



# Circuitos Elétricos I

Colaboradores: Joe Ferreira Scholtz e Pedro Rodrigues de Lima

15 de Julho de 2020

# Sumário

<b>1</b>	<b>Prefácio</b>	<b>4</b>
1.1	Comentários . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
2.1	Variáveis Fundamentais . . . . .	5
2.1.1	Corrente Elétrica . . . . .	5
2.1.2	Tensão . . . . .	5
2.2	Elementos e Relações Volt-Ampère . . . . .	6
2.2.1	Elementos Passivos . . . . .	6
2.2.2	Elementos Ativos Independentes . . . . .	7
2.2.3	Elementos Controlados . . . . .	7
2.2.4	Instrumentos . . . . .	8
2.3	Leis de Kirchhoff . . . . .	8
2.3.1	Lei de Kirchhoff das Correntes . . . . .	8
2.3.2	Lei de Kirchhoff das Tensões . . . . .	9
2.4	Outros Conceitos Básicos . . . . .	9
2.4.1	Associação em Série . . . . .	9
2.4.2	Associação em Paralelo . . . . .	9
2.4.3	Associação de Fontes . . . . .	10
2.4.4	Transformação $\Delta - Y$ . . . . .	11
2.4.5	Ponte de Wheatstone . . . . .	11
2.4.6	Linearidade . . . . .	12
2.4.7	Superposição em Circuitos Elétricos . . . . .	13
2.4.8	Funções Singulares . . . . .	13
2.4.9	Unidades de Medida . . . . .	16
2.4.10	Curto Circuito e Circuito Aberto . . . . .	17
2.4.11	Teorema da Reciprocidade . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Circuitos Não Reativos</b>	<b>19</b>
3.1	Operações básicas . . . . .	19
3.1.1	Divisor de Tensão . . . . .	19
3.1.2	Divisor de Corrente . . . . .	19
3.1.3	Equivalente de Thévenin e Equivalente de Norton . . . . .	20
3.1.4	Transformação de Fonte . . . . .	23
3.1.5	Equivalente Thévenin/Norton com fontes controladas . . . . .	25
3.1.6	Explosão de Fonte . . . . .	29
3.1.7	Balanco de Potência . . . . .	33
3.2	Teorema da Máxima Transferência de Potência . . . . .	34
3.3	Notação Potencial . . . . .	35
3.4	Diodos . . . . .	36
3.4.1	Diodos Ideais . . . . .	36
3.5	Amplificador Operacional Ideal . . . . .	47
3.5.1	Configuração Inversora . . . . .	49
3.5.2	Configuração Não Inversora . . . . .	50
3.5.3	Configuração Seguidor de Tensão . . . . .	51
3.5.4	Configuração Somador de Tensão . . . . .	51
3.5.5	Configuração Amplificador de Diferenças . . . . .	52
3.5.6	Considerações sobre ganho finito e curto circuito virtual . . . . .	54
3.5.7	Realimentação dupla . . . . .	57
3.6	Quadripolos . . . . .	58
3.6.1	Parâmetros $r$ . . . . .	59
3.6.2	Parâmetros $y$ . . . . .	59
3.6.3	Parâmetros $h$ . . . . .	60

3.6.4	Parâmetros $g$ . . . . .	60
3.6.5	Parâmetros ABCD . . . . .	61
3.6.6	Resolução de Quadripolos . . . . .	61
3.6.7	Associação de Quadripolos . . . . .	62
3.6.8	Exemplos . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Circuitos Reativos</b>	<b>69</b>
4.1	Resolução por Equações Diferenciais Ordinárias Lineares a Coeficientes Constantes .	69
4.1.1	Equacionamento . . . . .	69
4.1.2	Condições Iniciais em Resposta ao Estado Zero . . . . .	71
4.1.3	Resposta Natural . . . . .	72
4.1.4	Resposta Forçada . . . . .	74
4.1.5	Resposta Completa . . . . .	75
4.1.6	Exemplos . . . . .	76
4.2	Elementos Reativos no domínio Frequência . . . . .	87
4.3	Diagrama de Fluxo . . . . .	87
4.4	Representação em Espaço de Estados . . . . .	90
4.4.1	Representação de Estados por Inspeção . . . . .	90
4.4.2	Representação de Estados por Superposição . . . . .	90
4.4.3	Representação de Estados por Diagrama de Estados . . . . .	90
4.4.4	Representação de Estados a partir de uma EDOL . . . . .	91
4.4.5	Resposta de um sistema a partir da Representação de Estados . . . . .	92

# 1 Prefácio

## 1.1 Comentários

Este documento tem como objetivo suprir a base teórica necessária para o aprendizado do método de resolução de circuitos elétricos no domínio do tempo (e brevemente em frequência) sob uma abordagem voltada ao uso combinado e simultâneo das Leis de Kirchhoff.

É importante salientar que o presente documento não é, de modo algum, tão completo e/ou matematicamente rigoroso quanto um livro-texto respeitável deve ser, pelo fato de que, dentre outras coisas, o mesmo foi criado em um curto intervalo de tempo e é destinado, principalmente, a auxiliar os alunos das diversas Engenharias, nossos colegas e amigos. Por isso, muitas das deduções matemáticas serão omitidas, bem como alguns fatos/conceitos sobre o funcionamento físico de circuitos elétricos serão considerados verdadeiros, sem maior embasamento experimental ou teórico.

A organização dos tópicos a serem abordados foi escolhida de modo a seguir a ordem lógica de crescente complexidade quanto às suas seções, porém não tanto quanto às suas subseções.

Quaisquer erros encontrados ou sugestões sobre esse material, favor contatar pelo seguinte email: `ceeca.box@gmail.com`

## 2 Introdução

A primeira coisa que é válida a ser salientada sobre circuitos é o fato desses “diagramas elétricos” serem intrinsecamente, na verdade, uma modelagem matemática de equações diferenciais.

### 2.1 Variáveis Fundamentais

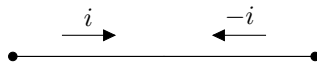
#### 2.1.1 Corrente Elétrica

A mais básica propriedade de sistemas elétricos é a **carga elétrica**, que representa as concentrações de prótons (+) e de elétrons (−) em um corpo (um fio condutor, por exemplo). Se uma força eletromotriz for aplicada em dito corpo, a mesma causará uma movimentação das cargas negativas em relação às positivas, definindo um certo fluxo de carga denominado **corrente elétrica**. Portanto, a corrente elétrica  $i$  é o fluxo de carga  $q$  por unidade de tempo  $t$ , isto é

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (2.1)$$

mensurada, no Sistema Internacional de Unidades, em ampères [A].

Antes da inclusão dos elétrons nos modelos elétricos, acreditava-se que o fluxo de carga partia do terminal positivo em direção ao negativo, dando origem a uma grandeza ainda utilizada e hoje conhecida como **corrente convencional**. Este e a grande maioria dos outros materiais de circuitos elétricos adotam a corrente convencional, apesar de que isso apenas implica mudança de sentido do fluxo de cargas. Por isso, quando afirma-se que existe uma corrente de, digamos,  $i_1 = 1A$ , está implícito que esta representa a movimentação das cargas positivas. Analogamente, uma corrente  $i_2 = -1A$  indica movimentação no sentido oposto. Por isso, a mesma corrente pode ser representada de duas maneiras:



Ao resolver um circuito elétrico, pode-se atribuir um sentido arbitrário para as correntes, desde que a atribuição seja seguida integralmente ao longo da resolução. No caso do sentido real da corrente ser oposto ao escolhido, o valor de corrente encontrado deverá ser negativo.

Existem dois principais tipos de corrente. Chama-se de **corrente contínua** (do inglês, *direct current*, *DC*) aquela que não varia com o tempo, ou seja, constante. Já uma corrente que varia de forma senoidal, com média zero, é denominada **corrente alternada** (*alternating current*, *AC*).

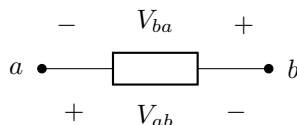
#### 2.1.2 Tensão

A **tensão elétrica**  $V$  (também denotada por  $e$ ) representa a transferência de energia  $E$  envolvida na movimentação das cargas elétricas  $q$ , isto é

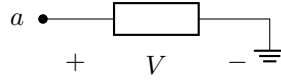
$$V = \frac{dE}{dq}, \quad (2.2)$$

sendo mensurada em volts [V].

A tensão é sempre medida entre dois pontos, digamos,  $a$  e  $b$ , e representa a **diferença de potencial** entre os terminais  $a$  e  $b$ . Por isso, uma tensão  $V_{ab}$  sempre pode ser expressa por  $V_{ab} = \tilde{V}_a - \tilde{V}_b$ , sendo  $\tilde{V}_x$  o potencial elétrico no ponto  $x$ . Os sinais de (+) e (−) definem a **polaridade** da tensão, indicando um **referencial** para sua magnitude. A figura abaixo ilustra a representação da tensão em uma carga genérica.



Note que  $V_{ba} = -V_{ab}$ . Por isso, é comum omitir o subíndice e apenas utilizar-se da magnitude e da polaridade da tensão. Além disso, na maior parte dos circuitos elétricos, atribui-se que o referencial é tal que possua potencial nulo, conhecido como **terra** (do inglês, *ground*, *GND*). Incluindo o terra no modelo genérico e excluindo os subíndices, o circuito é:



**Observação:** Neste material, o terra será omitido e a referência será o potencial comum das fontes independentes (em geral, na parte inferior do circuito). Além disso, diz-se que a tensão **cai** quando é lida do terminal positivo para o negativo. Do contrário, a tensão **sobe**.

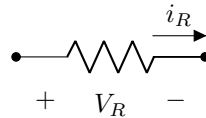
## 2.2 Elementos e Relações Volt-Ampère

### 2.2.1 Elementos Passivos

Componentes passivos não conseguem, por si só, gerar e/ou manipular sinais. Quando combinados com elementos ativos, no entanto, permitem a implementação de diversos sistemas analógicos. O sentido da corrente nos passivos é sempre dado de modo que o fluxo passe do terminal positivo para o negativo. Alternativamente, a polarização da tensão sempre terá seu terminal positivo definido pelo ponto em que a corrente “entra”. Alguns exemplos são os resistores, os capacitores, e os indutores. Na grande maioria das aplicações, os valores dos componentes são conhecidos. Além disso, os armazenadores de energia (capacitores e indutores) são classificados como **reativos**.

#### Resistor

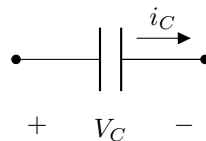
Elemento não reativo que gera oposição à passagem de corrente. Possui uma resistência  $R$  que depende do tamanho, da área e da resistividade elétrica do condutor. A equação que relaciona tensão e corrente em um resistor é denominada **Lei de Ohm**.



$$V_R = Ri_R \text{ [V]} \quad i_R = \frac{V_R}{R} \text{ [A]} \quad P_R^1 = V_R i_R \text{ [W]} \quad E_R = Ri_R^2 t \text{ [J]} \quad (2.3)$$

#### Capacitor

Elemento reativo que armazena energia através de um campo elétrico. Possui uma capacitância  $C$  que relaciona sua carga e sua tensão, isto é,  $q = CV$ . Em geral, consiste em duas placas metálicas paralelas e idênticas, de modo que o valor da capacitância dependa da área da seção transversal das placas, da distância entre placas e da permissividade do meio. Capacitores resistem a variações bruscas de tensão, isto é, possuem certa “inércia” de tensão.

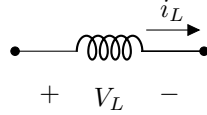


$$V_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C d\tau \text{ [V]} \quad i_C = C \frac{dV_C}{dt} \text{ [A]} \quad Q_C^1 = V_C i_C \text{ [VA} \cdot \text{s]} \quad E_C = \frac{1}{2} CV_C^2 \text{ [J]} \quad (2.4)$$

<sup>1</sup> A diferença entre P e Q e suas unidades de medida são devidamente esclarecidas na Seção 2.4.9.

## Indutor

Elemento reativo que armazena energia na forma de um campo magnético. Possui uma indutância  $L$  que relaciona sua corrente e seu fluxo magnético concatenado, de modo que  $\psi = Li$ . Em geral, consiste em um fio enrolado sucessivamente. Sua tensão é dada pela **Lei de Faraday**. Os indutores resistem a variações bruscas de corrente (“inércia” de corrente).



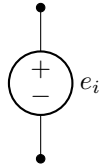
$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \text{ [V]} \quad i_L = \frac{1}{L} \int_0^t V_L d\tau \text{ [A]} \quad Q_L^1 = V_L i_L \text{ [VA} \cdot \text{s]} \quad E_L = \frac{1}{2} L i_L^2 \text{ [J]} \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Elementos Ativos Independentes

Componentes ativos são capazes de gerar e/ou amplificar sinais elétricos. Alguns exemplos são as fontes e os transistores.

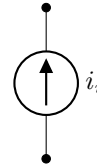
#### Fonte de Tensão

Gera uma tensão  $e_i$  entre seus terminais, enquanto a corrente entre seus terminais é independente e determinada pelo resto do circuito.



#### Fonte de Corrente

Gera uma corrente  $i$  entre seus terminais, enquanto a tensão entre seus terminais é independente e determinada pelo resto do circuito.

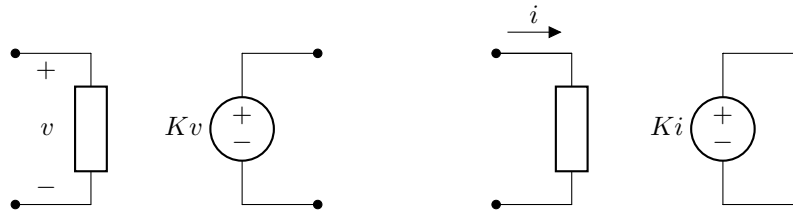


### 2.2.3 Elementos Controlados

Elementos controlados, também chamados dependentes, dependem de algum outro elemento do circuito.

#### Fonte Controlada de Tensão

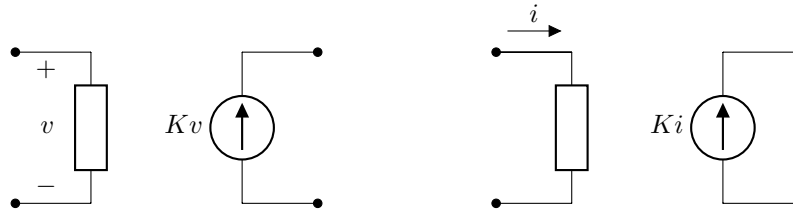
Gera uma tensão  $Kv$  [V] ou  $Ki$  [ $\frac{V}{A}$ A] entre seus terminais, sendo  $v, i$ , respectivamente, a tensão e a corrente em algum outro componente do circuito e  $K$ , uma constante real, o ganho da fonte.



A tensão e corrente  $v, i$  são chamadas, nesse contexto, de **variáveis de controle**.

## Fonte Controlada de Corrente

Gera uma corrente  $Ki$  [A] ou  $Kv$  [ $\frac{A}{V}$  V] entre seus terminais, sendo  $v, i$ , respectivamente, a tensão e a corrente em algum outro componente do circuito e  $K$ , uma constante real, o ganho da fonte.

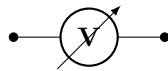


### 2.2.4 Instrumentos

Elementos ideais cuja função é medir algum valor em outro elemento do circuito.

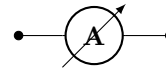
#### Voltímetro

Mede a tensão  $V$  entre seus terminais. Idealmente, o voltímetro possui uma impedância infinita<sup>2</sup>, o que implica corrente 0 (zero) entre seus terminais. Deve ser ligado em paralelo com o componente do qual quer-se medir a tensão.



#### Amperímetro

Mede a corrente  $i$  entre seus terminais. Idealmente, o amperímetro possui uma impedância 0 (zero), permitindo que a corrente passe livremente (sem resistência) entre seus terminais. Deve ser colocado em série com o componente do qual quer-se medir a corrente.

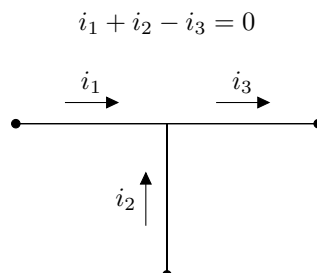


## 2.3 Leis de Kirchhoff

As Leis de Kirchhoff são equações formuladas a partir dos conceitos da conservação da energia e da carga em um circuito elétrico. São elas:

### 2.3.1 Lei de Kirchhoff das Correntes

**Definição:** A soma de todas as correntes que entram em um nó é igual à soma de todas as correntes que saem deste mesmo nó. Considera-se um nó, um ponto arbitrário de mesmo potencial (a exemplo de um fio ideal, ou seja, independente do tamanho do fio, não há queda de tensão ao longo de sua extensão) no qual os terminais e, por conseguinte, as correntes de dois ou mais componentes se encontram.

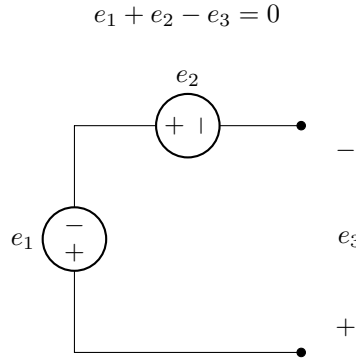


<sup>2</sup>Conceitos de Impedância, Paralelo e Série são devidamente definidos na Seção 2.4.



### 2.3.2 Lei de Kirchhoff das Tensões

**Definição:** O somatório de tensões em um caminho fechado (malha) é nulo. Alternativamente, pode-se dizer que a soma de todas as tensões que caem (do terminal positivo para o negativo) em uma malha é igual à soma de todas as tensões que sobem (do terminal negativo para o positivo) na mesma malha em uma direção arbitrária. Considera-se uma malha um caminho fechado arbitrário (não necessariamente conectado por um fio, mas fechado no sentido de haver queda de tensão entre cada elemento da malha).



## 2.4 Outros Conceitos Básicos

### 2.4.1 Associação em Série

Dois componentes são ditos associados em série quando estão conectados de modo que a exata mesma corrente passa por ambos. É possível substituí-los por um componente equivalente sem alterar o valor da corrente, a partir da equivalência entre a soma das tensões dos componentes em série para com a tensão do componente equivalente, resultando nas expressões abaixo.

- **Resistores:**  $R_{eq} = R_1 + R_2$  ou, generalizando  $R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$
- **Indutores:**  $L_{eq} = L_1 + L_2$  ou, generalizando  $L_{eq} = \sum_{i=1}^N L_i$
- **Capacitores:**  $C_{eq} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}$  ou, generalizando  $C_{eq} = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$



### 2.4.2 Associação em Paralelo

Dois componentes são ditos associados em paralelo quando estão conectados de modo que a exata mesma diferença de potencial (tensão) caia em ambos. Neste caso, é possível substituí-los por um componente equivalente sem alterar o valor da tensão, a partir da igualdade entre a soma das correntes individuais dos componentes em paralelo para com a corrente do componente equivalente (o qual, frisando, possui a mesma tensão), resultando nas expressões abaixo.

• **Resistores:**  $R_{eq} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$

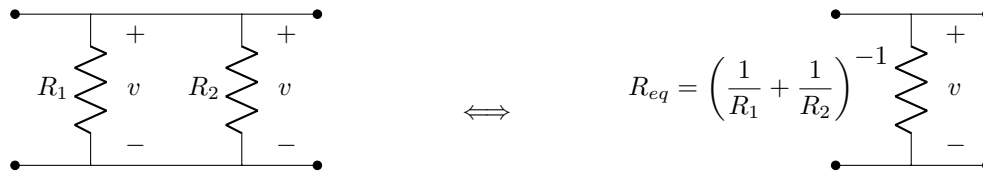
ou, generalizando  $R_{eq} = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$

• **Indutores:**  $L_{eq} = \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^{-1}$

ou, generalizando  $L_{eq} = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{L_i} \right)^{-1}$

• **Capacitores:**  $C_{eq} = C_1 + C_2$

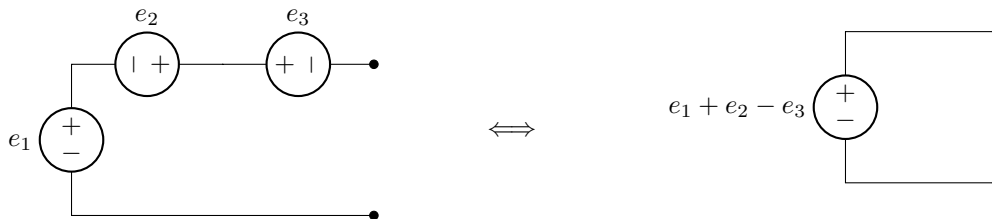
ou, generalizando  $C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$



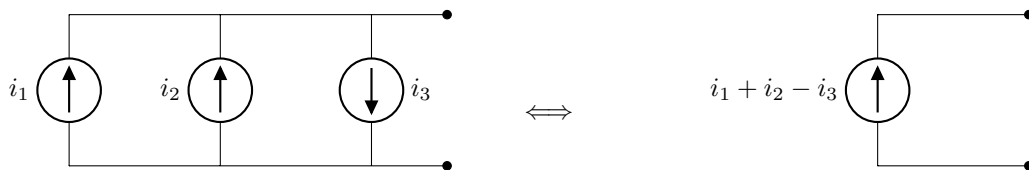
### 2.4.3 Associação de Fontes

Analogamente aos componentes passivos, é também possível associar fontes de modo a representar suas contribuições por meio de um único componente.

• **Fontes de tensão:** Quando em série, pode-se somar as fontes de tensão de acordo com suas polaridades. Segue um exemplo.



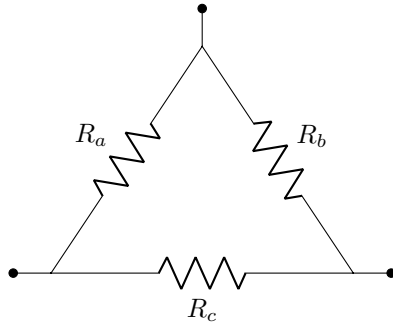
• **Fontes de corrente:** Quando em paralelo, pode-se somar as correntes de cada fonte de acordo com seus sentidos. Por exemplo:



**Observação:** Não é comum utilizar fontes de tensão em paralelo, muito menos fontes de corrente em série, visto que nessas configurações as fontes impõem seus respectivos valores no circuito. De fato, é impossível que as correntes ou tensões assumam dois valores diferentes em um mesmo ponto. Na prática, conectar duas fontes de forma incorreta pode danificar os componentes e, possivelmente, causar faíscas e explosões. Entretanto, uma aplicação é conectar fontes de tensão idênticas em paralelo, de modo que a corrente e, conseqüentemente, a potência exigidas de cada fonte são menores. Neste material, considera-se que as fontes são ideais, podendo sempre fornecer a potência requerida pela carga.

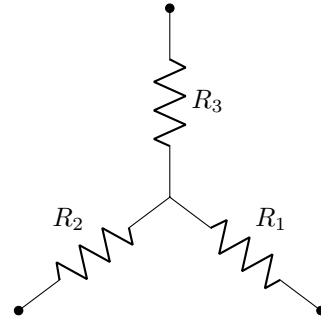
#### 2.4.4 Transformação $\Delta - Y$

Permite transformar um circuito em configuração  $\Delta$  para  $Y$  e vice-versa, respeitando às seguintes relações:



$\Delta \rightarrow Y$

$\Leftrightarrow$



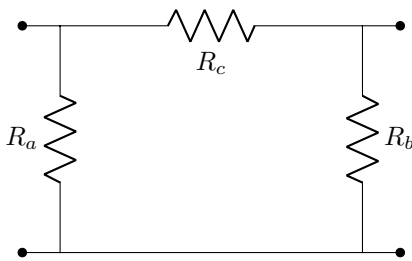
$Y \rightarrow \Delta$

- $R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$
- $R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}$
- $R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$

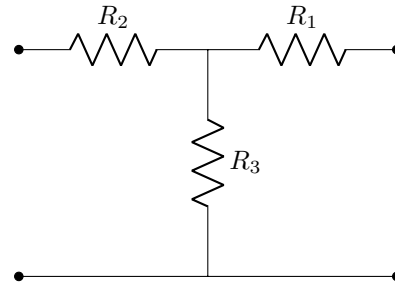
- $R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1}$
- $R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2}$
- $R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$

Vale notar que no caso particular em que todos os resistores são iguais (a  $R$ , por exemplo), a conversão de  $\Delta$  para  $Y$  resulta em  $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{1}{3}R$ . No caso da operação inversa, obtém-se  $R_a = R_b = R_c = 3R$ .

As configurações  $\Delta$  e  $Y$  podem ser rearranjadas em um formato alternativo (o exato mesmo circuito é escrito de maneira ligeiramente diferente). Por isso o nome Transformação  $\pi - T$  também é empregado.

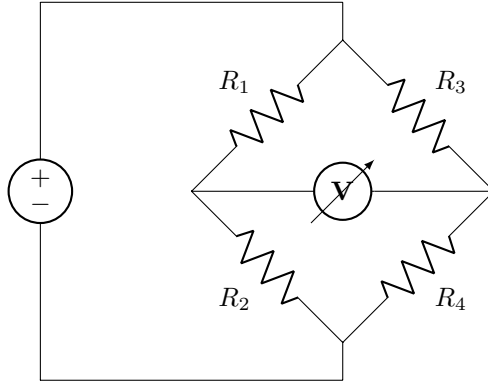


$\Leftrightarrow$

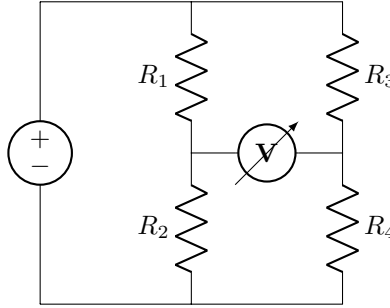


#### 2.4.5 Ponte de Wheatstone

A ponte de Wheatstone é um circuito formado por quatro resistores conectados como ilustra a figura abaixo.



No caso em que  $R_1 R_4 = R_2 R_3$ , diz-se que a ponte está **equilibrada** e tem-se como resultado que a tensão medida no instrumento é nula (verificável pelas Leis de Kirchhoff). Assim, pode-se substituir o voltímetro por um curto, possibilitando associar em paralelo os resistores  $R_1$  e  $R_3$ , bem como  $R_2$  e  $R_4$ . É comum encontrar a ponte de Wheatstone rearranjada como segue.



Essa configuração é particularmente útil para medir uma resistência elétrica desconhecida, já que basta, por exemplo, escolher os valores de  $R_1$  e  $R_3$  e ajustar o valor de  $R_2$  até que a tensão no centro seja nula. Então, obtém-se o valor de  $R_4$  pela equação do equilíbrio. Outra aplicação é a medição de deformações, tensões e forças através de *strain gauges*.

#### 2.4.6 Linearidade

A relação entre duas variáveis é dita linear quando respeita a seguinte relação

- **Princípio da Superposição:**  $f(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$ , com  $a_1$  e  $a_2$  constantes.

O mais pertinente exemplo é a relação entre tensão e corrente nos circuitos reativos.  $V(t) = f(i(t))$  ou  $i(t) = f(V(t))$ . Alguns exemplos,

$$V_R(i_R) = R i_R \implies V_R(i_1 + i_2) = R \cdot (i_1 + i_2) = R i_1 + R i_2 = V_R(i_1) + V_R(i_2)$$

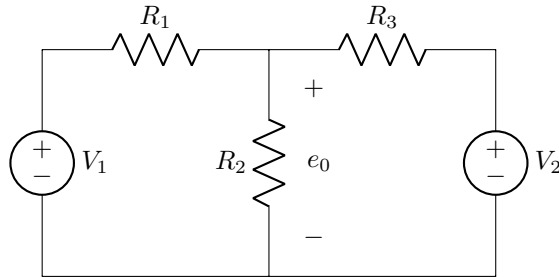
$$V_C(i_C) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C d\tau \implies V_C(i_1 + i_2) = \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 + i_2) d\tau = \frac{1}{C} \int_0^t i_1 d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 d\tau = V_C(i_1) + V_C(i_2)$$

$$V_L(i_L) = L \frac{di_L}{dt} \implies V_L(i_1 + i_2) = L \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) = L \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_2}{dt} = V_L(i_1) + V_L(i_2)$$

Como os operadores de derivada e integral são lineares, é evidente que o Princípio da Superposição continua sendo válido para o caso de constantes multiplicando as variáveis  $i_1$  e  $i_2$ .

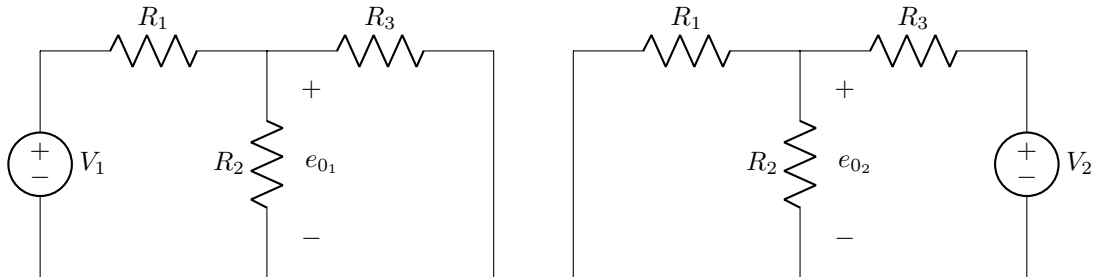
### 2.4.7 Superposição em Circuitos Elétricos

O Princípio da Superposição possui uma importante aplicação em circuitos elétricos, pois permite que a contribuição de cada fonte seja considerada separadamente, muitas vezes facilitando a resolução de problemas que, de outras formas, levaria a uma solução mais complexa e/ou demorada.



A saída  $e_0$  pode ser calculada por superposição, de modo que o problema resume-se a resolver os dois circuitos mais simples abaixo

$$e_0 = e_{0_1} + e_{0_2}$$

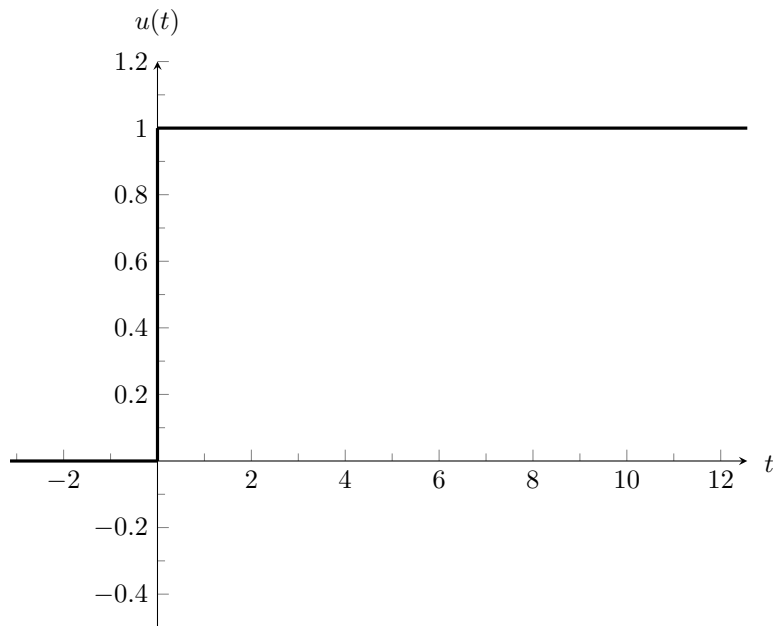


### 2.4.8 Funções Singulares

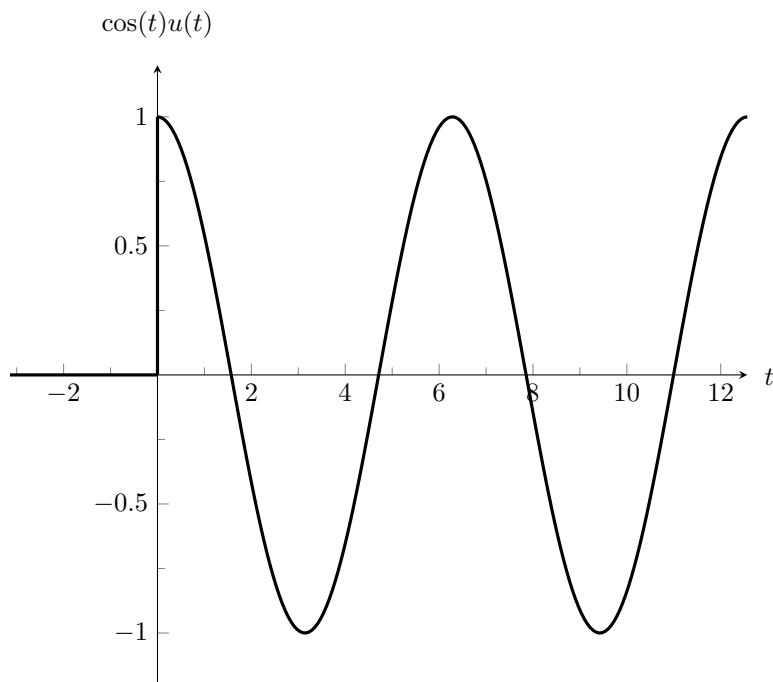
- **Função de Heaviside:** também conhecida como função salto, ou função degrau, é definida por partes como

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

A função também pode ser denotada em outras bibliografias por  $H(t)$  ou  $u_{-1}(t)$ . Seu principal uso é localizar algum evento no tempo, a exemplo de uma fonte sendo ligada ou uma chave sendo aberta ou fechada. O gráfico a seguir ilustra o comportamento da função  $u(t)$  ao longo do tempo:



Também é possível usar a função  $u(t)$  com objetivo de modular alguma outra função  $f(t)$ , já que  $f(t)u(t)$  é zero para  $t < 0$  e assume o próprio valor de  $f(t)$  para  $t \geq 0$ . O gráfico a seguir mostra um exemplo disso usando uma função trigonométrica:



- **Delta de Dirac:** Inicialmente, define-se um pulso unitário  $p(t)$  em torno da origem e com área unitária a partir de uma soma de saltos deslocados no tempo, tal que

$$p(t) = \frac{1}{2a}(u(t+a) - u(t-a)). \quad (2.6)$$

Ao diminuir-se o valor de  $a$ , percebe-se que o intervalo de tempo em que  $p(t)$  ocorre também diminui. No entanto, a restrição da área unitária implica aumento do valor da função para  $t \in [-a, a]$ . Ao tomar-se o limite em que  $a$  tende a zero de  $p(t)$ , o intervalo de tempo torna-se infinitesimal e a função tende ao infinito. Define-se, então, o **Delta de Dirac** como

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2a} (u(t+a) - u(t-a)) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \quad (2.7)$$

mantendo a restrição de área unitária, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.8)$$

Deste modo, pode-se utilizar o Delta de Dirac para caracterizar eventos pontuais no tempo, a exemplo de forças e descargas elétricas instantâneas. Por isso, também pode ser chamado de função impulso (denotada por  $u_0(t)$ ). A definição do Delta do Dirac resulta em uma propriedade muito útil chamada **filtragem**, dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0),$$

sendo  $f(t)$  uma função contínua em torno da origem. Uma interpretação qualitativa da filtragem é que, devido ao intervalo infinitesimal  $t \in [-a, a]$  em que o delta é não nulo, pode-se considerar que o valor de  $f(t)$  é aproximadamente  $f(0)$ , resultando em

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt \approx f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt,$$

expressão na qual é possível aplicar a definição (2.8), resultando no próprio valor da função no ponto. Assim como a função salto, é possível aplicar deslocamento no tempo, de modo que exista uma ação impulsiva em um ponto arbitrário  $t = t_0$ , ou seja,

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}.$$

É importante salientar que o Delta de Dirac não é considerado uma função do ponto de vista matemático (apesar de ser comumente referido como tal), pois é definido a partir de um limite de funções. De fato, a integral de uma função infinita em um intervalo de tempo nulo resultaria em indefinição. Entretanto, o problema foi formulado de modo a diminuir o intervalo de tempo com a restrição da área do pulso ser unitária, o que, assintoticamente, leva a “altura” do pulso a um valor extremamente grande.

Informalmente, considera-se o Delta de Dirac como a derivada da função salto. Intuitivamente, percebe-se que em  $t = 0$  a taxa de variação de  $u(t)$  é infinita, e para qualquer  $t \neq 0$  a função é constante. Mais especificamente, relembrando que a definição de derivada é dada por

$$\frac{d}{dt} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad (2.9)$$

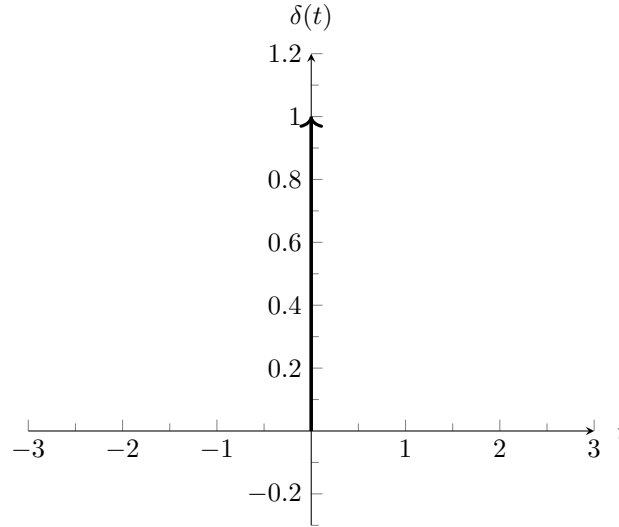
verifica-se que a equação (2.7) é exatamente a definição de derivada, com  $f(t) = u(t-a)$  e  $h = 2a$ . Portanto, sabendo que  $a$  tende a zero,

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t).$$

No entanto, o fato da função salto ser descontínua na origem torna mais razoável considerar que

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t),$$

embora ambas definições serem utilizadas frequentemente no contexto de circuitos elétricos. A figura a seguir ilustra a representação gráfica de um Delta de Dirac:



- **Função Rampa:** consiste em uma reta partindo da origem, com inclinação unitária,

$$R(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}.$$

Fica claro que a função rampa é a primitiva da função salto. Por isso, ao invés de  $R(t)$ , é comum expressar a rampa como  $tu(t)$ , ou até mesmo  $u_{-2}(t)$ . Percebe-se que ao integrar a função rampa, ter-se-á uma função parábola no primeiro quadrante dada por  $t^2u(t)$ . Este raciocínio pode ser extrapolado para  $n$  dimensões, apesar de ser incomum utilizar  $n > 2$  nas aplicações básicas de circuitos elétricos.

- Observação: A notação  $u_0(t)$ ,  $u_{-1}(t)$ ,  $u_{-2}(t)$  etc refere-se às respectivas Transformadas de Laplace das funções singulares, dadas pela tabela a seguir.

Tempo	Frequência
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$s^{-1}$
$tu(t)$	$s^{-2}$
$t^2u(t)$	$s^{-3}$

Deste modo, o subíndice representa a potência da variável  $s$  na frequência. Vale ressaltar que este material tem como foco a análise temporal de circuitos. Esta observação foi feita apenas a título de curiosidade.

#### 2.4.9 Unidades de Medida

- **Ohm  $[\Omega]$ :** resistência elétrica, é a relação entre a tensão e a corrente em um resistor. Também utilizado como medida de reatância<sup>3</sup> e impedância elétrica, tem-se que uma impedância  $Z$  segue

<sup>3</sup>A reatância de um capacitor é  $X_C = -(\omega C)^{-1}$  e a de um indutor é  $X_L = \omega L$ , sendo  $\omega$  a frequência de excitação da fonte.



a expressão  $Z = R + jX$ , sendo  $R$  a resistência,  $X$  a reatância e  $j$  a unidade imaginária. Em outras palavras, a resistência é a parte real da impedância. Em muitos casos, impedância e resistência são informalmente utilizados como sinônimos, apesar de nem sempre representarem a mesma coisa (de fato, são equivalentes apenas quando não há reatâncias). Tal relação torna-se útil ao trabalhar com circuitos no domínio da frequência, fora do escopo deste material.

- **Siemens [S]**: condutância elétrica, inverso da resistência (ou admitância, inverso de impedância). Esta unidade é também conhecida como **Mho** [ $\Omega$ ] ou [ $\Omega^{-1}$ ].
- **Henry [H]**: indutância elétrica, relação entre a tensão e a variação da corrente em um indutor.
- **Farad [F]**: capacitância elétrica, relação entre a carga elétrica e a tensão em um capacitor.
- **Joule [J]**: energia. Para resistores, corresponde à energia dissipada através do efeito Joule, para capacitores à energia armazenada na forma de um campo elétrico e para indutores à energia armazenada na forma de campo magnético.
- **Watt [W]**: potência útil, corresponde à energia dissipada por unidade de tempo. Para resistores, é calculada por  $P = V_R i_R$ .
- **Volt-Ampère Reativo [VAr]**: potência reativa, corresponde à potência armazenada nos elementos reativos (indutor e capacitor).
- **Volt-Ampère [VA]**: potência aparente, corresponde à potência complexa em um circuito de corrente alternada, de forma que  $S = P + jQ$ , sendo  $P$  a potência útil,  $Q$  a potência reativa e  $j$  a unidade imaginária. A distinção entre tipos de potência torna-se relevante para a análise de circuitos no domínio da frequência, fora do escopo deste material.

Além disso, existem alguns prefixos de unidades comuns na análise de circuitos elétricos.

Relações dos prefixos das unidades

Prefixo	Símbolo	Multiplicador
Pico	$p$	$10^{-12}$
Nano	$n$	$10^{-9}$
Micro	$\mu$	$10^{-6}$
Mili	$m$	$10^{-3}$
Kilo	$k$	$10^3$
Mega	$M$	$10^6$
Giga	$G$	$10^9$

Uma importante ferramenta para conferir respostas em circuitos elétricos (e na engenharia, de modo geral) é a chamada **análise dimensional**, que consiste em, como diz o nome, analisar as dimensões de alguma equação, tendo como princípio que, se ambos os lados são iguais, ambos os lados devem possuir a exata mesma unidade. Tomando como exemplo a fórmula da potência útil  $P = Vi$  e utilizando as definições de tensão e corrente da Seção 2.1, tem-se que

$$P = Vi = \frac{dE}{dq} \frac{dq}{dt} = \left[ \frac{J}{C} \frac{C}{s} \right] = \left[ \frac{J}{s} \right] = [W], \quad (2.10)$$

em que  $[\cdot]$  representa unidades de medida. Verifica-se que, de fato, existe equivalência de unidades na equação. Caso houvesse disparidade, concluir-se-ia que a equação está incorreta.

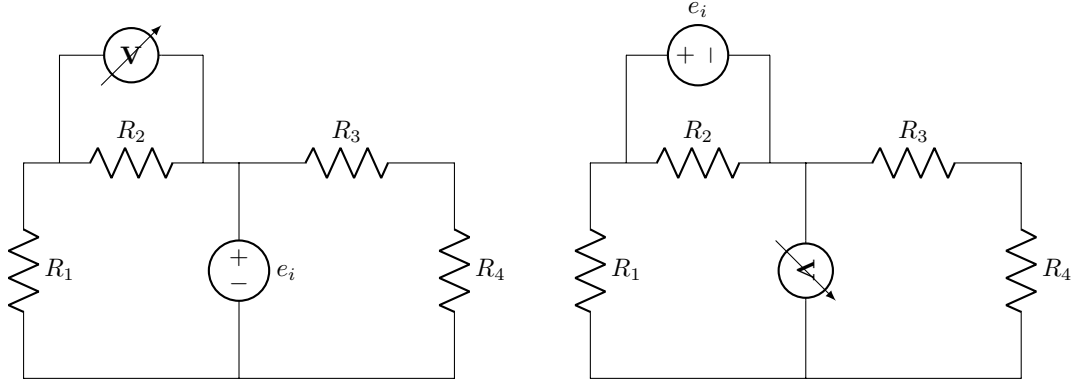
#### 2.4.10 Curto Circuito e Circuito Aberto

Considera-se um **curto circuito** um elemento com impedância tendendo a 0 (zero), ou seja, que permite livremente a passagem de corrente e com queda de tensão nula sobre o mesmo.

Considera-se um **circuito aberto** um elemento com impedância tendendo ao infinito, não permitindo a passagem de corrente, mas podendo possuir queda de tensão entre seus terminais.

### 2.4.11 Teorema da Reciprocidade

Considerando um circuito elétrico resistivo com apenas uma fonte de corrente ou tensão, e um instrumento de medição, voltímetro ou amperímetro, é possível permutar a fonte e o instrumento sem modificar a leitura do mesmo. Por exemplo



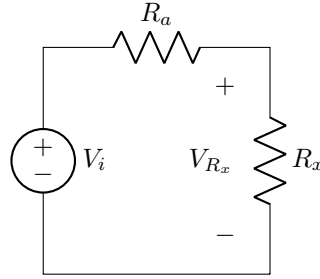
A tensão medida no voltímetro permanece a mesma nos dois casos. O Teorema de Reciprocidade estende-se também para fontes de corrente.

## 3 Circuitos Não Reativos

### 3.1 Operações básicas

#### 3.1.1 Divisor de Tensão

Em um circuito série contendo apenas uma fonte de tensão e resistores, pode-se expressar a tensão  $V_{R_x}$  em um resistor  $R_x$  por



$$V_{R_x} = \frac{R_x}{R_{eq}} V_i = \frac{R_x}{R_x + R_a} V_i \quad [V] \quad (3.1)$$

**Observação:** Note que tal operação é válida para  $N$  resistores em série, uma vez que  $R_a$  pode, na verdade, ser a associação em série dos  $N - 1$  resistores diferentes de  $R_x$ .

Para indutores, a equação é análoga, portanto

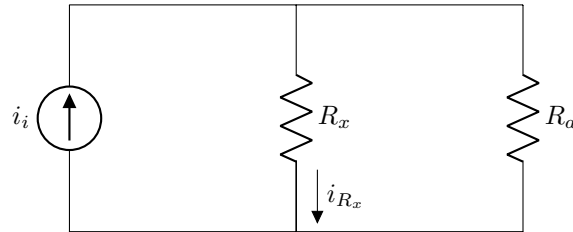
$$V_{L_x} = \frac{L_x}{L_{eq}} V_i = \frac{L_x}{L_x + L_a} V_i \quad [V] \quad (3.2)$$

Para capacitores, entretanto, a relação entre capacitância e tensão é de proporção inversa, portanto

$$V_{C_x} = \frac{C_{eq}}{C_x} V_i = \frac{C_a}{C_x + C_a} V_i \quad [V] \quad (3.3)$$

#### 3.1.2 Divisor de Corrente

Em um circuito paralelo contendo apenas uma fonte de corrente e resistores, pode-se expressar a corrente  $i_{R_x}$  em um resistor  $R_x$  por



$$i_{R_x} = \frac{R_{eq}}{R_x} i_i = \frac{R_a}{R_x + R_a} i_i \quad [A] \quad (3.4)$$

**Observação:** Note que tal operação é válida para  $N$  resistores em paralelo, uma vez que  $R_a$  pode, na verdade, ser a associação em paralelo dos  $N - 1$  resistores diferentes de  $R_x$ .

Para indutores, a relação é análoga

$$i_{L_x} = \frac{L_{eq}}{L_x} i_i = \frac{L_a}{L_x + L_a} i_i \quad [A] \quad (3.5)$$

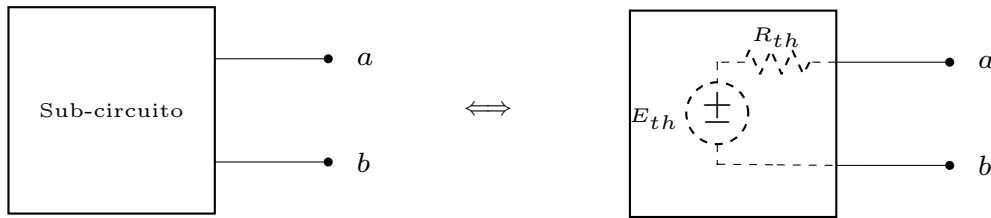
Para capacitores, a corrente é diretamente proporcional à capacitância, portanto

$$i_{C_x} = \frac{C_x}{C_{eq}} i_i = \frac{C_x}{C_x + C_a} i_i \quad [A] \quad (3.6)$$

### 3.1.3 Equivalente de Thévenin e Equivalente de Norton

O Teorema de Thévenin (também chamado de Equivalente de Thévenin) é uma técnica de simplificação de circuitos que transforma uma rede linear de resistores e fontes (controladas ou não) em um circuito equivalente contendo uma fonte de tensão  $E_{th}$  em série com um resistor  $R_{th}$ . Para tal, deve-se escolher **dois** terminais de interesse  $a$  e  $b$ .

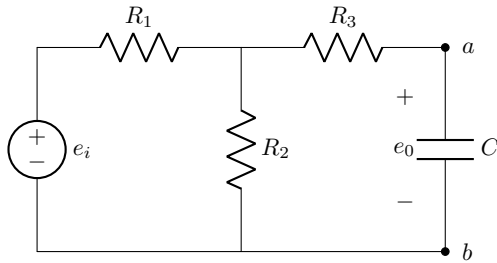
Considerando uma rede linear genérica que contém apenas fontes e resistores



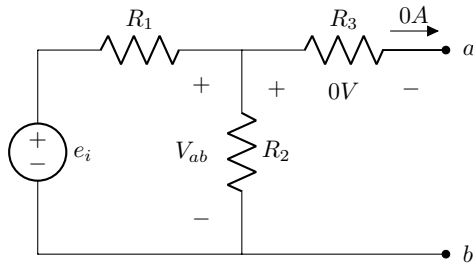
Por definição,

- $E_{th}$  é a tensão entre  $a$  e  $b$  a circuito aberto,
- $R_{th}$  é a resistência equivalente medida a partir dos terminais  $a$  e  $b$  após matar<sup>4</sup> as fontes independentes (no caso de existirem fontes dependentes, deve-se utilizar o método descrito em seguida).

Deste modo, conseguimos simplificar a configuração do circuito elétrico, facilitando o cálculo de tensão e corrente em qualquer carga aplicada entre os terminais  $a$  e  $b$ . Por exemplo, para encontrar o valor da tensão no capacitor  $C$  pode-se aplicar o Teorema de Thévenin nos terminais indicados na figura



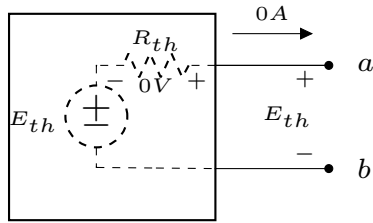
Inicialmente, deve-se abrir o circuito nos terminais do capacitor ( $a$  e  $b$ ) e calcular a tensão que cai nos mesmos.



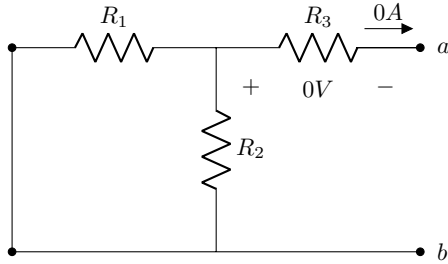
Como a tensão no resistor  $R_3 = 0$ , lembrando que um potencial é o mesmo ao longo de um fio ideal, a tensão  $V_{ab} = E_{th}$  é exatamente a tensão que cai no resistor  $R_2$ , a qual pode ser calculada pelo divisor de tensão

$$E_{th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_i$$

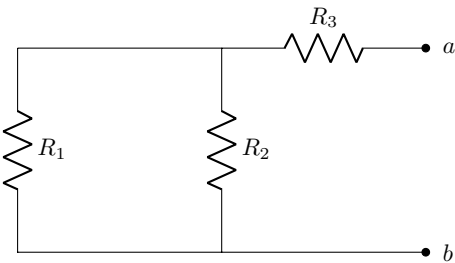
<sup>4</sup>Matar uma fonte é um termo informal para “igualar o valor da fonte a zero”.



Analogamente, olhando para o nosso circuito equivalente de Thévenin, podemos pensar que, ao medirmos a tensão entre os terminais  $a$  e  $b$  sem que haja corrente, podemos visualizar que estamos medindo diretamente a tensão  $E_{th}$ , uma vez que não há corrente passando por  $R_{th}$  e, portanto, a tensão nele é nula.

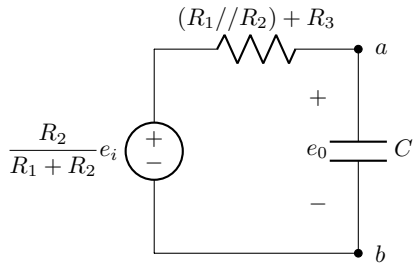


Em seguida, para o cálculo do resistor de Thévenin, mata-se a fonte de tensão (ou seja, deve-se substituí-la por um curto circuito) e calcula-se a resistência equivalente vista dos terminais  $a$  e  $b$



Rearranjando ligeiramente o  $R_1$ , percebe-se que o resistor equivalente é  $R_3$  em série com o paralelo de  $R_1$  e  $R_2$ , ou seja

$$R_{th} = (R_1 // R_2) + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$



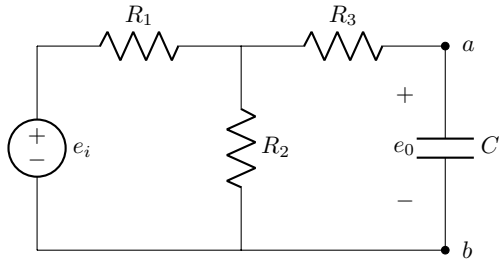
Deste modo, é possível escrever o circuito original como um circuito RC série (cuja solução será abordada em capítulos futuros), que torna simples encontrar a saída  $e_0$ .

O interessante é que para qualquer combinação de componentes colocada entre os terminais  $a$  e  $b$  (neste caso é o capacitor), resultará no exato mesmo equivalente de Thévenin, facilitando o cálculo para várias cargas diferentes.

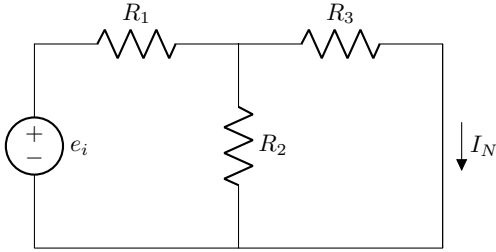
Outra técnica análoga é calcular o Equivalente de Norton, que transforma a rede de componentes em um circuito com uma fonte de corrente  $I_N$  em paralelo com um resistor  $R_N$ . Neste caso,

- $I_N$  é a corrente de curto circuito de  $a$  para  $b$ ,
- $R_N$  é a resistência equivalente medida a partir dos terminais  $a$  e  $b$  após matar as fontes independentes (no caso de existirem fontes dependentes, deve-se utilizar o método descrito em seguida).

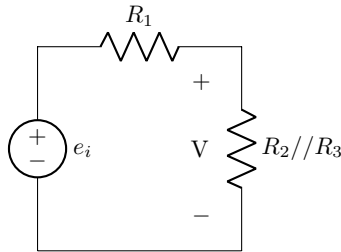
Tomando-se o mesmo exemplo,



Deve-se trocar o capacitor por um curto circuito e calcular a corrente que passa de  $a$  para  $b$ .



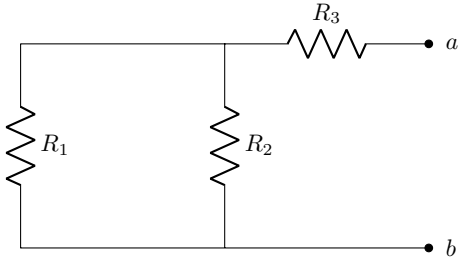
Neste caso, para calcular a corrente  $I_N$ , pode-se associar  $R_2$  e  $R_3$  e em seguida dividir a tensão.



$$V = \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} e_i$$

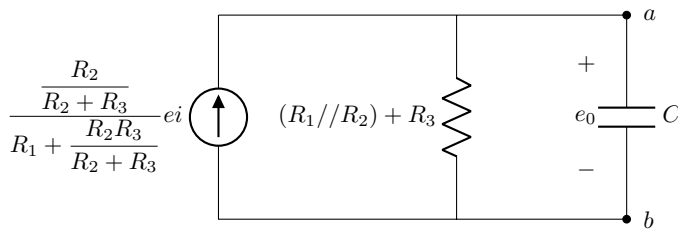
Como a tensão para componentes em paralelos é a mesma que cai em seu equivalente, temos que

$$I_N = \frac{V}{R_3} = \frac{\frac{R_2}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} e_i$$



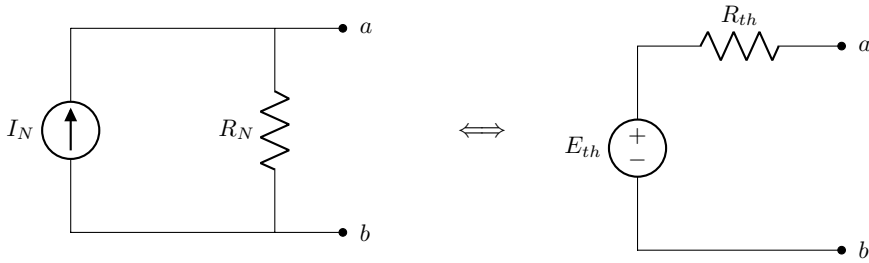
Para o resistor  $R_N$ , percebe-se que o resistor equivalente é igual a  $R_{th}$ , ou seja

$$R_N = R_{th} = (R_1 // R_2) + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$



O circuito se limita a um RC em paralelo.

É possível transformar um equivalente Thévenin em um equivalente Norton e vice-versa escolhendo os terminais  $a$  e  $b$  da seguinte maneira



Utilizando as relações da Lei de Ohm

$$R_{th} = R_N$$

$$E_{th} = R_N I_N \quad (3.7)$$

$$I_N = \frac{E_{th}}{R_{th}} \quad (3.8)$$

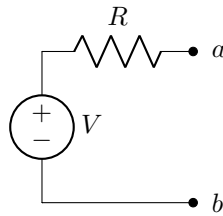
### 3.1.4 Transformação de Fonte

É possível utilizar técnicas de simplificação para remodelar blocos fonte-resistor em um circuito, dependendo da conexão entre ditos fonte e resistor. As possíveis combinações são exploradas a seguir.

#### Transformações do tipo circuito equivalente

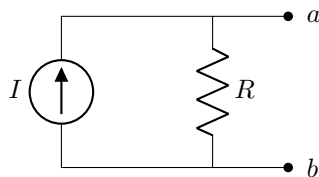
Este tipo de transformação de fonte consiste em encontrar o equivalente de Thévenin/Norton de uma fonte e um resistor associados. Como são casos muito usuais, dá-se atenção a fim de que se torne uma ferramenta de uso rápido na resolução de circuitos, sem que seja necessário, de fato, encontrar o equivalente de Thévenin/Norton passo-a-passo.

- Fonte de tensão em série com um resistor:



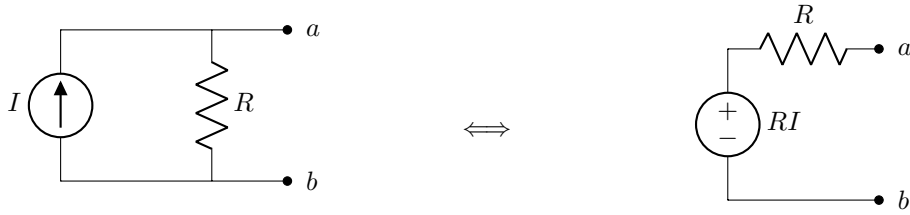
Naturalmente, a corrente de curto circuito é  $i_N = V/R$  e a resistência de Norton é o próprio resistor  $R_N = R$ . Então, uma fonte de tensão  $V$  em série com um resistor  $R$  é equivalente a uma fonte de corrente  $V/R$  em paralelo com um resistor  $R$ .

- Fonte de corrente em paralelo com um resistor:



A tensão a circuito aberto é  $E_{th} = RI$  e a resistência equivalente é o próprio resistor  $R_{th} = R$ . Logo, uma fonte de corrente  $I$  em paralelo com um resistor  $R$  é equivalente a uma fonte de tensão  $RI$  em série com um resistor  $R$ .

Nota-se que as transformações são reversíveis, posto que, como já mencionado na seção anterior, é possível transformar novamente o circuito já transformado.



### Transformações do tipo alteração do circuito

É possível também aplicar técnicas simplificadoras que, ao contrário das previamente mostradas, alteram o circuito inicial, resultando em um circuito diferente ao invés de um circuito equivalente. Entretanto, podem ser muito úteis se utilizadas sabiamente, ao conhecer suas limitações. Explicitando, ambas transformações a seguir consistem na retirada de um componente associado a uma fonte, o que apenas altera a potência fornecida pela mesma.

- **Fonte de tensão em paralelo com um resistor:**

No caso de haver uma rede de componentes passivos em paralelo com uma fonte de tensão, é possível simplesmente retirá-la sem alteração dos valores de tensão e corrente do resto do circuito, pois, uma vez que a fonte de tensão necessariamente impõe seu valor entre os seus dois terminais, nesse caso  $a$  e  $b$ , sem que essa rede exerça qualquer influência sobre essa tensão. Vale salientar apenas que, dada a natureza da fonte de tensão, em que a corrente é independente e determinada pelo circuito associado à fonte, a corrente fornecida por essa fonte é alterada pela retirada dos componentes passivos e, conseqüentemente, sua potência também é. Entretanto, se nenhuma dessas duas variáveis, corrente e potência da fonte de tensão, são de interesse para a resolução, é possível aplicar a aproximação.



Note que o segundo diagrama foi referido como uma aproximação do primeiro, visto que um elemento foi removido, ao invés de transformado.

- **Fonte de corrente em série com um resistor:**

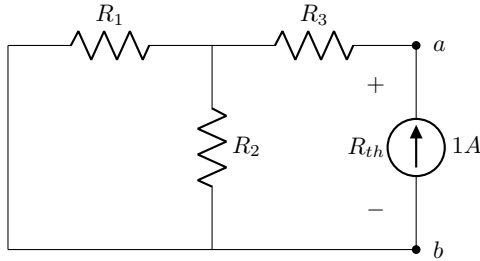
De forma análoga, no caso de haver componentes passivos em série com uma fonte de corrente, é possível retirá-los sem alteração dos valores de tensão e corrente do restante do circuito conectado aos terminais, nesse caso  $a$  e  $b$ , dado que a existência de componentes em série não exerce nenhuma influência sobre a corrente imposta pela fonte de corrente entre seus terminais. Nesse caso, apenas os valores de tensão e a potência na fonte de corrente são alterados pela retirada dos componentes.





### 3.1.5 Equivalente Thévenin/Norton com fontes controladas

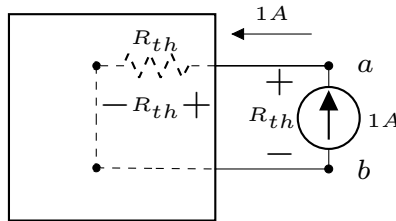
Apesar de a maneira de calcular  $E_{th}$  e  $I_N$  seja a mesma, com a presença de fontes controladas, não é possível calcular  $R_{th}$  e  $R_N$  por associação de resistores. Por isso, deve-se utilizar uma outra abordagem (que é sempre válida, porém um pouco mais trabalhosa). O método consiste em aplicar uma fonte com um valor conhecido e utilizar a Lei de Ohm para obter o valor do resistor. A mais clássica escolha é calcular a tensão que cai nos terminais de uma fonte de corrente de 1A. Já que  $V = Ri$ , para  $i = 1A$ ,  $V = R$ . Do mesmo exemplo dado na Seção 3.1.3, tem-se



Neste caso a tensão que cai na fonte vale  $R_{th}$ , podendo ser expressada por

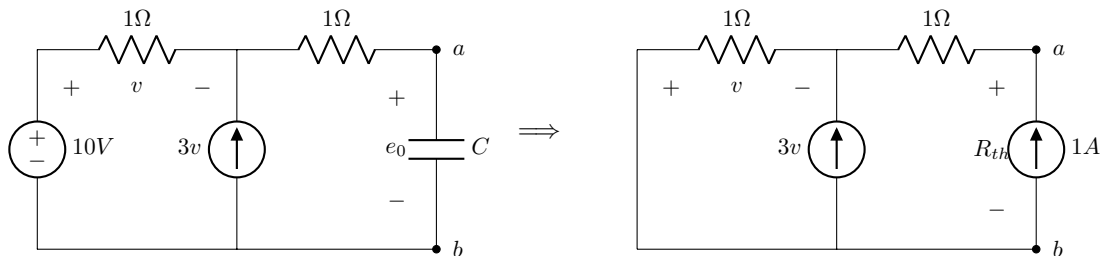
$$R_{th} = [(R_1 // R_2) + R_3] 1A,$$

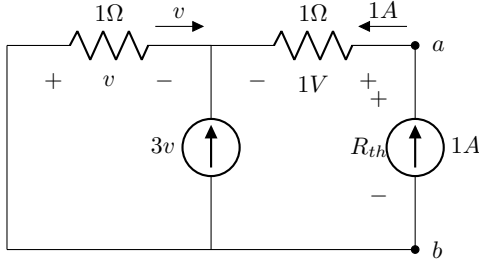
que é o exato mesmo valor encontrado nos outros casos.



Novamente, utilizando nosso circuito equivalente de Thévenin, é possível visualizar claramente como medir a tensão em uma fonte de corrente de valor conhecido  $i$  nos fornece o valor de  $R_{th}$ , e o porquê de escolher  $i = 1A$  ser tão útil. Vale notar que, como  $E_{th}$  é uma combinação linear das fontes de fato presentes no circuito, matá-las, consequentemente, mata  $E_{th}$ .

Tomando-se um novo exemplo, com uma fonte controlada de corrente,





Através da equação de nó do circuito, tem-se que

$$v + 3v + 1 = 0,$$

ou seja,

$$v = -\frac{1}{4} = -0.25V.$$

Então, pode-se calcular  $R_{th}$  utilizando a malha que envolve ambos os resistores e a fonte de 1A:

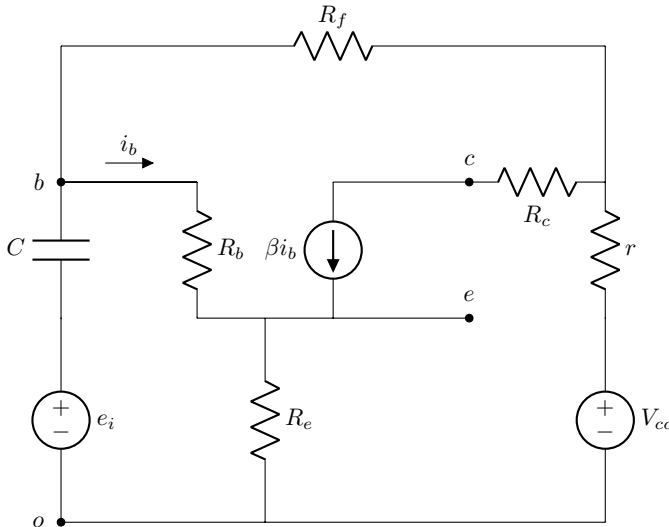
$$R_{th} = 1 - v = 1.25\Omega.$$

**Observação:** Formalmente, a definição do resistor de Thévenin é dada pela razão entre a tensão a circuito aberto e a corrente de curto circuito. Entretanto, os autores julgam os métodos aqui apresentados mais eficientes, visto que, em comparação ao cálculo da corrente de Norton, o ato de matar as fontes independentes simplifica significativamente a resolução do circuito.

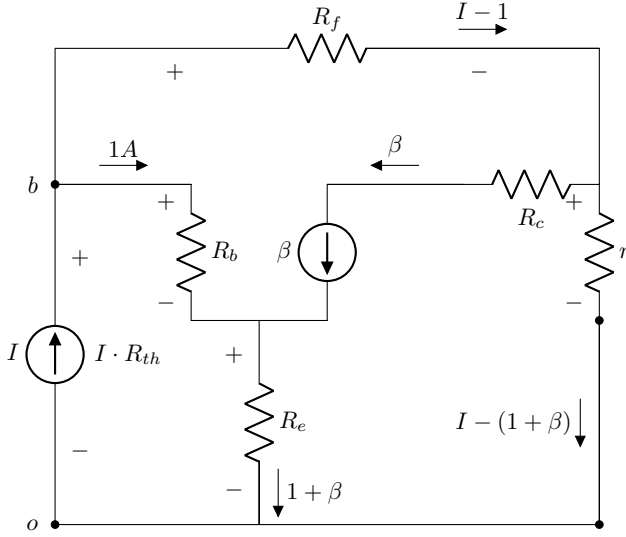
Uma outra possibilidade, ainda dentro da ideia de utilizar uma fonte de corrente entre os terminais dos quais deseja-se descobrir a resistência equivalente, útil especificamente no contexto de fontes controladas, é a de aplicar uma fonte de valor inicialmente desconhecido  $I$  entre os terminais, e assumir que  $I$  é tal que alguma variável de controle existente no circuito assuma um valor específico, tipicamente unitário ou o inverso multiplicativo do ganho da respectiva fonte controlada pela variável, fazendo, dessa forma, com que a fonte controlada também assuma um valor conhecido, podendo servir como atalho na resolução.

Note que pode parecer fácil escolher que  $I$  seja tal que a variável de controle assuma valor nulo. Entretanto, ter-se-ia que o próprio valor de  $I$  também seria nulo, o que poderia vir a ser uma conclusão frustrante e nada frutífera para resolução do circuito em questão. O leitor pode questionar-se sobre a existência e unicidade do valor  $I$  para um dado valor da variável de controle. Pode-se dizer que na análise de circuitos resistivos, a não ser que a variável de controle tenha valor nulo para qualquer valor de  $I$  (e.g. a tensão em um curto circuito), para um valor conhecido da variável de controle existe um e apenas um valor de  $I$  correspondente. Isso será melhor esclarecido na Seção 4.4.

Segue um exemplo clássico de aplicação dessa técnica. Apesar de não ser o enfoque deste material, a título de curiosidade, vale dizer que o circuito abaixo representa o modelo de pequenos sinais de um transistor bipolar de junção autopolarizado. Este componente extremamente versátil é utilizado amplamente na indústria de microeletrônica. Enquanto o estudo de transistores faz parte do conteúdo das disciplinas de eletrônica, nossa análise será voltada apenas ao seu circuito equivalente.



Desejando-se saber qual a resistência equivalente vista a partir dos terminais  $o$  e  $b$ , faz-se  $V_{cc} = 0$ , bem como impõe-se uma fonte de corrente de valor  $I$  entre os mesmos terminais, tal que  $i_b = 1A$ .



Em seguida, utiliza-se a lei dos nós em  $b$  para determinar a corrente que percorre  $R_f$ , bem como, então, no nó entre  $R_c$  e  $r$  para determinar  $i_r$ , possibilitando obter  $i_{R_e}$  a partir do nó abaixo de  $R_e$ . Dessa forma, podemos facilmente descobrir o valor de  $I$  fazendo a malha que percorre  $R_e$ ,  $R_b$ ,  $R_f$  e, por fim,  $r$ , depois isolando  $I$  na equação.

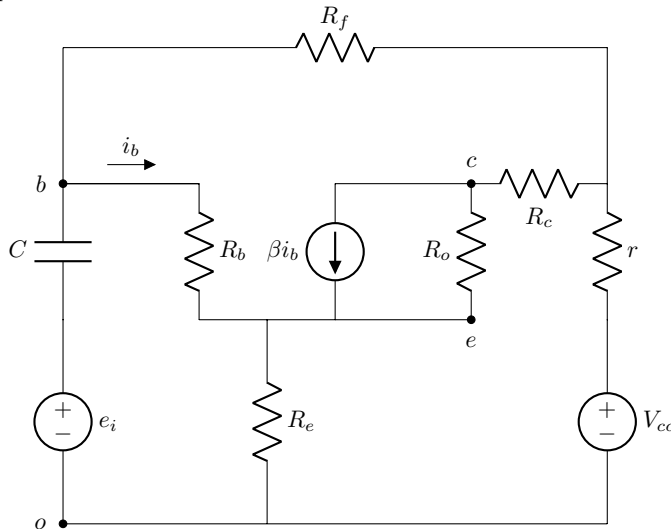
O valor de  $I$  fica, então,

$$I = \frac{R_f + R_b + (1 + \beta)(R_e + r)}{R_f + r}. \quad (3.9)$$

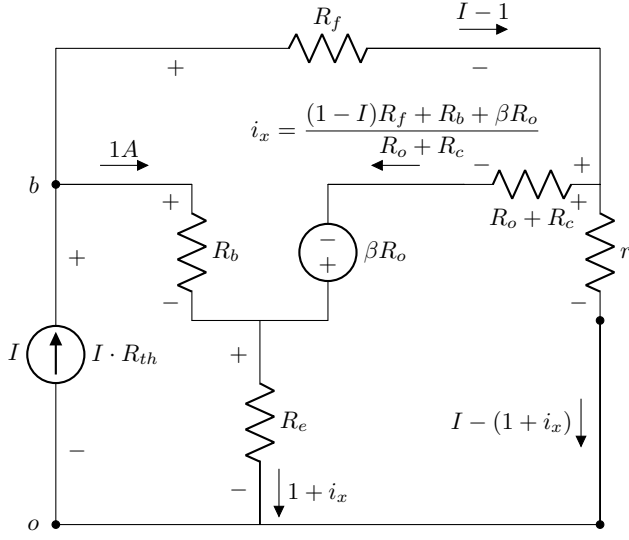
Por fim, ao fazer a malha percorrendo o potencial do ponto  $o$  até o do ponto  $b$ , passando por  $R_b$  e por  $R_e$ , obtém-se uma equação para  $I \cdot R_{th}$ . Uma vez que a corrente  $I$  é dada por (3.9), pode-se determinar  $R_{th}$ , que resulta em

$$R_{th} = \frac{(R_f + r)(R_b + (1 + \beta)R_e)}{R_f + R_b + (1 + \beta)(R_e + r)}.$$

Note que o resistor  $R_c$  não influencia nos valores de  $I$  e  $R_{th}$ , pois está em série com a fonte controlada de corrente. Convém, portanto, analisar um caso mais completo, em que adiciona-se uma resistência  $R_o$  entre os pontos  $e$  e  $c$  (representando, por exemplo, a não idealidade da fonte controlada), de modo que o resistor  $R_c$  não mais seja uma redundância. Assim, o número de variáveis envolvidas no cálculo da resistência de Thévenin aumenta, consequentemente aumentando a complexidade do problema.



Novamente, desejando-se saber qual a resistência equivalente vista a partir dos terminais  $o$  e  $b$ , faz-se  $V_{cc} = 0$ , bem como impõe-se uma fonte de corrente de valor  $I$  tal que  $i_b = 1A$ . Também utiliza-se da transformação de fonte para com a fonte de corrente  $\beta i_b$  e o resistor  $R_o$ .



Feitas essas simplificações, como no circuito anterior, utiliza-se a lei dos nós em  $b$  para determinar a corrente que percorre  $R_f$ . Após, tendo que apenas uma das correntes do nó é conhecida, uma possibilidade é utilizar a malha que contém  $R_b$ ,  $R_f$ ,  $R_o + R_c$  e  $\beta R_o$  para, justamente, descobrir a tensão em  $R_o + R_c$  e, dividindo pelo próprio  $R_o + R_c$ , descobrir a corrente,  $i_x$ , nesse resistor. As demais correntes podem ser facilmente obtidas em função de  $i_x$ , pela lei dos nós.

Alternativamente, a corrente  $i_x$  pode ser reescrita em função de  $I$  como a equação de uma reta, isto é,  $i_x = a_1 I + a_0$ , sendo  $a_1$  e  $a_0$  definidos pela equação

$$i_x = -\frac{R_f}{R_o + R_c}I + \frac{R_f + R_b + \beta R_o}{R_o + R_c}, \quad (3.10)$$

o que vem a ser particularmente útil para, além de simplificar a notação, facilitar os cálculos subsequentes, já que busca-se isolar a corrente  $I$ . Faz-se, então, a malha contendo  $R_e$ ,  $\beta R_o$ ,  $R_o + R_c$  e  $r$ . Note que, apesar de não interferir no resultado final, é uma boa ideia escrever a equação de modo que os termos de  $i_x$  sejam todos negativos, já que a dependência em  $I$  de  $i_x$  é dada pelo coeficiente  $a_1 < 0$ . Assim, ao substituir a expressão de  $i_x$  na equação, todos os termos com  $I$  serão positivos. Dessa forma, tem-se a seguinte igualdade:

$$-R_e(1 + i_x) - (R_o + R_c)i_x + r(I - (1 + i_x)) = -\beta R_o.$$

Separando  $i_x$  em função de seus componentes  $a_1$  e  $a_0$ , pode-se isolar  $I$ , resultando em

$$I = \frac{-\beta R_o + a_0(R_e + R_o + R_c + r) + R_e + r}{a_1(R_e + R_o + R_c + r) + r}.$$

Aplicando a equação (3.10),

$$I = \frac{-\beta R_o + \frac{(R_f + R_b + \beta R_o)(R_e + R_o + R_c + r)}{R_o + R_c} + R_e + r}{\frac{R_f(R_e + R_o + R_c + r)}{R_o + R_c} + r}. \quad (3.11)$$

Por fim, uma vez que conhece-se  $I$ , é possível determinar  $R_{th}$  usando a malha contendo a própria fonte  $I$ ,  $R_b$  e  $R_e$ , dada por

$$R_{th} = \frac{1}{I}[R_b + R_e(1 + i_x)].$$

Escrevendo  $i_x$  em função de seus componentes  $a_1$  e  $a_0$ ,

$$R_{th} = a_1 R_e + \frac{1}{I}[R_b + R_e(1 + a_0)].$$

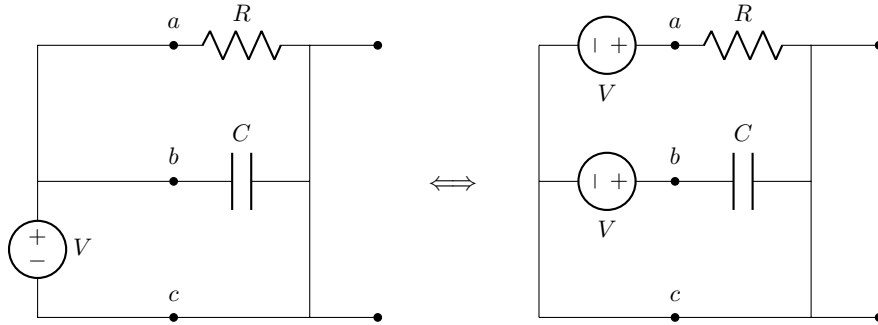
Aplicando, agora, as equações (3.10) e (3.11),

$$R_{th} = -\frac{R_f R_e}{R_o + R_c} + \frac{\left( \frac{R_f(R_e + R_o + R_c + r)}{R_o + R_c} + r \right) \left( R_b + R_e + \frac{R_e(R_f + R_b + \beta R_o)}{R_o + R_c} \right)}{-\beta R_o + \frac{(R_f + R_b + \beta R_o)(R_e + R_o + R_c + r)}{R_o + R_c} + R_e + r}. \quad (3.12)$$

### 3.1.6 Explosão de Fonte

Explosão de fonte é uma técnica que permite “deslocar” uma fonte sem alterar a sua contribuição para com o circuito elétrico. À rigor, apenas reescreve-se o circuito de modo que facilite a resolução. Esta técnica é muitas vezes utilizada juntamente com as transformações para a simplificação de malhas.

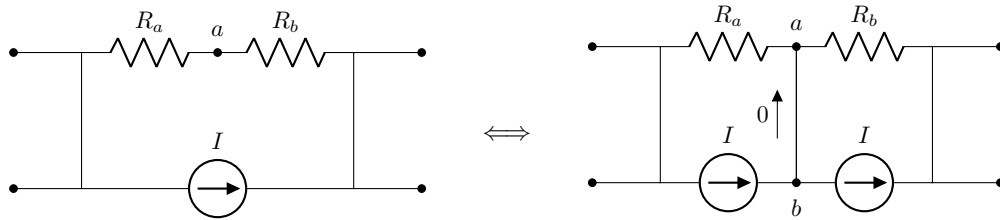
**Fonte de tensão:** Uma fonte de tensão pode ser “explodida” em um nó, desde que os mesmos potenciais estejam associados às mesmas cargas.



Nota-se em ambos os circuitos que os pontos  $a$  e  $b$  estão sob o potencial positivo de  $V$  e que  $c$  está na referência. Todas as tensões e correntes são exatamente as mesmas, portanto os circuitos são equivalentes.

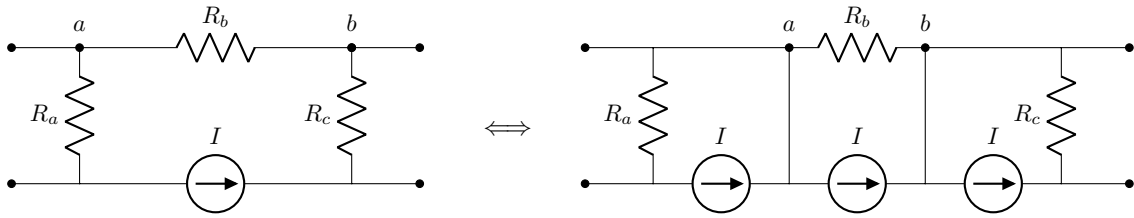
Fosse relevante, seria possível transformar a fonte de tensão, agora em série com o resistor  $R$ , em uma fonte de corrente em paralelo com o resistor.

**Fonte de corrente:** Uma fonte de corrente pode ser “explodida” em uma malha, desde que as mesmas correntes entrem e saiam de todos os nós.

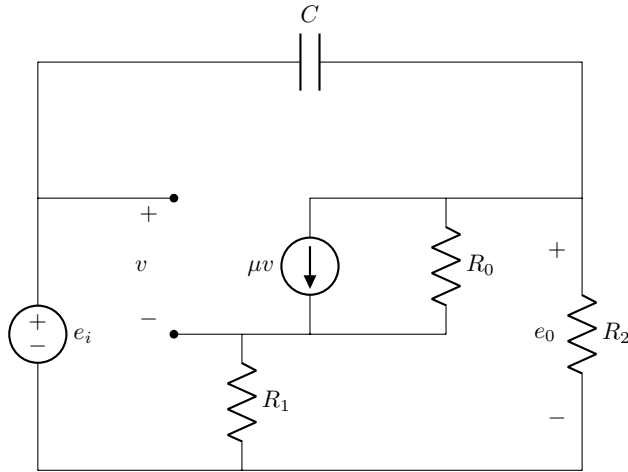


Na segunda figura, percebe-se, pelo nó  $b$ , que a corrente no fio adicionado é nula. De fato, as cargas  $R_a$  e  $R_b$  possuem respectivas correntes e tensões idênticas em ambos os casos, o que implica o equivalente ser válido. Pode-se, agora, analogamente à explosão de fonte de tensão, transformar as fontes de corrente em paralelo com os resistores em fontes de tensão em série com suas respectivas cargas.

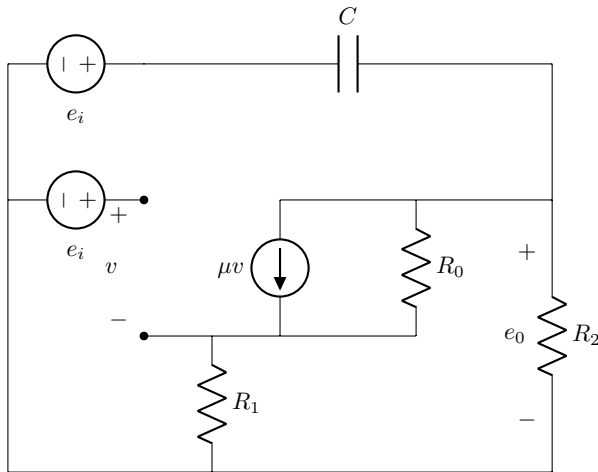
Para um caso com mais resistores, o processo é exatamente o mesmo. Percebe-se que é possível estender este raciocínio para  $n$  resistores e que as correntes nos fios adicionados serão todas nulas. A figura abaixo ilustra uma explosão de fonte de corrente para  $n = 3$  resistores.



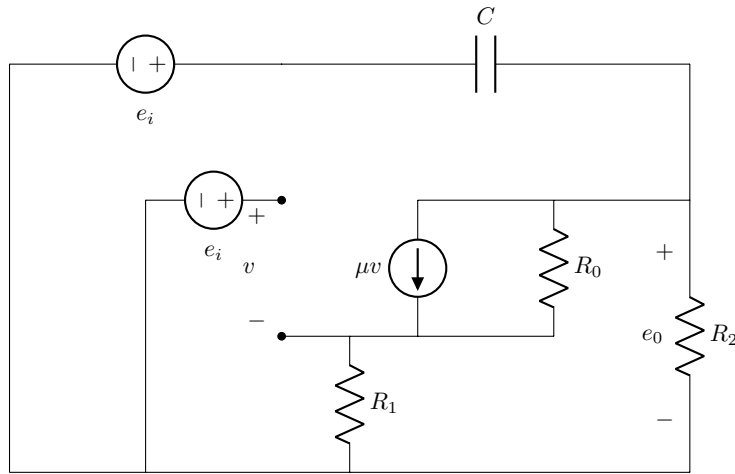
**Exemplo:** Para demonstrar a utilidade da explosão de fontes, considera-se o circuito abaixo, dados  $R_1 = 20\Omega$ ,  $R_2 = 125\Omega$ ,  $R_0 = 400\Omega$ ,  $C = 1mF$ ,  $\mu = 0.01\frac{A}{V}$ ,  $e_i = 5u(t)$ . Quer-se obter a tensão de saída  $e_0(t)$ .



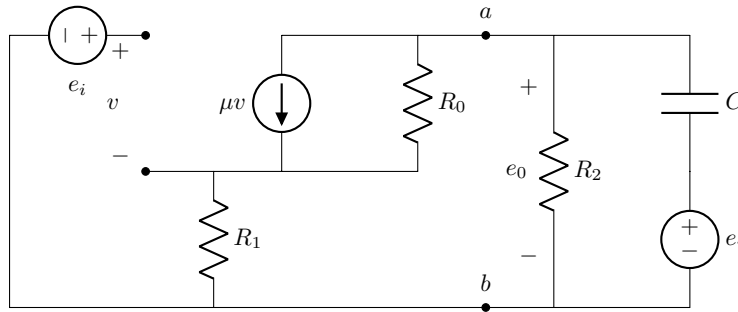
Devido ao capacitor de realimentação, não é possível encontrar um equivalente de Thévenin em relação aos terminais de  $e_0$  (já que só é possível simplificar uma rede linear que contenha apenas resistores e fontes). Porém, pode-se utilizar a explosão de fonte em  $e_i$ , de modo que:



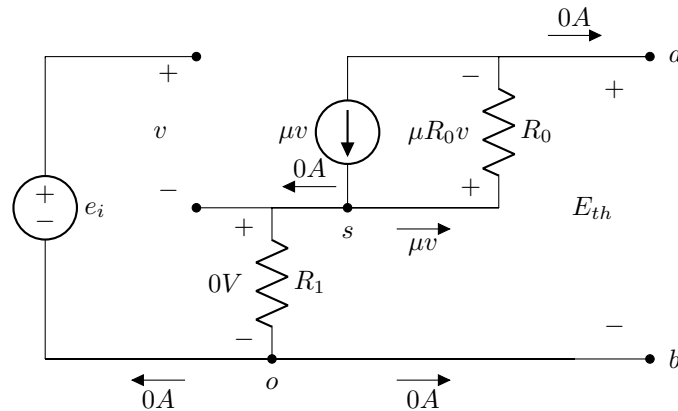
Note que é possível separar o referencial comum das fontes  $e_i$  em dois fios, sem alterar seus potenciais negativos (o motivo será evidenciado a seguir). O diagrama fica, então,



Assim, fica mais fácil perceber que o ramo que contém a fonte  $e_i$  e o capacitor está em paralelo com o resistor  $R_2$ . De fato, seus terminais são exatamente os mesmos. É possível, portanto, reorganizar a configuração dos componentes de forma a manter os valores de tensão e corrente, isto é, em um circuito equivalente.



Com o circuito escrito nesse formato, pode-se calcular um equivalente de Thévenin, já que tanto a saída  $e_0$  quanto o capacitor estão à direita de  $a$  e  $b$ , terminais escolhidos para o Thévenin.



Já que a corrente em um circuito aberto é igual a  $0A$ , utilizando o nó  $o$ , descobre-se que a corrente no resistor  $R_1$  é, também, igual a  $0A$ , o que implica tensão  $0V$  no mesmo. Então, através da análise do nó  $s$ , percebe-se que a corrente da fonte controlada é igual à do resistor  $R_0$ , polarizando-o como mostrado no circuito. A partir daí, pode-se calcular  $E_{th}$  pela malha que contém  $R_0$  e  $R_1$ , ou seja

$$E_{th} = -\mu R_0 v.$$

Porém, devemos relacionar a tensão  $v$  do elemento controlado com a entrada  $e_i$ , para manter nosso equivalente diretamente relacionado com a fonte independente, pois a variável de controle não estará presente no circuito resultante. Isso é alcançável utilizando a malha que contém  $e_i$ ,  $v$  e  $R_1$ :

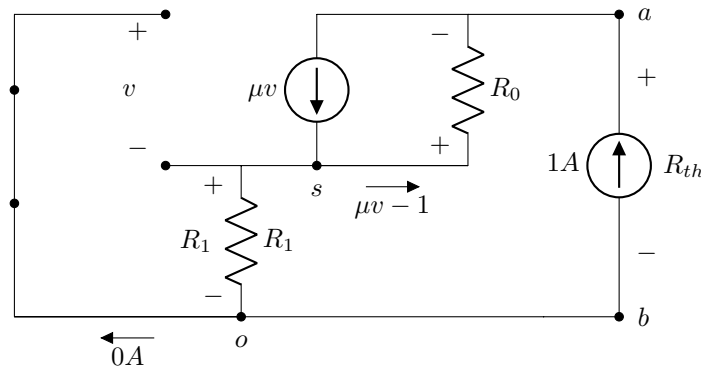
$$e_i = v + 0,$$

ou seja,

$$E_{th} = -\mu R_0 e_i$$

$$E_{th} = -20V.$$

A seguir, para calcular o resistor  $R_{th}$ , aplica-se uma fonte de  $1A$  entre os terminais  $a$  e  $b$  e mata-se as fontes independentes (neste caso,  $e_i$ ).



Neste caso, a corrente em  $R_1$  é  $1A$ , portanto sua tensão é  $R_1$ , o que resulta, pela malha à esquerda, na relação

$$v = -R_1.$$

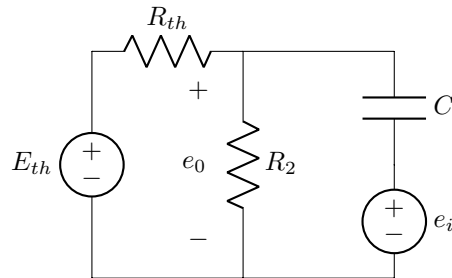
Além disso, pelo nó  $s$ , evidencia-se que a corrente no resistor  $R_0$ , polarizada conforme a imagem, deve ser  $i_{R_0} = \mu v - 1$ . Portanto, equacionando a malha à direita,

$$R_{th} = R_1 - R_0[\mu v - 1] = R_1 - R_0[-\mu R_1 - 1]$$

$$R_{th} = R_1 + R_0 + \mu R_0 R_1$$

$$R_{th} = 500\Omega.$$

Calculado o equivalente, o circuito resultante é



É evidente que a nova forma do circuito é muito mais simples em comparação à original, tornando fácil encontrar  $e_0(t)$ . Este exemplo será revisitado e concluído na Seção 4, visto que envolve a resolução de um circuito reativo.



### 3.1.7 Balanço de Potência

A partir do conceito da conservação de energia, é possível equacionar a potência dos  $n$  componentes de um circuito elétrico através da relação

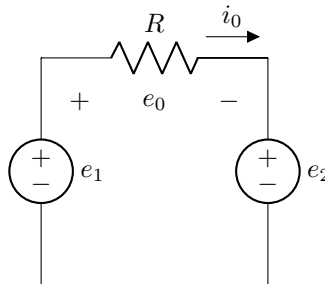
$$\sum_{k=1}^n P_k = 0, \quad (3.13)$$

o que nos permite fazer um balanço de potências, ou seja, calcular as potências individuais de cada componente e somá-las, visto que a energia total de um sistema será sempre conservada. Naturalmente, a potência é separada em **fornecida** e **dissipada**, tornando prático definir uma convenção de sinais para  $P_k$ , sendo que

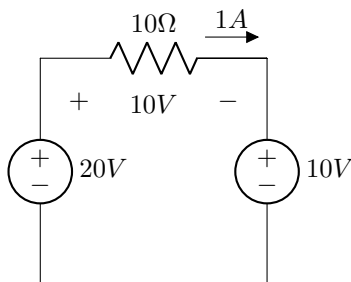
- $P_k > 0$ : a potência é **dissipada** quando as cargas elétricas passam de um ponto de **maior** potencial elétrico para um de **menor** potencial elétrico. Em outras palavras, quando a corrente flui do terminal polarizado positivamente (+) para o polarizado negativamente (-), pode-se dizer que o componente **consumiu** potência do sistema.
- $P_k < 0$ : A potência é **fornecida** quando as cargas elétricas passam de um ponto com **menor** potencial elétrico (-) para um de **maior** potencial elétrico (+). Neste caso, pode-se dizer que o elemento **forneceu** potência elétrica para o sistema.

Em geral, utiliza-se do balanço de potência para circuitos resistivos, já que para capacitores e indutores a potência pode (e normalmente vai) variar no tempo. Ainda assim, essa técnica mostra-se útil para rapidamente conferir se a resolução do circuito foi feita de forma correta, já que a energia deve sempre ser conservada em um circuito elétrico.

É importante pontuar que o fato de o componente ser uma fonte (de tensão ou de corrente, controlada ou não) não necessariamente implica que o mesmo forneça potência. Deve-se observar o sentido da corrente em relação à tensão do componente e ater-se à convenção já definida. Por exemplo, considere o seguinte circuito:



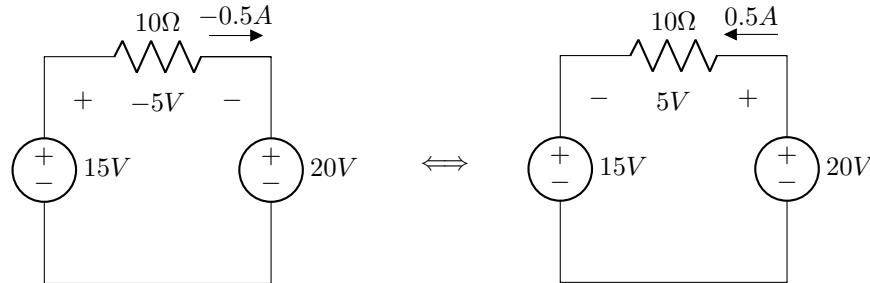
A tensão no resistor, polarizada conforme a figura, é dada por  $e_0 = e_1 - e_2$ , sendo a corrente obtida dividindo  $e_0$  pela resistência  $R$ . É claro que o real sentido de  $i_0$  depende dos valores das fontes (i.e. se  $i_0$  tiver valor negativo, significa que a mesma flui no sentido anti-horário). Atribuindo  $R = 10\Omega$ ,  $e_1 = 20V$  e  $e_2 = 10V$ , tem-se



Encontradas as incógnitas do circuito, pode-se computar a potência de cada componente. Note que, seguindo a convenção de sinais, como  $i_0$  flui do potencial positivo para o negativo de  $e_2$ , a fonte consome potência, resultando nas expressões

$$P_R = 10W, \quad P_{e_1} = -20W, \quad P_{e_2} = 10W.$$

Ao realizar o balanço, percebe-se que o somatório de potências é igual a zero, o que indica que a energia do sistema foi conservada. Alterando os valores das fontes de modo que  $\hat{e}_1 = 15V$  e  $\hat{e}_2 = 20V$ , mantendo as polaridades, o novo circuito é



Neste caso, as potências são

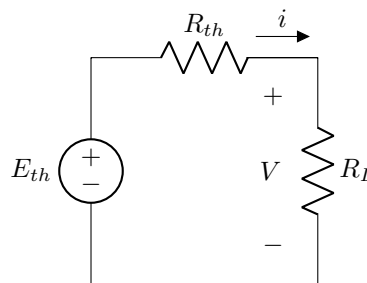
$$\widehat{P}_R = 2.5W, \quad \widehat{P}_{e_1} = 7.5W, \quad \widehat{P}_{e_2} = -10W,$$

indicando que, agora, a fonte  $\hat{e}_2$  fornece potência para os demais componentes. Outra observação importante é que em ambos os casos o resistor  $R$  dissipou potência, já que a polarização da tensão em resistores é dada pela corrente e vice-versa, ou seja, componentes resistivos sempre dissipam potência (facilmente verificável pelo efeito Joule, que expressa o calor gerado em um resistor percorrido por corrente).

**Nota:** Apesar da convenção de sinais apresentada ser amplamente utilizada, a mesma não é universal. O importante é que o leitor saiba distinguir as diferenças entre as potências fornecida e dissipada. Particularmente, os autores calculam separadamente as potências fornecida e dissipada e, então, checam se existe igualdade entre ambos os valores. Desta forma, não é necessário utilizar nenhuma convenção de sinais, mas sim aplicar propriamente os conceitos de potência.

### 3.2 Teorema da Máxima Transferência de Potência

Considerando uma rede elétrica linear contendo apenas resistores e fontes que alimenta uma carga resistiva  $R_L$ , pela teoria discutida na Seção 3.1.3, é possível encontrar um equivalente para dito circuito em relação à carga, resultando no modelo abaixo.



Assim, é possível calcular a potência dissipada na carga através da relação  $P = Vi$ . Além disso, por divisor de tensão e pela Lei de Ohm, as expressões de tensão e corrente podem ser desenvolvidas de forma que

$$P = \frac{R_L}{R_L + R_{th}} E_{th} \frac{1}{R_L + R_{th}} E_{th} = \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^2} E_{th}^2. \quad (3.14)$$

Como a potência em resistores é sempre dissipada, bem como sua resistência sempre positiva, dado um equivalente de Thévenin, conclui-se que existe um valor máximo de potência na carga para  $0 < R_L < \infty$  no ponto que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial R_L} P(R_L) = 0.$$

Derivando a expressão (3.14), tem-se

$$\left( \frac{1}{(R_L + R_{th})^2} - \frac{2R_L}{(R_L + R_{th})^3} \right) E_{th}^2 = 0.$$

Por ser uma constante, é possível dividir ambos os lados por  $E_{th}^2$ . Multiplicando, também, ambos os lados por  $(R_L + R_{th})^3$ , resulta em

$$(R_L + R_{th}) - 2R_L = 0,$$

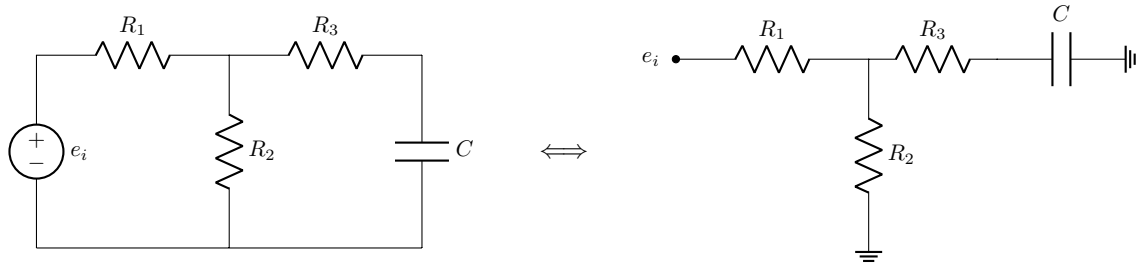
o que implica

$$R_L = R_{th}. \quad (3.15)$$

Ou seja, a máxima transferência de potência ocorre quando a carga é exatamente igual ao resistor equivalente de Thévenin.

### 3.3 Notação Potencial

Devido à grande quantidade de componentes envolvidos nas análises de circuitos eletrônicos (que contêm diodos, amplificadores operacionais, transistores etc), é comum desenhar os diagramas utilizando uma notação mais compacta, conhecida como **notação potencial**. Para tal, omite-se as fontes cuja tensão é medida em relação a uma referência comum (em geral o terra (GND)), por ser um ponto de potencial nulo), representando-as através de um potencial. Segue um exemplo ilustrativo.



Perceba que a fonte  $e_i$  foi retirada e substituída pela definição de um potencial de mesma intensidade à esquerda de  $R_1$ . A conexão com a referência dos componentes  $R_2$  e  $C$  foram representadas por dois terras, tornando desnecessário o desenho do longo fio inferior do primeiro esquema. Vale citar que a representação do capacitor na horizontal no segundo circuito não influencia em nada na resolução do mesmo.

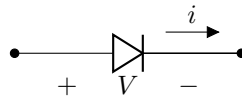
Analogamente à notação usual, a menos que explicitado o contrário, considera-se que todos os potenciais (e tensões) são medidos a partir do terra. No entanto, na notação potencial é frequente a necessidade de explicitar algum terra em função de nenhum terminal ficar incorretamente desconectado (a exemplo do resistor  $R_2$  e do capacitor  $C$ ).

### 3.4 Diodos

Um diodo é um elemento não linear composto por semicondutores (geralmente cristais de silício ou germânio) polarizados através de lacunas em duas regiões, uma do tipo N e outra do tipo P, que, na maioria das vezes, permite fácil passagem de corrente em polarização direta e impede a passagem de corrente em polarização reversa. Existem diversos modelos de diodos: desde o diodo ideal, o diodo real (maior nível de complexidade, porém útil em casos que requerem alta precisão) e os diodos Zener e de Schottky. Neste material, consta uma breve explicação sobre o funcionamento do diodo ideal, bem como uma noção estendida para diodos genéricos.

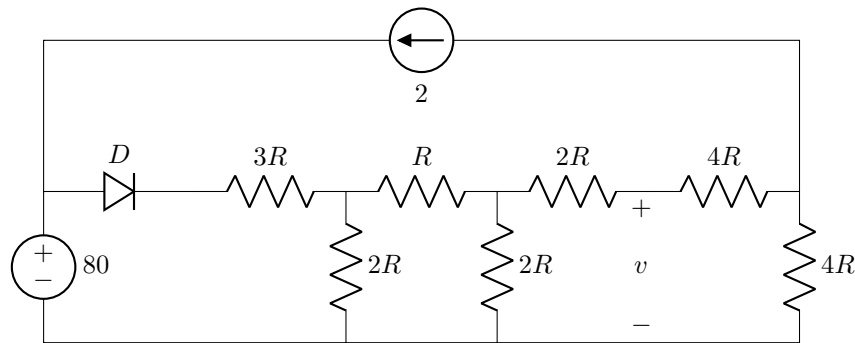
#### 3.4.1 Diodos Ideais

Os diodos ideais funcionam exclusivamente como elemento de chaveamento. Assume-se que, em condução, o diodo possui queda de tensão  $V_D = 0V$ , ou seja, é um curto circuito. Em polarização reversa, entretanto, o diodo ideal se comporta como uma impedância infinita (circuito aberto), impossibilitando a passagem de corrente entre seus terminais. O modelo do diodo ideal é ilustrado pela figura abaixo.

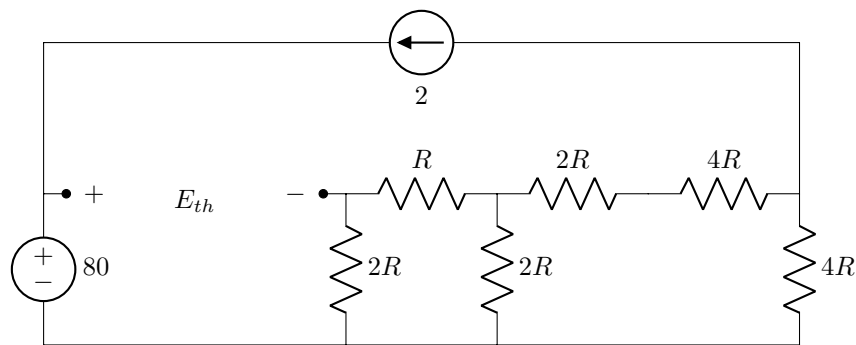


Se o efeito de  $V$  polarizar o diodo diretamente ( $V > 0$ ), diz-se que o diodo está no modo **ON** (conduz) e tem-se  $i > 0$ . Neste caso, ao constatar que o diodo está conduzindo, pode-se substituí-lo por um curto circuito, visto que ele permitirá a passagem da corrente sem alterar a tensão do circuito. Do contrário, estando o diodo em polarização reversa ( $V < 0$ ), o mesmo opera no modo **OFF** (não conduz) e seu comportamento é o de uma impedância infinita, isto é, um circuito aberto, não permitindo a passagem de corrente, ou seja,  $i = 0$ .

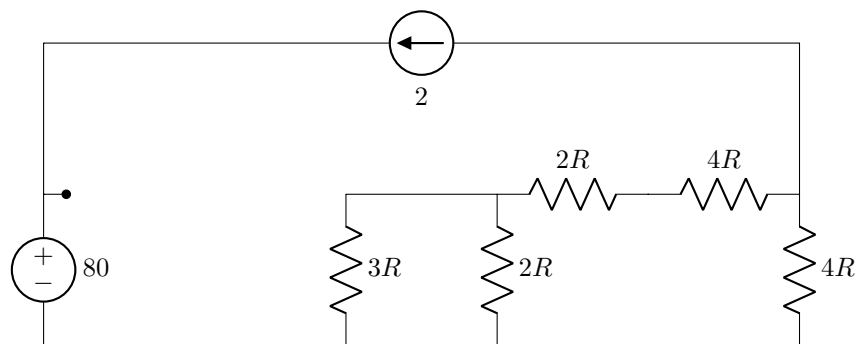
**Exemplo 1:** Determine se o diodo está em condução e calcule a tensão  $v$ . Considere  $R = 5\Omega$  e os valores das fontes no SI.



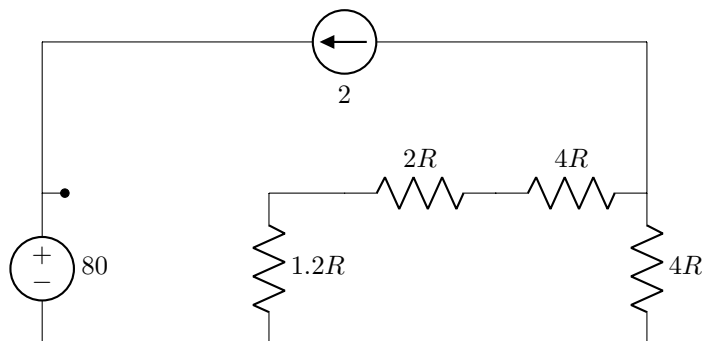
Existem diversas abordagens para um problema como este. Pode-se, assumir o estado do diodo e checar posteriormente se há alguma inconsistência no circuito (e.g. diodo não conduzindo com tensão direta). Outra alternativa é realizar transformações  $\Delta - Y$  sucessivas e simplificar o circuito. Existe, também a possibilidade de explodir a fonte de corrente, seguido de transformações de fontes. No entanto, o caminho escolhido para a resolução é encontrar um equivalente de Thévenin em relação aos terminais do ramo que contém o diodo e o resistor de  $3R$ . Logo, abre-se o circuito nos pontos citados.



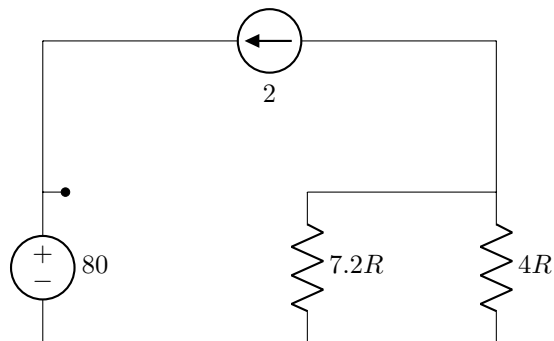
**E<sub>th</sub>** : É importante ressaltar que esse é um circuito completamente diferente do original, o que significa que não se pode encontrar a tensão  $v$  nesta etapa. Para encontrar a tensão no resistor de  $2R$  (o mais à esquerda) e posteriormente, pela lei das malhas, encontrar  $E_{th}$ , será utilizada a associação de resistores e, em seguida, o retorno sequencial utilizando as propriedades de série e paralelo. O primeiro passo é associar os resistores agora em série  $2R$  e  $R$ .



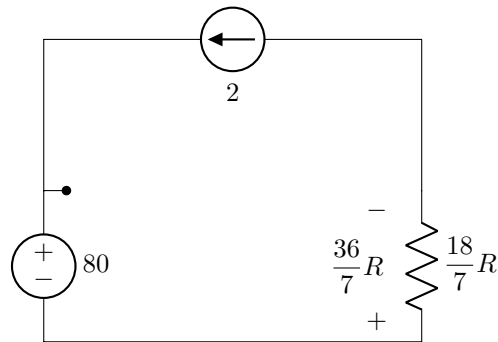
Note que o terminal de interesse foi perdido ao somar os resistores, mas eventualmente encontraremos seu potencial. Agora, pode-se associar em paralelo os resistores de  $3R$  e  $2R$ , ou seja,



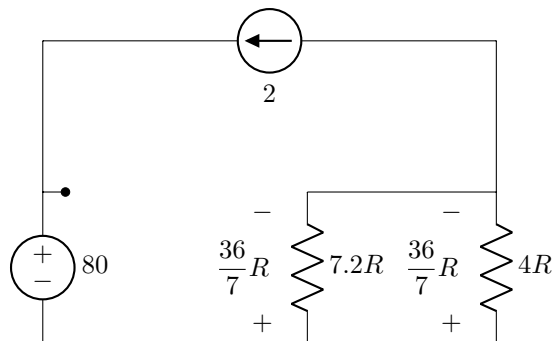
Soma-se, então, os três resistores em série, isto é



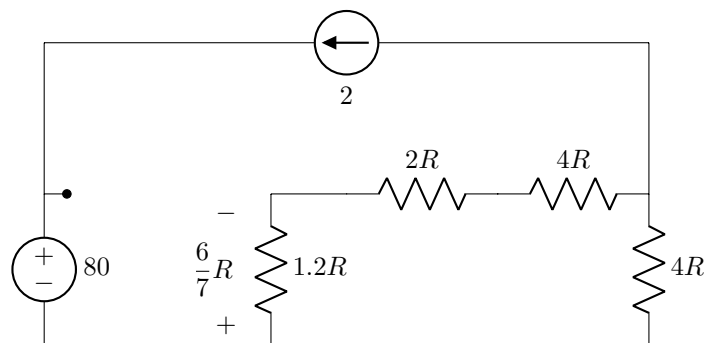
Em seguida, realiza-se a associação em paralelo, resultando em um simples circuito série. Pela natureza da fonte de corrente, encontra-se a tensão no equivalente.



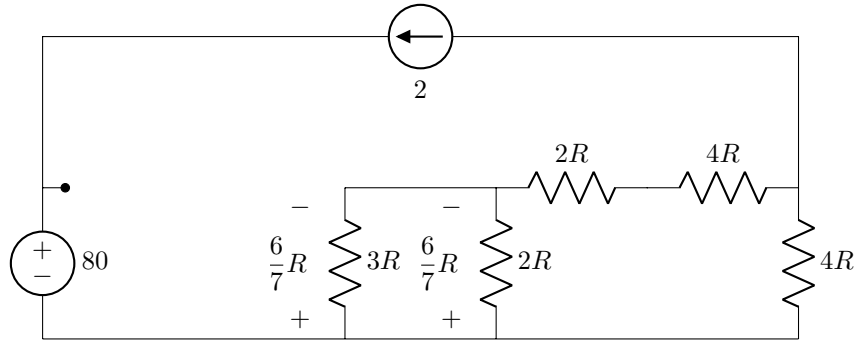
Conhecendo-se a tensão no resistor equivalente, pela definição de paralelo, conhece-se a tensão nos resistores associados, ou seja,



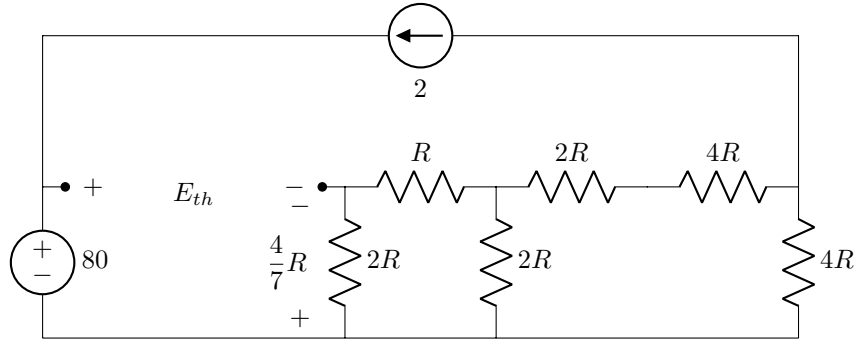
Como o resistor de  $7.2R$  vem de uma associação série, é seguro afirmar que sua tensão será dividida proporcionalmente à resistência de cada um dos resistores associados. Em outras palavras, a tensão no resistor de  $1.2R$  é um divisor de tensão. Também pode-se pensar em termos da corrente do ramo em série ser exatamente a mesma do resistor  $7.2R$  e, na sequência, multiplicar por  $1.2R$  para obter a tensão.



Pela definição de paralelo,



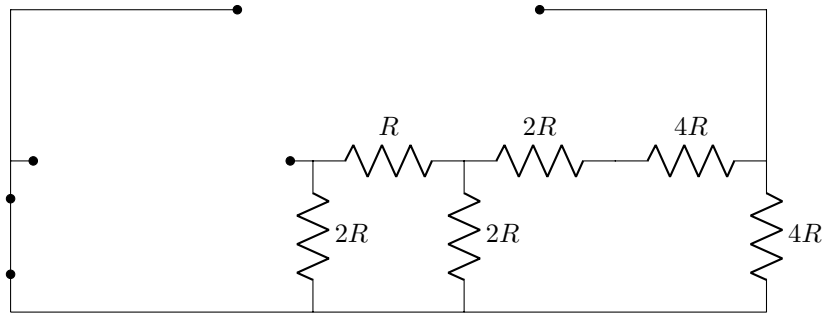
Utilizando o mesmo raciocínio, a tensão nos resistores associados em série pode ser calculada por um divisor de tensão. Neste caso, o resistor de interesse é o de  $2R$ , já que pertence à malha que contém a fonte de entrada e  $E_{th}$ .



Finalmente, pela malha,

$$E_{th} = 80 + \frac{4}{7}R = \frac{580}{7}V. \quad (3.16)$$

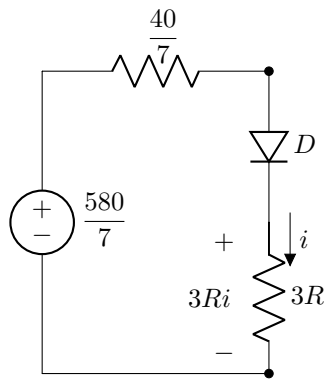
$R_{th}$  : Para encontrar o resistor de Thévenin, mata-se as fontes independentes.



Note que, pelo ato de matar a fonte de corrente, os resistores de  $2R$ ,  $4R$  e  $4R$  agora estão em série. Então, a resistência vista dos terminais do Thévenin é dada pela associação dos resistores, de forma que

$$R_{th} = [((4R + 4R + 2R)/(2R)) + R]/2R = \frac{8}{7}R = \frac{40}{7}\Omega. \quad (3.17)$$

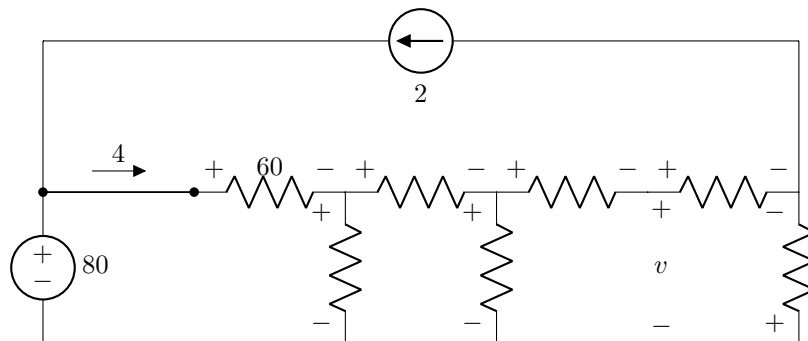
O circuito equivalente é, portanto,



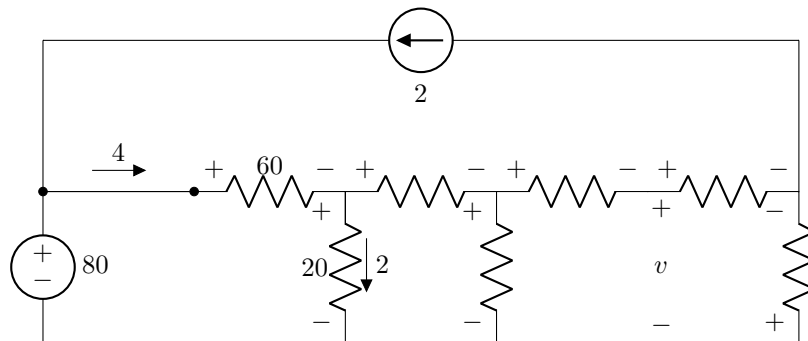
Agora, é seguro afirmar que o diodo está em condução, pois enxerga uma tensão que o polariza diretamente. Substituindo o diodo por um curto, a corrente  $i$  pode ser calculada pela lei de Ohm, resultando em

$$i = \frac{\frac{580}{7}}{\frac{40}{7} + 15} = 4A.$$

Retornando ao circuito original, incluindo a corrente recém calculada e definindo a polaridade das tensões:

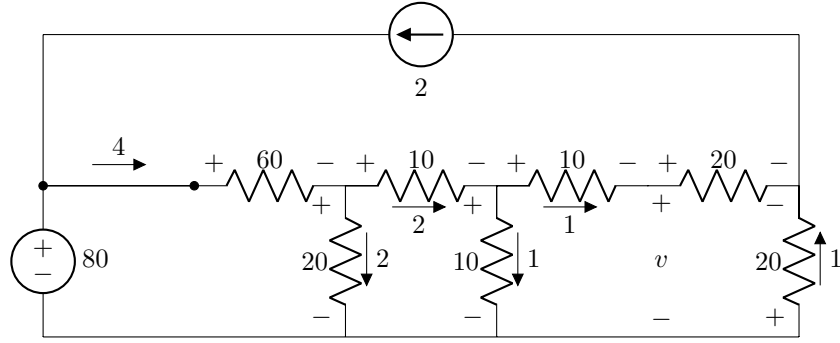


Pela malha com a fonte, descobre-se que a tensão no resistor de  $2R$  é igual a  $20V$  e, pela lei de Ohm, que sua corrente é  $2A$ .



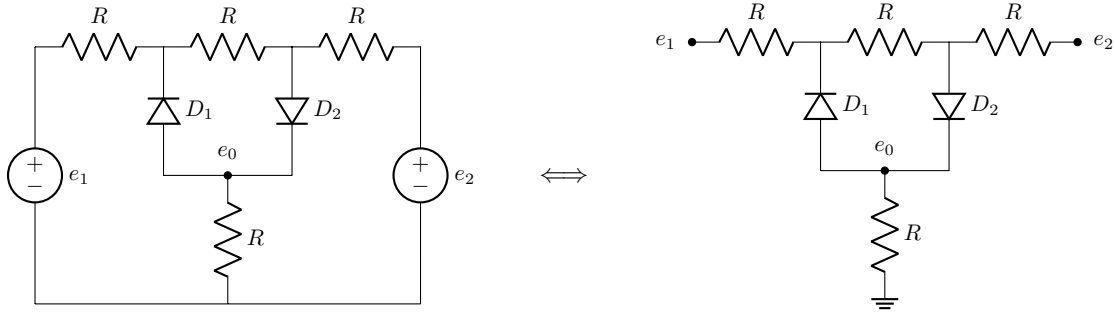
Pela lei dos nós, a corrente no resistor  $R$  deve ser igual a  $2A$ , o que implica sua tensão ser  $10V$ . O mesmo processo pode ser repetido para as demais variáveis do circuito.





Quanto à tensão  $v$ , por qualquer uma de suas malhas, descobre-se que seu valor é nulo, isto é,  $v = 0$ . De fato, a tensão  $v$  está no meio de uma ponte de Wheatstone equilibrada (referida na Seção 2.4.5). Vale mencionar que a condução do diodo poderia ter sido inferida desde o início do exercício, pois ambas as fontes tendem a polarizar diretamente o diodo (pode-se imaginar que as fontes “empurram” suas respectivas variáveis no sentido em que o diodo favorece a passagem de corrente). Ainda assim, por questões didáticas, optou-se por encontrar o equivalente de Thévenin do circuito.

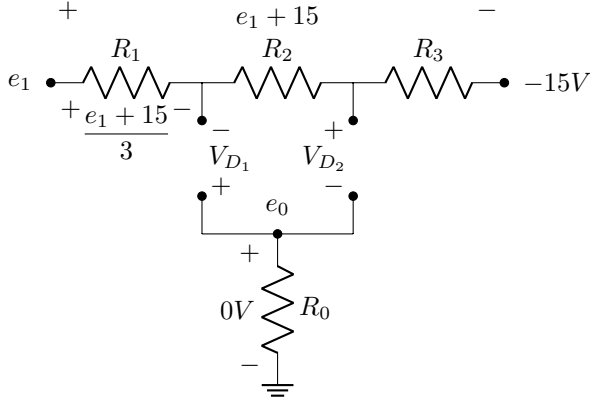
**Exemplo 2:** Encontre a expressão da saída em função da entrada  $e_0(e_1)$  para  $-\infty < e_1 < \infty$ . Dados:  $R = 10k\Omega$ ,  $e_2 = -15V$ .



**Observação:** Note que ao passar o circuito para notação potencial (referida na Seção 3.3), ambas as fontes de tensão foram trocadas por potenciais de mesmas respectivas intensidades, visto que seus valores eram dados em relação à referência nula. Da mesma forma, o terminal do resistor na vertical  $R$  que o conectava a  $e_1$  e  $e_2$  foi substituído pelo próprio terra.

Uma alternativa de abordagem para resolução desse problema é a de considerar todas combinações possíveis entre os estados dos diodos. Dado que cada diodo possui dois estados e que existem  $N = 2$  diodos nesse circuito, o total de combinações a serem analisadas são  $2^N = 2^2 = 4$ . A partir disso, determina-se quais delas podem, de fato, acontecer nesse circuito, bem como para qual intervalo de  $e_1$  acontecem e quais os valores da saída  $e_0$  para cada caso. Outra abordagem seria a de variar o valor de  $e_1$  de  $-\infty$  até  $\infty$  e, no decorrer desse processo, determinar quais as combinações de estados entre os diodos que ocorrem. Nesse exemplo, será apresentada a primeira abordagem para solucionar o problema.

• **Hipótese 1:  $D_1$  e  $D_2$  OFF.** As condições verificadoras, que a validam esta hipótese, são  $V_{D_1} < 0$  e  $V_{D_2} < 0$ , uma vez que só assim os diodos podem estar no estado de não condução.



Desse modo, é possível equacionar ambos  $V_{D_1}$  e  $V_{D_2}$ , por, respectivamente, malha que percorre  $R_0$ ,  $V_{D_1}$ ,  $R_1$  e, por fim,  $e_1$ , e a malha que percorre  $R_0$ ,  $V_{D_2}$ ,  $R_3$  e, por fim, a fonte de tensão de  $-15V$ . Então, aplica-se as condições verificadoras. Note que os resistores foram renomeados, mas apenas para facilitar referenciá-los.

Resultando, para  $V_{D_1}$ , em

$$\begin{aligned} V_{D_1} &= -e_1 + \frac{1}{3}(e_1 + 15) < 0 \\ -\frac{2}{3}e_1 &< -5 \\ e_1 &> 7.5. \end{aligned} \tag{3.18}$$

E para  $V_{D_2}$

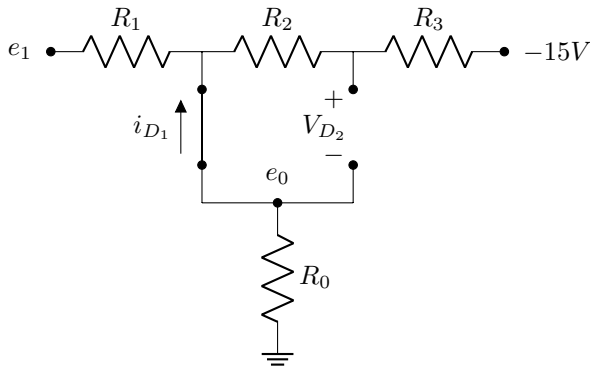
$$\begin{aligned} V_{D_2} &= -15 + \frac{1}{3}(e_1 + 15) < 0 \\ \frac{1}{3}e_1 &< 10 \\ e_1 &< 30. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Portanto, as equações (3.18) e (3.19) explicitam o intervalo de  $e_1$  em que cada um dos diodos está no estado da hipótese. Então, o intervalo em que de fato a hipótese é válida consiste na intersecção desses intervalos.

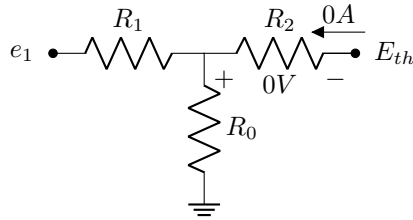
$$e_0 = 0, \text{ se } 7.5 < e_1 < 30. \tag{3.20}$$

**Observação:** No caso em que a intersecção entre os conjuntos dos possíveis valores da variável independente, neste caso  $e_1$ , em que cada um dos diodos assume o estado da hipótese for nula, significa que tal combinação de estados entre os diodos não pode acontecer nesse dado circuito.

• **Hipótese 2: D<sub>1</sub> ON e D<sub>2</sub> OFF.** Para essa hipótese, as condições verificadoras são  $i_{D_1} > 0$  e  $V_{D_2} < 0$ .



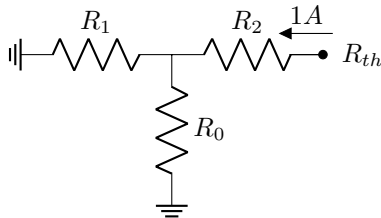
Faz-se, então, o Thevenin à esquerda de  $R_3$ .



Para encontrar a tensão de Thévenin em um circuito em notação potencial, aplica-se uma tensão de valor  $E_{th}$ , ainda desconhecida, no ponto de interesse, considerando a corrente fornecida igual a  $0A$ , evidenciando que, pela definição,  $E_{th}$  é a tensão a circuito aberto. Dessa forma, nesse caso, como a corrente que passa por  $R_2$  é nula, os resistores  $R_0$  e  $R_1$  ficam em série, por conta da mesma corrente percorrer ambos.

Então, a tensão  $E_{th}$  é justamente, pela malha que percorre  $E_{th}$ ,  $R_2$  e  $R_0$ , a tensão  $V_{R_0}$ , com o potencial positivo para cima. Uma vez que  $R_0$  e  $R_1$  estão em série,  $V_{R_0}$  é o divisor de tensão da fonte  $e_1$  entre os resistores  $R_0$  e  $R_1$  para o resistor  $R_0$ .

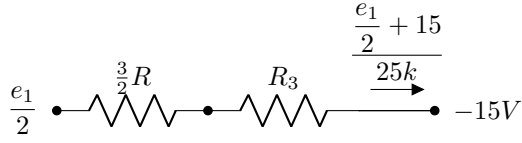
$$E_{th} = V_{R_0} = \frac{R_0}{R_0 + R_1} e_1 = \frac{e_1}{2}.$$



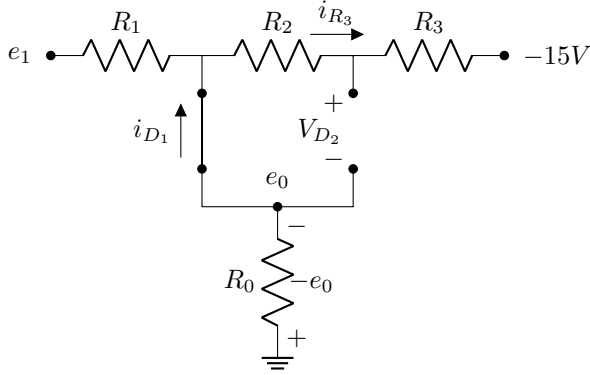
Para encontrar o resistor equivalente de Thévenin em um circuito em notação potencial, pode-se utilizar o método previamente mencionado na Seção 3.1.5, que consiste em aplicar uma fonte de corrente de  $1A$  cuja tensão é de valor igual a  $R_{th}$ . O análogo para notação potencial é mostrado no circuito. Vale salientar que, dado que a fonte  $e_1$  foi morta para o cálculo do resistor equivalente, os resistores  $R_0$  e  $R_1$  agora estão em paralelo.

$$R_{th} = 1A \cdot [(R_0 // R_1) + R_2] = \frac{3}{2} R.$$

Desenhando o equivalente, tem-se,



Assim, é possível descobrir a corrente que entra na fonte de  $-15V$ , a qual será denominada como  $i_{R_3}$ .



Voltando ao circuito anterior, é possível descobrir a expressão de  $i_{D_1}$  em função de  $e_1$  descobrindo a tensão  $-e_0$ , ao fazer a malha que percorre  $R_0, R_1$  e  $e_1$ , e dividir pela resistência  $R_0$ . Para a tensão  $V_{D_2}$ , percorre-se a malha contendo  $R_0, V_{D_2}$ ,  $R_3$  e a fonte de  $-15V$ . Em ambos os casos, aplica-se as condições verificadoras.

Resultando, para  $i_{D_1}$ , em

$$\begin{aligned} -\frac{e_0}{10k} = i_{D_1} &= \frac{1}{10k} \left[ 15 - \frac{20k}{25k} \left( \frac{e_1}{2} + 15 \right) \right] > 0 \\ -\frac{2}{5}e_1 + 3 &> 0 \\ e_1 &< 7.5. \end{aligned} \quad (3.21)$$

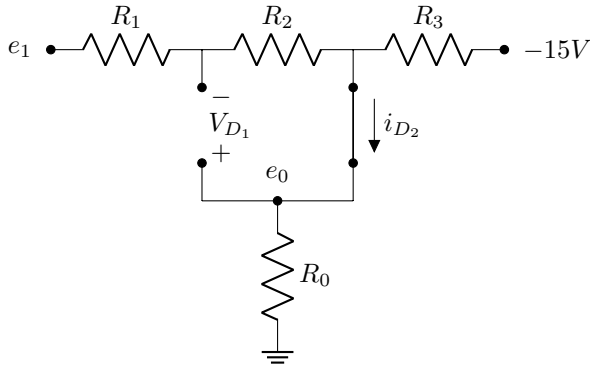
E para  $V_{D_2}$

$$\begin{aligned} V_{D_2} &= -\frac{10k}{25k} \left( \frac{e_1}{2} + 15 \right) < 0 \\ -\frac{e_1}{2} - 15 &< 0 \\ e_1 &> -30. \end{aligned} \quad (3.22)$$

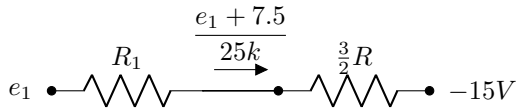
Então

$$e_0 = \frac{2}{5}e_1 - 3, \text{ se } -30 < e_1 < 7.5. \quad (3.23)$$

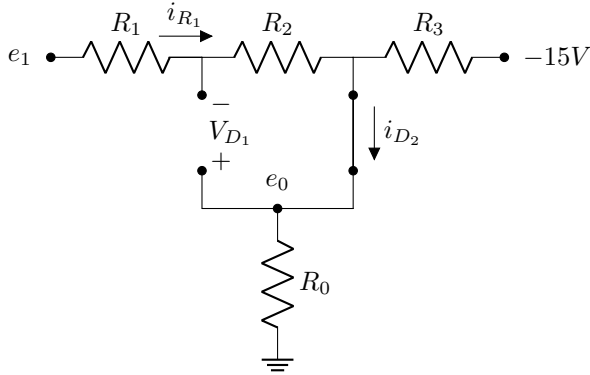
• **Hipótese 3: D<sub>1</sub> OFF e D<sub>2</sub> ON.** Para essa hipótese, as condições verificadoras são  $V_{D_1} < 0$  e  $i_{D_2} > 0$ .



Faz-se, então, o Thevenin à direita de  $R_1$ .



Assim, é possível descobrir a corrente que sai da fonte  $e_1$ , a qual será denominada como  $i_{R_1}$ .



Retornando ao circuito original dentro dessa hipótese, é possível descobrir a expressão de  $i_{D_2}$  em função de  $e_1$  descobrindo a tensão  $e_0$ , ao fazer a malha que percorre  $R_0, R_3$  e a fonte de  $-15V$ , e dividir pela resistência  $R_0$ . Para a tensão  $V_{D_1}$ , percorre-se a malha contendo  $R_0, V_{D_1}, R_1$  e fonte  $e_1$ . Em ambos os casos, aplica-se as condições verificadoras.

Resultando, para  $V_{D_1}$ , em

$$\frac{e_0}{10k} = i_{D_2} = \frac{1}{10k} \left[ e_1 - \frac{20k}{25k} \left( \frac{e_1}{2} + 7.5 \right) \right] > 0$$

$$\frac{e_1}{5} - 6 > 0$$

$$e_1 > 30. \quad (3.24)$$

E para  $V_{D_2}$

$$V_{D_1} = -\frac{10k}{25k} \left( \frac{e_1}{2} + 7.5 \right) < 0$$

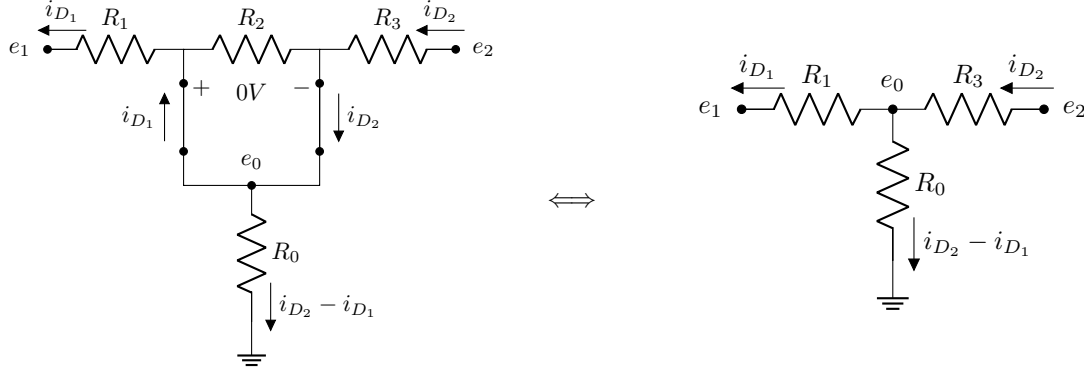
$$-e_1 - 7.5 < 0,$$

isto é,

$$e_1 > -7.5. \quad (3.25)$$

$$e_0 = \frac{e_1}{5} - 6, \text{ se } e_1 > 30. \quad (3.26)$$

• **Hipótese 4:  $D_1$  e  $D_2$  ON.** Para essa hipótese, as condições verificadoras são  $i_{D_1} > 0$  e  $i_{D_2} > 0$ .



Nesse caso, uma vez que ambos diodos estão em curto, o resistor  $R_2$  é redundante, pois sua corrente e tensão são nulas, dessa forma é possível reescrever o circuito para melhor visualização. As correntes  $i_{D_1} = i_{R_1}$  e  $i_{D_2} = i_{R_2}$  podem ser obtidas de forma semelhante aos casos anteriores, ao fazer, respectivamente, um Thévenin à direita de  $R_1$  e outro à esquerda de  $R_3$ . Após isso, aplica-se as condições verificadoras em cada uma das expressões. Dessa forma, o cálculo para  $i_{D_1}$  fica

$$i_{D_1} = -\frac{1}{15k}(e_1 + 7.5) > 0$$

$$-e_1 - 7.5 > 0$$

$$e_1 < -7.5.$$

E para  $i_{D_2}$

$$i_{D_2} = -\frac{1}{15k}\left(\frac{e_1}{2} + 15\right) > 0$$

$$e_1 < -30.$$

A saída  $e_0$  pode ser calculada a partir da diferença entre as correntes  $i_{D_2}$  e  $i_{D_1}$  multiplicada por  $R_0$ .

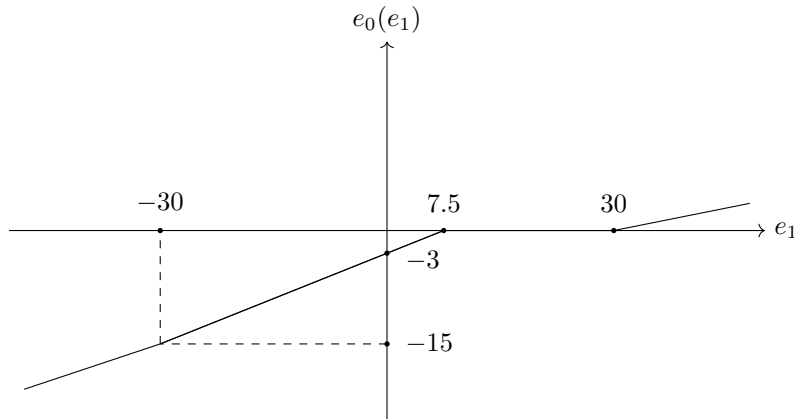
$$e_0 = 10k(i_{D_2} - i_{D_1}) = \frac{2}{3}\left[e_1 + 7.5 - \frac{e_1}{2} - 15\right].$$

Então

$$e_0 = \frac{e_1}{3} - 5, \text{ se } e_1 < -30. \quad (3.27)$$

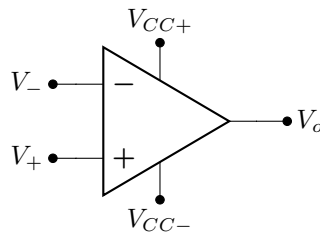
Por fim, a resposta final para a saída  $e_0$  em função de  $e_1$  é obtida a partir das expressões (3.20), (3.23), (3.26) e (3.27) e é mostrada a seguir.

$$e_0(e_1) = \begin{cases} \frac{1}{3}e_1 - 5, & \text{se } e_1 < -30, \text{ onde D1 e D2 } \mathbf{ON} \\ \frac{2}{5}e_1 - 3, & \text{se } -30 < e_1 < 7.5, \text{ onde D1 } \mathbf{ON} \text{ e D2 } \mathbf{OF} \\ 0, & \text{se } 7.5 < e_1 < 30, \text{ onde D1 e D2 } \mathbf{OFF} \\ \frac{1}{5}e_1 - 6, & \text{se } e_1 > 30, \text{ onde D1 } \mathbf{OFF} \text{ e D2 } \mathbf{ON} \end{cases}$$



### 3.5 Amplificador Operacional Ideal

Um amplificador operacional (AmpOp) é um componente que, na sua utilização mais usual, tem como saída uma combinação linear de sinais de entrada, ou seja, pode amplificar ou atenuar esses sinais e realizar operações de soma e subtração entre eles, contanto que tenha o que é chamado de **Realimentação Negativa**. O amplificador operacional também pode ser usado de forma a ter uma saída “binária”, apenas indicando qual entre dois sinais é maior ou versões mais complexas dessa mesma ideia, mas, de qualquer forma, o amplificador operacional precisa estar em **Malha Aberta** ou ter **Realimentação Positiva** para ter esse tipo de comportamento.

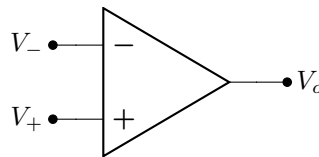


Este componente contém dois terminais de entrada (não confundir com os sinais de entrada de um circuito, que, por sua vez, podem ser conectados diretamente, ou por intermédio de elementos passivos, nos terminais de entrada do AmpOp), que são as portas inversora (-) e não inversora (+) e um terminal de saída cuja tensão é denotada por  $V_o$ , enquanto as tensões das portas inversora e não inversora são denotadas, respectivamente, por  $V_-$  e  $V_+$ . Além disso, o amplificador operacional também possui dois terminais de alimentação ( $V_{CC+}$  e  $V_{CC-}$ ), sendo que, na maioria dos casos, o amplificador é utilizado com alimentação simétrica, ou seja,  $V_{CC+} = +V_{CC} > 0$  e  $V_{CC-} = -V_{CC} < 0$ . Idealmente, o AmpOp possui uma impedância de entrada infinita (correntes nulas em seus terminais de entrada), uma impedância de saída zero (não há perda alguma de tensão), ou

seja, um sinal de tensão pode ser perfeitamente amplificado ou atenuado para a saída, sem nenhum tipo de perda, bem como também possui um ganho em malha aberta  $A = V_o/(V_+ - V_-)$  infinito. O AmpOp deve ser assumido como ideal a não ser que dito o contrário.

A fim de esclarecer a terminologia, pode-se dizer que o amplificador operacional tem realimentação (*feedback*) quando existe uma rede de componentes que conecta a saída com a porta inversora e/ou com a porta não inversora. Caso contrário o amplificador está em malha aberta, como na figura anterior, em que há um amplificador isolado. Diz-se que o amplificador operacional tem realimentação negativa (está negativamente realimentado) quando existe uma rede de componentes que conecta a saída à porta inversora, mas não à porta não inversora. De forma análoga, em um AmpOp que possui realimentação positiva (positivamente realimentado), existe uma rede de componentes que conecta a saída à porta não inversora, mas não à porta inversora. Note que os pinos de alimentação serão omitidos daqui em diante e apenas explicitados quando convirem para alguma explicação em especial. Também deve-se assumir alimentação simétrica a não ser que o contrário seja explicitado.

### Malha Aberta:



Como dito anteriormente, o amplificador operacional idealmente possui ganho em malha aberta  $A = V_o/(V_+ - V_-)$  infinito, então podemos inicialmente especular que

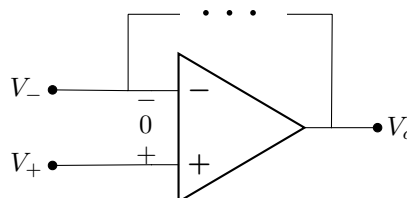
$$V_o = \begin{cases} \rightarrow +\infty, & \text{se } V_+ > V_- \\ \rightarrow -\infty, & \text{se } V_+ < V_- \end{cases}$$

Entretanto, é evidente que na prática não é possível obter uma tensão infinita de saída. O que ocorre de fato é que a saída satura (atinge um valor limite) por conta do quanto as fontes conectadas aos pinos de alimentação podem fornecer e do máximo de corrente que pode passar pelo circuito real do amplificador. Reescrevemos:

$$V_o = \begin{cases} L_+, & \text{se } V_+ > V_- \\ L_-, & \text{se } V_+ < V_- \end{cases},$$

onde  $L_+$  e  $L_-$  são, respectivamente, os limites superior e inferior de saturação. Idealmente, os limites são iguais às tensões de alimentação, isto é,  $L_+ = V_{CC+}$  e  $L_- = V_{CC-}$ . Na prática, entretanto, por questões não ideais e devido ao circuito interno do amplificador, os ditos limites são ligeiramente menores do que a alimentação. Nessa configuração, o amplificador pode funcionar como comparador, já que uma tensão vagamente maior em alguma das portas de entrada resulta em uma tensão saturada na saída.

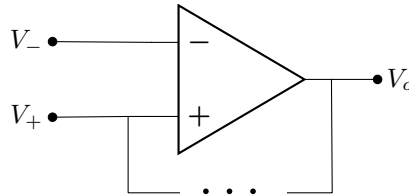
### Realimentação Negativa:





Esta ligação, tendo como premissa que o ganho em malha aberta seja infinito, tem como característica a criação do chamado **curto circuito virtual** entre seus terminais. Em outras palavras, a tensão entre as portas inversora e não inversora é igual a zero. Lembrando que, como a impedância de entrada é muito alta, considera-se a corrente de entrada igual a zero. Este é o modo em que o amplificador operacional é mais utilizado, pois é possível fazer manipulação matemática de sinais.

### Realimentação Positiva:

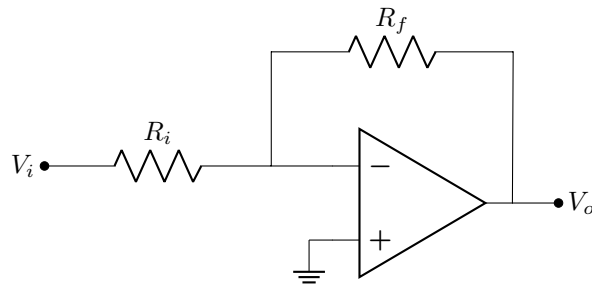


$$V_o = \begin{cases} L_+, & \text{se } V_+ > V_- \\ L_-, & \text{se } V_+ < V_- \end{cases}$$

O funcionamento de um AmpOp com realimentação positiva é essencialmente o mesmo que para um AmpOp em malha aberta. Entretanto, algumas sutilezas começam a aparecer nesse caso, pois a realimentação implica que  $V_+$  possa ser influenciado pela saída  $V_o$ . A análise de amplificadores positivamente realimentados está fora do escopo deste material.

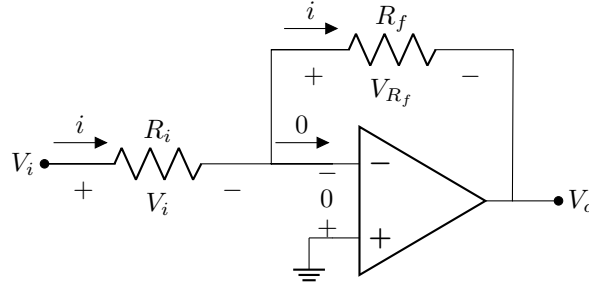
#### 3.5.1 Configuração Inversora

A aplicação de tensão na porta inversora causa um ganho proporcional e com sinal oposto em relação à entrada. Para um caso genérico:



$$G = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_f}{R_i} \quad (3.28)$$

**Dedução:** Como o amplificador operacional está em realimentação negativa, a tensão entre suas entradas é nula. Assim, já que a porta não inversora está aterrada, o potencial na porta inversora será igual a zero. Logo, a tensão que cai no resistor  $R_i$  é igual a  $V_i$ . Tendo que a impedância de entrada do amplificador operacional é infinita, a corrente na porta inversora é nula, de modo que, pela lei dos nós, tem-se que  $R_i$  e  $R_f$  possuem mesma corrente.



$$i_{R_i} = i_{R_f} = i = \frac{V_i}{R_i}.$$

A tensão no resistor de realimentação  $R_f$  é, portanto,

$$V_{R_f} = R_f i = \frac{R_f}{R_i} V_i.$$

Basta, então, relacionar a tensão em  $R_f$  com seus potenciais (respeitando a polarização), resultando em

$$V_{R_f} = 0 - V_o,$$

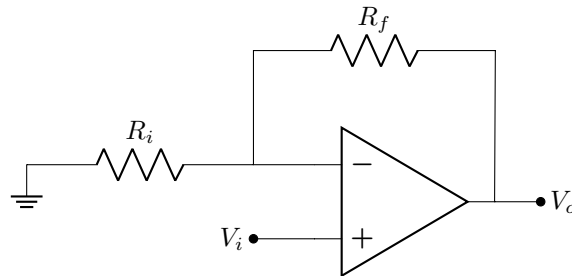
o que implica

$$V_o = -\frac{R_f}{R_i} V_i \implies \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_f}{R_i}.$$

**Observação:** Ao relacionar os potenciais com a tensão, foi feita implicitamente a malha que passa por  $V_i$ , pelo curto virtual, por  $V_{R_f}$  e, finalmente, por  $V_o$ . Caso o leitor não esteja acostumado com a notação potencial, em que as fontes de tensão são omitidas, uma breve explicação foi dada na Seção 3.3. O ganho  $G$  é definido como a razão entre as tensões de saída e de entrada do circuito, podendo variar de acordo com os componentes. Por isso, não deve ser confundido com o ganho em malha aberta  $A$ , que é uma propriedade intrínseca do AmpOp (lembrando que foi assumido que  $A$  é infinito). Além disso, caso o circuito possua mais fontes de entrada,  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , existirá um ganho relacionando a cada entrada,  $G_1, G_2, \dots, G_n$ . Na literatura, o significado dos símbolos  $G$  e  $A$  varia. Por isso, a definição do ganho a ser calculado sempre deve ser informada no enunciado do problema.

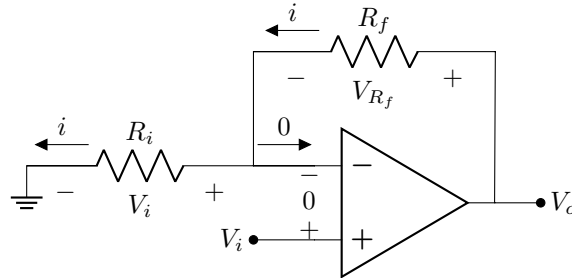
### 3.5.2 Configuração Não Inversora

A aplicação de tensão na porta não inversora causa um ganho proporcional à entrada, sem mudança de sinal.



$$G = \frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_f}{R_i} \quad (3.29)$$

**Dedução:** A realimentação negativa gera um curto circuito virtual, o que implica o potencial  $V_i$  ser propagado para o nó à direita do resistor  $R_i$ . Assim,  $R_i$  será polarizado por  $V_i$  e, do fato da impedância de entrada ser infinita, terá uma corrente  $i_{R_i} = i_{R_f} = i$ , dada pela expressão a seguir.



$$i = \frac{V_i}{R_i}.$$

Analisando, então, a tensão no resistor  $R_f$ , sabendo que seus potenciais à esquerda e à direita são, respectivamente,  $V_i$  e  $V_o$ , tem-se que

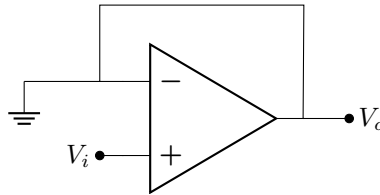
$$V_o - V_i = V_{R_f} = \frac{R_f}{R_i} V_i.$$

Isolando a tensão de saída  $V_o$ , resulta em

$$V_o = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) V_i \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_f}{R_i}.$$

### 3.5.3 Configuração Seguidor de Tensão

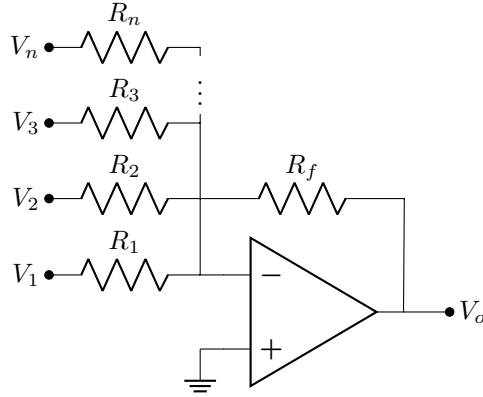
Caso particular do amplificador não inversor em que as resistências  $R_i$  e  $R_f$  são iguais a, respectivamente, infinito e 0 (caso ideal), fazendo com que o ganho seja unitário, o que implica a tensão de saída ser igual à de entrada.



$$G = \frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_f}{R_i} = 1 + \frac{0}{\infty} \rightarrow 1 \quad (3.30)$$

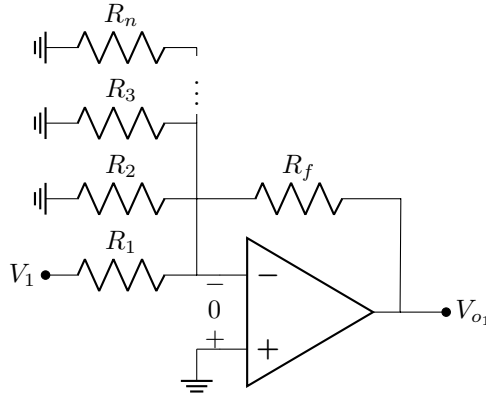
### 3.5.4 Configuração Somador de Tensão

A aplicação de  $n$  fontes de tensão gera uma ganho inverso à soma ponderada das entradas.



$$V_o = - \left( \frac{R_f}{R_1} V_1 + \frac{R_f}{R_2} V_2 + \dots + \frac{R_f}{R_n} V_n \right) = - \sum_{k=1}^n \frac{R_f}{R_k} V_k \quad (3.31)$$

**Dedução:** A expressão acima é facilmente verificada utilizando o Princípio da Superposição. Calculando a contribuição para  $V_o$  da fonte  $V_1$  (chamada de  $V_{o1}$ ), por exemplo, obtém-se o seguinte circuito.



Percebe-se que os resistores  $R_2, R_3, \dots, R_n$  encontram-se aterrados em ambos os lados, de modo que suas correntes são nulas, resultando em um amplificador inversor de  $V_{o1}$  em relação a  $V_1$ . O ganho neste caso é dado pela equação (3.28).

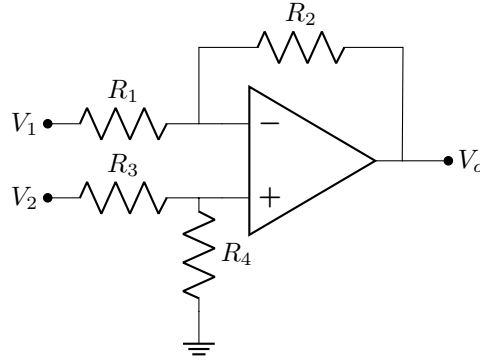
Generalizando, a contribuição de uma fonte genérica  $V_n$  é

$$V_{on} = - \frac{R_f}{R_n} V_n, \quad (3.32)$$

tornando evidente que a soma de todas as contribuições resulta na expressão (3.31).

### 3.5.5 Configuração Amplificador de Diferenças

Trabalha como amplificador da tensão diferencial  $V_d = V_2 - V_1$  entre os terminais de entrada.

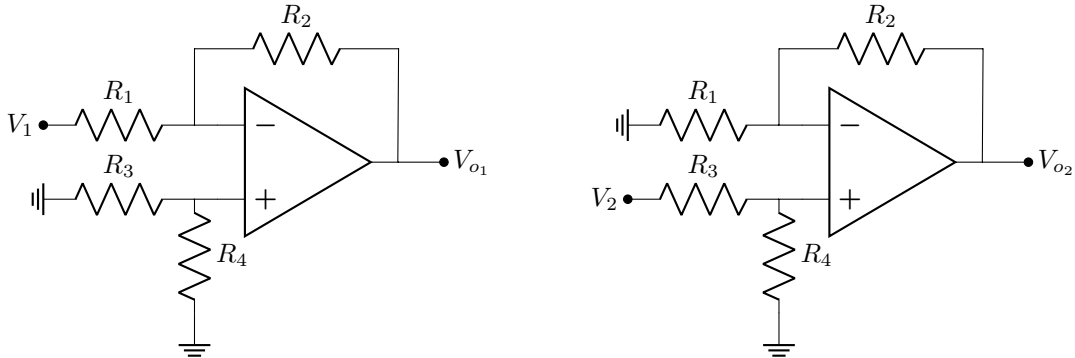


$$V_o = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_4}} V_2 - \frac{R_2}{R_1} V_1$$

No caso particular em que  $R_1 = R_3$  e  $R_2 = R_4$

$$V_o = \frac{R_2}{R_1} V_2 - \frac{R_2}{R_1} V_1 = \frac{R_2}{R_1} V_d \quad (3.33)$$

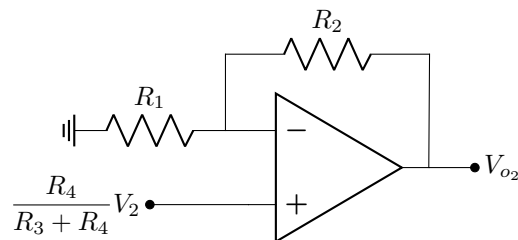
**Dedução:** Usando o Princípio da Superposição, a tensão  $V_o$  pode ser calculada como a soma das contribuições de  $V_1$  e  $V_2$ . Dito isso, escreve-se os circuitos relacionados a cada fonte.



Note que no primeiro circuito os resistores  $R_3$  e  $R_4$  possuem tensão (e, portanto, corrente) nula. Por isso, a porta não inversora efetivamente enxerga um potencial nulo, como se estivesse diretamente aterrada. Logo, a contribuição de  $V_1$  para  $V_o$  é exatamente um amplificador inversor, isto é,

$$V_{o1} = -\frac{R_2}{R_1} V_1. \quad (3.34)$$

Quanto ao segundo circuito, como a impedância de entrada do amplificador é infinita, a corrente dos resistores  $R_3$  e  $R_4$  é exatamente a mesma, que é a definição de associação em série. Por isso, a tensão equivalente de Thévenin que a entrada não inversora enxerga é dada por um divisor de tensão de  $V_2$  em relação a  $R_4$ . Logo,



O resistor de Thévenin é a associação em paralelo de  $R_3$  e  $R_4$ . No entanto, como as correntes nas entradas do amplificador operacional são nulas, o resistor foi substituído por um curto circuito. Com o circuito neste formato, fica claro que a contribuição de  $V_2$  para  $V_o$  é um amplificador não inversor cuja entrada é  $E_{th}$ . Por isso,

$$V_{o2} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4}\right) V_2. \quad (3.35)$$

Manipulando um pouco a expressão acima,

$$V_{o2} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \left(\frac{R_3 + R_4}{R_4}\right)^{-1} V_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)^{-1} V_2. \quad (3.36)$$

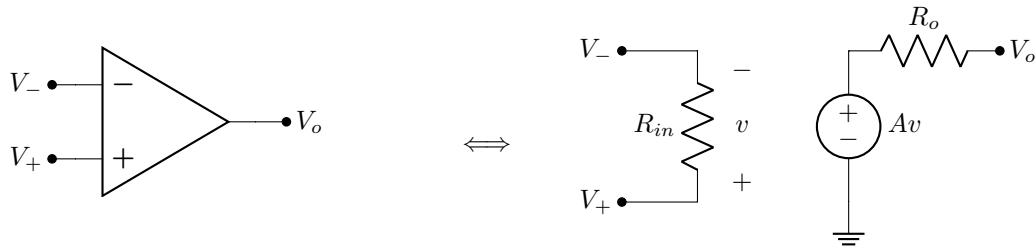
Finalmente, a tensão de saída pode ser calculada, de forma que

$$V_o = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} V_2 - \frac{R_2}{R_1} V_1. \quad (3.37)$$

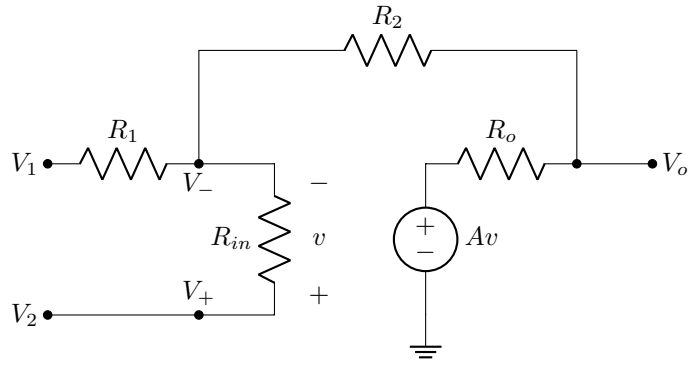
É comum utilizar uma configuração em que  $R_1 = R_3$  e que  $R_2 = R_4$ , pois o circuito resultante amplifica diretamente a diferença de tensão entre  $V_2$  e  $V_1$ , como evidencia a expressão (3.33).

### 3.5.6 Considerações sobre ganho finito e curto circuito virtual

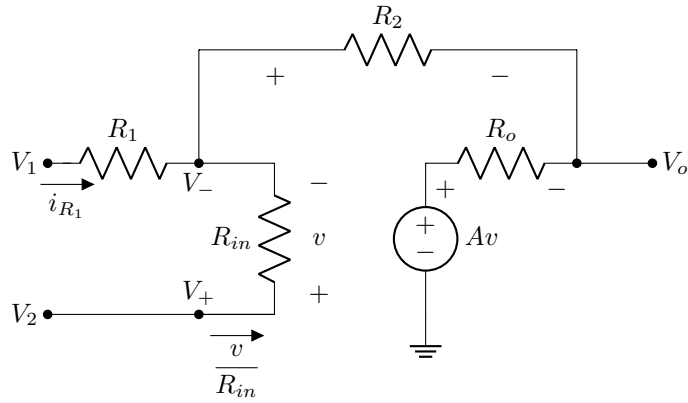
Outra maneira em que amplificadores operacionais podem ser apresentados, embora pouco utilizada na prática, é na forma de seu circuito equivalente, utilizando apenas os elementos previamente trabalhados nesse material. Assim como em seu formato usual, o circuito equivalente do AmpOp pode ser observado sob diversos níveis de idealidade diferentes. A fim de generalizar, consideraremos inicialmente o amplificador com impedância de entrada finita  $R_{in}$  (puramente resistiva), impedância de saída não nula  $R_o$  (puramente resistiva) e ganho em malha aberta  $A$  finito. Então, o modelo do AmpOp é dado por



Devido ao fato de que deduzir que  $v = 0$ , ou seja, tem-se um curto virtual entre as portas inversora e não inversora, para todo circuito negativamente realimentado com ganho em malha aberta infinito vir a ser uma tarefa complexa demais para o este material, veremos o exemplo com circuito a seguir, negativamente realimentado, apenas para ilustrar a ideia.



Considerando o sentido das tensões e correntes como segue



faz-se a malha que percorre  $V_1$ ,  $R_1$ ,  $R_{in}$  e  $V_2$  para descobrir a tensão em  $R_1$  e, conseqüentemente, sua corrente

$$i_{R_1} = \frac{V_1 - V_2 + v}{R_1}.$$

fazendo o nó em  $V_-$  é possível descobrir a corrente que percorre  $R_2$  e, por conseguinte, sua tensão

$$V_{R_2} = R_2 \left( \frac{V_1 - V_2 + v}{R_1} + \frac{v}{R_{in}} \right).$$

sabe-se, também, que

$$V_o = Av + V_{R_o}.$$

utilizando a idealidade da impedância de saída nula temos

$$R_o \rightarrow 0 \implies V_{R_o} \rightarrow 0.$$

Em seguida podemos equacionar  $V_o$  pela malha que percorre  $V_o$ ,  $R_2$ ,  $R_{in}$  e  $V_2$

$$V_o = Av - 0 = V_2 - R_2 \left( \frac{V_1 - V_2 + v}{R_1} + \frac{v}{R_{in}} \right) - v.$$

Manipulando,

$$v \left( A + \frac{R_2}{R_{in}} + \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) = V_2 - \frac{R_2}{R_1} (V_1 - V_2)$$

$$v = \frac{V_2 - \frac{R_2}{R_1} (V_1 - V_2)}{A + \frac{R_2}{R_{in}} + \frac{R_2}{R_1} + 1}.$$

Agora, utilizando a idealidade da impedância de entrada infinita ao fazer o limite, temos

$$\lim_{R_{in} \rightarrow +\infty} v = \lim_{R_{in} \rightarrow +\infty} \frac{V_2 - \frac{R_2}{R_1} (V_1 - V_2)}{A + \cancel{\frac{R_2}{R_{in}}} + \frac{R_2}{R_1} + 1} = \frac{V_2 - \frac{R_2}{R_1} (V_1 - V_2)}{A + \frac{R_2}{R_1} + 1}. \quad (3.38)$$

Vale salientar que a impedância de entrada nula, por si só, já garante corrente nula entre as portas de entrada do AmpOp. Multiplicando por  $A$  obtemos a equação para tensão de saída para ganho finito (vale salientar que não é necessário que se trabalhe com o circuito equivalente para obter essa equação: é possível obter diretamente do AmpOp, apenas é necessário não aplicar o curto virtual e utilizar a relação  $V_o = A(V_+ - V_-)$ ).

$$V_o = \lim_{R_{in} \rightarrow +\infty} Av = \frac{A \left( V_2 - \frac{R_2}{R_1} (V_1 - V_2) \right)}{A + \frac{R_2}{R_1} + 1}. \quad (3.39)$$

Então, por fim, podemos visualizar a influência do ganho infinito para a tensão entre os terminais de entrada,  $v$ , ao fazer o limite da Equação (3.38) com  $A$  tendendo ao infinito.

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{R_{in} \rightarrow +\infty} v = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{V_2 - \frac{R_2}{R_1} (V_1 - V_2)}{A + \frac{R_2}{R_1} + 1} = 0$$

o mesmo pode ser feito na Equação (3.39) para obter a tensão de saída para ganho infinito. Observe que, então, a tensão de saída depende cada vez menos do ganho conforme o quão grande ele for

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{R_{in} \rightarrow +\infty} Av = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A \left( V_2 - \frac{R_2}{R_1} (V_1 - V_2) \right)}{A + \frac{R_2}{R_1} + 1} = V_2 - \frac{R_2}{R_1} (V_1 - V_2). \quad (3.40)$$

É possível observar, então, que esse foi exatamente o resultado para a configuração inversora na Equação (3.28), ao considerarmos  $V_2 = 0$ .

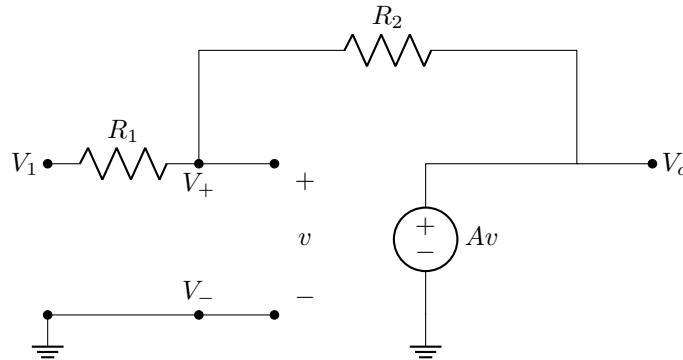
Caso se tentasse fazer o mesmo processo utilizando o circuito com realimentação positiva, chegaria-se em resultados ligeiramente diferentes para as equações com ganho em malha aberta finito, porém os mesmos resultados quando o ganho em malha aberta é infinito. Isso parece contraditório, e com certeza seria terminantemente um erro considerar que o AmpOp com realimentação positiva se comporta da mesma forma que o AmpOp com realimentação negativa, pois isso não se dá na prática. Porém o que ocorre, na realidade, é que o escopo da abordagem que estamos realizando não é amplo o suficiente para captar a diferença que há entre esses dois casos, pois essa diferença é de natureza dinâmica, enquanto todas as considerações feitas até então sobre amplificadores foram estáticas. Isto é, consideramos apenas um modelo de circuito equivalente contendo resistores e fontes, porém nenhum elemento reativo, o que é uma aproximação muito válida para o AmpOp em realimentação negativa enquanto não se utilizar sinais de entrada com frequência alta. O que acontece, na realidade, é que um amplificador operacional tem uma equação diferencial associada a ele (uma leitura da Seção 4 é necessária para compreensão da situação sendo descrita), mas, como queremos utilizar amplificadores operacionais ideais, simplesmente separamos em diferentes casos



(malha aberta, realimentação negativa e positiva) e tratamos cada um dos casos com uma regra geral específica.

Com o intuito de demonstrar por qual motivo a realimentação positiva tem um comportamento completamente diferente da realimentação negativa, porém sem impor a complexidade indesejada de um modelo dinâmico, segue um raciocínio que pode esclarecer as coisas.

Considere o circuito equivalente a seguir, agora realimentado positivamente, com impedância de entrada infinita, impedância de saída nula e ganho em malha aberta finito



É possível descobrir que

$$V_o = Av = \frac{A \left( -\frac{R_2}{R_1} (V_1) \right)}{A - \frac{R_2}{R_1} - 1}. \quad (3.41)$$

No entanto, a única informação que nos importa para essa análise é que  $V_o(V_1) \propto -V_1$ , juntamente com  $V_o = Av$ , com  $A$  grande.

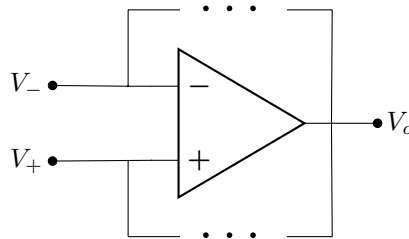
Com o objetivo de analisar esse circuito de forma dinâmica, simplesmente consideraremos que nada acontece instantaneamente no circuito. Isto é, uma vez aplicado um valor de tensão em  $V_1$ , existe um *delay* até que a saída  $V_o$  saia de sua condição inicial e incremente/decremente até chegar em seu valor final. Dito isso, considere a seguinte situação: as tensões  $V_1$  e  $V_o$  são inicialmente nulas e aplica-se uma tensão positiva em  $V_1$ ; como  $V_o(V_1) < 0$ , a tensão  $V_o$  vai ficando mais negativa a fim de alcançar seu valor requerido; por conta de  $V_o$  estar conectado com  $V_+$ , um decréscimo em  $V_o$  também significará um decréscimo em  $V_+$  (considere o divisor de tensão para  $V_+(V_o)$ ); como  $V_+$  ficou mais negativo,  $v = (V_+ - V_-)$  também ficou; portanto, como  $V_o = Av$ ,  $V_o$  fica ainda mais negativo; isso ocorre sucessivamente até a saturação de  $V_o$ . O mesmo raciocínio é válido para  $V_o(V_1) > 0$ . A diferença em relação à realimentação negativa é que, ao passo que  $V_o$  se altera (digamos, negativamente), a alteração subsequente é em  $V_-$  e não em  $V_+$ , e isso faz toda diferença uma vez que, se  $V_-$  tornar-se mais negativo  $v$  torna-se mais positivo, então as influências se anulam e não há uma reação em cadeia gerada.

**Observação:** Salienta-se que essa é uma explicação totalmente informal apenas a título de melhor esclarecimento do que está acontecendo.

### 3.5.7 Realimentação dupla

Também existe o caso de o amplificador operacional estar alimentado negativamente e positivamente de forma simultânea e, nesse caso, diz-se que está duplamente realimentado. Ainda assim, o AmpOp tem uma realimentação dominante, ou seja, um AmpOp duplamente realimentado pode ter realimentação negativa dominante ou realimentação positiva dominante. Informalmente pode-se dizer que a realimentação negativa dominante significa que existe um caminho preferencial, com uma resistência equivalente menor, da saída para porta inversora em comparação com o caminho

da saída para a porta não inversora, ou o análogo para realimentação positiva dominante. Para ser ligeiramente mais criterioso com as terminologias, pode-se dizer que a realimentação negativa é um caso particular da realimentação negativa dominante, em que não há rede de componentes que conecte a saída com a porta não inversora, bem como o análogo para realimentação positiva.



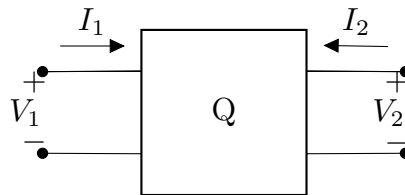
Para resolução de amplificadores duplamente realimentados, basta determinar qual das duas realimentações é a dominante e, depois, lidar com o AmpOp como se ele de fato estivesse em realimentação negativa ou positiva pura conforme o que foi determinado. Para tal determinação, a abordagem mais fácil é assumir a hipótese de que o AmpOp tem realimentação negativa dominante, o que terá como implicação o curto circuito virtual entre as portas inversora e não inversora (lembre-se de que corrente entre elas já é nula por conta da impedância de entrada infinita), e terá como condição verificadora

$$V_o = AV_+ - BV_- \quad , \text{ onde } A, B \in \mathbb{R}_+. \quad (3.42)$$

Ou seja, se, ao assumir a hipótese de que a realimentação negativa é a dominante e, então, usar o curto virtual, a saída puder ser escrita conforme a Equação (3.42), conclui-se que a realimentação negativa é de fato dominante, caso contrário, a realimentação positiva é dominante. Com esse método é possível até mesmo determinar a relação entre os resistores tais que o amplificador tenha a dominância desejada.

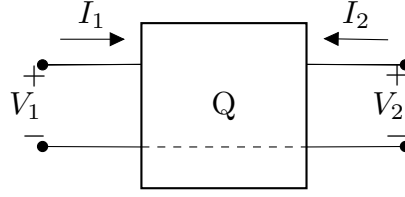
### 3.6 Quadripolos

Quadripolo é o nome dado a uma rede de componentes que se liga com algum outro circuito por apenas dois pares de terminais. São definidas as tensões nas portas  $V_1$  e  $V_2$  polarizadas simetricamente e as correntes nas portas  $I_1$  e  $I_2$  entrando no quadripolo.



A relação entre as tensões e correntes varia de acordo com o tipo de **parâmetro** escolhido durante a sua modelagem. Este tipo de componente é muito útil na simplificação de circuitos com muitos elementos, já que, uma vez obtidos os parâmetros, relaciona as tensões e correntes sem necessidade de conhecer o conteúdo do quadripolo.

No caso de  $V_1$  e  $V_2$  possuírem o mesmo referencial, representa-se tal propriedade através de um fio pontilhado que liga os terminais negativos das tensões, como na figura abaixo. Neste caso, diz-se que o componente é um **tripolo**. Esta diferença parece sutil em termos de representação, mas possui uma implicação importante, já que a informação do referencial comum permite, muitas vezes, equacionar novas malhas.



### 3.6.1 Parâmetros r

Os parâmetros resistivos ( $r$ ) ou impedância ( $z$ ) relacionam as tensões  $V_1$  e  $V_2$  como uma combinação linear das correntes  $I_1$  e  $I_2$ , ou seja

$$V_1 = r_{11}I_1 + r_{12}I_2$$

$$V_2 = r_{21}I_1 + r_{22}I_2$$

Essas equações podem ser reescritas na forma matricial, de modo que

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{I}, \quad \text{ou}$$

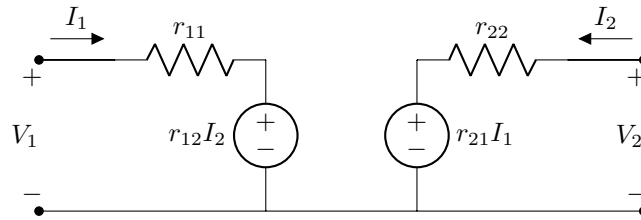
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Portanto, por definição, o cálculo dos parâmetros é dado por

$$r_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} [\Omega] \quad r_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} [\Omega]$$

$$r_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} [\Omega] \quad r_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} [\Omega]$$

Conhecendo-se os parâmetros, pode-se escrever um circuito equivalente que representa diretamente as equações do quadripolo. É possível, também, ao encontrar um circuito com esta mesma topologia, realizar o processo inverso, para descobrir os parâmetros diretamente dos valores dos resistores. Neste caso, o circuito equivalente fica como segue:



### 3.6.2 Parâmetros y

Os parâmetros admitância ( $y$ ) ou condutância relacionam as correntes  $I_1$  e  $I_2$  como combinação linear das tensões  $V_1$  e  $V_2$ .

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

Em forma de equação matricial,

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}, \quad \text{ou}$$

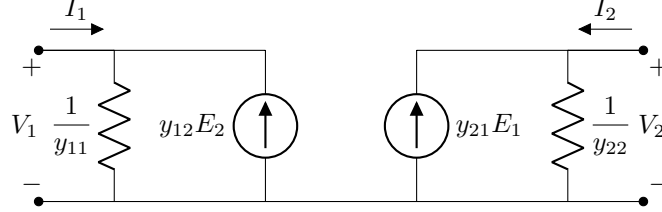
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Portanto, por definição, o cálculo dos parâmetros é dado por

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} [\Omega^{-1}] = [S] \quad y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} [\Omega^{-1}] = [S]$$

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} [\Omega^{-1}] = [S] \quad y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} [\Omega^{-1}] = [S]$$

Neste caso, o circuito equivalente é:



### 3.6.3 Parâmetros h

Os parâmetros híbridos ( $h$ ) são definidos através de combinações mistas (“híbridas”) entre corrente e tensão.

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

Em forma de equação matricial,

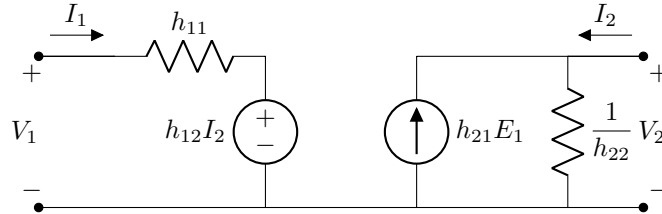
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Por definição, o cálculo dos parâmetros é dado por

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} [\Omega] \quad h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} \left[ \frac{V}{V} \right]$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} \left[ \frac{A}{A} \right] \quad h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} [\Omega^{-1}]$$

Neste caso, o circuito equivalente é:



### 3.6.4 Parâmetros g

Os parâmetros híbridos inversos ( $g$ ) são a contraparte dos parâmetros híbridos.

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$$

Em forma de equação matricial,

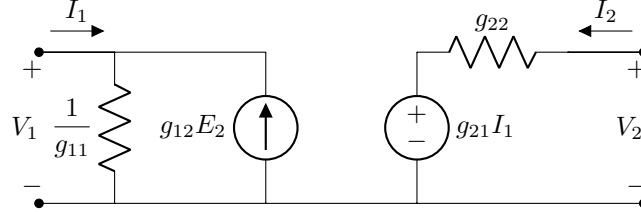
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Portanto, por definição, o cálculo dos parâmetros é dado por

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} [\Omega^{-1}] \quad g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0} \left[ \frac{A}{A} \right]$$

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} \left[ \frac{V}{V} \right] \quad g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0} [\Omega]$$

Neste caso, o circuito equivalente é:



### 3.6.5 Parâmetros ABCD

Os parâmetros ABCD, também chamados de parâmetros de transmissão relacionam a tensão e a corrente de uma porta com a da outra. Em outras palavras, **transmitem** uma tensão e uma corrente de entrada à saída na porta complementar. Este é um caso especial no qual a corrente de saída  $I_2$  é considerada saindo do quadripolo, ou seja equaciona-se com  $-I_2$  utilizando os sentidos arbitrados inicialmente nessa seção.

$$V_2 = A V_1 + B I_1$$

$$-I_2 = C V_1 + D I_1$$

Em forma de equação matricial,

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

O cálculo dos parâmetros é dado por

$$A = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_1=0} \left[ \frac{V}{V} \right] \quad B = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{V_1=0} [\Omega]$$

$$C = \left. -\frac{I_2}{V_1} \right|_{I_1=0} [\Omega^{-1}] \quad D = \left. -\frac{I_2}{I_1} \right|_{V_1=0} \left[ \frac{A}{A} \right]$$

Em alguns casos, alternativamente, representa-se  $V_1$  e  $I_1$  como funções de  $V_2$  e  $I_2$ , de modo que a corrente  $I_2$  esteja em valor absoluto, ou seja,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{C} & -\bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

### 3.6.6 Resolução de Quadripolos

Em suma, um quadripolo qualquer pode ser representado por qualquer relação entre seus dois terminais. É possível escolher quaisquer parâmetros para equacionar o quadripolo, desde que as relações sejam válidas. Num caso geral, para saídas  $y_{n \times 1}$  e entradas  $x_{n \times 1}$ , relacionadas linearmente através de uma matriz  $M_{n \times n}$

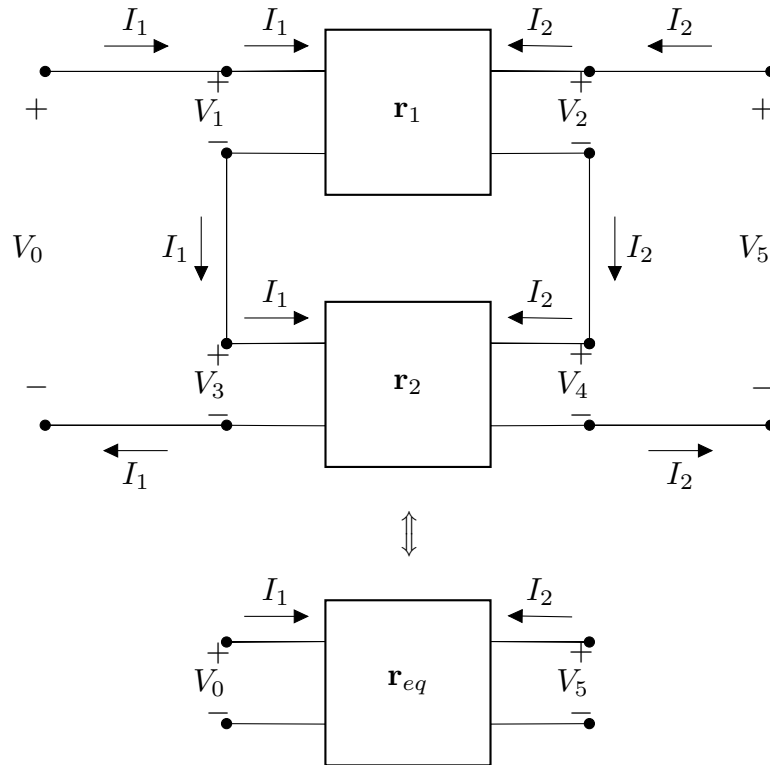
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

### 3.6.7 Associação de Quadripolos

Analogamente aos componentes mais simples (resistor, capacitor, indutor), existem casos em que uma configuração de quadripolos pode ser associada de acordo com suas conexões. Por esse motivo, muitas vezes a escolha dos parâmetros é feita tal que os quadripolos finais possam ser facilmente simplificados. As definições de série e paralelo são exatamente as mesmas, isto é, série implica exata mesma corrente e paralelo implica exata mesma tensão. A diferença é que os quadripolos possuem quatro terminais, possibilitando maior gama de associações.

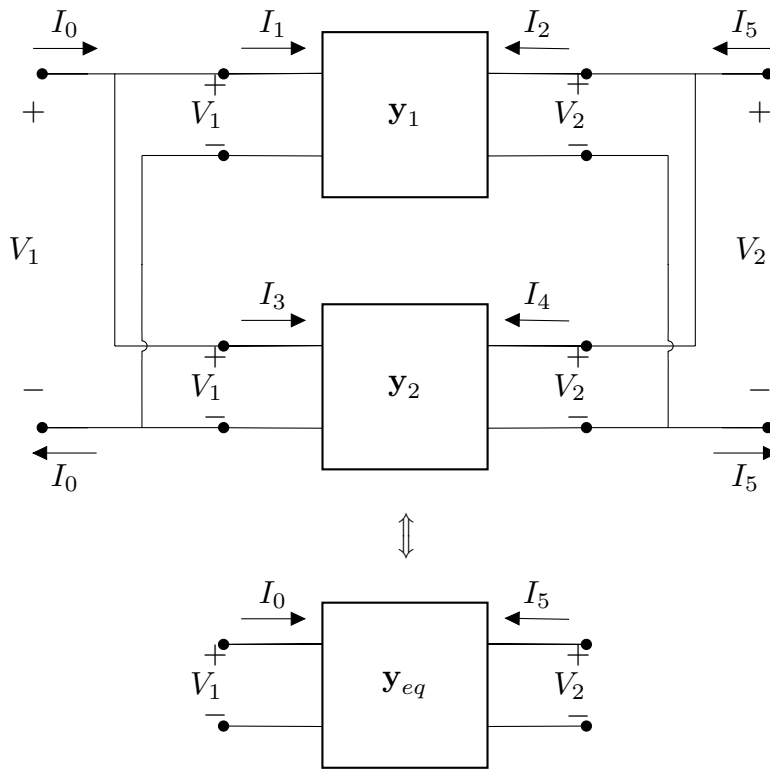
- **Configuração Série-Série:** Neste caso a melhor escolha é de parâmetros resistivos  $r$ , pois é válida a relação

$$[\mathbf{r}]_{eq} = [\mathbf{r}]_1 + [\mathbf{r}]_2$$



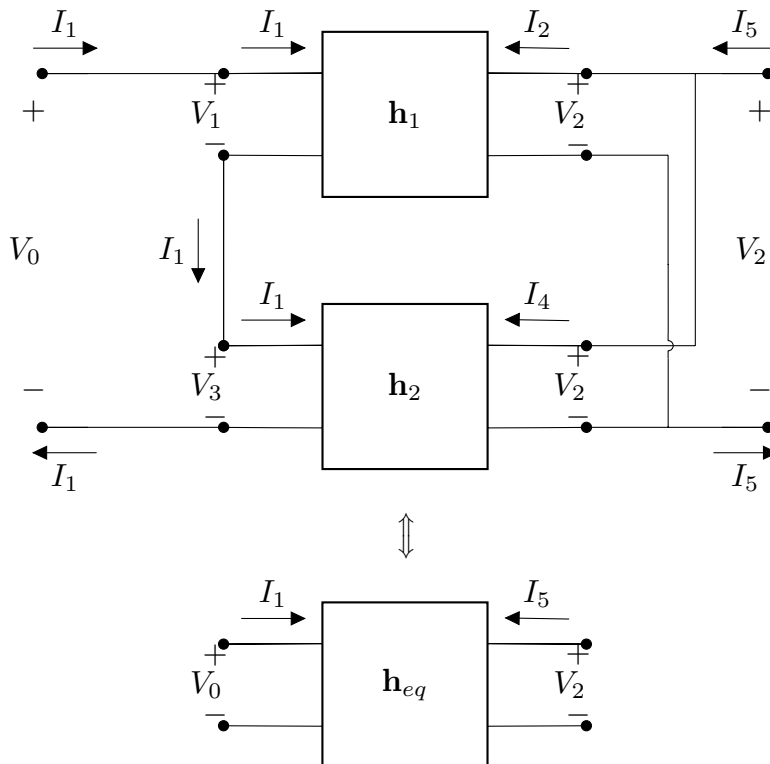
- **Configuração Paralelo-Paralelo:** Neste caso a melhor escolha é a de parâmetros  $y$ , já que

$$[\mathbf{y}]_{eq} = [\mathbf{y}]_1 + [\mathbf{y}]_2$$



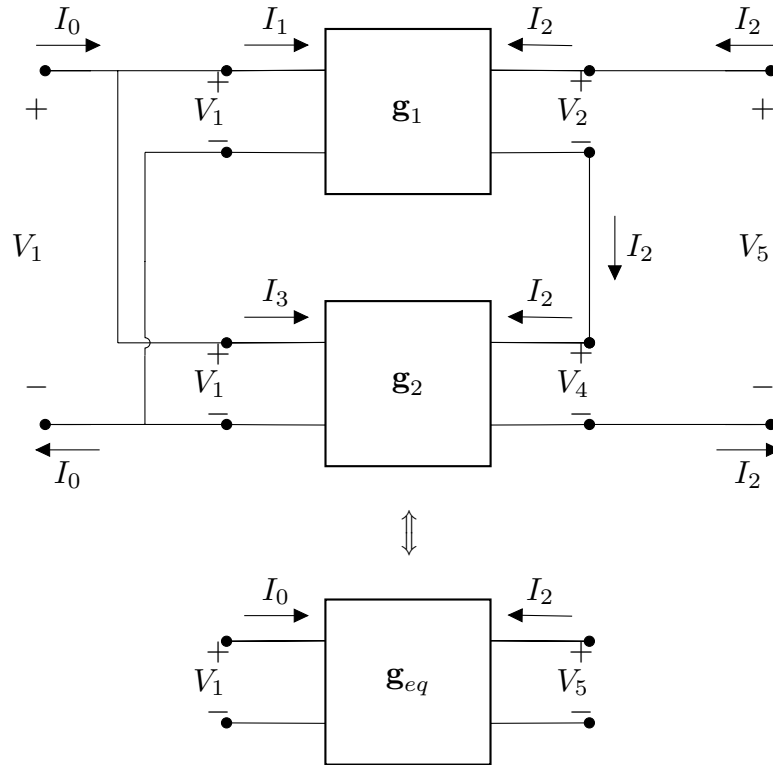
- **Configuração Série-Paralelo:** Neste caso a melhor escolha é parâmetros  $h$ . É possível equacionar

$$[h]_{eq} = [h]_1 + [h]_2$$



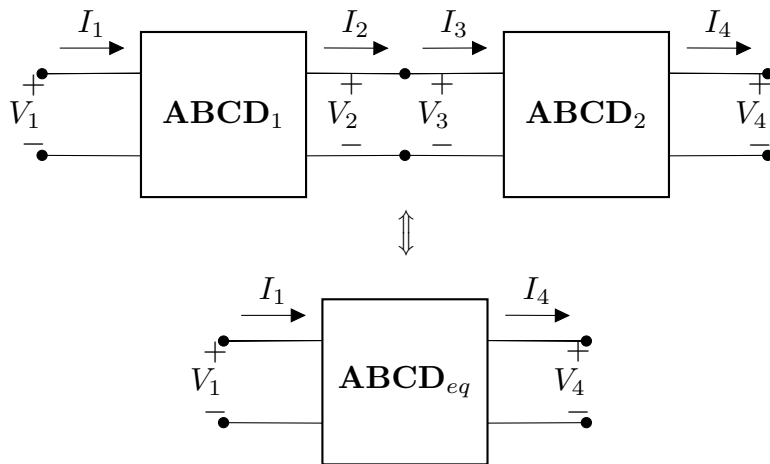
- **Configuração Paralelo-Série:** Neste caso a melhor escolha é parâmetros  $g$ , pois

$$[g]_{eq} = [g]_1 + [g]_2$$



- **Configuração Cascata:** Neste caso a melhor escolha é parâmetros de transmissão  $ABCD$ , possibilitando que

$$[ABCD]_{eq} = [ABCD]_1 \cdot [ABCD]_2$$

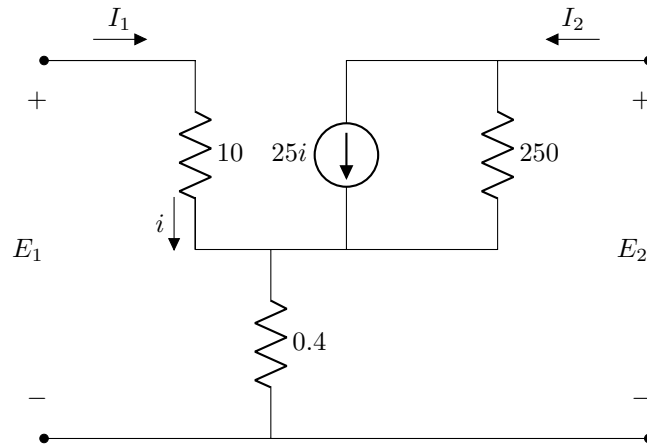


### 3.6.8 Exemplos

**Exemplo 1:** Determine os parâmetros híbridos do quadripolo  $A$  abaixo

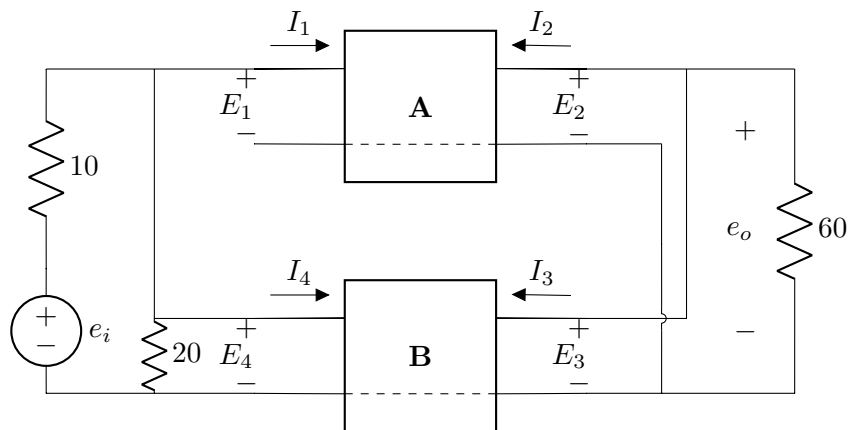


$$\mathbf{A:} \begin{cases} E_1 = h_{11}I_1 + h_{12}E_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}E_2 \end{cases}$$

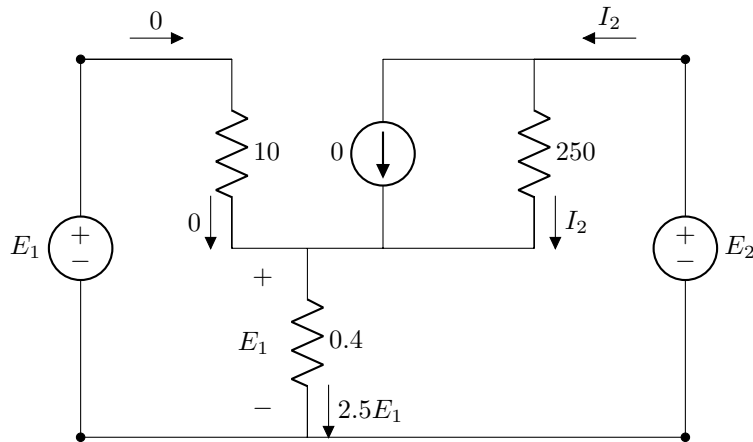


Em seguida, dado o quadripolo  $B$ , escreva o sistema de equações que modela e resolve o circuito do quadripolo  $A$  realimentado pelo quadripolo  $B$ .

$$\mathbf{B:} \begin{cases} E_3 = 13I_3 + E_4 \\ I_4 = -I_3 \end{cases}$$



O primeiro passo é aplicar a definição dos parâmetros híbridos no circuito do quadripolo  $A$ . Para isso, utiliza-se da superposição, matando as fontes das variáveis  $I_1$  e, em seguida,  $E_2$ . Atribuindo  $I_1 = 0$ .



Como a variável de controle foi zerada, a tensão no resistor de  $10\Omega$  é nula. Por isso, a tensão do resistor de  $0.4\Omega$  é a própria tensão  $E_1$ . Pelo mesmo motivo, a corrente do resistor de  $250\Omega$  é a própria corrente  $I_2$ . Assim, pela malha mais à direita,

$$E_1 + 250I_2 = E_2. \quad (3.48)$$

Além disso, já que a fonte controlada tem corrente nula (circuito aberto), os resistores de  $250\Omega$  e  $0.4\Omega$  possuem mesma corrente, o que implica, pela Lei de Ohm,

$$\frac{E_1}{0.4} = 2.5E_1 = I_2,$$

o que permite reescrever a expressão (3.48) como

$$E_1 = \frac{E_2}{626},$$

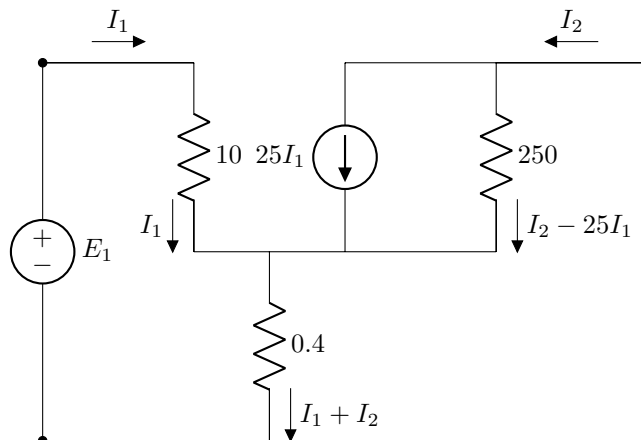
e também

$$I_2 = \frac{E_2}{250.4} = \frac{5}{1252}E_2.$$

Por isso, pelas definições dos parâmetros,

$$h_{12} = \left. \frac{E_1}{E_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{626} \quad h_{22} = \left. \frac{I_2}{E_2} \right|_{I_1=0} = \frac{5}{1252}. \quad (3.49)$$

Matando, agora, a fonte de tensão  $E_2$ , o circuito resultante é



A corrente no resistor de  $0.4\Omega$  é, pelo nó abaixo deste mesmo resistor,  $I_1 + I_2$ . No caso do resistor de  $250\Omega$ , pelo nó com a fonte controlada, a sua corrente vale  $I_2 - 25I_1$ . Assim, é possível equacionar ambas as malhas do circuito, de modo que

$$\begin{cases} E_1 = 10I_1 + 0.4(I_1 + I_2) \\ 0.4(I_1 + I_2) + 250(I_2 - 25I_1) = 0 \end{cases}.$$

Portanto, ao resolver o sistema de equações, descobre-se que

$$I_2 = \frac{7812}{313}I_1 \quad E_1 = \frac{6380}{313}I_1.$$

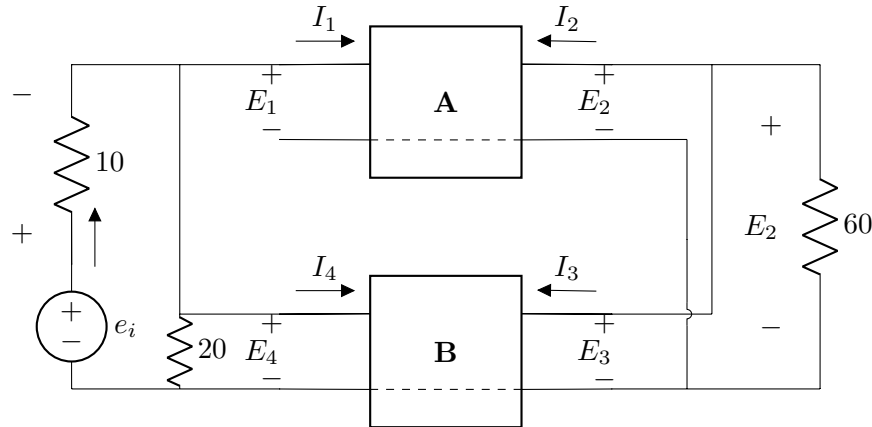
Pelas definições dos parâmetros,

$$h_{11} = \left. \frac{E_1}{I_1} \right|_{E_2=0} = \frac{6380}{313} \quad h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{E_2=0} = \frac{7812}{313}. \quad (3.50)$$

Logo, de (3.49) e (3.50),

$$\mathbf{A}: \begin{bmatrix} \frac{6380}{313} & \frac{1}{626} \\ \frac{7812}{313} & \frac{5}{1252} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

O próximo passo é encontrar a matriz  $M$  que representa o sistema de equações algébricas  $M\mathbf{X} = \mathbf{U}$ , sendo o vetor de incógnitas  $\mathbf{X}^T = [E_1 \ I_1 \ E_2 \ I_2 \ E_3 \ I_3 \ E_4 \ I_4]$  e  $\mathbf{U}$  o vetor de termos independentes. Como existem 8 incógnitas, devemos encontrar 8 equações. Note que, porém, metade das equações já são conhecidas e dadas pelos parâmetros de cada quadripolo. Para o restante, considera-se o circuito com os quadripolos genéricos, como se não fosse conhecido seu circuito original.



Observa-se que os quadripolos estão associados em paralelo à direita, o que implica

$$E_2 - E_3 = 0. \quad (3.52)$$

Além disso, o resistor de  $60\Omega$  também possui tensão  $E_2$ , o que implica, pela Lei de Ohm, sua corrente ser  $\frac{E_2}{60}$ . Então, pelo nó,

$$I_2 + I_3 + \frac{E_2}{60} = 0. \quad (3.53)$$

Em seguida, como foi informado que as referências estão conectadas (isto é, os quadripolos são, na verdade, tripolos), é possível equacionar a malha que passa por  $E_1$ , atravessa a referência do quadripolo A, em sequência, a do quadripolo B e, por fim, passa por  $E_4$ , ou seja,

$$E_1 - E_4 = 0. \quad (3.54)$$

Pode-se, então, encontrar a corrente no resistor de  $10\Omega$ , que, pelo nó, equivale a  $I_1 + I_4 + \frac{E_4}{20}$ . Por isso, fazendo a malha que contém a fonte, tem-se que

$$e_i = 10I_1 + 10I_4 + \frac{3}{2}E_4. \quad (3.55)$$

Finalmente, das expressões (3.49), (3.50), (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55) escreve-se o sistema em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{6380}{313} & \frac{1}{626} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7812}{313} & \frac{5}{1252} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{60} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \\ E_2 \\ I_2 \\ E_3 \\ I_3 \\ E_4 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_i \end{bmatrix}$$

Para encontrar a tensão  $e_o$ , seria necessário resolver o sistema de equações e utilizar-se do fato de que  $E_2 = E_3 = e_o$ . No entanto, como esse tipo de tarefa envolve inverter uma matriz grande  $M$ , a questão requer apenas a montagem do sistema.

## 4 Circuitos Reativos

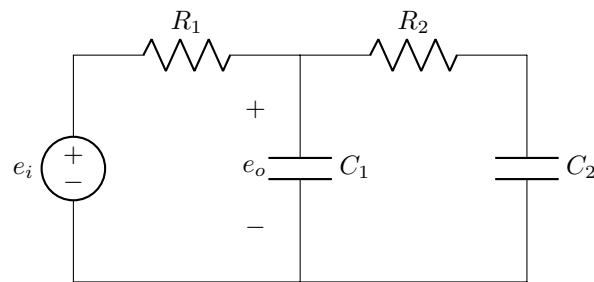
Com o conteúdo abordado nos capítulos anteriores, percebe-se que a análise básica de circuitos já é bastante extensa. Entretanto, até o momento, os sistemas foram todos considerados puramente resistivos, possibilitando a solução dos problemas com álgebra linear simples. Porém, nesta unidade serão inseridos os **elementos reativos** (indutores, capacitores), o que torna necessária a **análise temporal** do circuito. Existem diversas técnicas de resolução para um mesmo sistema.

### 4.1 Resolução por Equações Diferenciais Ordinárias Lineares a Coeficientes Constantes

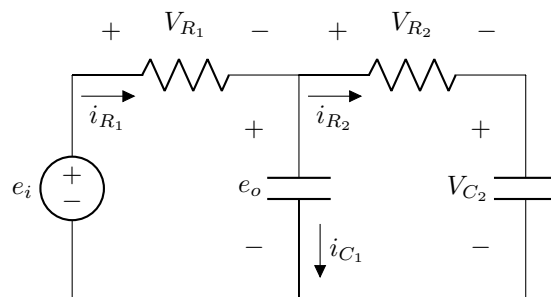
Uma importante ferramenta para resolução de circuitos no domínio do tempo é a resolução por **equações diferenciais**. Mais especificamente, as do tipo **ordinárias** (que são diferenciais apenas em relação a uma variável) **lineares** (definidas por um polinômio linear da função incógnita e de suas derivadas) e a **coeficientes constantes** (os coeficientes são uma função constante). O método se resume a relacionar a saída e a entrada a partir de uma equação diferencial (EDOL) e separá-la, pelo Princípio da Superposição, em duas equações mais simples, a **resposta natural** e a **resposta forçada**. A solução do problema em questão é a **resposta completa**, que é uma combinação linear das respostas natural e forçada.

#### 4.1.1 Equacionamento

Usa-se as equações que modelam os elementos reativos (relações **VI**) para relacionar a variável de saída com a variável de entrada. Considere o circuito a seguir, sendo  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $C_1 = 1F$ ,  $C_2 = 0.5F$  e  $e_i(t) = 10u(t)$ .



Quer-se encontrar, literalmente (i.e. sem substituir os valores dos componentes), a tensão no capacitor  $e_o(t)$ . O primeiro passo é definir as polaridades das tensões ou os sentidos das correntes no circuito. Neste caso, arbitrou-se as tensões conforme a figura abaixo. Vale ressaltar que, em função de simplificar a notação, a dependência temporal das variáveis (tensões e correntes) será omitida, o que não significa que ela é inexistente.



Note que a polarização das tensões pode ser escolhida de forma arbitrária, desde que seja seguida integralmente até o final da questão. Além disso, implicitamente, pelo princípio de polarização

dos passivos, as direções das correntes também foram definidas. A seguir, equaciona-se a malha à esquerda, a qual passa por  $e_i$ ,  $V_{R_1}$  e  $e_o$ .

$$e_i = V_{R_1} + e_o.$$

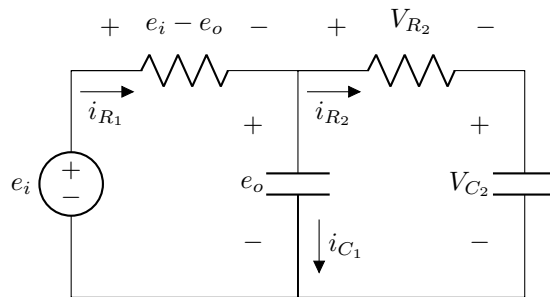
O objetivo é escrever todas as tensões e/ou correntes em função apenas da entrada e da saída. Por isso, isola-se a tensão no resistor  $R_1$ , de forma que

$$V_{R_1} = e_i - e_o.$$

Portanto, pela relação VI, a corrente que percorre  $R_1$  é

$$i_{R_1} = \frac{e_i - e_o}{R_1}. \quad (4.1)$$

Assim, representando as tensões e correntes no diagrama elétrico, tem-se



Lembrando que, pela relação VI, a corrente no capacitor  $i_{C_1}$  é dada por

$$i_{C_1} = C_1 \frac{de_o}{dt}, \quad (4.2)$$

o que permite equacionar o nó do circuito, isto é

$$i_{R_1} = i_{C_1} + i_{R_2}.$$

Substituindo as expressões (4.1) e (4.2), encontra-se o valor da corrente  $i_{R_2}$ .

$$i_{R_2} = \frac{e_i - e_o}{R_1} - C_1 \frac{de_o}{dt}. \quad (4.3)$$

Sabendo que essa corrente é comum para  $R_2$  e  $C_2$ , é possível, então, equacionar a malha à direita, a qual contém  $e_o$ ,  $V_{R_2}$  e  $V_{C_2}$ , ou seja,

$$e_o = V_{R_2} + V_{C_2}.$$

Aplicando as relações VI,

$$e_o = R_2 i_{R_2} + \frac{1}{C_2} \int i_{R_2} dt.$$

Substituindo o valor da corrente, de (4.3),

$$e_o = R_2 \left[ \frac{e_i - e_o}{R_1} - C_1 \frac{de_o}{dt} \right] + \frac{1}{C_2} \int \left[ \frac{e_i - e_o}{R_1} - C_1 \frac{de_o}{dt} \right] dt. \quad (4.4)$$

Em (4.4) obteve-se uma **equação difero-integral**. Para resolvê-la, deve-se reduzi-la a uma equação puramente diferencial, ou seja, deriva-se ambos os lados da equação com respeito ao tempo. Dessa forma,

$$\frac{de_o}{dt} = R_2 \left[ \frac{1}{R_1} \frac{de_i}{dt} - \frac{1}{R_1} \frac{de_o}{dt} - C_1 \frac{d^2 e_o}{dt^2} \right] + \frac{1}{C_2} \left[ \frac{e_i - e_o}{R_1} - C_1 \frac{de_o}{dt} \right].$$

Finalmente, escreve-se a expressão de forma que a variável de saída  $e_o$  e a variável de entrada  $e_i$  e suas respectivas derivadas estejam em lados opostos da expressão.

$$\begin{aligned}\frac{de_o}{dt} &= R_2 \left[ \frac{1}{R_1} \frac{de_i}{dt} - \frac{1}{R_1} \frac{de_o}{dt} - C_1 \frac{d^2 e_o}{dt^2} \right] + \frac{1}{C_2} \left[ \frac{e_i}{R_1} - \frac{e_o}{R_1} - C_1 \frac{de_o}{dt} \right] \\ \frac{de_o}{dt} &= \frac{R_2}{R_1} \frac{de_i}{dt} - \frac{R_2}{R_1} \frac{de_o}{dt} - R_2 C_1 \frac{d^2 e_o}{dt^2} + \frac{1}{R_1 C_2} e_i - \frac{1}{R_1 C_2} e_o - \frac{C_1}{C_2} \frac{de_o}{dt} \\ R_2 C_1 \frac{d^2 e_o}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1} \frac{de_o}{dt} + \frac{de_o}{dt} + \frac{C_1}{C_2} \frac{de_o}{dt} + \frac{1}{R_1 C_2} e_o &= \frac{R_2}{R_1} \frac{de_i}{dt} + \frac{1}{R_1 C_2} e_i \\ \frac{d^2 e_o}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \frac{de_o}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} e_o &= \frac{1}{R_1 C_1} \frac{de_i}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} e_i.\end{aligned}\quad (4.5)$$

A expressão (4.5) é uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes de ordem 2 cuja incógnita é a função  $e_o(t)$ . Quando o coeficiente da derivada de maior ordem da incógnita é unitário, diz-se que a equação está na forma **mônica**. Para o circuito em questão, substituindo os valores, tem-se

$$\frac{d^2 e_o}{dt^2} + 2.5 \frac{de_o}{dt} + e_o = 10. \quad (4.6)$$

Já que para  $t < 0$  a fonte é nula, a resposta temporal do circuito é dada pela resposta para  $t \geq 0$ . Por isso, a entrada  $e_i(t) = 10u(t)$  foi substituída por  $e_i(t) = 10$  na equação diferencial, de forma que  $e_o(t)$  represente a tensão no capacitor após a fonte ligar.

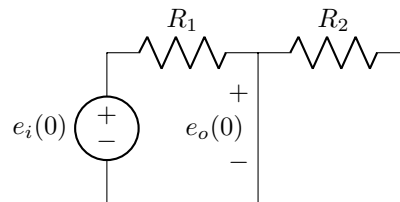
#### 4.1.2 Condições Iniciais em Resposta ao Estado Zero

Uma equação diferencial possui uma infinidade de soluções, as chamadas **família de soluções**. Entretanto, em nosso caso, procura-se a resposta para apenas um circuito elétrico específico. A distinção entre cada possível resposta é definida pelas **condições iniciais** (CONDINIC) do sistema. Como a EDOL é de segunda ordem, serão necessárias duas condições iniciais: uma envolvendo a função  $e_o$  e outra envolvendo sua derivada. Em geral, considera-se o instante em que a fonte de entrada é ligada, que corresponde, na maioria das vezes, no tempo  $t = 0$ .

A menos que especificado, assume-se que os componentes reativos não possuem carga em um diferencial de tempo anterior ao instante inicial da fonte (representado por  $t = 0^-$ ). Nesse caso, a função  $e_o(t)$  representa a **resposta ao estado zero**.

A representação dos reativos no instante inicial é dada a partir de seus princípios físicos de funcionamento. O capacitor resiste a variações bruscas de tensão. Por isso, quando descarregado (i.e.  $q = CV = 0$ ) pode ser modelado como um curto circuito (impedância nula). O indutor, por sua vez, resiste a saltos de corrente. Assim, possuindo fluxo concatenado nulo, é modelado como um circuito aberto (impedância infinita).

Retomando o exemplo da seção anterior, para  $t = 0$ ,



Pela própria modelagem do capacitor, é evidente que  $e_o(0) = 0$ . Para a condição da derivada, utiliza-se a relação VI do capacitor, que resulta em

$$i_{C_1}(0) = C_1 \frac{de_o(0)}{dt} \implies \frac{de_o(0)}{dt} = \frac{i_{C_1}(0)}{C_1}.$$

Como o resistor  $R_2$  está em paralelo com um curto circuito, sua tensão é nula, de forma que toda a tensão da fonte cai sobre o resistor  $R_1$ . Além disso, como  $i_{R_2} = 0$ , as correntes  $i_{R_1}$  e  $i_{C_1}$  são exatamente iguais. Portanto,

$$\frac{de_o(0)}{dt} = \frac{e_i(0)}{R_1 C_1} = 10.$$

Tais condições iniciais, juntamente com a equação diferencial, formam um **problema de valor inicial (PVI)**. Em suma, para encontrar a solução única  $e_o(t)$ , basta resolver

$$\begin{cases} \frac{d^2 e_o(t)}{dt^2} + 2.5 \frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = 10 \\ e_o(0) = 0, \quad \frac{de_o(0)}{dt} = 10 \end{cases}, \quad t \geq 0. \quad (4.7)$$

Como já mencionado, a dependência do tempo será omitida nos exemplos subsequentes, bem como a condição  $t \geq 0$ , pois, a menos que explicitado, os circuitos serão analisados a partir do instante em que a fonte de alimentação é ligada.

#### 4.1.3 Resposta Natural

A resposta natural (ou resposta em regime transitório) de um sistema pode ser descrita como a contribuição das condições iniciais para a resposta completa. Para tal, considera-se a **entrada zero** e resolve-se a equação diferencial homogênea associada.

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} y(t) + p \frac{d}{dt} y(t) + q y(t) = 0 \\ y(0) = y_0, \quad \frac{d}{dt} y(0) = y_1 \end{cases} \quad (4.8)$$

Aqui,  $p$  e  $q$  são constantes. Para que a soma das parcelas valha zero,  $y(t)$  e suas derivadas devem possuir comportamentos similares. Em outras palavras, sendo os coeficientes constantes, não seria possível que, por exemplo,  $y(t) = \ln(t)$ , pois não existem  $p$  e  $q$  tal que a combinação linear do logaritmo natural e de suas duas primeiras derivadas resolva a equação (4.8). Esse conceito torna a função  $y(t) = e^{\lambda t}$  a melhor candidata para resolver a equação diferencial, pois suas derivadas também são exponenciais. Assumindo, então, que a função incógnita é uma exponencial, pode-se reescrever a expressão (4.8) como

$$(\lambda^2 + p\lambda + q) e^{\lambda t} = 0.$$

Já que a função  $e^{\lambda t}$  não assume valor nulo para qualquer tempo real e  $\lambda$  complexo, é requerido que

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (4.9)$$

O polinômio acima representa a **equação característica**, elemento importante no momento de definir conceitos como a resposta natural e a estabilidade de um sistema. A equação característica terá sua ordem definida pela equação diferencial homogênea. No caso em questão, a EDOL é de ordem dois e possui, portanto, duas raízes em sua equação característica. Convém analisar os diferentes casos para  $\lambda$ .

- **Caso 1:**  $\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Neste caso, a solução geral é dada pela combinação linear não trivial de duas soluções exponenciais linearmente independentes  $y_{1,2} = e^{\lambda_{1,2}t}$ , ou seja,

$$y_n(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

sendo  $C_1$  e  $C_2$  constantes.



- **Caso 2:**  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Nota-se que escolhendo as exponenciais como no caso anterior, as mesmas serão linearmente dependentes. Deve-se, portanto, procurar uma outra solução linearmente independente a  $y_1(t) = e^{\lambda t}$ . Através do método de D'Alembert, assume-se que uma solução LI é

$$y_2(t) = w(t)y_1(t). \quad (4.10)$$

Para encontrar  $w(t)$ , aplica-se (4.10) em (4.8), o que resulta em

$$\frac{d^2}{dt^2}(w(t)y_1(t)) + p\frac{d}{dt}(w(t)y_1(t)) + q(w(t)y_1(t)) = 0.$$

Derivando,

$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} y_1(t) + 2 \frac{dw(t)}{dt} \frac{dy_1(t)}{dt} + w(t) \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + p \left( \frac{dw(t)}{dt} y_1(t) + w(t) \frac{dy_1(t)}{dt} \right) + q(w(t)y_1(t)) = 0.$$

Juntando os termos comuns em  $w(t)$ ,

$$y_1(t) \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + \left( 2 \frac{dy_1(t)}{dt} + p y_1(t) \right) \frac{dw(t)}{dt} + \left( \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + p \frac{dy_1(t)}{dt} + q y_1(t) \right) w(t) = 0. \quad (4.11)$$

Lembrando que, pela fórmula de Bhaskara, para raízes repetidas, é necessário que o discriminante seja  $\Delta = p^2 - 4q = 0$ . Assim, tem-se que  $\lambda = -\frac{p}{2}$ . Então, aplicando a função  $y_1(t)$  na expressão (4.11), resulta em

$$e^{-\frac{p}{2}t} \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + \left( -2\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}t} + p e^{-\frac{p}{2}t} \right) \frac{dw(t)}{dt} + \left( \frac{p^2}{4}e^{-\frac{p}{2}t} - p\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}t} + q e^{-\frac{p}{2}t} \right) w(t) = 0.$$

Fica claro que o termo do meio terá coeficiente zero. Simplificando e colocando a exponencial em evidência, tem-se

$$e^{-\frac{p}{2}t} \left( \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + \left( -\frac{p}{4} + q \right) w(t) \right) = 0.$$

No entanto, pelo discriminante ser nulo, verifica-se que o coeficiente do termo  $w(t)$  também é igual a zero. Como a exponencial nunca assume valor nulo, para que a equação seja satisfeita, é preciso que

$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} = 0. \quad (4.12)$$

Portanto, por integração direta, descobre-se que  $w(t) = At + B$ . Como é necessária apenas uma solução linearmente independente, escolhe-se  $A = 1$  e  $B = 0$  (vale ressaltar que se escolhido  $A = 0$ ,  $y_2(t)$  estaria incluso na família de soluções de  $y_1(t)$ , isto é,  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  seriam linearmente dependentes), de forma que

$$y_2(t) = w(t)y_1(t) = ty_1(t) = te^{\lambda t}.$$

A solução geral é, finalmente,

$$y_n(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}. \quad (4.13)$$

- **Caso 3:**  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

Sendo as raízes complexas e conjugadas  $\lambda = \sigma \pm j\omega$ , as exponenciais podem ser escritas como segue. Por serem complexas, as funções candidatas serão denominadas  $z_{1,2}(t)$  ao invés de  $y_{1,2}(t)$ .

$$z_{1,2}(t) = e^{\lambda_{1,2}t} = e^{(\sigma \pm j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{\pm j\omega t},$$

sendo  $j$  a unidade imaginária. Note que as funções  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$  formam um par conjugado, isto é,  $z_1(t) = \overline{z_2(t)}$ . Utilizando a identidade de Euler, pode-se expandir a exponencial complexa, resultando em

$$z_{1,2}(t) = e^{\sigma t} [\cos(\pm\omega t) + j \sin(\pm\omega t)].$$

Relembrando que o cosseno é uma função par ( $\cos(-x) = \cos(x)$ ) e que o seno é uma função ímpar ( $\sin(-x) = -\sin(x)$ ),  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$  podem ser escritos como

$$z_1(t) = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)], \quad z_2(t) = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)]. \quad (4.14)$$

As funções (4.14) são, de fato, linearmente independentes. Porém, seria mais conveniente se a solução da equação diferencial fosse composta por funções reais. Por isso, utiliza-se da superposição para combinar  $z_{1,2}(t)$  tal que suas partes imaginárias sejam canceladas. Tem-se que

$$y_1(t) = \frac{z_1(t) + z_2(t)}{2} = e^{\sigma t} \cos(\omega t),$$

$$y_2(t) = \frac{z_1(t) - z_2(t)}{j2} = e^{\sigma t} \sin(\omega t).$$

Portanto, combina-se linearmente  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  e a solução natural da equação torna-se

$$y_n(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = e^{\sigma t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]. \quad (4.15)$$

A tabela abaixo permite fácil consulta aos formatos de solução natural de acordo com as raízes  $\lambda$  do polinômio característico. Os valores das constantes serão calculados utilizando as condições iniciais, mas apenas no final da resolução, após incluída a resposta forçada do sistema.

Raízes	$y_n(t)$
$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$	$C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$
$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$	$e^{\sigma t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$

Se o polinômio característico tiver ordem mais alta, a resposta natural será uma combinação dos casos descritos acima. Por exemplo, se a equação diferencial for de quinta ordem, com raízes  $\lambda = \{-3, -2, -2, (-1 + j5), (-1 - j5)\}$ , a solução natural será da forma

$$y_n(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + C_3 t e^{-2t} + e^{-t} [C_4 \cos(5t) + C_5 \sin(5t)].$$

**Observação:** Fugindo um pouco da notação matemática, é comum em circuitos utilizar o símbolo  $A_i$  para denotar a  $i$ -ésima constante, já que  $C_i$  também pode representar um capacitor. No entanto, como essa e a próxima seção estão mais próximas de equações diferenciais do que de circuitos, decidiu-se utilizar a letra  $C$ . Deve-se sempre entender o contexto em que as variáveis estão inseridas. Note que o símbolo escolhido para as constantes não é tão importante quanto descobrir seus valores. Mesmo assim, é válida a observação.

#### 4.1.4 Resposta Forçada

A resposta forçada de um sistema equivale à contribuição da função de entrada para a saída. Para encontrá-la assume-se uma solução de acordo com a função não homogênea  $x(t)$ , que resolve a equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2} y_p(t) + p \frac{d}{dt} y_p(t) + q y_p(t) = x(t).$$

Como quer-se que o lado esquerdo seja igual ao lado direito, faz sentido assumir que uma resposta particular  $y_p(t)$  pertence à mesma classe de funções que a entrada  $x(t)$ . Por isso, costuma-se relacionar  $x(t)$  e  $y_p(t)$  de acordo com a tabela abaixo.

Formato	$x(t)$	$y_p(t)$
Constante	$C$	$A$
Senoidal	$C \cos(\omega t)$ ou $C \sin(\omega t)$	$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$
Exponencial	$Ce^{at}$	$Ae^{at}$
Polinomial	$C_n t^n + C_{n-1} t^{n-1} + \dots + C_0$	$A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_0$

É possível que a entrada seja uma junção de dois tipos diferentes de funções. Nesses casos, deve-se combinar dois tipos equivalentes de funções particulares. Considere o exemplo em que  $x(t) = t \cos(2t)$ . A solução particular para essa entrada tem o formato

$$y_p(t) = (A_1 t + A_0)[A \cos(2t) + B \sin(2t)]$$

Então, deve-se substituir  $y_p(t)$  na equação diferencial não homogênea para que, através da simples comparação dos dois lados da equação, sejam descobertos os valores das constantes de  $y_p(t)$ .

Para um caso em que o lado direito da equação é linearmente dependente de alguma das componentes da resposta natural, pode-se multiplicar a função particular por  $t$ , resultando em uma resposta linearmente independente (como mostrado na seção anterior).

#### 4.1.5 Resposta Completa

A resposta completa de um sistema é a soma da resposta natural com a resposta forçada.

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$

Retornando ao PVI (4.7), separa-se a resposta natural da resposta forçada:

##### Resposta Natural

$$\begin{aligned} \frac{d^2 e_o}{dt^2} + 2.5 \frac{de_o}{dt} + e_o &= 0 \\ \lambda^2 + 2.5\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda + 2)(\lambda + 0.5) &= 0 \\ \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 &= -0.5. \end{aligned}$$

Logo, o formato da solução natural de  $e_o$  é

$$e_{o_n}(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-0.5t}. \quad (4.16)$$

##### Resposta Forçada

Como o lado direito da equação é constante,  $e_{op} = A$ . Substituindo na equação original, resulta em

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + 2.5 \frac{dA}{dt} + A = 10.$$

Como  $A$  é uma constante, suas derivadas são nulas, o que implica

$$e_{o_p}(t) = A = 10. \quad (4.17)$$

### Resposta Completa

A resposta completa é a soma das respostas natural e forçada, isto é,

$$e_o(t) = 10 + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-0.5t}.$$

Para descobrir as constantes  $A_1$  e  $A_2$  que representam a tensão  $e_o(t)$  em questão, aplica-se as condições iniciais. Utilizando a primeira condição, encontra-se

$$\begin{aligned} e_o(0) &= 0 \\ 0 &= 10 + A_1 e^0 + A_2 e^0 = 10 + A_1 + A_2 \\ A_1 + A_2 &= -10. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Calculando a derivada de  $e_o$ ,

$$\frac{de_o(t)}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 0.5A_2 e^{-0.5t}.$$

Aplicando, agora, a condição,

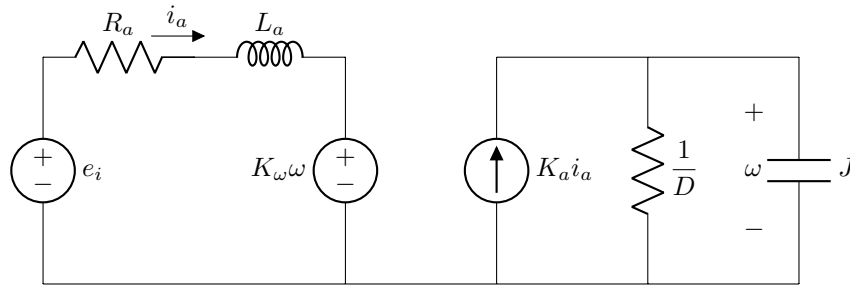
$$\begin{aligned} \frac{de_o(0)}{dt} &= 10 \\ 10 &= -2A_1 - 0.5A_2. \end{aligned} \tag{4.19}$$

O sistema de equações formado por (4.18) e (4.19) implica  $A_1 = -\frac{10}{3}$  e  $A_2 = -\frac{20}{3}$ . Portanto, a resposta final é

$$e_o(t) = 10 - \frac{10}{3} e^{-2t} - \frac{20}{3} e^{-0.5t}. \tag{4.20}$$

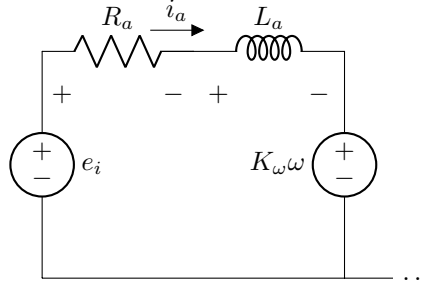
#### 4.1.6 Exemplos

**Exemplo 1:** O circuito abaixo representa o modelo de um motor de corrente contínua. Encontre, literalmente, a EDOL e as CONDINIC para a corrente de armadura  $i_a(t)$ . Em seguida, determine o valor da velocidade angular, representada pela tensão  $\omega(t)$ . Considere  $e_i(t) = 10u(t)$ ,  $R_a = 0.45\Omega$ ,  $L_a = 10mH$ ,  $K_a = 7\frac{N \cdot m}{A}$ ,  $D = 0.5\frac{Kg \cdot m}{s}$ ,  $J = 0.1Kg \cdot m^2$  e  $K_\omega = 0.025V \cdot s$ .



A primeira coisa a ser constatada é que os componentes do lado direito do circuito representam um sistema mecânico:  $K_a i_a$  representa uma força,  $D$  é o coeficiente de atrito no eixo do motor,  $J$  é o momento de inércia do eixo e  $\omega$  sua velocidade angular. Por isso, suas unidades diferem das usualmente encontradas para esses componentes. Em nosso caso, no entanto, pouco importa o que o dito circuito modela, mas sim encontrar os valores de tensão e corrente. Deve-se, portanto, abordar o problema como um circuito qualquer, utilizando, quando necessário, os valores dos componentes mecânicos.

Note que ambos os circuitos estão mutuamente relacionados pelas fontes controladas e pelo referencial. Como existem duas incógnitas, são necessárias duas equações diferenciais. Considerando que a corrente  $i_a$  define a polaridade das tensões de  $R_a$  e  $L_a$ ,



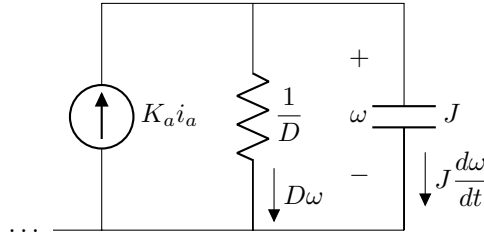
Pela malha,

$$e_i = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_\omega \omega.$$

Como quer-se encontrar  $i_a$ , isola-se a tensão  $\omega$ , resultando em

$$\omega = \frac{e_i - R_a i_a - L_a \frac{di_a}{dt}}{K_\omega}. \quad (4.21)$$

Olhando, agora, para o lado direito do circuito, é evidente que todos os componentes estão em paralelo. Considerando, também, que a direção das correntes nos passivos é definida pela tensão  $\omega$ ,



Dessa forma, pelo nó do circuito,

$$J \frac{d\omega}{dt} + D\omega = K_a i_a. \quad (4.22)$$

Aplicando (4.21) em (4.22), colocando-se a constante  $K_\omega$  em evidência,

$$\begin{aligned} \frac{J}{K_\omega} \frac{d}{dt} \left( e_i - R_a i_a - L_a \frac{di_a}{dt} \right) + \frac{D}{K_\omega} \left( e_i - R_a i_a - L_a \frac{di_a}{dt} \right) &= K_a i_a \\ \frac{J}{K_\omega} \frac{de_i}{dt} - \frac{JR_a}{K_\omega} \frac{di_a}{dt} - \frac{JL_a}{K_\omega} \frac{d^2 i_a}{dt^2} + \frac{D}{K_\omega} e_i - \frac{DR_a}{K_\omega} i_a - \frac{DL_a}{K_\omega} \frac{di_a}{dt} &= K_a i_a. \end{aligned}$$

Em função de facilitar escrever a forma mônica, divide-se ambos os lados da expressão por  $\frac{J}{K_\omega}$ , resultando em

$$\frac{de_i}{dt} - R_a \frac{di_a}{dt} - L_a \frac{d^2 i_a}{dt^2} + \frac{D}{J} e_i - \frac{DR_a}{J} i_a - \frac{DL_a}{J} \frac{di_a}{dt} = \frac{K_a K_\omega}{J} i_a.$$

Organizando os termos da EDOL,

$$L_a \frac{d^2 i_a}{dt^2} + \left( R_a + \frac{DL_a}{J} \right) \frac{di_a}{dt} + \left( \frac{K_a K_\omega}{J} + \frac{DR_a}{J} \right) i_a = \frac{de_i}{dt} + \frac{D}{J} e_i$$

$$\frac{d^2 i_a}{dt^2} + \left( \frac{R_a}{L_a} + \frac{D}{J} \right) \frac{di_a}{dt} + \left( \frac{K_a K_\omega}{J L_a} + \frac{D R_a}{J L_a} \right) i_a = \frac{1}{L_a} \frac{de_i}{dt} + \frac{D}{J L_a} e_i. \quad (4.23)$$

Para verificar se há alguma inconsistência na equação, realiza-se a análise dimensional. As chaves a seguir representam operações com unidades de media (como referido na Seção 2.4.9).

$$\left[ \frac{A}{s^2} + \left( \frac{\Omega}{H} + \frac{Kg \, m^2}{s} \right) \frac{A}{s} + \left( \frac{\frac{N \, m}{Kg \, m^2} V \, s}{H} + \frac{Kg \, m^2 \, \Omega}{Kg \, m^2 \, H} \right) A \right] = \left[ \frac{1}{H} \frac{V}{s} + \frac{Kg \, m^2}{Kg \, m^2 \, H} V \right].$$

Lembrando que, pela Segunda Lei de Newton,  $[N] = [Kg \, m \, s^{-2}]$ . Simplificando, então,

$$\left[ \frac{A}{s^2} + \left( \frac{\Omega}{H} + \frac{1}{s} \right) \frac{A}{s} + \left( \frac{\frac{1}{A \, s} V}{H} + \frac{\Omega}{H \, s} \right) A \right] = \left[ \frac{V}{H \, s} + \frac{V}{H \, s} \right].$$

Reorganizando e expandindo os termos,

$$\left[ \frac{A}{s^2} + \left( \frac{\Omega \, A}{H \, s} + \frac{A}{s^2} \right) + \left( \frac{V}{H \, s} + \frac{\Omega \, A}{H \, s} \right) \right] = \left[ \frac{V}{H \, s} + \frac{V}{H \, s} \right].$$

Todos os termos devem ter a mesma unidade. Para tal, deve-se ter que

$$\left[ \frac{A}{s^2} \right] = \left[ \frac{\Omega \, A}{H \, s} \right] = \left[ \frac{V}{H \, s} \right].$$

Da relação VI do indutor,

$$V = L \frac{di}{dt} \implies [V] = \left[ H \frac{A}{s} \right] \implies [H] = \left[ \frac{V \, s}{A} \right].$$

Assim, sabendo que, pela Lei de Ohm,  $[\Omega] = \left[ \frac{V}{A} \right]$ , mostra-se que

$$\left[ \frac{\Omega}{H} \right] = \left[ \frac{\frac{V}{A}}{\frac{V \, s}{A}} \right] = \left[ \frac{1}{s} \right],$$

de modo que

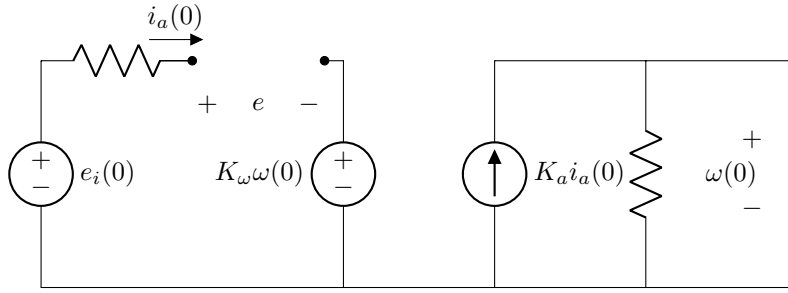
$$\left[ \frac{\Omega \, A}{H \, s} \right] = \left[ \frac{A}{s^2} \right].$$

Ainda pelo VI do indutor, é evidente que

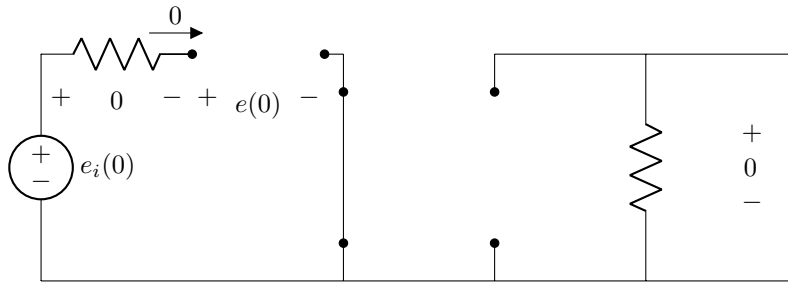
$$\left[ \frac{V}{H \, s} \right] = \left[ \frac{A}{s^2} \right].$$

Portanto, existe consistência dimensional na equação. Note que a análise realizada foi demasiada verbosa em virtude de facilitar o entendimento do leitor. Em geral, é possível checar rapidamente as unidades na própria equação (muitas vezes até mentalmente). Os autores recomendam fortemente a utilização dessa técnica, pois trás certa segurança na hora da montagem da EDOL, já que indica (mas não garante) que a mesma foi feita corretamente.

Para encontrar as condições iniciais, escreve-se o circuito para tempo  $t = 0$ . Como nada foi dito, assume-se que os capacitores e indutores estão descarregados.



Como o indutor é um circuito aberto, a corrente  $i_a(0)$  deve ser nula, o que implica a fonte controlada de corrente também ser um circuito aberto. Além disso, a tensão  $\omega(0)$  também é nula, de modo que a fonte controlada de tensão é modelada por um curto. Redesenhando o circuito,



Para a condição da derivada, utiliza-se a relação VI do indutor, isto é,

$$e = L_a \frac{di_a}{dt} \Rightarrow \frac{di_a}{dt} = \frac{e}{L_a}.$$

Aplicando  $t = 0$  e sabendo que, pela malha,  $e(0) = e_i(0)$ ,

$$\frac{di_a(0)}{dt} = \frac{e(0)}{L_a} = \frac{e_i(0)}{L_a}.$$

Note que é sempre mais correto encontrar a expressão literal antes de aplicar  $t = 0$ . Um exemplo clássico de erro em questões de circuitos elétricos é derivar uma expressão após aplicar  $t = 0$ , o que sempre resultará em 0, já que toda função aplicada em algum ponto representa algum valor constante, que possui derivada nula. Aplicando-se os valores dos componentes, então, resulta no seguinte problema a ser resolvido:

$$\begin{cases} \frac{d^2 i_a}{dt^2} + 50 \frac{di_a}{dt} + 400 i_a = 5000 \\ i_a(0) = 0 \quad \frac{di_a(0)}{dt} = 1000 \end{cases}.$$

As raízes da equação características são  $\lambda_1 = -10$  e  $\lambda_2 = -40$ , o que implica a resposta natural (ou resposta transitória) de  $i_a(t)$  ter o formato

$$i_{a_n}(t) = A_1 e^{-10t} + A_2 e^{-40t}.$$

Para a resposta forçada (ou resposta particular), como o lado direito da EDOL é constante,  $i_{a_p}(t) = A$ . Aplicando na equação,

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + 50 \frac{dA}{dt} + 400A = 5000,$$

o que implica  $A = 12.5$ . A resposta completa é, portanto

$$i_a(t) = 12.5 + A_1 e^{-10t} + A_2 e^{-40t}.$$

Pela primeira CONDINIC, tem-se que

$$i_a(0) = 0 \implies A_1 + A_2 = -12.5. \quad (4.24)$$

Pela condição da derivada,

$$\frac{di_a(0)}{dt} = 1000 \implies -10A_1 - 40A_2 = 1000. \quad (4.25)$$

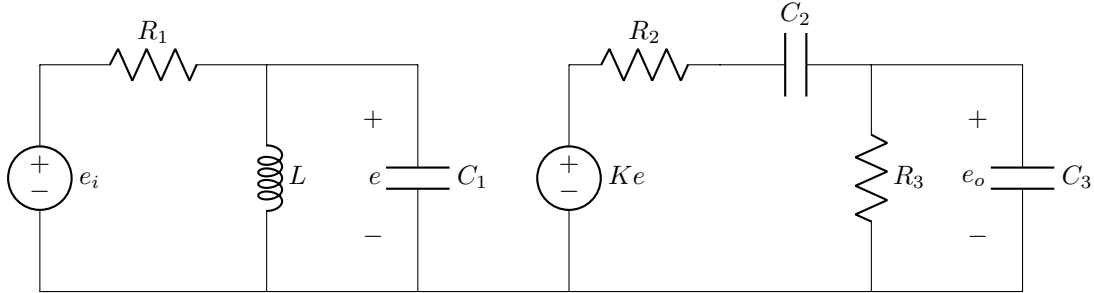
Pelo sistema de equações definido por (4.24) e (4.25), os valores das constantes devem ser  $A_1 = \frac{50}{3}$  e  $A_2 = \frac{-175}{6}$ , o que resulta em

$$i_a(t) = 12.5 + \frac{50}{3} e^{-10t} - \frac{175}{6} e^{-40t}. \quad (4.26)$$

Finalmente, conhecendo-se  $i_a(t)$ , basta utilizar a expressão (4.21) para encontrar  $\omega$ , que gera a seguinte resposta.

$$\omega(t) = 175 - 300e^{-10t} + 525e^{-40t}. \quad (4.27)$$

**Exemplo 2:** Determine, literalmente (isto é, sem substituir nenhum valor), a EDOL para  $e_o$ , com as respectivas condições iniciais e, em seguida, calcule  $e_o(t)$  para  $e_i = 1 + 2\cos^2(t)$ ,  $R_1 = R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 1\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 0.25F$ ,  $C_3 = 0.5F$ ,  $L = 1H$ ,  $K = 25\frac{V}{V}$ .



**Observação:** Existem duas principais abordagens para resolução desse problema. A primeira delas consiste em se aproveitar do fato de que esse é um circuito em dois estágios em que não há nenhuma conexão, *feedback*, que interconecte o segundo estágio com o primeiro, o que significa que o primeiro estágio, contendo  $e_i$ ,  $R_1$ ,  $L$  e  $C_1$ , não sofre absolutamente nenhuma influência do segundo estágio, em que, neste caso, o mesmo só recebe informação do primeiro a partir da fonte controlada  $Ke$ . Ou seja, em termos práticos, é possível resolver inteiramente o primeiro estágio usando  $e(t)$  como incógnita e usá-lo como entrada, multiplicada por  $K$ , para o segundo estágio e o resolver separadamente. A segunda abordagem é resolver o circuito inteiro de uma vez só, usando substituições das equações entre os estágios. Ainda que a primeira abordagem possa ser ligeiramente mais fácil, pois consiste em resolver duas equações diferenciais de segunda ordem ao invés de uma equação diferencial de quarta ordem, será escolhida a segunda abordagem para resolver este problema, com justificativa de, primeiro, mostrar como é possível fazer algo do gênero, uma vez que é menos intuitivo de entender sem ver um exemplo, segundo, para mostrar a resolução de um circuito de ordem tão alta e, terceiro, pois a questão não solicita descobrir a tensão  $e(t)$ , caso contrário, o outro método é estritamente recomendado.

Antes de mais nada, reescrevemos a entrada  $e_i$  a partir da identidade trigonométrica dada por  $\cos^2(t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2t)]$ .

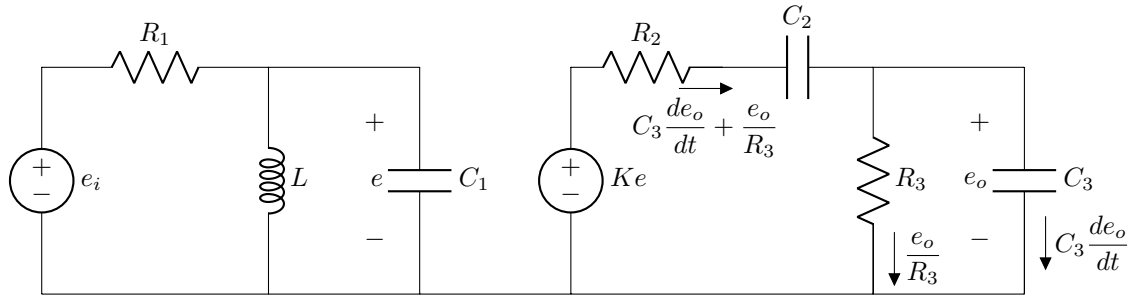
$$e_i = 1 + 2\cos^2(t) = 1 + 2 \left[ \frac{1 + \cos(2t)}{2} \right] = 2 + \cos(2t)$$



## Equacionamento

Como *modus operandi*, ou “paradigma” para equacionamento de circuitos, principalmente em circuitos complexos em que o leitor talvez possa se encontrar sem saber como proceder, é útil ter em mente algumas coisas. Primeiro, identificar quais são as variáveis disponíveis que podem ser manipuladas, tensões ou correntes, e, segundo, quais novas manipulações podem ser feitas com essas variáveis, relações de tensão e corrente para elementos individuais ou nós e malhas entre os elementos. Ou seja, sempre se perguntar “qual a manipulação disponível para esse conjunto de variáveis que tenho em mãos que ainda não fiz?”, fazendo com que o equacionamento tenha uma característica procedural. É muito comum começar utilizando a variável de saída, incógnita, e ir “transportando” a informação até a entrada do circuito através dessas manipulações, uma vez que, inicialmente, é comum que a única variável disponível para manipulação seja, de fato, a saída. Além disso, é conveniente utilizar a variável de saída, pois a equação diferencial deverá ser escrita unicamente em função de tal variável. Outras vezes, manipular inicialmente uma variável de controle também pode ser útil.

Então, no circuito a seguir, começando pelo segundo estágio, utiliza-se a tensão  $e_o$  para descobrir a corrente do capacitor  $C_3$  e, dado que  $R_3$  está em paralelo com  $C_3$ , também descobrir a corrente de  $R_3$ , e, então, pelo nó acima de  $R_3$ , descobre-se que a corrente que percorre  $R_2$  e  $C_2$  é o somatório das duas anteriores.



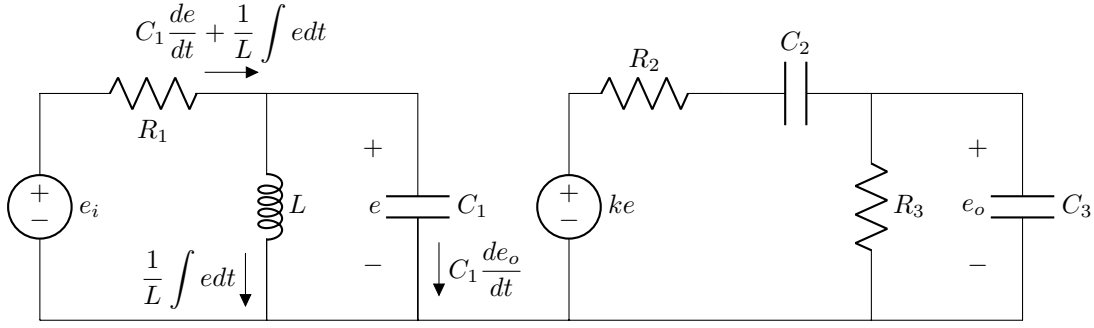
Sabendo a corrente que percorre  $R_2$  e  $C_2$ , é possível determinar a tensão em cada desses dois elementos e, agora que se tem uma equação para as tensões e correntes de cada um dos elementos do segundo estágio do circuito, resta apenas fazer uma malha ou nó para obter a equação que relaciona essas variáveis entre si. No caso, faz-se a malha que percorre  $Ke$ ,  $R_2$ ,  $C_2$  e  $C_3$  (ou, alternativamente,  $Ke$ ,  $R_2$ ,  $C_2$  e  $R_3$ ). Obtém-se:

$$Ke = R_2 \left( C_3 \frac{de_o}{dt} + \frac{e_o}{R_3} \right) + \frac{1}{C_2} \int \left( C_3 \frac{de_o}{dt} + \frac{e_o}{R_3} \right) dt + e_o.$$

Dessa forma

$$e = \frac{R_2 \left( C_3 \frac{de_o}{dt} + \frac{e_o}{R_3} \right) + \frac{1}{C_2} \int \left( C_3 \frac{de_o}{dt} + \frac{e_o}{R_3} \right) dt + e_o}{K}. \quad (4.28)$$

Agora, voltando-se para o primeiro estágio, podemos fazer o mesmo processo para  $e$ , já que essa é a variável que relaciona ambos estágios do circuito. Descobre-se a corrente no capacitor  $C_1$  e no indutor  $L$  a partir da tensão  $e$ , então a soma dessas correntes é justamente a corrente que percorre  $R_1$ , nos possibilitando assim descobrir a tensão nesse componente. Por fim, faz-se a malha contendo  $e_i$ ,  $R_1$  e  $C_1$  para obter a Equação (4.29).



$$e_i = R_1 \left[ C_1 \frac{de}{dt} + \frac{1}{L} \int e dt \right] + e \quad (4.29)$$

Substituindo a Equação (4.28) na Equação (4.29) obtemos

$$\begin{aligned} e_i = R_1 \left[ C_1 \frac{d}{dt} \left[ \frac{R_2 \left( C_3 \frac{de_o}{dt} + \frac{e_o}{R_3} \right) + \frac{1}{C_2} \int \left( C_3 \frac{de_o}{dt} + \frac{e_o}{R_3} \right) dt + e_o}{K} \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{L} \int \left[ \frac{R_2 \left( C_3 \frac{de_o}{dt} + \frac{e_o}{R_3} \right) + \frac{1}{C_2} \int \left( C_3 \frac{de_o}{dt} + \frac{e_o}{R_3} \right) dt + e_o}{K} \right] dt + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{R_2 \left( C_3 \frac{de_o}{dt} + \frac{e_o}{R_3} \right) + \frac{1}{C_2} \int \left( C_3 \frac{de_o}{dt} + \frac{e_o}{R_3} \right) dt + e_o}{K} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dado que deseja-se resolver uma EDOL, e existem um máximo de duas integrais encadeadas na Equação (4.30), deriva-se duas vezes com respeito ao tempo, também multiplica-se ambos lados da equação por  $K$ , a fim de facilitar a notação

$$\begin{aligned} K \frac{d^2 e_i}{dt^2} = R_1 \left[ C_1 \left[ R_2 \left( C_3 \frac{d^4 e_o}{dt^4} + \frac{1}{R_3} \frac{d^3 e_o}{dt^3} \right) + \frac{1}{C_2} \left( C_3 \frac{d^3 e_o}{dt^3} + \frac{1}{R_3} \frac{d^2 e_o}{dt^2} \right) + \frac{d^3 e_o}{dt^3} \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{L} \left[ R_2 \left( C_3 \frac{d^2 e_o}{dt^2} + \frac{1}{R_3} \frac{de_o}{dt} \right) + \frac{1}{C_2} \left( C_3 \frac{de_o}{dt} + \frac{e_o}{R_3} \right) + \frac{de_o}{dt} \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + R_2 \left( C_3 \frac{d^3 e_o}{dt^3} + \frac{1}{R_3} \frac{d^2 e_o}{dt^2} \right) + \frac{1}{C_2} \left( C_3 \frac{d^2 e_o}{dt^2} + \frac{1}{R_3} \frac{de_o}{dt} \right) + \frac{d^2 e_o}{dt^2} \right] \end{aligned}$$

manipulando

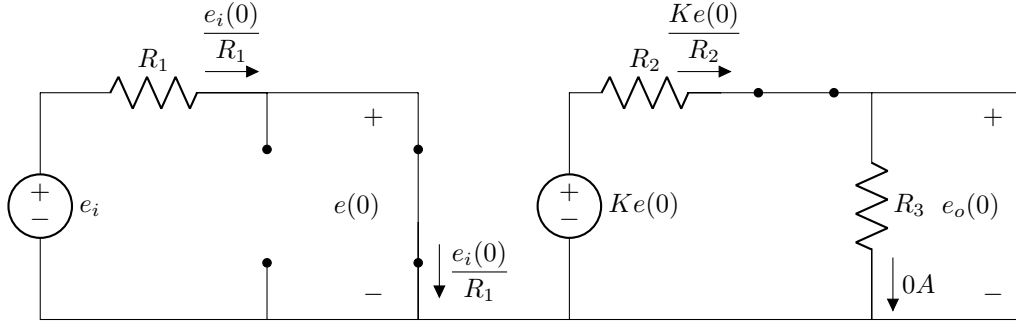
$$\begin{aligned} K \frac{d^2 e_i}{dt^2} = R_1 R_2 C_1 C_3 \frac{d^4 e_o}{dt^4} + \left( \frac{R_1 R_2 C_1}{R_3} + \frac{R_1 C_1 C_3}{C_2} + R_1 C_1 + R_2 C_3 \right) \frac{d^3 e_o}{dt^3} + \left( \frac{R_1 C_1}{R_3 C_2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{R_1 R_2 C_3}{L} + \frac{R_2}{R_3} + \frac{C_3}{C_2} + 1 \right) \frac{d^2 e_o}{dt^2} + \left( \frac{R_1 R_2}{R_3 L} + \frac{R_1 C_3}{L C_2} + \frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_3 C_2} \right) \frac{de_o}{dt} + \frac{R_1}{R_3 L C_2} e_o. \\ \frac{K}{R_1 R_2 C_1 C_3} \frac{d^2 e_i}{dt^2} = \frac{d^4 e_o}{dt^4} + \left( \frac{1}{R_3 C_3} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_3} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \frac{d^3 e_o}{dt^3} + \left( \frac{1}{R_2 R_3 C_2 C_3} + \frac{1}{L C_1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{R_1 R_3 C_1 C_3} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_3} \right) \frac{d^2 e_o}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_3 L C_1 C_3} + \frac{1}{R_2 L C_1 C_2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{R_2 L C_1 C_3} + \frac{1}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3} \right) \frac{de_o}{dt} + \frac{1}{R_2 R_3 L C_1 C_2 C_3} e_o \end{aligned}$$

É recomendado, nessa etapa, que se realize a análise dimensional descrita no exemplo anterior. Porém aqui será omitida. Substituindo os valores da questão obtemos a Equação (4.31).

$$\frac{d^4 e_o}{dt^4} + 7 \frac{d^3 e_o}{dt^3} + 18 \frac{d^2 e_o}{dt^2} + 28 \frac{de_o}{dt} + 16 e_o = 50 \frac{d^2 e_i}{dt^2} \quad (4.31)$$

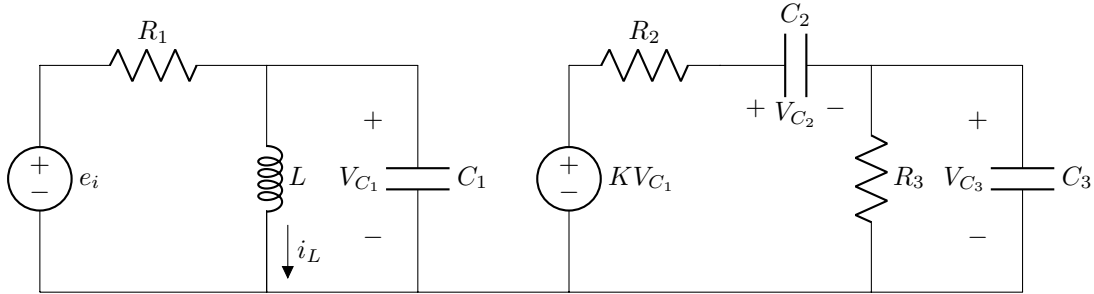
### CONDINIC

Primeiro, a partir do circuito equivalente para o instante  $t = 0$ , mostrado a seguir, podemos diretamente determinar o valor de  $e_o$  e sua primeira derivada no tempo nesse instante, bem como outros valores úteis que serão explicitados quando convirem.



$$e_o(0) = 0, \left. \frac{de_o}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i C_3(0)}{C_3} = \frac{K e(0)}{R_2 C_3} = 0 \quad (4.32)$$

Entretanto o valor para a segunda e terceira deriva em  $t = 0$  não pode ser obtido tão facilmente, é preciso olhar o circuito em sua forma original. Ainda assim, estando o interesse focado em descobrir uma expressão para a segunda e terceira derivada de  $e_o$  e então aplicar em  $t = 0$ , é muito conveniente reescrever o circuito, e consequentemente também escrever as equações, em termos de variáveis que são facilmente deriváveis, isto é, a tensões dos capacitores e correntes dos indutores, uma vez que derivando se obtém diretamente a variável análoga (corrente/tensão).



Dessa forma as equações para, respectivamente, o segundo e primeiro estágios ficam

$$K V_{C_1} = R_2 \left( \frac{V_{C_3}}{R_3} + C_3 \frac{dV_{C_3}}{dt} \right) + V_{C_2} + V_{C_3} \quad (4.33)$$

$$e_i = R_1 \left[ C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} + i_L \right] + V_{C_1} \quad (4.34)$$

Substituindo (4.33) em (4.34) obtemos

$$e_i = R_1 \left[ \frac{C_1}{K} \left[ R_2 \left( \frac{1}{R_3} \frac{dV_{C_3}}{dt} + C_3 \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} \right) + \frac{dV_{C_2}}{dt} + \frac{dV_{C_3}}{dt} \right] + i_L \right] + \dots \quad (4.35)$$

$$\dots + \frac{1}{K} \left[ R_2 \left( \frac{V_{C_3}}{R_3} + C_3 \frac{dV_{C_3}}{dt} \right) + V_{C_2} + V_{C_3} \right]$$

Também, olhando para o circuito em  $t = 0$ , retiramos outras informações úteis, a fim de aplicar a Equação (4.35) em  $t = 0$  e descobrir  $\left. \frac{d^2 e_o}{dt^2} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} \right|_{t=0}$ .

$$i_L(0) = 0, V_{C_2}(0) = 0, \left. \frac{dV_{C_2}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_{C_2}(0)}{C_2} = \frac{Ke(0)}{R_2 C_2} = 0$$

Utilizando essas informações e as condições iniciais já conhecidas ao aplicar a Equação (4.35) em  $t = 0$  temos:

$$\begin{aligned} e_i(0) = R_1 \left[ \frac{C_1}{K} \left[ R_2 \left( \frac{1}{R_3} \frac{dV_{C_3}}{dt} + C_3 \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} \right) + \frac{dV_{C_2}}{dt} + \frac{dV_{C_3}}{dt} \right] + i_L \right] + \dots \\ \dots + \frac{1}{K} \left[ R_2 \left( \frac{V_{C_3}}{R_3} + C_3 \frac{dV_{C_3}}{dt} \right) + V_{C_2} + V_{C_3} \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

manipulando

$$\frac{R_1 C R_2 C_1 C_3}{k} \left. \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} \right|_{t=0} = e_i(0) \implies \left. \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{k}{R_1 C R_2 C_1 C_3} e_i(0) \quad (4.37)$$

$$\frac{k}{R_1 R_2 C_1 C_3} e_i(0) = 150. \quad (4.38)$$

Agora, uma vez que desejamos derivar a Equação (4.35) para que apareça uma derivada de terceira ordem de  $V_{C_3}$ , nos deparamos com o problema de que não sabemos o valor da segunda derivada de  $V_{C_2}$  em  $t = 0$ . Portanto, torna-se necessário fazer a substituição  $V_{C_2} = \frac{1}{C_2} \int \left( \frac{V_{C_3}}{R_3} + C_3 \frac{dV_{C_3}}{dt} \right) dt$ .

$$\begin{aligned} \frac{de_i}{dt} = R_1 \left[ \frac{C_1}{K} \left[ R_2 \left( \frac{1}{R_3} \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} + C_3 \frac{d^3 V_{C_3}}{dt^3} \right) + \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_3} \frac{dV_{C_3}}{dt} + C_3 \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} \right) + \dots \right. \right. \\ \left. \dots + \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} \right] + \frac{di_L}{dt} \right] + \frac{1}{K} \left[ R_2 \left( \frac{1}{R_3} \frac{dV_{C_3}}{dt} + C_3 \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} \right) + \frac{dV_{C_2}}{dt} + \frac{dV_{C_3}}{dt} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Voltando para o circuito em  $t = 0$ , retiramos outras informações úteis, a fim de aplicar a Equação (4.39) em  $t = 0$  e descobrir  $\left. \frac{d^3 e_o}{dt^3} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^3 V_{C_3}}{dt^3} \right|_{t=0}$ .

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \implies \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{V_L(0)}{L} = \frac{V_{C_1}(0)}{L} = 0$$

Utilizando essas informações e as condições iniciais já conhecidas ao aplicar a Equação (4.39) em  $t = 0$  temos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{de_i}{dt} \right|_{t=0} = R_1 \left[ \frac{C_1}{K} \left[ R_2 \left( \frac{1}{R_3} \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} + C_3 \frac{d^3 V_{C_3}}{dt^3} \right) + \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_3} \frac{dV_{C_3}}{dt} + C_3 \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} \right) + \dots \right. \right. \\ \left. \dots + \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} \right] + \frac{di_L}{dt} \right] + \frac{1}{K} \left[ R_2 \left( \frac{1}{R_3} \frac{dV_{C_3}}{dt} + C_3 \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} \right) + \frac{dV_{C_2}}{dt} + \frac{dV_{C_3}}{dt} \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

manipulando

$$\left. \frac{de_i}{dt} \right|_{t=0} = \left( \frac{R_1 R_2 C_1}{K R_3} + \frac{R_1 C_1 C_3}{K C_2} + \frac{R_1 C_1}{K} + \frac{R_2 C_3}{K} \right) \frac{d^2 V_{C_3}}{dt^2} + \frac{R_1 R_2 C_1 C_3}{K} \frac{d^3 V_{C_3}}{dt^3} \quad (4.41)$$

$$\left. \frac{de_i}{dt} \right|_{t=0} = \left( \frac{R_1 R_2 C_1}{K R_3} + \frac{R_1 C_1 C_3}{K C_2} + \frac{R_1 C_1}{K} + \frac{R_2 C_3}{K} \right) \frac{K}{R_1 R_2 C_1 C_3} e_i(0) + \frac{R_1 R_2 C_1 C_3}{K} \frac{d^3 V_{C_3}}{dt^3} \quad (4.42)$$

$$\left. \frac{d^3 V_{C_3}}{dt^3} \right|_{t=0} = \frac{K}{R_1 R_2 C_1 C_3} \left[ \left. \frac{de_i}{dt} \right|_{t=0} - \left( \frac{R_1 R_2 C_1}{R_3} + \frac{R_1 C_1 C_3}{C_2} + R_1 C_1 + R_2 C_3 \right) \frac{e_i(0)}{R_1 R_2 C_1 C_3} \right] \quad (4.43)$$

$$\left. \frac{d^3 V_{C_3}}{dt^3} \right|_{t=0} = -1050. \quad (4.44)$$

### Resposta Natural

A partir da Equação (4.31) temos

$$\begin{aligned} \frac{d^4 e_o}{dt^4} + 7 \frac{d^3 e_o}{dt^3} + 18 \frac{d^2 e_o}{dt^2} + 28 \frac{de_o}{dt} + 16 e_o &= 0 \\ \lambda^4 + 7\lambda^3 + 18\lambda^2 + 28\lambda + 16 &= 0 \\ (\lambda + 1)(\lambda + 4)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) &= 0 \\ \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_{3,4} = -1 \pm j\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Logo, o formato da solução natural de  $e_o$  é

$$e_{on}(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t} + e^{-1} \left[ A_3 \cos(\sqrt{3}t) + A_4 \sin(\sqrt{3}t) \right]$$

### Resposta Forçada

Uma vez que temos  $e_i = 2 + \cos(2t)$ ,  $e_{op}$  é da forma  $e_{op}(t) = A + B \cos(2t) + C \sin(2t)$ . Então, aplicando na Equação (4.31)

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dt^4} (A + B \cos(2t) + C \sin(2t)) + 7 \frac{d^3}{dt^3} (A + B \cos(2t) + C \sin(2t)) + 18 \frac{d^2}{dt^2} (A + B \cos(2t) + \dots \\ \dots + C \sin(2t)) + 28 \frac{d}{dt} (A + B \cos(2t) + C \sin(2t)) + 16 (A + B \cos(2t) + C \sin(2t)) = -200 \cos(2t) \\ (16B \cos(2t) + 16C \sin(2t)) + (-56C \cos(2t) + 56B \sin(2t)) + (-72B \cos(2t) - 72C \sin(2t)) + \\ + (56C \cos(2t) - 56B \sin(2t)) + (16A + 16B \cos(2t) + 16C \sin(2t)) = -200 \cos(2t) \end{aligned}$$

Separando os termos linearmente independentes

$$\begin{aligned} -40B \cos(2t) &= -200 \cos(2t) \\ -40C \sin(2t) &= 0 \sin(2t) \\ 16A &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 5 \\ C &= 0 \\ A &= 0 \end{aligned}$$

Então

$$e_{op}(t) = 5 \cos(2t)$$

### Resposta Completa

A resposta completa é do formato

$$e_o(t) = e_{on}(t) + e_{op}(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t} + e^{-t} \left[ A_3 \cos(\sqrt{3}t) + A_4 \sin(\sqrt{3}t) \right] + 5 \cos(2t) \quad (4.45)$$

Basta apenas que se utilize as condições iniciais previamente descobertas para que as constantes sejam determinadas. Para tal, primeiro derivamos a Equação (4.45) três vezes.

$$\begin{aligned} \frac{de_o}{dt} = & -A_1 e^{-t} - 4A_2 e^{-4t} + e^{-t} \left[ \left( -A_3 + \sqrt{3}A_4 \right) \cos(\sqrt{3}t) + \dots \right. \\ & \left. \dots + \left( -\sqrt{3}A_3 - A_4 \right) \sin(\sqrt{3}t) \right] + 10 \cos(2t) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 e_o}{dt^2} = & -A_1 e^{-t} + 16A_2 e^{-4t} + e^{-t} \left[ \left( -2A_3 - 2\sqrt{3}A_4 \right) \cos(\sqrt{3}t) + \dots \right. \\ & \left. \dots + \left( 2\sqrt{3}A_3 - 2A_4 \right) \sin(\sqrt{3}t) \right] - 20 \cos(2t) \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\frac{d^3 e_o}{dt^3} = A_1 e^{-t} - 64A_2 e^{-4t} + e^{-t} \left[ 8A_3 \cos(\sqrt{3}t) + 8A_4 \sin(\sqrt{3}t) \right] + 40 \cos(2t) \quad (4.48)$$

Aplicando as expressões (4.46), (4.47) e (4.48) em  $t = 0$  e igualando com os valores das condições iniciais, chegamos no sistemas de equações a seguir, escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} e(0) \\ \left. \frac{de_o}{dt} \right|_{t=0} \\ \left. \frac{d^2 e_o}{dt^2} \right|_{t=0} \\ \left. \frac{d^3 e_o}{dt^3} \right|_{t=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & \sqrt{3} \\ 1 & 16 & -2 & -2\sqrt{3} \\ -11 & -64 & +8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \\ -1050 \end{bmatrix}$$

Resolvendo

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & \sqrt{3} \\ 1 & 16 & -2 & -2\sqrt{3} \\ -11 & -64 & +8 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \\ -1050 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{-110}{9} \\ \frac{140}{9} \\ \frac{-25}{3} \\ \frac{125\sqrt{3}}{9} \end{bmatrix}$$

Então, finalmente, a resposta completa é

$$e_o(t) = \frac{-110}{9} e^{-t} + \frac{140}{9} e^{-4t} + e^{-t} \left[ \frac{-25}{3} \cos(\sqrt{3}t) + \frac{125\sqrt{3}}{9} \sin(\sqrt{3}t) \right] + 5 \cos(2t)$$

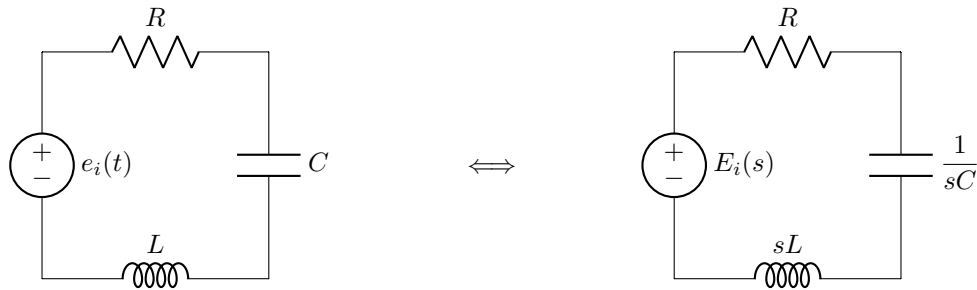
## 4.2 Elementos Reativos no domínio Frequência

Em circuitos elétricos, os problemas descritos como equações diferenciais em função do tempo podem ser levados ao domínio frequência, sendo utilizadas a **Transformada de Laplace** e suas propriedades. Considerando

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

É possível representar uma rede de componentes reativos através de suas impedâncias equivalentes no domínio frequência. Sendo  $s$  a variável frequência,

- Resistor ( $R$ ): representado como uma impedância  $R$
- Capacitor ( $C$ ): representado como uma impedância  $\frac{1}{sC}$
- Indutor ( $L$ ): representado como uma impedância  $sL$

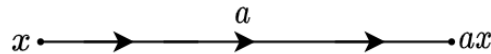


Deste modo, é possível efetuar operações como a Lei de Ohm, Thévenin e divisores de tensão e corrente em um circuito com capacitores e indutores, facilitando a resolução de diversas configurações com representações mais complicadas no tempo. Por exemplo, um circuito de ordem 3, no tempo, é representado por uma equação diferencial ordinária de terceira ordem, a qual precisa de três condições iniciais para ser completamente resolvida. Operando em frequência, o problema é reduzido a um polinômio de terceira ordem, que requiere apenas álgebra básica para ser resolvido. Deste modo, podem ser introduzidos novos métodos de resolução de circuitos.

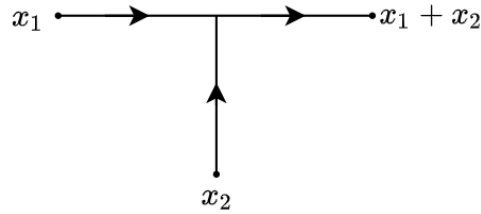
## 4.3 Diagrama de Fluxo

O Diagrama de Fluxo é uma representação simbólica de um circuito elétrico. O mesmo relaciona a(s) entrada(s) e as variáveis de estado à(s) saída(s). As unidades básicas do diagrama são:

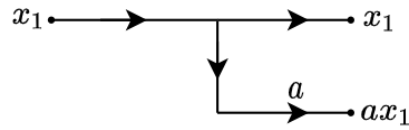
- **Ganho:** multiplicador aplicado à variável em questão. Se nenhum valor for explicitado, o ganho é unitário (não altera a variável).



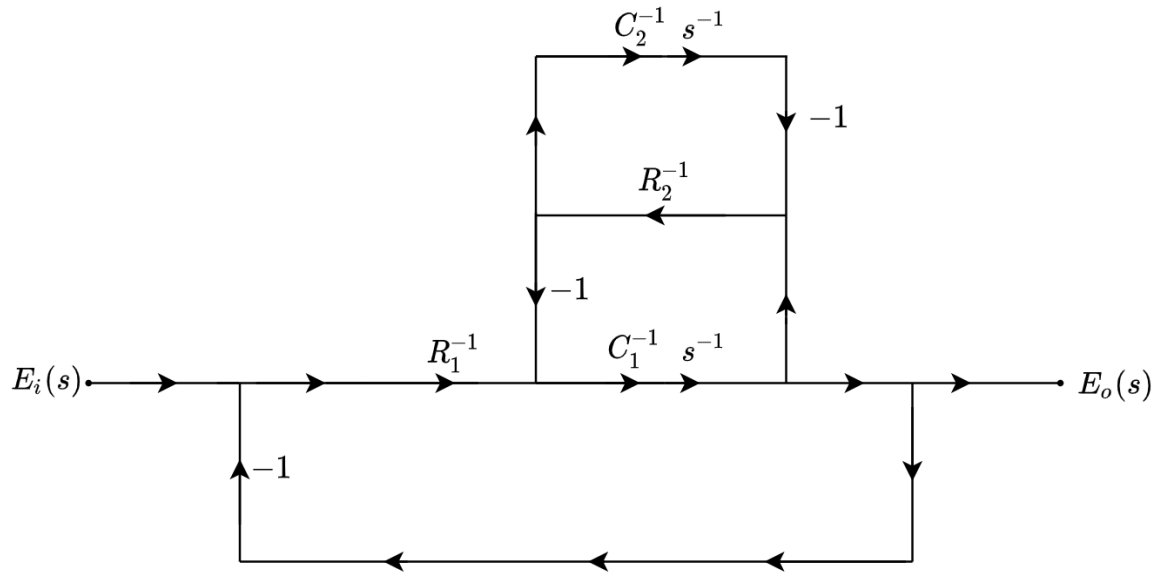
- **Soma:** representa a soma de dois ramos que se encontram.



- **Amostra:** cria-se um ramo de valor idêntico ao do ponto amostrado. Um mesmo ponto pode ser amostrado infinitas vezes sem ter seu valor alterado.



A grande vantagem do diagrama de fluxo é que pode-se relacionar qualquer saída com as entradas do circuito. Considerando o mesmo circuito utilizado como exemplo na seção anterior, um possível diagrama de fluxo é



A função de transferência  $T(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$  é calculada através da **Regra de Mason**,

$$T(s) = \sum_{k=1}^N \frac{M_k \Delta_k}{\Delta}$$

Considerando um “loop” como um caminho fechado, ou seja, partindo de um ponto, chega-se no mesmo ponto seguindo as setas do diagrama e “caminho direto” como a multiplicação dos ganhos de um ponto ao outro, seguindo o sentido das setas,



- $M_k$ : ganho do k-ésimo caminho direto entre a entrada e a saída

- $\Delta$ :  $1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,k} L_i L_j L_k + \sum_{i,j,k,l} L_i L_j L_k L_l - \dots$

sendo  $L$  a multiplicação dos ganhos em um loop,  $\Delta$  envolve a multiplicação entre todos os loops que **não se tocam** individualmente, os loops que não se tocam dois a dois, três a três, quatro a quatro, e assim por diante até esgotarem-se as combinações de loops.

- $\Delta_k$ : é similar ao  $\Delta$ , porém apenas envolve os loops que **não** tocam o caminho direto  $M_k$

No circuito em questão, do diagrama de fluxo, têm-se três loops, com dois que não se tocam e um caminho direto.

$$\Delta = 1 - \left( -\frac{1}{sR_1C_1} - \frac{1}{sR_2C_1} - \frac{1}{sR_2C_2} \right) + \left( -\frac{1}{sR_1C_1} \right) \left( -\frac{1}{sR_2C_2} \right)$$

$$M_1 = \frac{1}{sR_1C_1}$$

$$\Delta_1 = 1 - \left( -\frac{1}{sR_2C_2} \right)$$

Portanto,

$$T(s) = \frac{\frac{1}{sR_1C_1} \left( 1 + \frac{1}{sR_2C_2} \right)}{1 + \frac{1}{sR_1C_1} + \frac{1}{sR_2C_1} + \frac{1}{sR_2C_2} + \frac{1}{s^2R_1R_2C_1C_2}}$$

$$T(s) = \frac{\frac{1}{R_1C_1} \left( s + \frac{1}{R_2C_2} \right)}{s^2 + \left( \frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_2C_2} \right) s + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$T(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 2.5s + 1}$$

Para entrada tipo salto,  $e_i(t) = 10 u(t)$ , em frequência,  $E_i(s) = \frac{10}{s}$

$$E_o(s) = T(s)E_i(s) = \frac{10s + 10}{s(s^2 + 2.5s + 1)}$$

Do método da separação em frações parciais,

$$E_o(s) = \frac{10}{s} + \frac{-\frac{10}{3}}{s + 2} + \frac{-\frac{20}{3}}{s + 0.5}$$

Aplicando, por linearidade, a transformada inversa em ambos os lados, tem-se o mesmo resultado antes obtido pela solução de equações diferenciais.

$$e_o(t) = 10 - \frac{10}{3}e^{-2t} - \frac{20}{3}e^{-0.5t}$$

## 4.4 Representação em Espaço de Estados

A Representação em Espaço de Estados (ou apenas Representação de Estados) é uma ferramenta que permite representar um sistema descrito por uma equação diferencial de ordem  $n$  em um sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem (ordem 1). Para isso, além das entradas e das saídas, devem ser considerados os **estados** do sistema. Em um caso geral, a escolha dos estados é arbitrária. Na resolução de circuitos elétricos, porém, costuma-se atribuir as **tensões nos capacitores** e as **correntes nos indutores** como estados. A representação possui o formato

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \quad (4.50)$$

Sendo  $\mathbf{x}$  o vetor que contém as variáveis de estado,  $\dot{\mathbf{x}}$  o vetor que contém as derivadas das variáveis de estado,  $\mathbf{u}$  o vetor de entradas e  $\mathbf{y}$  o vetor de saídas.  $A, B, C$  e  $D$  são as matrizes de coeficientes que relacionam os vetores.

Em um caso em de um circuito com  $n$  variáveis de estado, mas apenas uma entrada e uma saída, as dimensões das matrizes são  $A_{n \times n}$ ,  $B_{n \times 1}$ ,  $C_{1 \times n}$  e  $D_{1 \times 1}$ . Reescrevendo a representação, têm-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} u \quad (4.51)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} \end{bmatrix} u \quad (4.52)$$

### 4.4.1 Representação de Estados por Inspeção

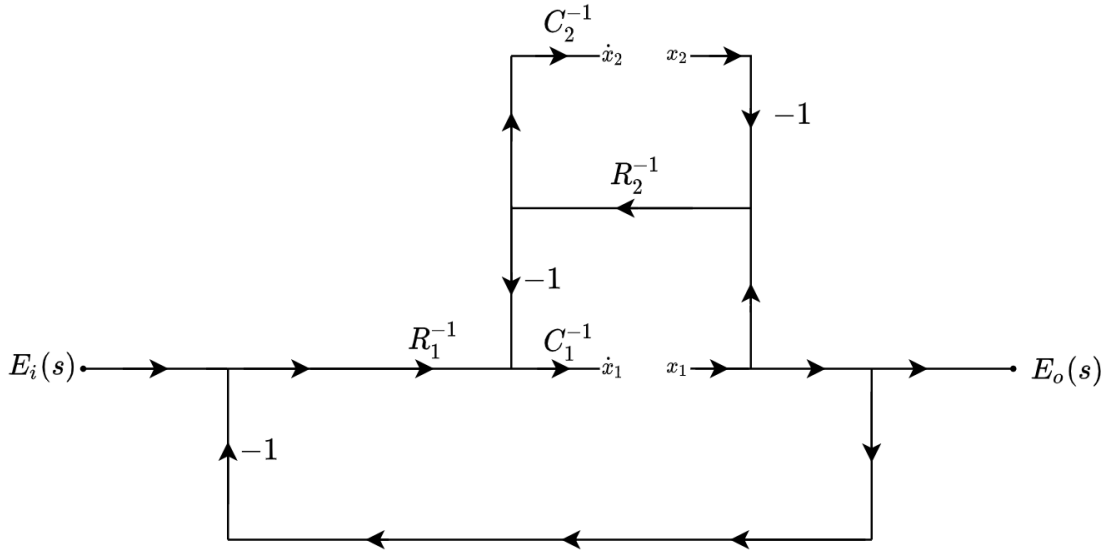
O método da **inspeção** equivale a encontrar diretamente a relação entre os vetores de derivadas e de saídas com os vetores de entradas e variáveis de estado.

### 4.4.2 Representação de Estados por Superposição

No método da **superposição**, considera-se as variáveis de estado como fontes. Então, calcula-se, por superposição, a contribuição de cada uma das “fontes” para as derivadas das variáveis de estado e as saídas.

### 4.4.3 Representação de Estados por Diagrama de Estados

É possível montar a representação de estados utilizando a **Regra de Mason**. De posse de um diagrama de **estados**, deve-se “abrir” os pontos de integração. Por definição, antes da integração a variável é  $\dot{x}$  e depois ela se torna  $x$ .



Agora, basta aplicar a regra de Mason em cada um dos termos das matrizes A,B,C,D.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} M_{11}\Delta_{11} & M_{12}\Delta_{12} \\ M_{21}\Delta_{21} & M_{22}\Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} M_{11}\Delta_{11} \\ M_{21}\Delta_{21} \end{bmatrix} u$$

$$y = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} M_{11}\Delta_{11} & M_{12}\Delta_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} M_{11}\Delta_{11} \end{bmatrix} u$$

Sendo  $\Delta$  o delta de Mason e  $M_{ij}\Delta_{ij}$  o somatório de todos os caminhos diretos de  $x_j$  ou  $u$  até  $\dot{x}_i$  ou  $y$  (dependendo da matriz em questão) multiplicados pelos  $\Delta$  dos loops que não tocam o respectivo caminho.

#### 4.4.4 Representação de Estados a partir de uma EDOL

A representação de estados é muito útil para reduzir uma equação diferencial de ordem  $n$  para um sistema de  $n$  equações de ordem 1, o que, muitas vezes, possibilita sua solução. No caso de uma equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{y}(t) + p\dot{y}(t) + qy(t) = \tau(t)$$

Pode-se atribuir os estados  $x_1(t) = y(t)$  e  $x_2(t) = \dot{y}(t)$  e reescrever a EDOL de forma que

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) + px_2(t) + qx_1(t) &= \tau(t) \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

Basta, agora, relacionar  $\dot{x}_1 = x_2$  e já é possível montar a representação de estados.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

#### 4.4.5 Resposta de um sistema a partir da Representação de Estados

É possível encontrar a resposta de um sistema usando a representação de estados no domínio do tempo (não abordado neste material) e no domínio da frequência (este método torna as expressões completamente algébricas, elementos diferenciais e integrais, facilitando a resolução, por isso será abordado). Para levar do domínio tempo para o domínio frequência, deve-se aplicar a **Transformada de Laplace** em ambos os lados das equações de estados. Seguindo a convenção que  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , tem-se

$$\begin{aligned} sI\mathbf{X} - \mathbf{x}(0) &= A\mathbf{X} + B\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} &= C\mathbf{X} + D\mathbf{U} \end{aligned}$$

Isolando  $\mathbf{X}$ , resulta em

$$\mathbf{X} = (sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0) + (sI - A)^{-1}B\mathbf{U}$$

Substituindo  $\mathbf{X}$  em  $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ ,

$$\mathbf{Y} = C(sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]\mathbf{U} \quad (4.53)$$

Essa equação relaciona diretamente a saída com a entrada e as condições iniciais. Ou seja, é a **resposta completa** do sistema. Mais especificamente,  $C(sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0)$  é a **resposta à entrada zero** e  $[C(sI - A)^{-1}B + D]\mathbf{U}$  é a **resposta ao estado zero** (também conhecida como **função de transferência do sistema**).