Ayudantía
SCT - Semana - 12

Repaso Certamen 2

1. Recordemos a los ilustres profesores Jørgen Pedersen Gram y Erhard Schmidt, los cuales desarrollaron el proceso de Gram-Schmidt para ortonormalizar vectores en un espacio vectorial equipado con un producto interno. Este proceso genera la descomposición QR: en particular, la descomposición QR reducida de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m \geq n \geq 1$, genera la matriz ortonormal $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, i.e. sus columnas son ortonormales, y la matriz $\widetilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior, como se muestra a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & | & \mathbf{a}_2 & | & \cdots & | & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & | & \mathbf{q}_2 & | & \cdots & | & \mathbf{q}_n \end{pmatrix}}_{\widetilde{Q}} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}}_{\widetilde{R}}$$

Sin embargo, en uno de los posibles futuros de la humanidad, se ha decretado que no se podrán utilizar matrices triangulares superiores en los procesos de ortonormalización, lo cual deja a la humanidad de forma inmediata sin acceso a resolver problemas de mínimos cuadrados por medio de la clásica descomposición QR. Esto genera el inicio de la revolución científica liderada por los estudiantes de INF/ILI-285, donde su más fuerte arma de combate es la construcción de algoritmos sofisticados que velen por el continuo avance de la Ciencia y la Ingeniería, considerando la restricción de no usar matrices triangulares superiores. Para resolver este problema, se propone construir la siguiente descomposición matricial:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & | & \mathbf{a}_2 & | & \cdots & | & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 & | & \mathbf{t}_2 & | & \cdots & | & \mathbf{t}_n \end{pmatrix}}_{\widetilde{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}}_{\widetilde{U}}$$

Construya e implemente, en Python con NumPy, un algoritmo que determine la descomposición TU propuesta, i.e. el input del algoritmo es la matriz A y retorna la matriz $\widetilde{T}$ donde sus columnas son ortonormales y la matriz $\widetilde{U}$ que es triangular inferior.

2. Considere la siguiente función en varias variables:

$$f(x, a, b, \omega) = a\sin(x) + b\cos(\omega x)$$

la cual se quiere utilizar para aproximar el siguiente conjunto de datos: (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Es decir, se requiere que se cumplan las siguientes ecuaciones:

$$f(x_1, a, b, \omega) = a\sin(x_1) + b\cos(\omega x_1) = y_1 \tag{1}$$
$$f(x_2, a, b, \omega) = a\sin(x_2) + b\cos(\omega x_2) = y_2 \tag{2}$$

Tenemos 3 coeficientes desconocidos a, b y ω, pero solo tenemos 2 ecuaciones. Para resolver este problema, considere la información adicional que se entregará en cada pregunta.

a) Considere que $b = \widehat{b}$, es decir, conocemos el valor de b. Entregue todas las componentes necesarias para utilizar el método de Newton en $\mathbb{R}^2$, es decir, debe indicar explícitamente la función $F(\cdot) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ a la cual se le buscará la raíz, la matriz Jacobiana respectiva y cómo se utiliza para realizar una iteración considerando como initial guess a_0 y ω_0. Note que no se solicita la inversa de la matriz asociada, sino solo la descripción explícita de la matriz. Justifique su resultado.

b) Considere que conocemos el valor de ω, el cual llamamos $\widetilde{\omega}$, y, además, se nos entrega un par ordenado adicional (x_3, y_3). Determine el sistema de ecuaciones lineales cuadrado que entrega los coeficientes $\bar{a}$ y $\bar{b}$ que minimizan el error cuadrático correspondiente. No es necesario que resuelva el sistema de ecuaciones lineales, solo que indique explícitamente la matriz de 2×2 respectiva y el lado derecho asociado. Justifique su resultado.

3. Se desea resolver el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{3n\times 3n}$, $x \in \mathbb{R}^{3n}$ y $b \in \mathbb{R}^{3n}$. Se conoce que la matriz A tiene la siguiente estructura:

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & B & C \\ B & D_2 & B \\ -C & B & D_3 \end{pmatrix}$$

con B una matriz que cumple $\|B\|_\infty = \epsilon$, y D_1, D_2 y D_3 matrices diagonales. Además, se sabe que:

$$|(D_1)_{i,i}| > \sum_{j=1}^{n} |C_{i,j}| + 10^{-2},$$

$$|(D_2)_{i,i}| > \sum_{j=1}^{n} |C_{i,j}| + 10^{-2},$$

$$|(D_3)_{i,i}| > \sum_{j=1}^{n} |C_{i,j}| + 10^{-2},$$

Sin embargo, no se tiene acceso explícito a la matriz A, sino que solamente a D_1, D_2, D_3, B y C, que provienen de un conjunto de mediciones y cálculos de otros programas. Para tener acceso a estas matrices, se tiene la función `getElementFromA(i, j)`, donde $i \in \{0, 1, 2\}$ y $j \in \{0, 1, 2\}$ indican la "coordenada" de la matriz que se desea obtener. Por ejemplo, `getElementFromA(0, 2)` retorna la matriz C.

a) ¿Para qué valores de ϵ se asegura convergencia para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con el Método de Jacobi? Recuerda que la norma-∞ de una matriz es el máximo de las sumas absolutas de sus filas.

b) Considere que por temas de disponibilidad de memoria, no es posible almacenar explícitamente más de una matriz que compone a A, es decir, solo es posible acceder a D_1, D_2, D_3, B, C o $-C$ en un momento específico. Proponga un algoritmo que resuelva el problema presentado mediante el método de Jacobi, considerando la restricción de memoria y que ϵ asegura convergencia en el Método de Jacobi. Considere como parámetros la función `getElementFromA`, el vector $\mathbf{b}$, un initial guess x_0 y un número de iteraciones máximo K.