第3.5节　两个随机变量的函数的分布

一、问题的引入

二、离散型随机变量函数的分布

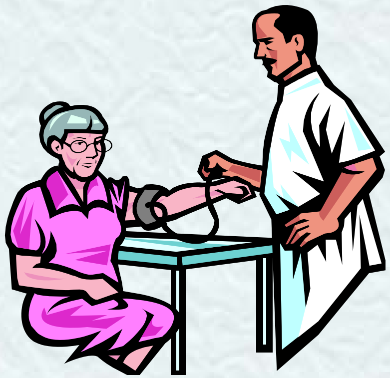
三、连续型随机变量函数的分布

四、小结

一、问题的引入

有一大群人,令 X 和 Y 分别表示一个人的年龄和体重, Z 表示该人的血压,并且已知 Z 与 X,Y 的函数关系 $Z=f(X,Y)$,如何通过 X,Y 的分布确定 Z 的分布.

为了解决类似的问题,下面我们讨论两个随机变量函数的分布.



二、离散型随机变量函数的分布

例1 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1) $X+Y$, (2) $\lvert X-Y\rvert$ 的分布律.

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

等价于

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
$\lvert X-Y\rvert$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3

所以 $X+Y, |X-Y|$ 的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y\rvert$	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

结论

若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$\boldsymbol{P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2,\cdots}$$

则随机变量函数 $Z = g(X,Y)$的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X,Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij} \qquad k = 1,2,\cdots.$$

例2 设两个独立的随机变量X与Y的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

可得

P	(X,Y)	$Z=X+Y$
0.18	(1,2)	3
0.12	(1,4)	5
0.42	(3,2)	5
0.28	(3,4)	7

所以

$Z=X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

例3 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求 : $Z = \max(X, Y)$ 的分布律 .

解 因为X与Y相互独立,

所以 $P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j\}$,

于是

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$P\{\max(X,Y)=i\}$$
$$=P\{X=i,Y<i\}$$
$$+P\{X\le i,Y=i\}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$\Rightarrow P\{\max(X,Y)=0\}=P\{0,0\}=\frac{1}{2^2},$$

$$P\{\max(X,Y)=1\}=P\{1,0\}+P\{0,1\}+P\{1,1\}$$
$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{2^2}.$$

故 $Z=\max(X,Y)$ 的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

三、连续型随机变量函数的分布

当二维随机变量（X, Y）的联合分布已知时，如何求出它们的函数$Z = g(X, Y)$ 的分布?

步骤:

1.求出Z的分布函数;

2.对于连续型随机变量，再求其概率密度函数。

几何直观：

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{g(X,Y) \le z\}$$

$$= P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y)dxdy$$

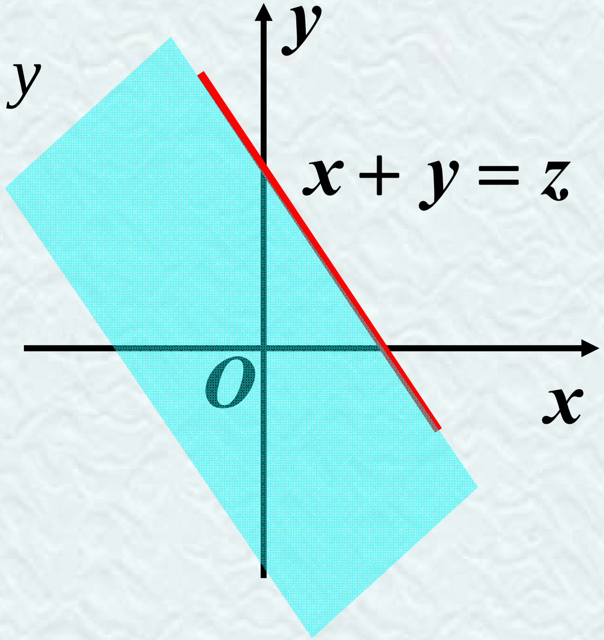
$$= \iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$

其中$D = \{(x,y) \mid g(x,y) \le z\}.$

1. $Z=X+Y$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则$Z=X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\overset{x=u-y}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

由此可得概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,\mathrm{d}y.$$

由于X与Y对称， $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x.$

特别地，当 X 和 Y 独立，设 (X,Y) 关于 X, Y 的边缘密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ ，则上述两式化为:

$$\begin{cases} f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)\,f_Y(y)dy \\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)dx \end{cases}$$

卷积公式

记为$f_X * f_Y$,即$f_X * f_Y=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)dx$

$=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)\,f_Y(y)dy$。

例4 设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty,$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<\infty,$$

由公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}\,x.$

得 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{t=x-\frac{z}{2}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即 Z 服从 $N(0,2)$ 分布.

说明

一般，设X,Y相互独立且$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.则$Z = X + Y$仍然服从正态分布，且有$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2,\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

例6 若X和Y独立,具有共同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度 .

解：由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx$$

为确定积分限,先找出使被积函数不为0的区域

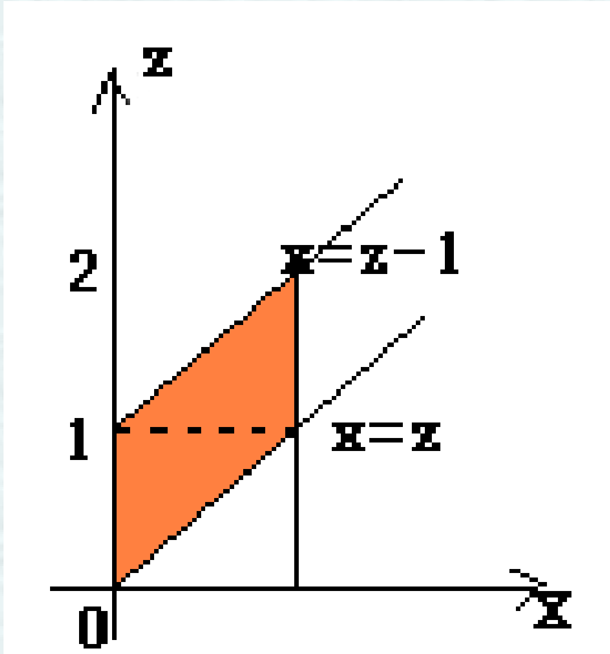
$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}\quad \text{也即}\quad \begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

为确定积分限,先找出使被积函数不为0的区域

$$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le z-x\le 1 \end{cases} \quad \text{也即} \quad \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ z-1\le x\le z \end{cases}$$

如图示:



于是

$$f_Z(z)=\begin{cases} \int_0^z dx=z, & 0\le z<1 \\ \int_{z-1}^{1} dx=2-z, & 1\le z<2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

2. $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布

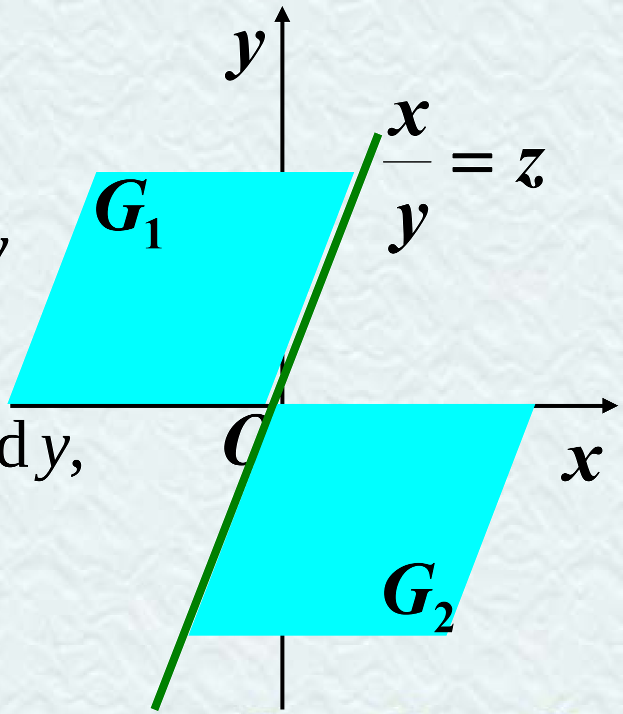
设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{X}{Y}\le z\right\}$$

$$=\iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0}\int_{yz}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

令 $u=x/y$,



$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{z} yf(yu,y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{z}\int_0^{\infty} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u$$

同理可得

$$\iint\limits_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u,$$

故有 $\boldsymbol{F_Z(z) = P\{Z \le z\}}$

$$= \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{z} [\int_{0}^{\infty} yf(yu, y)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{0} yf(yu, y)\,\mathrm{d}y]\,\mathrm{d}u.$$

由此可得分布密度为

$$f_Z(z) = \int_{0}^{\infty} yf(yz, y)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{0} yf(yz, y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |y| f(yz, y)\,\mathrm{d}y.$$

当 ***X***, ***Y*** 独立时,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

例7 设 X,Y 分别表示两只不同型号的灯泡的寿命,X,Y 相互独立,它们的概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \qquad g(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

试求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度函数.

解 由公式

$$f_Z(z)=\int_0^{\infty} yf(yz,y)\,\mathrm{d}\,y-\int_{-\infty}^{0} yf(yz,y)\,\mathrm{d}\,y,$$

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-x}e^{-2y}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

得所求密度函数 (当$z>0$时)

$$f_Z(z)=\int_0^{\infty}2ye^{-yz}e^{-2y}\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{\infty}2ye^{-y(2+z)}\,\mathrm{d}\,y=\frac{2}{(2+z)^2},$$

(当 $z\le 0$ 时) $f_Z(z)=0,$

得 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

3.极值分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

令 $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$

1. $\mathrm{M}=\max(X,Y)$ 的分布函数

$$F_M(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$$

$$M\le z\Leftrightarrow\begin{cases}X\le z\\Y\le z\end{cases}$$

由于 X 和 Y 相互独立,于是得到 $M=\max(X,Y)$ 的分布函数为:

$$F_M(z)=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}$$

即有

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

2. $N=\min(X,Y)$ 的分布函数

$$F_N(z)=P(N\le z)=1-P(N>z)$$

$$=1-P(X>z,Y>z)$$

$$N>z \Leftrightarrow \begin{cases} X>z \\ Y>z \end{cases}$$

由于 X 和 Y 相互独立,于是得到 $N=\min(X,Y)$ 的分布函数为:

$$F_N(z)=1-P(X>z)P(Y>z)$$

即有 $$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

设 $X_1,\ldots,X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为

$$F_{X_i}(z) \quad (i=1,\ldots,n)$$

我们来求 $M=\max(X_1,\ldots,X_n)$ 和$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$ 的分布函数.

用与二维时完全类似的方法，可得 $M=\max(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数为:

$$F_M(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数是

$$F_N(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

特别地，当$X_1,\ldots,X_n$相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时，有

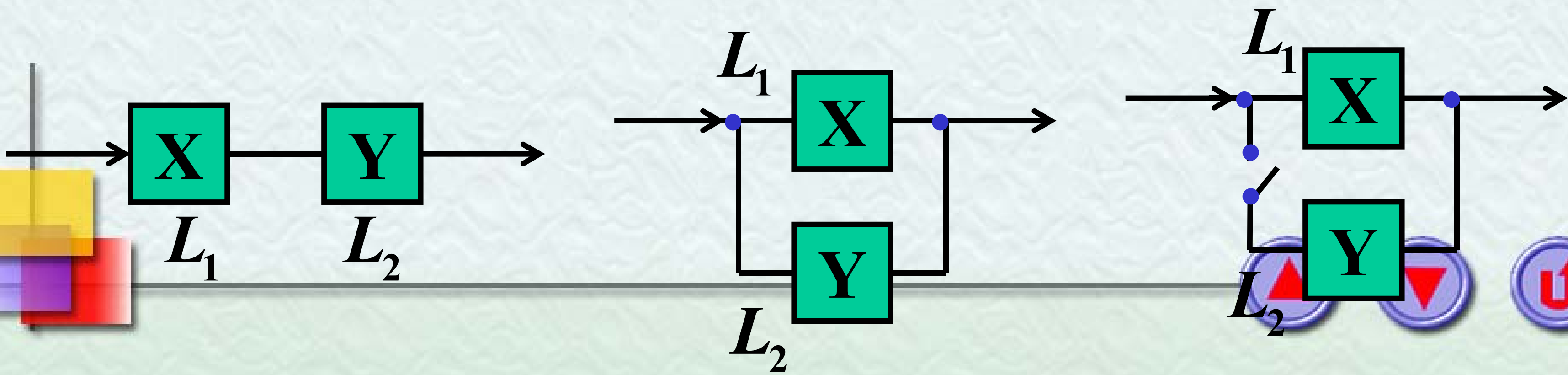
$$F_M(z)=[F(z)]^n$$

$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^n$$

例 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1,L_2 连接而成,连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作) , 如下图所示.设 L_1,L_2 的寿命分别为 X,Y, 已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0$且 $\alpha\neq\beta$.试分别就以上三种连接方式写出 L的寿命 Z的概率密度.



$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, x > 0, \\ 0, \quad\quad x \le 0, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, y > 0, \\ 0, \quad\quad y \le 0, \end{cases}$$

解 (i)串联情况

由于当 L_1, L_2 中有一个损坏时，系统 L 就停止工作，

所以这时 L 的寿命为 $Z = \min(X, Y)$.

由 $f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, x > 0, \\ 0, \quad\quad x \le 0, \end{cases} \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, x > 0, \\ 0, \quad\quad\quad x \le 0, \end{cases}$

由 $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0;\end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时,系统 L 才停止工作,

所以这时 L 的寿命为 $Z=\max(X,Y)$.

$Z=\max(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$f_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(iii)备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 才开始工作,因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和,即

$$Z = X + Y$$

当 $z > 0$ 时, $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \,\mathrm{d}\, y = \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y} \,\mathrm{d}\, y$$

$$= \alpha\beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y} \,\mathrm{d}\, y$$

四、$Z=X^2+Y^2$的分布

例　设X和Y是两个相互独立的随机变量，具有相同的分布 $N(0,1)$，求 $Z=X^2+Y^2$的概率密度.

四、小结

1. 离散型随机变量函数的分布律

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots$$

则随机变量函数 $Z=f(X,Y)$的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=P\{f(X,Y)=z_k\}$$

$$=\sum_{z_k=f(x_i,y_j)} p_{ij}\quad k=1,2,\cdots.$$

2. 连续型随机变量函数的分布

(1) $Z = X + Y$ 的分布

(2) $Z = \dfrac{X}{Y}$ 的分布

(3) $M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$ 的分布

备份题

例1 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且其分布密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的分布密度.

解 由于 X 与 Y 相互独立,所以 (X,Y) 的分布密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

随机变量 Z 的分布函数为

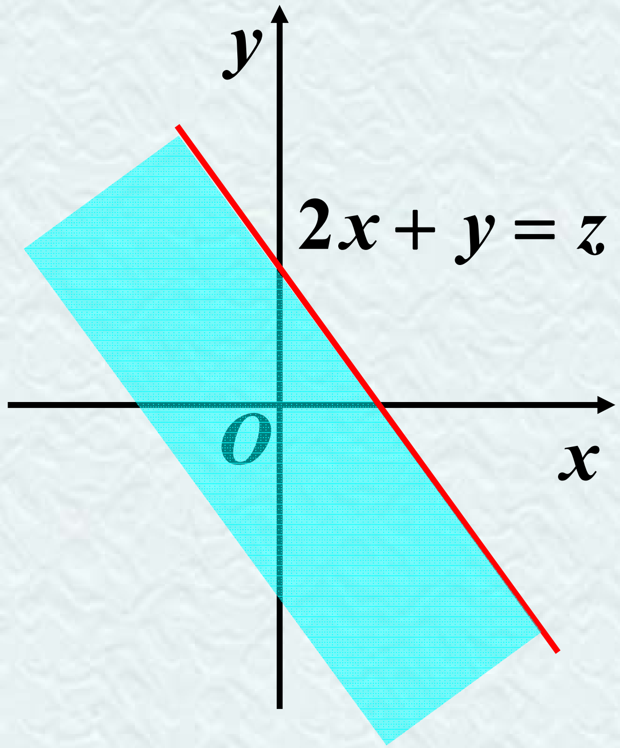
$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$

$$= P\{2X + Y \le z\}$$

$$= \iint\limits_{2X+Y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{2X+Y\le z} e^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$$(0 \le x \le 1,\ y > 0)$$



$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-e^{2x-z})\,\mathrm{d}x, & 0<z\le 2,\\ \int_0^{1}(1-e^{2x-z})\,\mathrm{d}x, & z>2.\end{cases}$$

所以随机变量 Z 的分布密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ (1-e^{-z})/2, & 0<z\le 2,\\ (e^2-1)e^{-z}/2, & z\ge 2.\end{cases}$$

例2 对某种电子装置的输出测量了5次,得到的观察值为X_1, X_2, X_3, X_4, X_5,设它们是相互独立的随机变量,且都服从同一分布:

$$F(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{2ze^2}{8}}, & z\geq 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试求:$\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) > 4$ 的概率.

解 设 $D=\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$

因为 $F_{\max}(z)=[F(z)]^5$,

所以 $P\{D>4\}=1-P\{D\leq 4\}$

$=1-F_{\max}(4)$

$=1-[F(4)]^5$

$=1-(1-e^{-e^2})^5$.

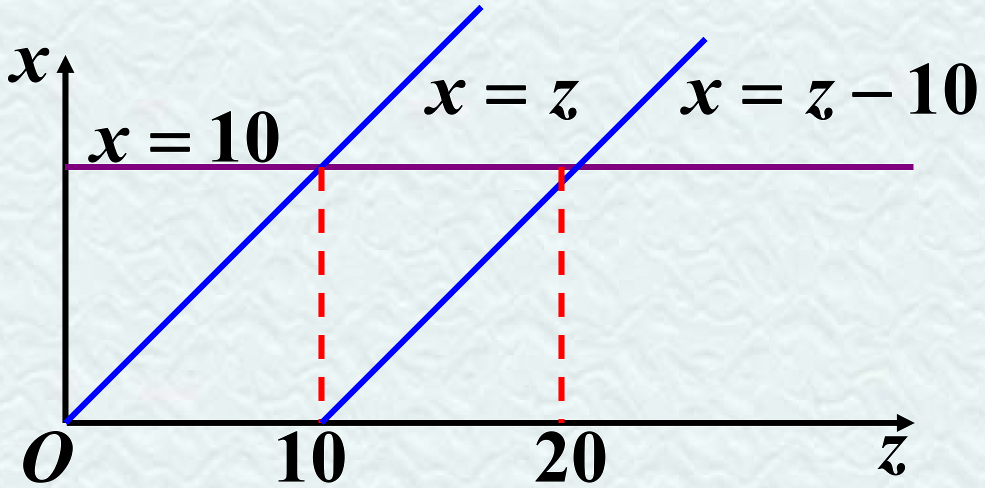
例3 在一简单电路中,两电阻 R_1 和 R_2 串联联接,设 R_1, R_2 相互独立,它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度.

解 由题意知 $\boldsymbol{R}$ 的概率密度为

$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}\,x.$$



当 $\begin{cases} 0 < x < 10, \\ 0 < z - x < 10, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 < x < 10, \\ z - 10 < x < z, \end{cases}$ 时,

$p_R(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(z-x) \, \mathrm{d}x$ 中被积函数不为零.

此时

$$f_R(z)=\begin{cases}\int_0^z f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x, & 0\le z<10,\\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x, & 10\le z\le 20,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\quad (1)$$

将 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$