Домашняя работа 7 весна

Задача 1

Тензор a^r_{mip} задаёт собой некоторую полилинейную форму $W \in \Omega^3_1(\mathbb{R}^2)$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^2$.
Компоненты тензора a^r_{mip} представляются матрицей A:

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -4 & -4 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ \hline -4 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -6 & -3 \end{array} \right\|$$

В матрице тензора a индекс r определяется номером строки, индекс m определяется номером столбца, индекс i определяется номером слоя по горизонтали, индекс p определяется номером слоя по вертикали.
Найти значение этой ПЛФ на наборе векторов v и форм u, заданных в стандартном базисе

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$u^1 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Пример ввода: 1337

Ваш ответ: -4075

Задача 2

Тензор a^{jm}_p задаёт собой некоторую полилинейную форму $W \in \Omega^1_2(\mathbb{R}^2)$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^2$.
Компоненты тензора a^{jm}_p представляются матрицей A:

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -2 & 2 & -4 & -6 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

В матрице тензора a индекс j определяется номером строки, индекс m определяется номером столбца, индекс p определяется номером слоя по горизонтали.
Найти значение этой ПЛФ на наборе векторов v и форм u, заданных в стандартном базисе

$$v_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$u^1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad u^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Пример ввода: 1337

Ваш ответ: 202

Задача 3

Тензор a^p_{lkr} задан своей матрицей A

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 48 & 72 & 36 & 54 \\ -48 & -72 & -36 & -54 \\ \hline 96 & 144 & 72 & 108 \\ -96 & -144 & -72 & -108 \end{array} \right\|$$

В матрице A индекс p определяется номером строки, индекс l определяется номером столбца, индекс k определяется номером слоя по горизонтали, индекс r определяется номером слоя по вертикали.
Найти разложение тензора a^p_{lkr} в произведение одновалентных тензоров - базисных векторов и линейных форм.
Полученное разложение записать в формате: на первой строке через ; коэффициенты при разложении по векторам стандартного базисе линейного пространства, на второй - по базисным линейным формам сопряженного пространства.
Результирующему разложению тензора валентности (2, 1) над пространством $\mathbb{R}^3$

$$a = (e_1 + 2e_2) \otimes (-3e_2 + e_3) \otimes (f^1 + 2f^2 + 3f^3)$$

соответствует
Пример ввода: $[1, 2, 0; 0, -3, 1]$
$[1, 2, 3]$

Результирующему разложению тензора валентности (0, 2) над пространством $\mathbb{R}^4$

$$a = (f^1 - f^2 + 3f^3) \otimes (f^1 + 2f^2 - f^4)$$

соответствует

Пример ввода: $[]$

$[1, -1, 3, 0; 1, 2, 0, -1]$

Ваш ответ: [6, -6] [4, 3; 1, 2; 2, 3]

Задача 4

Тензор a_{mjr} задан своей матрицей A

$$A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 24 & -24 & 0 & -48 & 48 & 0 & -48 & 48 \\ 0 & 12 & -12 & 0 & -24 & 24 & 0 & -24 & 24 \\ 0 & 18 & -18 & 0 & -36 & 36 & 0 & -36 & 36 \end{array} \right\|$$

В матрице A индекс m определяется номером строки, индекс j определяется номером столбца, индекс r определяется номером слоя по горизонтали.

Найти разложение тензора a_{mjr} в произведение одновалентных тензоров - базисных векторов и линейных форм.

Полученное разложение записать в формате: на первой строке через ; коэффициенты при разложении по векторам стандартного базисе линейного пространства, на второй - по базисным линейным формам сопряженного пространства.

Результирующему разложению тензора валентности (2, 1) над пространством $\mathbb{R}^3$

$$a = (e_1 + 2e_2) \otimes (-3e_2 + e_3) \otimes (f^1 + 2f^2 + 3f^3)$$

соответствует

Пример ввода: $[1, 2, 0; 0, -3, 1]$

$[1, 2, 3]$

Результирующему разложению тензора валентности (0, 2) над пространством $\mathbb{R}^4$

$$a = (f^1 - f^2 + 3f^3) \otimes (f^1 + 2f^2 - f^4)$$

соответствует

Пример ввода: $[]$

$[1, -1, 3, 0; 1, 2, 0, -1]$

Ваш ответ: [] [0, 1, -1; 24, 12, 18; 1, -2, -2]

Задача 5

Тензор a^{ktp} задан матрицей A в базисе $\{e_i\}_{i=1}^3$

$$A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -5 & -2 & 8 & 6 & 3 & 0 & 6 & 2 & 5 \\ -6 & 7 & -7 & 4 & -4 & 6 & -6 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & -1 & -1 & -6 & 7 & -7 & 4 & -5 \end{array} \right\|$$

В матрице A индекс k определяется номером строки, индекс t определяется номером столбца, индекс p определяется номером слоя по горизонтали.
Найти матрицу $\tilde{A}$ этого тензора в базисе $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$, если

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Результирующей матрице тензора

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right\|$$

соответствует

Пример ввода: [1, 2, 3, -1; 2, 1, -1, 3]

Ваш ответ: [773, 547, 7, 260, 546, 154, -115, 65, 60; -219, 158, 139, -289, 210, 175, -44, 45, 30; -312, -90, 56, -188, -66, 28, 17, 1, -5]

На главную