3-Coloreable es NP-completo

Javier Lima García C-412

3-Coloreable NP

Dado G y k, un certificado de que la respuesta es true es simplemente un grafo k-coloreado: uno puede verificar en tiempo polinomial que a lo sumo k-colores fueron utilizados y que ningún par de vertices unidos por una arista recibieron el mismo color.

■

3-Coloreable $\in$ NP-Hard

(Reducción del problema 3-SAT)

Consideremos una instancia arbitraria del problema 3-SAT, con n variables x1, x2, ..., xn, y k cláusulas C1, C2, ..., Ck.

Definamos los vertices vi y !vi correspondientes a cada variable xi y su negación !xi. También definamos tres vértices especiales T, F y B, a los cuales nos referiremos como True, False y Base.

Para empezar, unimos cada par de vertices vi y !vi por una arista, y estos a su vez con el vértice B (formando el triángulo sobre vi, !vi y B). También unimos True, False y Base en un triángulo.

El grafo resultante G posee las siguientes propiedades:

- En cualquier 3-coloreo de G, los nodos vi y !vi deben recibir colores distintos, a su vez distinto de Base.
- En cualquier 3-coloreo de G, los nodos True, False y Base deben recibir los tres colores en algún tipo de permutación. Luego podemos referirnos a estos tres colores como el color True, el color False y el color Base, basados en cual de estos tres vértices recibió cada color. En particular, esto significa que para cada i, vi o !vi recibe el color True, y el otro recibe el color False (para el resto de la construcción, consideraremos a la variable xi con valor 1 en la instancia de 3-SAT si y solo si el vértice vi recibe el color True).

Para modelar las restricciones asociadas a la cláusulas, añadimos por cada una de estas un subgrafo de seis vertices con las siguientes característica (llamemos G' al grafo resultante):

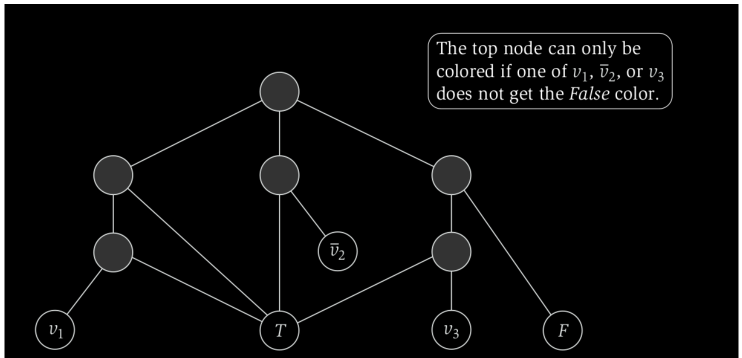

Figure 8.12 Attaching a subgraph to represent the clause $x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$.

Notemos que un 3-coloreo de G en el que ninguno de v1, !v2 o v3 sea asignado el color True implica que el subgrafo no podrá ser tres coloreado. Y al revés, como si uno de v1, !v2 o v3 recibe el color True en un coloreo de G, implica que el subgrafo sí es 3-coloreable.

Notemos que la construcción llevada a cabo puede realizarse en tiempo polinomial, ahora demostremos que la instancia de 3-SAT es satisfacible si y solo si G' es tres coloreable. Primero supongamos que existe una asignación valida para la instancia de 3-SAT. Con esto en mano, definamos un coloreo de G' coloreando primero Base, True y False de manera arbitraria con los tres colores, luego, por cada i, asignamos a vi el color True si xi = 1 y el color False si xi = 0. A cada !vi le asignamos el único color disponible. Finalmente, como discutimos previamente, es posible extender el 3-coloreo a cada uno de los seis nodos de los subgrafos asociados a cláusulas. Por lo tanto, G' es 3-coloreable.

En el otro sentido, supongamos que G' tiene un 3-coloreo. En este coloreo, cada vertice vi recibe el color True o False; asignamos la variable xi de manera correspondiente. Ahora, notemos que en cada cláusula al menos uno de los términos tiene valor 1; porque si no, los tres vertices correspondientes tendrían color False en el 3-coloreo de G´, lo que conduce a que el sugrafo correspondiente a la cláusula no sea 3-coloreable, una contradicción. Luego la instancia de 3-SAT es satisfacible.

■

k-Coloreable es NP-Completo

k-Coloreable $\in$ NP

Utilizando el mismo argumento planteado para el problem 3-Coloreable

k-Coloreable $\in$ NP-Hard

(Reducción del problema 3-Coloreable)

Tomemos una instancia de 3-Coloreable, representada por un grafo G, y le añadimos k-3 nuevos vértices, unidos entre ellos (k-3 clique) y con los vertices de G. El grafo resultante G' es k-coloreable si y solo si G es 3-coloreable.

Supongamos que G es 3-coloreable, el clique que le añadimos no puede tener ninguno de los colores de G porque todos sus vertices están conectados con los de G, además al ser un clique solo puede ser coloreado con k-3 colores distintos a los de G. Por lo tanto, el grafo resultante G' es k-coloreable.

Supongamos que G' es k-coloreable, el clique posee tiene k-3 colores y al estar conectado con todos los vértices de G, es necesario que G sea 3-coloreable porque sino G' no fuera k-coloreable, una contradicción.

■

Número cromático es NP-Hard

Técnicamente los problemas que pertenecen a P, NP, NP-Completo, NP-Hard, etc. son problemas de decisión. El problema del número cromático de un grafo es un problema de optimización, no de decisión. No obstante, podemos resolverlo utilizando el problema de decisión k-coloreable.

Dado que los posibles colores van desde 1 (grafo sin aristas) hasta n (grafo completo) podemos realizar una búsqueda binaria con el número de colores mientras resolvemos el problema "es coloreable para ese k". De esta forma encontraremos el número cromático y la complejidad sería O(log(n) * X) donde X es la complejidad de resolver k-coloreable. Luego si pudiésemos (probablemente no) resolver k-coloreable en tiempo polinomial, resolveríamos número cromático en tiempo polinomial.