第六章 关系数据理论

6.3 数据依赖的公理系统

❖ 逻辑蕴含

定义 6.11 对于满足一组函数依赖 F 的关系模式 $R<U, F>$，其任何一个关系 r，若函数依赖 $X \rightarrow Y$ 都成立，（即 r 中任意两元组 t，s，若 tX］ $=sX$］，则 tY］ $=sY$］），则称 F 逻辑蕴含 $X \rightarrow Y$

1. Armstrong 公理系统

关系模式 R <U， F> 来说有以下的推理规则:

- A1. 自反律（Reflexivity）：若 $Y \subseteq X \subseteq U$，则 $X \rightarrow Y$ 为 F 所蕴含。
- A2. 增广律（Augmentation）：若 $X \rightarrow Y$ 为 F 所蕴含，且 $Z \subseteq U$，则 $XZ \rightarrow YZ$ 为 F 所蕴含。
- A3. 传递律（Transitivity）：若 $X \rightarrow Y$ 及 $Y \rightarrow Z$ 为 F 所蕴含，则 $X \rightarrow Z$ 为 F 所蕴含。

定理 6.1 Armstrong 推理规则是正确的

（l）自反律：若 $Y \subseteq X \subseteq U$，则 $X \to Y$ 为 F 所蕴含

证：设 $Y \subseteq X \subseteq U$

对 R <U， F> 的任一关系 r 中的任意两个元组 t， s：

若 $t[X]=s[X]$，由于 $Y \subseteq X$，有 $t[y]=s[y]$，

所以 $X \to Y$ 成立，自反律得证

定理 6.l Armstrong 推理规则是正确的（续）

(2) 增广律：若 $X \rightarrow Y$ 为 F 所蕴含，且 $Z \subseteq U$，则 $XZ \rightarrow YZ$ 为 F 所蕴含。

证：设 $X \rightarrow Y$ 为 F 所蕴含，且 $Z \subseteq U$。

设 $R<U，F>$ 的任一关系 r 中任意的两个元组 t，s：

若 $t[XZ]=s[XZ]$，则有 $t[X]=s[X]$ 和 $t[Z]=s[Z]$；

由 $X \rightarrow Y$，于是有 $t[Y]=s[Y]$，所以 $t[YZ]=s[YZ]$，所以 $XZ \rightarrow YZ$ 为 F 所蕴含，增广律得证。

定理 6.l Armstrong 推理规则是正确的（续）

(3) 传递律：若 $X \rightarrow Y$ 及 $Y \rightarrow Z$ 为 F 所蕴含，则 $X \rightarrow Z$ 为 F 所蕴含。

证：设 $X \rightarrow Y$ 及 $Y \rightarrow Z$ 为 F 所蕴含。

对 R<U， F> 的任一关系 r 中的任意两个元组 t， s ：

若 $t[X]=s[X]$，由于 $X \rightarrow Y$，有 $t[Y]=s[Y]$；

再由 $Y \rightarrow Z$，有 $t[Z]=s[Z]$，所以 $X \rightarrow Z$ 为 F 所蕴含，传递律得证。

2. 导出规则

1. 根据 A1， A2， A3 这三条推理规则可以得到下面三条推理规则：

- 合并规则：由 $X \rightarrow Y$， $X \rightarrow Z$，有 $X \rightarrow YZ$。
  （A2， A3）
- 伪传递规则：由 $X \rightarrow Y$， $WY \rightarrow Z$，有 $XW \rightarrow Z$。
  （A2， A3）
- 分解规则：由 $X \rightarrow Y$ 及 $Z \subseteq Y$，有 $X \rightarrow Z$。
  （A1， A3）

导出规则

2. 根据合并规则和分解规则，可得引理 6.1

引理 6.l $X \to A_1 A_2 \ldots A_k$ 成立的充分必要条件是 $X \to A_i$ 成立（i=l， 2， …， k）

Armstrong 公理系统

- Armstrong 公理系统是有效的、完备的
  - 有效性：由 *F* 出发根据 Armstrong 公理推导出来的每一个函数依赖一定在 *F*+ 中；
  - 完备性： *F*+ 中的每一个函数依赖，必定可以由 *F* 出发根据 Armstrong 公理推导出来

3. 函数依赖闭包

定义 6.l2 在关系模式 $R<U$， $F>$ 中为 F 所逻辑蕴含的函数依赖的全体叫作 F 的闭包，记为 F^+。

定义 6.13 设 F 为属性集 U 上的一组函数依赖， $X \subseteq U$， $X_F^+ = \{ A \mid X \rightarrow A$ 能由 F 根据 Armstrong 公理导出 $\}$， X_F^+ 称为属性集 X 关于函数依赖集 F

F 的闭包

F={X→Y, Y→Z}

F^+={

X→φ, Y→φ, Z→φ, XY→φ, XZ→φ, YZ→φ, XYZ→φ,

X→X, Y→Y, Z→Z, XY→X, XZ→X, YZ→Y, XYZ→X,

X→Y, Y →Z, XY→Y, XZ→Y, YZ→Z, XYZ→Y,

X→Z, Y→YZ, XY→Z, XZ→Z, YZ→YZ,XYZ→Z,

X→XY, XY→XY,XZ→XY, XYZ→XY,

X→XZ, XY→YZ,XZ→XZ, XYZ→YZ,

X→YZ, XY→XZ,XZ→XY, XYZ→XZ,

X→ZYZ, XY→XYZ,XZ→XYZ, XYZ→XYZ }

F={X→A1, …… , X→An} 的闭包 F^+ 计算是一个 NP 完全问题

关于闭包的引理

- **引理 6.2**

  设 F 为属性集 U 上的一组函数依赖，X，$Y \subseteq U$，$X \rightarrow Y$ 能

  由 F 根据 Armstrong 公理导出的充分必要条件是 $Y \subseteq X_F^+$

- 用途

  将判定 $X \rightarrow Y$ 是否能由 F 根据 Armstrong 公理导出的问题，转化为求出 X_F^+、判定 Y 是否为 X_F^+ 的子集的问题

求闭包的算法

算法 6.1 求属性集 X（$X \subseteq U$）关于 U 上的函数依赖集 F 的闭包 X_F^+

输入：X，F　　输出：X_F^+

步骤：

（1）令 $X^{(0)}=X$，$i=0$

（2）求 B，这里 $B=\{A \mid (\exists V)(\exists W)(V \to W \in F \wedge V \subseteq X^{(i)} \wedge A \in W)\}$；

（3）$X^{(i+1)}=B \cup X^{(i)}$

（4）判断 $X^{(i+1)}=X^{(i)}$ 吗？

（5）若相等或 $X^{(i)}=U$，则 $X^{(i)}$ 就是 X_F^+，算法终止。

（6）若否，则 $i=i+l$，返回第（2）步。

算法 6.1

对于算法 6.1， 令 $a_i = |X^{(i)}|$， $\{a_i\}$ 形成一个步长大于 1 的严格递增的序列，序列的上界是 $|U|$，因此该算法最多 $|U| - |X|$ 次循环就会终止。

函数依赖闭包

[例 1] 已知关系模式 $R<U，F>$，其中

$U=\{A，B，C，D，E\}$；

$F=\{AB\rightarrow C，B\rightarrow D，C\rightarrow E，EC\rightarrow B，AC\rightarrow B\}$。

求 $(AB)_F^+$。

解 设 $X^{(0)}=AB$；

(1) $X^{(1)}=AB\cup CD=ABCD$。

(2) $X^{(0)}\neq X^{(1)}$

$X^{(2)}=X^{(1)}\cup BE=ABCDE$。

(3) $X^{(2)}=U$，算法终止

→ $(AB)_F^+=ABCDE$。

4. Armstrong 公理系统的有效性与完备性

- 定理 6.2 Armstrong 公理系统是有效的、完备的
- 证明：

1. 有效性

   可由定理 6.1 得证

2. 完备性

   只需证明逆否命题：若函数依赖 $X \rightarrow Y$ 不能由 F 从 Armstrong 公理导出，那么它必然不为 F 所蕴含

Armstrong 公理系统完备性证明

(1) 引理：若 $V \to W$ 成立，且 $V \subseteq X_F^+$，则 $W \subseteq X_F^+$

(2) 构造一张二维表 r，它由下列两个元组构成，可以证明 r 必是 R（U，F）的一个关系，即 F^+ 中的全部函数依赖在 r 上成立。

$\overbrace{\quad X_F^+ \quad}$	$\overbrace{\quad U-X_F^+ \quad}$
11......1	00......0
11......1	11......1

(3) 若 $X \to Y$ 不能由 F 从 Armstrong 公理导出，则 Y 不是 X_F^+ 的子集。

5. 函数依赖集等价

定义 6.14 如果 $G^+=F^+$，就说函数依赖集 F 覆盖 G（F 是 G 的覆盖，或 G 是 F 的覆盖），或 F 与 G 等价。

引理 6.3 $F^+ = G^+$ 的充分必要条件是 $F \subseteq G^+$，和 $G \subseteq F^+$

证： 必要性显然，只证充分性。

（1）若 $F \subseteq G^+$，则 $X_F^+ \subseteq X_{G+}^+$。

（2）任取 $X \rightarrow Y \in F^+$ 则有 $Y \subseteq X_F^+ \subseteq X_{G+}^+$。

所以 $X \rightarrow Y \in (G^+)^+ = G^+$。即 $F^+ \subseteq G^+$。

（3）同理可证 $G^+ \subseteq F^+$，所以 $F^+ = G^+$。

6. 最小依赖集

定义 6.15 如果函数依赖集 F 满足下列条件，则称 F 为一个极小函数依赖集。亦称为最小依赖集或最小覆盖。

(1) F 中任一函数依赖的右部仅含有一个属性。

(2) F 中不存在这样的函数依赖 X→A，使得 F 与 F-{X→A} 等价。

(3) F 中不存在这样的函数依赖 X→A， X 有真子集 Z 使得 F-{X→A}∪{Z→A} 与 F 等价。

最小依赖集

[例 2] 关系模式 $S<U，F>$，其中:

U={ Sno， Sdept， Mname， Cno， Grade }，

F={ Sno→Sdept， Sdept→Mname，
(Sno， Cno)→Grade }

设 F'={Sno→Sdept， Sno→Mname， Sdept→Mname，

(Sno， Cno)→Grade， (Sno， Sdept)→Sdept}

F 是最小覆盖，而 F' 不是。

因为： F' - {Sno→Mname} 与 F' 等价

F' - {(Sno， Sdept)→Sdept} 也与 F' 等价

7. 极小化过程

定理 6.3　每一个函数依赖集 F 均等价于一个极小函数依赖

集 F_m。此 F_m 称为 F 的最小依赖集。

证明：构造性证明，找出 F 的一个最小依赖集。

极小化过程（续）

(1) 逐一检查 F 中各函数依赖 FD_i： $X \rightarrow Y$，若 $Y=A_1A_2 \ldots A_k$， $k>2$

，

则用 $\{X \rightarrow A_j | j=1, 2, \cdots, k\}$ 来取代 $X \rightarrow Y$。

(2) 逐一检查 F 中各函数依赖 FD_i： $X \rightarrow A$，令 $G=F-\{X \rightarrow A\}$，

若 $A \in X_G^+$， 则从 F 中去掉此函数依赖。

(3) 逐一取出 F 中各函数依赖 FD_i： $X \rightarrow A$，设 $X=B_1B_2 \ldots B_m$，

逐一考查 B_i （i=l， 2，…， m），若 $A \in (X-B_i)_F^+$

，

则以 $X-B_i$ 取代 X。

极小化过程（续）

[例 3] $F = \{A \to B，B \to A，B \to C，A \to C，C \to A\}$

F_{m1}、F_{m2} 都是 F 的最小依赖集：

$$F_{m1} = \{A \to B，B \to C，C \to A\}$$

$$F_{m2} = \{A \to B，B \to A，A \to C，C \to A\}$$

- F 的最小依赖集 F_m 不唯一
- 极小化过程（定理 6.3 的证明）也是检验 F 是否为极小依赖集的一个算法