AYUDANTÍA
SCT - SEMANA - 09

INTERPOLACIÓN POLINOMIAL DE FUNCIONES: ERROR DE INTERPOLACIÓN Y NODOS DE CHEBYSHEV

1. Según lo discutido en clases, se demostró que se puede obtener la interpolación polinomial baricéntrica a partir de la interpolación polinomial de Lagrange $p(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x)$ para los puntos (x_j, y_j). La interpolación baricéntrica corresponde a

$$p(x)=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{w_i}{x-x_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_j}{x-x_i}},$$

donde $w_i = 1/l_i(x_i)$ y $l_i(x_i)=\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(x_i-x_k)$.

a) Demuestre que $\lim_{x\to x_j} p(x)=y_j$, donde y_j es un punto de interpolación.

b) Como se discutió en clases, construir esta interpolación requiere $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones para calcular los pesos w_i, mientras que evaluarla requiere solo $\mathcal{O}(n)$ operaciones. Sin embargo, si las coordenadas x_i de los puntos que se desea interpolar son los nodos de Chebyshev en un intervalo $[a,b]$, entonces se puede demostrar que w_i se reduce a la siguiente expresión:

$$w_i=-(-1)^i \frac{1}{n}\left(\frac{4}{b-a}\right)^{n-1} \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$$

Más aún, ya que el factor $k=\frac{1}{n}\left(\frac{4}{b-a}\right)^{n-1}$ es constante y no depende de i, se puede multiplicar el numerador y denominador de $p(x)$ por $\frac{1}{k}$, lo cual equivale a dividir cada peso w_i entre k. Esto implica que se puede usar los siguientes pesos reducidos (válidos solo para la interpolación baricéntrica, no para la de Lagrange clásica):

$$w_i^{\star}=\frac{w_i}{k}=-(-1)^i \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$$

Explique claramente cómo esto permite obtener un algoritmo $\mathcal{O}(n)$ tanto para la construcción como la evaluación del polinomio.

c) Implemente, en Python, con ayuda de NumPy y sin usar ciclos, una función `baricentrica_chebyshev(f, a, b, n)`, donde `f` es una función que se quiere interpolar polinomialmente, `a` y `b` son los límites inferior y superior del intervalo $[a,b]$ en el que se va a interpolar y `n` es la cantidad de puntos de interpolación que se usará. La función `baricentrica_chebyshev` debe construir y retornar otra función `p` que interpola polinomialmente los n puntos (x_i, y_i), donde cada x_i es el correspondiente nodo de Chebyshev en el intervalo $[a,b]$ y cada y_i es el resultado correspondiente de evaluar $f(x_i)$. **Tanto la construcción como la evaluación de `p` deben requerir solo $\mathcal{O}(n)$ operaciones.**

d) Dada la pregunta anterior, construya un polinomio interpolador con 3 puntos de Chebyshev en el intervalo $[1,7]$ de la función $\sin^3(x)$ y obtenga el error al interpolar en $x=2$.

2. Considere la siguiente función en 2 variables $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:

$$f(x,y)=\frac{4-y^2}{x}$$

a) Determine el grado mínimo del polinomio que interpole la función $f(x,y)$ a lo largo de la curva paramétrica $\langle x(s), y(s)\rangle = \langle \cos(s), 2\sin(s)\rangle$ para $s\in[2,5]$, tal que el error de interpolación sea menor que 10^{-5}. *Hint: The function along the parametric function is defined as $f(x(s),y(s))$ and it only depends on one variable!*

b) Construya el polinomio interpolador de grado mínimo determinado en la pregunta anterior.