数理最適化大意　課題 1

理学部 4 年　照屋佑喜仁

2025 年 4 月 26 日

1　問題 1

$b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ を定数ベクトル，定数行列とする．
次の線形計画問題を標準形に書き換える．

$$\inf\left\{b^T y : c - A^T y \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^m\right\} \tag{1}$$

まず，$s = c - A^T y$ と置くことで

$$(1)\ = \inf\left\{b^T y : c - A^T y = s, s \geq 0, y \in \mathbb{R}^m, s \in \mathbb{R}^n\right\}$$

ここで，$y = y^+ - y^-$, $y^+, y^- \geq 0$ と置けば

$$\begin{aligned}(1) &= \inf\left\{b^T(y^+ - y^-) :\ c - A^T(y^+ - y^-) = s,\ y^+, y^-, s \geq 0,\ s \in \mathbb{R}^n,\ y^+, y^- \in \mathbb{R}^m\right\} \\ &= \inf\left\{\begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \\ s \end{pmatrix} : (A^T, -A^T, I_n)\begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \\ s \end{pmatrix} = c,\ \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \\ s \end{pmatrix} \geq 0,\ \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m+n}\right\}\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}^T = \tilde{b}$, $\begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \\ s \end{pmatrix} = \tilde{x}$, $(A^T, -A^T, I_n) = \tilde{A}$ とすることで

$$(1) = \inf\left\{\tilde{b}^T\tilde{x} :\ \tilde{A}\tilde{x} = c,\ \tilde{x} \geq 0,\ \tilde{x} \in \mathbb{R}^2 m + n\right\}$$

と標準形で書くことができた．□

2　問題 2

2.1　Q1

次の線形計画問題の双対問題について考える．

$$\inf\{x :\ x + y + z = 72,\ x + y \geq 50,\ x + z \geq 32,\ y + z \geq 20,\ x, y, z \geq 0\} \tag{2}$$

まず，この線形計画問題は次と同値である．

$$\inf\{x :\ x + y + z = 72,\ x + y - 50 = a, x + z - 32 = b, y + z - 20 = c,\ x, y, z, a, b, c \geq 0\}$$

ここで $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x & y & z & a & b & c \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 72 & 50 & 32 & 20 \end{pmatrix}^T,$
$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ と置けば

$$\inf \left\{ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} : \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \geq 0, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \right\}$$

とも同値である．
双対問題を考えるにあたり，もとの線形計画問題を下から評価する $\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}$ を考え，それを最大化させると考える．
$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^6$ とする．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} = (A\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y} \\ &= \left\{ (A^T \boldsymbol{y})^T \boldsymbol{x} \right\}^T \\ &= (A^T \boldsymbol{y})^T \boldsymbol{x} \quad \because \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \text{ はスカラー} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} \geq 0$ を満たすので，係数ベクトル $\boldsymbol{y}$ が $A^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ を満たせば

$$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} = (A^T \boldsymbol{y})^T \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

となり，もとの線形計画問題の目的関数値を下から評価できる．よって求める双対問題は

$$\begin{aligned} &\sup \left\{ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} : \ A^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}, \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \sup \left\{ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} : \ \boldsymbol{c} - A^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}, \ \boldsymbol{z} \geq 0, \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4, \ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^6 \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

□

2.2 Q2

まず，(2) の実行可能解で目的関数 x をできるだけ小さくするようなものを考えてみる．条件より

$$\begin{aligned} 72 - z \geq 50 \quad &\therefore z \leq 22 \\ 72 - y \geq 32 \quad &\therefore y \leq 40 \\ 72 - x \geq 20 \quad &\therefore x \leq 52 \end{aligned}$$

が直ちにわかる．
ここで $x + y \geq 50$ に注目すると x が最小となるのは y ができるだけ大きいときと考察できる．上の条件から，$y = 40$ とすると，$x \geq 10$ となり，その最小値 $x = 10$ を取れば $x + y + z = 72$ より $z = 22$ となりこれはどの条件も満たすため $(x, y, z) = (10, 40, 22)$ は実行可能解である．この実行可能解を (2) の表記に合わせて $\boldsymbol{x}^* = (10, 40, 22, 0, 0, 42)$ とおく．
(3) の実行可能解を $\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*$ としておく．仮に $\boldsymbol{x}^*$ が最小解であるとして，相補性定理より $\boldsymbol{x}_i^* \boldsymbol{z}_i^* = 0, \ (i = 1, 2, \cdots, 6)$ を解く．$\boldsymbol{x}_i^* > 0$ のとき $\boldsymbol{z}_i^* = 0$ つまり $(A^T \boldsymbol{y}^*)_i = \boldsymbol{c}_i$ を解けば良いので，($\boldsymbol{x}_i = 0$ のとき $\boldsymbol{z}_i^*$ は任

意の値で相補性を満たすため考えなくてよい.）

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ y_1 + y_3 + y_4 = 0 \\ -y_4 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

これを解いて $\boldsymbol{y}^* = (-1, 1, 1, 0)^T$ これは (3) の条件を満たすため実行可能解．（ちなみに $\boldsymbol{z}^* = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T$ となった．確かに条件を満たす.）
よってこれは最適解である．目的関数の値は $\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^* = 10$ となり最小値に一致する．最小値と最適値は一致し 10 である.