

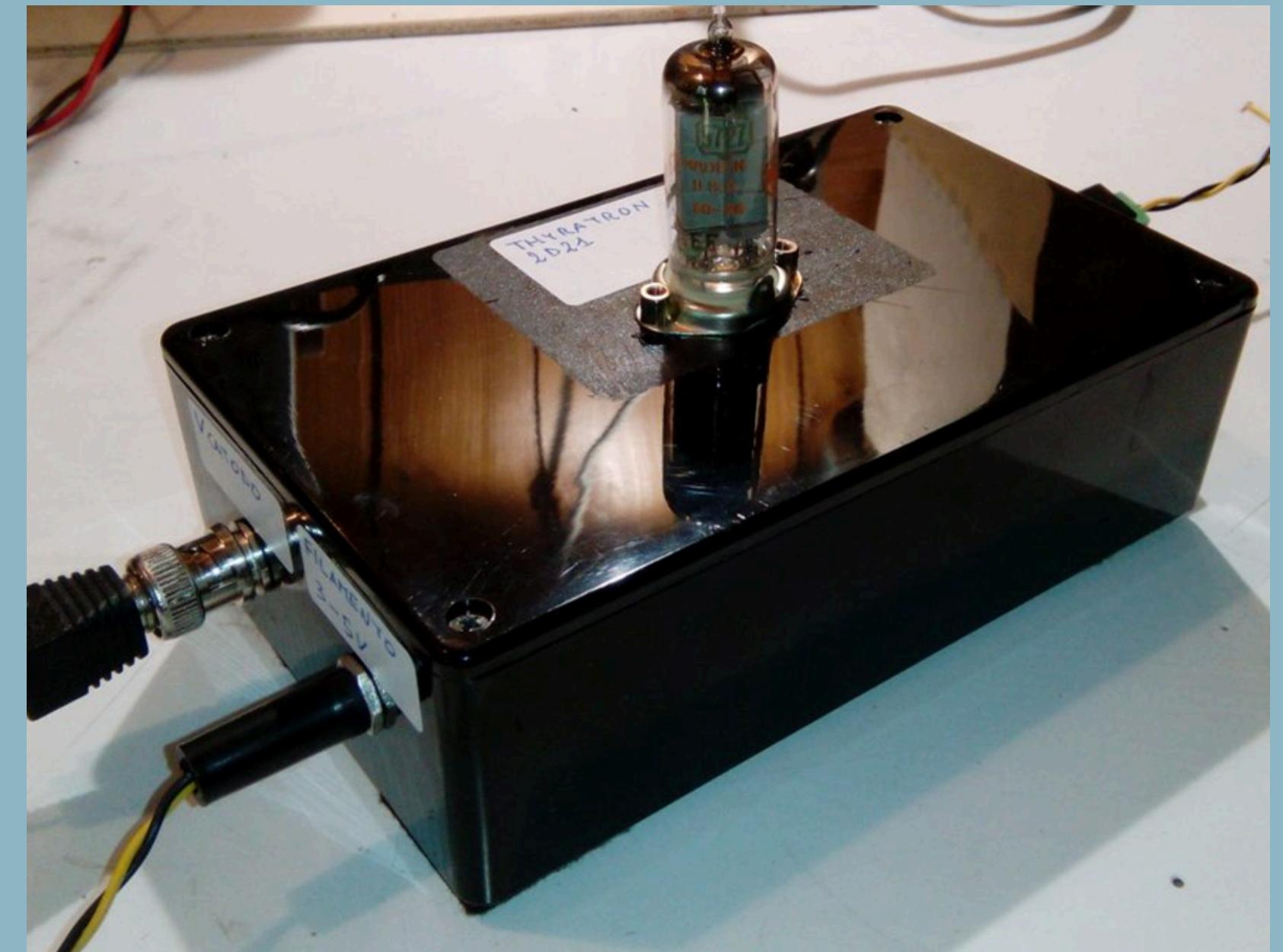
L'effet Ramsauer- Townsend

Projet numérique

Pré-Ing 2 MI05 / Panayotis Akridas

LAGRANGE Paul / VETIER Guirec /
KALLEL Ala

01



Sommaire

01

Contexte physique

05

Pertinence du modèle

02

Expérimentation

06

Limites du modèle

03

Étude analytique

07

Conclusion

04

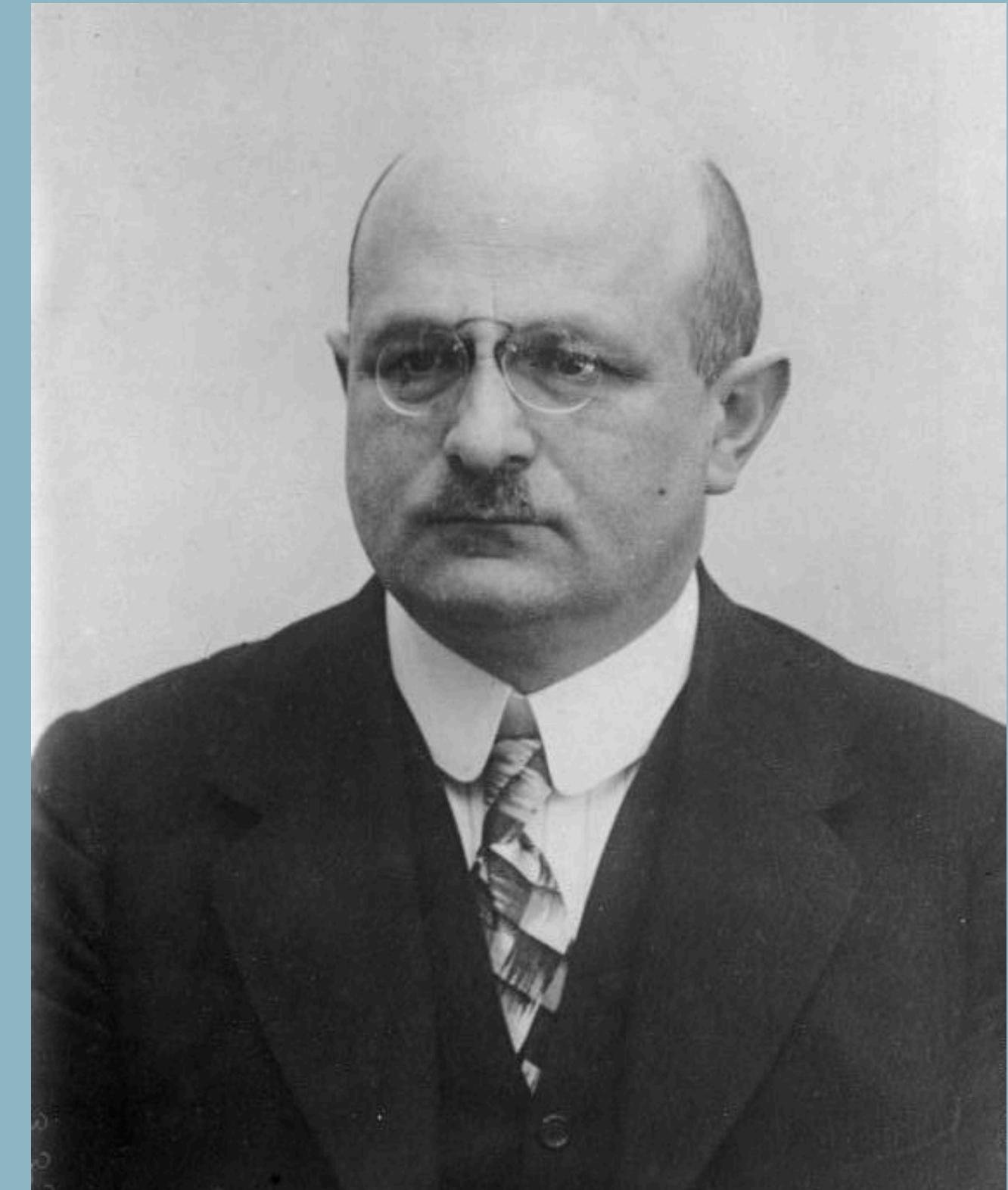
Résultats numériques (code)

01

Contexte physique

L'effet Ramsauer-Townsend

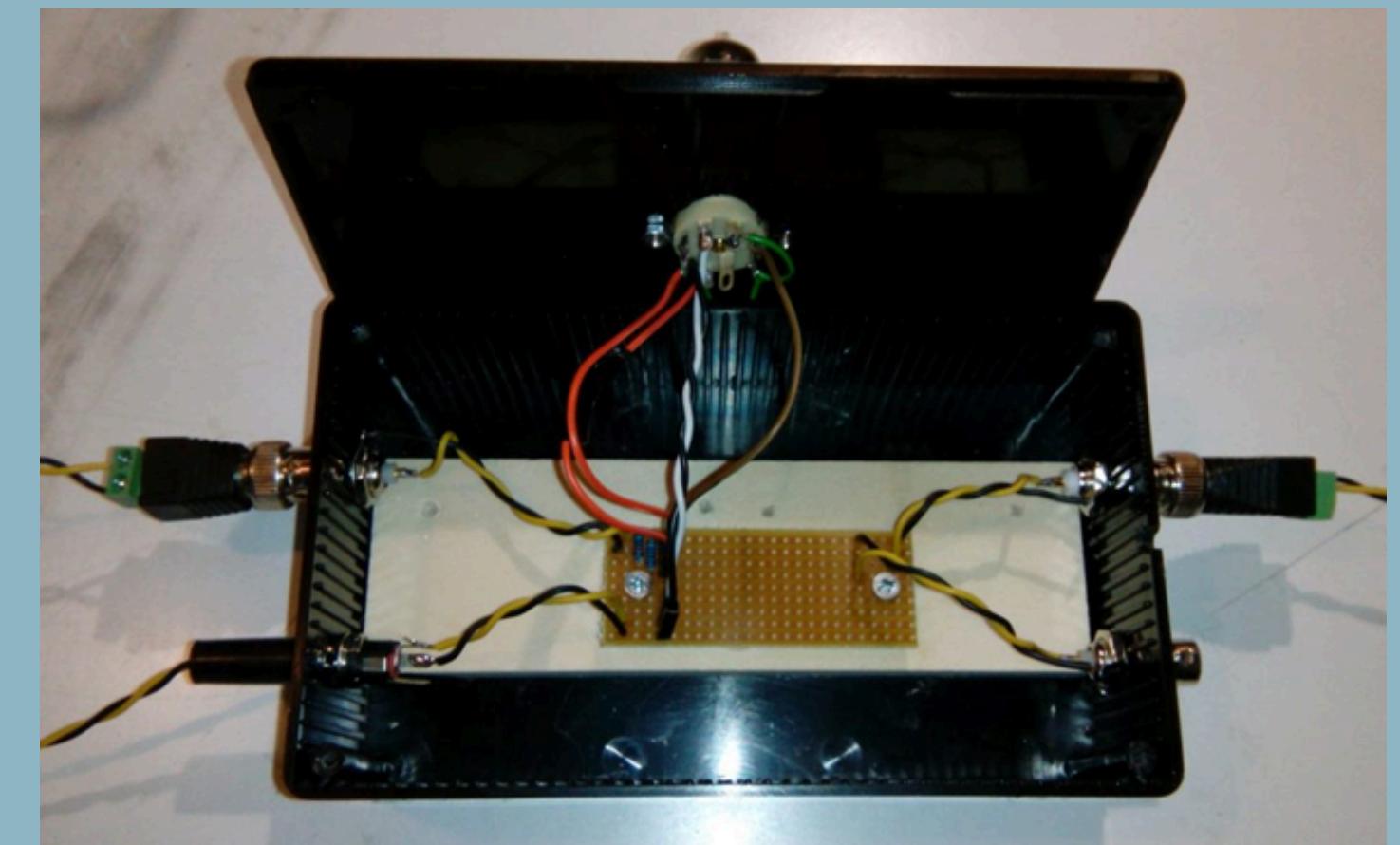
- Découvert en 1921.
- Un électron peut traverser un atome sans être diffusé à certaines énergies.
- Contre-intuitif



02

Expérimentation

- Émission d'électrons.
- Chambre de gaz noble.
- Capteurs à la sortie.

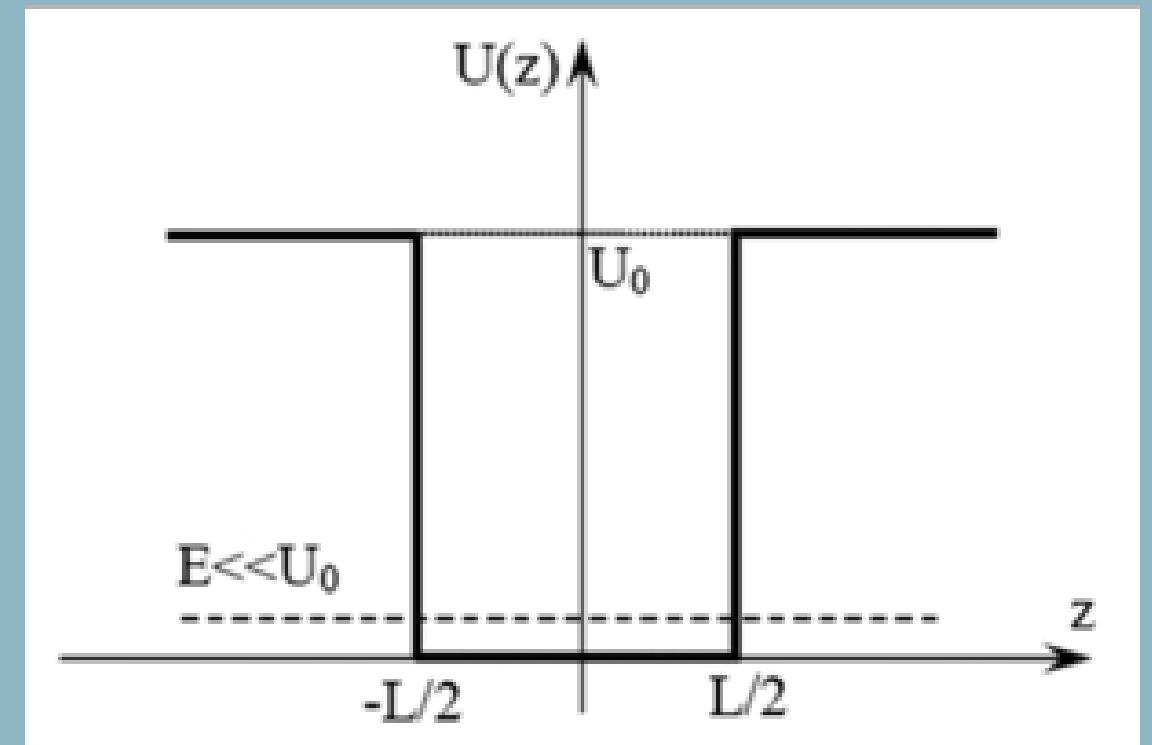


03

Étude analytique

Pourquoi modéliser avec un puits de potentiel ?

- Décrit par une fonction d'onde.
- Permet de savoir la probabilité de présence.
- Régie par l'équation de Schrödinger.
- Ondes transmit et réfléchie.
- Se rend compte des effets.
- Permet d'avoir une simulation.



03

Étude analytique

étape I : initialisation du problème

- Équation de Schrödinger
- Puits de potentiel

Résolution de l'équation de Schrödinger pour un puits de potentiel fini.

Étape I. Équation de Schrödinger

. On considère l'équation de Schrödinger stationnaire en 1 dimension:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

Résolution de l'équation pour un puit de potentiel de profondeur $-V_0$ et de largeur a :

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } |x| < a/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étape 2 : Résolution de l'équation dans les différentes régions.

Étape 2 : Résolution dans les trois régions (selon l'emplacement par rapport au puits de potentiel).

• Région I : $x < -a/2$.

Dans cette région, $V(x) = 0$, donc l'équation devient :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = E \Psi(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi(x) = 0$$

$$\text{Soit } k^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E \Leftrightarrow \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} - k^2 \Psi(x) = 0.$$

La solution est donc :

$$\Psi_I(x) = A (\text{incidente}) + B (\text{réfléchie}).$$

$$\Leftrightarrow \Psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

• Région II : $-a/2 < x$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) - V_0 \Psi(x) = E \Psi(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = \Psi(x)(E + V_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0) \Psi(x) = 0$$

$$\text{On pose } k^2 = \frac{(2m/\hbar^2)(E + V_0)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + K^2 \Psi(x) = 0$$

Solution de cette équation différentielle :

$$\Psi_{II}(x) = C \cos(Kx) + D \sin(Kx)$$

• Région III : $x > a/2$ (à l'extérieur du puits de potentiel)

Même équation que la région I, donc la solution pour

$$\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi(x) = 0 \text{ est :}$$

$$\Psi_{III}(x) = F e^{ikx} + G e^{-ikx}$$

où :

- F représente l'onde transmise (vers la droite).

- G représenterait une onde incidente venant de la droite.

Cependant, comme il n'y a aucune onde incidente venant de la droite, on impose : $G = 0$.

Ce qui donne pour solution finale dans cette région :

$$\Psi_{III}(x) = F e^{ikx}$$

Étape 3 : Conditions de continuité.

Étape 3 : Conditions de continuité.

La fonction d'onde $\psi(x)$ et sa dérivée première $\psi'(x)$ doivent être continues aux points de jonction $x = \pm \frac{a}{2}$.

Forme générale :

• À $x = -\frac{a}{2}$

$$\psi_I\left(-\frac{a}{2}\right) = \psi_{II}\left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$\psi'_I\left(-\frac{a}{2}\right) = \psi'_{II}\left(-\frac{a}{2}\right)$$

• À $x = \frac{a}{2}$:

$$\psi_{II}\left(\frac{a}{2}\right) = \psi_{III}\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\psi'_{II}\left(\frac{a}{2}\right) = \psi'_{III}\left(\frac{a}{2}\right)$$

Forme développée (équations explicites) :

Continuité de $\psi(x)$:

• À $x = -\frac{a}{2}$

$$A e^{-iKa/2} + B e^{iKa/2} = C e^{-iKa/2} + D e^{iKa/2} \quad (1)$$

• À $x = \frac{a}{2}$

$$C e^{iKa/2} + D e^{-iKa/2} = F e^{iKa/2} \quad (2)$$

Continuité de $\psi'(x)$:

• À $x = -\frac{a}{2}$

$$iK(A e^{-iKa/2} - B e^{iKa/2}) = iK(C e^{-iKa/2} - D e^{iKa/2}) \quad (3)$$

• À $x = \frac{a}{2}$

$$iK(C e^{iKa/2} - D e^{-iKa/2}) = iK F e^{iKa/2} \quad (4)$$

Ça nous donne une matrice de coefficients qui doit avoir un déterminant nul pour vérifier qu'il ait une solution.

Étape 4 : Résolution du système.

Étape 4 : Résolution du système

Soit $M_1 = \begin{cases} Ce^{ik\alpha/2} + De^{-i\alpha/2} = Fe^{i\alpha/2} & (2) \\ ik(Ce^{ik\alpha/2} - De^{-i\alpha/2}) = iKFe^{i\alpha/2} & (4) \end{cases}$

 $\Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{F}{2} \left(\frac{1+iK}{K} \right) e^{i(\alpha-K)\alpha/2} \\ D = \frac{F}{2} \left(\frac{1+iK/K}{K} \right) e^{i(\alpha+K)\alpha/2} \end{cases}$

Soit $M_2 = \begin{cases} Ae^{-i\alpha/2} + Be^{i\alpha/2} = Ce^{-i\alpha/2} + De^{i\alpha/2} & (1) \\ iK(Ae^{-i\alpha/2} - Be^{i\alpha/2}) = iK(Ce^{-i\alpha/2} - De^{i\alpha/2}) & (3) \end{cases}$

On implémente C et D dans M_2 :

 $\Leftrightarrow \begin{cases} Ae^{-i\alpha/2} + Be^{i\alpha/2} = \frac{F}{2} \left(\frac{1+iK}{K} \right) e^{i(\alpha-K)\alpha/2} e^{-i\alpha/2} + \frac{F}{2} \left(\frac{1+iK}{K} \right) e^{i(\alpha+K)\alpha/2} e^{i\alpha/2} \\ iK(Ae^{-i\alpha/2} - Be^{i\alpha/2}) = iK \left(\frac{F}{2} \left(\frac{1+iK}{K} \right) e^{i(\alpha-K)\alpha/2} e^{-i\alpha/2} - iK \left(\frac{F}{2} \left(\frac{1+iK}{K} \right) e^{i(\alpha+K)\alpha/2} e^{i\alpha/2} \right) \right) \end{cases}$

On factorise :

 $\Leftrightarrow \begin{cases} Ae^{-i\alpha/2} + Be^{i\alpha/2} = \frac{F}{2} e^{i\alpha/2} \left[\left(\frac{1+iK}{K} \right) e^{-i\alpha/2} + \left(\frac{1-iK}{K} \right) \right] & (1\gamma) \\ iK(Ae^{-i\alpha/2} - Be^{i\alpha/2}) = \frac{iKF}{2} e^{i\alpha/2} \left[q \left(\frac{1+iK}{K} \right) e^{i\alpha/2} - q \left(\frac{1-iK}{K} \right) \right] & (2\gamma) \end{cases}$

On veut avoir que A. On élimine donc B.

$M_2 = \begin{cases} Ae^{-i\alpha/2} + Be^{i\alpha/2} = \frac{F}{2} e^{i\alpha/2} \left[\left(\frac{1+iK}{K} \right) e^{-i\alpha/2} + \left(\frac{1-iK}{K} \right) \right] & (1\gamma) \\ iK(Ae^{-i\alpha/2} - Be^{i\alpha/2}) = iK \frac{F}{2} e^{i\alpha/2} \left[q \left(\frac{1+iK}{K} \right) e^{i\alpha/2} - q \left(\frac{1-iK}{K} \right) \right] & (2\gamma) \end{cases}$

 $\Leftrightarrow \begin{cases} Ae^{-i\alpha/2} + Be^{i\alpha/2} = \frac{F}{2} e^{i\alpha/2} \left[e^{-i\alpha/2} + \frac{\kappa}{K} e^{-i\alpha/2} + 1 - \frac{\kappa}{K} \right] \\ Ae^{-i\alpha/2} - Be^{i\alpha/2} = \frac{F}{2} e^{i\alpha/2} \left[\frac{\kappa}{K} e^{-i\alpha/2} + e^{-i\alpha/2} - \frac{\kappa}{K} + 1 \right] \end{cases}$
 $\Leftrightarrow 1\gamma \leftarrow 1\gamma + 2\gamma$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2Ae^{-i\alpha/2} = \frac{F}{2} e^{i\alpha/2} \left[(e^{-i\alpha/2} + 1) \left(1 + \frac{\kappa}{K} \right) + (e^{-i\alpha/2} - 1) \left(\frac{\kappa}{K} - 1 \right) \right] & (1\gamma') \end{cases}$

On a des identités trigonométriques:

 $\begin{cases} e^{i\alpha/2} + e^{-i\alpha/2} = 2\cos(\alpha/2) \\ e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2} = 2i\sin(\alpha/2) \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-i\alpha/2} + 1 = e^{-i\alpha/2} (e^{i\alpha/2} + e^{-i\alpha/2}) = 2e^{-i\alpha/2} \cos(\alpha/2) \\ e^{-i\alpha/2} - 1 = -2ie^{-i\alpha/2} \sin(\alpha/2) \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2Ae^{-i\alpha/2} = F e^{i\alpha/2} \left[e^{-i\alpha/2} \cos(\alpha/2) \left(1 + \frac{\kappa}{K} \right) - ie^{-i\alpha/2} \sin(\alpha/2) \left(\frac{\kappa}{K} - 1 \right) \right] \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{F}{2} e^{i(\kappa-\alpha)\alpha/2} \left[\cos(\alpha/2) \left(1 + \frac{\kappa}{K} \right) - i\sin(\alpha/2) \left(\frac{\kappa}{K} - 1 \right) \right] \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \frac{F}{A} = \frac{2e^{-i\alpha+i\kappa\alpha/2}}{\cos(\alpha/2) \left(1 + \frac{\kappa}{K} \right) - i\sin(\alpha/2) \left(\frac{\kappa}{K} - 1 \right)}$

Étape 4 : Résolution du système.

- calcul coefficient de transmission

Soit T , le coefficient de transmission avec ϵ :

$$T = \left| \frac{F}{Z} \right|^2$$

$$T = \frac{4}{\left| \cos\left(\frac{Ka}{2}\right)\left(1 + \frac{K}{\kappa}\right) - i\sin\left(\frac{Ka}{2}\right)\left(\frac{\kappa}{K} - \frac{K}{\kappa}\right) \right|^2}$$

On développe le dénominateur d'abord :

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{Ka}{2}\right)\left(1 + \frac{K}{\kappa}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)\left(\frac{\kappa}{K} - \frac{K}{\kappa}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{Ka}{2}\right)\left(1 + \frac{q^2}{K^2}\right) + \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)\left(\frac{K^2}{q^2} + \frac{q^2}{K^2}\right) + 2 \frac{q}{K} \cos^2\left(\frac{Ka}{2}\right) - 2 \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{q^2}{K^2} + \left(\frac{K^2}{q^2} - 1\right) \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right) + 2 \frac{q}{K} \cos^2\left(\frac{Ka}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$T = \frac{4}{1 + \frac{q^2}{K^2} + \left(\frac{K^2}{q^2} - 1\right) \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right) + 2 \frac{q}{K} \cos^2\left(\frac{Ka}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{4}{\left(1 + \frac{K}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{K^2}{q^2} - 1 - 2 \frac{q}{K}\right) \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)}$$

$$\text{On sait que: } K = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}} ; \kappa = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors: } \frac{K^2}{\kappa^2} - 1 - 2 \frac{q}{K} &= \frac{1}{1 + \frac{V_0}{E}} - 1 - 2 \sqrt{1 + \frac{V_0}{E}} \\ \Leftrightarrow -\frac{V_0}{E} \cdot \frac{1}{1 + \frac{V_0}{E}} &- 2 \sqrt{1 + \frac{V_0}{E}} \end{aligned}$$

On obtient finalement donc :

$$T = \left[1 + \frac{V_0^2 \sin^2(Ka)}{4E(E + V_0)} \right]^{-1}$$

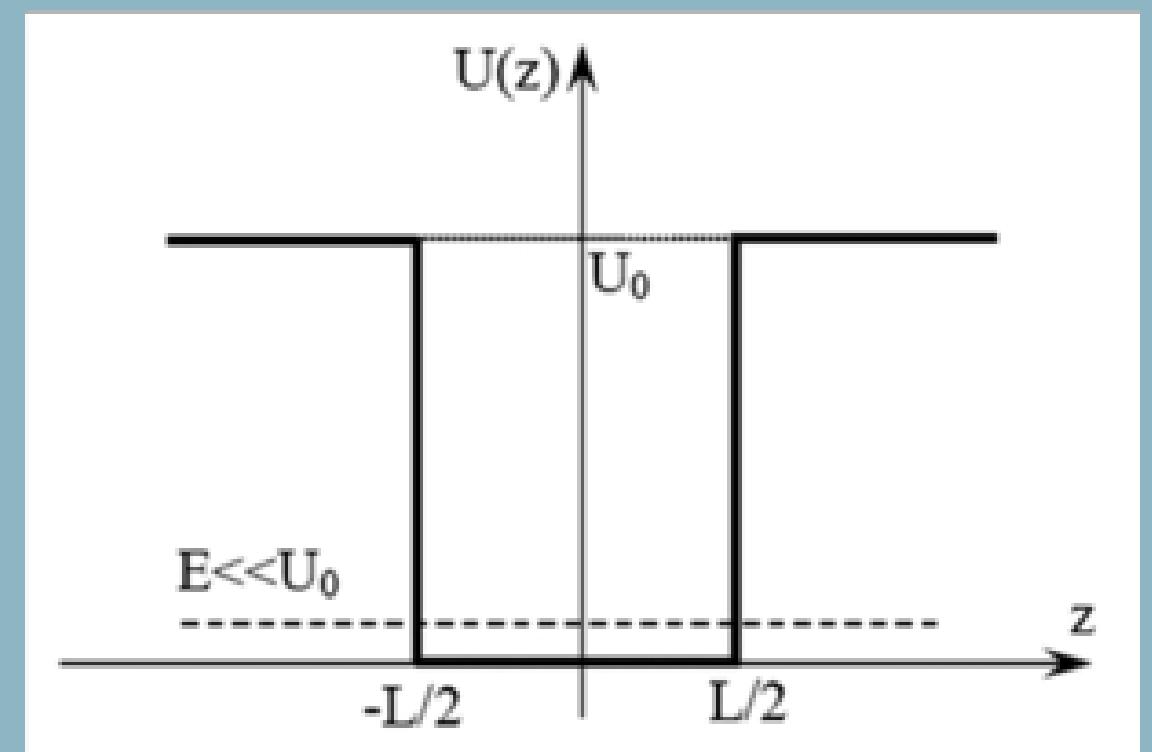
Pour $T=1$, On a :

$$\sin(Ka) = 0 \Leftrightarrow Ka = n\pi \rightarrow \text{solution de l'effet Ramsauer - Townsend}$$

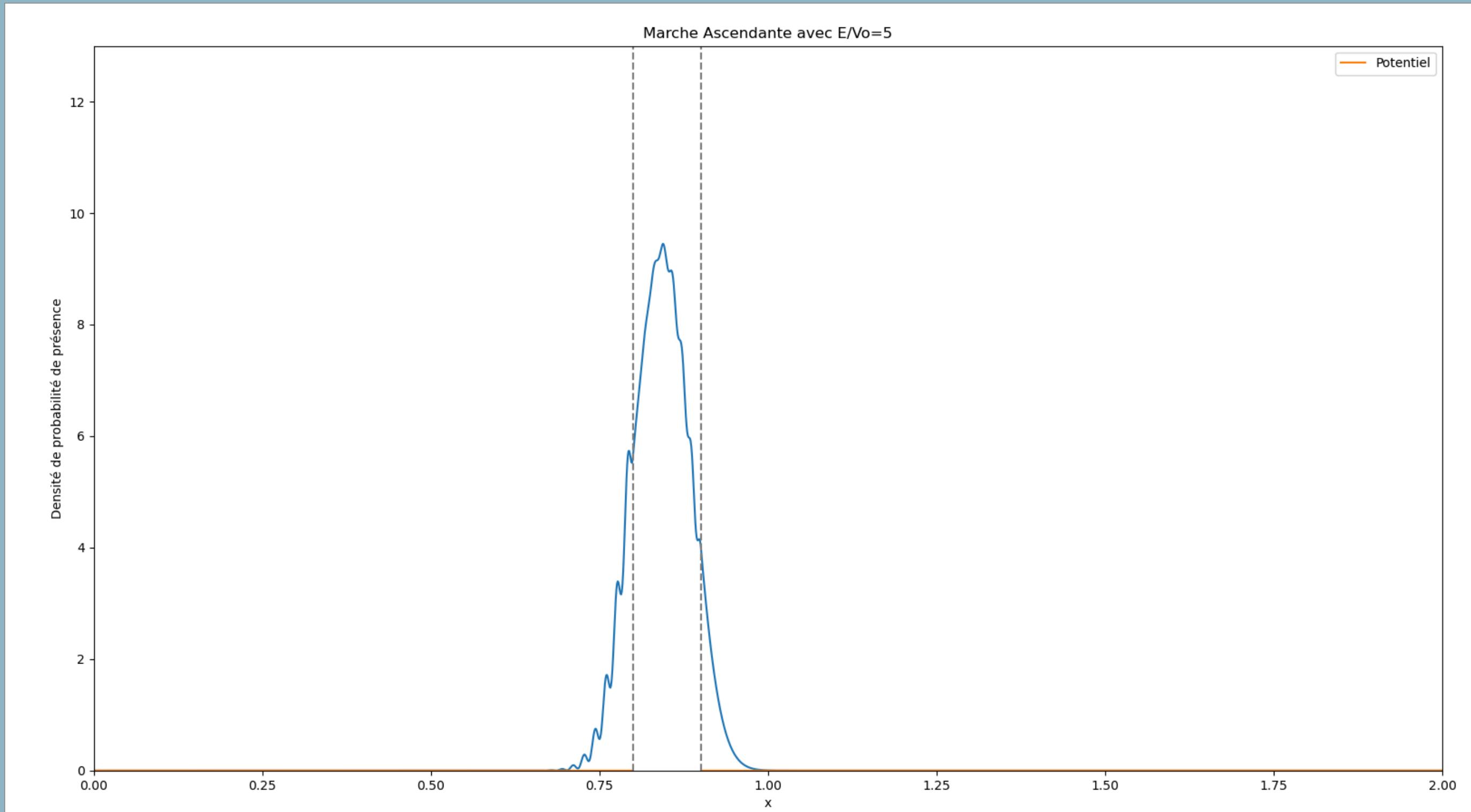
04

Résultats numériques (code)

- Propagation à travers un puits de potentiel de profondeur $-V_0$.
- Visualisation de la densité de probabilité.



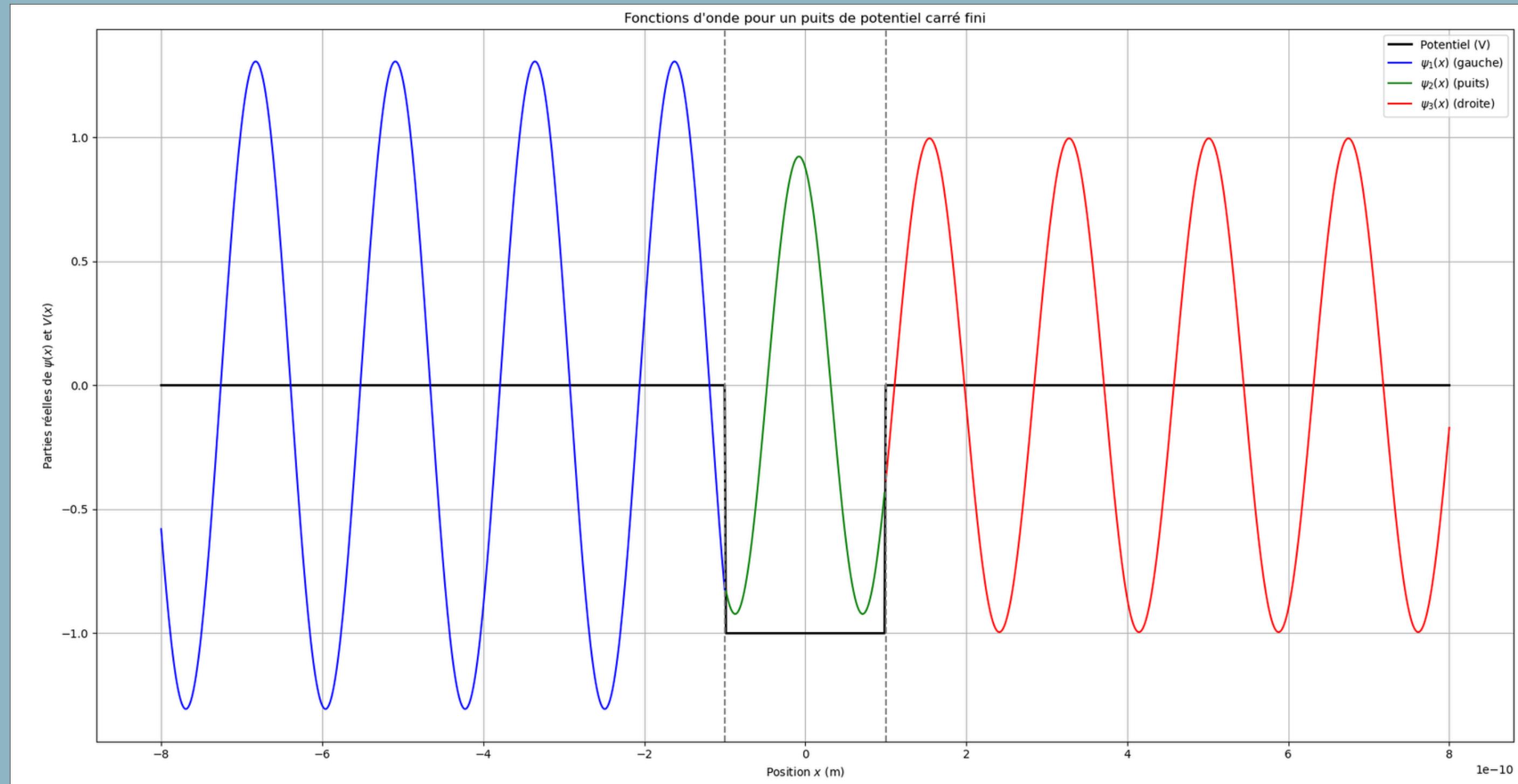
Solution initiale : marche de potentiel



Pré-Ing 2 MI05 / Panayotis Akridas

LAGRANGE Paul / VETIER Guirec /
KALLEL Ala

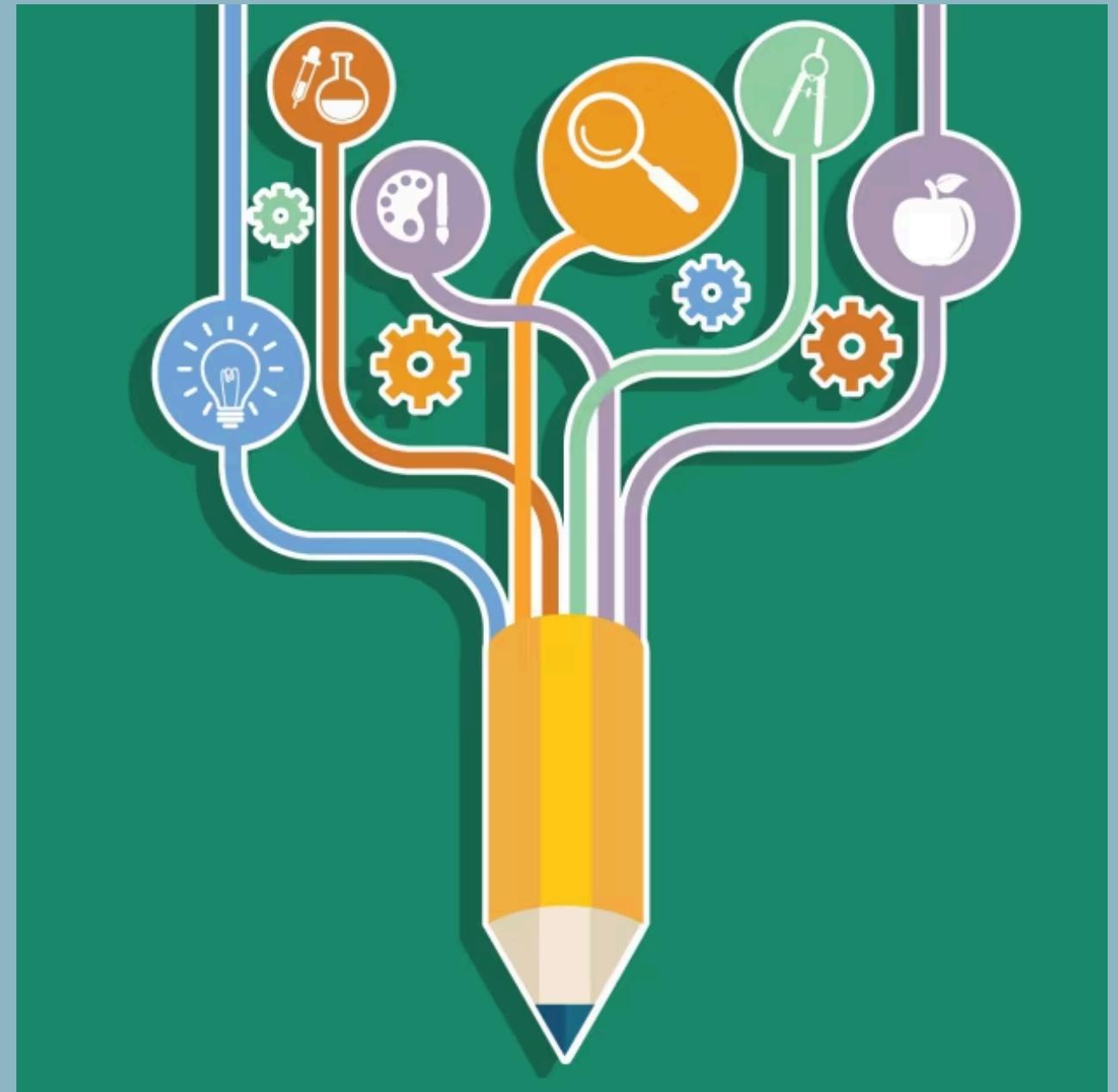
Solution finale : puit de potentiel



05

Pertinence du modèle

- Outil pédagogique simplifié.
- Approche plus simple pour expliquer ces phénomènes.
- Permet de reproduire une expérience en particulier.



06

Limites du modèle

- Modèle unidimensionnel, pas assez réaliste.
- Puit de potentiel carré est approximatif.
- Néglige certaines interactions.

Conclusion