Introducción a la Programación y Análisis Numérico

Año 2022

Práctica 5: Diferenciación Numérica

Ejercicio 1

La derivada de f, en un punto a, puede ser estimada a partir del cociente incremental

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

para valores pequeños de h. La expresión se conoce con el nombre de *fórmula de diferencia progresiva* si $h > 0$ o *regresiva* si $h < 0$.

a) Demostrar que el error de truncamiento de la fórmula de diferencia está dado por:

$$E(f) = -\frac{h}{2} f''(\xi)$$

para algún ξ entre a y $a + h$.

La *fórmula de diferencias centradas* está dada por:

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

b) Demostrar que el error de truncamiento de la fórmula de diferencias centradas está dado por:

$$E(f) = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi),$$

donde ξ se encuentra entre $a - h$ y $a + h$, constituyendo una mejor aproximación que la fórmula anterior.

Ejercicio 2

Implemente los códigos para las fórmulas de diferencias regresivas, progresivas y centradas como funciones.

Aproximar $f'(0.1)$ para $f(x) = sen(x)$ empleando la fórmula de diferencia centrada con diferentes valores de h. Comenzar con $h = 10$ y reducir en forma sucesiva el paso a la décima parte del paso anterior. Imprimir para cada h el valor estimado de la derivada y el error cometido (al menos 25 veces). Comentar los resultados obtenidos. ¿A qué se debe lo observado? ¿Cuál parece ser el rango del valor apropiado para h?

Ejercicio 3

Mostrar que si los errores de redondeo por la utilización de aritmética finita en la evaluación de f están acotados por algún $\delta > 0$ y la derivada tercera de f está acotada por $M > 0$, entonces

$$\left| f'(a) - \frac{\hat{f}(a+h) - \hat{f}(a-h)}{2h} \right| \leq \frac{\delta}{h} + \frac{h^2}{6} M,$$

donde $\hat{f}$ denota la evaluación de f en aritmética finita. Además, demostrar que el valor *óptimo* de h, definido como el valor de h para el cual la suma de las magnitudes del error de redondeo y truncamiento se minimizan, se expresa por

$$h_{opt} = \left(\frac{3\delta}{M} \right)^{1/3}.$$

Leer y analizar el ejemplo 4 de la sección 4.1 (pág 174) del libro **Análisis Numérico, Burden R. y Faires D.** Séptima edición.

Ejercicio 4

Demostrar que $f''(a)$ se puede aproximar por la expresión de diferencias

$$f''(a) \simeq \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$$

con un término de error dado por

$$E(f) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi),$$

donde ξ se encuentra entre $a-h$ y $a+h$.

Ejercicio 5

Aproximar numéricamente la derivada segunda de $f(x) = cos(x)$ en el punto $x = 0.5$ con un valor de $h = 0.1$, $h = 0.01$ y $h = 0.001$. Calcular el error en cada caso y obtener conclusiones. ¿Con qué valor de h es conveniente aproximar la derivada para obtener un menor error?

Ejercicio 6

En un laboratorio se obtuvieron los siguientes pares de valores distancia-tiempo para un objeto:

t(s)	0	1	2	3	4	5
d(cm)	0	2	8	18	32	50

a) Mediante diferenciación numérica determine la velocidad y la aceleración del objeto en cada momento.

b) Describa el orden del error cometido en cada aproximación.

Ejercicio 7

Dado el siguiente conjunto de datos:

x_i	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5
$f(x_i)$	3.2974	2.8227	2.7183	2.7923	2.9878	3.2883	3.6945	4.2168	4.8730

a) Calcular la pendiente de la recta tangente en cada punto x_i dado utilizando el esquema de diferenciación más adecuado.

b) Sabiendo que los puntos pertenecen a la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Calcular analíticamente los valores de $f'(x_i)$, el error absoluto y porcentual.

c) Utilizando un paso $h = 0,1$ realizar una nueva tabla de valores a partir de la función $f(x)$ dada. Obtener una aproximación de $f'(x)$ en cada punto. Calcule el error cometido.