УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Домашняя работа 11 весна

Задача 1

Квадратичная форма q, заданная на линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ в некотором базисе задаётся формулой:

$$q(x) = (\xi^1)^2 + 4\xi^1\xi^2 - 10\xi^1\xi^4 + 4(\xi^2)^2 - 20\xi^2\xi^4 + 25(\xi^4)^2$$

Приведите квадратичную форму q к каноническому виду.
В качестве ответа введите матрицу квадратичной формы в каноническом виде и, отделенное символом переноса строки, преобразование, которое приводит квадратичную форму q к каноническому виду.
Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.
Если выражение для квадратичной формы в каноническом виде задаётся через координаты $\tilde{\xi}$ и имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{\xi}^1 = 2\xi^1 - 3\xi^2 \\ \tilde{\xi}^2 = -\xi^1 + 4\xi^2 \end{cases}$$

И при этом сама квадратичная форма записывается с помощью выражения

$$q(x) = (\tilde{\xi}^1)^2 - (\tilde{\xi}^2)^2$$

То в качестве ответа введите две соответствующие матрицы, разделённые символом переноса строки.
Пример ввода:
$[1, 0; 0, -1]$
$[2, -3; -1, 4]$

Ваш ответ: [0.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000; 0.000000, 1.000000, 0.000000, 0.000000; 0.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000; 0.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000] [-0.983192, 0.067806, 0.000000, -0.169516; 1.000000, 2.000000, 0.000000, -5.000000; 0.408248, 0.816497, 0.000000, 0.408248; 0.000000, 0.000000, 1.000000, 0.000000]

Задача 2

Квадратичная форма q, заданная на линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ в некотором базисе задаётся формулой:

$$q(x) = (\xi^1)^2 + 2\xi^1\xi^2 + 4\xi^1\xi^3 + (\xi^2)^2 + 4\xi^2\xi^3 + 4(\xi^3)^2$$

Приведите квадратичную форму q к каноническому виду.
В качестве ответа введите матрицу квадратичной формы в каноническом виде и, отделенное

символом переноса строки, преобразование, которое приводит квадратичную форму q к каноническому виду.
Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.
Если выражение для квадратичной формы в каноническом виде задаётся через координаты $\tilde{\xi}$ и имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{\xi}^1 = 2\xi^1 - 3\xi^2 \\ \tilde{\xi}^2 = -\xi^1 + 4\xi^2 \end{cases}$$

И при этом сама квадратичная форма записывается с помощью выражения

$$q(x) = (\tilde{\xi}^1)^2 - (\tilde{\xi}^2)^2$$

То в качестве ответа введите две соответствующие матрицы, разделённые символом переноса строки.
Пример ввода:
$[1, 0; 0, -1]$
$[2, -3; -1, 4]$

Ваш ответ: [1.000000, 0.000000, 0.000000; 0.000000, -0.000000, 0.000000; 0.000000, 0.000000, -0.000000] [1.000000, 1.000000, 2.000000; 0.686282, -0.727050, 0.020384; -0.000000, -0.894427, 0.447214]

Задача 3

Найти сигнатуру квадратичной формы $q(x)$, если в стандартном базисе она задаётся формулой:

$$q(x) = -10(\xi^1)^2 - 2\xi^1\xi^2 - 18\xi^1\xi^3 - 72\xi^1\xi^4 - 3(\xi^2)^2 - 12\xi^2\xi^3 + 8\xi^2\xi^4 - 17(\xi^3)^2 - 38\xi^3\xi^4 - 150(\xi^4)^2$$

В качестве ответа введите пару чисел, первое из которых будет являться положительным индексом инерции квадратичной формы q, а второе - отрицательным.
Пример ввода: [1, 2]

Ваш ответ: [1, 3]

Задача 4

Найти матрицу A_φ линейного оператора $\varphi \in Hom(\mathbb{E}^3, \mathbb{E}^3)$ в стандартном базисе, если известно, что квадратичная форма q, заданная своими координатами в стандартном базисе присоединена к этому оператору, а скалярное произведением в $\mathbb{E}^3$ задано своей матрицей G в стандартном базисе.

$$q(x) = -2(\xi^1)^2 - 2\xi^1\xi^2 - (\xi^2)^2 + 2\xi^2\xi^3 - 2(\xi^3)^2$$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 21 \end{pmatrix}$$

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.
Для ответа

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \frac{3}{7} & -1.3489 \end{pmatrix}$$

Пример ввода:
$[3, 1.144; 3/7, -1.349]$

Ваш ответ: [-87.0000000000003, -68.00000000000023, 49.00000000000017; -56.0000000000002, -44.000000000000156, 32.000000000000114; 37.00000000000013, 29.0000000000001, -21.00000000000007]

Задача 5

Квадратичные формы q_1 и q_2 в некотором базисе задаются формулами:

$$q_1(x) = 11(\xi^1)^2 - 52\xi^1\xi^2 - 24\xi^1\xi^3 + 62(\xi^2)^2 + 58\xi^2\xi^3 + 14(\xi^3)^2$$

$$q_2(x) = 16(\xi^1)^2 - 82\xi^1\xi^2 - 38\xi^1\xi^3 + 105(\xi^2)^2 + 100\xi^2\xi^3 + 25(\xi^3)^2$$

Найти преобразование базиса, которое одновременно приводит квадратичную форму q_1 к каноническому виду, а квадратичную форму q_2 к диагональному.
В качестве ответа введите матрицу квадратичной формы q_1 в каноническом виде, на новой строке матрицу квадратичной формы q_2 в диагональном виде, и на третьей строке матрицу соответствующего преобразования.
Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.
Если выражение для квадратичной формы q_1 в каноническом виде через координаты $\tilde{\xi}$ имеет вид:

$$q_1(x) = (\tilde{\xi}^1)^2 - (\tilde{\xi}^2)^2$$

а выражение для квадратичной формы q_2 в этих же координатах имеет вид

$$q_2(x) = 3(\tilde{\xi}^1)^2 - 2(\tilde{\xi}^2)^2$$

И при этом искомое преобразование имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{\xi}^1 = 2\xi^1 - 3\xi^2 \\ \tilde{\xi}^2 = -\xi^1 + 4\xi^2 \end{cases}$$

То в качестве ответа введите три соответствующие матрицы, разделённые символом переноса строки.
Пример ввода:
$[1, 0; 0, -1]$
$[3, 0; 0, -2]$
$[2, -3; -1, 4]$

Ваш ответ: [1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1] [-5, 0, 0; 0, 2, 0; 0, 0, 3] [-1, 2, 1; -3, 7, 3; -1, 3, 2]

На главную