数理最適化大意　課題 2

理学部 4 年　照屋佑喜仁

2025 年 5 月 9 日

1　問題 1

1.1　P1

まず LKP を標準形で表すことを考える．LKP は次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} p^* &:= \max\left\{\sum_{i=1}^n v_i x_i : \sum_{i=1}^n w_i x_i \le W,\ 0 \le x \le 1,\ (i = 1, \dots, n)\right\} \\ &= \max\left\{\sum_{i=1}^n v_i x_i : \sum_{i=1}^n w_i x_i + q = W,\ x_i + p_i = 1, x_i \ge 0, q \ge 0, p_i \ge 0,\ (i = 1, \dots, n)\right\} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{x} &= (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n, q)^T \\ b &= (W, 1, \dots, 1)^T \\ c &= (v_1, \dots, v_n, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

と置くことにより

$$p^* = \sup\left\{c^T \tilde{x} : A\tilde{x} = b,\ \tilde{x} \ge 0\right\}$$

標準形にするために inf で表したい．$\tilde{c} := -c$ とおいて

$$p^* = \inf\left\{\tilde{c}^T \tilde{x} : A\tilde{x} = b,\ \tilde{x} \ge 0\right\} \tag{1}$$

これが KLP の標準形である．よって双対問題は

$$d^* := \sup\left\{b^T y : A^T y \le \tilde{c}\right\} \tag{2}$$

となり,

$$y_i = \begin{cases} -t & i = 1 \\ -s_{i-1} & i \ge 2 \end{cases}$$

と置いて目的関数を -1 倍すれば

$$d^* = \min \left\{ Wt + \sum_{i=1}^{n} s_i : w_i t + s_i \geq v_i \ (i = 1, \ldots, n), t, s_1, \ldots, s_n \geq 0 \right\}$$

を得る．（証明終）

1.2 P2

まず，与えられた解が (1),(2) の実行解か確かめて，相補性定理を用いて最適解かどうか確かめる．与えられた解から $\tilde{x}$ を求めることができて（$x_i + p_i = 1$ などの条件を用いるとわかる）

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} 1 & i = \begin{cases} 1, \ldots, k \\ n+k+2, \ldots, 2n \end{cases} \\ \frac{W - \sum_{i=1}^{k} w_i}{w_{k+1}} & i = k+1 \\ 0 & i = \begin{cases} k+2, \ldots, n+k \\ 2n+1 \end{cases} \\ \frac{\sum_{i=1}^{k+1} w_i - W}{w_{k+1}} & i = n+k+1 \end{cases}$$

となる．w_i についての仮定より $\tilde{x} \geq 0$ なので実行可能解である．

また, 与えられた解から双対問題の解は

$$y_i = \begin{cases} -\frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} & i = 1 \\ w_{i-1} \frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} - v_{i-1} & i = 2, \ldots, k+1 \\ 0 & i = k+2, \ldots, n+1 \end{cases}$$

となり，v_i, w_i の比の仮定からこれは実行可能解であった．（$A^T y \leq c$ を満たす．）ここで,

$$c - A^T y = \begin{pmatrix} -v_1 - \left\{ w_1 (-\frac{v_k + 1}{w_{k+1}}) + w_1 \frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} - v_1 \right\} \\ -v_2 - \left\{ w_2 (-\frac{v_k + 1}{w_{k+1}}) + w_2 \frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} - v_2 \right\} \\ \vdots \\ -v_k - \left\{ w_k (-\frac{v_k + 1}{w_{k+1}}) + w_k \frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} - v_k \right\} \\ -v_{k+1} - \left\{ w_{k+1} (-\frac{v_{k+1}}{w_{k+1}}) \right\} \\ \vdots \\ -v_n - \left\{ w_n (-\frac{v_{k+1}}{w_{k+1}}) \right\} \\ -\left\{ w_1 \frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} - v_1 \right\} \\ -\left\{ w_k \frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} - v_k \right\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\left(-\frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} \right) \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -v_{k+2} - \left\{ w_{k+2}(-\frac{v_{k+1}}{w_{k+1}}) \right\} \\ \vdots \\ -v_n - \left\{ w_n(-\frac{v_{k+1}}{w_{k+1}}) \right\} \\ -\left\{ w_1 \frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} - v_1 \right\} \\ -\left\{ w_k \frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} - v_k \right\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\left(-\frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} \right) \end{pmatrix}
$$

よって $\tilde{x}_i \left(c - A^T y\right)_i$ について

$$
\begin{cases} i = 1, \ldots, k+1 \text{ のとき} \quad \left(c - A^T\right)_i = 0 \\ i = k+2, \ldots, n+k \text{ のとき} \quad \tilde{x}_i = 0 \\ i = n+k+1, \ldots, 2n \text{ のとき} \quad \left(c - A^T\right)_i = 0 \\ i = 2n+1 \text{ のとき} \quad \tilde{x}_i = 0 \end{cases}
$$

よって $\tilde{x}_i \left(c - A^T y\right)_i = 0$ が成り立つから，与えられた解は最適解でありそれぞれ LKP，DKP の最大解，最小解であることが示された.

2 問題 2

- $B_1 = \{1, 2, 4, 5\}$
  添字集合 B_1 から次の連立方程式

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 = 72 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 50 \\ x_1 - x_5 = 32 \\ x_2 = 20 \end{cases}
$$

  を得る．これを解くと $x_1 = 52, x_2 = 20, x_4 = 22, x_5 = 20$ を得る．したがって，$(52, 20, 0, 22, 20, 0)$ は基底解であり非負なので実行可能基底解である．

- $B_2 = \{1, 2, 3, 6\}$
  添字集合 B_1 から次の連立方程式

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 72 \\ x_1 + x_2 = 50 \\ x_1 + x_3 = 32 \\ x_2 + x_3 = 20 \end{cases}
$$

  を得る．これを解くと $x_1 = 10, x_2 = 40, x_3 = 22, x_6 = 42$ を得る．したがって，$(10, 40, 22, 0, 0, 42)$ は基底解であり非負なので実行可能基底解である．