Ayudantía
SCT - Semana - 13

Método del Residuo Mínimo Generalizado (GMRes)

1. Realice 2 iteraciones de GMRes en este sistema de ecuaciones, usando como *initial guess* $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$. Reporte las 2 aproximaciones encontradas a la solución.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B,\ C,\ Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Considere la siguiente variante de la ecuación de Sylvester:

$$AZ + \mathrm{Conj}(Z)B = C \tag{1}$$

donde A es simétrica y definida positiva, B es Hermitiana, C es una matriz no nula y $\mathrm{Conj}(\cdot)$ corresponde al operador de conjugación, es decir, si $z = x + iy$, donde x e y son números reales, e $i^2 = -1$, entonces $\mathrm{Conj}(z) = x - iy$ y, en el caso matricial, se aplica elemento a elemento.

Se sugiere considerar $Z = X + iY$, $B = B_1 + iB_2$ y $C = C_1 + iC_2$, donde $X,\ Y,\ B_1,\ B_2,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

El desafío es proponer un algoritmo que solo dependa de aritmética real para encontrar $Z = X + iY$. Es decir, es suficiente obtener X e Y. Recuerde que no está permitido obtener la inversa explícita de ninguna de las matrices involucradas: lo que se debe hacer es resolver el sistema de ecuaciones lineales asociado.

a) Dada la restricción de que solo se puede utilizar aritmética real, reescriba la ecuación 1 para que solo dependa de aritmética real. *Hint: You should get a linear system of equations where the unknowns are the matrices X and Y.*

b) Proponga e implemente, en Python con NumPy, un algoritmo para encontrar la solución $Z = X + iY$.