Лабораторная работа №1

Вариант №31

Товмасян Арман M3132

Последовательность:

$$x_n = (1 + \sin\frac{\pi n}{2}) \cdot \frac{n-3}{n+5}$$

Аналитический Метод

1. Исследуем последовательность x_n на сходимость

Для начала посчитаем первые 6 членов последовательности

$x_1 = (1+\sin(\frac{\pi}{2})) \cdot \frac{1-3}{1+5} = \frac{-2}{3}$	$x_2 = (1+\sin(\frac{2\pi}{2})) \cdot \frac{2-3}{2+5} = \frac{-1}{7}$
$x_3 = (1+\sin(\frac{3\pi}{2})) \cdot \frac{3-3}{3+5} = 0$	$x_4 = (1+\sin(\frac{4\pi}{2})) \cdot \frac{4-3}{4+5} = \frac{1}{9}$
$x_5 = (1+\sin(\frac{5\pi}{2})) \cdot \frac{5-3}{5+5} = \frac{4}{10}$	$x_6 = (1+\sin(\frac{6\pi}{2})) \cdot \frac{6-3}{6+5} = \frac{3}{11}$

***Синус - функция периодическая*, потому выделим следующие подпоследовательности и найдем частичные пределы**

Если $n = 2k; k \in \mathbb{N}$ то:

$$x_n = x_{2k} = (1 + \sin(2\pi k)) \cdot \frac{2k-3}{2k+5} = \frac{2k-3}{2k+5}$$

Так как $\sin(2\pi k)$ всегда равен 0

Найдем частичный предел:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k-3}{2k+5} = 1$$

Если $n = 4k-1; k \in \mathbb{N}$ то:

$$x_n = x_{4k-1} = \left(1 + \sin\left(\frac{(4k-1)\pi}{2}\right)\right) \cdot \frac{4k-4}{4k+4} = 0$$

Так как $\sin\left(\frac{(4k-1)\pi)}{2}\right)$ всегда равен -1

Найдем частичный предел:

$$\lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

Если $n = 4k - 3; k \in \mathbb{N}$ то:

$$x_n = x_{4k-3} = \left(1 + \sin\left(\frac{(4k-3)\pi)}{2}\right)\right) \cdot \frac{4k-6}{4k+2} = \frac{8k-12}{4k+2}$$

Так как $\sin\left(\frac{(4k-3)\pi)}{2}\right)$ всегда равен 1

Найдем частичный предел:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{8k-12}{4k+2} = 2$$

В итоге получили множество частичных пределов:

$$L = \{0, 1, 2\}$$

Так как $\overline{\lim}\, x_n \neq \underline{\lim}\, x_n$, наша **последовательность x_n расходится**

Найдем верхний и нижний предел последовательности

Верхний предел последовательности - это наибольший предел из множества частичных пределов

Нижний предел последовательности - это наименьший предел из множества частичных пределов

$$\overline{\lim}\, x_n = 2 \qquad \underline{\lim}\, x_n = 0$$

---

2. Найдем значения: $\sup x_n, \inf x_n, \overline{\lim}\, x_n, \underline{\lim}\, x_n$

Значения $\overline{\lim}\, x_n$ и $\underline{\lim}\, x_n$ мы нашли уже пунктом выше

Найдем $\inf x_n$ и $\sup x_n$

2.1. $\inf x_n$

В нашей последовательности есть два множителя. Оценим их сверху и снизу, исследуем какие значения могут принимать

$$(1 + \sin\frac{\pi n}{2}) \in \{0, 1, 2\};\ n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{n-3}{n+5} \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right);\ n \in \mathbb{N}$$

Исходя из найденного, найдем наименьшее значение произведения этих двух множителей:

$$\left(1 + \sin\frac{\pi n}{2}\right) \cdot \frac{n-3}{n+5} = -\frac{2}{3}$$

Однако заметим, что найденное выше наименьшее значение достигается при $n = 1$:

$$\left(1 + \sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1-3}{1+5} = -\frac{2}{3}$$

Следовательно получаем что:

$$\inf x_n = -\frac{2}{3}$$

2.2. $\sup x_n$

Исследуем еще раз оба множителя на предмет принимаемых ими значений:

$$\left(1 + \sin\frac{\pi n}{2}\right) \in \{0, 1, 2\};\ n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{n-3}{n+5} \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right);\ n \in \mathbb{N}$$

Найдем наибольшее значение их произведения и предположим что оно будет являться $\sup x_n$

$$\left(1+\sin\frac{\pi n}{2}\right)\cdot\frac{n-3}{n+5}\approx 2$$

Но! Данное произведение никогда не достигнет значения *2*, так как у второго множителя конкретного максимума не существует

Докажем что $\sup x_n = 2$. Для этого проверим его по критерию супремума

1. Предполагаемый супремум S должен являться верхней границей:

$$\forall x \in x_n : x \leq S$$

Очевидно что является верхней границей, так как мы взяли наибольшее значение произведения множителей в формуле последовательности

2. Предполагаемый супремум S должен удовлетворять следующему условию:

$$\forall S' < S,\, \exists x \in x_n : S' < x$$

Докажем

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists n_0 : x_n > 2-\varepsilon$$

Пусть $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2k-3}{2k+5} > 2-\varepsilon$$

$$\frac{2k+13}{2k+5} < \varepsilon$$

$$\frac{2k+13}{2k+5} < \frac{2k+13}{2k} < \varepsilon$$

$$2k+13 < 2k\varepsilon$$

$$13 < 2k\varepsilon - 2k$$

$$13 < 2k(\varepsilon-1)$$

$$n_0 = \left\lfloor \frac{13}{2(\varepsilon - 1)} \right\rfloor + 1$$

Данная цепочка рассуждений нас приводит к тому, что мы всегда сможем взять такое число $n = 2k$, чтобы оно удовлетворяло критерию супремума.

Значит действительно:

$$\sup x_n = 2$$

---

3. Исследуем на наличие: $\max x_n, \ \min x_n$

Максимального элемента нет, так как наша последовательность хоть и ограничена сверху, но она не достигает своего супремума.

Минимальный элемент есть, так как у нас существует конкретный достигаемый инфимум

$$\min x_n = \inf x_n = -\frac{2}{3}$$

4. Определение предела для подпоследовательности

Выберем подпоследовательность последовательности x_n при $n = 4k - 1$ и обозначим ее y_k

$$y_k = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \Rightarrow |y_k - 0| < \varepsilon$$

Выбранная мною подпоследовательность является стационарной, всегда равная 0

$$|y_k - 0| < \varepsilon$$

$$|0 - 0| < \varepsilon$$

$$0 < \varepsilon$$

Следовательно, можно взять k_0 за любой номер

Численный Метод

1. Построим график последовательности x_n

In [1]:
```
import numpy as np  # Библиотека для работы с массивами чисел
import matplotlib.pyplot as plt  # Библиотека для построения графиков
%matplotlib inline
```

In [2]:
```
plt.style.use(["science", "notebook", "grid", "high-vis"])  # Стиль координатной плоскос
```

Зададим нашу последовательность в виде функции

In [3]:
```
def function(n):
    return (1 + np.sin((np.pi * n) / 2)) * ((n - 3) / (n + 5))
```

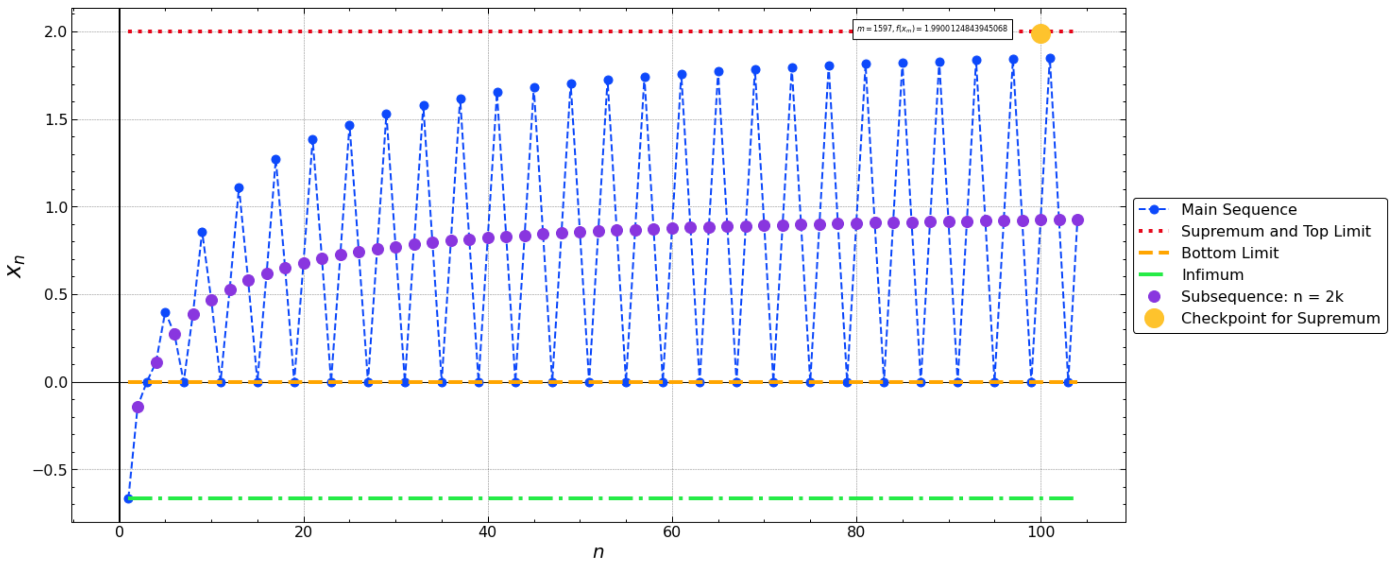
In [4]:
```
X = np.arange(1, 100 + 5)  # Отметим первые 100 точек на оси абсцисс
X_half = np.arange(1, 50+3)  # Для подпоследовательности
Y = function(X)  # Применим функцию на массив X, тем самым получим значения в точках
```

In [5]:
```
# Задание 2.4

eps = 0.01  # Эпсилон
x_m = 0  # Переменная в которую положим значение которое окажется больше чем sup - eps
sup = 2  #  Супремум
m = 0  #  Номер этого значения
for i in range(1, 1_000_000):
    tmp = function(i)
    if tmp > sup - eps:  #  Критерий супремума
        x_m = tmp
        m = i
        print(f"Найденное значение большее супремума: {x_m}")
        print(f"Номер: {i}")
        break

X_sup = np.arange(m - 100, m + 1)
Y_sup = function(X_sup)
```

```
Найденное значение большее супремума: 1.9900124843945068
Номер: 1597
```

In [6]:
```
plt.figure(figsize=(20, 10))  # Зададим размер окна с коорд. плоскостью
plt.axvline(x=0, lw=2, color="black")  # Построим x=0
plt.axhline(y=0, lw=1, color="black")  # Построим y=0
plt.xlabel("$n$", fontsize=20)  # Подпишем ось абсцисс
plt.ylabel("$x_n$", fontsize=24)  # Подпишем ось ординат

# Построим график последовательности
plt.plot(X, Y, "o--", lw=2, ms=9, label="Main Sequence")

# Прямая линия, отвечает за супремум и верхний предел
plt.plot(X, X*0 + 2, ":", lw=4, label="Supremum and Top Limit")

# Прямая линия, отвечает за нижний предел
plt.plot(X, X*0, "--", lw=4, color="orange", label="Bottom Limit")

# Прямая линия, отвечает за инфимум
plt.plot(X, X*0 + function(X[0]), lw=4, label="Infimum")

# Подпоследовательность при n = 2k
plt.plot(2*X_half, (2*X_half - 3) / (2*X_half + 5), "o", lw=4, ms=12, label="Subsequence

# Точка из задания 2.4
```

```
plt.plot(100, x_m, "o", ms=20, label="Checkpoint for Supremum")
plt.text(80, 2, f"$m = {m}, f(x_m) = {x_m}$", fontsize=8, bbox=dict(facecolor="white", e

plt.legend(loc="center left", bbox_to_anchor=(1, 0.5), edgecolor="black")  # Отобразим л
plt.show()
```



В легенде указаны цвета тех или иных значений

3. По данному $\varepsilon > 0$ найдем n_0. Отметим значение предела для данной подпоследовательности построенной начиная с n_0

Для той же выбранной последовательности $n = 2k$ нарисуем ее график, и четко изобразим её предел начиная с некоторого номера.

Если $n = 2k$, то:

$$x_n = x_{2k} = \frac{2k-3}{2k+5}$$

Определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \Rightarrow |x_{2k} - 1| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2k-3}{2k+5} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-8}{2k+5} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{8}{2k+5} < \frac{8}{2k} = \frac{4}{k} < \varepsilon$$

$$k_0 = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

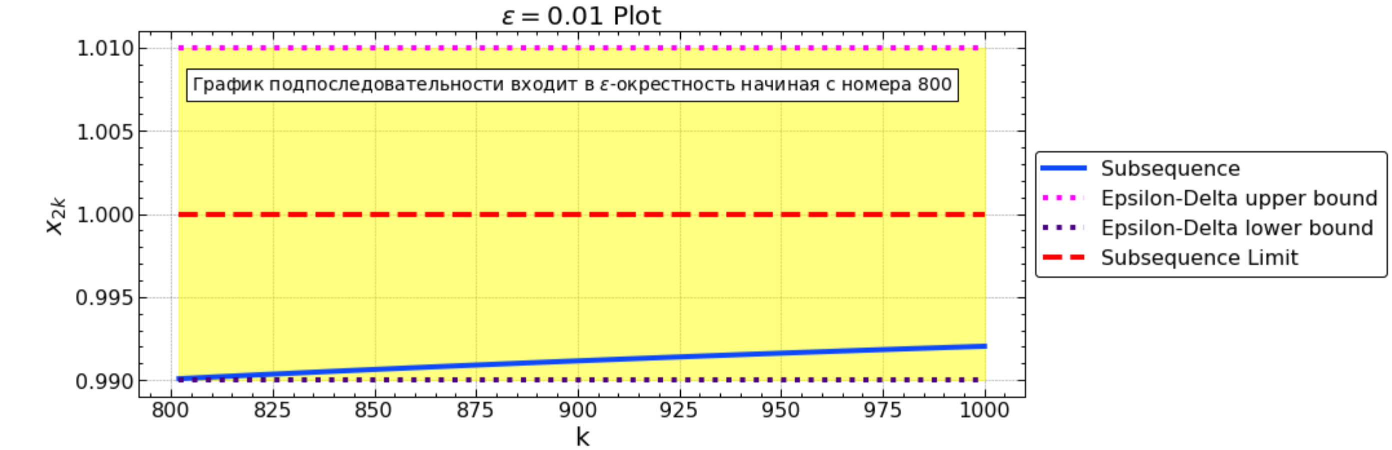
In [7]:

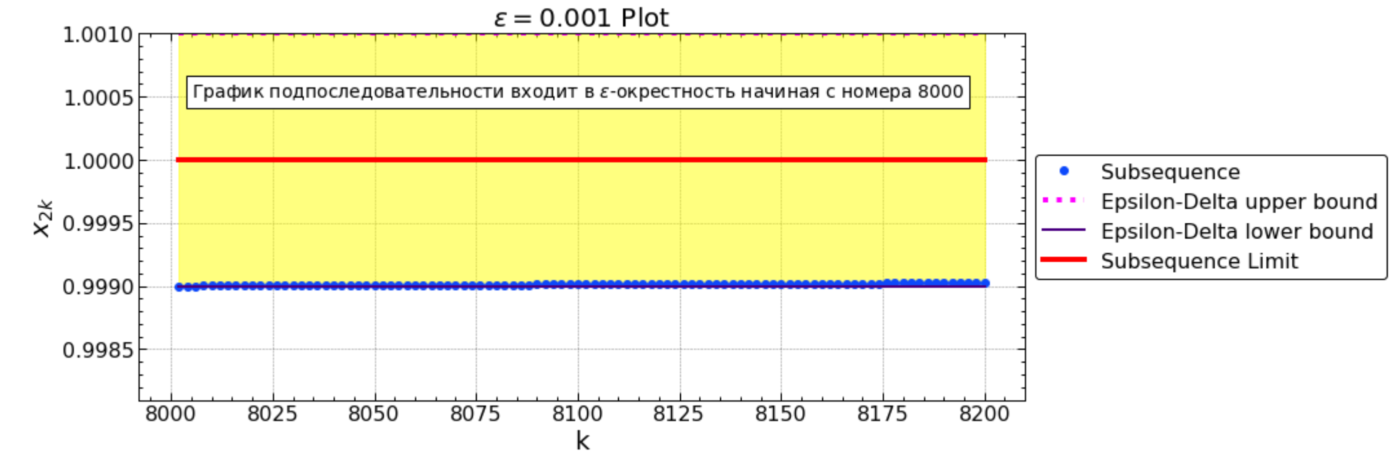
```
# Функция для получения информации по эпсилон-окрестности, по заданному эпсилон
def epsilon_info(eps: float) -> tuple:
    LIMIT = 1  # Предел подпоследовательности
    n_0 = np.floor(4 / eps) + 1  # Номер, с которого график попадает в эпс-окрестность
    eps_delta_bot = LIMIT - eps  # Линия ограничивающая эпс-окрестность: нижняя
    eps_delta_top = LIMIT + eps  # Линия ограничивающая эпс-окрестность: верхняя
    X_sub = np.array([2*k for k in range(int(n_0), int(n_0) + 100)])
    Y_sub = function(X_sub)

    return (eps_delta_bot, eps_delta_top, X_sub, Y_sub)
```

In [8]:

```
# Инициализируем три графика
fig, axes = plt.subplots(3, 1, figsize=(15, 15))

# Аналогичные действия для всех графиков
# График эпсилон = 0.01
ax1 = axes[0]
ax1.set_title(r"$\varepsilon = 0.01$ Plot", fontsize=20)  # Название у графика
# Из функции подтягиваем все нужные значения
ax1_bot_limit, ax1_top_limit, ax1X, ax1Y = epsilon_info(0.01)
ax1.set_xlabel("k", fontsize=20)  # Лэйбл по оси Ox
ax1.set_ylabel(r"$x_{2k}$", fontsize=20)  # Лэйбл по оси Oy
ax1.plot(ax1X, ax1Y, "-", lw=4, label="Subsequence")  # График подпоследовательнсоти

# Верхняя граница эпсилон окрестности
ax1.plot(ax1X, ax1X*0 + ax1_top_limit, ":", lw=4, color="magenta", label="Epsilon-Delta

# Нижняя граница эпсилон окрестности
ax1.plot(ax1X, ax1X*0 + ax1_bot_limit, ":", lw=4, color="indigo", label="Epsilon-Delta l

# Предел подпоследовательности
ax1.plot(ax1X, ax1X*0 + 1, "--", lw=4, color="red", label="Subsequence Limit")

# Текст
ax1.text(805, 1.0075,
         r"График подпоследовательности входит в $\varepsilon$-окрестность начиная с ном
         fontsize=14,bbox=dict(facecolor="white", edgecolor="black"))

# Заливка эпсилон-окрестности
ax1.fill_between(ax1X, ax1_bot_limit, ax1_top_limit, color="yellow", alpha=0.5)

# Легенда
ax1.legend(loc="center left", bbox_to_anchor=(1, 0.5), edgecolor="black")


# Аналогичные действия для остальных графиков
# График эпсилон = 0.001
ax2 = axes[1]
ax2.set_title(r"$\varepsilon = 0.001$ Plot", fontsize=20)
ax2_bot_limit, ax2_top_limit, ax2X, ax2Y = epsilon_info(0.001)
ax2.set_xlabel("k", fontsize=20)
ax2.set_ylabel(r"$x_{2k}$", fontsize=20)
ax2.plot(ax2X, ax2Y, "o", lw=4, ms=6, label="Subsequence")
ax2.plot(ax2X, ax2X*0 + ax2_top_limit, ":", lw=4, color="magenta", label="Epsilon-Delta
ax2.plot(ax2X, ax2X*0 + ax2_bot_limit, "-", lw=2, color="indigo", label="Epsilon-Delta l
ax2.plot(ax2X, ax2X*0 + 1, "-", lw=4, color="red", label="Subsequence Limit")
ax2.text(8005, 1.0005,
         r"График подпоследовательности входит в $\varepsilon$-окрестность начиная с ном
         fontsize=14,bbox=dict(facecolor="white", edgecolor="black"))
```

```
ax2.fill_between(ax2X, ax2_bot_limit, ax2_top_limit, color="yellow", alpha=0.5)
ax2.set_ylim(0.99900 - 0.0009, 0.99900 + 0.002)
ax2.legend(loc="center left", bbox_to_anchor=(1, 0.5), edgecolor="black")

# График эпсилон = 0.0001
ax3 = axes[2]
ax3.set_title(r"$\varepsilon = 0.0001$ Plot", fontsize=20)
ax3_bot_limit, ax3_top_limit, ax3X, ax3Y = epsilon_info(0.0001)
ax3.set_xlabel("k", fontsize=20)
ax3.set_ylabel(r"$x_{2k}$", fontsize=20)
ax3.plot(ax3X, ax3Y, "o", lw=6, label="Subsequence")
ax3.plot(ax3X, ax3X*0 + ax3_top_limit, ":", lw=4, color="magenta", label="Epsilon-Delta
ax3.plot(ax3X, ax3X*0 + ax3_bot_limit, "-", lw=2, color="indigo", label="Epsilon-Delta l
ax3.plot(ax3X, ax3X*0 + 1, "--", lw=4, color="red", label="Subsequence Limit")
ax3.text(80010, 0.99995,
         r"График подпоследовательности входит в $\varepsilon$-окрестность начиная с ном
         fontsize=14, bbox=dict(facecolor="white", edgecolor="black"))
ax3.fill_between(ax3X, ax3_bot_limit, ax3_top_limit, color="yellow", alpha=0.5)
ax3.axis([ax3X[0], ax3X[-1], 0.9999 - 0.0001, 0.9999 + 0.0001])
ax3.legend(loc="center left", bbox_to_anchor=(1, 0.5), edgecolor="black")

fig.tight_layout()
plt.show()
```





Конец!

Надеюсь вам всё понравилось