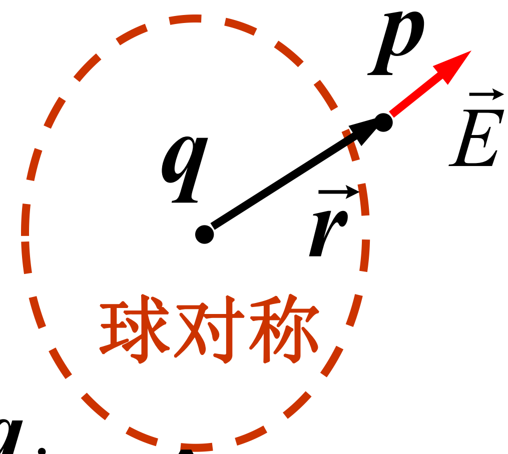
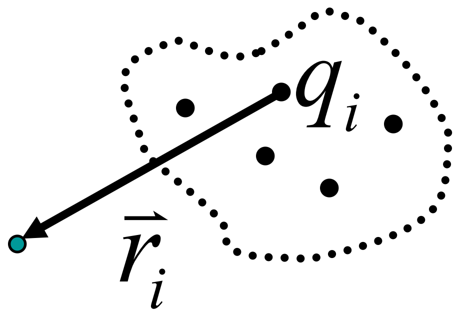
真空中的静电场-电场的叠加

1. 点电荷的场强

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



2. 点电荷系的场强



$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}_i$$

3. 电荷连续分布带电体

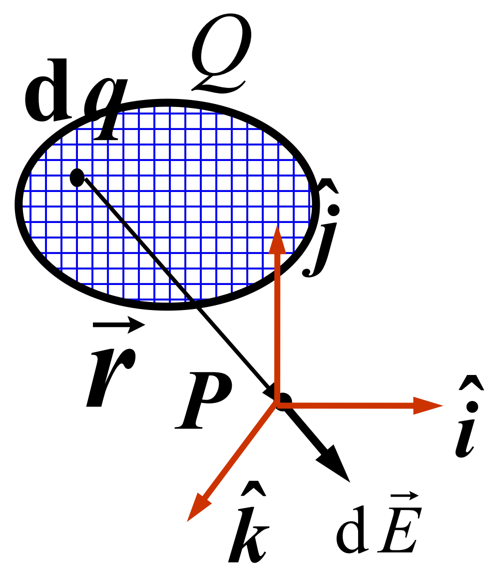
$$\vec{E}=\int_{(Q)}\mathrm{d}\vec{E}=\int_{(Q)}\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$=E_x\hat{i}+E_y\hat{j}+E_z\hat{k}$$

$$E_x=\int \mathrm{d}E_x$$

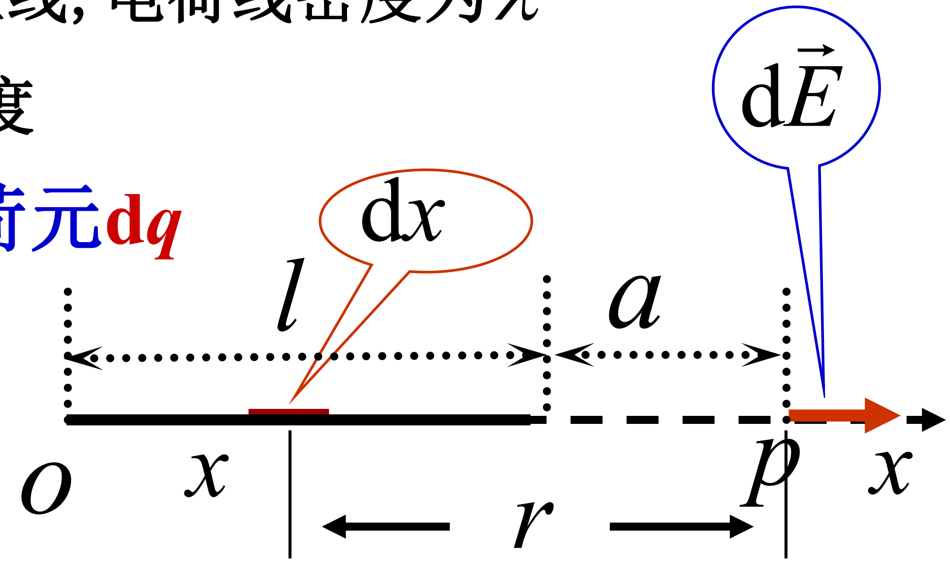
$$E_y=\int \mathrm{d}E_y$$

$$E_z=\int \mathrm{d}E_z$$



电场的叠加1 长为l 均匀带电直线, 电荷线密度为λ

求：延长线上一点p的电场强度



解：在坐标 x 处取一个电荷元$\mathrm{d}q$

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$$

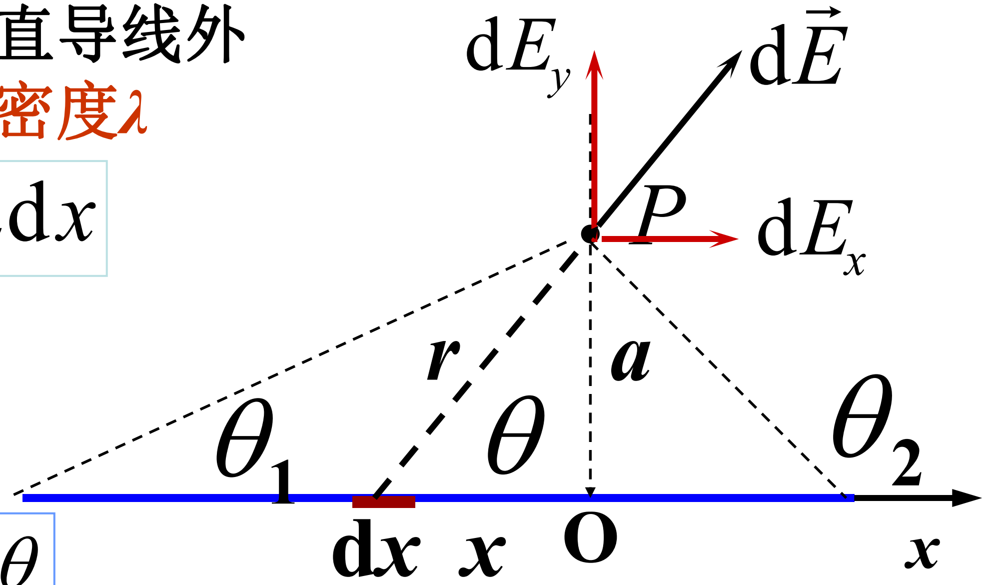
该点电荷在 p 点的场强大小为

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (l+a-x)^2}$$

∵各电荷元在p点的场强方向一致∴场强大小直接相加

$$E = \int \mathrm{d}E = \int_0^l \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (l+a-x)^2} = \cdots$$

电场的叠加2. 求均匀带电直导线外一点的电场强度，已知线密度λ



解：选取电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$

则dq在场点的场强

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r=a/\sin\theta$$

$$x=-a/tg\theta$$

$$\mathrm{d}x=\frac{a}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\rightarrow \mathrm{d}E=\frac{\lambda\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

各电荷元产生电场方向各不相同，电场分量积分

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta$$

$$\mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\sin\theta$$

$$\rightarrow$$

$$E_x=\int\mathrm{d}E_x=\cdots=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$$

$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=\cdots=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

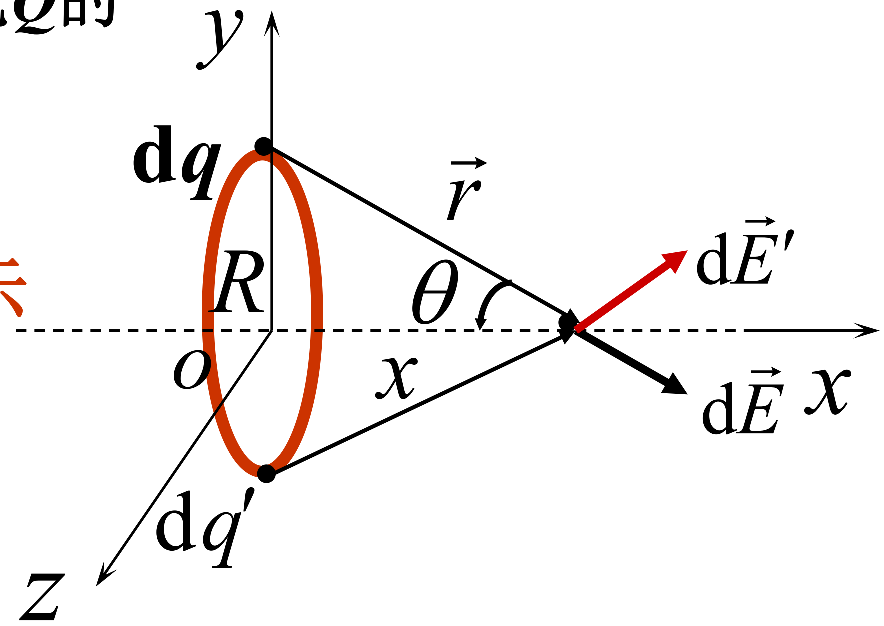
$a<<l$

无限长直线

$l<<a$

点电荷

电场叠加例3 半径为R的均匀带电Q的圆环轴线上一点的场强。



解：在圆环上任取电荷元$\mathrm{d}q$

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ 方向如图示

由对称性分析知 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_x$

$$= \int_{(Q)} \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$= \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_{(Q)}\mathrm{d}q$$

$$= \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}Q$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

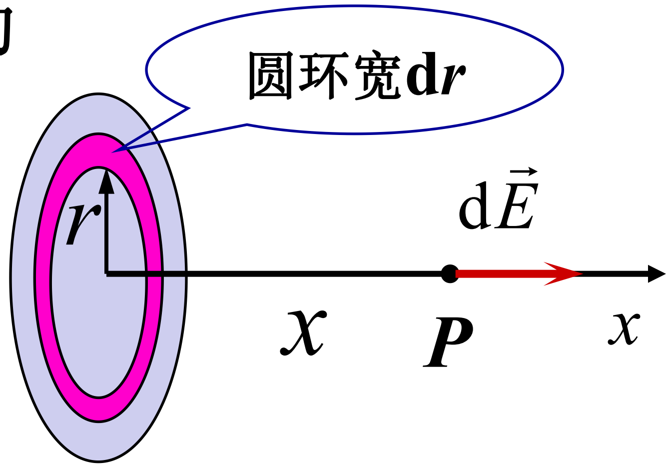
$$E = \frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

若 $x >> R$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}$$

点电荷

电场叠加例4 半径为R的均匀带电Q的圆盘轴线上一点的场强。



解：圆盘可视为由半径从零到R的圆环的排列而成，取半径r、宽dr的细圆环

$$\boxed{\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}s = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r}$$

$$\boxed{\sigma = Q/(\pi R^2)}$$

该电荷元在P点的场强大小为 $\mathrm{d}E = \dfrac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$

方向如图所示

各电荷元在P点的场强方向相同

$$E = \int \mathrm{d}E = \int_0^R \frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}} = \ldots = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

$\boxed{x << R}$ $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

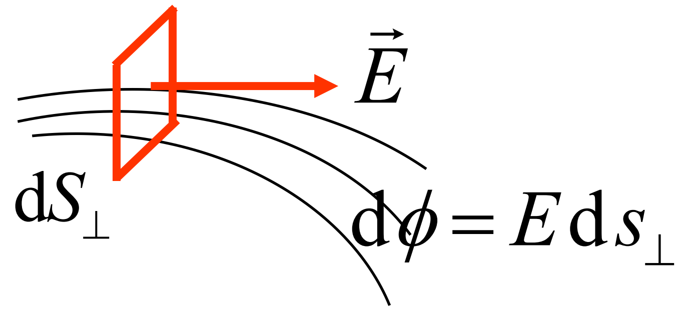
无限大平面

$\boxed{R << x}$ $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$

点电荷

真空中的静电场-高斯定理

电场线与电通量

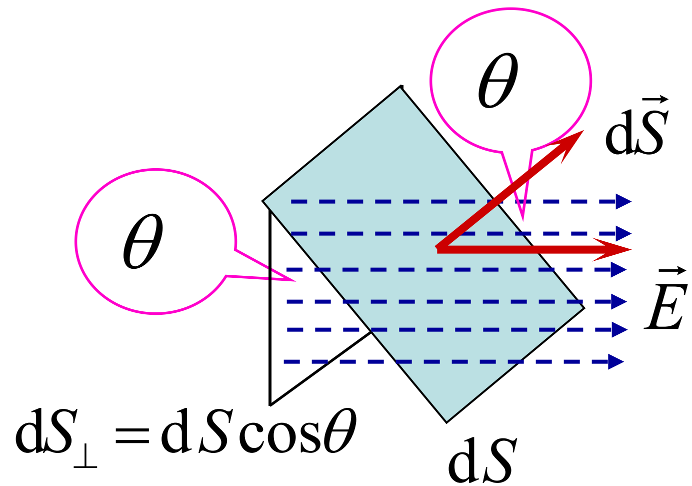


面元所在区域视为局域均匀场

1. 电场线是用于形象描述电场分布的假想曲线；

电场线上一点的切线方向是该点的场强方向；该点的场强大小等于该点的电场线数密度

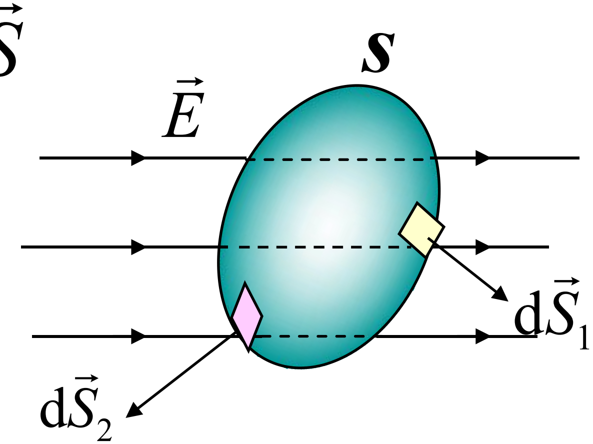
2. 电通量



d*S*面元的电通量d*Φ*——通过d*S*面元的电场线数量

$$\mathrm{d}\phi = E\,\mathrm{d}s\cos\theta = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

任意曲面*S*的电通量*Φ*—— $\phi = \int_S \mathrm{d}\phi = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$



任意闭合曲面*S*的电通量*Φ*—— $\phi = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

闭合面的面元方向由内指向外

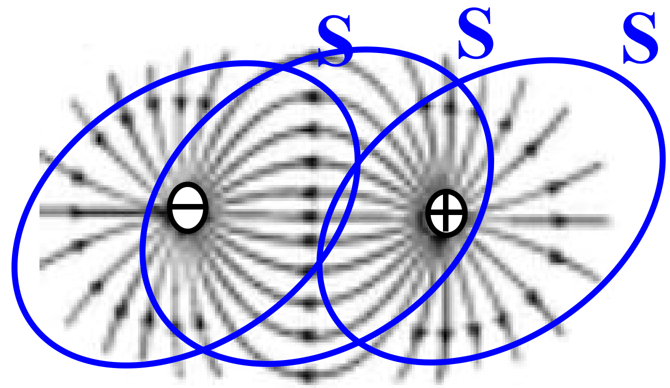
出为正，$\mathrm{d}\phi_1 = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$ 入为负，$\mathrm{d}\phi_2 = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$

静电场的高斯定理

静电场是有源场

1. 表述：在真空中的静电场内，任一闭合面的电通量等于这闭合面所包围的电量的代数和除以 ε_0

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum_i q_{i内}}{\varepsilon_0}$$

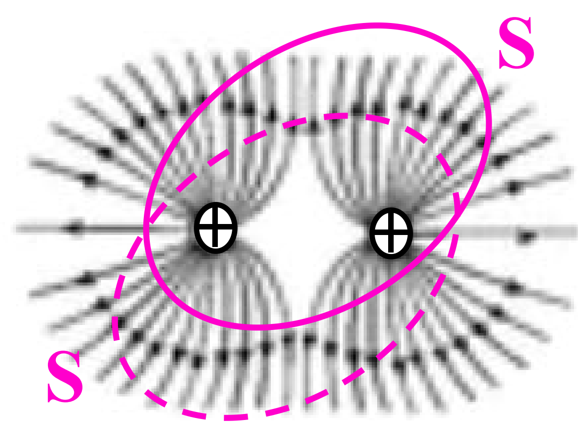


注意：

① $\vec{E}$是闭合面S上各处的场强，

由空间电荷的分布决定

② 电通量$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$ 只取决于闭合面内包含的电量



如图所示，当闭合面S的位置发生改变，包含的电荷不变时，

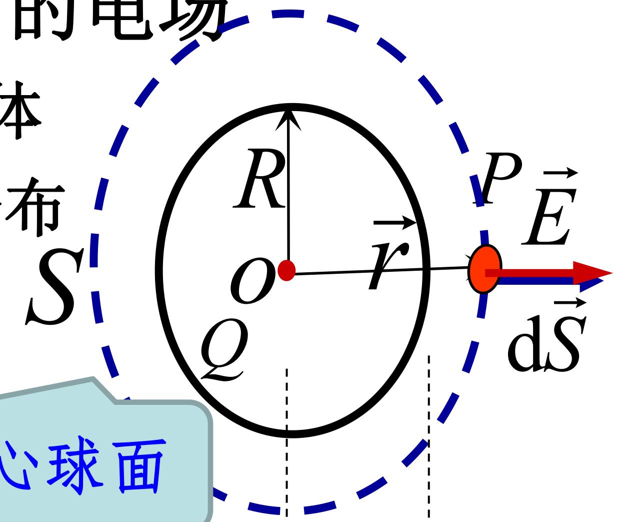
S的通量$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$是否变化？ 不变

式中的$\vec{E}$ 是否变化？ 变化

用高斯定理求具有对称分布的电场

1. 球对称：点电荷、均匀带电的球面、球体

例1带电 Q 、半径R的均匀带电球面电场分布



解:根据电荷分布, 分析电场的对称性,

E沿径向，r 相同处E相同

选取合适的高斯面(闭合面)

半径r的 同心球面

因此

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \begin{cases} =0, r<R \\ =\dfrac{Q}{\varepsilon_0}, r>R \end{cases}$$

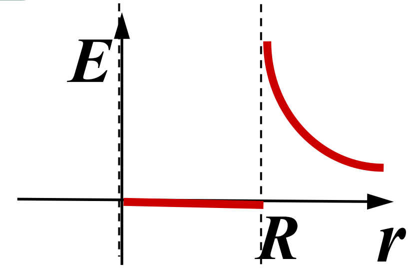
$$= \oint_S E\,\mathrm{d}S$$

$$= E\oint_S \mathrm{d}S$$

$$= E4\pi r^2$$

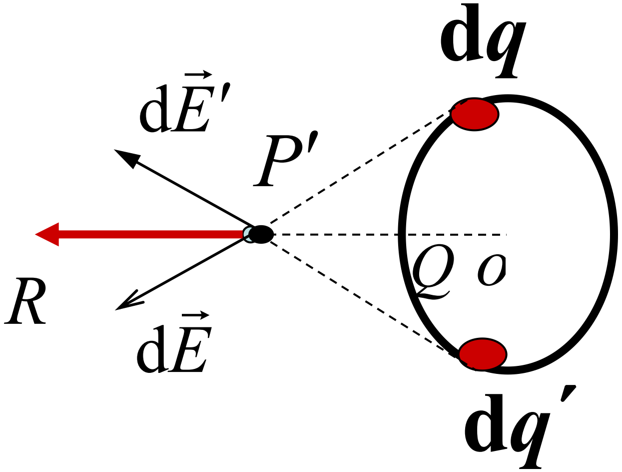
E-r

分布曲线



电场分布

$$\begin{cases} E=0, r<R \\ E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, r>R \end{cases}$$



例2 电量Q，半径R的均匀带电球体的电场分布

解:根据电荷分布,分析电场的对称性,

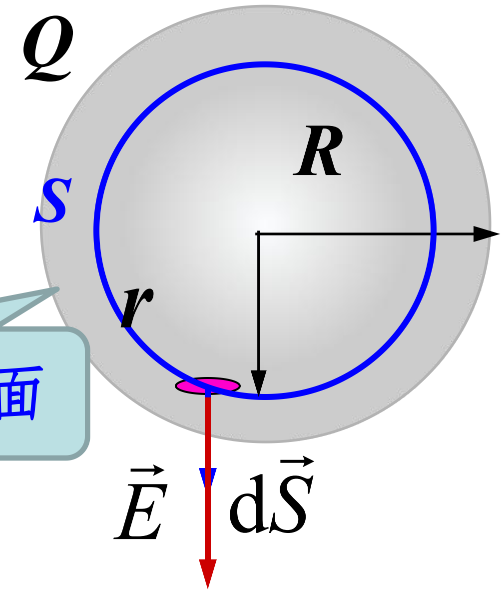
均匀带电球面——均匀带电球体

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$ 均匀带电球体的电场是各均匀带电球面单独存在时的电场的叠加

E沿径向，r 相同处E相同

选取合适的高斯面(闭合面)

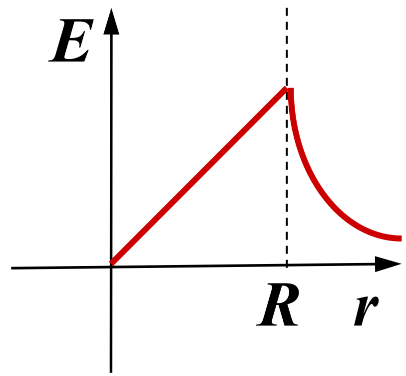
半径r的 同心球面



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum\limits_i q_i}{\varepsilon_0} \begin{cases} = \dfrac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0}, r<R \\ = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}, r>R \end{cases} \qquad \rho = Q \Big/ \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$= E 4\pi r^2$$

电场分布 $\begin{cases} E = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, r<R \\ E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, r>R \end{cases}$



E-r分布曲线

用高斯定理求具有对称分布的电场

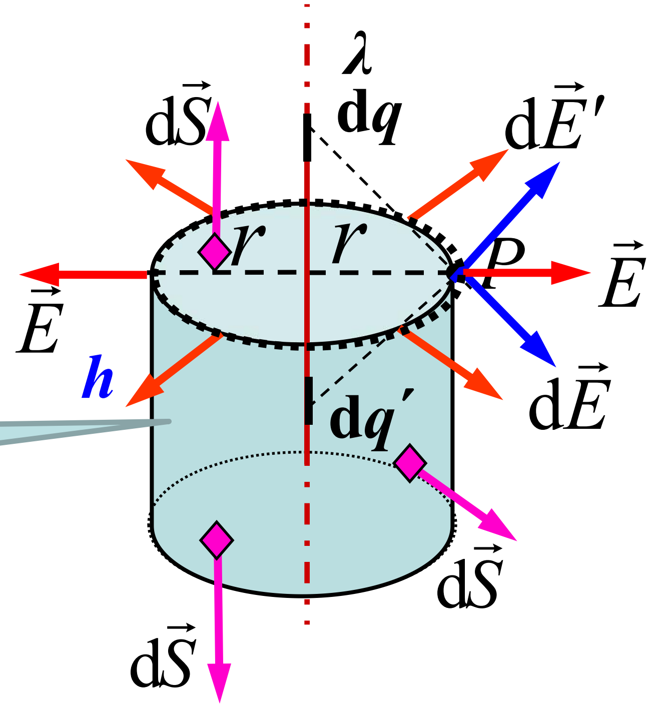
2. 轴对称：无限长均匀带电的带电线、圆柱面、圆柱体

例1 求无限长均匀带电直线的电场分布，设电荷线密度为λ

解：根据电荷分布，分析电场的对称性，

选取合适的高斯面(闭合面)

半径r的同轴闭合圆柱面S(高h)



$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$= \int_{侧面} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \int_{两底面} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$= E2\pi rh + 0$$

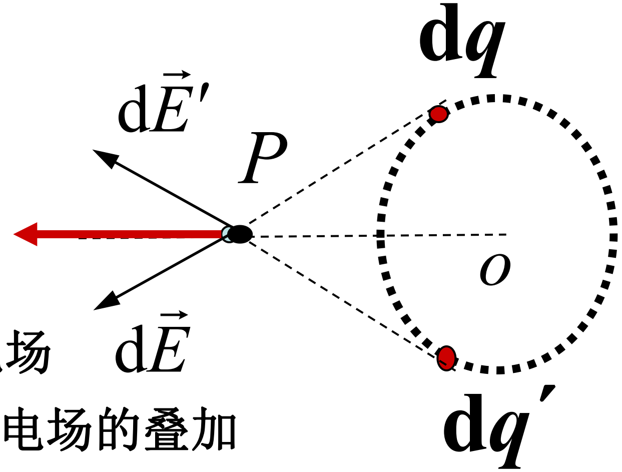
电场 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

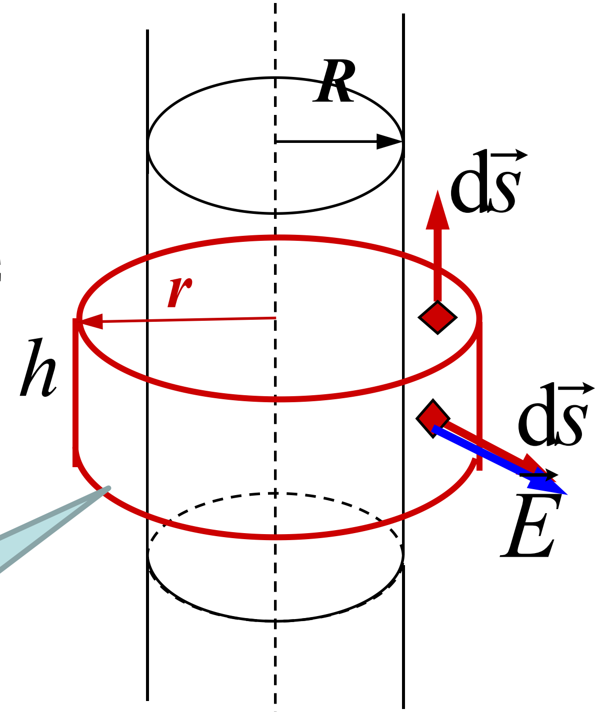
例2 求均匀带电无限长圆柱面的电场分布，设电荷线密度为λ，圆柱面半径为R。

解:根据电荷分布，分析电场的对称性

$$\vec{E}=\sum \vec{E}_i$$

均匀带电无限长圆柱面的电场是各均匀带电无限长直线的电场的叠加





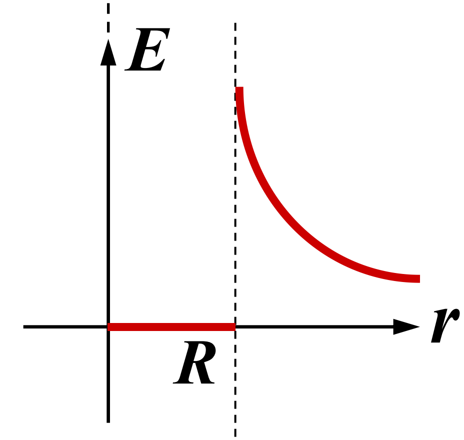
选取高斯面(闭合面)

半径r的同轴闭合圆柱面S(高h)

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\int_{\text{侧面}}\vec{E}\cdot d\vec{s}+\int_{\text{两底面}}\vec{E}\cdot d\vec{s}=E2\pi rh$$

$$\frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}\begin{cases}=0, r<R\\ =\dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0}, r>R\end{cases}$$

电场分布
$$\begin{cases}E=0, r<R\\ E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, r>R\end{cases}$$

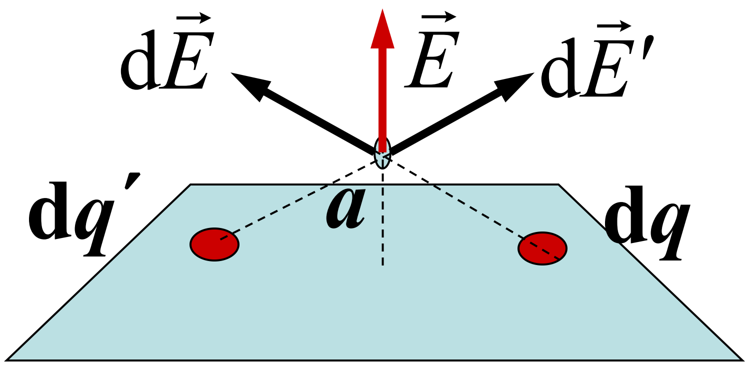


E-r分布曲线

用高斯定理求具有对称分布的电场

3. 面对称：无限大均匀带电的平面、平板

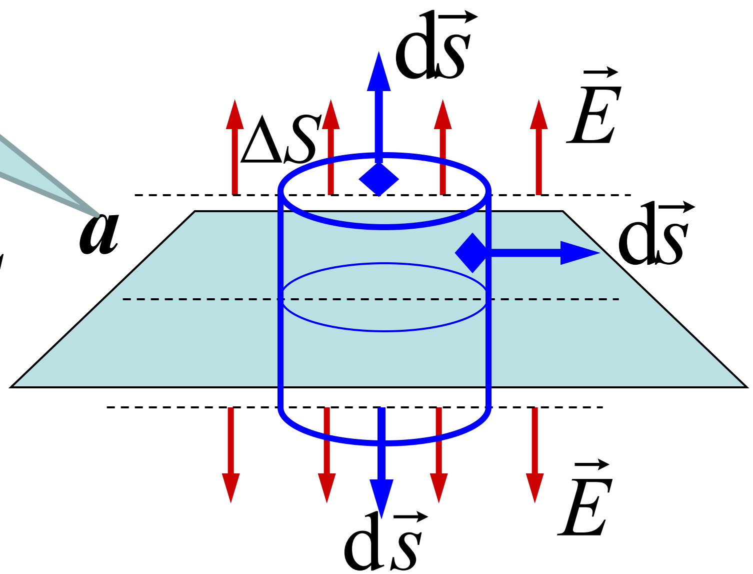
例1 求面密度为 σ 的均匀带电的无限大平面的电场分布



解:根据电荷分布,
分析电场的对称性

选取高斯面(闭合面):

底面与平面平行的闭合圆柱面S
（高为$2a$，底面积为ΔS），



$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_{侧面} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \int_{两底面} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = 2E\Delta S$$

$$\frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

电场 $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

真空中的静电场-环路定理、电势

电势的定义

环路定理 $\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0}$

静电场是无旋场

两点之间的电势差 $\varphi_a-\varphi_b=\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

某点的电势 $\varphi_a=\int_{(a)}^{\text{电势零点}}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

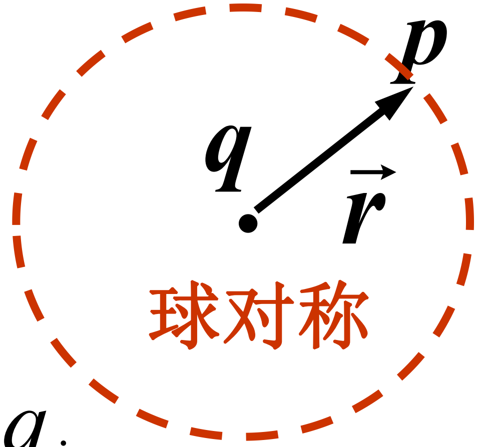
注意积分方向，具体计算参看电介质的例题

电场力的功 $A_{ab}=q_0\left(\varphi_a-\varphi_b\right)$

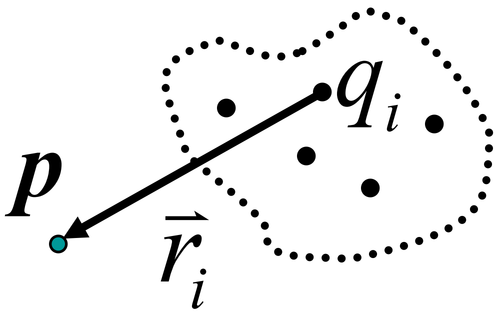
电势的叠加

1. 点电荷的电势

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



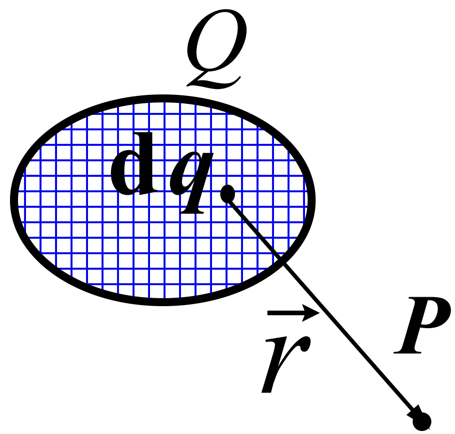
2. 点电荷系的电势



$$\varphi=\sum_i \varphi_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

3. 电荷连续分布带电体

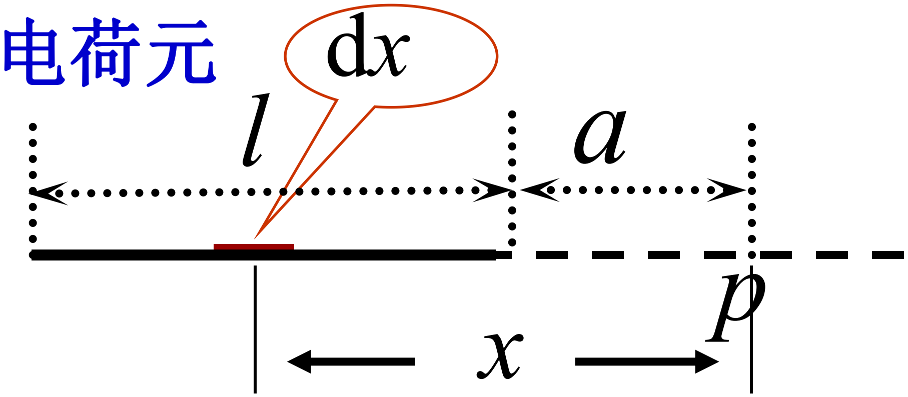
$$\varphi=\int_{(Q)}\mathrm{d}\varphi=\int_{(Q)}\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



电势的叠加1 长为l 均匀带电直线, 电荷线密度为λ

求：延长线上一点p的电势

解：在距离p点为x 处取一个电荷元



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$$

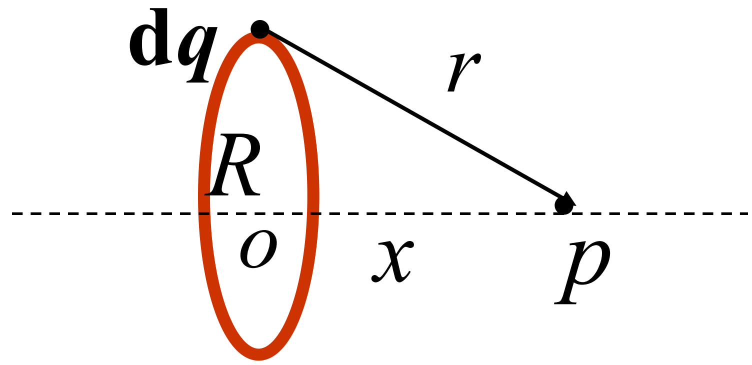
该电荷元在 p 点的电势

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \int_a^{l+a} \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{l+a}{a}$$

电势叠加2 半径为R的均匀带电Q的圆环轴线上一点的电势。

解：在圆环上任取电荷元 $\mathrm{d}q$



$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi = \int_Q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{(Q)} \mathrm{d}q = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

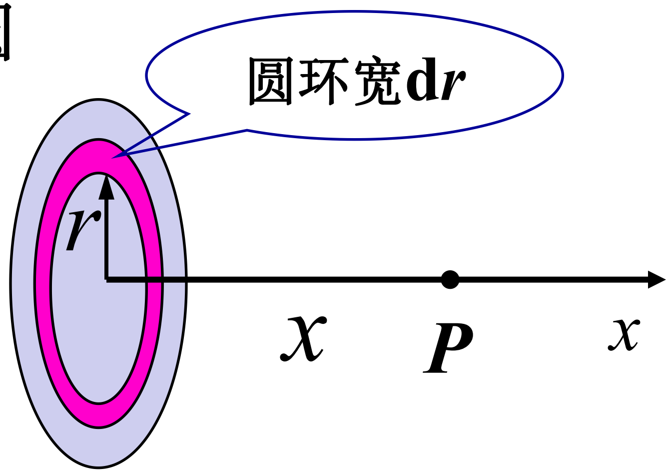
圆心处的电势 $\varphi_o = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

从叠加的角度去理解圆弧圆心处的电势，球面或锥面球心处的电势都是该表达式

轴线上一点的场强等于负的电势梯度(不考)

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\left(x^2+R^2\right)^{-1/2}}{\mathrm{d}x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

电势叠加3 半径为R的均匀带电Q的圆盘轴线上一点的电势。



解：圆盘可视为由半径从零到R的圆环的排列而成，取半径r、宽dr的细圆环

$$\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}s = \sigma 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

$$\sigma = Q/(\pi R^2)$$

该电荷元在P点的电势为 $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{1/2}}$

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \int_0^R \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{1/2}} = \ldots = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$

轴线上一点的场强等于负的电势梯度（不考）

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$