Ayudantía
SCT - Semana - 08

Interpolación Polinomial de Puntos: Vandermonde, Lagrange y Baricéntrica

1. Se registra la altura $h(t)$ de un cohete durante su fase de ascenso en 3 tiempos distintos:

Tiempo t (s)	Altitud $h(t)$ (m)
0	0
5	7.5
10	10

Encuentra el polinomio interpolador $P(t)$ usando la **matriz de Vandermonde** para modelar la altitud del cohete.

Los 3 puntos (t_i, h_i) se pueden interpolar con un polinomio de grado 2, debido a que este tiene 3 coeficientes: $P(t) = a + bt + ct^2$. Evaluar este polinomio en cada uno de los puntos entrega 3 ecuaciones lineales $a + bt_i + ct_i^2 = h_i$ con 3 incógnitas a, b, c:

$$\begin{aligned} a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 &= 0 \\ a + b \cdot 5 + c \cdot 5^2 &= 7.5 \\ a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 &= 10 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden expresar matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & 10 & 10^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7.5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

La matriz $V_3 = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & 10 & 10^2 \end{pmatrix}$ es la llamada "matriz de Vandermonde" asociada al sistema.

Al resolver el sistema anterior, se obtiene $a = 0$, $b = 2$ y $c = 1/10$. Entonces, el polinomio obtenido es:

$$P(t) = 2t - \frac{1}{10}t^2$$

a) ¿Cuál es la altitud estimada a los 6 segundos?

La altitud estimada es $P(6) = 2 \cdot 6 - \frac{1}{10}6^2 = 12 - 3.6 = 8.4$ metros.

b) ¿En qué momento se estima que el cohete volverá a tocar el suelo?

Se debe encontrar el tiempo tal que la altura sea 0, es decir, $P(t) = 2t - \frac{1}{10}t^2 = 0$. Factorizando:

$$\begin{aligned} 2t - \frac{1}{10}t^2 &= 0 \\ t\left(2 - \frac{1}{10}t\right) &= 0 \\ t = 0 \lor 2 - \frac{1}{10}t &= 0 \\ t = 0 \lor t &= 20 \end{aligned}$$

Los dos tiempos donde la altura es 0 son $t = 0$ y $t = 20$. Entonces, se estima que el cohete volverá a tocar el suelo a los 20 segundos.

c) ¿Cuál es la velocidad instantánea estimada $\frac{dh}{dt}$ a los 4 segundos?

Teniendo una expresión para la altura $h(t)$ en función del tiempo t, la velocidad instantánea se obtiene derivando h respecto de t. Luego, hay que evaluar la derivada en $t = 4$:

$$\begin{aligned} h(t) &= 2t - \frac{1}{10}t^2 \\ \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} &= 2 - \frac{1}{5}t \\ \frac{\mathrm{d}h(4)}{\mathrm{d}t} &= 2 - \frac{1}{5} \cdot 4 \\ &= 1.2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se estima una velocidad instantánea de 1.2 m/s a los 4 segundos.

2. En un laboratorio farmacéutico, se estudia la concentración plasmática $C(t)$ (en mg/L) de un nuevo medicamento en pacientes con el tiempo t en horas):

Tiempo t (h)	Concentración $C(t)$ (mg/L)
1	2
3	5
4	4
6	1
7	0

Usa **interpolación de Lagrange** para encontrar el polinomio $P(t)$ que ajuste los datos.

La interpolación de Lagrange busca expresar el polinomio $P(t)$ como la siguiente combinación lineal de polinomios:

$$P(t) = 2L_1(t) + 5L_2(t) + 4L_3(t) + 1L_4(t) + 0L_5(t)$$

tal que cada polinomio L_i valga 1 en su respectivo t_i y 0 en los cuatro t_j restantes, teniendo solo esas 4 raíces. Por ejemplo, $L_1(1) = 1$ y $L_1(3) = L_1(4) = L_1(6) = L_1(7) = 0$. De esta forma, $P(t)$ interpola los puntos dados:

$$\begin{aligned} P(1) &= 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2 \\ P(3) &= 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 5 \\ P(4) &= 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 4 \\ P(6) &= 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \\ P(7) &= 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

En el caso de L_1, si $L_1(3) = L_1(4) = L_1(6) = L_1(7) = 0$, entonces los tiempos $t = 3$, $t = 4$, $t = 6$ y $t = 7$ son raíces de L_1. Si pedimos que esas sean las únicas raíces de L_1, entonces este polinomio se puede expresar como

$$L_1(t) = w_1(t - 3)(t - 4)(t - 6)(t - 7)$$

Además, este polinomio debe valer 1 al evaluarse en $t_1 = 1$:

$$L_1(1) = w_1(1 - 3)(1 - 4)(1 - 6)(1 - 7) = 1$$

de donde se puede despejar w_1:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{(1 - 3)(1 - 4)(1 - 6)(1 - 7)} \\ &= \frac{1}{-2 \cdot -3 \cdot -5 \cdot -6} \\ &= \frac{1}{180} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}L_1(t) &= \frac{(t-3)(t-4)(t-6)(t-7)}{(1-3)(1-4)(1-6)(1-7)}\\ &= \frac{(t-3)(t-4)(t-6)(t-7)}{180}\end{aligned}$$

Similarmente:

$$\begin{aligned}L_2(t) &= \frac{(t-1)(t-4)(t-6)(t-7)}{(3-1)(3-4)(3-6)(3-7)} = \frac{(t-1)(t-4)(t-6)(t-7)}{-24}\\ L_3(t) &= \frac{(t-1)(t-3)(t-6)(t-7)}{(4-1)(4-3)(4-6)(4-7)} = \frac{(t-1)(t-3)(t-6)(t-7)}{18}\\ L_4(t) &= \frac{(t-1)(t-3)(t-4)(t-7)}{(6-1)(6-3)(6-4)(6-7)} = \frac{(t-1)(t-3)(t-4)(t-7)}{-30}\\ L_5(t) &= \frac{(t-1)(t-3)(t-4)(t-6)}{(7-1)(7-3)(7-4)(7-6)} = \frac{(t-1)(t-3)(t-4)(t-6)}{72}\end{aligned}$$

Revisa el notebook asociado para ver una posible implementación de esta interpolación.

a) ¿Cuál es la concentración esperada a las 5 horas?

Se debe evaluar $P(5)$:

$$\begin{aligned}P(5) &= 2L_1(5) + 5L_2(5) + 4L_3(5) + 1L_4(5) + 0L_5(5)\\ &= 2\cdot\frac{4}{180} + 5\cdot\frac{8}{-24} + 4\cdot\frac{16}{18} + 1\cdot\frac{-16}{-30} + 0\cdot\frac{-8}{72}\\ &= \frac{37}{15}\\ &= 2.4\bar{6}\end{aligned}$$

Se espera una concentración de $2.4\bar{6}$ mg/L.

b) ¿En qué momentos se estima que la concentración fue de 3 mg/L?

Hay, por lo menos, dos momentos en los que la concentración se estima de 3 mg/L:

- Entre $t = 1$ y $t = 3$, debido a que $C(1) = 2 < 3$ y $P(3) = 5 > 3$.
- Entre $t = 4$ y $t = 6$, debido a que $C(4) = 4 > 3$ y $P(6) = 1 < 3$.

Buscar estos tiempos t tales que $P(t) = 3$ equivale a un problema de búsqueda de raíces sobre una nueva función $f(t) = P(t) - 3$. La información entregada anteriormente sugiere que podemos encontrar estas raíces aplicando el **método de la bisección** sobre $f(t)$ en los dos intervalos $[1, 3]$ y $[4, 6]$.

También es posible usar el método de Newton, pero no lo sugiero. Requiere calcular la derivada de $P(t)$ y es bastante complejo.

Estos tiempos son, aproximadamente, $t_1 \approx 1.266$ y $t_2 \approx 4.664$.

c) Si la dosis es efectiva solo para $C(t) \geq 1.5$ mg/L, ¿durante cuánto tiempo el fármaco fue efectivo?

Primero hay que encontrar los tiempos en los cuales $P(t) = 1.5$. De nuevo, se puede aplicar bisección, esta vez sobre $f(t) = P(t) - 1.5$. Aunque es más difícil, se puede verificar que $C(0) < 1.5$. Esto permite buscar una raíz $t_1 \in [0, 1]$ y otra raíz $t_2 \in [4, 6]$.

Aplicando bisección, se obtiene que $t_1 \approx 0.887$ y $t_2 \approx 5.634$.

Las coordenadas usadas para la interpolación muestran que, en el intervalo $[t_1, t_2]$, $P(t) \geq 1.5$. Entonces, para calcular durante cuánto tiempo $P(t) \geq 1.5$, hay que calcular $t_2 - t_1 \approx 4.747$ horas.

3. En una central nuclear, se midió la temperatura $T(x)$ (en °C) a lo largo de una varilla de combustible (x = distancia en metros):

Posición x (m)	Temperatura $T(x)$ (°C)
0.0	100
0.5	180
1.2	210
2.0	150
2.5	90

Aplica **interpolación baricéntrica** para encontrar $P(x)$.

La interpolación baricéntrica es una optimización de la interpolación de Lagrange. Esta última expresaría el polinomio $P(x)$ de esta forma:

$$P(x) = 100L_1(x) + 180L_2(x) + 210L_3(x) + 150L_4(x) + 90L_5(x),$$

donde los L_i son los siguientes polinomios de Lagrange:

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= w_1(x-0.5)(x-1.2)(x-2.0)(x-2.5)\\
L_2(x) &= w_2(x-0.0)(x-1.2)(x-2.0)(x-2.5)\\
L_3(x) &= w_3(x-0.0)(x-0.5)(x-2.0)(x-2.5)\\
L_4(x) &= w_4(x-0.0)(x-0.5)(x-1.2)(x-2.5)\\
L_5(x) &= w_5(x-0.0)(x-0.5)(x-1.2)(x-2.0)
\end{aligned}$$

No se incluye la fórmula explícita para calcular todos los w_i, pero es la misma del ejercicio anterior. Por ejemplo, $w_2 = \frac{1}{(0.5-0.0)(0.5-1.2)(0.5-2.0)(0.5-2.5)} = \frac{1}{-10.5}$.

Como se mencionó anteriormente, estos polinomios contienen casi todos los 5 factores $(x - x_k)$, excepto uno. Esto provoca muchos cálculos redundantes de productos a la hora de evaluar los polinomios: la cantidad de operaciones elementales al evaluar $P(x)$ es $O(n^2)$. Se podría factorizar todos los polinomios por el producto de todos los 5 factores $\ell(x) = (x-0.0)(x-0.5)(x-1.2)(x-2.0)(x-2.5)$ para reducir la redundancia:

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= (x-0.0)(x-0.5)(x-1.2)(x-2.0)(x-2.5)\left(\frac{w_1}{x-0.0}\right) &&= \ell(x)\left(\frac{w_1}{x-0.0}\right)\\
L_2(x) &= (x-0.0)(x-0.5)(x-1.2)(x-2.0)(x-2.5)\left(\frac{w_2}{x-0.5}\right) &&= \ell(x)\left(\frac{w_2}{x-0.5}\right)\\
L_3(x) &= (x-0.0)(x-0.5)(x-1.2)(x-2.0)(x-2.5)\left(\frac{w_3}{x-1.2}\right) &&= \ell(x)\left(\frac{w_3}{x-1.2}\right)\\
L_4(x) &= (x-0.0)(x-0.5)(x-1.2)(x-2.0)(x-2.5)\left(\frac{w_4}{x-2.0}\right) &&= \ell(x)\left(\frac{w_4}{x-2.0}\right)\\
L_5(x) &= (x-0.0)(x-0.5)(x-1.2)(x-2.0)(x-2.5)\left(\frac{w_5}{x-2.5}\right) &&= \ell(x)\left(\frac{w_5}{x-2.5}\right).
\end{aligned}$$

De esta forma, el producto $\ell(x) = (x-0.0)(x-0.5)(x-1.2)(x-2.0)(x-2.5)$ solo tendría que calcularse una vez. En efecto:

$$P(x) = \ell(x)\left(100\frac{w_1}{x-0.0} + 180\frac{w_2}{x-0.5} + 210\frac{w_3}{x-1.2} + 150\frac{w_4}{x-2.0} + 90\frac{w_5}{x-2.5}\right), \tag{1}$$

provocando que la cantidad de operaciones elementales se reduzca a $O(n)$. **Esto podría ser suficiente, pero se puede reutilizar un poco más de cálculos al expresar $\ell(x)$ de una manera más conveniente.** En general, **cualquier polinomio** $Q(x)$ que pase por 5 puntos (t_i, z_i) en los mismos tiempos t_i se puede escribir como una expresión multiplicada por $\ell(x) = (x-0.0)(x-0.5)(x-1.2)(x-2.0)(x-2.5)$:

$$Q(x) = \ell(x)\left(z_1\frac{w_1}{x-0.0} + z_2\frac{w_2}{x-0.5} + z_3\frac{w_3}{x-1.2} + z_4\frac{w_4}{x-2.0} + z_5\frac{w_5}{x-2.5}\right)$$

lo cual permite despejar $\ell(x)$ en función de $Q(x)$:

$$\ell(x) = \frac{Q(x)}{z_1 \frac{w_1}{x-0.0} + z_2 \frac{w_2}{x-0.5} + z_3 \frac{w_3}{x-1.2} + z_4 \frac{w_4}{x-2.0} + z_5 \frac{w_5}{x-2.5}},$$

donde $Q(x)$ puede ser, de nuevo, **cualquier polinomio**. El más sencillo y útil para nosotros es el polinomio constante $Q(x) = 1$ que pasa por los 5 puntos $(t_i, 1)$, es decir, $z_i = 1$:

$$\ell(x) = \frac{1}{\frac{w_1}{x-0.0} + \frac{w_2}{x-0.5} + \frac{w_3}{x-1.2} + \frac{w_4}{x-2.0} + \frac{w_5}{x-2.5}}.$$

Este resultado simplificado se puede reemplazar en la ecuación (1) para obtener

$$P(x) = \frac{100\frac{w_1}{x-0.0} + 180\frac{w_2}{x-0.5} + 210\frac{w_3}{x-1.2} + 150\frac{w_4}{x-2.0} + 90\frac{w_5}{x-2.5}}{\frac{w_1}{x-0.0} + \frac{w_2}{x-0.5} + \frac{w_3}{x-1.2} + \frac{w_4}{x-2.0} + \frac{w_5}{x-2.5}},$$

alcanzando una reutilización aún mayor de cálculos: basta con calcular los términos $\frac{w_i}{x-x_i}$ solo una vez y reutilizarlos tanto en el numerador como en el denominador. **Esta es la interpolación baricéntrica de $P(x)$.**

a) ¿Cuál es la temperatura a $x = 1.5$ m?

$P(1.5) \approx 196.736$°C.

b) Si la varilla se funde a $T \geq 200$°C, ¿en qué rango de posiciones hubo riesgo?

Al igual que en el problema 2, hay que aplicar el **método de la bisección** sobre la nueva función $f(x) = P(x) - 200$ en dos intervalos:

- Entre $x = 0.5$ y $x = 1.2$, pues $P(0.5) = 180 < 200$ y $P(1.2) = 210 > 200$.
- Entre $x = 1.2$ y $x = 2.0$, pues $P(1.2) = 210 > 200$ y $P(2.0) = 150 < 200$.

Los resultados son $x_1 \approx 0.726$ y $x_2 \approx 1.448$. Entonces, el rango de posiciones en donde hubo riesgo es aproximadamente $[0.726, 1.448]$.

c) ¿En qué posición se alcanzó la temperatura máxima?

Para encontrar la temperatura máxima, se debe derivar $P(x)$ y encontrar cuándo esta derivada vale 0. De acuerdo a los puntos entregados, parece ser que:

- $P'(0.5) > 0$, debido a que la temperatura va ascendiendo en ese intervalo.
- $P'(2.0) < 0$, debido a que la temperatura va bajando en ese intervalo.

Lo anterior sugiere que un buen intervalo de búsqueda para aplicar el método de la bisección sería $[0.5, 2.0]$. Para confirmar lo anterior, hay que calcular $P'(x)$. Se definen $N(x)$ y $D(x)$ como el numerador y denominador de $P(x)$, respectivamente. Debido a que $P(x)$ es un cociente de funciones, se aplica la regla de la derivada de cocientes:

$$P(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \quad \Longrightarrow \quad P'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{(D(x))^2}$$

Para ello, necesitamos calcular $N'(x)$ y $D'(x)$:

$$N(x) = \sum_{i=1}^{5} y_i \frac{w_i}{x - x_i} \quad \Longrightarrow \quad N'(x) = \sum_{i=1}^{5} y_i \frac{-w_i}{(x - x_i)^2}$$

$$D(x) = \sum_{i=1}^{5} \frac{w_i}{x - x_i} \quad \Longrightarrow \quad D'(x) = \sum_{i=1}^{5} \frac{-w_i}{(x - x_i)^2}$$

Una vez definida $P'(x)$, se puede implementar en Python para verificar que, efectivamente, $P'(0.5) > 0$ y

$P'(2.0) < 0$. Aplicando el método de bisección sobre P' en $[0.5, 2.0]$, se encuentra que la posición en donde se alcanza la temperatura máxima es $x \approx 1.078$ m.

d) ¿Por qué la interpolación baricéntrica es más eficiente que Lagrange para este caso? Considera que se pueden añadir más sensores.

Es más eficiente, pues la cantidad de operaciones elementales requeridas para *evaluar* un polinomio generado por interpolación baricéntrica es $O(n)$, mientras que, en el caso de la interpolación de Lagrange, es $O(n^2)$. Se trata de la optimización descrita anteriormente, donde se evita el cálculo repetido de multiplicar n veces casi todos los factores $(x - x_i)$ entre sí, excepto por uno de ellos.

Nota: lo anterior es al *evaluar* el polinomio. En cambio, para *construir* el polinomio precalculando todos los coeficientes necesarios de antemano, se sigue necesitando $O(n^2)$ operaciones. Esto no importa mucho, debido a que la construcción del polinomio solo ocurre una vez. Es más importante el tiempo necesario para evaluar el polinomio, pues la idea es evaluarlo varias veces.