Ayudantía
SCT - Semana - 06

En general, el primer sistema de ecuaciones lineales que uno estudia es un sistema de 2×2, es decir 2 ecuaciones con 2 incógnitas, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
y &= a_1\, x + b_1,\\
y &= a_2\, x + b_2,
\end{aligned}
$$

donde y, x, a_1, a_2, b_1, y b_2 pertenecen a $\mathbb{R}$, es decir son números reales. En particular sabemos que en este caso si,

$$
\det \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 1 & -a_2 \end{pmatrix} = a_1 - a_2 \neq 0,
$$

existe una única solución para x y y que satisface ambas ecuaciones. Una forma de resolver el sistema de ecuaciones lineales anterior es simplemente **igualando** la variables y, es decir:

$$
a_1\, x + b_1 = a_2\, x + b_2.
$$

De la cual podemos despejar x de la siguiente forma:

$$
x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}.
$$

Ahora, ¿qué ocurriría si reemplazamos los coeficientes e incógnitas por matrices de dimensión 2×2? Esto significa que las ecuaciones se transforman a la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
Y &= A_1\, X + B_1,\\
Y &= X\, A_2 + B_2,
\end{aligned}
$$

donde Y, X, A_1, A_2, B_1, y B_2 pertenecen a $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Note que el orden de la multiplicación de X por las matrices A_1 y A_2 no es un error, así se propone la generalización. Considere las siguientes definiciones para X, Y, A_k, y B_k, para $k \in \{1, 2\}$:

$$
X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix},\, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix},\, A_k = \begin{pmatrix} a_{k,1} & a_{k,3} \\ a_{k,2} & a_{k,4} \end{pmatrix},\ \text{y}\ B_k = \begin{pmatrix} b_{k,1} & b_{k,3} \\ b_{k,2} & b_{k,4} \end{pmatrix}.
$$

Al aplicar el mismo procedimiento anterior para el caso con coeficientes reales, uno no encuentra directamente un sistema de ecuaciones lineales en su forma tradicional. Sin embargo sí se puede re-escribir como un sistema de ecuaciones lineales de dimensión 4×4, solo considerando como incógnita la matriz X. Para el manejo del problema considere el siguiente orden de los coeficientes. Poner especial atención a los coeficientes del lado derecho ya que definen el orden de las filas de la matriz C y el orden de los x_i ya que define el orden de las columnas de la matriz C,

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} \\ c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & c_{4,4} \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{2,1} - b_{1,1} \\ b_{2,2} - b_{1,2} \\ b_{2,3} - b_{1,3} \\ b_{2,4} - b_{1,4} \end{pmatrix}.
$$

Notar que los coeficientes $c_{i,j}$, para $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, son desconocidos y los debe obtener. Para el desarrollo de las siguientes preguntas, considere las siguientes matrices:

$$
A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{1,4} \end{pmatrix},\, A_2 = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{pmatrix},\, B_1 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,3} \\ b_{1,2} & b_{1,4} \end{pmatrix},\ \text{y}\ B_2 = \begin{pmatrix} b_{2,1} & b_{2,3} \\ b_{2,2} & b_{2,4} \end{pmatrix}.
$$

(a) En el caso original, con coeficientes reales, se indicó que si $a_1 = a_2$ no tiene solución única el problema. ¿Es posible que exista solución única en el problema modificado si $A_1 = A_2$? Explique

(b)
- Si la matriz A_1 fuera la matriz nula, ¿sigue siendo no singular la matriz C?
- Si la matriz A_2 fuera la matriz nula, ¿sigue siendo no singular la matriz C?

(c)
- ¿Es siempre posible obtener la factorización LU de C?.

(d) Proponga e implemente un algoritmo que obtenga X basado en la factorización PALU de C.

Pauta

$$Y = A_1 X + B_1 \tag{1}$$
$$Y - A_1 X = B_1 \tag{2}$$

$$Y = X A_2 + B_2 \tag{3}$$
$$Y - X A_2 = B_2 \tag{4}$$

Representaciones matriciales de la ecuación 2 y 4:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{1,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,3} \\ b_{1,2} & b_{1,4} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{2,1} & b_{2,3} \\ b_{2,2} & b_{2,4} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Ahora visualizamos la ecuación $C x_{\text{flat}} = \hat{b}$:

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} \\ c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & c_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{2,1} - b_{1,1} \\ b_{2,2} - b_{1,2} \\ b_{2,3} - b_{1,3} \\ b_{2,4} - b_{1,4} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Revisamos los terminos necesarios para obtener la primera componente de $\hat{b}$ (anteriormente destacados):

$$b_{1,1} = y_1 - (a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,3} \cdot x_2) \tag{8}$$
$$b_{2,1} = y_1 - (a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,3} \cdot x_2) \tag{9}$$

Finalmente:

$$b_{2,1} - b_{1,1} = y_1 - y_1 - (a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,3} \cdot x_2) - (-(a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,3} \cdot x_2)) \tag{10}$$
$$b_{2,1} - b_{1,1} = -a_{2,1} \cdot x_1 - a_{2,3} \cdot x_2 + a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,3} \cdot x_2 \tag{11}$$

Repetimos el proceso para el resto de componentes del vector $\hat{b}$:

$$b_{2,2} - b_{1,2} = -x_2 \cdot a_{2,1} - x_4 \cdot a_{2,2} + a_{1,2} \cdot x_1 + a_{1,4} \cdot x_2 \tag{12}$$
$$b_{2,3} - b_{1,3} = -x_1 \cdot a_{2,3} - x_3 \cdot a_{2,4} + a_{1,1} \cdot x_3 + a_{1,3} \cdot x_4 \tag{13}$$
$$b_{2,4} - b_{1,4} = -x_2 \cdot a_{2,3} - x_4 \cdot a_{2,4} + a_{1,2} \cdot x_3 + a_{1,4} \cdot x_4 \tag{14}$$

Solo falta agrupar las componentes en el vector $\hat{b}$ y construir el producto matriz vector $C x_{\text{flat}}$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} - a_{2,1} & a_{1,3} & -a_{2,2} & 0 \\ a_{1,2} & a_{1,4} - a_{2,1} & 0 & -a_{2,2} \\ -a_{2,3} & 0 & a_{1,1} - a_{2,4} & a_{1,3} \\ 0 & -a_{2,3} & a_{1,2} & a_{1,4} - a_{2,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{2,1} - b_{1,1} \\ b_{2,2} - b_{1,2} \\ b_{2,3} - b_{1,3} \\ b_{2,4} - b_{1,4} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Y ya tenemos todos los coeficientes $c_{i,j}$.

(a) En el caso original, con coeficientes reales, se indicó que si $a_1 = a_2$ no tiene solución única el problema. ¿Es posible que exista solución única en el problema modificado si $A_1 = A_2$? Explique

Recuperamos la matriz C obtenida anteriormente pero quitamos el primer índice pues al ser ambas matrices iguales este es irrelevante:

$$C = \begin{pmatrix} a_1 - a_1 & a_3 & -a_2 & 0 \\ a_2 & a_4 - a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 - a_4 & a_3 \\ 0 & -a_3 & a_2 & a_4 - a_4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 & 0 \\ a_2 & a_4 - a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 - a_4 & a_3 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_{4,1}(1)$ – sumamos la fila 1 a la 4 multiplicada por 1

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 & 0 \\ a_2 & a_4 - a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 - a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que una fila se hizo 0, es decir, que un parametro x_i está libre, por lo que el sistema no tiene solución única. Recordar que esto implica que: $Det(C) = 0$.

(b)
- Si la matriz A_1 fuera la matriz nula, ¿sigue siendo no singular la matriz C?
  Reemplazamos nuevamente en C, pero ahora todos los coeficientes $a_{1,j} = 0$.

$$C = \begin{pmatrix} -a_{2,1} & 0 & -a_{2,2} & 0 \\ 0 & -a_{2,1} & 0 & -a_{2,2} \\ -a_{2,3} & 0 & -a_{2,4} & 0 \\ 0 & -a_{2,3} & 0 & -a_{2,4} \end{pmatrix}$$

propidad útil: Bloque de matrices cuadradas

Sean A, B, C, D matrices cuadradas, se cumple lo siguiente:

$$det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = det(A) \cdot det(D) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Y calculamos su determinante:

$$C = \begin{pmatrix} -a_{2,1} & 0 & -a_{2,2} & 0 \\ 0 & -a_{2,1} & 0 & -a_{2,2} \\ -a_{2,3} & 0 & -a_{2,4} & 0 \\ 0 & -a_{2,3} & 0 & -a_{2,4} \end{pmatrix} \rightarrow F_{3,1}(-\frac{a_{2,3}}{a_{2,1}})F_{4,2}(-\frac{a_{2,3}}{a_{2,1}}) \begin{pmatrix} -a_{2,1} & 0 & -a_{2,2} & 0 \\ 0 & -a_{2,1} & 0 & -a_{2,2} \\ 0 & 0 & -a_{2,4} + \frac{a_{2,3}a_{2,2}}{a_{2,1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{2,4} + \frac{a_{2,3}a_{2,2}}{a_{2,1}} \end{pmatrix}$$

$$det(C) = (-a_{2,1} \cdot -a_{2,1}) \cdot ((-a_{2,4} + \frac{a_{2,3}a_{2,2}}{a_{2,1}}) \cdot (-a_{2,4} + \frac{a_{2,3}a_{2,2}}{a_{2,1}}))$$

$$det(C) = (-a_{2,1} \cdot (-a_{2,4} + \frac{a_{2,3}a_{2,2}}{a_{2,1}})) \cdot (-a_{2,1} \cdot (-a_{2,4} + \frac{a_{2,3}a_{2,2}}{a_{2,1}}))$$

$$det(C) = (a_{2,1}a_{2,4} - a_{2,3}a_{2,2}) \cdot (a_{2,1}a_{2,4} - a_{2,3}a_{2,2})$$

$$det(C) = det(A_2) \cdot det(A_2)$$

$$det(C) = det(A_2)^2$$

- Si la matriz A_2 fuera la matriz nula, ¿sigue siendo no singular la matriz C? Del mismo modo reemplazamos en C:

$$C = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & 0 & 0 \\ a_{1,2} & a_{1,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{1,1} & a_{1,3} \\ 0 & 0 & a_{1,2} & a_{1,4} \end{pmatrix}$$

  Se puede realizar el mismo análisis que en caso anterior.

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

$$det(C) = det \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = det(A_1) \cdot det(A_1) = det(A_1)^2$$

Por lo tanto se comprueba en ambos casos que si una matriz tiene determinante 0 la no-singularidad de C depente de la no-singularidad de la matriz restante.

(c) OJO: recordad la motivación del uso de PALU: el pivotar los coeficientes evita la aparición de coeficientes no nulos. Como ejemplo, retomando el caso de $A_1 = A_2$ solo mantengamos que $a_{1,1} = a_{2,1}$: en este caso se puede notar que A_1 y A_2 pueden ser distintas en el resto de coeficientes y ser no-singulares a la vez, pero el primer pivote resultara en 0 lo que romperá el algorítmo.

(d) como ya se revisó en preguntas anteriores. Los únicos pasos adicionales son la obtención de la matriz C a partir de A_1 y A_2, el vector $\hat{b}$ a partir de aplanar y restar las matrices B_1 y B_2, para finalmente resturar x a partir de x_{flat}. Así el algorítmo sería el siguiente:

Data: A_1,A_2,B_1,B_2
Result: X
b_{hat}=flat($B2$)−flat($B1$);
C=ConstructC($A1$,$A2$);
P, L, U=ComputePLU(C);
c=ForwardSub(L, $P \cdot b_{hat}$);
x_{flat}=BackwardSub(U,c);
X=GetMatrix(x_{flat});
return X;

Algorithm 1: Algorítmo sistema de ecuaciones de sistema de ecuaciones