

2.2 离散型随机变量及其分布

一、离散型随机变量的分布律

二、常见离散型随机变量的概率分布

三、小结



一、离散型随机变量的分布律

定义 设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 x_k ($k = 1, 2, \dots$), X 取各个可能值的概率, 即事件 $\{X = x_k\}$ 的概率, 为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

称此式为离散型随机变量 X 的分布律.

说明 (1) $p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots;$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

离散型随机变量的分布律也可表示为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

或

X	x_1	x_2	\cdots	x_n	\cdots
p_k	p_1	p_2	\cdots	p_n	\cdots

离散型随机变量的分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} p_k = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k).$$

离散型随机变量分布律与分布函数的关系

分布律

$$p_k = P\{X = x_k\}$$



分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} p_k$$

离散型随机变量分布函数演示

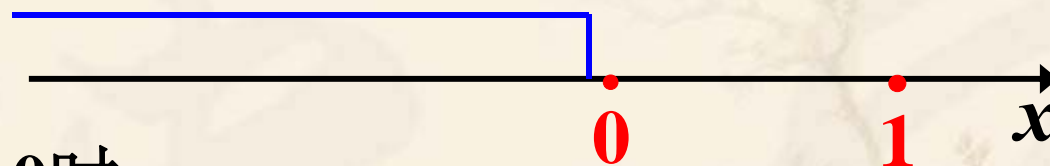
例 1 抛掷均匀硬币, 令

$$X = \begin{cases} 1, & \text{出正面,} \\ 0, & \text{出反面.} \end{cases}$$



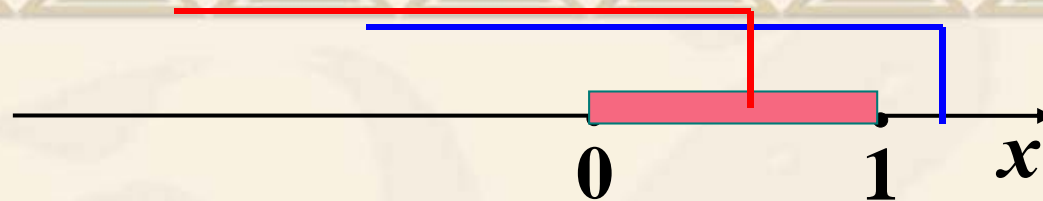
求随机变量 X 的分布函数.

解 $p\{X = 1\} = p\{X = 0\} = \frac{1}{2},$



当 $x < 0$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x < 0\} = 0,$$



当 $0 \leq x < 1$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2};$$

当 $x \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \leq x\} \\ &= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} \quad \text{得} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

二、常见离散型随机变量的概率分布

1.退化分布

若随机变量 X 取常数值 C 的概率为1,即

$$P(X = C) = 1$$

则称 X 服从退化分布.

2.两点分布

设随机变量 X 只可能取0与1两个值,它的分布律为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

则称 X 服从 **(0-1) 分布**或**两点分布**.记为 $X \sim b(1,p)$

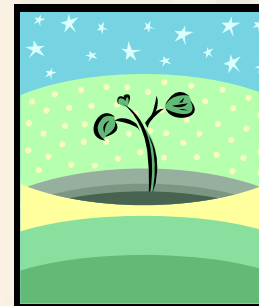
实例1 “抛硬币” 试验,观察正、反两面情况.

$$X = X(e) = \begin{cases} 0, & \text{当 } e = \text{正面}, \\ 1, & \text{当 } e = \text{反面}. \end{cases}$$

随机变量 X 服从 (0-1) 分布.

其分布律为

X	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



说明

两点分布是最简单的一种分布,任何一个只有两种可能结果的随机现象,比如新生婴儿是男还是女、明天是否下雨、种籽是否发芽等,都属于两点分布.

两点分布随机数演示

3.均匀分布

如果随机变量 X 的分布律为

X	a_1	a_2	\cdots	a_n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	\cdots	$\frac{1}{n}$

其中 $(a_i \neq a_j), (i \neq j)$, 则称 X 服从均匀分布.

实例 抛掷骰子并记出现的点数为随机变量 X ,

则有

X	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

均匀分布随机数演示

4.二项分布

若 X 的分布律为:

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

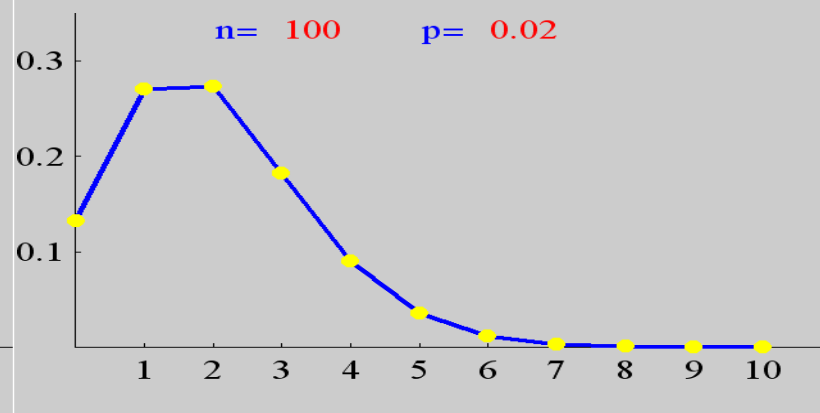
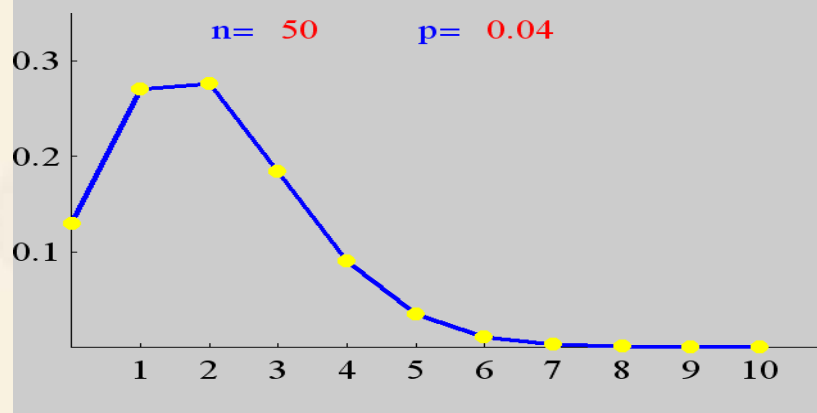
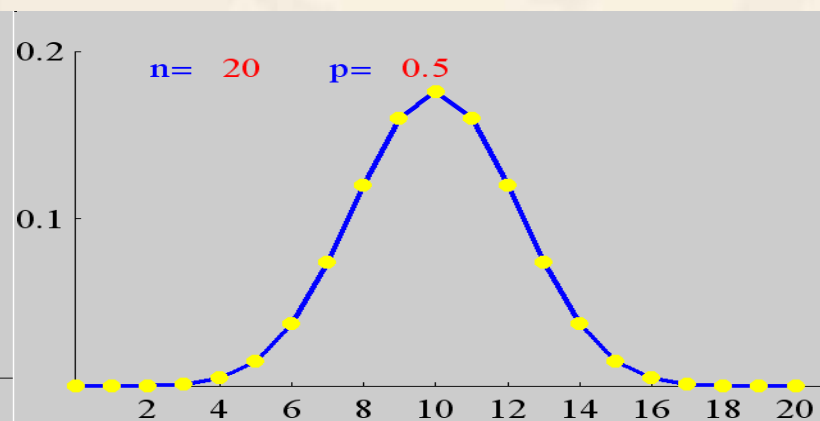
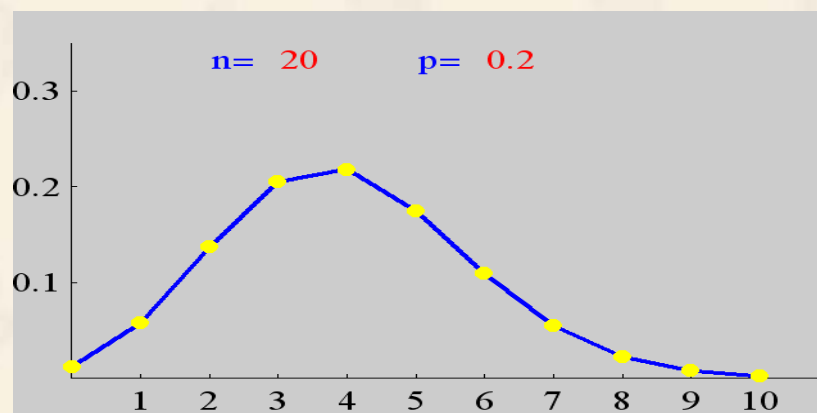
则称随机变量 X 服从参数为 n, p 的**二项分布**。

记为 $X \sim B(n, p)$, 其中 $q=1-p$

二项分布 $\xrightarrow{n=1}$ **两点分布**

二项分布的图形

二项分布随机数演示



例如 在相同条件下相互独立地进行 5 次射击,每次射击时击中目标的概率为 **0.6**,则击中目标的次数 X 服从 $B(5,0.6)$ 的二项分布.

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$(0.4)^5$	$\binom{5}{1} 0.6 \cdot 0.4^4$	$\binom{5}{2} 0.6^2 \cdot 0.4^3$	$\binom{5}{3} 0.6^3 \cdot 0.4^2$	$\binom{5}{4} 0.6^4 \cdot 0.4$	0.6^5

二项分布随机数演示

例2 按规定,某种型号电子元件的使用寿命超过1500 小时的为一级品 .已知某一大批产品的一级品率为0.2,现在从中随机地抽查 20只.问20只元件中恰有 k 只($k = 0,1,\cdots,20$) 一级品的概率是多少?

分析 这是不放回抽样.但由于这批元件的总数很大,且抽查元件的数量相对于元件的总数来说又很小,因而此抽样可近似当作放回抽样来处理.

把检查一只元件看它是 否为一级品看成是一次试验,检查 20只元件相当于做 20 重伯努利试验 .

解 以 X 记 20 只元件中一级品的只数 ,

则 $X \sim B(20, 0.2)$, 因此所求概率为

$$P\{X = k\} = \binom{20}{k} (0.2)^k (0.8)^{20-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 20.$$

$$P\{X = 0\} = 0.012$$

$$P\{X = 4\} = 0.218$$

$$P\{X = 8\} = 0.022$$

$$P\{X = 1\} = 0.058$$

$$P\{X = 5\} = 0.175$$

$$P\{X = 9\} = 0.007$$

$$P\{X = 2\} = 0.137$$

$$P\{X = 6\} = 0.109$$

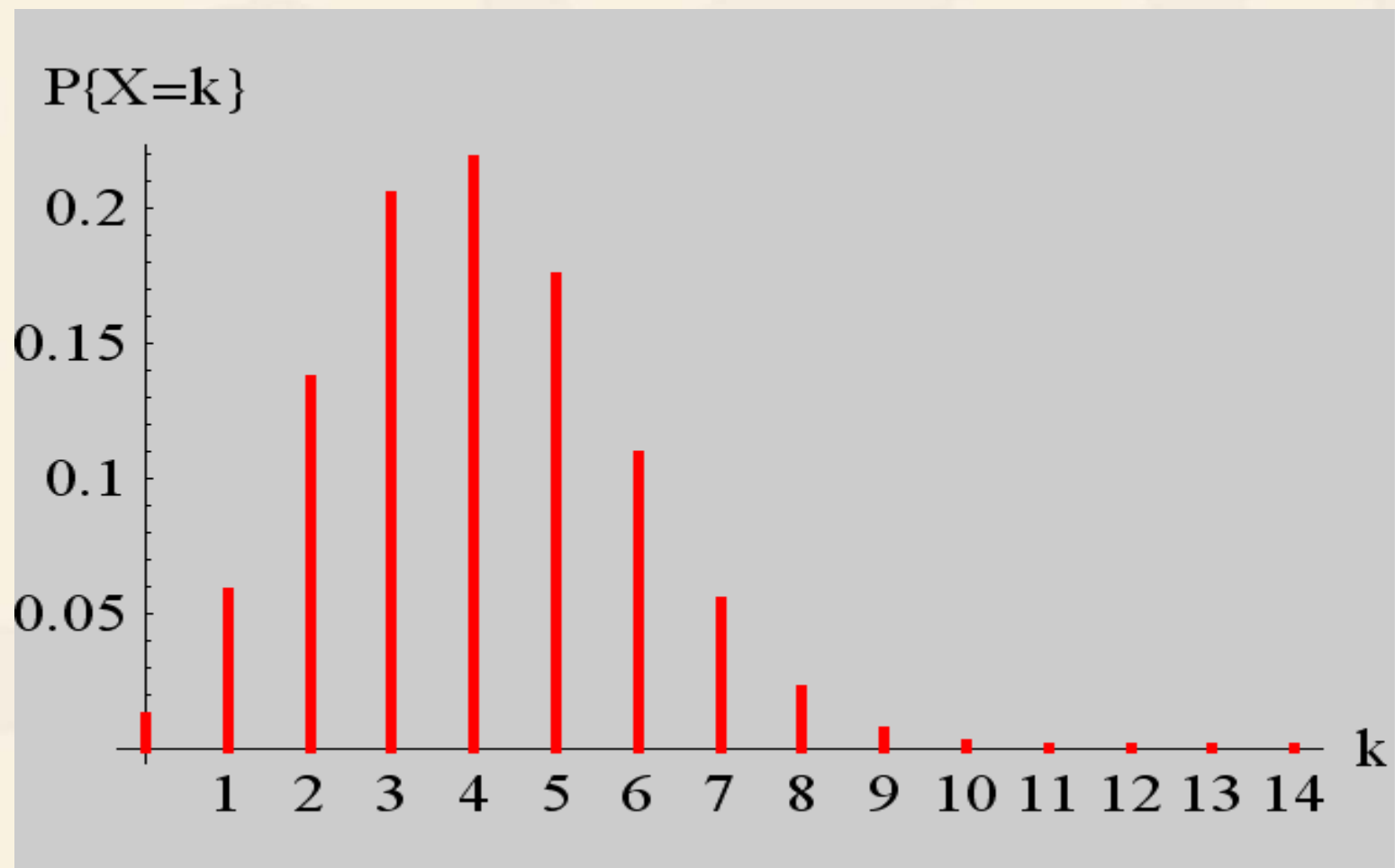
$$P\{X = 10\} = 0.002$$

$$P\{X = 3\} = 0.205$$

$$P\{X = 7\} = 0.055$$

$$P\{X = k\} < 0.001, \quad \text{当 } k \geq 11 \text{ 时}$$

图示概率分布



例3 某人进行射击, 设每次射击的命中率为 0.02, 独立射击 400 次, 试求至少击中两次的概率.

解 设击中的次数为 X ,

则 $X \sim B(400, 0.02)$.

X 的分布律为

$$P\{X = k\} = \binom{400}{k} (0.02)^k (0.98)^{400-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 400.$$

因此 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

$$= 1 - (0.98)^{400} - 400(0.02)(0.98)^{399} = 0.9972.$$



4. 泊松分布

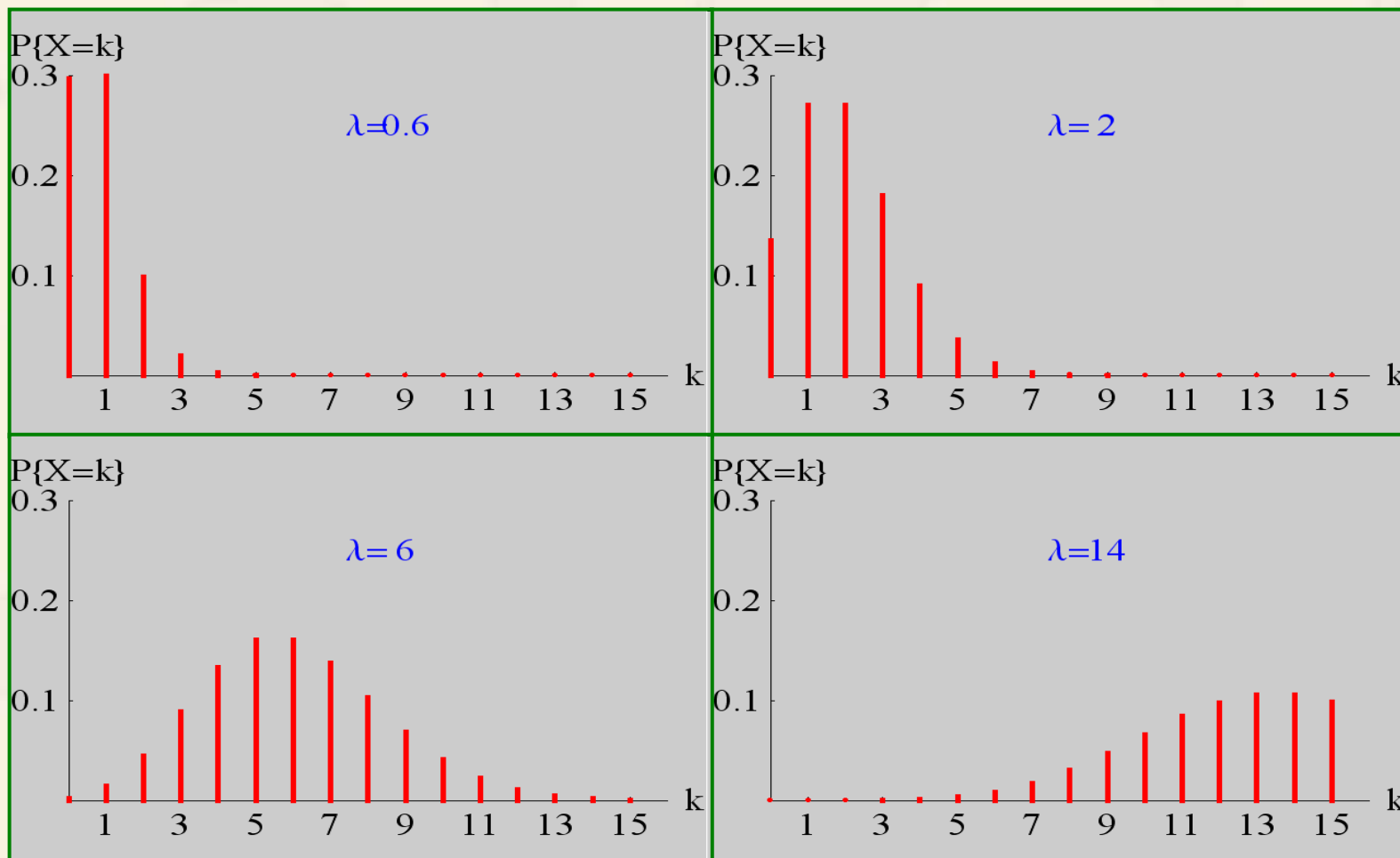
设随机变量所有可能取的值为 $0, 1, 2, \dots$, 而取各个值的概率为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $\lambda > 0$ 是常数. 则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X \sim P(\lambda)$.

泊松分布的图形

泊松分布随机数演示



泊松分布的背景及应用

二十世纪初罗瑟福和盖克两位科学家在观察与分析放射性物质放出的 α 粒子个数的情况时, 他们做了2608 次观察(每次时间为7.5 秒)发现放射性物质在规定的一段时间内, 其放射的粒子数 X 服从泊松分布.



在生物学、医学、工业统计、保险科学及公用事业的排队等问题中，泊松分布是常见的。例如地震、火山爆发、特大洪水、交换台的电话呼唤次数等，都服从泊松分布。

地震



火山爆发



特大洪水



在生物学、医学、工业统计、保险科学及公用事业的排队等问题中，泊松分布是常见的。例如地震、火山爆发、特大洪水、交换台的电话呼唤次数等，都服从泊松分布。

商场接待的顾客数 电话呼唤次数 交通事故次数



泊松定理 设 $X \sim B(n, p_n)$

$$P\{X = k\} = C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

且满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$$

则对任意非负整数 k , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

证明 由
$$p_n = \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n} o(1), \quad 1 - p_n = 1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{1}{n} o(1)$$

$$P\{X = k\} = \frac{n!}{k!(n-k)!} (p_n)^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left[\frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n} o(1) \right]^k \left[1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{o(1)}{n} \right]^{n-k}$$

$$= \frac{[\lambda + o(1)]^k}{k!} \left[1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{o(1)}{n} \right]^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k \left[1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{o(1)}{n} \right]^k}$$

$$= \frac{[\lambda + o(1)]^k}{k!} \left[1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{o(1)}{n} \right]^n \frac{1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{\left[1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{o(1)}{n} \right]^k}$$

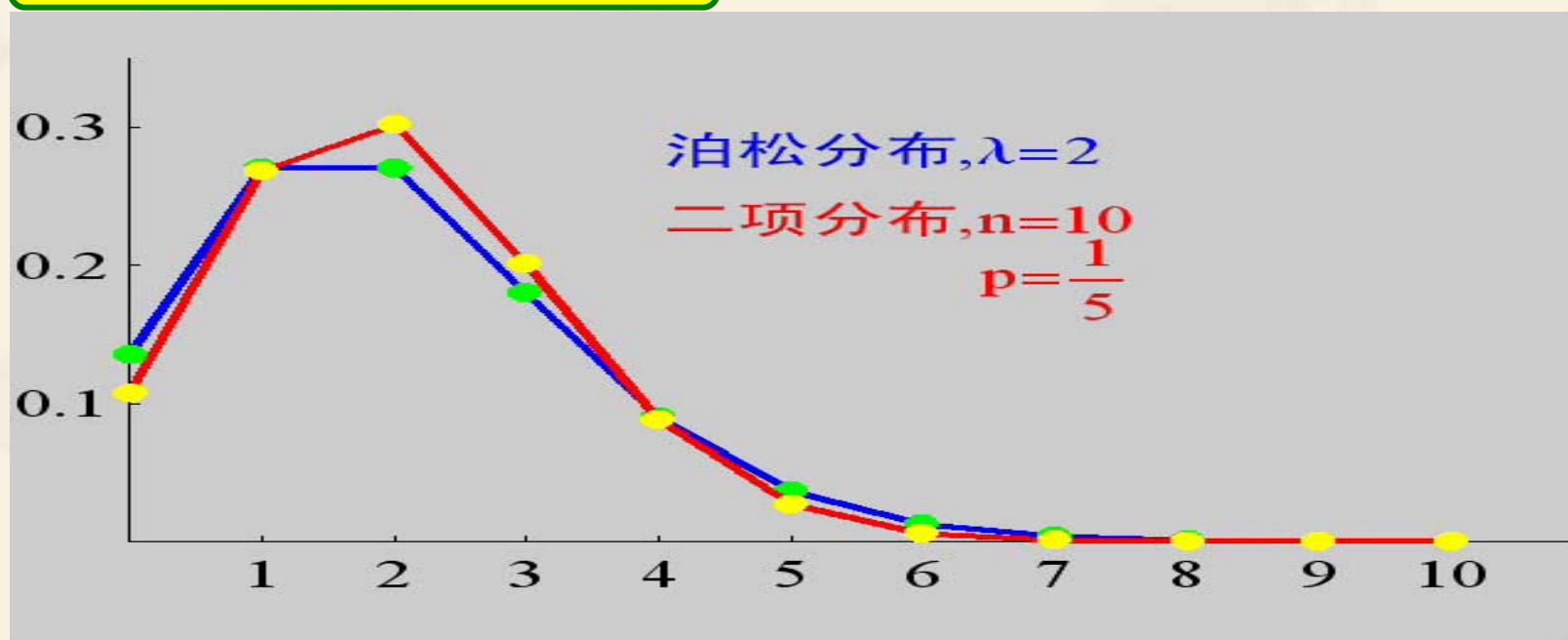
当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

上面我们提到

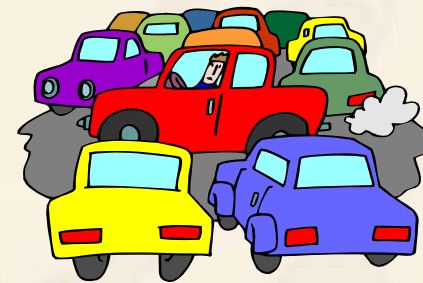
二项分布 $\xrightarrow{n \text{ 很大}, p \text{ 很小}}$ 泊松分布

单击图形播放/暂停 ESC键退出



例5 有一繁忙的汽车站, 每天有大量汽车通过, 设每辆汽车, 在一天的某段时间内出事故的概率为**0.0001**, 在每天的该段时间内有**1000** 辆汽车通过, 问出事故的次数不小于**2**的概率是多少?

解 设**1000** 辆车通过,
出事故的次数为 X , 则
 $X \sim B(1000, 0.0001)$,



所求概率为 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$
 $= 1 - 0.9999^{1000} - \binom{1000}{1} \cdot 0.0001 \cdot 0.9999^{999}$

可利用泊松定理计算 $\lambda = 1000 \times 0.0001 = 0.1$,

$$P\{X \geq 2\} \approx 1 - \frac{e^{-0.1}}{0!} - \frac{0.1 \cdot e^{-0.1}}{1!} = 0.0047.$$

6. 几何分布

若随机变量 X 的分布律为

$$\begin{array}{c|cccccc} X & 1 & 2 & \cdots & k & \cdots \\ \hline p_k & p & qp & \cdots & q^{k-1}p & \cdots \end{array}, p + q = 1,$$

则称 X 服从几何分布.

几何分布随机数演示

实例 设某批产品的次品率为 p , 对该批产品做有放回的抽样检查, 直到第一次抽到一只次品为止 (在此之前抽到的全是正品), 那么所抽到的产品数目 X 是一个随机变量, 求 X 的分布律.

解 X 所取的可能值是 $1, 2, 3, \dots$.

设 A_i 表示“抽到的第 i 个产品是正品”,

$$\begin{aligned} P\{X = k\} &= P(A_1 A_2 \cdots A_{k-1} \overline{A_k}) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_{k-1}) \cdot P(\overline{A_k}) \\ &= \underbrace{(1-p)(1-p) \cdots (1-p)}_{(k-1)} \cdot p = q^{k-1} p. \end{aligned}$$

所以 X 服从几何分布. $(k = 1, 2, \dots)$

说明 几何分布可作为描述某个试验 “首次成功” 的概率模型.

7.超几何分布

设 X 的分布律为

$$P\{X = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, \min\{M, n\})$$

这里 $n < N, m < M, M < N$,则称 X 服从超几何分布.

说明 超几何分布在关于废品率的计件检验中常用到.

三、小结

离散型随机变量的分布

退化分布
两点分布
均匀分布
二项分布
泊松分布
几何分布
超几何分布

两点分布

$n = 1$

二项分布

$n > 10, p < 0.1$

泊松分布

2. 二项分布与 (0-1) 分布、泊松分布之间的关系 .

二项分布是 (0-1) 分布的推广, 对于 n 次独立重复伯努里试验, 每次试验成功的概率为 p , 设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 次试验成功} \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 次试验失败} \end{cases}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

它们都服从 (0-1) 分布并且相互独立, 那末

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 服从二项分布, 参数为 (n, p) .

以 n, p ($np = \lambda$) 为参数的二项分布, 当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于以 λ 为参数的泊松分布, 即

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np},$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

离散型随机变量会遇到的问题是：

1. 针对实际问题求概率分布；
2. 分布律或分布函数有未知常数需要确定；
3. 已知分布律求分布函数，或反之求....；
4. 常见分布的讨论与应用；
5. 利用分布求各种概率。

备份题

例 从一批含有10件正品及3件次品的产品中一件、一件地取产品.设每次抽取时,所面对的各件产品被抽到的可能性相等.在下列三种情形下,分别**求出**直到取得正品为止所需**次数 X 的分布律**.

(1)每次取出的产品经检定后又放回这批产品中去在取下一件产品;(2)每次取出的产品都不放回这批产品中;
(3)每次取出一件产品后总以一件正品放回这批产品中.



解 (1) X 所取的可能值是 $1, 2, 3, \dots$,

$$P\{X=1\}=\frac{10}{13}, P\{X=2\}=\frac{3}{13}\cdot\frac{10}{13}, P\{X=3\}=\left(\frac{3}{13}\right)^2\frac{10}{13},$$

$$\dots, P\{X=k\}=\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\cdot\frac{10}{13}, \dots$$

故 X 的分布律为

X	1	2	3	\dots	k	\dots
p	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{10}{13}$	$\left(\frac{3}{13}\right)^2\frac{10}{13}$	\dots	$\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\cdot\frac{10}{13}$	\dots

(2) 若每次取出的产品都不放回这批产品中时,
 X 所取的可能值是 1, 2, 3, 4.

$$P\{X = 1\} = \frac{10}{13},$$

$$P\{X = 2\} = \frac{3}{13} \cdot \frac{10}{12},$$

$$P\{X = 3\} = \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11},$$

$$P\{X = 4\} = \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{10}{10},$$

故 X 的分布律为

X	1	2	3	4
p	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13} \cdot \frac{10}{12}$	$\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11}$	$\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11}$

(3) 每次取出一件产品后总以一件正品放回这批产品中.

X 所取的可能值是 1, 2, 3, 4.

$$P\{X = 1\} = \frac{10}{13},$$

$$P\{X = 2\} = \frac{3}{13} \cdot \frac{11}{13},$$

$$P\{X = 3\} = \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{12}{13},$$

$$P\{X = 4\} = \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{13}{13},$$

故 X 的分布律为

X	1	2	3	4
p	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13} \cdot \frac{11}{13}$	$\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{12}{13}$	$\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{13}$

合理配备维修工人问题

例 为了保证设备正常工作,需配备适量的维修工人(工人配备多了就浪费,配备少了又要影响生产),现有同类型设备**300**台,各台工作是相互独立的,发生故障的概率都是**0.01**.在通常情况下一台设备的故障可由一个人来处理(我们也只考虑这种情况),问至少需配备多少工人,才能保证设备发生故障但不能及时维修的概率小于**0.01**?

解 设需配备 N 人. 记同一时刻发生故障的设备台数为 X , 那末, $X \sim B(300, 0.01)$. 所需解决的问题是确定最小的 N , 使得

$P\{X \leq N\} \geq 0.99.$ 由泊松定理得

$$P\{X \leq N\} \approx \sum_{k=0}^N \frac{3^k e^{-3}}{k!},$$

故有 $\sum_{k=0}^N \frac{3^k e^{-3}}{k!} \geq 0.99,$

即 $1 - \sum_{k=0}^N \frac{3^k e^{-3}}{k!} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{3^k e^{-3}}{k!} \leq 0.01,$

查表可求得满足此式最小的 N 是8. 故至少需配备8个工人,才能保证设备发生故障但不能及时维修的概率小于0.01.

例6 (人寿保险问题)在保险公司里 有**2500**个同年
龄同社会阶层的人参加了人寿保险,在每一年里
每个人死亡的概率为**0.002**,每个参加保险的人在1
月1日付**12**元保险费,而在死亡时,家属可在公司里
领取**200**元.问

(1) 保险公司亏本的概率是多少?

(2) 保险公司获利不少于一万元的概率是多少?

解 设 X 表示这一一年内的死亡人数,则

$$X \sim B(2500, 0.002)$$

保险公司在1月1日的收入是

$$2500 \times 12 = 30000 \text{ 元}$$

- 保险公司这一年里付出 **$200X$** 元.假定
 $200X \geq 30000$,即 **$X \geq 15$** 人时公司亏本.

于是, **$P\{\text{公司亏本}\} = P\{X \geq 15\} = 1 - P\{X < 14\}$**

由泊松定理得 $\lambda = 2500 \times 0.002 = 5,$

$$P\{\text{公司亏本}\} \approx 1 - \sum_{k=0}^{14} \frac{e^{-5} 5^k}{k!} = 0.0002$$

(2) 获利不少于一万元,即 $30000 - 200X \geq 10000$

即 $X \leq 10$

$$P\{\text{获利不少于一万元}\} = P\{X \leq 10\} \approx \sum_{k=0}^{10} \frac{e^{-5} 5^k}{k!} = 0.9864$$

例7 设随机变量X的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{a}{2k+1}, (k = 0, 1, 2, 3)$$

求： 1. 常数 a ； 2. $P\{X < 2\}$.

解：

$$1. \quad 1 = a + \frac{a}{3} + \frac{a}{5} + \frac{a}{7} = \frac{176}{105}a \Rightarrow a = \frac{105}{176}$$

$$2. \quad P\{X < 2\} = a + \frac{a}{3} = \frac{4}{3}a = \frac{4}{3} \cdot \frac{105}{176} = \frac{35}{44}$$

例8 设随机变量 X 服从泊松分布, 且

$$P(X = 1) = P(X = 2)$$

则 $P\{X=4\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 :
$$\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} \Rightarrow \lambda = 2$$

$$P\{X = 4\} = \frac{2^4 e^{-2}}{4!} = 0.0902$$

伯努利资料



Jacob Bernoulli

**Born: 27 Dec 1654 in
Basel, Switzerland**

**Died: 16 Aug 1705 in
Basel, Switzerland**

泊松资料



Siméon Poisson

**Born: 21 June 1781 in
Pithiviers, France**

**Died: 25 April 1840 in
Sceaux (near Paris),
France**

