Ayudantía
SCT - Semana - 06 - Extra 1

Cuando las incógnitas de las ecuaciones lineales son FUNCIONES

En este curso, aparecerán muchos ejercicios similares a "encuentre $f(x)$ y $g(x)$ que resuelvan las siguientes ecuaciones:"

$$xf(x) + \sin(x)g(x) = 1 \tag{1}$$
$$x^2 f(x) - \cos(x)g(x) = e^x \tag{2}$$

Esto puede parecer muy enredado y difícil al principio, pero, dado que $f(x)$ y $g(x)$ son **incógnitas**, donde cada una de ellas es **multiplicada** por alguna función diferente, y los resultados se **suman** entre sí, estas no son más que **ecuaciones lineales**. La única diferencia es que tanto las incógnitas como los coeficientes y constantes ahora son funciones.

Por ende, se puede usar los mismos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, como la **eliminación gaussiana**:

1. Queremos cancelar el término con $f(x)$ en la 2° ecuación (es decir, $x^2 f(x)$) para poder despejar $g(x)$.
2. Podemos hacerlo multiplicando una copia de la 1° ecuación por $-x$ (para que su término $xf(x)$ se vuelva $-x^2 f(x)$), y sumando el resultado a la 2°.
3. Al multiplicar la 1° ecuación por $-x$, esta se vuelve $-x^2 f(x) - x\sin(x)g(x) = x$. Al sumarla con la 2° ecuación $x^2 f(x) - \cos(x)g(x) = e^x$, se cancela el término con $f(x)$ y se obtiene $(-x\sin(x) - \cos(x))g(x) = -x + e^x$, de donde se puede despejar
$$g(x) = \frac{-x + e^x}{-x\sin(x) - \cos(x)}$$
4. Finalmente, reemplazando el valor de $g(x)$ en la 1° ecuación, se puede encontrar que
$$f(x) = \frac{-\cos(x) - e^x \sin(x)}{-x^2\sin(x) - x\cos(x)}$$

El desarrollo anterior es para mostrar que todo funciona muy parecido a los sistemas de ecuaciones lineales de toda la vida. Eso significa que los coeficientes x, $\sin(x)$, x^2 y $-\cos(x)$ se pueden agrupar en una matriz, y el sistema se puede expresar así:

$$\begin{pmatrix} x & \sin(x) \\ x^2 & -\cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix}$$

lo que permite aplicar otros métodos como la regla de Cramer, las descomposiciones ALU y PALU, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, entre otros.

Lo mejor es acostumbrarse a este tipo de sistemas lo más pronto posible, ya que muchos ejercicios de tipo certamen en este curso serán similares a esto.