Ayudantía

SCT - Semana - 06

ALU, PALU e Iteración de Jacobi

Sugiero leer los extras 1, 2 y 3 adjuntos a esta ayudantía para entender y resolver algunos problemas. El extra 3 es específico solo para esta ayudantía (convergencia de Jacobi), pero **los extras 1 y 2 (sistemas de ecuaciones donde los términos son funciones u otras matrices) seguirán siendo relevantes para todo el resto del contenido de Computación Científica.**

1. Imagine que usted estudió Biología y, recientemente, comenzó a estudiar, junto con un compañero, un ecosistema con conejos y zorros. En el mes t, hay c_t conejos y z_t zorros. Cada mes, los conejos se reproducen rápidamente, pero son devorados por los zorros. Estos últimos, a su vez, se reproducen lentamente y necesitan alimentarse de conejos para subsistir. Específicamente, en cada mes que transcurre, las poblaciones de conejos y zorros varían según estas ecuaciones:

$$c_{t+1} = 1.5c_t - 0.5z_t$$
$$z_{t+1} = 0.5c_t + 0.5z_t$$

Este es el 5° mes ($t = 5$) en el cual ustedes dos estudian este ecosistema. Usted necesita saber cuántos conejos y zorros había cuando comenzaron a estudiarlo hace 5 meses ($t = 0$), pero su compañero, quien estaba encargado anteriormente de analizar este ecosistema, perdió esta información. Sin embargo, ahora usted sabe que hay $c_5 = 50$ conejos y $z_5 = 40$ zorros. Usando las ecuaciones anteriores, usted puede calcular la cantidad c_0 de conejos y la cantidad z_0 de zorros que había hace 5 meses.

a) Plantee un sistema de ecuaciones para encontrar $\mathbf{x}_4 = (c_4 \quad z_4)^T$: la cantidad de conejos y zorros que había el mes anterior (4° mes). Luego, resuelva el sistema.

b) Plantee el sistema de ecuaciones que debe resolver para encontrar $\mathbf{x}_0 = (c_0 \quad z_0)^T$ a partir de la información $\mathbf{x}_5 = (c_5 \quad z_5)^T = (50 \quad 40)^T$. ¿Existe algún truco para resolverlo más eficientemente? Si es así, explique cuál es ese truco y úselo para encontrar c_0 y z_0.
Hint: try decomposing your matrix A conveniently.

2. Para las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, determine si la iteración de Jacobi converge al usarla para aproximar la solución $\mathbf{x}$ al sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = (1 \quad 1)^T$, usando $\mathbf{x}_0 = (0 \quad 0)^T$ como *initial guess*. ¿Por qué (no) converge? Realice 3 iteraciones del método para cada matriz A.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales para $f_1(x)$ y $f_2(x)$:

$$xf_1(x) + f_2(x) + \sin(x)f_2(x) = \exp(x)$$
$$f_1(x) + x^3 f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

a) Realice 2 iteraciones del método de Jacobi para el sistema de ecuaciones lineales (15) mediante un *initial guess* $\mathbf{f}^{(0)}(x) = \left(f_1^{(0)}(x), f_2^{(0)}(x)\right) = (0, 0)$, donde el superíndice indica número de iteración.

b) Obtenga los valores propios de la matriz de convergencia para el método de Jacobi. *Hint: The convergence matrix for the Jacobi matrix is $M = -D^{-1}(L + U)$, but recall that L and U have a different meaning here.*

c) Determine para qué rango/s de valores de x el método Jacobi converge para el sistema de ecuaciones lineales. ***Hint:*** *You should be using the eigenvalues you just computed!*

Continúa en la página siguiente...

4. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, es decir, tenemos matrices y vectores donde sus elementos pueden ser número complejos. El uso de un algoritmo tradicional exige que debamos ser capaces de representar y manipular números complejos, **pero eso no se estudiará en este curso**.

Una forma de manejar este tipo de situaciones es descomponer nuestro sistema de ecuaciones lineales en su parte real e imaginaria de la siguiente forma:

$$(A_r + iA_i)(\mathbf{x}_r + i\mathbf{x}_i) = \mathbf{b}_r + i\mathbf{b}i$$

donde el subíndice r denota la parte real, el subíndice i denota la parte imaginaria, e $i^2 = -1$.

a) Construya un nuevo sistema de ecuaciones lineales en el cual no se requiera manipulación explicita de números complejos. Describa claramente su nueva matriz, el vector de incógnitas y el lado derecho. *Pista: dos valores complejos son iguales si sus partes reales son iguales, y sus imaginarias también.*

b) Considerando ahora que A_r es una matriz diagonal y que $|(A_r)_{k,k}| > \sum_{j=1}^{n} |(A_i)_{k,j}|$ para todo $k \in \{1, 2, ..., n\}$, proponga un algoritmo iterativo que asegure convergencia para el sistema de ecuaciones lineales propuesto en la parte (a). Usted debe demostrar que el algoritmo propuesto convergerá. Note que, en la desigualdad anterior, la matriz que está al lado izquierdo es diferente a la matriz que está al lado derecho.