

## Ecuaciones diferenciales ordinarias: problema de valor inicial.

### Ej.1

Dado el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a) Realice funciones en Matlab/Octave que permita calcular la solución en el intervalo  $[0,1]$  implementando los métodos de Euler simple, Euler modificado y Runge-Kutta de cuarto orden para los pasos  $h = 0.05$ ;  $h = 0.025$  y  $h = 0.0125$ .

**Notas:** Para obtener funciones que puedan ser utilizadas en todos los ejercicios considere:

- Definir en el programa principal los límites de integración y el paso de cálculo de forma de poder cambiarlos fácilmente.
  - Emplear funciones anónimas definidas en el programa principal para la función que se desea integrar. Notar que la función a integrar escrita de forma general depende de dos variables.
  - Utilizar como argumentos de entrada de las funciones a implementar (Euler simple, Euler modificado y Runge-Kutta) los límites de integración, el paso de cálculo, la función anónima y el valor inicial.
- b) Calcular el error absoluto en cada caso comparando con la solución exacta:  $y(x) = x + e^{-x}$ . Graficar superponiendo las distintas soluciones.
- c) Interpretar la relación entre el paso utilizado y el error absoluto.

### Ej.2

Dada la ecuación  $y' = \sin(x)$  en el intervalo  $[0 : 8]$  con el valor inicial  $y(x_0) = y_0 = 1$ , adoptar un paso  $h$  y resolver con los distintos métodos de paso simple estudiados. Armar una tabla donde se puedan comparar los resultados y errores. Graficar las soluciones. La solución exacta del problema es  $y = 2 - \cos(x)$ .

### Ej.3

Considere el problema de valor inicial

$$y' = y - x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y(0) = 0.5$$

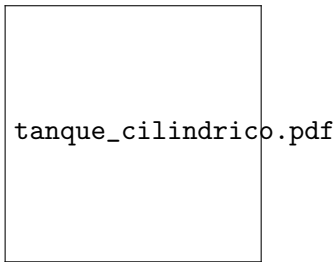
Compare las soluciones del método de Euler con  $h = 0.025$ , el método de Euler modificado con  $h = 0.05$  y el método de Runge-Kutta de cuarto orden con  $h = 0.1$  en los puntos de red 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5. La solución exacta del problema es  $y(x) = 1 + x^2 + 2x - \frac{1}{2}e^x$ .

### Ej.4

La altura  $h(t)$  del agua en un tanque cilíndrico vertical que se vacía por un orificio ubicado en la base puede calcularse según la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -k \sqrt{h(t)}$$

donde  $k$  es el coeficiente que depende de la forma del orificio y de las secciones transversales del tanque y del orificio.



Si  $h(t)$  se mide en metros, el tiempo  $t$  se mide en minutos y si inicialmente el tanque tiene agua hasta una altura  $h_o = 3$  m, calcular la altura del agua en el tanque luego de transcurridos 15 min considerando  $\Delta t = 0,5$  min y utilizando un método de segundo orden. ¿Al cabo de cuanto tiempo se vacía completamente?. Considere  $k = 0,06$ .

## Ecuaciones diferenciales ordinarias: sistemas de ecuaciones de primer orden.

### Ej.5

Sea el sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5y_1 \quad \frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1$$

con condiciones iniciales  $y_1 = 4$  e  $y_2 = 6$  en  $x = 0$ . Integre en el intervalo  $[0:10]$  con paso  $h = 0.5$ . Para ello aplique los métodos de Euler simple y de Runge Kutta de cuarto orden. Con la información proporcionada, ¿en qué resultados confiaría más? ¿Por qué?

Nota: el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones consiste en aplicar la técnica simple por ecuación en cada paso antes de proceder con el siguiente.

### Ej.6

Dado un resorte con una constante de rigidez  $k = 200$  KN/m, que sostiene una masa  $m$  de 20 kg. Hallar las funciones del desplazamiento y la velocidad que describen el movimiento en función del tiempo cuando el desplazamiento inicial es  $u_0 = 0.02$  m y el sistema no posee amortiguamiento. La ecuación diferencial que describe el problema es  $m u''(t) + k u(t) = 0$ , donde  $u(t)$  representa el desplazamiento. Considere la velocidad inicial nula. Comparar con la solución exacta. Graficar ambas soluciones.

### Ej.7

Un péndulo de masa  $m = 30$  kg, con una cuerda de longitud  $L = 3$  m. se aparta un ángulo inicial de 0.1 radianes.

- Plantear la ecuación que representa el movimiento del objeto y trazar una curva representando el ángulo de apertura en el tiempo. Suponer que no hay disipación de energía.
- Analizar el caso del problema anterior pero considerando un amortiguamiento proporcional a la velocidad con el factor  $c = 3$  N/m/s.

Ayuda: los libros Chapra y/o Burden pueden serle de utilidad.

## Ecuaciones diferenciales ordinarias: problemas de valores de contorno.

### Ej.8

Implemente mediante una función el método de diferencias finitas.

**Ej.9**

Hallar la solución de  $y'' - y = x$  con las condiciones de borde  $y(0) = -2$  ;  $y(1) = 1$ . Adoptar  $h = 0.2$ . Graficar la solución.

**Ej.10**

Hallar la solución de  $y'' - 2y' + y = 2e^x$  con las condiciones de borde  $y(0) - 2y'(0) = 3$  ;  $y(1) + y'(1) = 6e$ . Adoptar  $h = 0.2$ . Graficar la solución.

**Ej.11: Ejercicio adicional.**

Una barra de acero simplemente apoyada en sus dos extremos tiene una sección constante rectangular de ancho 2 cm y altura 4 cm. La barra tiene 120 cm de largo y una carga puntual en el centro de 100 N. Como se muestra en la figura ??.

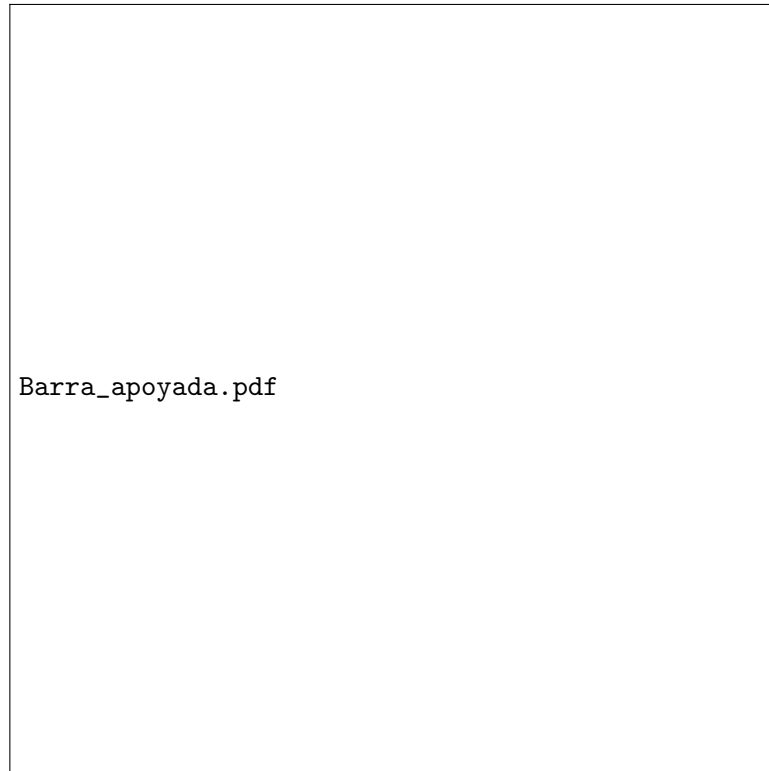


Figure 1:

La ecuación diferencial que representa la deformación elástica es:

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{EJ}$$

Donde:

- $M(x)$  es el momento flector

$$M(x) = \begin{cases} \frac{P}{2}x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{P}{2}(L-x) & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

- $E$  es el módulo de elasticidad
- $J$  es el momento de inercia.

- a) Hallar la deformación de la barra adoptando un paso  $h$  y suponiendo que es nula en los extremos. Expresar la ecuación en términos de  $E$  y  $J$ . Graficar la solución y compararla con la solución exacta en el punto central igual a

$$y\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{P L^3}{48 E J}$$

- b) Hallar la deformación de la barra suponiendo la misma carga distribuida uniformemente a lo largo de la barra. Comparar las soluciones.