UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

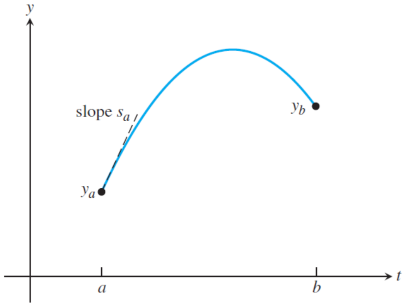
DEPARTAMENTO
DE INFORMÁTICA

INF 285 - Computación Científica
Ingeniería Civil Informática

16: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (II)

Problema de valor de frontera general de segundo orden:

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases}$$



Ejercicio 1

Demuestre que $y(t) = t\sin t$ *es una solución del BVP:*

$$\begin{cases} y'' = -y + 2\cos t \\ y(0) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Idea: resolver un BVP mediante la resolución del IVP equivalente.

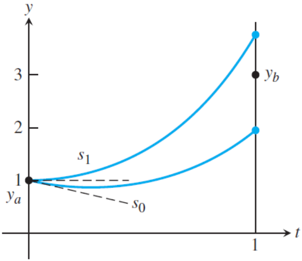
Una secuencia de IVPs se produce, que converge a la correcta.

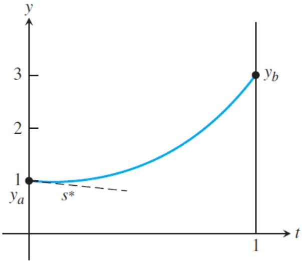
La secuencia comienza con un valor inicial s, al resolver el IVP, luego se compara el valor obtenido en $t = b$ con el valor de frontera $y(b)$.

Mediante prueba y error, la pendiente inicial es ajustada hasta coincidir los valores de la frontera.

$$F(s) = \begin{cases} \text{diferencia entre } y_b \text{ con } y(b), \\ \text{donde } y(t) \text{ es la solución del IVP con} \\ y(a) = y_a, \qquad y'(a) = s \end{cases}$$

Con esta descripción, el problema se reduce a resolver $F(s) = 0$.





Para resolver $F(s) = 0$, se puede utilizar algún método de búsqueda de raíz.

Por ejemplo, utilizando el método de Bisección, se debe escoger dos valores, s_0 y s_1 tal que $F(s_0)\,F(s_1) < 0$, por lo tanto $s^* \in [s_0, s_1]$.

Luego, obteniendo s^* con alguna tolerancia, se resuelve el IVP:

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(a) = y_a \\ y'(a) = s^* \end{cases}$$

Ejemplo 1

Resolver el siguiente BVP:

$$\begin{cases} y'' = 4\,y \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Se define $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^\top = [y, y']^\top$, luego el IVP, con la incógnita s, viene dado por:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ 4\, y_1 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \qquad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

Utilizando el método de Euler, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + h\, \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) = \begin{bmatrix} y_1(t_k) \\ y_2(t_k) \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_2(t_k) \\ 4\, y_1(t_k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El problema se traduce en (i) asignar un valor a s, (ii) resolver el IVP hasta $t = 1$ y (iii) comparar con $y(1) = 3$ calculando $F(s) = y(t_N) - y(1)$, donde N es la cantidad de iteraciones para resolver el IVP.

$F(-1) \approx -1.06$, y $F(0) \approx 0.76$. Como $F(-1)\,F(0) < 0$, se pueden utilizar como puntos iniciales para el método de la Bisección.

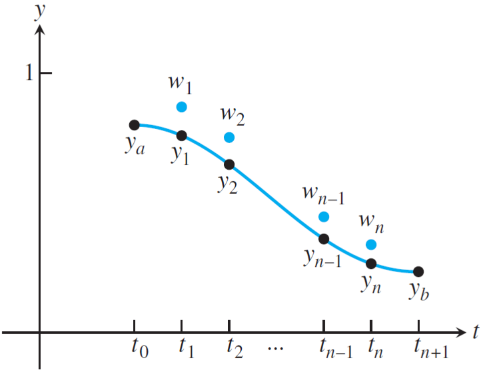
Al ejecutar el método de la Bisección, se obtiene que $s^* \approx -0.419$

Finalmente, se resuelve el IVP:

$$\begin{cases} y'' = 4\,y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -0.419 \end{cases}$$

Idea: reemplazar las derivadas de la ecuación diferencial mediante aproximaciones discretas.

Evaluar las aproximaciones en una malla y obtener un sistema de ecuaciones.



Sea $y(t)$ una función con al menos cuatro derivadas continuas.

Para la primera derivada, podemos utilizar la siguiente aproximación,

$$y'(t) = \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(c) \tag{1}$$

y para la segunda derivada,

$$y''(t) = \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} y''''(c) \tag{2}$$

Ejemplo 2

Resolver el siguiente BVP:

$$\begin{cases} y'' = 4\,y \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

utilizando diferencias finitas.

Consideremos la ecuación (2) para aproximar la segunda derivada en la ecuación diferencial para un tiempo t_k,

$$y''(t) \approx \frac{y(t_{k+1}) - 2\,y(t_k) + y(t_{k-1})}{h^2}$$

Reemplazando,

$$\frac{y(t_{k+1}) - 2\,y(t_k) + y(t_{k-1})}{h^2} = 4\,y(t_k)$$
$$\frac{y(t_{k+1}) - 2\,y(t_k) + y(t_{k-1})}{h^2} - 4\,y(t_k) = 0$$

Equivalentemente, si se define $w_k = y(t_k)$

$$w_{k-1} + (-4h^2 - 2)w_k + w_{k+1} = 0 \qquad (3)$$

Si consideramos $n = 3$, entonces $h = 1/(n+1) = 1/4$, por lo tanto se necesita resolver w_k para $k = 0, ..., 4$.

Los valores en la frontera son conocidos: $w_0 = 1$ y $w_4 = 3$. Por lo tanto se debe resolver w_1, w_2 y w_3.

Reemplazando la ecuación (3) para $k = 1, 2, 3$, se tiene que

$$\begin{aligned} w_0 - (9/4)\, w_1 + w_2 &= 0 \\ w_1 - (9/4)\, w_2 + w_3 &= 0 \\ w_2 - (9/4)\, w_3 + w_4 &= 0 \end{aligned}$$

Considerando $w_0 = 1$ y $w_4 = 3$:

$$\begin{aligned} -(9/4)\, w_1 + w_2 &= -1 \\ w_1 - (9/4)\, w_2 + w_3 &= 0 \\ w_2 - (9/4)\, w_3 &= -3 \end{aligned}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones,

$$\begin{bmatrix} -9/4 & 1 & 0 \\ 1 & -9/4 & 1 \\ 0 & 1 & -9/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente se obtiene:

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.0249 \\ 1.3061 \\ 1.9138 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3

Resolver el siguiente BVP:

$$\begin{cases} y'' = y' + \cos y \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

utilizando diferencias finitas.