Matrices por BLOQUES

Otro desafío es el de las matrices cuyos coeficientes son otras matrices: las matrices por bloques. Al principio, no es obvio comprender su utilidad ni cómo son equivalentes a las matrices de toda la vida, pero, por sobre todo, es difícil comprender a un nivel intuitivo cómo funciona la multiplicación de matrices por bloques, por qué tiene sentido o cómo equivale a la multiplicación de siempre:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix}$$

Para entenderlo, lo esencial es darse cuenta de que multiplicar dos matrices implica (al menos en el caso de números reales) hacer productos punto entre las filas de la 1° matriz y las columnas de la 2°, de esta forma:

$$\begin{pmatrix} — & \mathbf{f}_1^T & — \\ — & \mathbf{f}_2^T & — \\ — & \mathbf{f}_3^T & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_2 & \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_3 \\ \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_2 & \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_3 \\ \mathbf{f}_3^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_3^T\mathbf{c}_2 & \mathbf{f}_3^T\mathbf{c}_3 \end{pmatrix}$$

Si hago la siguiente partición en el resultado:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_2 & \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_3 \\ \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_2 & \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_3 \\ \hline \mathbf{f}_3^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_3^T\mathbf{c}_2 & \mathbf{f}_3^T\mathbf{c}_3 \end{array}\right)$$

y miras, por ejemplo, el bloque superior izquierdo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_2 \end{pmatrix}$$

puede que te des cuenta de que se puede expresar como el producto entre las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} — & \mathbf{f}_1^T & — \\ — & \mathbf{f}_2^T & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_2 \end{pmatrix}$$

y pasa lo mismo en los demás bloques:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_2 & \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_3 \\ \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_2 & \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_3 \\ \hline \mathbf{f}_3^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_3^T\mathbf{c}_2 & \mathbf{f}_3^T\mathbf{c}_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} — & \mathbf{f}_1^T & — \\ — & \mathbf{f}_2^T & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 \\ | & | \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} — & \mathbf{f}_1^T & — \\ — & \mathbf{f}_2^T & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \mathbf{c}_3 \\ | \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} — & \mathbf{f}_3^T & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 \\ | & | \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} — & \mathbf{f}_3^T & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \mathbf{c}_3 \\ | \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

Entonces, si defines los siguientes bloques $A = \begin{pmatrix} — & \mathbf{f}_1^T & — \\ — & \mathbf{f}_2^T & — \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} — & \mathbf{f}_3^T & — \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 \\ | & | \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} | \\ \mathbf{c}_3 \\ | \end{pmatrix}$, podrás mostrar que la multiplicación anterior se puede expresar como:

$$\left(\begin{array}{ccc} — & \mathbf{f}_1^T & — \\ — & \mathbf{f}_2^T & — \\ \hline — & \mathbf{f}_3^T & — \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} | & | & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ | & | & | \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AC & AD \\ \hline BC & BD \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_2 & \mathbf{f}_1^T\mathbf{c}_3 \\ \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_2 & \mathbf{f}_2^T\mathbf{c}_3 \\ \hline \mathbf{f}_3^T\mathbf{c}_1 & \mathbf{f}_3^T\mathbf{c}_2 & \mathbf{f}_3^T\mathbf{c}_3 \end{array}\right)$$

Así como el ejemplo anterior, puedes experimentar y particionar las matrices de la manera que quieras, en diferentes bloques, mostrando que **operar con matrices por bloques es consistente con lo que has hecho toda la vida**.

Esto es muy útil para abstraer bloques dentro de las matrices y operar con ellos como lo harías normalmente. Es mejor acostumbrarse a esto, porque también habrá varios ejercicios en este curso involucrando matrices por bloques.