AYUDANTÍA S9

INTERPOLACIÓN POLINOMIAL DE FUNCIONES

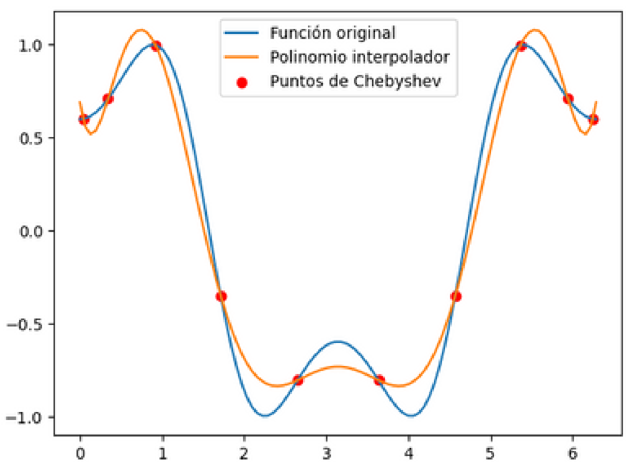
Ayudante: Francisco Manríquez Novoa

Jueves 8 de mayo del 2025

Computación Científica

Interpolando funciones

Una función $f(x)$ puede ser muy costosa de evaluar demasiadas veces. Vale la pena **evaluar $f(x)$ en unos puntos específicos y hacer una interpolación polinomial por esos puntos para aproximar $f(x)$.**



$$f(x) = \sin(2.5\cos(x))$$

$p(x)$: interpolación polinomial

Error de interpolación

Si el polinomio $p(x)$ de grado n-1 interpola a $f(x)$ en los n puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, **el error de interpolación en x, en su "forma de resto de Lagrange", está dado por:**

$$f(x) - p(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)}{n!} f^{(n)}(c)$$

donde c es algún valor dependiente de x.

https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_interpolation#Interpolation_error:_Lagrange_remainder_formula

Error máximo

Si $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, el error máximo de interpolación en $[x_1, x_n]$ está dado por:

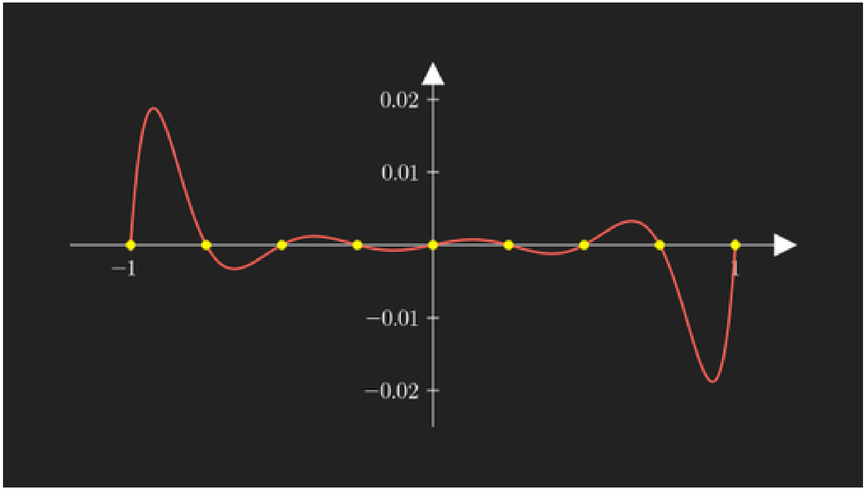
$$E_{\max} = \max_{x \in [x_1, x_n]} |f(x) - p(x)|$$

$$\leq \frac{\max_{x \in [x_1, x_n]} \prod_{i=1}^{n} |(x - x_i)|}{n!} \max_{x \in [x_1, x_n]} \left| f^{(n)}(x) \right|$$

Del error anterior,
vale la pena optimizar: $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} |(x - x_i)|$

Reduciendo el error [1]

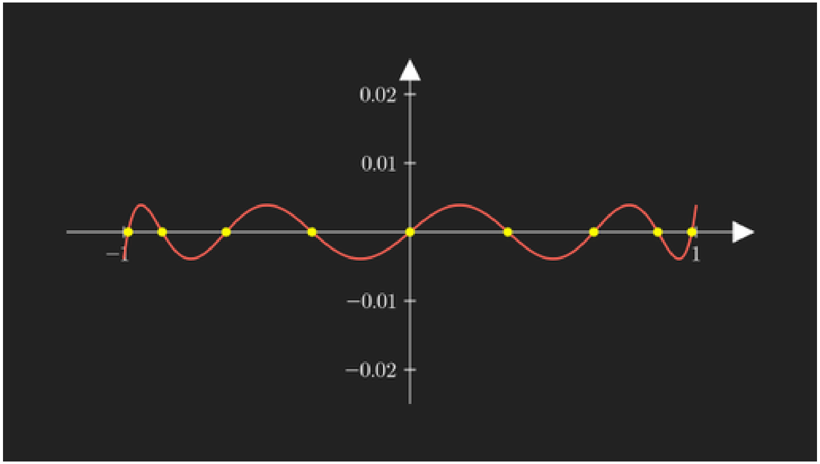
Se debe minimizar el valor absoluto del polinomio $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ de grado n.



Interpolación con 9 puntos equiespaciados. A los extremos, hay mucha más oscilación y error.

Reduciendo el error [2]

Ya que hay más oscilación en los extremos, si condensamos más los puntos a los extremos, entonces podemos reducir el error máximo.



Interpolación con 9 puntos, pero no equiespaciados. Están más condensados a los extremos, y el error se distribuye mejor, reduciendo el máximo.

Reduciendo el error [3]

También podemos aprender algo del coseno: siempre se mueve entre -1 y 1. Si pudiéramos interpolar con algo similar al coseno, sería lo ideal.

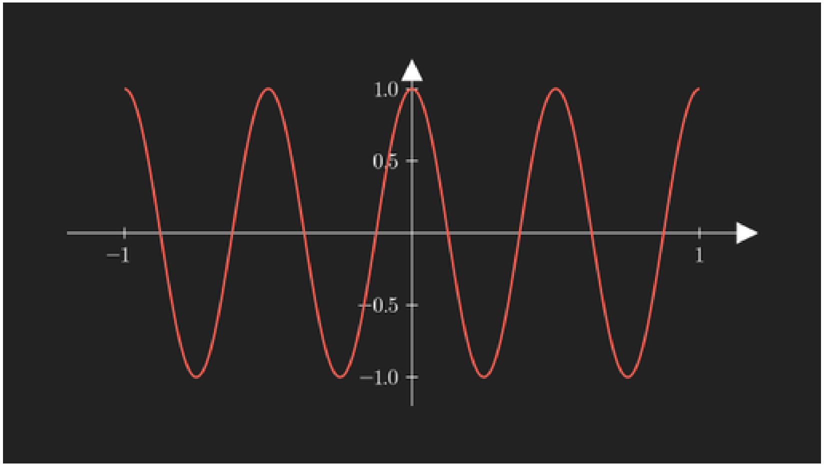


Gráfico de $\cos(4\pi x)$ entre -1 y 1.

Reduciendo el error [4]

Buscamos, entonces, algo similar a

$$p(x) = \cos(\theta(x))$$

y que ojalá sea polinomio. El resultado final será

$$p(x) = \cos(n \arccos(x))$$

y, para entender por qué, vamos a repasar la fórmula del coseno de ángulo doble / triple / múltiple, que tiene cosas muy peculiares.

$\cos(2\alpha)$

Estudiemos el coseno. Una propiedad importante:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Si $\beta = \alpha$, llegamos al coseno de ángulo doble:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Sumando +1-1 y usando 1 - $\sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha)$,
queda **una expresión solo en términos de $\cos(\alpha)$**:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

cos(3α)

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha + \alpha) \\
&= \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha) \\
&= (2\cos^2(\alpha) - 1)\cos(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha) \\
&= 2\cos^3(\alpha) - \cos(\alpha) - 2(1 - \cos^2(\alpha))\cos(\alpha) \\
&= 2\cos^3(\alpha) - \cos(\alpha) - 2\cos(\alpha) + 2\cos^3(\alpha)) \\
&= 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Se expresa totalmente en términos de $\cos(\alpha)$.

cos(nα) [1]

La fórmula recursiva para cos(nα):

$$\cos(n\alpha) = 2\cos(\alpha)\cos((n-1)\alpha) - \cos((n-2)\alpha)$$

implica, por inducción, que **todos los cos(*nα*) se pueden expresar como POLINOMIOS EN TÉRMINOS DE cos(*α*).**

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$$

cos(nα) [2]

La sustitución $x = \cos(\alpha)$ lo hace más claro:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cos(\alpha) && = x \\ \cos(2\alpha) &= 2\cos^2(\alpha) - 1 && = 2x^2 - 1 \\ \cos(3\alpha) &= 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) && = 4x^3 - 3x \end{aligned}$$

En general, $\cos(n\alpha)$ es un polinomio de grado n en términos de $x = \cos(\alpha)$.

Polinomios de Chebyshev [1]

Los siguientes son los **polinomios de Chebyshev:**

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \cos(\alpha) &&= x \\
\cos(2\alpha) &= 2\cos^2(\alpha) - 1 &&= 2x^2 - 1 \\
\cos(3\alpha) &= 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) &&= 4x^3 - 3x
\end{aligned}$$

Ya que cada polinomio es igual a algún cos(*nα*) que se mueve entre -1 y 1, **todos los polinomios están acotados entre -1 y 1, para todo *x* en [-1, 1].**

¿Por qué no fuera de ese rango? Por la sustitución *x* = cos(*α*) en [-1, 1].

Polinomios de Chebyshev [2]

Desde la fórmula recursiva para cos($n\alpha$):

$$\cos(n\alpha) = 2\cos(\alpha)\cos((n-1)\alpha) - \cos((n-2)\alpha)$$

Si se usa la sustitución $x = \cos(\alpha)$ o $\alpha = \arccos(x)$, y se denota $T_n(x) = \cos(n\alpha) = \cos(n * \arccos(x))$ al n-ésimo polinomio de Chebyshev:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

Polinomios de Chebyshev [3]

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$\vdots$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

Nodos de Chebyshev [1]

Los nodos de Chebyshev son las soluciones a los polinomios de Chebyshev.

Ya que la forma original es

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

las soluciones son los ángulos $\theta = n * \arccos(x)$ tales que $\cos(\theta) = 0$.

Nodos de Chebyshev [2]

$$\cos(n\arccos(x)) = 0$$

$$n\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$n\arccos(x) = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

$$\arccos(x) = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$x = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$$

Nodos de Chebyshev [3]

Los n nodos de Chebyshev para el polinomio $T_n(x)$ son los siguientes, para k entre 0 y n-1:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

Sin embargo, en los apuntes, es un poco diferente. Sustituyendo $i = k + 1$, se obtiene esta fórmula para i entre 1 y n:

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \quad i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$$

Nodos de Chebyshev [4]

Una última nota: en los polinomios de Chebyshev, el coeficiente principal es una potencia de 2.

$$
\begin{aligned}
T_1(x) &= x && = 1(x-0) \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 && = 2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x && = 4\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-0)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&\vdots && \vdots \\
T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) && = 2^{n-1}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)
\end{aligned}
$$

Nodos de Chebyshev [5]

Por tanto, para obtener $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, hay que dividir el polinomio $T_n(x)$ entre 2^{n-1}:

$$T_n(x) = 2^{n-1}(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

$$\frac{T_n(x)}{2^{n-1}} = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

Nodos de Chebyshev [6]

Esto implica que, si $\max|T_n(x)| = 1$, entonces:

$$\max_{x\in[-1,1]} |(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Nodos de Chebyshev [7]

y, por lo tanto, si el error máximo está dado por

$$\begin{aligned} E_{\max} &= \max_{x \in [x_1, x_n]} |f(x) - p(x)| \\ &\leq \frac{\max_{x \in [x_1, x_n]} \prod_{i=1}^{n} |(x - x_i)|}{n!} \max_{x \in [x_1, x_n]} \left| f^{(n)}(x) \right| \end{aligned}$$

entonces, al interpolar en [-1, 1] con *n* nodos de Chebyshev, el error queda acotado a:

$$E_{\max} \leq \frac{1}{2^{n-1} n!} \max_{x \in [-1, 1]} \left| f^{(n)}(x) \right|$$

Transformación de intervalo [1]

Todo lo anterior aplica para el intervalo [-1, 1] el cual corresponde al rango del coseno.

¿Cómo aplica para un intervalo $[a, b]$?

¡REGLA GENERAL, SÚPER ÚTIL PARA MÁS ADELANTE!

2 pasos para transformar un intervalo (centrado en el origen) en otro intervalo:

1. **Escálalo**
2. **Desplázalo**

Transformación de intervalo [2]

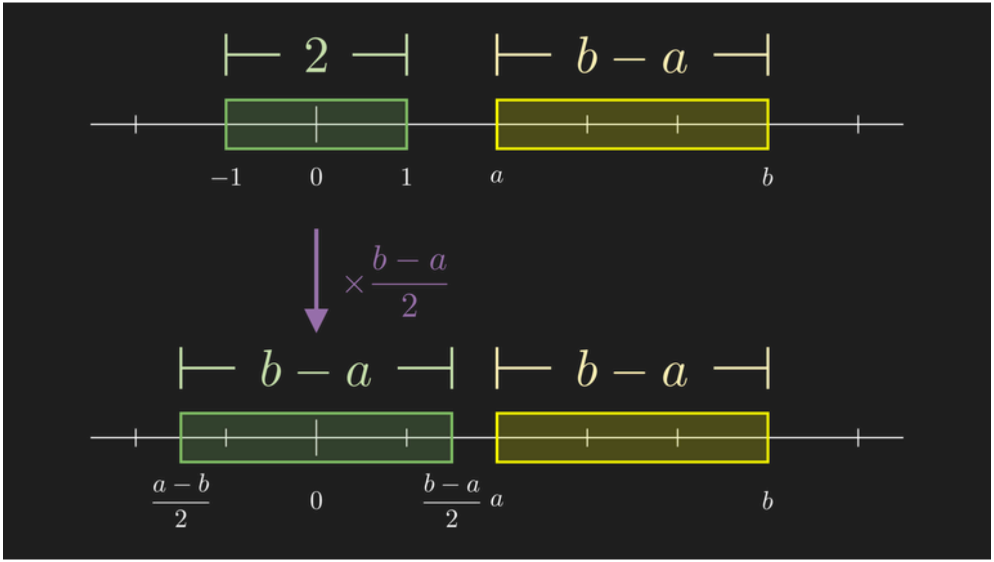
PASO 1. ESCÁLALO

- Si quieres transformar [-1, 1] en [*a*, *b*], primero debes escalar [-1, 1] hasta coincidir su tamaño con [*a*, *b*].
- El tamaño de [*a*, *b*] es *b* - *a*.
- El tamaño de [-1, 1] es 1 - (-1) = 2.
- **Dividimos entre 2 y multiplicamos por *b*-*a*. O sea, multiplicamos por (*b*-*a*)/2.**

$$[-1, 1] \xrightarrow{\times \frac{b-a}{2}} \left[\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$$

Transformación de intervalo [3]

PASO 1. ESCÁLALO



Transformación de intervalo [4]

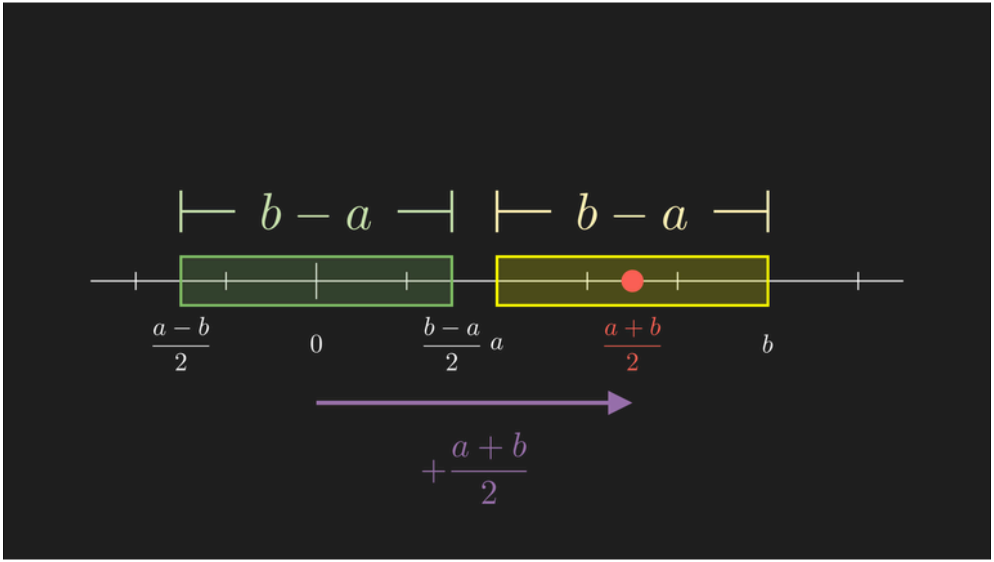
PASO 2. DESPLÁZALO

- El intervalo original [-1, 1] está centrado en 0.
- El intervalo [a, b] está centrado en el punto medio entre a y b: (a+b)/2.
- **Desplaza el intervalo anterior, sumándole (a+b)/2 para coincidir su centro con [a, b].**
- ¡Listo!

$$\left[\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right] \overset{+\frac{a+b}{2}}{\Longrightarrow} [a, b]$$

Transformación de intervalo [5]

PASO 2. DESPLÁZALO



Transformación de intervalo [6]

Los efectos en los nodos de Chebyshev son:

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$$

PASO 1. ESCÁLALO: * (b-a)/2

$$u_i = \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$$

PASO 2. DESPLÁZALO: + (a+b)/2

$$w_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$$

Transformación de intervalo [7]

EFECTO COLATERAL: al escalar x por $(b - a)/2$, los valores del polinomio $(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$ se escalan por $((b - a)/2)^n$, debido a los n factores $(x - x_i)$.

Entonces, su máximo valor absoluto también se escala por $|(b - a)/2|^n$.

Para los nuevos nodos de Chebyshev en $[a, b]$:

$$\max_{x\in[a,b]} |(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)| = \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}}$$

Transformación de intervalo [8]

Por lo tanto, si el error máximo está dado por

$$
\begin{aligned}
E_{\max} &= \max_{x \in [x_1, x_n]} |f(x) - p(x)| \\
&\leq \frac{\max_{x \in [x_1, x_n]} \prod_{i=1}^{n} |(x - x_i)|}{n!} \max_{x \in [x_1, x_n]} \left| f^{(n)}(x) \right|
\end{aligned}
$$

entonces, al interpolar en [a, b] con n nodos de Chebyshev, el error queda acotado a:

$$E_{\max} \leq \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1} n!} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n)}(x) \right|$$

¿Dudas?