Лабораторная работа №4

Вариант №23

Товмасян Арман М3232

Функция:

$$f(x,y) = x^2\,y^2\,(5-2x-4y) = 5x^2y^2 - 2x^3y^2 - 4x^2y^3$$

Аналитический метод

1. Посчитаем частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10xy^2 - 6x^2y^2 - 8xy^3 = 2xy^2(5-3x-4y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 10x^2y - 4x^3y - 12x^2y^2 = 2x^2y(5-2x-6y)$$

Найдем стационарные точки

$$\begin{cases} 2xy^2\,(5-3x-4y) = 0 \\ 2x^2y\,(5-2x-6y) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Решения системы

$$M = \left\{ \left(1, \frac{1}{2}\right), (t, 0), (0, t) \right\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Пояснение: если одна из переменных равняется нулю, то другая не равная нулю может принимать любое значение

---

2. Построим матрицу Гессе

Матрица Гессе имеет вид:

$$H(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=10y^2-12xy^2-8y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=10x^2-4x^3-24x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=20xy-12x^2y-24xy^2=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Получим матрицу:

$$H(f)=\begin{pmatrix}10y^2-12xy^2-8y^3 & 20xy-12x^2y-24xy^2\\ 20xy-12x^2y-24xy^2 & 10x^2-4x^3-24x^2y\end{pmatrix}$$

Подставим в матрицу значения полученных ранее точек

$$M_1=\left(1,\frac{1}{2}\right)$$

$$H_{M_1}(f)=\begin{pmatrix}-1.5 & -2\\ -2 & -6\end{pmatrix}$$

$$M_2=(0,t)$$

$$H_{M_2}(f)=\begin{pmatrix}10t^2-8t & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$M_3=(t,0)$$

$$H_{M_3}(f)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 10t^2-4t^3\end{pmatrix}$$

Найдем гессианы

$$\det(H_{M_1})=5$$

$$\det(H_{M_2}) = 0$$

$$\det(H_{M_3}) = 0$$

Исходя из критерия Сильвестра для квадратичной формы $H_{M_1}(f)$, мы можем сказать что она отрицательно определенная: возьмем с минусом $H_{M_1}(f)$, и получим положительно определенную

Следовательно, имея что $\det(H_{M_1}) = 5 > 0$, точка M_1 - max

Значение функции - $f(M_1) = 0.25$

---

3. Заметим что для точек M_2, M_3 не выполняется достаточное условие. Проверим их дополнительно

$$\text{Для } M_2 = (0, t)$$

$$f(M_2) = 0$$

$$f(M_2 + \Delta) = f(0 + \Delta x, t + \Delta y) = (\Delta x)^2 (t + \Delta y)^2 (5 - 2\Delta x - 4t - 4\Delta y)$$

$$\text{Заметим } (\Delta x)^2 \geq 0 \text{ и } (t + \Delta y)^2 \geq 0$$

$$\text{c} - (2\Delta x + 4\Delta y),\ c - \text{ константа}$$

Понятно что в зависимости от значений Δx и $\Delta y \to (2\Delta x + 4\Delta y)$ будет иметь разн

$$\text{Иногда } f(M_2 + \Delta) > 0 \quad \text{А иногда, } f(M_2 + \Delta) < 0 \quad \Rightarrow$$

$$M_2 - \text{ не экстремум}$$

$M_3 -$ по точно таким же рассуждениям, не экстремум

Численный метод

In [47]:
```
# Импортируем все нужные библиотеки (очень жаль что нельзя использовать autograd)
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import time
```

In [3]:
```
# Задаем изначальную функцию
def f(x, y):
    return 5 * x**2 * y**2 - 2 * x**3 * y**2 - 4 * x**2 * y**3
```

In [16]:
```
# Задаем градиент функции
def grad(x, y):
    partial_x = 2 * x * y**2 * (5 - 3*x - 4*y)
    partial_y = 2* x**2 * y * (5 - 2*x - 6*y)
    return -partial_x, -partial_y
```

In [39]:
```
x_start, y_start = 1, 1  # Стартовое приближение
COEF = 0.1  # Коэффицент
ITERATIONS = 100 # Число итераций
EPS = 1e-6  # Эпсилон для условия остановки алгоритма
```

In [59]:
```
x_coord, y_coord, z_coord = [], [], []
```

In [72]:
```
# Градиентный спуск
%time
for i in range(ITERATIONS):
    x_i, y_i = x_start - COEF * grad(x_start, y_start)[0], y_start - COEF *
    f_i = f(x_i, y_i)
    delta = abs(f_i - f(x_start, y_start))

    x_coord.append(x_i)
    y_coord.append(y_i)
    z_coord.append(f_i)

    if delta < EPS:
        last_iter_count = i
        break
    x_start, y_start = x_i, y_i
```

```
CPU times: user 2 µs, sys: 1 µs, total: 3 µs
Wall time: 10 µs
```

In [75]:
```
print(f"Критерий остановки: abs(Delta f) < {EPS}")
print(f"Число итераций: {last_iter_count}")
print(f"Полученная точка: ({x_i}, {y_i})")
print(f"Полученное значение функции: {f_i}")
```

```
Критерий остановки: abs(Delta f) < 1e-06
Число итераций: 0
Полученная точка: (0.9965035083692002, 0.5013305035960297)
Полученное значение функции: 0.24999482081264468
```

In [56]:
```
fig = plt.figure(figsize=(20, 10))
ax = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')

x = np.linspace(-1, 1, 100)
y = np.linspace(-1, 1, 100)
```

```
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = f(X, Y)

ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='plasma')
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')
ax.set_title('Function Graph')

ax = fig.add_subplot(1, 2, 2)
ax.contour(X, Y, Z, 50, cmap='plasma')
ax.scatter(x_coord, y_coord, color='red', s=10)
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_title('Level set')

plt.show()
```