Aufgabenblatt 3 - ADP3

Cao,Thi Huyen; Grimm,Nico

October 4, 2016

Contents

1 Rekursion

Angenommen $N = x^2$

1.1 Aufwand

T(N): 2 rekursive Aufrufe, jeweil $log_2 N$ Mals
T(N)= $log_2 N$ +$log_2 N$=2$log_2 N$
T(N) $\in O(log_2 N)$

1.2 Alternative Lösung

Pseudo Code:
for(i=N; $i > 1$; i=i/2): func()
return;
T(N)= Anzahl der Aufrufe (For Schleife läuft $log_2 N$ Mals) = $log_2 N$
T(N) $\in O(log_2 N)$

1.3 Vergleichen Rekursion und andere Lösung

Stopbedingungen: N==1
Ansonsten wird func() aufgeruft und N wird durch 2 geteilt

2 Vergleichen von Algorithmen

2.1 Rekursive Berechnung

if n==0: return 0
else : return n+ sum(n-1)
$T(n) = c_1 + nc_2$
c_2 ist Zeitkosten eines Funktionsaufrufs
c_1 konstante Anzahl des Initialisieren Operation, Überprüfung der Endbedingungen usw.
$T(n) \in O(n)$

2.2 Iterative Berechnung

sum=0
for(int i=0; i< n+1; i++)

sum +=1
return sum
$T(n) = c_1 + nc_2$
c_2 ist Zeitkosten eines Funktionsaufrufs(For-Schleife)
c_1 konstante Anzahl des Initialisieren Operation, Überprüfung der Endbedingungen usw.
$T(n) \in O(n)$

2.3 Berechnung mit Gaussscher Formel

Die Eingabe wird in die Formel $\frac{n(n+1)}{2}$ eingesetzt
Induktionbeweis

Induktionanfang n=1
Summe = 1
$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

Induktionannahme Die Formel stimmt mit n = k
$\sum_{i=1}^{k} k = \frac{k(k+1)}{2}$

Induktionsschluss die Formel stimmt mit n = k+1
$\sum_{i=1}^{k+1} n = \sum_{i=1}^{k} n + (k+1)$
$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$
$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$
$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$= \frac{(k+1)((k+1)+1))}{2}$
sum$=\frac{n(n+1)}{2}$
T(n)∈O(1)

3 Beweisen

1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Aussage ist richtig.
2.

$$n^2 + n \in \Theta(n^2)$$

$n^2 + n \leq n^2 + n^2 \forall n \geq 1$
$n^2 + n \leq 2n^2 \forall n \geq 1$
$\Longrightarrow n^2 + n \in O(n^2)$
$\Longrightarrow$Zu beweisen $n^2 + n \in \Omega(n^2)$
$n^2 + n \geq cn^2 \forall n \geq n_0$
$n(n + 1 - cn) \geq 0 \forall n \geq n_0$
$n \geq 0$ und $n(1 - c) + 1 \geq 0$
$0 \leq n \leq \frac{1}{c-1}$
$\Longrightarrow n^2 + n \notin \Omega(n^2)$
$\Longrightarrow n^2 + n \notin \Theta(n^2)$
Aussage ist falsch.
3.

$$n^2 \in O(n^4)$$

$n^2(1 - n^2) \leq 0 \forall n \geq 1$
$n^2 \leq n^4 mit \forall n \geq 1$
$\Longrightarrow n^2 \in O(n^4)$
Aussage ist richtig.
4.

$$O(n^2) = O(n^4)$$

$n^3(1 - n) \leq 0 mit \forall n \geq 1$
$n^3 \leq n^4 mit \forall n \geq 1$
$\Longrightarrow n^3 \in O(n^4)$
Leicht zu sehen $n_3 \notin O(n^2)$
Aussage ist falsch
5.

$$\sqrt{n} = O(ln(n))$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2\sqrt{n})}}{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \Longrightarrow \infty$$

Aussage ist falsch.
6.

$$lg(n) = O(ln(n))$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{lg(n)}{ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n.ln(10)}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{ln(10)}$$

$\frac{1}{ln(10)}$ ist ein Konstant
$\Longrightarrow lg(n) \in \Theta(ln(n))$
$\Longrightarrow lg(n) \in O(ln(n))$
Aussage ist richtig.
7.

$$O(n^2) = O(e^n)$$

Nach Taylorreihe:
$e^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$
Taylorreihe 2.Schritt
$e^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$
$1 + x \in O(n^2)$
$O(1 + x + \frac{n^2}{2}) = O(n^2)$
$O(e^n) = O(n^2)$
Aussage ist richtig.
8.

$$(n^2 + n) \in O(n^2)$$

$n^2 + n \leq n^2 + n^2 \forall n \geq 1$
$n^2 + n \leq 2n^2 \forall n \geq 1$
$\Longrightarrow n^2 + n \in O(n^2)$
Aussage ist richtig.

4 Skalen

Die Funktion lautet: x=log(x)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{log(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{ln10 * x^2} = 0$$

$log(x) \in O(x)$

END