Ayudantía

SCT - Semana - 06

En general, el primer sistema de ecuaciones lineales que uno estudia es un sistema de 2×2, es decir 2 ecuaciones con 2 incógnitas, por ejemplo:

$$\begin{aligned} y &= a_1\, x + b_1, \\ y &= a_2\, x + b_2, \end{aligned}$$

donde y, x, a_1, a_2, b_1, y b_2 pertenecen a $\mathbb{R}$, es decir son números reales. En particular sabemos que en este caso si,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 1 & -a_2 \end{pmatrix} = a_1 - a_2 \neq 0,$$

existe una única solución para x y y que satisface ambas ecuaciones. Una forma de resolver el sistema de ecuaciones lineales anterior es simplemente **igualando** la variables y, es decir:

$$a_1\, x + b_1 = a_2\, x + b_2.$$

De la cual podemos despejar x de la siguiente forma:

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}.$$

Ahora, ¿qué ocurriría si reemplazamos los coeficientes e incógnitas por matrices de dimensión 2×2? Esto significa que las ecuaciones se transforman a la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Y &= A_1\, X + B_1, \\ Y &= X\, A_2 + B_2, \end{aligned}$$

donde Y, X, A_1, A_2, B_1, y B_2 pertenecen a $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Note que el orden de la multiplicación de X por las matrices A_1 y A_2 no es un error, así se propone la generalización. Considere las siguientes definiciones para X, Y, A_k, y B_k, para $k \in \{1, 2\}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix}, A_k = \begin{pmatrix} a_{k,1} & a_{k,3} \\ a_{k,2} & a_{k,4} \end{pmatrix}, \text{ y } B_k = \begin{pmatrix} b_{k,1} & b_{k,3} \\ b_{k,2} & b_{k,4} \end{pmatrix}.$$

Al aplicar el mismo procedimiento anterior para el caso con coeficientes reales, uno no encuentra directamente un sistema de ecuaciones lineales en su forma tradicional. Sin embargo sí se puede re-escribir como un sistema de ecuaciones lineales de dimensión 4×4, solo considerando como incógnita la matriz X. Para el manejo del problema considere el siguiente orden de los coeficientes. Poner especial atención a los coeficientes del lado derecho ya que definen el orden de las filas de la matriz C y el orden de los x_i ya que define el orden de las columnas de la matriz C,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} \\ c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & c_{4,4} \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{2,1} - b_{1,1} \\ b_{2,2} - b_{1,2} \\ b_{2,3} - b_{1,3} \\ b_{2,4} - b_{1,4} \end{pmatrix}.$$

Notar que los coeficientes $c_{i,j}$, para $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, son desconocidos y los debe obtener. Para el desarrollo de las siguientes preguntas, considere las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{1,4} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,3} \\ b_{1,2} & b_{1,4} \end{pmatrix}, \text{ y } B_2 = \begin{pmatrix} b_{2,1} & b_{2,3} \\ b_{2,2} & b_{2,4} \end{pmatrix}.$$

(a) En el caso original, con coeficientes reales, se indicó que si $a_1 = a_2$ no tiene solución única el problema. ¿Es posible que exista solución única en el problema modificado si $A_1 = A_2$? Explique

(b)
- Si la matriz A_1 fuera la matriz nula, ¿sigue siendo no singular la matriz C?
- Si la matriz A_2 fuera la matriz nula, ¿sigue siendo no singular la matriz C?

(c)
- ¿Es siempre posible obtener la factorización LU de C?.

(d) Proponga e implemente un algoritmo que obtenga X basado en la factorización PALU de C.