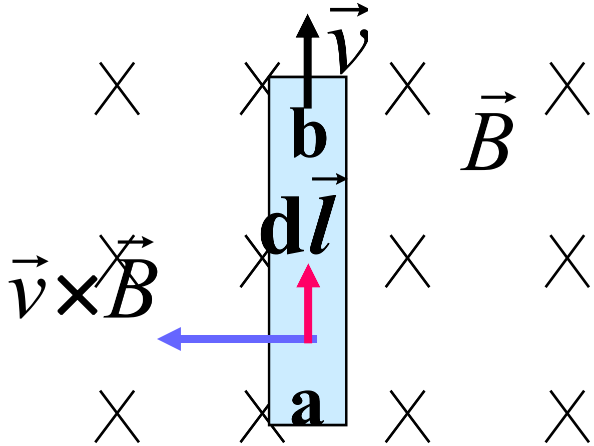
上图中 _a_，下图中 _c_，

$a.K=0$

$b.K=vB$，而且$\vec{K}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=K\mathrm{d}l$

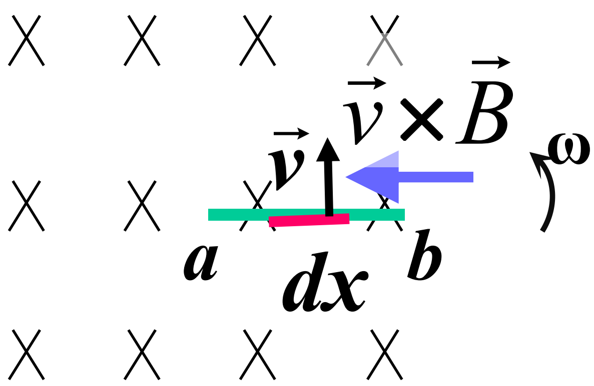
$c.K=vB$，但是$\vec{K}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$





$$\varepsilon_{ab} = \int_{(a)}^{(b)} \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(a)}^{(b)} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

例3. a.一长为l的金属棒ab在均匀磁场B 中绕a端以角速度ω 转动;



在距a端x处取线元dx

$$\mathrm{d}\,\varepsilon = vB\,\mathrm{d}\,x$$

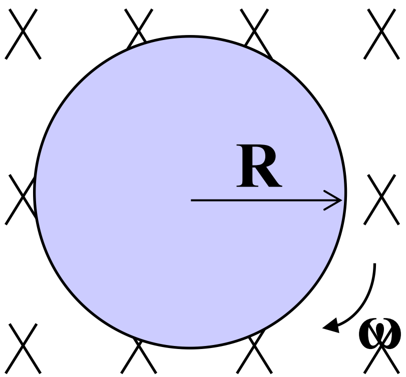
$$= \omega x B\,\mathrm{d}\,x$$

$$\varepsilon_{ab} = \int_0^l -\omega x B\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}\omega B l^2$$

方向 $b \rightarrow a$ ，a端电势高

旋切磁力线的同类型问题——

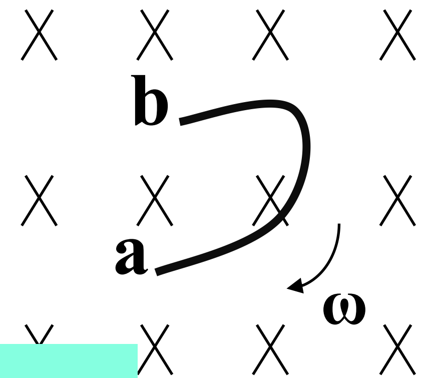
b.半径R的金属圆盘绕圆心转动;



$$\frac{1}{2}\omega BR^2$$

盘边电势高

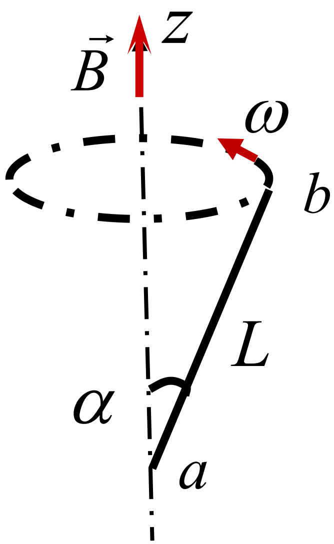
d.任意形状导线ab绕a端转动;



$$\frac{1}{2}\omega B\overline{ab}^2$$

b端电势高

c.长l的金属棒绕一端转动;



$$\frac{1}{2}\omega BL^2\sin^2\alpha$$

b端电势高

三. 感生电场，感生电动势

1. 原则：感生电动势=感生电场力做功=负的磁通量的变化率

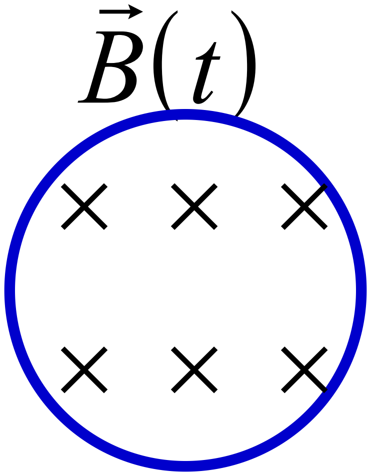
$$\varepsilon_i = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

***S*是以*L*为边界的面积**

***S*与*L* 的方向为右螺关系**



在 $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{i}}$ 具有特殊分布时才能被计算出来

如长直螺线管内部的场：空间均匀的磁场被限制在圆柱体内，磁感强度方向平行柱轴。

当磁场随时间变化 则感生电场线是具有轴对称分布的圆环

2. 感生电场的性质

共同之处：对其中的电荷有力的作用

不同之处：

无源 $$\oiint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

有源 $$\oiint_S \vec{E}_q \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i内}$$

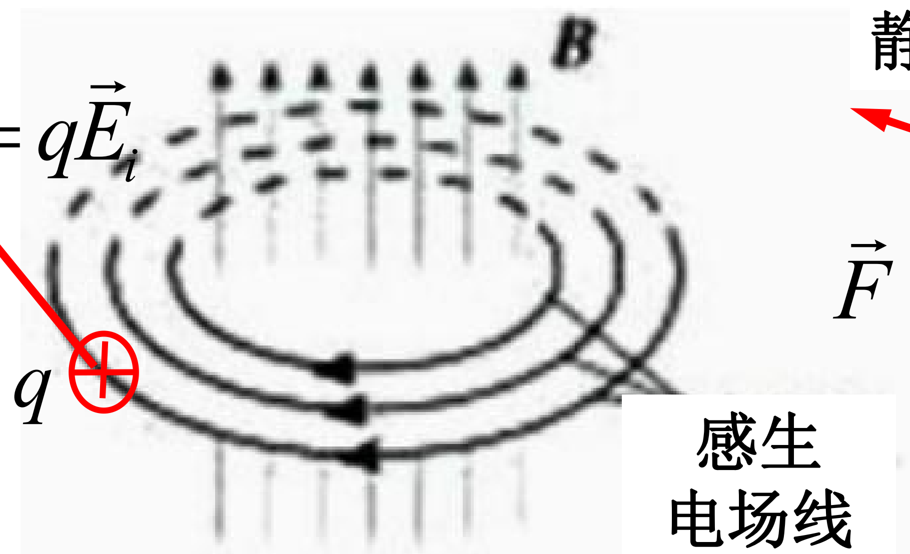
有旋 $$\oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$$

无旋 $$\oint_L \vec{E}_q \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

变化的磁场激发的感应电场 $\vec{E}_i$

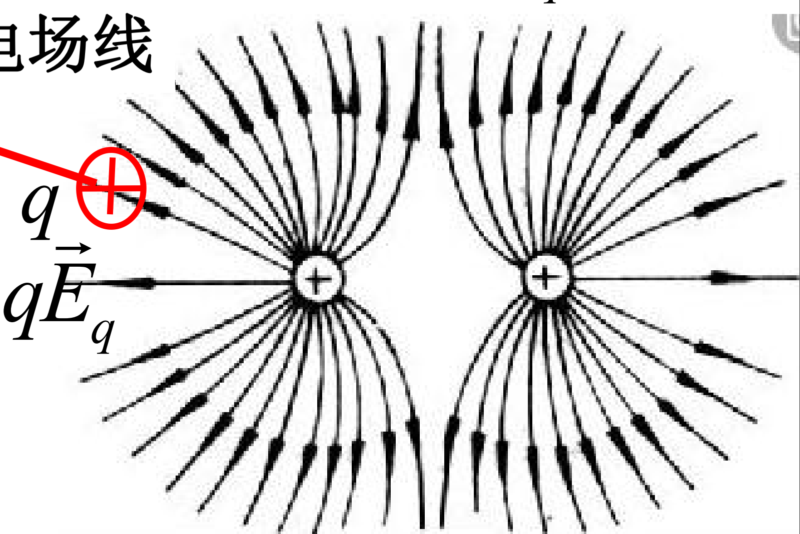
静电场 $\vec{E}_q$

$\vec{F} = q\vec{E}_i$



静电场线

$\vec{F} = q\vec{E}_q$



1. 感生电场与静电场的**共同之处**：对其中的____有力的作用

a. 静止电荷　　b. 运动电荷　　c. 电荷

2. **不同之处**：感生电场由变化的磁场产生的，电力线___(是，不是) 闭合线，____(是，不是) 保守场；

静电场是由**电荷**产生的，电力线**不是**闭合线，**是**保守场

3. 对于静电场，以下描述正确的是b, c；

对于感生电场，以下描述正确的是a, d；

a. $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$ 恒为零；b. $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$ 不一定为零；

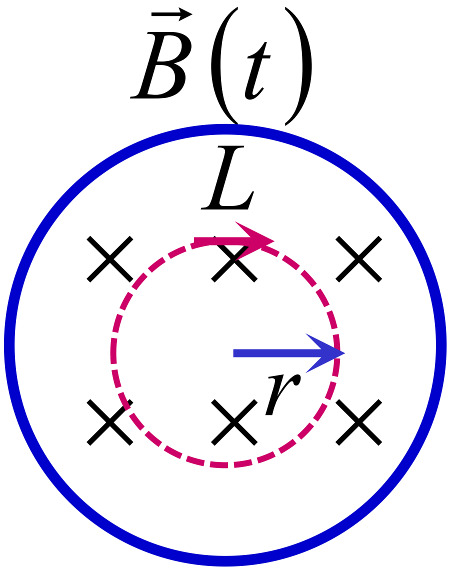
c. $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$ 恒为零；b. $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$ 不一定为零。

静电场：有源无旋，感生电场：有旋无源

3. 感生电场的计算

设场点距轴心为r，取过场点的圆周环路L

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_i 2\pi r = -\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} = -S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



$$\boxed{E_i = -\frac{S}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}$$

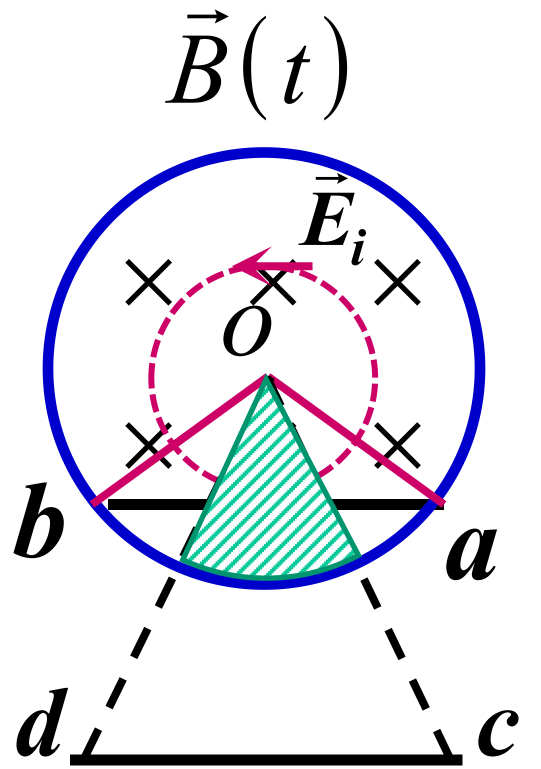
$r<R \quad S=\pi r^2$ $\longrightarrow$ $$\boxed{E_i = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}$$

$r>R \quad S=\pi R^2$ $\longrightarrow$ $$\boxed{E_i = -\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}$$

若$Ei>0$， Ei方向与回路L方向相同；

若$Ei<0$， Ei方向与回路L方向相反

例2. 圆柱形均匀磁场内， $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=c$



1) 求半径oa 上的感生电动势

解： $\boxed{\vec{E}_i \perp \vec{r}}$ $\varepsilon_i = \int_{(R)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$

注意Ei分布的特点

2) 求线段ab上的感生电动势

解：构成回路$obao$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{oa} + \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bo} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\because \varepsilon_{oa} = \varepsilon_{bo} = 0$$

$$\therefore \varepsilon_{ba} = -S_{\Delta oabo}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

方向 $b \to a$

3) 求线段cd上的感生电动势

解：构成回路$ocdo$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{oc} + \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{do} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon_{cd} = -S_{\text{扇形(绿色)}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

方向 $d \to c$

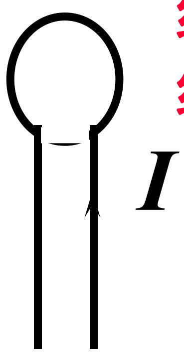
四 自感与磁场能量

1 自感现象：由于自身线路中电流的变化，而在自身线路中产生感应电流的现象

自感系数的定义

线圈中的电流激发磁场，
线圈的磁链由电流决定

单位：亨利H



$$\psi \propto I \xrightarrow{\text{定义}} \boxed{L = \frac{\psi}{I}} \quad 则 \quad \psi = LI$$

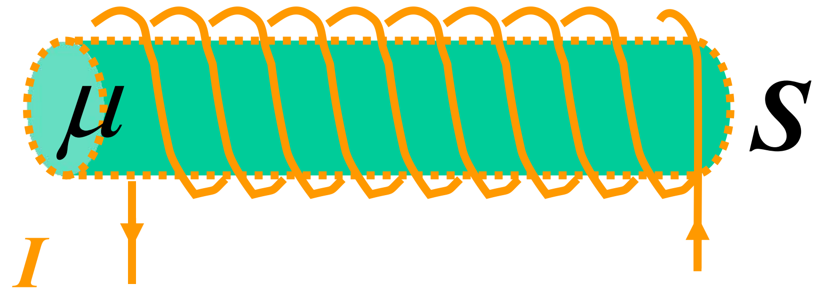
$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$$

引入自感系数的意义：自感电动势用电流变化描述

例3：求长直螺线管的自感系数

几何条件如图

总长 l 总匝数 N



解： 设通电流 I

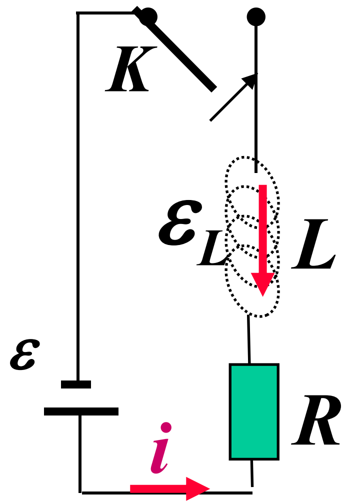
$$B = \mu \frac{N}{l} I$$

$$\psi = N\phi = NBS$$

$$\boxed{L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu N^2 S}{l}}$$

或 $\boxed{L = \mu n^2 V}$

2 磁场的能量　以RL回路为例



K闭合 $\varepsilon+\varepsilon_L=iR$

$$\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$\xrightarrow{\text{回路方程}}$ $\varepsilon=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+iR$

$\xrightarrow[\text{积分}]{\times i\mathrm{d}t}$ $\int_0^t \varepsilon i\,\mathrm{d}t=\int_0^I Li\,\mathrm{d}i+\int_0^t i^2R\,\mathrm{d}t$

电源提供的总能量

电源克服自感电动势作的功

电阻上消耗的能量

$$W_m=\int_0^I Li\,\mathrm{d}i=\frac{1}{2}LI^2$$ 自感线圈中的磁场能量

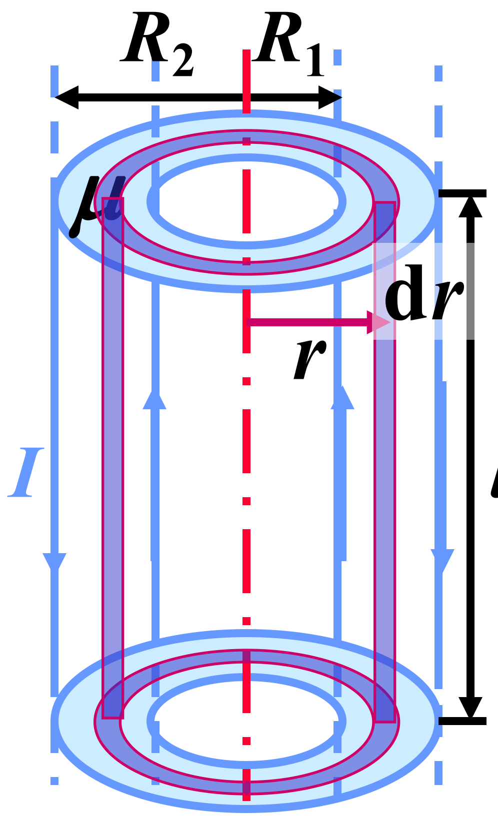
$L=\mu n^2V$ → $W_m=\frac{1}{2}\mu n^2VI^2=\boxed{\frac{1}{2}BHV}$

磁场能量密度 $\boxed{w_m}$

$$\boxed{W_m=\int_V w_m\,\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}BH\,\mathrm{d}V}$$ 磁场能量

例4. 无限长同轴电缆，由半径分别为R_1、R_2的两个同轴圆筒组成，电流由内圆筒出去，经外圆筒返回形成闭合回路。两圆筒之间充满磁导率为 μ 的介质。

求：长度为l 的一段电缆中的1）磁场能量； 2）自感系数L



解：磁场能量 $W_m = \int_V \frac{1}{2} BH\,\mathrm{d}V$

由安培环路定理求磁场分布

$r < R_1, r > R_2 \qquad H = 0, B = 0$

$R_1 < r < R_2 \quad H = \dfrac{I}{2\pi r}, B = \dfrac{\mu I}{2\pi r}$

取dV为？ $\qquad \mathrm{d}V = 2\pi r l\,\mathrm{d}r$

半径r，厚dr的同轴圆柱面层

$$W_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l\,\mathrm{d}r = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

求自感系数L

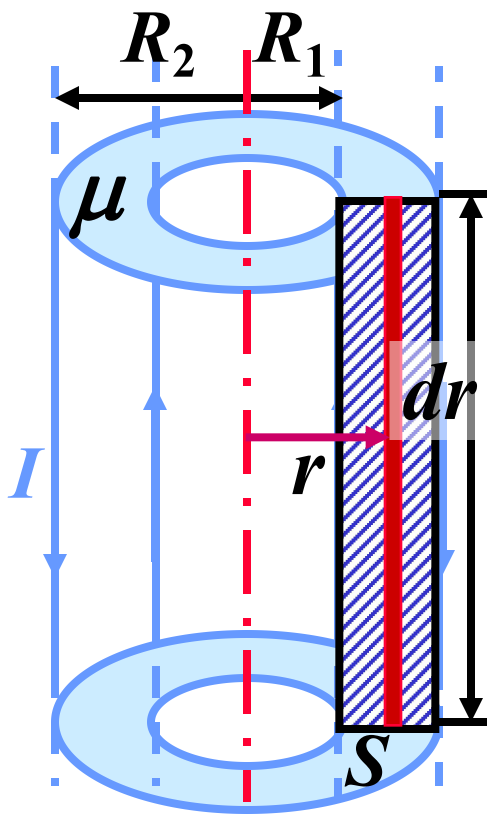
根据定义：$L=\dfrac{\phi}{I}$

$$\phi_m=\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\quad \boxed{\text{S为？}}$$

沿径向的矩形截面，
长 l，宽R_2-R_1的矩形截面

$$=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I}{2\pi r}l\,\mathrm{d}r=\frac{\mu I l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$L=\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



根据能量：

$$W_m=\frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}=\frac{1}{2}LI^2$$

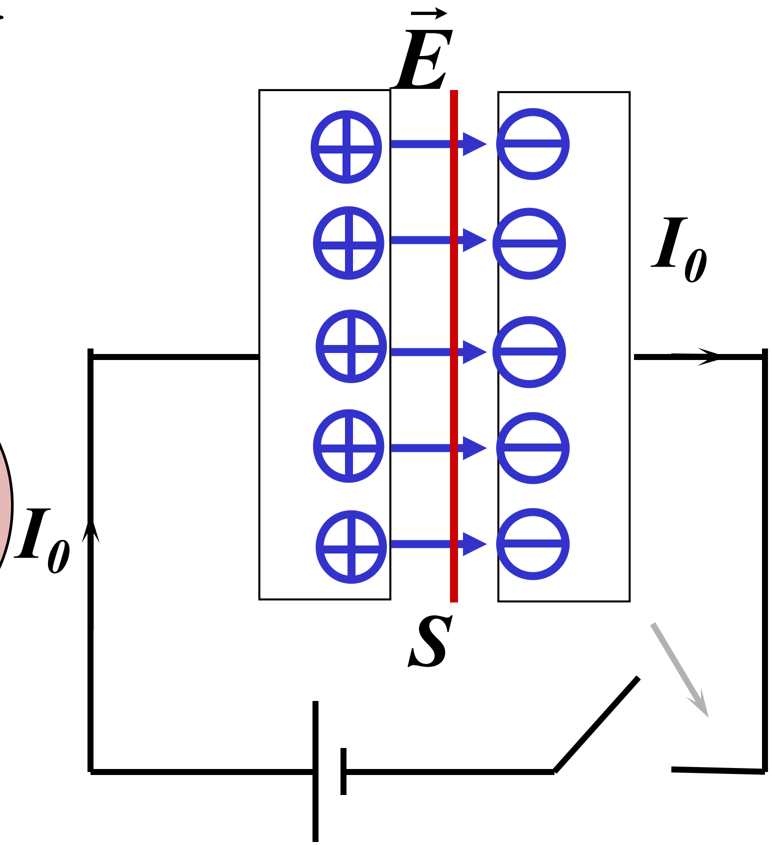
五　与变化电场相联系的磁场

在串有电容器的电路中，给电容器充电时

在某时刻回路中传导电流强度为I_0

电容器充（放）电过程中，极板间存在变化的电场，激发磁场

设极板带电量q ,在电场中取一与极板等大的平行截面S



$$\phi_D = \int_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \frac{q}{S} \mathrm{d}S = q$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi_D}{\mathrm{d}t} = \int_S \frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = I_0$$

位移电流 I_d

量纲相同

方向相同

Maxwell 定义：位移电流 $I_d = \dfrac{\mathrm{d}\phi_D}{\mathrm{d}t}$

全电流：$I = I_0 + I_d$

I_0 不连续处必有 Id 接续——全电流连续

传导电流（I_0）

位移电流（I_d）

正确描述 I_d 的选项是_____，正确描述 I_0 的选项是_____。

a.是大量载流子的定向移动的宏观表现；

b.可以在周围产生磁场；

c.具有热效应；

d.是客观存在；

e.是假想的。

$\boxed{\textbf{be，abcd}}$

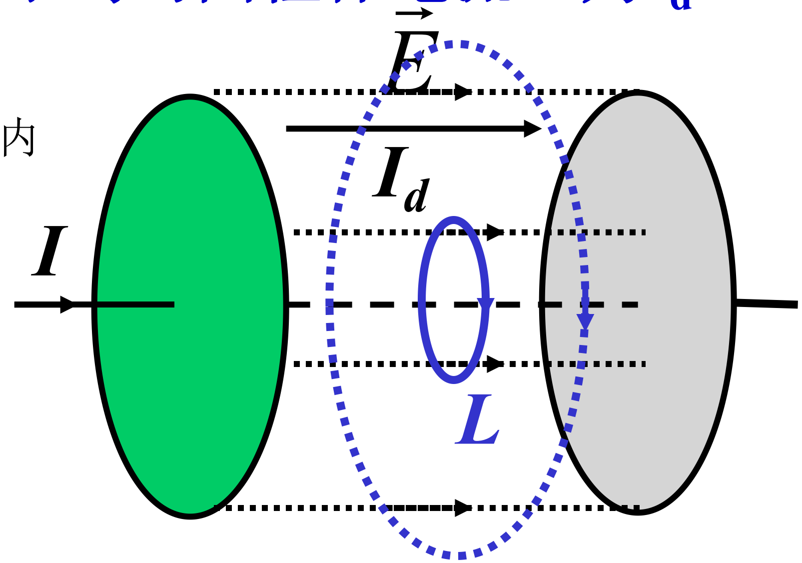
例5 半径R 的两块圆板构成平板电容器，匀速充电使两板间电场的变化率为 dE/dt,求两板间的位移电流，并计算离两板中心连线 r 处的磁感强度。

解：电容器两板间的位移电流（相当于均匀圆柱体电流）为I_d

取半径r 的圆形回路L，

应用安培环路定理：

$$B\cdot 2\pi r=\mu_0 I_{d内}$$



极板内外磁场分别为

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{\pi r^2}{\pi R^2}I_d, r<R$$

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi r}I_d, r\geq R$$

用电场强度的变化率表示：

$$I_d=\frac{\mathrm{d}\phi_D}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}S=\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\pi R^2$$

$$B=\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}r, r<R$$

$$B=\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\frac{R^2}{r}, r<R$$

位移电流与导线中的传导电流、极板电荷变化率大小方向总是一致，

方向：与位移电流方向右手螺旋关系