INSTITUT NATIONAL
D'ÉTUDES DÉMOGRAPHIQUES

Pierre-François Verhulst (1804-1849). La première découverte de la fonction logistique

Author(s): Martial Schtickzelle

Source: *Population (French Edition)*, May - Jun., 1981, Vol. 36, No. 3 (May - Jun., 1981), pp. 541-556

Published by: Institut National d'Etudes Démographiques

Stable URL: https://www.jstor.org/stable/1532620

REFERENCES
Linked references are available on JSTOR for this article:
https://www.jstor.org/stable/1532620?seq=1&cid=pdf-reference#references_tab_contents
You may need to log in to JSTOR to access the linked references.

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at https://about.jstor.org/terms

Institut National d'Etudes Démographiques is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Population (French Edition)*

JSTOR

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

PIERRE-FRANÇOIS VERHULST (1804-1849)

La première découverte de la fonction logistique

*Le récent congrès que la Société de Démographie historique a consacré à Malthus s'est particulièrement intéressé aux « mésaventures » de la pensée de Malthus *. Certains auteurs célèbres ont en effet mal lu et mal compris l'« Essai sur le principe de population ». Mais on a un peu oublié que d'autres savants, dont le discret Verhulst, avaient au contraire très vite assimilé les idées de Malthus et les avaient appliquées avec succès. On doit à Verhulst l'invention de la loi logistique dont l'usage est devenu si fréquent en démographie et en biologie (la transformation logit). Cette découverte ne s'est pas faite au hasard, elle est survenue après un patient affinage du problème comme* Martial SCHTICKZELLE ** *nous le montre ici.*

A. Introduction

L'objectif de cet article est de présenter assez brièvement la vie de Pierre-François Verhulst, ainsi que ses travaux dans le domaine des lois d'accroissement d'une population. En effet, s'il consacra la plus grande partie de son temps à des réflexions d'ordre purement mathématique, il rédigea cependant deux mémoires importants sur l'évolution possible d'une population dans un cadre d'hypothèses bien précis. C'est d'ailleurs à la demande d'Adolphe Quételet qu'il entreprit ces recherches. Il parvint ainsi à construire une fonction mathématique à laquelle il

* Cf. Article de Jacques Dupâquier. « Avez-vous lu Malthus ? », *Population*, 2, 1980, 279-290.

** Département de Démographie, Louvain-La-Neuve.

Population, 3, 1981, 541-556.

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

donna le nom de *logistique* en 1844. Cette fonction lui permettait de prévoir l'évolution d'une population d'après la simple connaissance de l'effectif à trois dates différentes (par exemple lors de recensements). Cette fonction logistique n'a guère été employée par la suite, si bien qu'on attribue souvent sa découverte à Pearl et Reed [1] en 1920. Cependant, il semble bien que ces derniers n'aient pas été au courant des travaux de Verhulst : néanmoins en 1921, Pearl reconnaissait la priorité à Verhulst [2]. Après cette redécouverte, la courbe logistique fut d'ailleurs étudiée beaucoup plus en détail par Pearl lui-même, ainsi que par d'autres auteurs, tels Lotka et Kendall, pour ne citer que les plus illustres [3]. Il faut encore souligner que, si les travaux de Verhulst n'ont guère eu d'écho à l'époque, c'est peut-être à cause du manque d'appui de la part de Quételet qui trouvait que les idées de Verhulst n'avaient pas d'analogies physiques.

Il n'entre pas dans mon intention d'exposer les travaux de tous ces chercheurs, mais bien de me limiter à ce qu'a fait Verhulst. Après une brève biographie, je tenterai donc de présenter de façon claire et concise les deux articles de Verhulst sur le sujet, avec un effort particulier de transcription de ses notations en un symbolisme auquel nous sommes plus habitués à l'heure actuelle. Le lecteur qui aurait déjà lu les travaux de Verhulst ne s'étonnera donc pas des différences. Qu'il sache simplement que l'équivalence mathématique a été soigneusement assurée [4]. D'autre part, quelques graphiques ont été construits en vue d'une illustration assez parlante dans laquelle Verhulst ne s'est pratiquement pas lancé.

B. Biographie

L'essentiel de cette biographie provient d'un éloge funèbre [5] que Quételet (1796-1874) prononça peu après la mort de P. F. Verhulst qui fut en effet son élève avant de devenir son collègue et ami.

---

(1) R. Pearl and L. J. Reed, « On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation », *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 6, 1920, 275-288.

(2) R. Pearl, « The biology of death : V. Natural death, public health and the population problem », *Sci. Month.*, 13, 1921, p. 206.

(3) Pour une synthèse intéressante des prolongements de la théorie de la fonction logistique, voir par exemple G. Evelyn Hutchinson, *An introduction to population ecology*, Yale, University Press, 1978, Chapitre 1.

(4) Les démonstrations et les digressions mathématiques de ces deux articles ont été de toute façon fortement réduites pour alléger la présentation et la lecture de ce texte.

(5) A. Quételet. « Notice sur Pierre-François Verhulst ». *Annales de l'Académie Royale des Sciences, Belles Lettres et Beaux Arts de Belgique*, 1850, 97-124.

This content downloaded from 128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

Verhulst naît à Bruxelles, le 28 octobre 1804. Il fait des humanités anciennes à l'Athénée Royal de Bruxelles où il obtient le prix de poésie latine. Mais il se découvre une passion pour les sciences exactes et, en 1822, il entre à l'Université de Gand sans avoir terminé ses études littéraires. En 1824, il obtient le prix de la Faculté des Sciences de Leyde (Pays-Bas) pour un mémoire sur la théorie des maxima et des minima. La même année, il obtient la médaille d'or de la Faculté de Gand pour un travail sur le calcul des variations. En 1825 (à 21 ans), il devient docteur ès-sciences avec une dissertation sur la résolution des équations binômes. Son intérêt pour les mathématiques continue à travers la théorie des nombres et la théorie des probabilités. Pendant ses loisirs, il traduit le *Treatise on light* (Traité de la lumière) de J. Herschel. Sous la direction de Quételet, il donne des cours d'analyse mathématique au Musée de Bruxelles. C'est alors qu'apparaissent ses premiers problèmes de santé dus probablement, selon Quételet, « à l'excès de travail et à un développement de taille peu ordinaire (1,89 m) ». Il part donc en Italie, début 1830, pour bénéficier d'un climat plus favorable. En cours de voyage, il s'arrange pour rencontrer un grand nombre d'hommes de sciences dans les pays traversés. En septembre 1830, c'est la révolution en Belgique. Quételet lui envoie des nouvelles, lui parle de la constitution belge. Du coup Verhulst, à Rome, tente de persuader le Pape et les Cardinaux de réformer les Etats Pontificaux et de donner une constitution au peuple. Cette témérité lui vaut d'être expulsé de Rome. Il rentre alors en Belgique et, motivé par la lutte pour l'indépendance, il retrouve la santé. Il s'engage dans la politique et le gouvernement le charge de différentes missions. Il cherche à se faire élire à la Chambre des Représentants, mais sans succès. A ce moment, il ne fait pratiquement plus de mathématique. Mais, dès 1834, il y revient en devenant répétiteur puis professeur d'analyse à l'Ecole Militaire. En 1837, Verhulst se marie et aura une fille. Il réalise ensuite encore de grands travaux en mathématique, notamment sur les fonctions elliptiques [6]. En décembre 1841, il devient membre de l'Académie des Sciences. Mais sa santé s'étant à nouveau détériorée, il repart en Italie. Un an après, il revient, sans énergie, et il abandonne ses travaux purement mathématiques, car cela lui demande un travail trop soutenu. C'est alors que, sous l'impulsion de Quételet, Verhulst va s'intéresser à la théorie de la population et tenter de trouver des lois mathématiques régissant l'accroissement de la population de façon plus valable que la loi géométrique de Malthus. Il rédige deux mémoires sur le sujet en

(6) Il résume les idées de Legendre, d'Abel et de Jacobi en rédigeant en 1841 le « *Traité élémentaire des fonctions elliptiques* » considéré par Quételet comme son œuvre fondamentale.

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

1844 et 1846, où il invente notamment la fonction à laquelle il donne le nom de logistique. En 1848, il est nommé président de l'Académie. Mais il tombe de plus en plus souvent malade et son existence devient une lente agonie qu'il supporte courageusement. Il meurt le 15 février 1849 à l'âge de 45 ans, probablement de la tuberculose.

C. Les travaux de Verhulst sur la loi d'accroissement de la population

Dans son premier travail [7] sur les lois d'accroissement d'une population, Verhulst commence en disant : « De tous les problèmes que l'économie politique offre aux méditations des philosophes, l'un des plus intéressants est, sans contredit, la connaissance de la loi qui règle les progrès de la population. Pour le résoudre avec exactitude, il faudrait pouvoir apprécier l'influence des causes nombreuses qui empêchent ou favorisent la multiplication de l'espèce humaine ».

Voyons comment Verhulst envisage ces causes.

1. Les causes qui agissent sur l'accroissement de la population.

Les causes, dit-il, sont difficiles à apprécier, si bien que la découverte de la loi régissant l'augmentation de la population est visiblement impossible si on la considère dans toute sa généralité. Il répartit alors les causes en deux catégories : les causes constantes et les causes variables, ces dernières étant subdivisées selon leur caractère accidentel ou non accidentel. D'emblée, il élimine, pour simplifier, les causes variables accidentelles en justifiant sa décision par le fait qu'à mesure que la civilisation se perfectionne, l'influence de ces causes s'affaiblit de plus en plus (il ne donne pas d'exemples de ces causes, mais on peut sans doute penser aux épidémies, famines passagères...). Il conserve donc dans son modèle les causes constantes et les causes variables non accidentelles. Parmi les causes qui exercent une action constante sur l'accroissement de la population, il compte la fécondité, la salubrité du pays, les lois civiles et religieuses, ainsi que les mœurs de la nation. Quant aux causes variables (non accidentelles), elles se résument généralement dans la difficulté de plus en plus grande que la population éprouve pour se procurer des subsistances, lorsqu'elle est devenue assez nombreuse pour que toutes les bonnes terres se trouvent occupées. Il faut savoir

[7] P. F. Verhulst, « Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population ». *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles,* **18,** 1845, 1-38.

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

que Verhulst a lu Malthus et qu'il s'est imprégné de ses idées et de son vocabulaire, comme on le verra par la suite.

Pour Verhulst, si l'on ne tient compte que des causes constantes, la population ne peut croître qu'en progression géométrique : c'est la croissance inhérente à une population.

2. *Le modèle de croissance selon une progression géométrique.*

Il prend donc comme modèle mathématique la fonction suivante [8]

$$P = P_0 \cdot e^{rt}$$

qui correspond bien à une progression géométrique puisque son taux d'accroissement relatif est constant et vaut r :

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = r$$

En guise d'exemple il prend, comme l'avait fait Malthus auparavant, l'évolution de la population des Etats-Unis entre 1790 et 1840 d'après des recensements officiels effectués tous les 10 ans. On trouve au tableau 1 ci-après les données de base dont il disposait. En faisant quelques calculs, il montre lui aussi que cette population double en moins de 25 ans. En se fondant alors sur une période de doublement de 25 ans, qu'il appelle d'ailleurs la « période malthusienne », il arrive à estimer la valeur de r : $r = 2{,}77\ \%$, ce qu'il considère comme une « approximation très grossière ». Il est intéressant de noter que Verhulst n'utilise pas la dénomination « taux d'accroissement » pour ce coefficient r. Il considère r comme une mesure de « l'énergie avec laquelle la population tend à se développer lorsqu'elle n'est pas retenue par la crainte de manquer de subsistance ». Il a montré cependant que ce coefficient r représente en fait « le rapport entre l'excès annuel des naissances sur les décès et la population de début d'année », ce qui correspond bien à ce que nous appelons maintenant le taux d'accroissement. Bien sûr,

TABLEAU 1. — POPULATION DES ETATS-UNIS AUX DIVERS RECENSEMENTS OFFICIELS

Année	1790	1800	1810	1820	1830	1840
Population	3929827	5305925	7239814	9638131	12866020	17062566

[8] Je tiens à répéter que la formulation mathématique utilisée tout au long du texte n'est pas celle de Verhulst, mais lui est strictement équivalente, tout en étant plus actuelle.

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

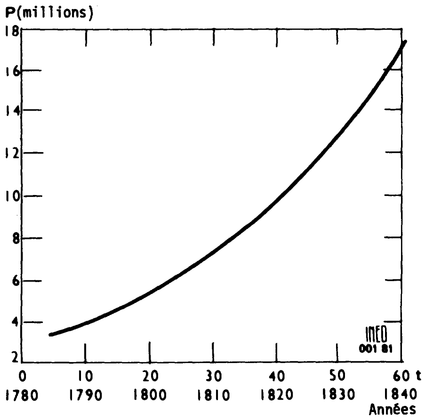


Figure 1. — Population des Etats-Unis aux recensements officiels (1790 à 1840) et ajustement exponentiel.

pour déterminer cette valeur de $r = 2{,}77\ \%$, Verhulst utilise toute une série d'approximations. Il ne dispose pas encore de techniques d'ajustement de courbe. Aussi ai-je ajusté ces données de population par une exponentielle (voir figure 1). On peut remarquer combien l'ajustement de ces données réelles est excellent. L'équation correspondante est :

$$P = 2965046 \cdot e^{0.02924t}$$

Verhulst abandonne rapidement cette hypothèse de progression géométrique, « étant donné qu'elle n'est réaliste que dans des circonstances tout à fait exceptionnelles, par exemple quand un territoire fertile et d'une étendue en quelque sorte illimitée se trouve habité par un peuple d'une civilisation très avancée, comme celle des premiers colons des Etats-Unis ». Par contre, dit-il, « c'est un fait d'observation que, dans toute l'Europe, le rapport entre l'excès annuel des naissances sur les décès et la population de départ va sans cesse en s'affaiblissant ». Il continue en affirmant que cette décroissance de r peut être attribuée de façon équivalente à une diminution de la fécondité ou à une augmentation de la mortalité de la population, c'est-à-dire à des obstacles *préventifs* ou à des obstacles *destructifs* (on perçoit à nouveau l'influence du vocabulaire malthusien).

Verhulst se lance alors à la demande de Quételet dans différents types d'hypothèses concernant la loi d'affaiblissement du taux d'accroissement r dont je vais exposer les deux principales, les autres ayant été beaucoup moins développées. Ces hypothèses visent à traduire de diverses façons l'influence des obstacles à l'accroissement de la population. Verhulst introduit donc ici les causes variables non accidentelles agissant sur la multiplication de l'espèce humaine, dont j'ai parlé plus haut (pour rappel, la loi de progression géométrique correspondait aux seules causes constantes).

3. Première hypothèse fondamentale. Cette hypothèse consiste à « considérer l'affaiblissement de r comme proportionnel à l'augmentation de la population, depuis le moment où la difficulté de trouver de bonnes terres a commencé à se

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

faire sentir ». Voyons comment il traduit cette hypothèse sous forme mathématique : tout d'abord, il appelle *population normale* la population qui correspond à « cette époque remarquable où toutes les bonnes terres sont utilisées ». Il note par b cette population et prend l'origine du temps à ce moment-là. Remarquons que cette valeur de b n'est pas connue, de même que la date où elle a été réalisée : l'origine du temps considérée ici n'est donc que théorique. Ensuite il définit la *population surabondante* à une date t donnée par P-b et exprime donc son hypothèse par l'équation différentielle où r, k, b sont trois constantes indéterminées (paramètres) :

$$\underbrace{\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt}}_{\text{Progression géométrique}} = \underbrace{r - k\,(P - b)}_{\text{Affaiblissement de } r \text{ proportionnel à la population surabondante}} \qquad \text{pour } t \geqslant 0$$ [9]

Les obstacles à la croissance de la population sont donc bien directement proportionnels à la population surabondante P-b : plus cet écart P-b augmente, plus le frein à la croissance est puissant. La résolution de cette équation l'amène à la fonction

$$t = \frac{l}{m}\, ln\, \frac{P\,(m - kb)}{b\,(m - kP)}\,; m = r + kb,\ t \geqslant 0$$ [10]

à laquelle il donne le nom de **Logistique.** Il en étudie alors de plus près les propriétés pour aboutir à des résultats bien connus maintenant à propos des courbes en S (sigmoïdes). Tout d'abord, en $t = 0$, la population P est égale à la population normale b : c'est bien ainsi qu'il avait défini son origine des temps. Ensuite, lorsque t augmente à l'infini, la population P tend vers un maximum égal à m/k [11] qui représente pour Verhulst « l'extrême limite de la population ». C'est évidemment ici que réside la grande originalité par rapport à la croissance exponentielle : Verhulst concrétise ainsi son objectif consistant à trouver une loi mathématique ayant une limite supérieure pour représenter l'évolution d'une population. Je passerai sous silence les autres propriétés de cette courbe logistique mises en évidence par Verhulst, à

(9) Pour $t < 0$, la loi d'évolution de la population est toujours l'exponentielle définie par :

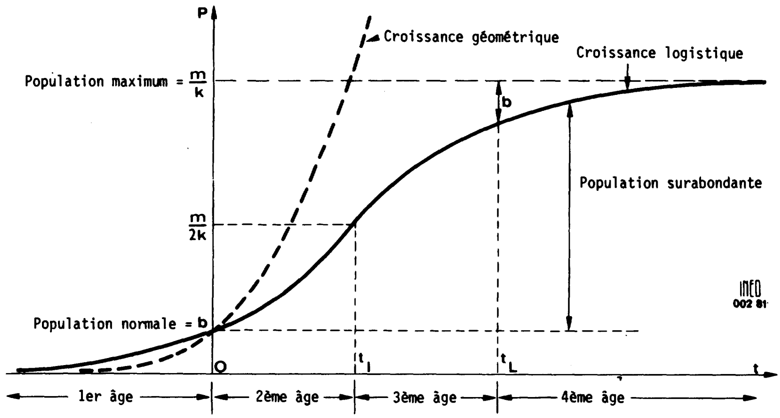
$$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt} = r$$

(10) Le symbole « ln » est le logarithme népérien (base e) classique.

(11) Si on retourne à l'équation différentielle de départ, on peut voir que pour $P = m/k$, on a $dP/dt = 0$: la croissance est nulle.

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

Figure 2. — La courbe logistique et la courbe exponentielle.



part une qui va l'amener à des considérations méritant d'être rapportées : les courbes logistiques admettent un point d'inflexion à une date t_I correspondant à l'époque où la population atteint la moitié de son maximum. Si l'on considère deux instants symétriques par rapport à cette date t_I, on obtient deux populations dont la somme vaut toujours m/k, c'est-à-dire le maximum de population. Cette propriété lui permet donc de définir une date t_L où la population ne pourra plus s'agrandir que d'une quantité égale à la population normale b : t_L est simplement le symétrique de 0 par rapport à t_I. La figure 2 aide à visualiser ce qui vient d'être dit et permet de mieux mesurer le progrès considérable apporté par la logistique par rapport à l'exponentielle. La considération des trois dates remarquables 0, t_I et t_L le conduit à « partager la durée infinie du temps en *quatre âges* (voir figure 2) à chacun desquels il serait aisé d'attacher un caractère distinctif emprunté à l'agriculture ou à l'économie politique ». Dans le premier âge, la courbe de population est une exponentielle : « alors les bonnes terres seules sont cultivées. Dans le second âge $0t_I$, on pourrait dire qu'on cultive les terrains médiocres. Dans le troisième âge t_It_L, de même durée que le précédent, on défricherait les plus mauvaises terres. Enfin dans le quatrième âge, la population ne s'accroîtrait plus qu'à la faveur des améliorations du sol déjà cultivé, ou des importations du commerce étranger ». Mais il ne croit pas tant que cela à cette interprétation puisqu'il conclut en disant : « du reste nous croyons superflu de faire observer que ces rapprochements entre les progrès de la population et l'extension de l'agriculture ne sont pas susceptibles d'une grande exactitude ». Je pense en effet qu'il faut considérer cela plus comme un « amusement » de mathématicien (sur des propriétés de symétrie) que comme l'expression d'un souci de réalisme scientifique.

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

D'autre part, je ne voudrais pas terminer l'exposé des résultats de cette première hypothèse de Verhulst sur les obstacles à l'accroissement sans montrer que cette courbe logistique a bien la même nature que la fonction logit utilisée couramment en démographie. En effet, un simple changement de variable suffit pour retrouver une forme qui nous est familière : en prenant comme nouvelle origine des temps la date t_I correspondant au point d'inflexion de la courbe logistique, on définit la variable $T = t - t_I$ ($T = 0$ en $t = t_I$). En l'introduisant dans l'équation de la logistique, on obtient

$$T = \frac{l}{m}\, ln \frac{P}{m/k - P}$$

dont la forme est tout à fait analogue à la fonction logit définie couramment par

$$\text{logit}\, l_x = \frac{1}{2}\, ln \frac{l_x}{l_0 - l_x}$$

où l_x représente les survivants d'une table de mortalité à l'âge exact x. De plus, l_0 est le maximum de la courbe des survivants, au même titre que m/k est le maximum de la population P. Finalement en inversant cette nouvelle expression de la courbe logistique, c'est-à-dire en exprimant la population P en fonction du temps T, on obtient

$$P = \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{1 + e^{-mT}}$$

qui est l'expression bien connue de la fonction logistique rapportée à son point d'inflexion.

Verhulst a appliqué sa découverte à des données réelles : celles de la Belgique et celles de la France. Je ne reprendrai ici que le cas de la Belgique.

4. Le cas de la population belge. La fonction logistique mise en évidence par Verhulst dépend de trois paramètres (r, k et b) : il suffit de connaître l'effectif de la population à trois dates différentes pour pouvoir calculer la fonction logistique correspondante qui permettra de calculer l'effectif de la population à une date quelconque et notamment la valeur maximum que pourra atteindre cette population. Verhulst se fonde alors sur des travaux de Quételet, ainsi que sur les bulletins de la Commission Centrale de Statistique et l'Annuaire de l'Observatoire de Bruxelles pour estimer les effectifs de la population belge en 1815, 1830 et 1845. Il a dû soumettre ces données à de nombreuses manipulations, à cause notamment des changements de territoire pendant cette période (guerres de l'Empire,

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

TABLEAU 2. — ESTIMATION DE LA POPULATION BELGE AU 1er JANVIER 1815, 1830 ET 1845

Date	1.1.1815	1.1.1830	1.1.1845
Population	3627253	4247113	4800861

révolution belge), à cause aussi de modifications du comptage des décès, ou encore à cause du sous-enregistrement, lors des recensements, des jeunes hommes, car les communes avaient intérêt à fournir le plus petit nombre possible d'individus lors de la levée de la milice. En fin de compte, il aboutit aux résultats du tableau 2. Verhulst calcule alors la fonction logistique passant par ces trois points : il trouve

$$P = 6583700 \frac{1}{1 + e^{-0.261999\,(T' + 0.7806)}}$$

où T' (exprimé en dizaines) correspond à une nouvelle translation sur l'échelle des temps ($T' = 0$ au 1/1/1815) (12). En guise d'illustration, j'ai représenté cette courbe sur la figure 3 (courbe en pointillé). Verhulst en conclut : « ces résultats numériques nous apprennent que, si les lois et les mœurs de la Belgique n'éprouvaient aucun changement notable, la population de ce Royaume, bien que toujours croissante, ne s'élèverait jamais à 6 600 000 âmes. Dans la même hypothèse appliquée au passé, c'est à partir des premiers mois de l'année 1807 que cette population aurait commencé à croître dans une progression moins rapide que la progression arithmétique (référence au point d'inflexion). Enfin si l'on voulait savoir quel est le chiffre assigné, pour la population de la Belgique à la fin du XIXe siècle,..., l'on trouvera pour réponse 6 064 000 c'est-à-dire un peu plus de six millions d'âmes ».

On voit que ces résultats ont été infirmés par les faits, puisque la population a largement dépassé la limite maximum fixée par le modèle de Verhulst (13). Son hypothèse sur l'affaiblissement du taux d'accroissement r est donc trop forte et nous allons voir par la suite qu'une nouvelle hypothèse de Verhulst sera moins contraignante. Quoi qu'il en soit, l'hypothèse d'une fonction retardatrice (de type linéaire) concernant le taux d'accroissement l'amène à des résultats beaucoup plus

(12) Il faut en effet se souvenir que les variables temporelles utilisées jusqu'à présent (t et T) ont leur origine au moment où la population atteint soit le niveau b de la population normale, soit la moitié de la population maximum. Ces dates sont évidemment inconnues et Verhulst a fait de longs développements pour trouver une formulation de la logistique rapportée à une date *quelconque*. Ce faisant, il s'est imposé des données initiales de population correspondant à trois époques équidistantes.

(13) En appliquant sa théorie à la population française, il aboutit à un maximum possible de 40 millions d'habitants.

This content downloaded from 128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

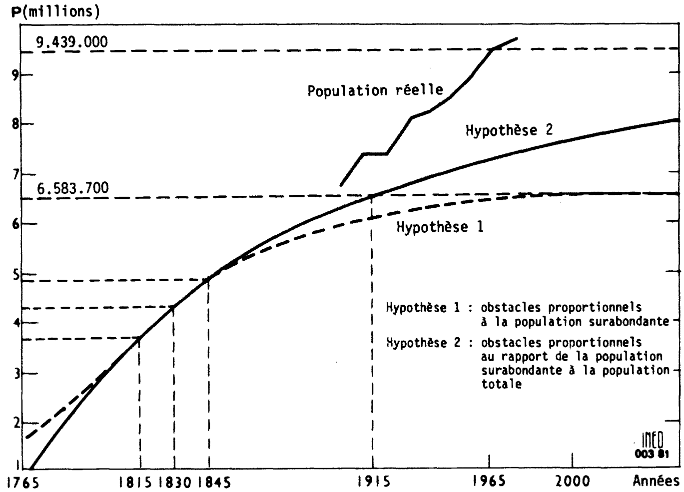


Figure 3. — Population belge projetée selon les deux hypothèses sur base des estimations en 1815, 1830 et 1845 et population réelle.

réalistes que l'hypothèse de l'évolution géométrique. Signalons toutefois que Verhulst lui-même a conscience que le nombre d'années d'observation est trop faible pour qu'on puisse juger de la concordance de cette hypothèse avec la réalité. Aussi suggère-t-il d'essayer d'autres fonctions. Plus précisément, il étudie le cas où les obstacles aux progrès de la population seraient proportionnels non plus à la population surabondante, mais à son carré, ou encore à sa racine carrée, c'est-à-dire

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt} = r - k\,(P-b)^2$$

ou encore

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt} = r - k\,(P-b)^{1/2}$$

Mais il se heurte à des développements mathématiques qui le font finalement renoncer. Tout ce dont j'ai parlé jusqu'à maintenant est tiré des « Recherches mathématiques » que Verhulst a publiées en 1845. Peu après, il se rend compte d'une erreur dans la formulation de sa fonction retardatrice. Il apporte alors des corrections dans son « Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population » publié en 1847 [(14)].

[(14)] P. F. Verhulst, « Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population ». *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles,* **20**, 1847, 1-32.

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

5. *Deuxième hypothèse fondamentale.* Cette nouvelle hypothèse consiste à supposer que les obstacles à la croissance de la population sont proportionnels non plus à la population surabondante $(P-b)$, mais au rapport de cette population surabondante à la population totale $(P-b)/P$. En reprenant l'origine des temps ($t = 0$) au moment où la population a atteint le niveau b (population normale), son hypothèse l'amène donc à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = r - k \, . \, \frac{P-b}{P} \text{ pour } t \geqslant 0$$ [15]

r, k et b étant toujours trois paramètres.

Il est intéressant de noter que Verhulst revient sur ce sujet deux ans après son travail sur la logistique, non pas d'abord par intérêt sur les lois d'évolution d'une population, mais bien par un réflexe de mathématicien ou plutôt même de physicien. En effet, dans la formulation de sa première hypothèse, le second membre de son équation différentielle [16] n'est pas un nombre abstrait : il a les dimensions d'une population. Tandis que, dans sa nouvelle hypothèse, en divisant P-b par P, il se ramène à un nombre pur. Il dit d'ailleurs : « De cette manière, l'équation est homogène ». Et il continue : « Cette remarque nous avait échappé dans notre premier mémoire et c'est là principalement ce qui nous a engagé à revenir sur le sujet ».

La résolution de cette nouvelle équation le conduit, en posant

$$m = k - r \text{ et } M = \frac{kb}{m}$$

à la formule

$$t = \frac{1}{m} ln \frac{M-b}{M-P}$$

où M n'est rien d'autre que le maximum que peut atteindre la population [17].

[15] Pour $t < 0$, la loi d'évolution de la population est l'exponentielle définie par

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = r$$

[16] Pour rappel, l'équation différentielle correspondant à la première hypothèse est :

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = r - k\,(P-b)$$

[17] On peut vérifier dans l'équation différentielle de départ que, lorsque $P = M$, le taux d'accroissement de la population est bien nul.

This content downloaded from 128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

En exprimant la population P en fonction du temps t, on trouve

$$P = M - \frac{M - b}{e^{mt}}$$

c'est-à-dire une courbe logarithmique qui n'a plus rien à voir avec une forme en S, comme on peut s'en rendre compte à la figure 4. Cette courbe ne peut d'ailleurs manifestement pas s'appliquer à l'évolution complète dans le temps d'une population, mais seulement à la dernière phase lorsque la population a atteint le niveau b, selon les hypothèses de départ adoptées par Verhulst. Ce dernier ne s'est guère étendu sur le caractère plus ou moins plausible de cette nouvelle courbe : il est de toute façon toujours convaincu que la période d'observation dont il dispose (données belges de 1815 à 1845) est beaucoup trop courte pour juger de l'adéquation de son modèle avec l'évolution à long terme de la population. Il revient cependant au cas de la Belgique qu'il avait déjà traité au moyen d'une courbe logistique (voir données au tableau 2 ci-dessus). Il obtient comme équation :

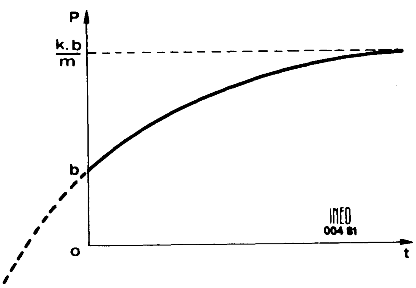


Figure 4. — La courbe logarithmique.

$$P = 9439000 - \frac{9439000 - 3627253}{e^{0.0751939\,t}}$$

avec $t = 0$ en 1815 et t exprimé en dizaines. Cette courbe est représentée en trait continu sur la figure 3 (voir plus haut) : elle passe évidemment par les trois données de base puis s'écarte de plus en plus vite de la logistique (en pointillé sur ce même graphique) par le fait que la fonction retardatrice est plus faible [18]. On notera avec intérêt que le nouveau maximum possible pour la population belge est maintenant égal à 9 439 000 habitants, chiffre supérieur à la population belge actuelle si on excepte les étrangers.

(18) On a bien évidemment

$$\frac{P - b}{P} < P - b$$

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

D. Conclusion

En guise de conclusion, je dirai que Verhulst n'a jamais imaginé avoir trouvé la fonction qui représentait la loi d'accroissement de la population. Tout au plus, il a trouvé des solutions correspondant à des hypothèses précises sur les obstacles à cet accroissement. Il termine d'ailleurs son premier mémoire par cette phrase : « la loi de la population nous est inconnue parce qu'on ignore la nature de la fonction qui sert de mesure aux obstacles, tant préventifs que destructifs, qui s'opposent à la multiplication indéfinie de l'espèce humaine ». Néanmoins on a pu voir comment il est arrivé à construire, pour la première fois, la fonction logistique en supposant que les obstacles à la croissance d'une population étaient directement proportionnels à la population surabondante. On a vu également qu'il a étudié d'autres hypothèses qui l'ont conduit entre autres à une courbe de croissance logarithmique. Il est intéressant de remarquer que Verhulst a toujours considéré la loi d'accroissement d'une population comme composée de deux parties : d'abord une croissance exponentielle portant la population au niveau de la « population normale » lequel correspond à « l'époque où toutes les bonnes terres sont cultivées »; ensuite une croissance logistique, logarithmique ou autre, résultant de l'action de freins plus ou moins puissants liés à l'excès de population, et s'accentuant avec celui-ci au point d'annuler, à la fin des temps, le taux d'accroissement.

La conviction intime de Verhulst sur l'évolution que doit suivre une population est que celle-ci doit s'arrêter de croître dès qu'elle a atteint le niveau de la « population normale ». Il a d'ailleurs cette phrase : « Si les hommes étaient sages, à partir de ce jour la population deviendrait stationnaire, car la condition des nouveaux membres de la société ne saurait être aussi bonne que celle de leurs devanciers; mais il n'en sera pas ainsi... Il est évident que cette population additionnelle ne pouvant subsister et se multiplier qu'en se condamnant à de pénibles travaux, elle cherchera à alléger son sort en faisant concurrence aux travailleurs de la population normale. La condition de toute la classe laborieuse se trouvera donc empirée, et la gêne commencera à se faire sentir. Cette gêne aura pour premier effet de retarder les mariages et, par suite, de diminuer le nombre des naissances : il est clair d'ailleurs qu'elle augmentera avec la cause qui l'aura produite, c'est-à-dire la population surabondante ». Je crois que cette longue phrase résume bien la pensée de Verhulst en ce domaine.

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

Avant de terminer, je tiens à signaler que Verhulst a proposé aussi toute une série de réflexions sur les modifications possibles de la loi d'accroissement d'une population. Ainsi, par exemple, la possibilité d'importer de la nourriture en échange de produits manufacturés ou l'éventualité de progrès importants de la science agricole. Il a fait également, dans son deuxième mémoire, un long examen de « l'opinion des économistes qui pensent que la population s'arrêtera d'elle-même, sans augmentation de la misère destructive ». Ces différents points n'ont pas été repris dans le cadre de ce travail essentiellement centré sur les lois de population proposées par Verhulst.

Martial SCHTICKZELLE

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms

SCHTICKZELLE Martial. — **Pierre-François Verhulst (1804-1849). La première découverte de la fonction logistique.**

C'est à la demande d'A. Quételet que Pierre-François Verhulst (1804-1849) se penche sur la recherche d'une loi d'accroissement de la population. Rejetant la loi de croissance exponentielle de Malthus comme loi d'évolution à long terme. il s'emploie à trouver une formulation mathématique des obstacles susceptibles de freiner l'accroissement d'une population. Il part de l'idée que, « lorsque toutes les bonnes terres sont cultivées », la population a atteint le niveau de la population « normale » qu'elle ferait bien de ne pas dépasser. Car toute population excédentaire (la population surabondante) sera responsable du ralentissement de la croissance démographique au point de l'annuler finalement. Dans une première hypothèse, les obstacles sont considérés comme proportionnels à cette population « surabondante ». Il aboutit ainsi à la fonction logistique en 1844. Deux ans après, dans une nouvelle hypothèse, les obstacles sont supposés proportionnels au rapport entre cette population « surabondante » et la population totale. Il parvient alors à une fonction logarithmique correspondant à un maximum de population plus élevé.

SCHTICKZELLE Martial .— **Pierre-François Verhulst (1804-1849) and the Discovery of the Logistic Law of Growth.**

Pierre-François Verhulst studied the law of population growth at the request of A. Quételet. He rejected Malthus's exponential law of population growth as a description of what happened in the long run and applied himself to finding a mathematical formula which would take account of the checks to population growth. He began with the idea that « after all suitable land had been brought under cultivation », the population will have attained a « normal » level, and it would be well if this level were not exceeded, since any excess would lead to a reduction in demographic growth until it reached a value of zero. His first hypothesis was to consider that the checks would be proportional to the size of the excess population, and arrived at the logistic curve in 1844. Two years later, he assumed that the checks would be proportional to the ratio between the excess population and the total population and obtained a logarithmic function which gave a larger maximum population.

SCHTICKZELLE Martial. — **Pierre-François Verhulst (1804-1849). El descubrimiento de la función logística.**

Pierre-François Verhulst se dedicó al estudio de una ley del crecimiento de la población atendiendo a una solicitud de A. Quételet. Comenzó rechazando la ley de crecimiento exponencial de Malthus como una ley de la evolución a largo plazo y trató de encontrar una nueva formulación matemática que incorporara los obstáculos susceptibles de frenar el crecimiento de una población. Partió de la suposición de que « cuando estén cultivadas todas las tierras de buena calidad » la población debe alcanzar un nivel « normal » que no debería sobrepasar. Ya que toda población excesiva (el excedente demográfico) será responsable del debilitamiento del ritmo de crecimiento demográfico hasta llegar a un punto de total anulación. En una primera hipótesis los obstáculos son considerados proporcionales a la « población excedente ». Llega así a la primera formulación de la función logística en 1844. Dos años más tarde, mediante una nueva hipótesis, supone que los obstáculos son proporcionales a la relación entre la « población excedente » y la población total. Llega entonces a una función logarítmica correspondiente a un máximo de población más elevado.

This content downloaded from
128.62.216.52 on Wed, 24 Sep 2025 20:00:04 UTC
All use subject to https://about.jstor.org/terms