Introdução à Análise de Algoritmos
2º semestre de 2017 - Turma 04
Lista de exercícios 1

Nas questões envolvendo a elaboração de métodos, a não ser que o enunciado determine exatamente quais e quantos parâmetros um método deve receber, você pode adicionar outros parâmetros à declaração do mesmo, além daqueles definidos pelo enunciado.

1. Usando as definições das notações assintótica Θ, O e Ω, mostre que:

   a) $1000n^2 = O(n^2)$
   b) $5n^3 + 1000n^2 = O(n^4)$
   c) $\frac{n^2}{1000} = \Omega(n^2)$
   d) $n^4 - 25n^2 = \Omega(n^3)$
   e) $2^{16}n^2 \neq \Omega(n^3)$
   f) $n^3 - 10n^2 \neq O(n^2)$
   g) $4n^3 - 300n^2 + 7000n = \Theta(n^3)$
   h) $n^2 + nlgn = \Theta(n^2)$

2. Escreva um método iterativo que recebe um vetor **a** de valores inteiros e um valor **x**, e determina todos os pares (i, j) de índices tais que $a[i] + a[j] = x$.

3. Escreva um método iterativo que recebe duas matrizes **A** (de dimensão $n \times m$) e **B** (de dimensão $m \times p$) de valores inteiros, e devolve o produto de **A** por **B**.

4. Escreva um método recursivo que recebe um valor inteiro n e devolve seu fatorial.

5. Escreva um método recursivo que calcula o termo a_i de uma progressão aritmética de termo inicial a_0 e razão r (obs: o método a ser implementado não será a forma mais eficiente de determinar o valor do termo a_i, mas a ideia aqui é exercitar o "pensamento recursivo").

6. Escreva um método recursivo que recebe dois valores inteiros c e n, e devolve o valor de c^n (obs: sem utilizar qualquer método da classe **Math**).

7. Escreva uma versão iterativa e pelo menos duas recursivas (variando a forma de dividir o problema original em subproblemas) de métodos para, dado um vetor **a** de valores inteiros, resolver os seguintes problemas:

   a) determinar a soma dos valores contidos em **a**.

b) determinar o valor mínimo contido em **a**.

c) determinar se um valor x está presente em **a**.

d) determinar o número de ocorrências de valores menores ou iguais a x em **a**.

e) determinar se todos os elementos de **a** são iguais.

e) imprimir os elementos de **a** na ordem $a[0], a[1], ..., a[n-1]$.

f) imprimir os elementos de **a** na ordem $a[n-1], a[n-2], ..., a[0]$.

8. Para cada um dos métodos recursivos implementados nos exercícios 4, 5, 6 e 7, determine a profundidade de recursão máxima que cada um atinge. O que esta profundidade nos diz sobre o consumo de memória dos métodos?

9. Para cada um dos métodos implementados nos exercícios 2, 3, 4, 5, 6 e 7 identifique qual o parâmetro (ou conjunto de parâmetros) que determina o "tamanho da entrada" (ou seja, está associado ao volume de trabalho que o algoritmo deve executar). Em seguida faça a análise de cada método, determinando a complexidade assintótica em relação ao tempo de execução.

10. Resolva as seguintes recorrências (assuma, para o item (d), que n é uma potência de 4, e para os itens (e) e (f), que n é uma potência de 2):

a)

$$T(n) = \begin{cases} a, & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + b, & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{1}$$

b)

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ k, & \text{se } n = 1 \\ T(n-2) + k, & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{2}$$

c)

$$T(n) = \begin{cases} 100, & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + 3n, & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{3}$$

d)

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 4T(\frac{n}{4}) + n, & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{4}$$

e)

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + n^3, & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{5}$$

f)

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ T(\frac{n}{2}) + n, & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{6}$$