

数理最適化大意 課題 3

理学部 4 年 照屋佑喜仁

2025 年 5 月 19 日

1 問題 1

次の線形計画問題を考える.

$$\min \{-3x_1 - 2x_2 : x \in F_{\mathbb{R}}, x \in \mathbb{Z}^2\}$$

ただし, $F_{\mathbb{R}}$ は次のように定める.

$$F_{\mathbb{R}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 3x_2 \leq 10, 2x_1 + x_2 \leq 4, x_1, x_2 \geq 0\}$$

このとき, $F_{\mathbb{R}}$ を図示すると以下ようになる.

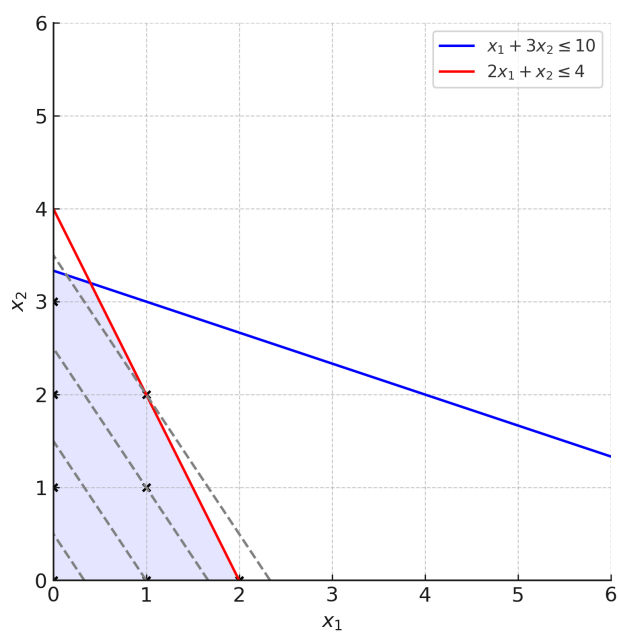


図 1 領域 $F_{\mathbb{R}}$ と $-3x_1 - 2x_2$ の等高線

図よりこの線形計画問題の最小解は $(x_1, x_2) = (1, 2)$ であることがわかる. なぜなら, $-3x_1 - 2x_2 = k$ と

置き x_2 の関数と見たとき, k が最小になるのは直線が実行可能解の点を通ったうえで x_2 切片が大きくなるときを考えればよいことがわかるからである.

次に $\text{conv}(F_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}^2)$ の領域を考えると以下の図を得る.

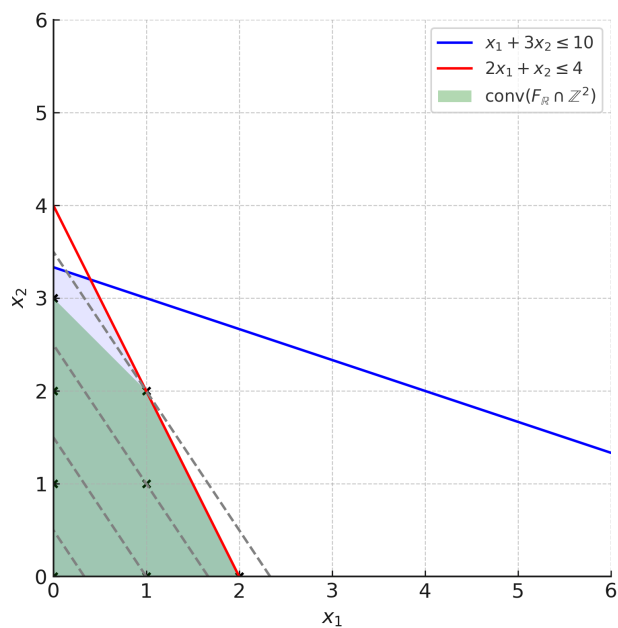


図 2 緑で囲まれた部分が $\text{conv}(F_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}^2)$

図より境界は $x_2 = -x_1 + 3$, $x_2 = -2x_1 + 4$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ であることがわかるため, もとの線形計画問題と同じ最小解と最小値を持つ線形緩和問題は

$$\min \left\{ -3x_1 - 2x_2 : x \in \tilde{F}_{\mathbb{R}}, x \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

ただし, $\tilde{F}_{\mathbb{R}}$ は次のように定める.

$$\tilde{F}_{\mathbb{R}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 10, 2x_1 + x_2 \leq 4, x_1, x_2 \geq 0\}$$