Ayudantía

SCT - Semana - 13

Método del Residuo Mínimo Generalizado (GMRes)

1. Realice 2 iteraciones de GMRes en este sistema de ecuaciones, usando como *initial guess* $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}^T$. Reporte las 2 aproximaciones encontradas a la solución.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

PREPARATIVO 1: Initial Guess

El *initial guess* entregado $\mathbf{x}_0$ busca ser una aproximación inicial de $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}^T$. Si definimos $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}^T$ tal que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'$, entonces podemos reescribir la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}') &= \mathbf{b} \\ A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{x}' &= \mathbf{b} \\ A\mathbf{x}' &= \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0 \\ A\mathbf{x}' &= \mathbf{b}' \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, estamos aproximando la solución de este nuevo sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

PREPARATIVO 2: Vector normal inicial $\mathbf{q}_1$

Se debe definir el vector inicial $\mathbf{q}_1$, obtenido al normalizar $\mathbf{b}' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\end{pmatrix}^T$. Su norma es $\|\mathbf{b}'\| = 2$. Por tanto:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{b}'}{\|\mathbf{b}'\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Iteración 1 de GMRes

Se busca aproximar $\mathbf{x}'$ como la combinación lineal de 1 vector. Es decir, $\mathbf{x}'_{\text{aprox. 1}} = c_1\mathbf{q}_1$, donde c_1 debe ser el coeficiente tal que $A\mathbf{x}'_{\text{aprox. 1}} = Ac_1\mathbf{q}_1$ mejor aproxime $\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Para ello, hay que resolver el problema de residuo mínimo asociado, $\widehat{c}_1 = \underset{c_1}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{b}' - Ac_1\mathbf{q}_1\|$. Sin embargo, en vez de resolverlo directamente, este se puede reducir con una sustitución $A\mathbf{q}_1 = Q_2\widetilde{H}_1$ lograda por la 1° iteración de Arnoldi. Para ello, se debe calcular:

$$A\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$A\mathbf{q}_1$ tiene una componente paralela a $\mathbf{q}_1$ y otra perpendicular, en una dirección determinada por un nuevo vector normal $\mathbf{q}_2$. Es decir, $A\mathbf{q}_1 = h_{11}\mathbf{q}_1 + h_{21}\mathbf{q}_2$. Para obtener $\mathbf{q}_2$, se debe ortogonalizar $A\mathbf{q}_1$ respecto de $\mathbf{q}_1$ y normalizar el resultado, de manera similar al proceso de Gram-Schmidt. Su componente paralela está dada por:

$$\mathbf{u}_{\parallel} \;=\; h_{11}\mathbf{q_1} \;=\; \left(\mathbf{q}_1^T A\mathbf{q}_1\right)\mathbf{q}_1 \;=\; \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}\mathbf{q}_1 \;=\; -4\mathbf{q}_1$$

Al restarla a $A\mathbf{q}_1$, se obtiene su parte ortogonal a $\mathbf{q}_1$:

$$\mathbf{u}_{\perp} \;=\; A\mathbf{q}_1 - (-4)\mathbf{q}_1 \;=\; \begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix} - (-4)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$$

Al normalizarla, se obtiene el nuevo vector $\mathbf{q}_2$:

$$\mathbf{q}_2 \;=\; \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{\|\mathbf{u}_{\perp}\|} \;=\; \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Por tanto, la componente de $A\mathbf{q}_1$ perpendicular a $\mathbf{q}_1$ es $\mathbf{u}_{\perp} = h_{21}\mathbf{q}_2 = 3\mathbf{q}_2$. Combinándola con la componente paralela a $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{u}_{\parallel} = -4\mathbf{q}_1$, $A\mathbf{q}_1$ se puede expresar así:

$$\begin{aligned} A\mathbf{q}_1 &= h_{11}\mathbf{q}_1 + h_{21}\mathbf{q}_2 \\ &= -4\mathbf{q}_1 + 3\mathbf{q}_2 \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix}| & | \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \\ | & |\end{pmatrix}}_{Q_2}\underbrace{\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}}_{\widetilde{H}_1} \end{aligned}$$

Con esto, finaliza la 1° iteración de Arnoldi. Esta reduce el problema de residuo mínimo, $\widehat{c}_1 = \underset{c_1}{\operatorname{argmin}}\,\|\mathbf{b}' - A\mathbf{q}_1 c_1\|$, a la forma $\widehat{c}_1 = \underset{c_1}{\operatorname{argmin}}\left\|\|\mathbf{b}'\|\mathbf{e}_1 - \widetilde{H}_1 c_1\right\|$, donde $\|\mathbf{b}'\| = 2$ es la norma del vector derecho y $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ es el 1° vector canónico en 2 dimensiones.

Esta nueva forma se puede resolver mediante las ecuaciones normales $\widetilde{H}_1^T\widetilde{H}_1\widehat{c}_1 = \widetilde{H}_1^T\|\mathbf{b}\|\mathbf{e}_1$. No se verá factorización QR en este solucionario debido al tamaño de los problemas a resolver, pero un algoritmo serio implementado en computador debería evitar resolver directamente las ecuaciones normales:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1^T\widetilde{H}_1\widehat{c}_1 &= \widetilde{H}_1^T\|\mathbf{b}'\|\mathbf{e}_1 \\ \begin{pmatrix}-4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\widehat{c}_1 &= \begin{pmatrix}-4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \\ 25\widehat{c}_1 &= -8 \\ \widehat{c}_1 &= \frac{-8}{25} \end{aligned}$$

Por tanto, para la aproximación obtenida en la 1° iteración de GMRes, $\mathbf{x}'_{\text{aprox. 1}} = \widehat{c}_1\mathbf{q}_1 = \dfrac{-8}{25}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-8/25\end{pmatrix}$.

Como $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'$, nuestra 1° aproximación es $\mathbf{x}_{\text{aprox. 1}} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'_{\text{aprox. 1}} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-8/25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-33/25\end{pmatrix}$.

Iteración 2 de GMRes

Se busca aproximar $\mathbf{x}'$ como la combinación lineal de 2 vectores. Es decir,

$$\mathbf{x}'_{\text{aprox. 2}} = c_1\mathbf{q}_1 + c_2\mathbf{q}_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \\ | & | \end{pmatrix}}_{Q_2} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}},$$

donde $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ debe ser el vector de coeficientes tal que $A\mathbf{x}'_{\text{aprox. 2}} = AQ_2\mathbf{c}$ mejor aproxime $\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Reutilizando los vectores ortonormales $\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se podría simplemente resolver el problema de residuo mínimo $\widehat{\mathbf{c}} = \underset{\mathbf{c}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{b} - AQ_2\mathbf{c}\|$, pero una 2° iteración de Arnoldi permite realizar una sustitución $AQ_2 = Q_3\widetilde{H}_2$. El siguiente paso es calcular $A\mathbf{q}_2$:

$$A\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A\mathbf{q}_2$ tiene una componente paralela a $\mathbf{q}_1$, una paralela a $\mathbf{q}_2$ y otra perpendicular a ambos, en una dirección determinada por un nuevo vector normal $\mathbf{q}_3$. Es decir, $A\mathbf{q}_2 = h_{12}\mathbf{q}_1 + h_{22}\mathbf{q}_2 + h_{32}\mathbf{q}_3$. Para obtener $\mathbf{q}_3$, se debe ortogonalizar $A\mathbf{q}_2$ respecto de $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ y normalizar el resultado.

Primero buscamos su parte paralela a $\mathbf{q}_1$ para restársela:

$$\mathbf{u}_{1\|} \;=\; h_{12}\mathbf{q_1} \;=\; \left(\mathbf{q}_1^T A\mathbf{q}_2\right)\mathbf{q}_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{q}_1 \;=\; 0\mathbf{q}_1$$

Al restar $0\mathbf{q}_1$ a $A\mathbf{q}_2$, queda igual.

Luego buscamos su parte paralela a $\mathbf{q}_2$ para restársela:

$$\mathbf{u}_{2\|} \;=\; h_{22}\mathbf{q_2} \;=\; \left(\mathbf{q}_2^T A\mathbf{q}_2\right)\mathbf{q}_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{q}_2 \;=\; 4\mathbf{q}_2$$

Al restarla a $A\mathbf{q}_2$, se obtiene la componente perpendicular a $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$:

$$\mathbf{u}_\perp \;=\; A\mathbf{q}_2 - 0\mathbf{q}_1 - 4\mathbf{q}_2 \;=\; \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esta componente se normaliza para obtener $\mathbf{q}_3$:

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{u}_\perp}{\|\mathbf{u}_\perp\|} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la componente de $A\mathbf{q}_1$ perpendicular a $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ es $\mathbf{u}_\perp = h_{32}\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_3$. Combinándola con las componentes paralelas a $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$:

$$\begin{aligned} A\mathbf{q}_2 &= h_{12}\mathbf{q}_1 + h_{22}\mathbf{q}_2 + h_{32}\mathbf{q}_3 \\ &= 0\mathbf{q}_1 + 4\mathbf{q}_2 + 1\mathbf{q}_3 \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si se combina con la expresión obtenida anteriormente para $A\mathbf{q}_1$:

$$\begin{aligned} A\mathbf{q}_1 &= h_{11}\mathbf{q}_1 + h_{21}\mathbf{q}_2 \\ &= h_{11}\mathbf{q}_1 + h_{21}\mathbf{q}_2 + 0\mathbf{q}_3 \\ &= -4\mathbf{q}_1 + 3\mathbf{q}_2 + 0\mathbf{q}_3 \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

se obtiene, finalmente, la sustitución $AQ_2 = Q_3\widetilde{H}_2$:

$$\underbrace{A\begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \\ | & | \end{pmatrix}}_{Q_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{Q_3} \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\widetilde{H}_2}$$

Con este resultado de la 2° iteración de Arnoldi, se puede reemplazar el problema $\widehat{\mathbf{c}} = \underset{\mathbf{c}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{b}' - AQ_2\mathbf{c}\|$ por $\widehat{\mathbf{c}} = \underset{\mathbf{c}}{\operatorname{argmin}} \left\| \|\mathbf{b}'\|\mathbf{e}_1 - \widetilde{H}_2\mathbf{c} \right\|$, donde $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ahora es el 1° vector canónico en 3 dimensiones, y $\|\mathbf{b}'\| = 2$. Se puede plantear las ecuaciones normales $\widetilde{H}_2^T \widetilde{H}_2 \widehat{\mathbf{c}} = \widetilde{H}_2^T \|\mathbf{b}\|\mathbf{e}_1$ y resolverlas:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_2^T \widetilde{H}_2 \widehat{\mathbf{c}} &= \widetilde{H}_2^T \|\mathbf{b}\|\mathbf{e}_1 \\ \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{c}_1 \\ \widehat{c}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 25 & 12 \\ 12 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{c}_1 \\ \widehat{c}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \widehat{c}_1 \\ \widehat{c}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -136/281 \\ 96/281 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, para la aproximación en la 2° iteración, $\mathbf{x}'_{\text{aprox. 2}} = \widehat{c}_1\mathbf{q}_1 + \widehat{c}_2\mathbf{q}_2 = \dfrac{-136}{281}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{96}{281}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96/281 \\ 0 \\ -136/281 \end{pmatrix}$.

Entonces, $\mathbf{x}_{\text{aprox. 2}} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'_{\text{aprox. 2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 96/281 \\ 0 \\ -136/281 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 377/281 \\ 0 \\ -417/281 \end{pmatrix}$.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B,\ C,\ Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Considere la siguiente variante de la ecuación de Sylvester:

$$AZ + \operatorname{Conj}(Z)B = C \tag{1}$$

donde A es simétrica y definida positiva, B es Hermitiana, C es una matriz no nula y $\operatorname{Conj}(\cdot)$ corresponde al operador de conjugación, es decir, si $z = x + iy$, donde x e y son números reales, e $i^2 = -1$, entonces $\operatorname{Conj}(z) = x - iy$ y, en el caso matricial, se aplica elemento a elemento.

Se sugiere considerar $Z = X + iY$, $B = B_1 + iB_2$ y $C = C_1 + iC_2$, donde $X,\ Y,\ B_1,\ B_2,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

El desafío es proponer un algoritmo que solo dependa de aritmética real para encontrar $Z = X + iY$. Es decir, es suficiente obtener X e Y. Recuerde que no está permitido obtener la inversa explícita de ninguna de las matrices involucradas: lo que se debe hacer es resolver el sistema de ecuaciones lineales asociado.

a) Dada la restricción de que solo se puede utilizar aritmética real, reescriba la ecuación 1 para que solo dependa de aritmética real. *Hint: You should get a linear system of equations where the unknowns are the matrices X and Y.*

Reemplazando $Z = X + iY$, $\text{Conj}(Z) = X - iY$, $B = B_1 + iB_2$ y $C + C_1 + iC_2$ en la ecuación 1, se obtiene lo siguiente:

$$A(X + iY) + (X - iY)(B_1 + iB_2) = C_1 + iC_2$$

Se puede desarrollar los productos y expresar el lado izquierdo en la forma $M_R + iM_I$:

$$(AX + XB_1 + YB_2) + i(AY + XB_2 - YB_1) = C_1 + iC_2$$

Para que dos valores complejos sean iguales:

1) sus partes reales deben ser iguales: $AX + XB_1 + YB_2 = C_1$
2) y sus partes imaginarias también: $AY + XB_2 - YB_1 = C_2$

Esto nos entrega el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} AX + XB_1 + YB_2 & = C_1 \\ AY + XB_2 - YB_1 & = C_2 \end{cases} \tag{2}$$

Aquí se mantiene el mismo problema de la ecuación de Sylvester $AX + XB = C$: no se puede factorizar directamente X. La solución, en ese caso, era aplicar el operador de vectorización vec, el cual apila las columnas de una matriz $n \times n$ en un solo vector de largo n^2, para transformar la ecuación en $M\text{vec}(X) = \text{vec}(C)$. Lo mismo se realizará en este caso con ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} \text{vec}(AX + XB_1 + YB_2) & = \text{vec}(C_1) \\ \text{vec}(AY + XB_2 - YB_1) & = \text{vec}(C_2) \end{cases} \tag{3}$$

El operador vec tiene las siguientes propiedades:

- $\text{vec}(A + B) = \text{vec}(A) + \text{vec}(B)$. Con esta propiedad, el sistema se puede expresar así:

$$\begin{cases} \text{vec}(AX) + \text{vec}(XB_1) + \text{vec}(YB_2) & = \text{vec}(C_1) \\ \text{vec}(AY) + \text{vec}(XB_2) - \text{vec}(YB_1) & = \text{vec}(C_2) \end{cases} \tag{4}$$

- $\text{vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\text{vec}(X)$, donde $\otimes$ es el producto de Kronecker.
  Si falta alguna de las matrices A y B en el producto AXB, se puede añadir una matriz identidad I a modo de *placeholder* para aplicar la 2° propiedad. Por ejemplo,

$$\text{vec}(AX) = \text{vec}(AXI) = (I \otimes A)\text{vec}(X)$$
$$\text{vec}(YB_2) = \text{vec}(IYB_2) = (B_2^T \otimes I)\text{vec}(Y)$$

  De esta manera, el sistema original se puede expresar así:

$$\begin{cases} (I \otimes A)\text{vec}(X) + (B_1^T \otimes I)\text{vec}(X) + (B_2^T \otimes I)\text{vec}(Y) & = \text{vec}(C_1) \\ (I \otimes A)\text{vec}(Y) + (B_2^T \otimes I)\text{vec}(X) - (B_1^T \otimes I)\text{vec}(Y) & = \text{vec}(C_2) \end{cases} \tag{5}$$

  Factorizando por $\text{vec}(X)$ y $\text{vec}(Y)$, se obtiene:

$$\begin{cases} (I \otimes A + B_1^T \otimes I)\text{vec}(X) + (B_2^T \otimes I)\text{vec}(Y) & = \text{vec}(C_1) \\ (B_2^T \otimes I)\text{vec}(X) + (I \otimes A - B_1^T \otimes I)\text{vec}(Y) & = \text{vec}(C_2) \end{cases} \tag{6}$$

  lo cual se puede, finalmente, expresar de forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I \otimes A + B_1^T \otimes I & B_2^T \otimes I \\ B_2^T \otimes I & I \otimes A - B_1^T \otimes I \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} \text{vec}(X) \\ \text{vec}(Y) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \text{vec}(C_1) \\ \text{vec}(C_2) \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \tag{7}$$

b) Proponga un algoritmo para encontrar la solución $Z = X + iY$.

Para encontrar la solución $Z = X + iY$, hay que resolver el sistema anterior, expresado como $M\mathbf{x} = \mathbf{c}$, donde

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(X) \\ \mathrm{vec}(Y) \end{pmatrix}$. Luego, se extrae los vectores $\mathrm{vec}(X)$ y $\mathrm{vec}(Y)$ y se desvectorizan para recuperar las matrices X e Y, necesarias para calcular $Z = X + iY$.

Sin embargo, si las matrices A, B, C y Z son de tamaño $n \times n$, entonces la matriz M es de tamaño $2n^2 \times 2n^2$, es decir, tiene $4n^4$ coeficientes, de donde la gran mayoría es 0. No es factible ni conveniente calcular explícitamente la matriz M. Sin la matriz M, no se puede resolver exactamente el sistema $M\mathbf{x} = \mathbf{c}$ (que, de todos modos, requeriría $O((n^2)^3) = O(n^6)$ operaciones) ni aplicar el método de Jacobi (que requiere descomponer la matriz $M = L + D + U$).

En este tipo de situaciones donde no es factible tener la matriz M en memoria, entra el algoritmo GMRes. Si es posible diseñar una función que calcule el producto $M\mathbf{v}$ sin requerir explícitamente M, entonces esta función se puede entregar al algoritmo GMRes para aproximar la solución $\mathbf{x}$.

En efecto, si definimos matrices U y V tales que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(U) \\ \mathrm{vec}(V) \end{pmatrix}$, entonces se puede recorrer, en orden inverso, las ecuaciones de la (7) a la (3) para mostrar que

$$M\mathbf{v} = M \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(U) \\ \mathrm{vec}(V) \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(AU + UB_1 + VB_2) \\ \mathrm{vec}(AV + UB_2 - VB_1) \end{pmatrix}$$

Entonces, la función `afun(v)` que calcula el producto `Mv` consiste en:

1) Separar $\mathbf{v}$ en dos mitades, correspondientes a $\mathrm{vec}(U)$ y $\mathrm{vec}(V)$, respectivamente.
2) Desvectorizar estas dos mitades para obtener las matrices U y V, respectivamente.
3) Calcular las matrices $H_1 = AU + UB_1 + VB_2$ y $H_2 = AV + UB_2 - VB_1$.
4) Vectorizar las matrices anteriores, obteniendo $\mathrm{vec}(H_1)$ y $\mathrm{vec}(H_2)$.
5) Juntar ambos vectores en un nuevo vector $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(H_1) \\ \mathrm{vec}(H_2) \end{pmatrix}$.
6) Retornar este vector $\mathbf{w}$ que corresponde al producto $M\mathbf{v}$.

Esta función calcula el producto $M\mathbf{v}$ sin requerir explícitamente la matriz M y en solo $O(n^3)$ operaciones, en comparación las $O(n^4)$ operaciones que se requerirían para calcular el producto con la matriz M explícita. Esta función se puede entregar a GMRes para aproximar la solución $\mathbf{x}$ al problema original y, de ahí, recuperar X e Y para calcular Z.