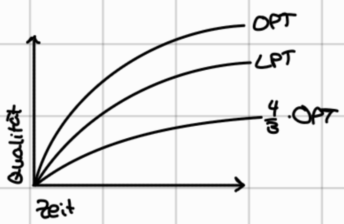
Lisa Sachlewitz

Hey, könntest du die Korrektur sehr ausführlich machen?
Ich habe Algo II noch nicht gehört und höre dieses Semester
Algo I, daher bin ich mir bei der Notation usw. unsicher.
Vielen Dank im Vorraus! :D

Aufgabe 2.1

Zu zeigen: Der Approximationsfaktor $\frac{4}{3}$ des LPT ist eine untere Schranke für das Scheduling auf identischen Maschienen.



$\Rightarrow \frac{4}{3} \cdot OPT$ ist eine untere Schranke von LPT, wenn $LPT \leq \frac{4}{3} \cdot OPT$ gilt.

Funktionsweise von LPT:

Der LPT verteilt Jobs verschiedener Größe auf eine bestimmte Anzahl an Maschienen, mit dem Ziel alle Jobs schnellstmöglich fertigzustellen.

- LPT fügt den längsten übrigen Job der Maschiene mit der kürzesten Ausführungszeit hinzu.
- LPT sortiert alle Jobs in absteigender Reihenfolge mit dem längsten Job zuerst.

Sei $P = \{ p_1 = 4, p_2 = 4, p_3 = 2, p_4 = 2 \}$ eine Menge an Jobs mit ihren jeweiligen Laufzeiten, welche auf zwei Maschienen A und B verteilt werden sollen.

Die optimale Ausführungszeit ist $OPT = 6$ mit der Verteilung: $\{ \overbrace{(p_1, p_3)}^{6}, \overbrace{(p_2, p_4)}^{6} \}$.

LPT kommt zu dem gleichen Ergebnis:

Prozess	A	B
$p_1 = 4, p_2 = 4, p_3 = 2, p_4 = 2$	0	0
$p_2 = 4, p_3 = 2, p_4 = 2$	$p_1 = 4$	0
$p_3 = 2, p_4 = 2$	$p_1 = 4$	$p_2 = 4$
$p_4 = 2$	$p_1 + p_3 = 6$	$p_2 = 4$
	$p_1 + p_3 = 6$	$p_2 + p_4 = 6$

Angenommen p_n sei der letzte Job eines LPT in der folgenden Menge an Prozessen: $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Sei $C(\pi)$ die Ausführungszeit des Schedules π des LPT, also die Zeit die es benötigt, um alle Jobs fertigzustellen. Außerdem sei $L_i(\pi)$ der Load von Maschiene i, welche die maximale Ausführzeit hat.

Wie in Theorem 2.5 gezeigt gilt $C(\pi) = L_i(\pi) \leq \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k\right) + p_n \leq OPT + p_n$, mit

- p_k: Ausführungszeit des k-ten Jobs.
- p_n: Ausführungszeit des letzten Jobs.
- m: Gesamtanzahl an Maschienen.

$\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k\right)$ berechnet dabei die durchschnittliche Ausführungszeit eines Jobs bis zum letzten Job.

Sei $START_n$ die Ausführungszeit vor Ausführung des letzten Jobs p_n.

Dann gilt offensichtlich $START_n + p_n = C(\pi) = L_i(\pi)$, also gilt

$START_n + p_n \leq \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k\right) + p_n \leq OPT + p_n$.

Somit gilt auch $START_n + p_n \leq OPT + p_n$.

Da $START_n + p_n$ der Ausführungszeit von LPT entspricht, sei $LPT = START_n + p_n = C(\pi) = L_i(\pi)$.

Wenn $p_n \leq \frac{OPT}{3}$ ist, dann ist $LPT \leq OPT + p_n \Rightarrow LPT \leq OPT + \frac{OPT}{3}$

$$\Leftrightarrow LPT \leq \frac{3}{3} \cdot OPT + \frac{1}{3} \cdot OPT$$

$$= LPT \leq \frac{4}{3} \cdot OPT$$

Andernfalls, wenn $p_n > \frac{OPT}{3}$ ist, dann sind alle vorherigen Jobs ähnlich oder größer als p_n, weil LPT die Jobs in absteigender Reihenfolge verteilt.

Daher ist der vom LPT produzierte Schedule gleich der optimalen Ausführungszeit: $LPT = OPT$.

$\Rightarrow LPT = OPT \leq \frac{4}{3} \cdot OPT$.

Also ist $\frac{4}{3}$ für beide Fälle tatsächlich eine untere Schranke, da $LPT \leq \frac{4}{3} \cdot OPT$ gilt.

Aufgabe 2.2

a)