ベイス判別 非線形ロジスティック判別

照屋 佑喜仁

April 7, 2025

1. 非線形ロジスティック判別

非線形ロジスティック判別

- 前回，線形ロジスティック判別法により 2 群判別を行ったが，両群の構造が複雑だと線形判別法でうまく判別できないことがある．
- 非線形関数による判別法の構成が必要
- 以前学んだロジスティック回帰モデルの非線形化と同様にして線形ロジスティック判別の非線形化を行う．

非線形ロジスティック判別

Review

G_1，G_2 いずれかの群から p 次元データ $\boldsymbol{x}$ が観測されたとする．このデータが群 G_1 に属すると仮定した場合の事後確率 $P(G_1|\boldsymbol{x})$ と，群 G_2 に属すると仮定した場合の事後確率 $P(G_2|\boldsymbol{x})$ との比の対数を変数の線形結合で表されると仮定したのが線形ロジスティック判別であった．（前回）

$$\log \frac{P(G_1|\boldsymbol{x})}{P(G_2|\boldsymbol{x})} = \beta_0 + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}$$

非線形ロジスティック判別

非線形ロジスティック判別では，変数の線形結合ではなく変数の非線形関数で表すことによって行う．
この非線形関数を基底関数 $b_0(\boldsymbol{x}) \equiv 1$，$b_1(\boldsymbol{x}), \cdots b_m(\boldsymbol{x})$ の線形結合で表す．

$$\log \frac{P(G_1|\boldsymbol{x})}{P(G_2|\boldsymbol{x})} = \sum_{j=0}^{m} w_j b_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \tag{7.38}$$

ただし $\boldsymbol{w} = (w_0, w_1, \cdots, w_m)^T$ はパラメータベクトル（重みベクトル），$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = (b_0(\boldsymbol{x}), \cdots, b_0(\boldsymbol{x}))^T$ は基底関数ベクトルとする．

非線形ロジスティック判別

2 群の事後確率について，$P(G_2|\boldsymbol{x}) = 1 - P(G_1|\boldsymbol{x})$ なので，(7.38) 式は

$$\log \frac{P(G_1|\boldsymbol{x})}{1 - P(G_1|\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$$

$$\therefore P(G_1|\boldsymbol{x}) = \frac{\exp\left\{\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\right\}}{1 + \exp\left\{\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\right\}}$$

この事後確率を反応確率と考えると，以前学習した非線形ロジスティックモデルに対応していることがわかる．

Review

ロジスティックモデルとは一般に，任意の実数値 x（刺激レベル）に対して $(0, 1)$ の数値 y（反応率）を出力する関数を出力するようなものであった．さらに，反応したかどうかを表す確率変数 Y を導入することで，要因 x と反応確率 $\pi(= P(Y = 1|x))$ をロジスティックモデルでモデル化するのであった．

非線形ロジスティック判別

非線形ロジスティック回帰では多項式モデルや B-スプラインを用いることができるのであった．今回は具体的な基底関数としてガウス型基底関数に基づく非線形ロジスティック判別を見てみる．

Review (2 次元ガウス関数)

$$
\begin{aligned}
b_j(\boldsymbol{x}) &= \phi_j(x_1, x_2) \\
&= \exp\left\{-\frac{(x_1 - \mu_{j1}^2) + (x_2 - \mu_{j2}^2)}{2h_j^2}\right\}, \ j = 1, 2, \cdots, m
\end{aligned}
$$

m は基底関数の個数，$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$ は基底関数の位置を定める中心ベクトル，h_j^2 は関数の広がりを表す量

非線形ロジスティック判別

図の2群を判別するような判別関数 $h(x_1, x_2)$ は，最尤法によって推定した係数ベクトルを重みとする次の式で表す.

$$h(x_1, x_2) = \hat{w}_0 + \sum_{j=1}^{m} \hat{w}_j \phi_j(x_1, x_2) = 0$$

$$\because \log \frac{P(G_1|\boldsymbol{x})}{1 - P(G_1|\boldsymbol{x})} = \hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow G_1 \\ > 0 \Rightarrow G_2 \end{cases}$$

非線形ロジスティック判別

- 非線形ロジスティック判別法は文字認識や音声認識，画像認識などパターン認識の分析法として有効.
- 高次元データに対して最尤法がモデルの推定に有効に機能しない場合がある.
- そのような場合は正則化最尤法が有効．適切に正則化パラメータを選び非線形判別関数を構成.