第 一 章

随 机 事 件 及 其 概 率

第一节　随机空间与随机事件

一、 概率论的诞生及应用

二、 随机现象

三、 随机试验

四、 样本空间 样本点

五、 随机事件的概念

六、 事件的关系与运算

一、概率论的诞生及应用

1. 概率论的诞生

1654年,一个名叫德.梅雷的骑士就“两个赌徒约定赌若干局, 且谁先赢 c 局便算赢家, 若在一赌徒胜 a 局 ($a<c$),另一赌徒胜b局($b<c$)时便终止赌博,问应如何分赌本” 为题求教于帕斯卡, 帕斯卡与费马通信讨论这一问题, 于**1654** 年共同建立了概率论的第一个基本概念

—— 数学期望.

帕斯卡和费马的通信成了线代概率论的实际起始点，之后惠更斯在1657年出版了一本小册子《论赌博中的推理》（***Deratiociniis in ludo aleae***）

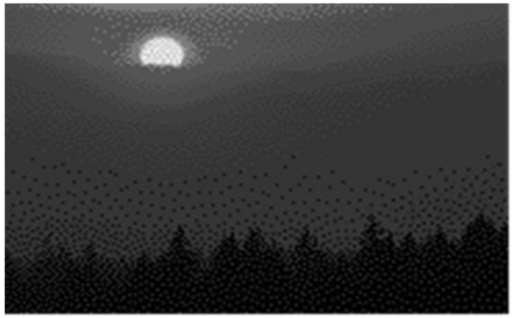
2. 概率论的应用

概率论是数学的一个分支,它研究随机现象的数量规律. 概率论的广泛应用几乎遍及所有的科学领域, 例如天气预报, 地震预报, 产品的抽样调查;在通讯工程中可用以提高信号的抗干扰性,分辨率等等.

二、随机现象

自然界所观察到的现象：确定性现象　随机现象

1.确定性现象



在一定条件下必然发生的现象称为确定性现象.

实例

“太阳不会从西边升起”，

“水从高处流向低处”，

“同性电荷必然互斥”，

"函数在间断点处不存在导数"等.

确定性现象的特征　　条件完全决定结果

2. 随机现象

在一定条件下可能出现也可能不出现的现象称为随机现象.

实例1　"在相同条件下掷一枚均匀的硬币,观察正反两面出现的情况".

结果有可能**出现正面**也可能**出现反面**.

实例2 “用同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发，观察弹落点的情况”.

结果：**“弹落点会各不相同”**.

实例3 “抛掷一枚骰子,观察出现的点数”.

结果有可能为:

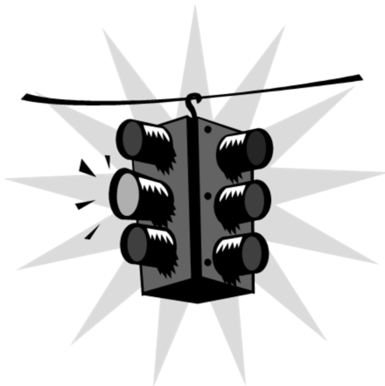
“1”，“2”，“3”，“4”，“5”或“6”.

实例4 “从一批含有正品和次品的产品中任意抽取一个产品”.

其结果可能为:

正品 、次品.

实例5 “过马路交叉口时,可能遇上各种颜色的交通指挥灯”.



实例6 “一只灯泡的寿命” 可长可短.

随机现象的分类

个别随机现象现象：原则上不能在相同条件下重复出现（例**6**）

大量性随机现象现象：在相同条件下可以重复出现（例**1-5**）

随机现象的特征 **条件不能完全决定结果**

说明

1. 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述.

2. 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量重复试验或观察中，这种结果的出现具有一定的统计规律性，概率论就是研究随机现象这种本质规律的一门数学学科.

如何来研究随机现象?

随机现象是通过随机试验来研究的.

问题　　什么是随机试验?

三、随机试验

定义 在概率论中,把具有以下三个特征的试验称为随机试验.

1. 可以在相同的条件下重复地进行;

2. 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

说明

1. 随机试验简称为试验, 是一个广泛的术语.它包括各种各样的科学实验, 也包括对客观事物进行的“调查”、“观察”、或“测量”等.

2. 随机试验通常用 E 来表示.

实例 “抛掷一枚硬币,观察正面,反面出现的情况”

分析

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 试验的所有可能结果:

正面，反面;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

故为随机试验.

同理可知下列试验都为随机试验

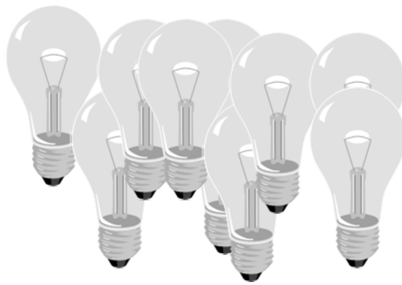
1. “抛掷一枚骰子,观察出现的点数”

2. “从一批产品中,依次任选三件,记 录出现正品与次品的件数”.

3. 记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人 数.

4. 考察某地区 **10** 月份的平均气温.

5. 从一批灯泡中任取一只,测试其寿命.



四、样本空间 样本点

定义1.1 对于随机试验E，它的每一个可能结果称为样本点，由一个样本点组成的单点集称为基本事件。所有样本点构成的集合称为随机试验E 的样本空间或必然事件，用Ω或S表示

我们规定不含任何元素的空集为不可能事件，用 Φ 表示。

例如，试验是将一枚硬币抛掷两次，观察正面H、反面T出现的情况：

则样本空间 $\Omega=\{(H,H),\ (H,T),\ (T,H),\ (T,T)\}$

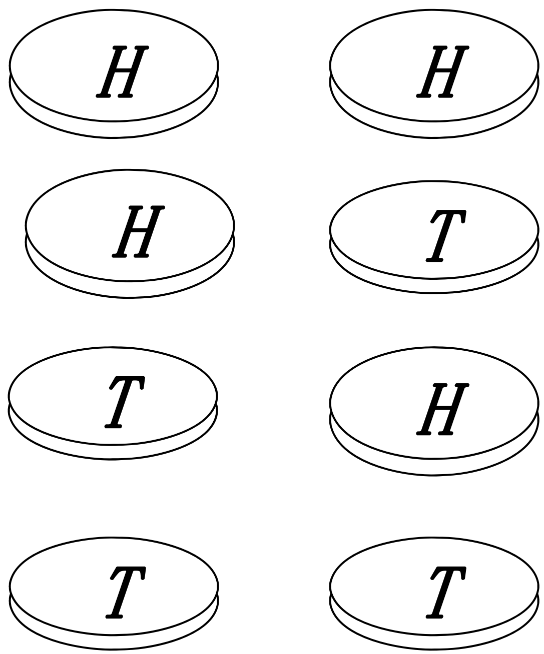
第1次　第2次

(H,H)：

(H,T)：

(T,H)：

(T,T)：



在每次试验中必有一个样本点出现且仅有一个样本点出现．

样本空间可以是离散的或连续的。在离散情况下，样本点是离散且可列的，在连续情况下，样本空间是由连续的样本点构成。

一个离散的样本空间可能是有限的（由有限数量的样本点构成，比如例**1**，例**2**）或无限的（有无限数量的可列样本点，比如例**3**，例**4**）。

连续样本空间的样本点数量总是无限的，比如例5，又比如在考虑某收费大桥可能发生交通事故的位置时，每个可能的地点都是一个样本点，样本空间就是桥上可能位置的连续体。

五、随机事件的概念

实际中,在进行随机试验时,我们往往会关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合.

随机事件　随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集(或某些样本点的子集），称为 E 的随机事件, 简称事件.

实例 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

试验中,骰子“出现1点”,“出现2点”, ... ,“出现6点”,

“点数不大于4”,“点数为偶数” 等都为随机事件.

例1.1 写出掷骰子试验的样本点，样本空间，基本事件，事件A—出现偶数， 事件B—出现奇数

解：用 ω_i 表示掷骰子出现的点数为 $i, i=1,\cdots 6;$

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$$

基本事件 $A_i=\{\omega_i\}, i, i=1,2,\cdots,6;$

$$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\};$$

$$B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}.$$

在每次试验中, 当且仅当这一子集中的一个样本点出现时, 称这一事件发生.

必然事件：样本空间***S***包含所有的样本点, 它是***S***自身的子集, 在每次试验中它总是发生的, 称为必然事件。

不可能事件：空集Φ不包含任何样本点, 它也作为样本空间的子集, 它在每次试验中都不发生, 称为不可能事件.

六、随机事件间的关系及运算

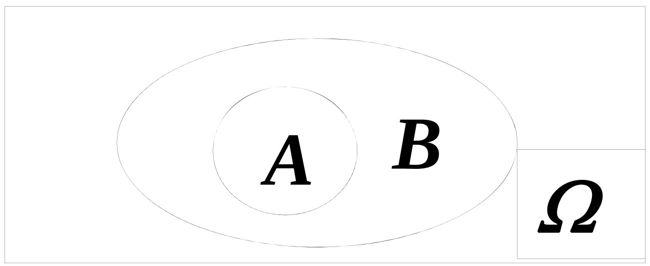
I. 随机事件间的关系

设试验 E 的样本空间为 Ω,而 A, B, A_k $(k=1,2,\cdots)$是 Ω 的子集.

1. 包含关系 若事件 A 出现, 必然导致 B 出现 , 则称事件 B 包含事件 A,记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

实例 "长度不合格" 必然导致 "产品不合格" 所以"产品不合格"包含 "长度不合格".

图示 B 包含 A.



若事件A包含事件B,而且事件B包含事件A, 则称事件A与事件B相等,记作 $A=B$.

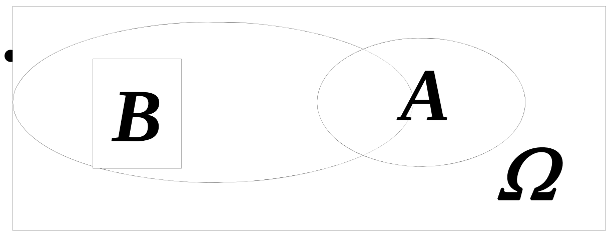
2. 事件的和(并)

“二事件 A,B至少发生一个”也是一个事件,称为事件 A 与事件B的**和事件**.记作$A\cup B$，显然

$A\cup B=\{e\mid e\in A$或$e\in B\}$.

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此“产品不合格”是“长度不合格”与“直径不合格”的并.

图示事件 A 与 B 的并.



推广 称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件,即

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少发生一个;

称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件,即

$A_1, A_2, \cdots$ 至少发生一个.

3. 事件的交 (积)

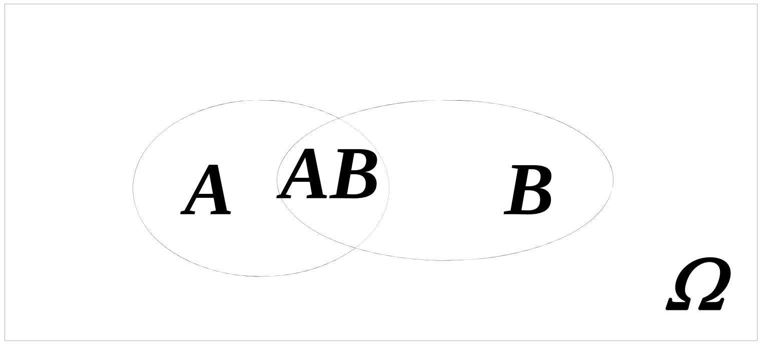
"二事件 A, B 同时发生"也是一个事件,称为事件 A 与事件 B 的**积事件**,记作 $A \cap B$,显然

$A \cap B = \{e \mid e \in A \text{且} e \in B\}.$

积事件也可记作 $A \cdot B$ 或 AB.

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此“产品合格”是“长度合格”与“直径合格”的交或积事件.

图示事件$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$ 的积事件.



推广　称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，

即$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生；

称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件，

即$A_1, A_2, \cdots$同时发生．

和事件与积事件的运算性质

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad \boldsymbol{A} \cup \varnothing = \boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \quad A \cap \Omega = A, \quad \boldsymbol{A} \cap \varnothing = \varnothing.$$

4. 事件的互不相容 (互斥)

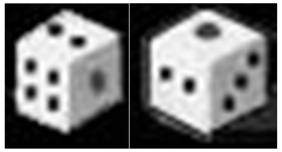
若事件 A 、B 满足 $A \cap B = AB = \varnothing$.

则称事件 A与B互不相容.

实例 抛掷一枚硬币,“出现花面” 与 “出现字面” 是互不相容的两个事件.


实例 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数 .

"骰子出现1点" $\xleftrightarrow{\text{互斥}}$ "骰子出现2点"



图示 A与B互斥

说明

当$A \cap B = \varnothing$时,可将$A \cup B$记为"直和"形式$A+B$.

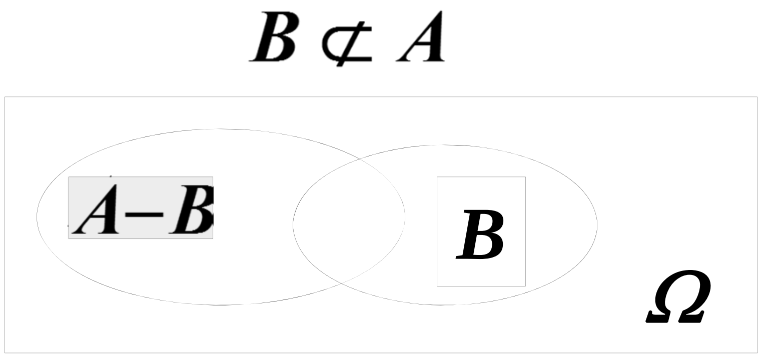
任意事件A与不可能事件$\varnothing$为互斥.

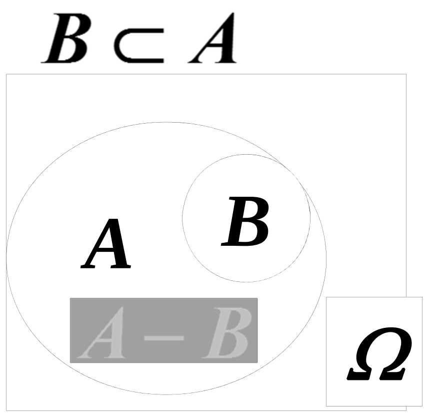
5. 事件的差

事件“A 出现而 B 不出现”，称为事件 A 与 B 的差. 记作 $A-B$.

实例 “长度合格但直径不合格”是“长度合格”与“直径合格”的差.

图示 A 与 B 的差





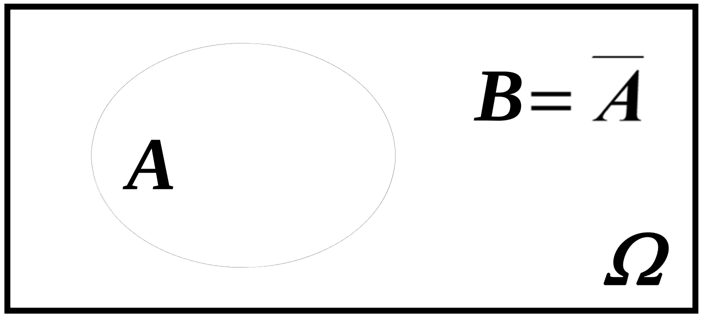
6. 事件的互逆（对立）

若事件 A 、B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \varnothing$.

则称 **A** 与**B** 为**互逆(或对立)事件. A** 的逆记作 $\overline{A}$.

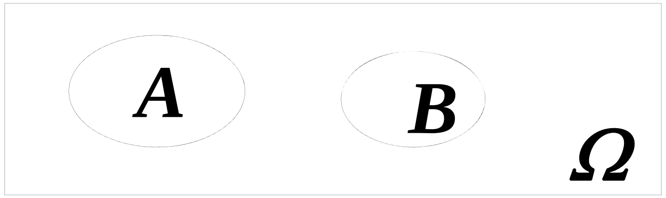
实例 “骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\textbf{对立}}$ “骰子不出现1点”

图示 A 与 B 的对立.



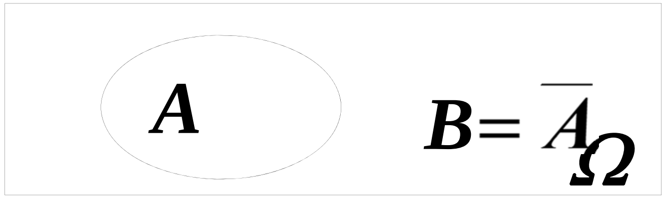
对立事件与互斥事件的区别

A、B 互斥



$AB=\varnothing$,

A、B 对立



$A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$.

互　斥 $\overset{\not\longrightarrow}{\longleftarrow}$ 对　立

II.事件间的运算规律　　设 A, B, C 为事件,则有

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A,\ AB = BA.$

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(AB)C = A(BC).$$

(3) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = AB \cup AC,$$

$$A \cap (B - C) = AB - AC$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup C)(B \cup C).$$

(4)对偶律：　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

例1 设A,B,C 表示三个随机事件, 试将下列事件用A,B,C 表示出来.

(1) A 出现 , B, C 不出现;

(2) A, B都出现, C 不出现;

(3) 三个事件都出现;

(4) 三个事件至少有一个出现;

(5) 三个事件都不出现;

(6) 不多于一个事件出现;

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$ or $A-B-C$ or $A-(B\cup C)$;

(2) $AB\overline{C}$ or $AB-C$;

(3) ABC;

(4) $A\cup B\cup C$;

(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(6) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$;

例2　运用事件运算关系证明等式

$$\mathbf{AB}\cup(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cup\overline{\mathbf{A}}=\Omega$$

证明　由于$A-B=A\overline{B}$,则

$$AB\cup(A-B)\cup\overline{A}=AB\cup(A\overline{B})\cup\overline{A}$$

$$=A(B\cup\overline{B})\cup\overline{A}=A\Omega\cup\overline{A}=\Omega$$

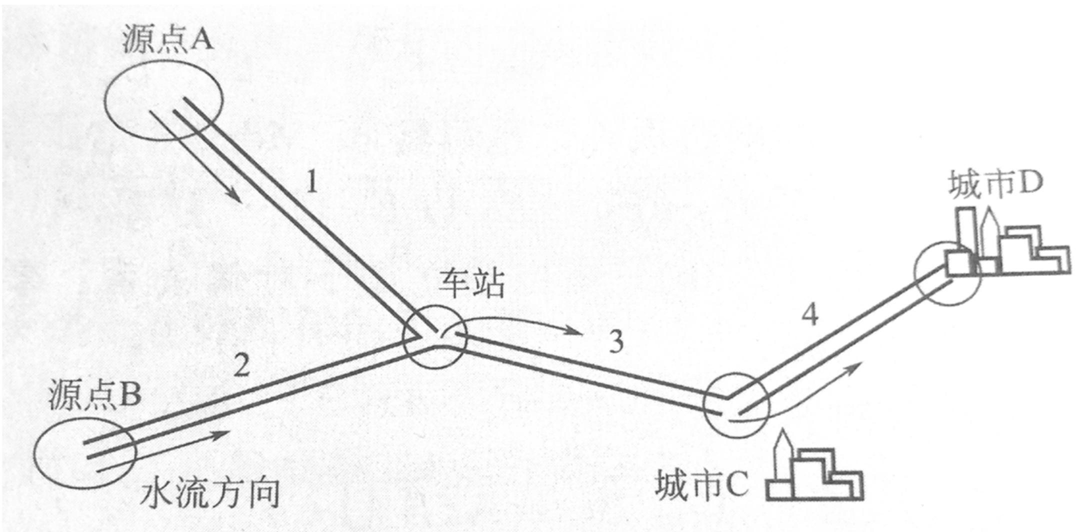
逆分配律

例**3** 有两个水源**A**和**B**为两个城市**C**和**D**供水，水通过管道分支**1,2,3**和**4**输送。假定这两个水源中任一个就足以为两个城市同时供水。定义：

E1=分支**1**失效； **E2**=分支**2**失效

E3=分支**3**失效； **E4**=分支**4**失效

分支管道失效意味着该分支管道有严重漏水或断裂。



六、小结

1 随机现象的特征：条件不能完全决定结果.

2. 随机现象是通过随机试验来研究的.

随机试验
(1) 可以在相同的条件下重复地进行;
(2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;
(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

3. 随机试验、样本空间与随机事件的关系

随机试验、样本空间与随机事件的关系

每一个随机试验相应地有一个样本空间, 样本空间的子集就是随机事件.

随机试验 $\longrightarrow$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

必然事件，不可能事件是两个特殊的 **随机事件**