Introducción a la Programación y Análisis Numérico

Año 2022

Práctica 7: Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones diferenciales ordinarias: problema de valor inicial.

Ej.1

Dado el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Realice funciones en Matlab/Octave que permita calcular la solución en el intervalo [0,1] implementando los métodos de Euler simple, Euler modificado y Runge-Kutta de cuarto orden para los pasos $h = 0.05$; $h = 0.025$ y $h = 0.0125$.

   Notas: Para obtener funciones que puedan ser utilizadas en todos los ejercicios considere:

   - Definir en el programa principal los límites de integración y el paso de cálculo de forma de poder cambiarlos fácilmente.
   - Emplear funciones anónimas definidas en el programa principal para la función que se desea integrar. Notar que la función a integrar escrita de forma general depende de dos variables.
   - Utilizar como argumentos de entrada de las funciones a implementar (Euler simple, Euler modificado y Runge-Kutta) los límites de integración, el paso de cálculo, la función anónima y el valor inicial.

b) Calcular el error absoluto en cada caso comparando con la solución exacta: $y(x) = x + e^{-x}$. Graficar superponiendo las distintas soluciones.

c) Interpretar la relación entre el paso utilizado y el error absoluto.

Ej.2

Dada la ecuación $y' = sen(x)$ en el intervalo $[0 : 8]$ con el valor inicial $y(x_0) = y_0 = 1$, adoptar un paso h y resolver con los distintos métodos de paso simple estudiados. Armar una tabla donde se puedan comparar los resultados y errores. Graficar las soluciones. La solución exacta del problema es $y = 2 - cos(x)$.

Ej.3

Considere el problema de valor inicial

$$y' = y - x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y(0) = 0.5$$

Compare las soluciones del método de Euler con $h = 0.025$, el método de Euler modificado con $h = 0.05$ y el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.1$ en los puntos de red 0.1, 0.2, 0,3, 0.4 y 0.5. La solución exacta del problema es $y(x) = 1 + x^2 + 2x - \frac{1}{2}e^x$.

Ej.4

La altura $h(t)$ del agua en un tanque cilíndrico vertical que se vacía por un orificio ubicado en la base puede calcularse según la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -k\sqrt{h(t)}$$

donde k es el coeficiente que depende de la forma del orificio y de las secciones transversales del tanque y del orificio.

tanque_cilindrico.pdf

Si $h(t)$ se mide en metros, el tiempo t se mide en minutos y si inicialmente el tanque tiene agua hasta una altura $h_o = 3$ m, calcular la altura del agua en el tanque luego de trascurridos 15 min considerando $\Delta t = 0,5$ min y utilizando un método de segundo orden. ¿Al cabo de cuanto tiempo se vacía completamente?. Considere $k = 0,06$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias: sistemas de ecuaciones de primer orden.

Ej.5
Sea el sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5y_1 \qquad \frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1$$

con condiciones iniciales $y_1 = 4$ e $y_2 = 6$ en $x = 0$. Integre en el intervalo [0:10] con paso $h = 0.5$. Para ello aplique los métodos de Euler simple y de Runge Kutta de cuarto orden. Con la información proporcionada, ¿en qué resultados confiaría más? ¿Por qué?

Nota: el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones consiste en aplicar la técnica simple por ecuación en cada paso antes de proceder con el siguiente.

Ej.6
Dado un resorte con una constante de rigidez $k = 200$ KN/m, que sostiene una masa m de 20 kg. Hallar las funciones del desplazamiento y la velocidad que describen el movimiento en función del tiempo cuando el desplazamiento inicial es $u_0 = 0.02$ m y el sistema no posee amortiguamiento. La ecuación diferencial que describe el problema es $m\,u''(t) + k\,u(t) = 0$, donde $u(t)$ representa el desplazamiento. Considere la velocidad inicial nula. Comparar con la solución exacta. Graficar ambas soluciones.

Ej.7
Un péndulo de masa $m = 30$ kg, con una cuerda de longitud $L = 3$ m. se aparta un ángulo inicial de 0.1 radianes.

a) Plantear la ecuación que representa el movimiento del objeto y trazar una curva representando el ángulo de apertura en el tiempo. Suponer que no hay disipación de energía.

b) Analizar el caso del problema anterior pero considerando un amortiguamiento proporcional a la velocidad con el factor c= 3 N/m/s.

Ayuda: los libros Chapra y/o Burden pueden serle de utilidad.

Ecuaciones diferenciales ordinarias: problemas de valores de contorno.

Ej.8
Implemente mediante una función el método de diferencias finitas.

Ej.9
Hallar la solución de $y'' - y = x$ con las condiciones de borde $y(0) = -2$; $y(1) = 1$. Adoptar $h = 0.2$. Graficar la solución.

Ej.10
Hallar la solución de $y'' - 2y' + y = 2e^x$ con las condiciones de borde $y(0) - 2y'(0) = 3$; $y(1) + y'(1) = 6\,e$. Adoptar $h = 0.2$. Graficar la solución.

Ej.11: Ejercicio adicional.
Una barra de acero simplemente apoyada en sus dos extremos tiene una sección constante rectangular de ancho 2 cm y altura 4 cm. La barra tiene 120 cm de largo y una carga puntual en el centro de 100 N. Como se muestra en la figura **??**.

`Barra_apoyada.pdf`

Figure 1:

La ecuación diferencial que representa la deformación elástica es:

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{EJ}$$

Donde:

- $M(x)$ es el momento flector

$$M(x) = \begin{cases} \dfrac{P}{2}\,x & 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{P}{2}\,(L - x) & \dfrac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

- E es el módulo de elasticidad
- J es el momento de inercia.

a) Hallar la deformación de la barra adoptando un paso h y suponiendo que es nula en los extremos. Expresar la ecuación en términos de E y J. Graficar la solución y compararla con la solución exacta en el punto central igual a

$$y\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{P\,L^3}{48\,EJ}$$

b) Hallar la deformación de la barra suponiendo la misma carga distribuida uniformemente a lo largo de la barra. Comparar las soluciones.