# Clique es NP-Completo

Javier Lima García C-412

La versión de decisión del problema Clique es: ¿existe un clique de tamaño $k$? De ahora en adelante nos referiremos a este problema como Clique.

## Clique $\in$ NP

Dado $G$ y $k$, un certificado de que la respuesta es true son los $k$-vertices que conforman el clique: uno puede verificar en tiempo polinomial que existen aristas entre cada par de estos vertices.
■

## Clique $\in$ NP-Hard

(Reducción del problema 3-SAT)

Consideremos una instancia arbitraria del problema 3-SAT, con $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y $k$ cláusulas $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Donde cada cláusula $C_r$ contiene exactamente tres literales distintos: $l_{r1}, l_{r2}, l_{r3}$.

Construiremos el grafo no dirigido $G$ de la siguiente manera: por cada cláusula $C_r = (l_{r1} \vee l_{r2} \vee l_{r3})$, colocaremos los vertices $v_{r1}, v_{r2}$ y $v_{r3}$ y las aristas $(v_{ri}, v_{sj})$ si:

- $v_{ri}$ y $v_{sj}$ están en triplas distintas ($r \neq s$), y
- sus literales correspondientes son consistentes, es decir, $l_{ri}$ no es la negación de $l_{sj}$.

La construcción llevada a cabo puede realizarse en tiempo polinomial, luego demostremos que $G$ tiene un clique de tamaño $k$ si y solo si la instancia de 3-SAT es satisfacible.

Primero, supongamos que la instancia de 3-SAT tiene una asignación válida, entonces al menos un literal $l_{ri}$ tiene valor 1, y cada uno de estos tiene asociado un vértice $v_{ri}$. Notemos que al seleccionar cada uno de esos $v_{ri}$ formamos un subgrafo completo de tamaño $k$ de $G$, $G'$ (un $k$-clique); dado que para cada par de vertices de $G'$, $v_{ri}$ y $v_{sj}$, donde $r \neq s$, existe una arista entre ambos, al tener asociados literales con valor uno que no son complementarios por ser una asignación válida.

En el otro sentido, supongamos que $G$ contiene clique de tamaño $k$, $G'$; entonces no existen aristas entre elementos de la misma tripla, luego $G'$ posee exactamente un vértice por cada tripla. Si $v_{ri} \in G'$, entonces asignémosle 1 a su literal correspondiente $l_{ri}$. Dado que $G$ no contiene aristas entre vértices con literales inconsistentes, ningún literal y su complemento reciben ambos 1. Luego, podemos afirmar que la instancia de 3-SAT es satisfacible.

■