

```
In [28]: import numpy as np
import scipy.linalg as sp
from sympy import *
init_printing(use_unicode=True)
```

Задача 1

Линейный оператор $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ задан своей матрицей A_φ в стандартном базисе. Найти $\varphi^{-1}(x)$, если

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -6 \\ -6 & 0 & -6 & 12 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 12 \\ -24 \end{pmatrix}$$

На первой строке введите вектора, которые войдут в ответ без свободных коэффициентов, на второй, которые войдут со свободными коэффициентами, в случае если таковых векторов нет, вводите []

$$\text{Для ответа } \varphi^{-1}(x) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2.023 \\ 3 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3.04 \\ 2.023 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5.719 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Пример ввода: [1, 2.02, 3]

[3.04, 2.02, 3; 5.72, 2, 1]

$$\text{Для ответа } \varphi^{-1}(x) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1.347 \\ 2.111 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример ввода: [1, -1.35, 2.11]

[]

Сохранить

```
In [5]: A = Matrix([[3, 0, 3, -6], [-6, 0, -6, 12]])
A.rref()
```

```
Out[5]: (Matrix([
[1 0 1 -2]
[0 0 0 0]
]), (0,))
```

```
In [6]: A.nullspace() # ФСП
```

```
Out[6]: [Matrix([
[0]
[1]
[0]
[0]
]), Matrix([
[-1]
[0]
[1]
[0]
]), Matrix([
[2]
[0]
[0]
[1]
])]
```

Допишите вектор x, и возьмите rref() чтоб найти ЧРНOC

Задача 2

Оператор $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ задан своей матрицей A_φ в паре базисов $\{e\}_{i=1}^3$ и $\{h\}_{i=1}^3$, являющихся базисами пространств области определения области значения оператора соответственно.

Найти матрицу этого оператора \tilde{A}_φ в паре базисов $\{\tilde{e}\}_{i=1}^3$ и $\{\tilde{h}\}_{i=1}^3$, если

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{h}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Для ответа $\tilde{A}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2.034 & -1.436 \\ 7.348 & 2 & 1 \\ 3.055 & 1.155 & 3 \end{pmatrix}$

Пример ввода: [1, 2.03, -1.44; 7.35, 2, 1; 3.06, 1.15, 3]

Сохранить

```
In [10]: A = Matrix([[3, 0, -3], [-3, 3, 9], [0, 3, 3]])
# B = T_y^-1 dot A dot T_x
# T^-1 = ~E^-1 dot E

# T_y section
yE_tilda = Matrix([[ -1, -1, -2], [-1, 0, -4], [3, 1, 11]])
yE = Matrix([[ -1, 1, 1], [2, -1, -4], [-3, 1, 8]])
T_y_inv = yE_tilda**(-1) * yE

# T_x section
# T_x = E^-1 * ~E
xE = Matrix([[ -1, 1, -2], [2, -1, 5], [-1, 0, -2]])
xE_tilda = Matrix([[1, -1, -2], [1, 0, -3], [2, -1, -4]])
T_x = xE**(-1) * xE_tilda

T_y_inv * A * T_x
```

```
Out[10]: 
$$\begin{bmatrix} 147 & -75 & -327 \\ -279 & 147 & 624 \\ 9 & -6 & -21 \end{bmatrix}$$

```

Задача 3



Найти спектральное разложение оператора $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, заданного матрицей в стандартном базисе.

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 38 & -82 & -40 \\ 66 & -132 & -62 \\ -99 & 192 & 89 \end{pmatrix}$$

На отдельных строках введите собственные числа и матрицу оператора проекции на соответствующие ему собственные подпространства. В разложении каждому собственному числу должна соответствовать ровно одна матрица оператора проектирования, которая проецирует на всё собственное подпространство. Для ответа

$$A_{\varphi} = 3 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1.234 & 1.211 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 8.43 & 4.21 \\ -2.239 & 1.23 \end{pmatrix}$$

Пример ввода: 3 [3, 4; -1.23, 1.21]
- 6 [8.43, 4.21; -2.24, 1.23]

Сохранить

```
In [27]: A = Matrix([[38, -82, -40], [66, -132, -62], [-99, 192, 89]])
T = Matrix([[-1/3, -1, -4/9], [-2/3, -1, -2/3], [1, 1, 1]])
S = T**(-1)
eig_minus_6 = T * Matrix([[-6, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]]) * S
eig_minus_4 = T * Matrix([[0, 0, 0], [0, -4, 0], [0, 0, 0]]) * S
eig_5 = T * Matrix([[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 5]]) * S
(eig_minus_6 / -6), (eig_minus_4 / -4), (eig_5 / 5)
```

```
Out[27]: \left( \begin{bmatrix} -3.0 & 5.0 & 2.0 \\ -6.0 & 10.0 & 4.0 \\ 9.0 & -15.0 & -6.0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3.0 & 2.0 \\ 0 & 3.0 & 2.0 \\ 0 & -3.0 & -2.0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4.0 & -8.0 & -4.0 \\ 6.0 & -12.0 & -6.0 \\ -9.0 & 18.0 & 9.0 \end{bmatrix} \right)
```

Задача 4



Найдите матрицу оператора $f(\varphi) = 2 \cos \varphi + \sqrt{\varphi}$, если оператор $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ задан своей матрицей в стандартном базисе

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 2 & 1 \\ -15 & -8 & 0 & -1 \\ -39 & -20 & -10 & -3 \end{pmatrix}$$

В качестве ответа ввести матрицу искомого оператора

Для ответа

$$A_{f(\varphi)} = \begin{pmatrix} 0.2 & 1.041 & 1.5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1.5 & 2 & 3.136 \end{pmatrix}$$

введите

Пример ввода: [0.2, 1.04, 1.5; 1, 2, 3; 1.5, 2, 3.14]

Сохранить

```
In [34]: def to_string(a):
        result = ""
        for i in range(len(a)):
            for j in range(len(a[i])):
                if j != len(a) - 1:
                    result += str(a[i][j]) + ", "
                else:
                    result += str(a[i][j]) + "; "
        return "[" + result[:-2] + "]"
```

```
In [36]: A = np.array([[13, 4, 2, 1],
                        [5, 8, 2, 1],
                        [-15, -8, 0, -1],
                        [-39, -20, -10, -3]])
to_string(2*sp.cosm(A) + sp.sqrtm(A))
```

```
Out[36]: '[9.710516307492396, 3.0518205665191176, 1.525910283259572, 0.7629551416297844; 16.72201
9355458258, 12.349362422998121, 5.828324832362685, 2.9141624161813415; -34.3144549779217
34, -17.538705059775722, -8.076639771615124, -4.329279830446961; -35.64396940584918, -1
8.2034622737394, -9.101731136869743, -3.968945679156059]'
```

In []: