Ayudantía

SCT - Semana - 06

ALU, PALU e Iteración de Jacobi

Sugiero leer los extras 1, 2 y 3 adjuntos a esta ayudantía para entender y resolver algunos problemas. El extra 3 es específico solo para esta ayudantía (convergencia de Jacobi), pero **los extras 1 y 2 (sistemas de ecuaciones donde los términos son funciones u otras matrices) seguirán siendo relevantes para todo el resto del contenido de Computación Científica.**

1. Imagine que usted estudió Biología y, recientemente, comenzó a estudiar, junto con un compañero, un ecosistema con conejos y zorros. En el mes t, hay c_t conejos y z_t zorros. Cada mes, los conejos se reproducen rápidamente, pero son devorados por los zorros. Estos últimos, a su vez, se reproducen lentamente y necesitan alimentarse de conejos para subsistir. Específicamente, en cada mes que transcurre, las poblaciones de conejos y zorros varían según estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_{t+1} &= 1.5c_t - 0.5z_t \\ z_{t+1} &= 0.5c_t + 0.5z_t \end{aligned}$$

Este es el 5° mes ($t = 5$) en el cual ustedes dos estudian este ecosistema. Usted necesita saber cuántos conejos y zorros había cuando comenzaron a estudiarlo hace 5 meses ($t = 0$), pero su compañero, quien estaba encargado anteriormente de analizar este ecosistema, perdió esta información. Sin embargo, ahora usted sabe que hay $c_5 = 50$ conejos y $z_5 = 40$ zorros. Usando las ecuaciones anteriores, usted puede calcular la cantidad c_0 de conejos y la cantidad z_0 de zorros que había hace 5 meses.

a) Plantee un sistema de ecuaciones para encontrar $\mathbf{x}_4 = (c_4 \quad z_4)^T$: la cantidad de conejos y zorros que había el mes anterior (4° mes). Luego, resuelva el sistema.

Antes que nada, el sistema de ecuaciones lineales se puede escribir matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix}$$

Para el resto del ejercicio, es conveniente reemplazar los decimales por fracciones:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix}$$

Se puede definir una matriz A y un vector $\mathbf{x}_t$ de esta manera:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} c_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

Así, el sistema se puede escribir como $A\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t+1}$.

Eligiendo $t = 4$ se obtiene $A\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_5$, donde $\mathbf{x}_5$ es conocido: $\mathbf{x}_5 = (c_5 \quad z_5)^T = (50 \quad 40)^T$.

Por lo tanto, se debe resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_4 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Una manera de resolver este sistema es usando la **eliminación gaussiana**. Para ello se puede formar la matriz ampliada $(A|\mathbf{x}_5)$ e ir aplicando operaciones elementales fila (donde la operación $L_{ij}(c)$ significa "sumar a la fila i una copia de la fila j multiplicada por c", y $L_i(c)$ significa "multiplicar la fila i por c"):

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 50 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 40 \end{array}\right) \overset{L_{21}(\frac{-1}{3})}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 50 \\ \frac{1}{2}+\frac{-1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{6} & 40+\frac{-50}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 50 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{70}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 50 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{70}{3} \end{array}\right) \overset{L_{2}(\frac{3}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 50 \\ 0 & 1 & 35 \end{array}\right) \overset{L_{12}(\frac{1}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2}+0 & \frac{-1}{2}+\frac{1}{2} & 50+\frac{35}{2} \\ 0 & 1 & 35 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & 0 & \frac{135}{2} \\ 0 & 1 & 35 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & 0 & \frac{135}{2} \\ 0 & 1 & 35 \end{array}\right) \overset{L_{1}(\frac{2}{3})}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 45 \\ 0 & 1 & 35 \end{array}\right)$$

Así, se obtiene la siguiente solución:

$$c_4 = 45$$
$$z_4 = 35$$

b) Plantee el sistema de ecuaciones que debe resolver para encontrar $\mathbf{x}_0 = (c_0 \quad z_0)^T$ a partir de la información $\mathbf{x}_5 = (c_5 \quad z_5)^T = (50 \quad 40)^T$. ¿Existe algún truco para resolverlo más eficientemente? Si es así, explique cuál es ese truco y úselo para encontrar c_0 y z_0.
Hint: try decomposing your matrix A conveniently.

En el ítem anterior se mostró que, usando la matriz A y el vector de poblaciones $\mathbf{x}_5$ en el mes 5, se pudo retroceder en el tiempo 1 mes y despejar $\mathbf{x}_4$. Este proceso de retroceder en el tiempo 1 mes se puede repetir 5 veces hasta llegar a $\mathbf{x}_0$, de esta manera:

$$A\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_5$$
$$A\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_4$$
$$A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3$$
$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$
$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$$

En la 1° ecuación se conoce $\mathbf{x}_5$ y con este vector se puede despejar $\mathbf{x}_4$ (lo cual ya se hizo en el ítem anterior). Este nuevo vector $\mathbf{x}_4$ se puede reutilizar en la 2° ecuación para despejar $\mathbf{x}_3$, el cual a su vez se puede usar en la 3° ecuación para despejar $\mathbf{x}_2$, y así hasta encontrar $\mathbf{x}_0$.

Para expresar $\mathbf{x}_0$ directamente en términos de la matriz A y el vector $\mathbf{x}_5$, se puede combinar las 5 ecuaciones, sustituyendo $\mathbf{x}_4 = A\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2$, y así:

$$\mathbf{x}_5 = A\mathbf{x}_4 = A(A\mathbf{x}_3) = A(A(A\mathbf{x}_2)) = A(A(A(A\mathbf{x}_1))) = A(A(A(A(A\mathbf{x}_0))))$$

por lo que se puede decir que $A^5\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_5$.

Para despejar $\mathbf{x}_0$, se debe resolver secuencialmente las 5 ecuaciones $A\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t+1}$ planteadas anteriormente. En todas ellas se puede usar **eliminación gaussiana** para despejar el vector $\mathbf{x}_t$ respectivo. Sin embargo, como en todas las ecuaciones se usa la misma matriz A, esta siempre se va a transformar en la misma matriz triangular superior U:

$$(A|\mathbf{x}_{t+1}) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & c_{t+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & z_{t+1} \end{array}\right) \overset{L_{21}(\frac{-1}{3})}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & c_{t+1} \\ 0 & \frac{2}{3} & z_{t+1}-\frac{1}{3}c_{t+1} \end{array}\right) = (U|\mathbf{w}_{t+1})$$

por lo que, en vez de repetir 5 veces esta transformación de A a U, se puede realizar solo 1 vez, almacenar en memoria el resultado de este proceso y reutilizarlo más adelante, **mediante la descomposición ALU**.

La operación $L_{21}(\frac{-1}{3})$ se puede representar mediante la siguiente matriz, que actúa sobre A por la izquierda:

$$L_{21}\left(\frac{-1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que esta transformación de A a la matriz triangular superior U se puede representar matricialmente de esta manera:

$$\left[L_{21}\left(\frac{-1}{3}\right)\right] A = U$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Se puede despejar A de la ecuación $\left[L_{21}\left(\frac{-1}{3}\right)\right] A = U$, multiplicando por la izquierda en ambos lados por la inversa de $L_{21}(\frac{-1}{3})$. Esta inversa es $L_{21}(\frac{1}{3})$ (sumar a la 2° fila $\frac{1}{3}$ de la 1°, deshace la operación original de sumar a la 2° fila $\frac{-1}{3}$ de la 1°), por lo que se puede despejar A así:

$$A = \left[L_{21}\left(\frac{1}{3}\right)\right] U$$
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Con eso se llega a la descomposición $A = LU$, donde $L = L_{21}(\frac{1}{3})$ es una matriz triangular inferior, y U es triangular superior.
Finalmente, en las 5 ecuaciones originales se puede reemplazar $A = LU$:

$$LU\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_5$$
$$LU\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_4$$
$$LU\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3$$
$$LU\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$
$$LU\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$$

En la 1° ecuación se puede hacer la sustitución $U\mathbf{x}_4 = \mathbf{y}_4$, llegando a la ecuación $L\mathbf{y}_4 = \mathbf{x}_5$, de donde se puede despejar $\mathbf{y}_4$ usando *Forward Substitution.* Luego, en la nueva ecuación $U\mathbf{x}_4 = \mathbf{y}_4$, se puede reutilizar el valor recién encontrado de $\mathbf{y}_4$ para despejar $\mathbf{x}_4$, mediante *Backward Substitution.*

Se puede realizar un proceso similar para las demás ecuaciones (despejar $L\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_{t+1}$ mediante *Forward Substitution*, y luego $U\mathbf{x}_t = \mathbf{y}_t$ mediante *Backward Substitution*), hasta llegar al valor inicial $\mathbf{x_0} = (c_0 \quad z_0)^T = (25 \quad 15)^T$.

2. Para las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, determine si la iteración de Jacobi converge al usarla para aproximar la solución $\mathbf{x}$ al sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = (1 \quad 1)^T$, usando $\mathbf{x}_0 = (0 \quad 0)^T$ como *initial guess*. ¿Por qué (no) converge? Realice 3 iteraciones del método para cada matriz A.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$

Esta matriz es estrictamente diagonal-dominante (de ahora en adelante, EDD), pues la magnitud de cada elemento en su diagonal (1 y 1) es mayor a la suma de las magnitudes del resto de los elementos de la fila respectiva (0.5 y 0.5, respectivamente). **Hay un teorema que asegura que, si A es EDD, entonces Jacobi converge.** Para más detalles, revisa el extra 3.

Para realizar el método de Jacobi, se debe descomponer $A = L + D + U$, donde:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Además, $\mathbf{b} = (1 \quad 1)^T$ y $\mathbf{x}_0 = (0 \quad 0)^T$.

Iteración 1

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= D^{-1}\left(\mathbf{b} - (L+U)\mathbf{x}_0\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= I^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Iteración 2

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= D^{-1}\left(\mathbf{b} - (L+U)\mathbf{x}_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= I^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Iteración 3

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3 &= D^{-1}\left(\mathbf{b} - (L+U)\mathbf{x}_2\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right) \\ &= I^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.75 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}$

Esta matriz no es EDD, porque, en la primera fila, la magnitud del elemento diagonal (1) es menor a la suma de las magnitudes del resto de la fila (2).

Sin embargo, Jacobi aún podría converger. **Se debe construir la matriz de convergencia** $M = -D^{-1}(L+U)$ **y analizar si sus valores propios tienen magnitud menor a 1.** Para entender por qué, revisa el apunte y el extra 3.

$$\begin{aligned} M &= -D^{-1}(L+U) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -0.25 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los valores propios de M son aquellos valores λ que cumplen que $\det(M - \lambda I) = 0$:

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= 0 \\ \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -0.25 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ -0.25 & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (-\lambda)(-\lambda) - (-2)(-0.25) &= 0 \\ \lambda^2 - 0.5 &= 0 \\ \lambda^2 &= 0.5 \\ \lambda &= \pm\sqrt{0.5} \end{aligned}$$

Las magnitudes de ambos valores propios son $|\lambda| = \sqrt{0.5} < 1$. **Esta condición asegura la convergencia del método de Jacobi.**

Iteración 1

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= D^{-1}\left(\mathbf{b} - (L+U)\mathbf{x}_0\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= I^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Iteración 2

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= D^{-1}\left(\mathbf{b} - (L+U)\mathbf{x}_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= I^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0.25 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0.75 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Iteración 3

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_3 &= D^{-1}\left(\mathbf{b} - (L+U)\mathbf{x}_2\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0.75 \end{pmatrix} \right) \\
&= I^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.25 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Esta matriz tampoco es EDD, porque $1 < 2$. Se debe construir la matriz de convergencia $M = -D^{-1}(L+U)$:

$$
\begin{aligned}
M &= -D^{-1}(L+U) \\
&= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Los valores propios de M son aquellos valores λ que cumplen que $\det(M - \lambda I) = 0$:

$$
\begin{aligned}
\det(M - \lambda I) &= 0 \\
\det\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) &= 0 \\
\det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
(-\lambda)(-\lambda) - (-2)(-2) &= 0 \\
\lambda^2 - 4 &= 0 \\
\lambda^2 &= 4 \\
\lambda &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Las magnitudes de ambos valores propios son $|\lambda| = 2 > 1$. **Debido a esto, el método de Jacobi no converge.**

Iteración 1

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= D^{-1}\left(\mathbf{b} - (L+U)\mathbf{x}_0\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= I^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Iteración 2

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_2 &= D^{-1}\left(\mathbf{b} - (L+U)\mathbf{x}_1\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= I^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Iteración 3

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_3 &= D^{-1}\left(\mathbf{b} - (L+U)\mathbf{x}_2\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= I^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales para $f_1(x)$ y $f_2(x)$:

$$
\begin{aligned}
x f_1(x) + f_2(x) + \sin(x) f_2(x) &= \exp(x) \\
f_1(x) + x^3 f_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2}
\end{aligned}
$$

a) Realice 2 iteraciones del método de Jacobi para el sistema de ecuaciones lineales (15) mediante un *initial guess* $\mathbf{f}^{(0)}(x) = \left(f_1^{(0)}(x), f_2^{(0)}(x)\right) = (0,0)$, donde el superíndice indica número de iteración.

El sistema de ecuaciones lineales, donde las incógnitas son las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, se puede expresar así:

$$
\begin{array}{rcrcl}
x f_1(x) & + & (1+\sin(x)) f_2(x) & = & \exp(x) \\
1 f_1(x) & + & x^3 f_2(x) & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2}
\end{array}
$$

Matricialmente, queda en esta forma:

$$
\begin{pmatrix} x & 1+\sin(x) \\ 1 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x) \\ 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix}
$$

A partir de la forma matricial, se puede definir A, $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ de esta manera:

$$
A(x) = \begin{pmatrix} x & 1+\sin(x) \\ 1 & x^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} \exp(x) \\ 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix}
$$

a partir de lo cual el sistema puede quedar expresado como $A(x)\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x)$ o, si no se evalúan las funciones A, $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ en un x, simplemente $A\mathbf{f} = \mathbf{g}$. Como A y $\mathbf{g}$ son conocidas, el objetivo es despejar la función incógnita $\mathbf{f}$.

El método de Jacobi plantea descomponer la matriz A en la suma $L + D + U$, donde:

- D es una matriz que contiene la diagonal de A.
- U es una matriz que contiene los elementos por encima de la diagonal de A.
- L es una matriz que contiene los elementos por debajo de la diagonal de A.

Para este caso particular, podemos definir L, D y U de esta manera:

$$L(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^3 \end{pmatrix}, \quad U(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1+\sin(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, el método de Jacobi plantea transformar $A\mathbf{f} = \mathbf{g}$ de esta manera:

$$\begin{aligned} A\mathbf{f} &= \mathbf{g} \\ (L+D+U)\mathbf{f} &= \mathbf{g} \\ L\mathbf{f} + D\mathbf{f} + U\mathbf{f} &= \mathbf{g} \\ (L+U)\mathbf{f} + D\mathbf{f} &= \mathbf{g} && / - (L+U)\mathbf{f} \\ D\mathbf{f} &= \mathbf{g} - (L+U)\mathbf{f} && / D^{-1}(\cdot) \\ \mathbf{f} &= D^{-1}\left[\mathbf{g} - (L+U)\mathbf{f}\right] \end{aligned}$$

donde D^{-1} es fácil de calcular debido a que D es una matriz diagonal (sin embargo, esta matriz solo existe si $x \neq 0$. Si $x = 0$, no se puede usar el método de Jacobi):

$$(D(x))^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x^3} \end{pmatrix}, \quad L(x) + U(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1+\sin(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con la ecuación final, el método de Jacobi propone realizar la siguiente iteración partiendo de un *initial guess* $\mathbf{f}^{(0)}$:

$$\mathbf{f}^{(i+1)} = D^{-1}\left[\mathbf{g} - (L+U)\mathbf{f}^{(i)}\right]$$

Realizando 2 iteraciones del método de Jacobi:

En ambas iteraciones, se va de adentro hacia afuera: primero, se calcula $(L+U)\mathbf{f}^{(i)}$. Luego, ese valor se usa para calcular $\mathbf{g} - (L+U)\mathbf{f}^{(i)}$. Finalmente, este resultado es multiplicado por D^{-1} por la izquierda para obtener $\mathbf{f}^{(i+1)} = D^{-1}\left[\mathbf{g} - (L+U)\mathbf{f}^{(i)}\right]$.

- **Iteración 1:** se parte con $\mathbf{f}^{(0)}(x) = (0 \quad 0)^T$. Como $\mathbf{f}^{(0)}$ es la función nula, $(L+U)\mathbf{f}^{(0)}$ también lo es:

$$(L(x)+U(x))\mathbf{f}^{(0)}(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1+\sin(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Entonces el cálculo de $\mathbf{g} - (L+U)\mathbf{f}^{(0)}$ es simplemente $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{g}(x) - (L(x)+U(x))\mathbf{f}^{(0)}(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} \exp(x) \\ 1 + x + \dfrac{x}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \exp(x) \\ 1 + x + \dfrac{x}{2} \end{pmatrix}$$

  Finalmente, se calcula $\mathbf{f}^{(1)} = D^{-1}\left[\mathbf{g} - (L+U)\mathbf{f}^{(0)}\right]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(x) \quad &= \quad (D(x))^{-1}\left[\mathbf{g}(x) - (L(x)+U(x))\mathbf{f}^{(0)}(x)\right] \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \exp(x) \\ 1 + x + \dfrac{x}{2} \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\exp(x)}{x} \\ \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **Iteración 2:** se usa el valor $\mathbf{f}^{(1)}$ obtenido anteriormente para calcular $(L+U)\mathbf{f}^{(1)}$:

$$(L(x)+U(x))\mathbf{f}^{(1)}(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1+\sin(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\exp(x)}{x} \\ \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} (1+\sin(x))\left(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x}\right) \\ \dfrac{\exp(x)}{x} \end{pmatrix}$$

Luego se calcula $\mathbf{g}-(L+U)\mathbf{f}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(x)-(L(x)+U(x))\mathbf{f}^{(1)}(x) &= \begin{pmatrix} \exp(x) \\ 1+x+\dfrac{x}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (1+\sin(x))\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2x}\right) \\ \dfrac{\exp(x)}{x}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \exp(x)-(1+\sin(x))\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2x}\right) \\ 1+x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{\exp(x)}{x}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente, se calcula $\mathbf{f}^{(2)} = D^{-1}\left[\mathbf{g}-(L+U)\mathbf{f}^{(1)}\right]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(2)}(x) &= (D(x))^{-1}\left[\mathbf{g}(x)-(L(x)+U(x))\mathbf{f}^{(1)}(x)\right] \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x^3}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(x)-(1+\sin(x))\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2x}\right) \\ 1+x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{\exp(x)}{x}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\exp(x)}{x}-(1+\sin(x))\left(\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{2x^2}\right) \\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{\exp(x)}{x^4}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Obtenga los valores propios de la matriz de convergencia para el método de Jacobi. *Hint: The convergence matrix for the Jacobi matrix is $M = -D^{-1}(L+U)$, but recall that L and U have a different meaning here.*

En la expresión de la iteración de Jacobi, se puede distribuir la multiplicación por la matriz D^{-1}:

$$\mathbf{f}^{(i+1)} = D^{-1}\left[\mathbf{g}-(L+U)\mathbf{f}^{(i)}\right]$$
$$\mathbf{f}^{(i+1)} = D^{-1}\mathbf{g}-D^{-1}(L+U)\mathbf{f}^{(i)}$$

Definiendo el vector $\mathbf{r} = D^{-1}\mathbf{g}$ y la matriz $M = -D^{-1}(L+U)$, la última expresión se puede reescribir como:

$$\mathbf{f}^{(i+1)} = \mathbf{r}+M\mathbf{f}^{(i)}$$

La matriz M es la llamada **"matriz de convergencia"**, pues de sus normas matriciales y **valores propios** depende si la iteración de Jacobi converge o no. **Para entender por qué, revisa el extra 3, donde se explica esto en profundidad.**

Primero se debe calcular $M = -D^{-1}(L+U)$ para encontrar sus valores propios:

$$M(x) = -(D(x))^{-1}(L(x)+U(x)) = -\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1+\sin(x) \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-(1+\sin(x))}{x} \\ \dfrac{-1}{x^3} & 0\end{pmatrix}$$

Luego, los valores propios de M son aquellos valores λ_i que solucionen la siguiente ecuación polinomial sobre la variable λ, $\det(M-\lambda I)=0$:

$$\det(M(x)-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \dfrac{-(1+\sin(x))}{x} \\ \dfrac{-1}{x^3} & -\lambda\end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)-\left(\dfrac{-(1+\sin(x))}{x}\right)\left(\dfrac{-1}{x^3}\right) = \lambda^2-\dfrac{1+\sin(x)}{x^4} = 0$$

Los valores que solucionan la ecuación polinomial $\lambda^2 - \frac{1+\sin(x)}{x^4} = 0$ son:

$$\lambda_1 = \frac{+\sqrt{1+\sin(x)}}{x^2}, \quad \lambda_2 = \frac{-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^2}$$

c) Determine para qué rango/s de valores de x el método Jacobi converge para el sistema de ecuaciones lineales. ***Hint:*** *You should be using the eigenvalues you just computed!*

Para que el método de Jacobi converja, se debe cumplir que la mayor de las magnitudes de los valores propios λ_1 y λ_2 de M sea menor a 1. Afortunadamente, ambas magnitudes son iguales y se cumple que:

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \left|\frac{\sqrt{1+\sin(x)}}{x^2}\right| = \frac{\sqrt{1+\sin(x)}}{x^2}$$

pues $1+\sin(x) \geq 0$, así que $\sqrt{1+\sin(x)}$ es un número real (no imaginario) mayor o igual a 0, y además $x^2 > 0$, pues una restricción necesaria para que esta expresión esté definida es que $x \neq 0$.

Considerando lo anterior, solo se debe encontrar los valores de x tales que $\frac{\sqrt{1+\sin(x)}}{x^2} < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+\sin(x)}}{x^2} &< 1 \\ \sqrt{1+\sin(x)} &< x^2 \\ 1+\sin(x) &< x^4 \\ 1+\sin(x) - x^4 &< 0 \end{aligned}$$

El problema es que no se puede despejar algebraicamente x de la inecuación anterior. Sin embargo, **existen 2 valores para x tales que $1+\sin(x)-x^4 = 0$ y se pueden aproximar mediante un método iterativo**, y a partir de ellos deducir el conjunto de valores posibles para x.

Por ejemplo, si se define $h(x) = 1+\sin(x)-x^4$, se puede usar el método de la bisección, sabiendo que $h(0) = 1 > 0$, $h(2) = 1+\sin(2)-16 < 0$, y $h(-1) = 1+\sin(-1)-1 < 0$, por lo que se puede iterar en el intervalo $[-1, 0]$ para encontrar una raíz negativa x_-, y en el intervalo $[0, 2]$ para encontrar una raíz positiva x_+.

Realizando las iteraciones en ambos intervalos se encuentran las siguientes raíces (aproximadas a 5 decimales):

$$x_- = -0.75081, \quad x_+ = 1.17770$$

Finalmente, se sabe que $h(0) > 0$, y 0 está entre x_- y x_+, así que se deduce que para todo $x \in [x_-, x_+]$ se cumple que $h(x) \geq 0$. Sin embargo, se busca lo contrario: que $h(x) = 1+\sin(x)-x^4 < 0$, según la última inecuación. Por lo tanto, se puede concluir que los valores de x que logran que el método de Jacobi converja son:

$$x \in \;]-\infty, -0.75081[\;\cup\;]1.17770, +\infty[$$

4. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, es decir, tenemos matrices y vectores donde sus elementos pueden ser número complejos. El uso de un algoritmo tradicional exige que debamos ser capaces de representar y manipular números complejos, **pero eso no se estudiará en este curso**.

Una forma de manejar este tipo de situaciones es descomponer nuestro sistema de ecuaciones lineales en su parte real e imaginaria de la siguiente forma:

$$(A_r + iA_i)(\mathbf{x}_r + i\mathbf{x}_i) = \mathbf{b}_r + i\mathbf{b}i$$

donde el subíndice r denota la parte real, el subíndice i denota la parte imaginaria, e $i^2 = -1$.

a) Construya un nuevo sistema de ecuaciones lineales en el cual no se requiera manipulación explicita de números complejos. Describa claramente su nueva matriz, el vector de incógnitas y el lado derecho. *Pista: dos valores complejos son iguales si sus partes reales son iguales, y sus imaginarias también.*

Dos números complejos $a+bi$ y $c+di$ son iguales si y solo si se cumple que $a=c$ y $b=d$ al mismo tiempo. Es importante notar que, de una sola ecuación compleja ($a+bi=c+di$) surgen 2 ecuaciones reales ($a=c$ y $b=d$).

La misma idea aplica cuando, en vez de números, tenemos vectores o matrices. Para aplicar el mismo concepto, hay que desarrollar la expresión propuesta:

$$\begin{aligned}(A_r+iA_i)(\mathbf{x}_r+i\mathbf{x}_i)&=\mathbf{b}_r+i\mathbf{b}_i\\ A_r\mathbf{x}_r+A_ri\mathbf{x}_i+iA_i\mathbf{x}_r+i^2A_i\mathbf{x}_i&=\mathbf{b}_r+i\mathbf{b}_i\\ A_r\mathbf{x}_r+iA_r\mathbf{x}_i+iA_i\mathbf{x}_r-A_i\mathbf{x}_i&=\mathbf{b}_r+i\mathbf{b}_i\\ (A_r\mathbf{x}_r-A_i\mathbf{x}_i)+i(A_i\mathbf{x}_r+A_r\mathbf{x}_i)&=\mathbf{b}_r+i\mathbf{b}_i\end{aligned}$$

y de esta ecuación compleja se puede obtener un sistema de 2 ecuaciones reales, igualando real con real e imaginario con imaginario:

$$\begin{cases}A_r\mathbf{x}_r-A_i\mathbf{x}_i &=\mathbf{b}_r\\ A_i\mathbf{x}_r+A_r\mathbf{x}_i &=\mathbf{b}_i\end{cases}$$

Usando lo descrito en el extra 2 (MATRICES POR BLOQUES), se puede expresar este nuevo sistema así:

$$\begin{pmatrix}A_r & -A_i\\ A_i & A_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_r\\ \mathbf{x}_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_r\\ \mathbf{b}_i\end{pmatrix}$$

que se puede expresar como $M\mathbf{u}=\mathbf{k}$, donde $M=\begin{pmatrix}A_r & -A_i\\ A_i & A_r\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $\mathbf{k}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_r\\ \mathbf{b}_i\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n}$ y, por lo tanto, $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_r\\ \mathbf{x}_i\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n}$.

b) Considerando ahora que A_r es una matriz diagonal y que $|(A_r)_{k,k}|>\sum_{j=1}^n|(A_i)_{k,j}|$ para todo $k\in\{1,2,...,n\}$, proponga un algoritmo iterativo que asegure convergencia para el sistema de ecuaciones lineales propuesto en la parte (a). Usted debe demostrar que el algoritmo propuesto convergerá. Note que, en la desigualdad anterior, la matriz que está al lado izquierdo es diferente a la matriz que está al lado derecho.

Un ejemplo ayudará a entender mejor la situación. Para $n=3$, $A_r=\begin{pmatrix}r_1&0&0\\0&r_2&0\\0&0&r_3\end{pmatrix}$, y $A_i=\begin{pmatrix}n_{11}&n_{12}&n_{13}\\n_{21}&n_{22}&n_{23}\\n_{31}&n_{32}&n_{33}\end{pmatrix}$.

Entonces:

$$M=\begin{pmatrix}A_r & -A_i\\ A_i & A_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1&0&0&-n_{11}&-n_{12}&-n_{13}\\0&r_2&0&-n_{21}&-n_{22}&-n_{23}\\0&0&r_3&-n_{31}&-n_{32}&-n_{33}\\n_{11}&n_{12}&n_{13}&r_1&0&0\\n_{21}&n_{22}&n_{23}&0&r_2&0\\n_{31}&n_{32}&n_{33}&0&0&r_3\end{pmatrix}$$

Las n desigualdades $|(A_r)_{k,k}|>\sum_{j=1}^n|(A_i)_{k,j}|, \forall k\in\{1,2,...,n\}$ se traducen en este caso a las 3 desigualdades

$$\begin{aligned}|r_1|&>|n_{11}|+|n_{12}|+|n_{13}|\\ |r_2|&>|n_{21}|+|n_{22}|+|n_{23}|\\ |r_3|&>|n_{31}|+|n_{32}|+|n_{33}|\end{aligned}$$

y, si observas bien la matriz M dada como ejemplo, las desigualdades implican que cada uno de los elementos de su diagonal $(r_1,r_2,r_3,r_1,r_2,r_3)$ tiene magnitud mayor que la suma absoluta del resto de los elementos de su fila. Es decir, M es **diagonal-dominante**, y esto ocurre para todo n natural.

Al ser M diagonal-dominante, **se puede usar el método de Jacobi**, pues tiene convergencia asegurada al usarse sobre matrices diagonal-dominantes.

Para ello, se debe descomponer $M = L + D + U$, donde

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{11} & n_{12} & n_{13} & 0 & 0 & 0 \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & 0 & 0 & 0 \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_r \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -n_{11} & -n_{12} & -n_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -n_{21} & -n_{22} & -n_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -n_{31} & -n_{32} & -n_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -A_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{0}$ denota la matriz nula de $n \times n$.

Nota: el hecho de que $L = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} A_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_r \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -A_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, es pura coincidencia. Esto solo ocurrió porque las matrices A_r en la diagonal de M eran, en sí mismas, diagonales. Propongo demostrar que, si $A_r = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$, no se daría la coincidencia de antes: por ejemplo, $D \neq \begin{pmatrix} A_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_r \end{pmatrix}$.

Una vez descompuesto $M = L + D + U$, el método de Jacobi propone arreglar el sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} M\mathbf{u} &= \mathbf{k} \\ (L + D + U)\mathbf{u} &= \mathbf{k} \\ L\mathbf{u} + D\mathbf{u} + U\mathbf{u} &= \mathbf{k} \\ D\mathbf{u} &= \mathbf{k} - (L + U)\mathbf{u} \\ \mathbf{u} &= D^{-1}(\mathbf{k} - (L + U)\mathbf{u}) \end{aligned}$$

El método de Jacobi consiste en realizar la siguiente iteración:

$$\mathbf{u}_{k+1} = D^{-1}\mathbf{k} - (L + U)\mathbf{u}_k)$$

la cual, como se mencionó anteriormente, tiene convergencia asegurada debido a que M es diagonal-dominante. Una vez se encuentre el punto fijo $\mathbf{u}_\infty$, se puede recuperar $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + i\mathbf{x}_i$, sabiendo que $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_i \end{pmatrix}$.

Anexo: como M es una matriz de $2n \times 2n$, puede que sea muy costoso almacenarla explícitamente. Una forma de reducir el costo en memoria es aprovechar las formas que tienen las matrices, de esta forma:

$$\mathbf{u}_{k+1} = D^{-1}(\mathbf{k} - (L+U)\mathbf{u}_k)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{r,k+1} \\ \mathbf{x}_{i,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_r \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{b}_r \\ \mathbf{b}_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -A_i \\ A_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{r,k} \\ \mathbf{x}_{i,k} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{r,k+1} \\ \mathbf{x}_{i,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_r^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{b}_r \\ \mathbf{b}_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -A_i \mathbf{x}_{i,k} \\ A_i \mathbf{x}_{r,k} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{r,k+1} \\ \mathbf{x}_{i,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_r + A_i \mathbf{x}_{i,k} \\ \mathbf{b}_i - A_i \mathbf{x}_{r,k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{r,k+1} \\ \mathbf{x}_{i,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r^{-1} (\mathbf{b}_r + A_i \mathbf{x}_{i,k}) \\ A_r^{-1} (\mathbf{b}_i - A_i \mathbf{x}_{r,k}) \end{pmatrix}$$

De esta manera, solo se requiere almacenar explícitamente A_r y A_i. De nuevo, recuerda que esto funciona solamente porque A_r ya era en sí una matriz diagonal.