1.6　事件的独立性

一、事件的相互独立性

二、几个重要定理

三、例题讲解

四、独立试验序列

五、小结

一、事件的相互独立性

(一) 两个事件的独立性

由条件概率，知

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

一般地， $P(A|B)\neq P(A)$

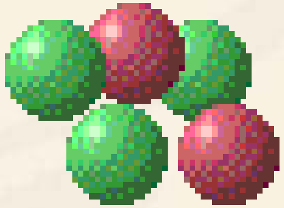
这意味着：事件B的发生对事件A发生的概率有影响．然而，在有些情形下又会出现：

$$P(A|B)=P(A)$$

1.引例 盒中有5个球(3绿2红),每次取出一个,有放回地取两次.记

$A=$ 第一次抽取,取到绿球,

$B=$ 第二次抽取,取到绿球,



则有 $$P(B|A)=\frac{3}{5}=P(B)$$

它表示 A 的发生并不影响 B 发生的可能性大小.

若 $P(A)>0$, 则

$$P(B|A)=P(B)\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

2. 定义

设 A, B 是两事件，如果满足等式

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

则称事件 A, B 相互独立，简称 A, B 独立.

注. 1° 若 $P(A) > 0$，则

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

说明

事件 A 与 B 相互独立，是指事件 A 的发生与事件 B 发生的概率无关.

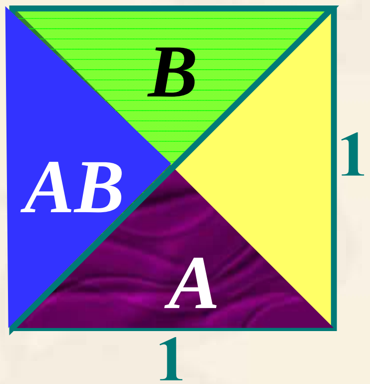
2^o 独立与互斥的关系

互斥是事件间本身的关系

这是两个不同的概念.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{两事件相互独立} & P(AB)=P(A)P(B) \\ \text{两事件互斥} & AB=\varnothing\end{array}\right\}\text{二者之间没有必然联系}$$

例如



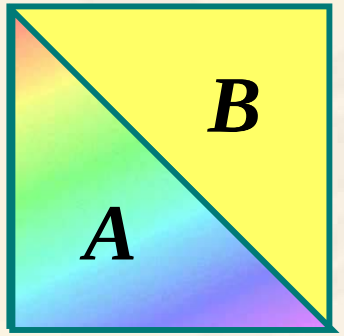
若 $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B)=\dfrac{1}{2},$

则 $P(AB)=P(A)P(B).$

两事件相互独立 $\not\longrightarrow$ 两事件互斥.

又如：

若 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$ (如图)



则 $P(AB)=0$,

$P(A)P(B)=\frac{1}{4}$,

故 $P(AB)\neq P(A)P(B)$

由此可见两事件互斥但不独立.

两事件互斥 $\not\longrightarrow$ 两事件相互独立.

可以证明： 特殊地，

当 $P(A)>0, P(B)>0$时，有

A与B 独立 $\Rightarrow$ A与B 相容(不互斥)

或 A与B 互斥 $\Rightarrow$ A与B 不独立

证 若A与B独立, 则 $P(AB)=P(A)P(B)$

$\because\ P(A)>0,\ P(B)>0$

$\therefore\ P(AB)=P(A)P(B)>0$

故 $AB\neq\varnothing$

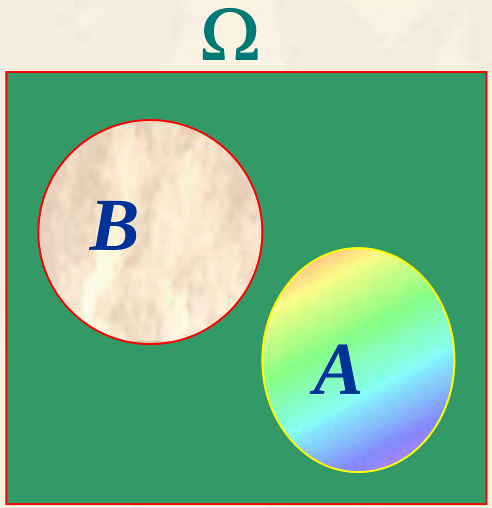
即 A与B 不互斥(相容).

理解:

若A与B互斥，则 $AB=\varnothing$

B发生时，A一定不发生.

$$P(A|B)=0$$



这表明: B的发生会影响 A发生的可能性(造成A不发生), 即B的发生造成 A发生的概率为零.

所以A与B不独立.

3. 性质

(1) 必然事件Ω及不可能事件$\varnothing$与任何事件A相互独立.

证 $\because$ $\Omega A=A$, $P(\Omega)=1$

$\therefore$ $P(\Omega A) = P(A)=1\cdot P(A)= P(\Omega)\, P(A)$

即 Ω与A独立.

$\because$ $\varnothing A=\varnothing$, $P(\varnothing)=0$

$\therefore$ $P(\varnothing A) = P(\varnothing)=0= P(\varnothing)\, P(A)$

即 $\varnothing$与A独立.

(2) 若事件A与B相互独立, 则以下三对事件

也相互独立.

① A 与 $\overline{B}$;

② $\overline{A}$ 与 B;

③ $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$.

注 称此为二事件的独立性关于逆运算封闭.

证 ① $\because A = A\Omega = A(B+\overline{B}) = AB + A\overline{B}$

$\therefore \quad P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$$

又$\because$ A与B相互独立

$$\therefore \quad P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$$

$$= P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)P(\overline{B})$$

③ $\because \overline{A}\,\overline{B} = \overline{A \cup B}$ (对偶律)

$$\therefore \quad P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]$$

$$= [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)]$$

$$= [1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)]$$

$$= P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

例1 甲, 乙两人同时向敌人炮击,已知甲击中敌机的概率为0.6, 乙击中敌机的概率为0.5, 求敌机被击中的概率.

解 设 A={ 甲击中敌机 }

B={ 乙击中敌机 }

C={敌机被击中 }

则 $C = A \cup B$. 依题设, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$

$\therefore$ A与B不互斥

($P(A)+P(B)=1.1>1\geq P(A+B)$)

由于 甲，乙同时射击，甲击中敌机并不影响乙击中敌机的可能性，所以 A与B独立，进而 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$独立.

$$\because \quad \overline{C} = \overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad P(C) &= 1 - P(\overline{C}) \\
&= 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) \\
&= 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)] \\
&= 1 - (1 - 0.6)(1 - 0.5) \\
&= 0.8
\end{aligned}$$

（二） 多个事件的独立性

1. 三事件两两相互独立的概念

定义 设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 两两相互独立.

2. 三事件相互独立的概念

定义1.10 设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

3. n 个事件的独立性

定义 若事件 A_1，A_2，…，A_n 中任意两个事件相互独立，即对于一切 $1 \le i < j \le n$，有

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$$

共 $C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n$

$= (1+1)^n - C_n^0 - C_n^1$

$= 2^n - 1 - n$ 个式子.

则称 A_1，$A_2, \cdots A_n$ 两两相互独立.

定义1.11 设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个事件，

若对于任意 $k(1 \le k \le n)$，及 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$

有 $$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称 A_1，$A_2, \cdots A_n$ 相互独立.

注. $A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立

$\xrightarrow[\not\leftarrow]{}$ $A_1, A_2, \cdots, A_n$两两相互独立

例2 设一个口袋里装有四张形状相同的卡片.在这四张卡片上依次标有下列各组数字：110，101，011，000

从袋中任取一张卡片，记

$A_i = \{$取到的卡片第i位上的数字为$1\}$

i=1,2,3.

证明：(1) A_1, A_2, A_3两两相互独立;

(2) A_1, A_2, A_3不相互独立.

证 (1) $P(A_1)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}=P(A_2)=P(A_3)$

$\because\quad P(A_1A_2)=\dfrac{1}{4}=P(A_1)P(A_2)$

110，101，
011，000

$P(A_1A_3)=\dfrac{1}{4}=P(A_1)P(A_3)$

$P(A_2A_3)=\dfrac{1}{4}=P(A_2)P(A_3)$

$\therefore\quad A_1,A_2,A_3$两两相互独立;

(2) $\because\quad P(A_1A_2A_3)=\dfrac{0}{4}=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\dfrac{1}{8}$

$\therefore\quad A_1,A_2,A_3$不相互独立

两个结论

1. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n \geq 2)$ 相互独立，则其中任意 k $(2 \leq k \leq n)$个事件也是相互独立.

2. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件,所得的 n 个事件仍相互独立.(独立性关于运算封闭)

结论的应用　n 个独立事件和的概率公式:

设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n)$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) \cdots P(\overline{A}_n)$$

$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_n$ 也相互独立

即　n 个独立事件至少有一个发生的概率等于 1 减去各自对立事件概率的乘积.

若设n个独立事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 发生的概率分别为 $p_1, \cdots, p_n$,

则“ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生”的概率为

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - (1-p_1) \ldots (1-p_n)$$

类似可以得出:

“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个不发生”的概率为

$$P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_n) = 1 - P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

$$= 1 - p_1 \ldots p_n$$

例3 若每个人血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%, 假设每个人血清中是否含有肝炎病毒相互独立，混合100个人的血清，求此血清中含有肝炎病毒的概率.

解 记 $A_i=\{$第i个人的血清含有肝炎病毒$\}$

$$(i=1,2,\cdots,100)$$

$B=\{$100个人的混合血清中含有肝炎病毒$\}$

则 $P(A_i)=0.004$

$$B=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100}$$

例题

依题设, $A_1, A_2, \cdots, A_{100}$ 相互独立

$$\therefore P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_{100})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) \cdots P(\overline{A}_{100})$$

$$= 1 - [1 - P(A_1)]^{100}$$

$$= 1 - (1 - 0.004)^{100} = 1 - (0.996)^{100} \approx 0.33$$

返回

事件的独立性在可靠性理论中的应用：

一个元件的可靠性： 该元件正常工作的概率.

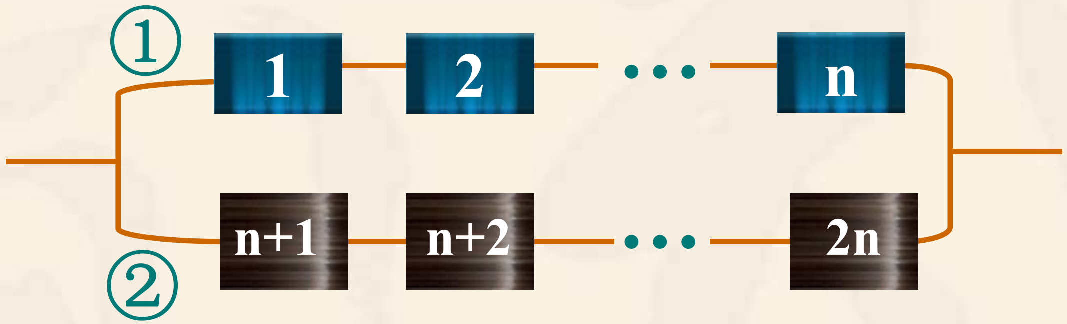
一个系统的可靠性： 由元件组成的系统正常工作的概率.

例4 设一个系统由 $2n$ 个元件组成，每个元件的可靠性均为 r，且各元件能否正常工作是相互独立的.

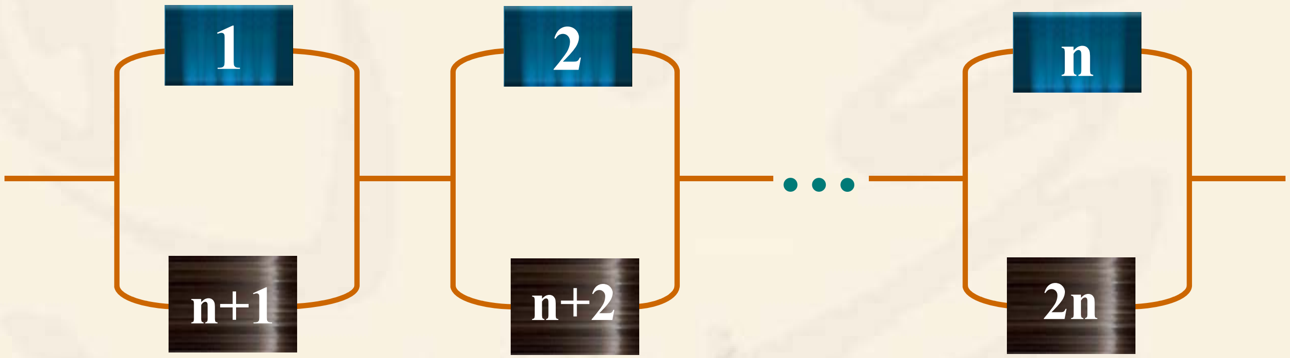
(1) 求下列两个系统 I 和 II 的可靠性；

(2) 问：哪个系统的可靠性更大？

系统 I.



系统 II.



解 设 $A_i = \{$第i个元件正常工作$\}$, 则 $P(A_i) = r$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$

设 $B_1 = \{$ 系统 I 正常工作$\}$

B_2={ 系统Ⅱ正常工作}

考察系统Ⅰ：

设 C ={ 通路①正常工作 }, D={ 通路②正常工作 }

∵ 每条通路正常工作 $\Leftrightarrow$ 通路上各元件都正常工作

而 系统Ⅰ正常工作 $\Leftrightarrow$ 两条通路中至少有一条正常工作

$$\therefore B_1 = C \cup D = A_1 A_2 \cdots A_n \cup A_{n+1} A_{n+2} \cdots A_{2n}$$

$\because \quad P(C)=P(A_1A_2\cdots A_n)$

$$=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)=r^n$$

$$P(D)=P(A_{n+1}A_{n+2}\cdots A_{2n})$$

$$=P(A_{n+1})P(A_{n+2})\cdots P(A_{2n})=r^n$$

$\therefore$ 系统Ⅰ正常工作的概率:

$$P(B_1)=P(C\cup D)$$

$$=1-P(\overline{C\cup D})=1-P(\overline{C}\,\overline{D})$$

$$=1-P(\overline{C})P(\overline{D})$$

$$=1-(1-r^n)^2=r^n(2-r^n)$$

考察系统Ⅱ：

系统Ⅱ正常工作 $\Longleftrightarrow$ 通路上的每对并联元件正常工作

B_2={ 系统Ⅱ正常工作}

$$=(A_1\cup A_{n+1})(A_2\cup A_{n+2})\cdots(A_n\cup A_{2n})$$

$$\because\quad P(A_i\cup A_{n+i})=1-P(\overline{A_i\cup A_{n+i}})$$

$$=1-P(\overline{A}_i\overline{A}_{n+i})$$

$$=1-P(\overline{A}_i)P(\overline{A}_{n+i})$$

$$=1-(1-r)^2=r(2-r)$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

所以，系统II正常工作的概率：

$$P(B_2) = P(A_1 \cup A_{n+1})P(A_2 \cup A_{n+2}) \cdots P(A_n \cup A_{2n})$$

$$= [r(2-r)]^n = r^n(2-r)^n$$

(2) 问：哪个系统的可靠性更大？

$\because \quad 0 < r < 1$

$(2-r)^n > 2 - r^n$

$\therefore \quad P(B_2) > P(B_1)$

令 $f(x) = x^n \quad (n \geq 2)$，则

$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0 \quad (x > 0)$

故曲线$y = f(x)$是凹的，从而

$$\frac{f(2-r) + f(r)}{2} > f\left(\frac{(2-r)+r}{2}\right) = f(1) = 1$$

即 $\dfrac{(2-r)^n + r^n}{2} > 1$，亦即$(2-r)^n > 2 - r^n$

即系统II的可靠性比系统I的大.

二、独立试验序列概型

1. 定义1.12 (独立试验序列)

设$\{E_i\}(i=1,2,\ldots)$是一列随机试验,E_i的样本空间为Ω_i,设A_k 是E_k中的任一事件,$A_k\subset\Omega_k$, 若A_k出现的概率都不依赖于其它各次试验E_i $(i\neq k)$的结果,则称$\{E_i\}$ 是**相互独立**的随机试验序列,简称**独立试验序列**.

2. n 重贝努利(Bernoulli)试验

若n 次重复试验具有下列**特点：**

1) 每次试验的可能结果只有两个A 或 $\overline{A}$,

且 $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p$

(在各次试验中p是常数，保持不变）

2) 各次试验的结果相互独立,

则称这n次重复试验为n重贝努里试验，简称为**贝努里概型.**

实例1 抛一枚硬币观察得到正面或反面. 若将硬币抛 n 次,就是n重伯努利试验.

实例2 抛一颗骰子n次,观察是否 “出现 1 点”,就

是 n重伯努利试验.

一般地，对于贝努里概型，有如下公式：

3. 二项概率公式

定理 如果在贝努里试验中，事件A出现的概率为p $(0<p<1)$, 则在n次试验中，A恰好出现 k 次的概率为：

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$(k = 0,1,2,\cdots,n;\ q = 1-p)$$

且 $$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$$

推导如下：

若 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，则 X 所有可能取的值为

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \cdots,\quad n.$$

当 $X = k\ (0 \le k \le n)$ 时，

即 A 在 n 次试验中发生了 k 次.

$$\underbrace{A\,A\cdots A}_{k\text{次}}\ \underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-k\text{ 次}},$$

$$\underbrace{A\,A\cdots A}_{k-1\text{ 次}}\ \overline{A}\ \ A\ \underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-k-1\text{ 次}}\quad \cdots\cdots$$

得 A 在 n 次试验中发生 k 次的方式共有 C_n^k 种,

且两两互不相容.

因此 A在 n 次试验中发生 k 次的概率为

$$C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k} \xrightarrow{\text{记 } q=1-p} C_n^k\, p^k q^{n-k}$$

称上式为二项分布. 记为 $X \sim B(n, p)$.

例5 设某考卷上有 10道选择题，每道选择题有 4个可供选择的答案，其中一个为正确答案，今有一考生仅会做 6道题，有4道题不会做，于是随意填写，试问能碰对 $m(m = 0,1,2,3,4)$道题的概率.

解 设B_m表示4道题中碰对m道题这一事实，则

$$P(B_m) = C_4^m \left(\frac{1}{4}\right)^m \left(\frac{3}{4}\right)^{4-m} \quad (m = 0,1,2,3,4)$$

经计算得

$$P(B_0) = C_4^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{4-0} = 0.316$$

$$P(B_3) = C_4^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^{4-3} = 0.048$$

返回

几何分布

在贝努利试验中，通常 需要计算事件 A 首次发生在第 k概率,

即试验总共进行了k次,前$k-1$次均是$\overline{A}$发生,第k次A发生.

若以B_k记这一事件,以$A_i(i=1,2,\cdots,k)$记事件A在第i次试验中发生,则

$$B_k=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k$$

$$P(B_k)=P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_{k-1})P(A_k)=(1-p)^{k-1}p$$

几何分布

例6 一个人开门,他共有n把钥匙,其中仅有一把能打开这个门,他随机地选取一把钥匙 开门,即每次以$\frac{1}{n}$的概率被选中,求该人在第k次打开门的概率.

解 令B_k表示第 k次打开门 ,则

$$P(B_k)=(1-\frac{1}{n})^{k-1}\frac{1}{n} \qquad k=1,2,\cdots$$

三、内容小结

1. A, B 两事件独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)\,P(B)$

A,B,C 三个事件相互独立

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

2. 重要结论

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$相互独立.

3 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立 ,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

4 二项分布 $C_n^k\ p^k q^{n-k}$

5 几何分布 $(1-p)^{k-1} p$

备用题

伯恩斯坦反例

例1 一个均匀的正四面体, 其第一面染成红色, 第二面染成白色 , 第三面染成黑色, 而第四面同时染上红、白、黑三种颜色.现以 A , B, C 分别记投一次四面体出现红, 白, 黑颜色朝下的事件, 问 A,B,C是否相互独立?

解 由于在四面体中红, 白, 黑分别出现两面,

因此 $$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

又由题意知 $$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4},$$

故有
$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) = \dfrac{1}{4}, \\ P(BC) = P(B)P(C) = \dfrac{1}{4}, \\ P(AC) = P(A)P(C) = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

则三事件 A, B, C 两两独立.

由于 $$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C),$$

因此 A、B、C 不相互独立.

射击问题

例2 设每一名机枪射击手击落飞机的概率都是0.2,若10名机枪射击手同时向一架飞机射击,问击落飞机的概率是多少?

解 设事件 A_i 为"第 i 名射手击落飞机",

$$i = 1,2,\cdots,10.$$

事件 B 为“击落飞机”,

则 $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}$,

返回

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_{10}}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_{10}}) \\
&= 1 - (0.8)^{10} = 0.893.
\end{aligned}
$$

返回

例3 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7, 飞机被一人击中而被击落的概率为0.2 ,被两人击中而被击落的概率为 0.6 , 若三人都击中飞机必定被击落, 求飞机被击落的概率.

解 设 A_i 表示有 i 个人击中敌机，

A, B, C 分别表示甲、乙、丙击中敌机 ,

则 $P(A)=0.4,\ P(B)=0.5,\ P(C)=0.7,$

由于 $A_1 = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C,$

返回

故得

$$P(A_1)=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$

$$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7$$

$$=0.36.$$

因为 $A_2=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC,$

得 $P(A_2)=P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)$

$$=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)$$

$$=0.41.$$

返回

由 $A_3 = ABC$， 得 $P(A_3) = P(ABC)$

$$= P(A)P(B)P(C)$$

$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14.$$

因而,由全概率公式得飞机被击落的概率为

$$P = 0.2 \times 0.36 + 0.6 \times 0.41 + 1 \times 0.14$$

$$= 0.458.$$

返回

例4 要验收一批(100件)乐器.验收方案如下:自该批乐器中随机地取3件测试(设3件乐器的测试是相互独立的),如果3件中至少有一件在测试中被认为音色不纯,则这批乐器就被拒绝接收.设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为0.95;而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为0.01.如果已知这100件乐器中恰有4件是音色不纯的.试问这批乐器被接收的概率是多少?

解 设以 $H_i\ (i=0,1,2,3)$ 表示事件"随机地取出3件乐器,其中恰有 i 件音色不纯",

返回

H_0, H_1, H_2, H_3 是 S 的一个划分，

以A表示事件"这批乐器被接收". 已知一件音色纯的乐器，经测试被认为音色纯的概率为 0.99，而一件音色不纯的乐器,经测试被认为音色纯的概率为0.05, 并且三件乐器的测试是相互独立的,于是有

$$P(A|H_0) = (0.99)^3, \quad P(A|H_1) = (0.99)^2 \times 0.05,$$

$$P(A|H_2) = 0.99 \times (0.05)^2, \quad P(A|H_3) = (0.05)^3,$$

返回

而 $P(H_0)=\binom{96}{3}\Big/\binom{100}{3}$,

$$P(H_1)=\binom{4}{1}\binom{96}{2}\Big/\binom{100}{3},$$

$$P(H_2)=\binom{4}{2}\binom{96}{1}\Big/\binom{100}{3},\quad P(H_3)=\binom{4}{3}\Big/\binom{100}{3}.$$

故 $P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(A|H_i)$

$$=0.8574+0.0055+0+0=0.8629.$$

返回

例5 甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为 $p, p \geq 1/2$，问对甲而言，采用三局二胜制有利，还是采用五局三胜制有利。设各局胜负相互独立。

解 设 $A=\{\text{甲胜}\}$

E：观察1局比赛甲是否获胜

E_n：可看成将 E 重复了 n 次，这是一个 n 重贝努里试验。

设在 n 次试验中，A 恰好出现 k 次的概率为：

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

返回

(1) 采用三局二胜制 ,甲最终获胜 , 至少需比赛 2 局,

且最后一局必需是甲胜 ,而前面甲需胜1 局.

胜局情况可能是 :

"甲甲", "乙甲甲", "甲乙甲";

∴ 采用三局二胜制 ,甲最终获胜的概率:

$$p_1 = P_2(2) + P_2(1)\cdot p$$

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$= C_2^2 p^2 + C_2^1 p(1-p).p$$

$$= p^2 + 2p^2(1-p).$$

返回

(2) 采用五局三胜制,甲最终获胜,至少需比赛 3 局,
且最后一局必需是甲胜,而前面甲需胜二 局.

如: 比赛3局, 甲的胜局情况是:

"甲甲甲";

比赛4局, 甲的胜局情况可能是:

"甲乙甲甲","乙甲甲甲","甲甲乙甲"……

∴ 在五局三胜制下,甲最终获胜的概率为:

$$p_2 = P_3(3) + P_3(2) \cdot p + P_4(2) \cdot p$$
$$= p^3 + C_3^2 p^3 (1-p) + C_4^2 p^3 (1-p)^2$$
$$= p^3[1 + 3(1-p) + 6(1-p)^2].$$

返回

由于 $p_2 - p_1 = p^2(6p^3 - 15p^2 + 12p - 3)$

$$= 3p^2(p-1)^2(2p-1).$$

当 $p > \frac{1}{2}$ 时， $p_2 > p_1$; 当 $p = \frac{1}{2}$ 时 $p_2 = p_1 = \frac{1}{2}$.

故当 $p > \frac{1}{2}$ 时,对甲来说采用五局三胜制为有利.

当 $p = \frac{1}{2}$ 时,两种赛制甲、乙最终获胜的概率是相同的,都是 50%.

返回

例6　一批产品有 20%的次品,进行重复抽样检查，共取5件样品,计算这5件样品中 (1)恰好有3件次品的概率,(2)至多有3件次品的概率 .

解　设A_0, A_1, A_2, A_3分别表示5件样品中恰好有0件, 1件, 2件, 3件次品, A表示至多有件次品 ,则

$$P(A_3) = C_5^3 (0.2)^3 (0.8)^{5-3}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_0 + A_1 + A_2 + A_3) \\ &= P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &= \sum_{i=0}^{3} C_5^i (0.2)^i (0.8)^{5-i} \end{aligned}$$

返回

例7 若每蚕产n个卵的概率为$P_n = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$,

$(n = 0,1,2,\cdots;\lambda > 0)$,而每个卵变成虫的概率为$p$，且各卵是否变成虫彼此间没有关系.

(1) 求每蚕养出k只小蚕的概率；

(2) 若某蚕养出k只小蚕，求它产了n个卵的概率.

解 设$A_n = \{$每只蚕产了n个卵$\}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$

依题设，$P(A_n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

$$(n = 0,1,2,\cdots;\lambda > 0)$$

例题

(1) 设$A = \{$卵变成虫$\}$

E：观察一个卵是否变成虫

小蚕=虫

依题设，$P(A)=p$

E_n：观察n个卵是否变成虫

E_n 可看成将 E 重复了n次, 这是一个贝努里试验.

设 B={该蚕产了k只小蚕}，则由二项概率公式

得 $$P(B|A_n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$(n = k, k+1, \cdots)$$

$$\because \quad A_n A_m = \varnothing \quad (n \neq m)$$

返回

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega$$

$$P(B|A_n) = P(\varnothing) = 0 \quad (n=0, 1, 2,\cdots,k\text{-}1)$$

$\therefore$ 由全概率公式，得

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)P(B|A_n) = \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n)P(B|A_n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

返回

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{m}}{m!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)}$$

返回

$$P(B)=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p},(k=0,1,2,\cdots)$$

(2) 若某蚕养出k只小蚕，求它产了n个卵的概率.

由贝叶斯公式，得

$$P(A_n|B)=\frac{P(A_n)P(B|A_n)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{(\lambda p)^n}{n!}e^{-\lambda p}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}{\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}}=\frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(1-p)}$$

$(n=k,k+1,\cdots)$

返回