3-Dimensional Matching es NP-Completo

Javier Lima García C-412

3-Dimensional Matching $\in$ NP

Dada una colección de triplas $T \subset X \times Y \times Z$, un certificado de que existe una solución puede ser una colección de triplas $T' \subseteq T$. Es posible comprobar que cada elemento en $X \cup Y \cup Z$ pertenece a exactamente una de las triplas en T', en tiempo polinomial.

■

3-Dimensional Matching $\in$ NP-Hard

(Reducción del problem 3-SAT)

Para realizar la reducción primero diseñaremos gadgets que codifican las decisiones independientes relacionadas con cada variable; a continuación añadiremos gadgets encargados de asegurar las restricciones impuestas por las cláusulas.

Consideremos una instancia arbitraria del problema 3-SAT, con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y k cláusulas $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Un gadget básico asociado a una variable x_i lo definimos de la siguiente manera:

- el conjunto $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i2k}\}$ constituye el núcleo
- el conjunto $B_i = \{b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{i2k}\}$ constituye las puntas.
- para cada $j = 1, 2, \ldots, 2k$ tenemos una tripla $t_{ij} = (a_{ij}, a_{i(j+1)}, b_{ij})$ (aquí interpretamos la adición módulo $2k$). Llamaremos a la tripla par si j es par, e impar si j es impar (de manera análoga nos referiremos a las puntas b_{ij})

Notemos que solo estas triplas contendrán los elementos de A_i, por lo que podemos afirmar que para cubrirlas a todas en un matching perfecto será necesario usar todas las triplas pares o (xor) todas la impares. Esta será la idea básica para representar la noción de que x_i debe tener valor 0 o 1. Si seleccionamos todas las triplas pares, $x_i = 0$ y si seleccionamos todas la triplas impares, $x_i = 1$.

Hasta ahora podemos tomar esta decisión par/impar de manera independiente por cada uno de los n gadgets asociados a variables. A continuación añadiremos elementos para modelar las cláusulas y restringir las asignaciones que se pueden realizar.

Por cada cláusula C_j, creamos un gadget con dos elementos internos $P_j = \{p_j, p'_j\}$, y definimos tres triplas de la siguiente manera. Supongamos que la cláusula C_j contiene un término t. Si $t = x_i$, definimos la tripla (p_j, p'_j, b_{i2j}); si $t = \neg x_i$, definimos la tripla $(p_j, p'_j, b_{i(2j-1)})$. Notemos que solo la cláusula C_j utiliza las puntas b_{im} con $m = 2j$ o $m = 2j - 1$; luego los gadgets asociados a cláusulas no competirán por cada una de las puntas libres.

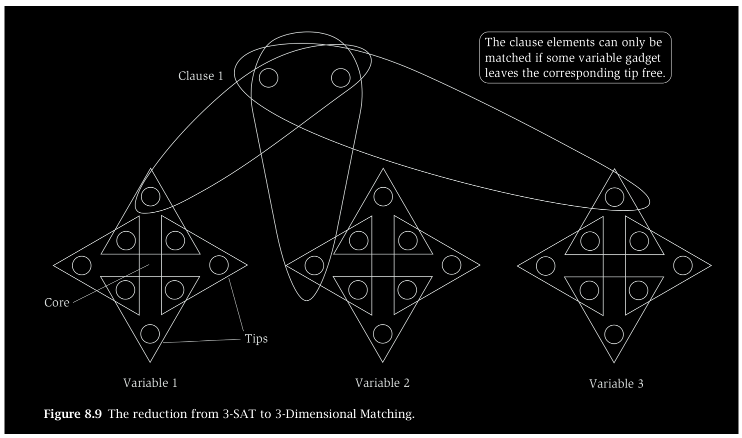

Figure 1: 3-Dimensional Matching Gadgets

Ya casi terminamos con la construcción, pero queda aún un problema. Supongamos que el conjunto de cláusulas tiene una asignación válida, lo cual nos lleva a realizar la selección correspondiente par/impar de gadgets asociados a variables. Esto implica que existe al menos una punta libre por cada gadget asociado a cláusula, así que todos sus elementos internos son cubiertos. El problema por lo tanto es el siguiente: no hemos cubierto todas las puntas. Comenzamos con $2nk$ puntas; las triplas $\{t_{ij}\}$ cubrieron nk de ellas; y los gadgets asociados a cláusulas cubrieron k adicionales. Luego, $(n-1)k$ puntas faltan por cubrir.

Para resolver esta situación añadimos $(n-1)k$ "gadgets de limpieza" a la construcción. El iésimo de estos consiste en dos elementos internos $Q_i = \{q_i, q'_i\}$, y tenemos la tripla (q_i, q'_i, b) por cada punta b de cada gadget asociado a variable. (Notemos que la construcción global llevada a cabo puede realizarse en tiempo polinomial.)

Por lo tanto, si el conjunto de cláusulas tiene una asignación válida, realizamos las correspondientes selecciones par/impar por cada gadget asociado a variable, lo cual conduce a que exista al menos una punta libre por cada gadget asociado a cláusula; de ahí que todos los elementos internos de estos son cubiertos. Utilizando los gadgets de limpieza para cubrir las puntas restantes, notamos como todos los elementos internos de los gadgets asociados a variables, a cláusulas y de limpieza ha sido cubiertos, así como todas las puntas.

En el otro sentido, supongamos que existe un 3-Dimensional Matching perfecto en la instancia que construimos. Entonces, en cada gadget asociado a variable el matching cubre o todas las triplas pares o todas la impares (si $x_i = 0$ o si $x_i = 1$, respectivamente). En el caso de las cláusulas, dado que los dos elementos internos de los gadgets asociados a estas fueron cubiertos, entonces al menos uno de los tres gadgets asociados a variable correspondiente tomó la decisión correcta par/impar, conduciendo a una asignación de variable que satisface la cláusula.

Hasta ahora tenemos una colección de elementos y triplas que contienen algunos de estos. Para concluir la demostración, definamos:

- X el conjunto de todos los a_{ij} con j par, todos los p_j y q_i $(nk+k+(n-1)k = 2nk)$
- Y el conjunto de todos los a_{ij} con j impar, todos los p'_j y q'_i $(nk + k + (n-1)k = 2nk)$
- Z el conjunto de todas las puntas b_{ij} $(2nk)$

Es fácil comprobar que cada tripla está formada por un elemento de X, Y y Z.

■