Introducción a la Programación y Análisis Numérico

Año 2022

Práctica 6: Integración Numérica

Fórmulas de integración numérica.

Definiremos a continuación las reglas de integración que veremos en este curso. Para las mismas necesitamos que:

- f sea una función suave sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.
- El intervalo $[a, b]$ está subdividido en n subintervalos de longitud $h = (b - a)/n$.
- Se tendrán $n + 1$ puntos equiespaciados $x_i = x_0 + ih$ para $i = 0, 1, ..., n$, donde $x_0 = a$ y $x_n = b$.

Luego, las reglas de integración con sus respectivos términos de error (siendo ξ un punto del intervalo (a, b)) son:

Regla del rectángulo

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) + \frac{h(b-a)}{2}f'(\xi).$$

Regla del trapecio simple

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).$$

Regla del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\big) - \frac{h^2(b-a)}{12}f''(\xi).$$

Regla de Simpson 1/3 simple

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}\big(f(x_0 + 4f((a+b)/2)) + f(x_n)\big) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi).$$

Regla de Simpson 1/3 compuesta

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\big(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})\big) - \frac{h^4(b-a)}{180}f^{(4)}(\xi).$$

Cuadratura de Gauss-Legendre

Si $x_1, x_2, ...x_n$ son las n raíces del polinomío de Legendre de grado n, la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre de n puntos para estimar la integral de una función f sobre el intervalo $[-1, 1]$ está dada por:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{1}^{n} A_i f(x_i), \quad \text{donde:} \quad A_i = \int_{-1}^{1}\prod_{j=1}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}dx.$$

El error de truncamiento está dado por $E(f) = c_n f^{(2n)}(\xi)$, donde ξ es un punto del intervalo $(-1, 1)$ y c_n es una constante. Esta fórmula de integración es exacta para todo polinomio de grado $\leq 2n - 1$.

Como se puede observar, el cálculo de la integral dada por las fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre es en el intervalo de integración $(-1, 1)$. Luego, si $b > a$, el cambio de variable $t = \frac{2x-(b+a)}{(b-a)}$ permite evaluar la integral en el intervalo (a, b):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 \phi(t)dt, \quad \text{donde:} \quad \phi(t) = \frac{1}{2}(b-a)f\big(\frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a)\big).$$

Ejercicio 1

Implemente mediante funciones las reglas del rectángulo, del trapecio y de Simpson arriba definidas. Dadas las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ 2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x}dx$

a) Aproximar su valor empleando la regla trapezoidal simple. Acote el error cometido.

b) Aproximar su valor empleando la regla de Simpson simple. Acote el error cometido.

c) Grafique y compare las aproximaciones realizadas en los incisos anteriores. Puede utilizar el siguiente código como referencia en un software de cálculo numérico.

```
a=0;      % limite inferior de integración
b=1;      % limite superior de integración
f=@(x)(1./(1+x.^2));      % define la funcion a integrar

xt=a:0.01:b;         % define un vector para graficar
yt=f(xt);
plot(xt,yt,'Linewidth',2)     % grafica la funcion definida

P1=f(a)+(f(b)-f(a))/(b-a).*(xt-a);
hold on
plot(xt,P1,'r')      % aproximación mediante un trapecio

Itrap=(f(b)+f(a))/2*(b-a) % calcula el valor de la integral

h=(b-a)/2;           % aproximación con un polinomio de orden 2
x2=[a (b+a)/2 b];
y2=f(x2);
plot(x2,y2,'o')

P2= f(a)+(f(a+h)-f(a))/h.*(xt-a)+ (f(b)-2*f(a+h) +f(a))/2/h.^2.*(xt-a).*(xt-a-h);
plot(xt,P2,'g')

Isimp=h/3*(f(b)+4*f(a+h)+f(a)) % Calcula el valor de la integral
```

d) Aproximar su valor empleando la regla trapezoidal compuesta utilizando un paso $h = 0,1$.

e) Aproximar su valor empleando la regla de Simpson compuesta utilizando un paso $h = 0,1$. Comparar con el inciso anterior.

f) Obtener el valor exacto de cada integral y calcular el valor del error porcentual de cada resultado obtenido.

g) Realice un gráfico esquemático comparando las reglas simple y compuesta de cada método de calculo. Prediga como evoluciona el valor de la integral al aumentar el paso h.

Ejercicio 2

Aplicar la reglas del rectángulo, trapecio compuesta y Simpson compuesta a la integración de $\sqrt{x}$ entre los argumentos 1,00 y 1,30, utilizando la siguiente tabla:

x_i	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30
$f(x_i)$	1,00000	1,02470	1,04881	1,07238	1,09544	1,11803	1,14017

Comparar los resulados de los distintos métodos con el valor analítico de la integral.

Ejercicio 3

Sabiendo que la integral de $\int_0^\pi sen(x)dx = 2$, determine cúal es la menor cantidad de puntos necesarios considerar en la integración númerica por las regla de trapecios y Simpson compuestas, respectivamente, para garantizar un error absoluto menor a 0,00002. Para ello, utilice la expresión del error de cada método. ¿A qué se debe la diferencia en los resultados obtenidos? Escriba tanto la cantidad de puntos determinados como el error absoluto obtenido en cada caso.

Ejercicio 4

Calcular la integral de los siguientes datos tabulados empleando el método de trapecios y Simpson.

Puntos	0	1	2	3	4	5
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	1	7	4	3	5	2

¿Es posible emplear las fórmulas de cuadraturas Gaussianas para el calculo de la integral con los datos suministrados?

Ejercicio 5

Sabiendo que:

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

aproximar $ln(x)$ para x=1,1 con h=0,1 empleando la fórmula trapezoidal. Acotar el error y comparar con el error real cometido.

Ejercicio 6

Evalúe las siguientes integrales, utilizando las fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre. Con dos, tres y cuatro puntos. (Obtener los pesos y raíces de una tabla normalizada)

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{e^x sen(x)}{1+x^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{sen(x)}{x}\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{arctg(x)}{1+x}\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}\, dx$