

$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение лемниска

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Из 3-4 ур. ср. поменять 1.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3+1 & 1+2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

Из второй ур. поменять 2x2 строки

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1+2 & 1+4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

Основное лемниско с омб. чисел

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - 5x_4 = 2 \\ -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Лемниско имеет  
единств. член ред.  
Пусть  $x_4 = c$

$$x_4 = c$$

$$x_3 = (3c - 4)/2$$

$$x_2 = x_3 + 5x_4 + 2 = (3c - 4)/2 + 5c + 2 = 6,5c$$

$$x_1 = -6,5c + (3c - 4)/2 + 2c = -5c - 2 + 2c = -3c - 2$$

Проверка

$$-3c - 2 + 6,5c - (3c - 4)/2 - 2c = -5c - 2 + 6,5c - 1,5c + 2 = \underline{\underline{0}}$$

$$-6c - 4 + 6,5c - 1,5c + 2 + c = \underline{\underline{-2}}$$

$$-3c - 2 + 6,5c - 3(3c - 4)/2 + c = -3c - 2 + 6,5c - 4,5c + 6 + c = \underline{\underline{4}}$$

② Проверить на совместность и внести  
своё решение будет иметь систему

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1-3 & 1+3 & 4 \\ 0 & -5-2 & -3+2 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & -17 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 17 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1+1 & 17+1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \end{array} \right)$$

м.т.  $\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A} = 3$ , т.е. 3 - количество неизвестных, но единичное определение и имеет 1 решение

$$8) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 6 & 1+4 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & 9 & 5+6 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -12 & 0 & 11 \end{array} \right)$$

$\text{rank } \tilde{A} = 3$   $\rightarrow$  система  
 $\text{rank } A = 2$  не собственная

$$8) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & (1-6) & (-8-15) & -2-12 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -23 & -14 \end{array} \right) \end{array}$$

$\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A} = 2 < 3$  - система несущественная или без решения.

$$\textcircled{3} \quad \tilde{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 2-0,5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \text{rank } \tilde{A} = \text{rank } A = 4 \rightarrow$$

4 уравнения собственная система с решением

$$\textcircled{4} \quad \tilde{A} = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array} \right|$$

нрн макс 9, b, c

сум. элементов неизвестной

т.е.  $\text{rank } A < \text{rank } \tilde{A}$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 5-8 & 6-12 & b-4a \\ 0 & 8-14 & 9-21 & c-7a \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 3 & 6 & 4a-b \\ 0 & 6 & 12 & 7a-c \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & (4a-b)/3 \\ 0 & 1 & 2 & (7a-c)/6 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & (4a-b)/3 \\ 0 & 0 & 0 & (7a-c)/6 - (4a-b)/3 \end{array} \right|$$

$\neq 0$

$$(7a-c)/6 - (4a-b)/3 \neq 0 \quad | \cdot 6$$

$$7a-c - 8a + 2b \neq 0$$

$$-a - c + 2b \neq 0$$

$a - 2b + c \neq 0$  - нрн макс a, b, c есть необ.

1. Решим систему уравнений методом Крамера

$$9) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\det A = -4 - (-2 \cdot 3) = -4 + 6 = +2 \neq 0$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - (-2 \cdot 3) = -4 + 14 = 10$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{10}{+2} = +5$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-2}{+2} = -1$$

$$8) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+12) + 1(1+6) + 5(4-2) = 39$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10(1+12) + 1(-2+3) + 5(-8-1) = 131 - 45 = 86$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2+3) - 10(1+6) + 5(1+4) = 2 - 70 + 25 = -43$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+8) + 1(1+4) + 10(4-2) = 18 + 5 + 20 = 43$$

$$\begin{cases} x_1 = 86/39 \\ x_2 = -43/39 \\ x_3 = 43/39 \end{cases}$$

$$2, 9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Умножим первое строку на 2 и у второй  $L_{21} = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$$

- Второй из 3-го уравнения ненулевое, заменим на 3  $L_{31} = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix}$$

Заменим 2-ю строку на 4 и втретий из 3.  $L_{32} = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

ОБРАТ:  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$8) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$L^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ОБРАТ: } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

⑤ L4

$$\begin{cases} 12x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{3,5}{1,5} = \frac{7 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{7}{3} \\ \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5,5 & 1 & 0 \\ 4,5 & -\frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7-5,5 & 5-3 \cdot 5,5 \\ 0 & 8-4,5 & 4-3 \cdot 4,5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1,5 & -11,5 \\ 0 & 3,5 & -9,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1,5 & -11,5 \\ 0 & 0 & -9,5 - (-11,5 \cdot -\frac{7}{3}) \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} -9,5 - \frac{23}{2} \cdot \frac{7}{3} = \\ = -\frac{19,5 - 23 \cdot 7}{2 \cdot 3} = -\frac{109}{3} \end{array} \right.$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1,5 & -11,5 \\ 0 & 0 & -\frac{109}{3} \end{pmatrix}$$

Persever  $Ly = b$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 5,5y_1 + y_2 = -6 \\ 4,5y_2 - \frac{7}{3}y_2 + y_3 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -6 - 5,5 = -11,5 \\ y_3 = -5 - 4,5 + \frac{7}{3}(-11,5) = -\frac{5 \cdot 6 + 9 \cdot 3 + 7 \cdot 23}{6} = -\frac{109}{3} \end{cases}$$

Persever  $Ux = y$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -1,5x_2 - 11,5x_3 = -11,5 \\ -109/3 \cdot x_3 = -109/3 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3 = 1 \\ -1,5x_2 - 11,5 \cdot 1 = -11,5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = (1 - 3)/2 = -1 \end{array} \right.$$

Проверка

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(-1) + 0 + 3 = 1 \\ -11 + 0 + 5 = -6 \\ -9 + 0 + 4 = -5 \end{array} \right.$$

$$086 \text{ km} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array} \right.$$

4. Решим систему методом холецкого

$$\begin{cases} 81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531 \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460 \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193 \end{cases}$$

Приводим выражение по  $LL^T$ :

$$L_{11} = \sqrt{a_{11}} = 9$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -\frac{45}{9} = -5$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{45}{9} = 5$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{50 - 25} = 5$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}} (a_{32} - l_{21} \cdot l_{31}) = \frac{1}{5} (-15 - (-5) \cdot 5) = 2$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{32}^2} = \sqrt{38 - 25 - 4} = 3$$

$$L = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad L^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решим сист.  $Ly = b$

$$\begin{cases} 9y_1 = 531 \\ -5y_1 + 5y_2 = -460 \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 193 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 59 \\ y_2 = \frac{1}{5}(-460 + 5 \cdot 59) = -33 \\ y_3 = \frac{1}{3}(193 - 5 \cdot 59 + 2 \cdot 33) = -12 \end{cases}$$

решение системы  $\begin{cases} x = y \\ 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 59 \end{cases}$

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 59 \\ 5x_2 + 2x_3 = -33 \\ 3x_3 = -12 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{9}(59 + 5(-5) - 5(-4)) = 6 \\ x_2 = (-33 + 2 \cdot 4)/5 = -5 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

Проверка

$$81 \cdot 6 - 45(-5) + 45(-4) = 486 + 225 - 180 = 531$$

$$-45 \cdot 6 + 50(-5) - 15(-4) = -270 - 250 + 60 = -460$$

$$45 \cdot 6 - 15(-5) + 38(-4) = 270 + 75 - 152 = 193$$

верно

Ответ:  $\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = -4 \end{cases}$