

Números naturales

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Determina el valor de la cifra 3 en estos números.

- | | | |
|--------------|------------------------|---------|
| a) 1256003 | b) 237215 | c) 4231 |
| a) 1 256 003 | 3 U = 3 unidades | |
| b) 237 215 | 3 DM = 30 000 unidades | |
| c) 4 231 | 3 D = 30 unidades | |

2. Resuelve las siguientes operaciones.

- a) $87 - 13 + 42 - 4 + 98$
 b) $34 - 23 + 11 - (8 - 6) + 21$
 c) $27 + 34 + 6 - 41 - 5 - 17$
 d) $(26 - 14) + 45 - (27 - 9) + 14$
 e) $18 + [(26 - 14) - 5] + 26 - (26 - 19 + 12) - 9$

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & 87 - 13 + 42 - 4 + 98 = 74 + 42 - 4 + 98 = 116 - 4 + 98 = 112 + 98 = 210 \\
 \text{b)} & 34 - 23 + 11 - (8 - 6) + 21 = 11 + 11 - 2 + 21 = 22 - 2 + 21 = 20 + 21 = 41 \\
 \text{c)} & 27 + 34 + 6 - 41 - 5 - 17 = 61 + 6 - 41 - 5 - 17 = 67 - 41 - 5 - 17 = 26 - 5 - 17 = 21 - 17 = 4 \\
 \text{d)} & (26 - 14) + 45 - (27 - 9) + 14 = 12 + 45 - 18 + 14 = 57 - 18 + 14 = 39 + 14 = 53 \\
 \text{e)} & 18 + [(26 - 14) - 5] + 26 - (26 - 19 + 12) - 9 = 18 + (12 - 5) + 26 - (7 + 12) - 9 = \\
 & = 18 + 7 + 26 - 19 - 9 = 25 + 26 - 19 - 9 = \\
 & = 51 - 19 - 9 = 32 - 9 = 23
 \end{aligned}$$

VIDA COTIDIANA

Hace más de 150 años que se inventó el teléfono y solo hay una cosa que no ha cambiado desde su origen: cada línea telefónica tiene un número asociado.

Las líneas de la red fija tienen nueve dígitos y los primeros indican a qué provincia pertenecen.

• Si el 925 indica que el teléfono es de Toledo, ¿cuántas líneas puede haber en esta provincia?

Se trata de los números diferentes que pueden formarse con 6 cifras, es decir, puede haber 1 000 000 de líneas diferentes que empezarán por 925.

RESUELVE EL RETO

Por qué razón Bart Simpson dice:

¡MULTIPLÍCATE POR CERO!

Cualquier número multiplicado por cero da como resultado cero, por esta razón la frase que dice Bart Simpson equivaldría a decir ¡DESAPARECE DE MI VISTA!, ¡NO QUIERO VERTE!, o cualquier otra similar.

¿Cuál sería la descomposición polinómica de MCXLIII?

$$\text{MCXLIII} = 1\ 143 = 1 \cdot 1\ 000 + 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3 = 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3$$

Números naturales

¿Cuál es el número más grande que se puede escribir con tres cifras?

El número más grande que se puede escribir con tres cifras es $9^{(9^9)}$

¿Se puede formar un cuadrado con 42 monedas? ¿Y con 49?



Se puede formar un cuadrado con 49 monedas colocándolas en 7 filas de 7 monedas cada una porque $49 = 7^2$, pero no se puede formar un cuadrado con 42 monedas porque 42 no es un cuadrado perfecto.

ACTIVIDADES

1. Descompón en órdenes de unidades.

- a) 342531 b) 7100203 c) 7345000
- a) $342\,531 = 3 \text{ CM} + 4 \text{ DM} + 2 \text{ UM} + 5 \text{ C} + 3 \text{ D} + 1 \text{ U}$
b) $7\,100\,203 = 7 \text{ U. de millón} + 1 \text{ CM} + 2 \text{ C} + 3 \text{ U}$
c) $7\,345\,000 = 7 \text{ U. de millón} + 3 \text{ CM} + 4 \text{ DM} + 5 \text{ UM}$

2. Escribe estos números romanos en el sistema de numeración decimal.

- a) XXII c) DCLXIII e) XXIX g) CMX
b) CXVI d) IV f) XCII h) XLIX
- a) $\text{XXII} = 22$ c) $\text{DCLXIII} = 663$ e) $\text{XXIX} = 29$ g) $\text{CMX} = 910$
b) $\text{CXVI} = 116$ d) $\text{IV} = 4$ f) $\text{XCII} = 92$ h) $\text{XLIX} = 49$

3. Escribe cinco números que tengan 9 decenas de millar, 4 unidades de millar, 1 centena, 6 decenas y 7 unidades.

Respuesta abierta. Por ejemplo: 94 167, 194 167, 294 167, 394 167 y 494 167.

4. Escribe como números romanos.

- a) 11 c) 74 e) 115 g) 987
b) 22 d) 93 f) 646 h) 1899
- a) XI c) LXXIV e) CXV g) CMLXXXVII
b) XXII d) XCIII f) DCXLVI h) MDCCXCIX

5. Trunca y redondea estos números a las centenas y a las decenas.

- a) 3729 b) 653497 c) 25465 d) 1324532

a) 3729

Truncamiento

Decenas: 3720

Centenas: 3700

Redondeo

Decenas: 3729 $\xrightarrow{9 > 5}$ 2 + 1 = 3 → 3730

Centenas: 3729 $\xrightarrow{2 < 5}$ 7 + 0 = 7 → 3700

b) 653497

Truncamiento

Decenas: 653490

Centenas: 653400

Redondeo

Decenas: 653497 $\xrightarrow{7 > 5}$ 9 + 1 = 10 → 653500

Centenas: 653497 $\xrightarrow{9 > 5}$ 4 + 1 = 5 → 653500

c) 25465

Truncamiento

Decenas: 25460

Centenas: 25400

Redondeo

Decenas: 25465 $\xrightarrow{5 > 5}$ 6 + 1 = 7 → 25470

Centenas: 25465 $\xrightarrow{6 > 5}$ 4 + 1 = 5 → 25500

d) 1324532

Truncamiento

Decenas: 1324530

Centenas: 1324500

Redondeo

Decenas: 1324532 $\xrightarrow{2 < 5}$ 3 + 0 = 3 → 1324530

Centenas: 1324532 $\xrightarrow{3 < 5}$ 5 + 0 = 5 → 1324500

6. Di si es truncamiento o redondeo.

- a) 3256 → 3200 c) 18462 → 18000 b) 497 → 500 d) 986492 → 986500

a) 3256 → 3200

Es un truncamiento a las centenas, si fuese redondeo, como $5 \geq 5$ sería 3300.

b) 497 → 500

Es un redondeo, bien puede ser a las decenas y como $7 > 5$, al sumar a $9 + 1$, tenemos 10 y se redondearía a 500. O bien, es un redondeo a las centenas y como $9 > 5$, sumamos $4 + 1$ y obtenemos 500.

c) 18462 → 18000

Puede ser truncamiento o redondeo a las unidades de millar, porque en este caso como $4 < 5$, el truncamiento y el redondeo darían el mismo resultado.

d) 986492 → 986500

Es un redondeo a las centenas, como $9 > 5$, se hace $4 + 1$ y se obtiene 986500.

7. Escribe todos los números cuya aproximación sea 25560 al realizar:

- a) Un redondeo a las decenas.
b) Un truncamiento a las decenas.

¿Cuál crees que es mejor aproximación, la que se hace por redondeo o la que se hace por truncamiento?

- a) 25555, 25556, 25557, 25558, 25559, 25560, 25561, 25562, 25563, 25564

- b) 25560, 25561, 25562, 25563, 25564, 25565, 25566, 25567, 25568, 25569

El redondeo es igual o mejor que la aproximación por truncamiento.

Números naturales

8. Completa en tu cuaderno e indica las propiedades que se aplican en cada igualdad.

a) $14 + 35 = \square + 14$ b) $7 \cdot (\square \cdot 5) = (\square \cdot 4) \cdot 5$

a) $14 + 35 = 35 + 14$

Propiedad conmutativa de la suma.

b) $7 \cdot (4 \cdot 5) = (7 \cdot 4) \cdot 5$

Propiedad asociativa de la multiplicación.

9. Calcula el dividendo de una división en la que el divisor es 14, el cociente es 23 y el resto 2.

Dividendo = Divisor · Cociente + Resto

Dividendo = 14 · 23 + 2 = 322 + 2 = 324

10. Da valores a d hasta que calcules el divisor de estas divisiones.

a) $34 \overline{)d}$
0 17

b) $89 \overline{)d}$
1 22

c) $102 \overline{)d}$
2 20

Para ello, ayúdate de la prueba de la división.

a) $34 = 17 \cdot 2 + 0 \rightarrow d = 2$

b) $89 = 22 \cdot 4 + 1 \rightarrow d = 4$

c) $102 = 20 \cdot 5 + 2 \rightarrow d = 5$

11. Expresa en forma de potencia indicando la base y el exponente.

a) Cuatro al cubo c) Dos a la octava

b) Tres a la sexta d) Seis a la quinta

a) Cuatro al cubo = 4^3

Base: 4 Exponente: 3

c) Dos a la octava = 2^8

Base: 2 Exponente: 8

b) Tres a la sexta = 3^6

Base: 3 Exponente: 6

d) Seis a la quinta = 6^5

Base: 6 Exponente: 5

12. Calcula. a) 2^4 b) 3^3 c) 5^4 d) 7^2 e) 4^4 f) 2^{10}

a) 16 b) 27 c) 625 d) 49 e) 556 f) 1024

13. Escribe como potencia y calcula su resultado.

a) $10 \cdot 10 \cdot 10$ b) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

a) $10^3 = 1000$ b) $6^5 = 7776$

14. Escribe, si se puede, como potencia.

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ d) $5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$

b) $5 \cdot 5 \cdot 4$ e) $1 \cdot 4 \cdot 4$

c) $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$ f) $9 \cdot 9$

a) 7^4 b) $5^2 \cdot 4$ c) 11^4 d) $5^2 \cdot 3^2$ e) $1 \cdot 4^2$ f) $9^2 = 3$

15. Expresa en forma de potencia y calcula su valor.

- a) $10 \cdot 10 \cdot 10$
- b) $10 \cdot 10 \cdot 10$
- a) $10^3 = 1000$
- b) $10^8 = 100\,000\,000$

16. Obtén la descomposición polinómica.

- a) 7854
- b) 11111
- c) 123456

- a) $7854 = 7 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 4 = 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$
- b) $11111 = 10000 + 1000 + 100 + 10 + 1 = 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 1$
- c) $123\,456 = 100\,000 + 2 \cdot 10\,000 + 3 \cdot 1\,000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 = 1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6$

17. ¿Son correctas las descomposiciones?

- a) $10^4 + 7 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^2 + 2$
- b) $10^5 + 6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^5$

a) $10^4 + 7 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^2 + 2 = 10\,000 + 7\,000 - 400 + 800 + 2 = 17\,402$

La descomposición polinómica de 17 402 es la suma de los productos que consisten en multiplicar sus cifras por la potencia de base 10 correspondiente a su orden, es decir, en este caso sería:

$$10^4 + 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2$$

Por tanto, la indicada en el enunciado no es una descomposición correcta.

b) $10^5 + 6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^5 = 100\,000 + 6\,000 + 500 + 900 + 200\,000 = 307\,400$

La descomposición polinómica de 307 400 es la suma de los productos que consisten en multiplicar sus cifras por la potencia de base 10 correspondiente a su orden, es decir, en este caso sería:

$$3 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2$$

Por tanto, la indicada en el enunciado no es una descomposición correcta.

18. Completa en tu cuaderno.

- a) $(2 \cdot \square)^{\square} = 10000$
- b) $(2 + 5 + \square)^{\square} = 1000$
- a) $(2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$
- b) $(2 + 5 + 3)^3 = 10^3 = 1\,000$

19. Resuelve estas operaciones y escribe el resultado con una sola potencia.

- a) $2^7 \cdot 2^4$
- d) $5^6 : 5$
- b) $3^5 : 3^2$
- e) $4^6 \cdot 4^4$
- c) $10^4 \cdot 10$
- f) $7^3 : 7$

a) $2^7 \cdot 2^4 = 2^{7+4} = 2^{11} = 2048$

d) $5^6 : 5 = 5^{6-1} = 5^5 = 3\,125$

b) $3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3 = 27$

e) $4^6 \cdot 4^4 = 4^{6+4} = 4^{10} = 1\,048\,576$

c) $10^4 \cdot 10 = 10^{4+1} = 10^5 = 100\,000$

f) $7^3 : 7 = 7^{3-1} = 7^2 = 49$

20. ¿Cuántos bolígrafos hay en 36 estuches con 6 bolígrafos en cada uno? Escríbelo en forma de potencia.

36 estuches = 6^2 estuches, y en cada estuche hay 6 bolígrafos. Luego, habrá en total $6^2 \cdot 6 = 6^3 = 216$ bolígrafos.

Números naturales

21. Completa en tu cuaderno.

a) $8^3 \cdot 8^{\square} = 8^7$ b) $8^6 : 8^{\square} = 8$
a) $8^3 \cdot 8^4 = 8^7$ b) $8^6 : 8^5 = 8$

22. Escribe como una sola potencia.

a) $(2^2)^3$ d) $(7^4)^4$
b) $(3^4)^5$ e) $(9^2)^4$
c) $(5^3)^2$ f) $(10^{10})^5$
a) $2^{2 \cdot 3} = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$ c) $5^{3 \cdot 3} = 5^{3 \cdot 3} = 5^9$ e) $9^{2 \cdot 4} = 9^{2 \cdot 4} = 9^8$
b) $3^{4 \cdot 5} = 3^{4 \cdot 5} = 3^{20}$ d) $7^{6 \cdot 4} = 7^{6 \cdot 4} = 7^{24}$ f) $10^{10 \cdot 5} = 10^{10 \cdot 5} = 10^{50}$

23. Expresa como una sola potencia.

a) $(8 \cdot 5)^2 \cdot (8 \cdot 5)^7$
b) $(5 \cdot 3)^8 : (5 \cdot 3)^4$
c) $(9 : 2)^6 \cdot (9 : 2)^3$
d) $(15 : 4)^9 : (15 : 4)^6$
a) $8 \cdot 5^2 \cdot 8 \cdot 5^7 = 8 \cdot 5^9 = 40^9$ c) $9 : 2^6 \cdot 9 : 2^3 = 9 : 2^9 = \left| \frac{9}{2} \right|^9$
b) $5 \cdot 3^8 : 5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 3^4 = 15^4$ d) $15 : 4^9 : 15 : 4^6 = 15 : 4^3 = \left| \frac{15}{4} \right|^3$

24. Completa en tu cuaderno.

a) $18^5 : \square^5 = 6^{\square}$ c) $5^3 \cdot \square^3 = 20^{\square}$
b) $\square^6 \cdot 5^6 = 15^{\square}$ d) $\square^2 : 4^2 = 4^2$
a) $18^5 : 3^5 = 6^5$ b) $3^6 \cdot 5^6 = 15^6$ c) $5^3 \cdot 4^3 = 20^3$ d) $16^2 : 4^2 = 4^2$

25. Completa en tu cuaderno.

a) $(2^4)^3 \cdot (3^3)^{\square} = \square^6$
b) $3^4 \cdot \square^4 : 27^4 = 1$
c) $125^3 : 25^3 \cdot \square^{\square} = 5^6$
a) $2^{4 \cdot 3} \cdot 3^{3 \cdot 2} = 2^{2 \cdot 6} \cdot 3^6 = 12^6$ b) $3^4 \cdot 9^4 : 27^4 = 1$ c) $125^3 : 25^3 \cdot 5^3 = 5^6$

26. Expresa, si se puede, con una sola potencia.

a) $8^5 : 4^5$ c) $14^6 \cdot 2^3$ e) $18^7 : 3^6$
b) $7^4 \cdot 7^3$ d) $21^4 \cdot 2^4$ f) $123^{11} : 123^6$
a) $8^5 : 4^5 = 8 : 4^5 = 2^5$ d) $21^4 \cdot 2^4 = (21 \cdot 2)^4 = 42^4$
b) $7^4 \cdot 7^3 = 7^{4+3} = 7^7$ e) $18^3 : 3^6 = 2 \cdot 3^{2 \cdot 3} : 3^6 = 2^3 \cdot 3^6 : 3^6 = 2^3$
c) No se puede expresar como una sola potencia. f) $123^{11} : 123^6 = 123^5$

27. Expresa con una sola potencia, si se puede, y calcula.

a) $8^2 : 2^2$

c) $7^4 \cdot 5^4$

e) $4^3 \cdot 7^3$

g) $15^6 \cdot 2^6$

b) $9^5 : 3^5$

d) $10^6 : 5^6$

f) $12^2 : 4^2$

h) $5^7 \cdot 7^7$

a) $8^2 : 2^2 = 2^{3^2} : 2^2 = 2^6 : 2^2 = 2^4$

e) $4^3 \cdot 7^3 = 28^3$

b) $9^5 : 3^5 = 3^{2^5} : 3^5 = 3^{10} : 3^5 = 3^5$

f) $12^2 : 4^2 = 3 \cdot 4^2 : 4^2 = 3^2 \cdot 4^2 : 4^2 = 3^2$

c) $7^4 \cdot 5^4 = 35^4$

g) $15^6 \cdot 2^6 = 15 \cdot 2^6 = 30^6$

d) $10^8 : 5^8 = 2 \cdot 5^8 : 5^8 = 2^8 \cdot 5^8 : 5^8 = 2^8$

h) $5^7 \cdot 7^7 = 5 \cdot 7^7 = 35^7$

28. Expresa con una sola potencia.

a) $(4^5 \cdot 4^3) \cdot (4^4 \cdot 4^2)$

c) $(7^8 : 7^2) \cdot (7^4 : 7^3)$

b) $(5^2 \cdot 5^4) : (5^3 \cdot 5)$

d) $(3^9 : 3) : (3^5 : 3^3)$

a) $4^5 \cdot 4^3 + 4^4 \cdot 4^2 = 4^{5+3+4+2} = 4^{14}$

b) $5^2 \cdot 5^4 : 5^3 \cdot 5 = 5^{2+4-3+1} = 5^2$

c) $7^8 : 7^2 + 7^4 : 7^3 = 7^{8-2+4-3} = 7^7$

d) $3^9 : 3 + 3^5 : 3^3 = 3^{9-1-5-3} = 3^6$

29. Escribe el resultado en forma de potencia.

a) $(2^3)^4 \cdot 2^5$

d) $(6^4)^5 : (6^{10})^0$

b) $3^5 \cdot (3^2)^4$

e) $4^8 : (4^3)^2$

c) $(7^5)^2 \cdot (7^3)^4$

f) $(3^5)^2 : (3^2)^4$

a) $2^{3^4} \cdot 2^5 = 2^{3 \cdot 4 + 5} = 2^{17}$

d) $6^{4^5} : 6^{10^0} = 6^{4^5} : 6^0 = 6^{4^5} : 1 = 6^{20}$

b) $3^5 \cdot 3^{2^4} = 3^{5+2 \cdot 4} = 3^{13}$

e) $4^8 : 4^{3^2} = 4^8 : 4^6 = 4^{8-6} = 4^2$

c) $7^{4^2} \cdot 7^{3^4} = 7^{4 \cdot 2 + 3 \cdot 4} = 7^{20}$

f) $3^{5^2} : 3^{2^4} = 3^{10} : 3^8 = 3^{10-8} = 3^2$

30. Calcula el resultado indicando la base y el exponente.

a) $(3^5)^3 : (6^3 \cdot 6^2)$

b) $(3^5 : 3^2) \cdot 3^4 \cdot (3^3)^2$

c) $(7^4)^3 : (7 \cdot 7^3)$

a) $3^{5^2} : 6^3 \cdot 6^2 = 3^{10} : 6^5 = 3^{10} : 2 \cdot 3^5 = \frac{3^5}{2^5} = \left| \frac{3^5}{2^5} \right|^5$

Base → $\frac{3}{2}$ Exponente → 5

b) $3^{5^2} \cdot 3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^{3^2} = 3^{13} \cdot 3^4 \cdot 3^6 = 3^{13}$

Base → 3 Exponente → 13

c) $7^{4^3} : 7 \cdot 7^3 = 7^{12} : 7^4 = 7^{12-4} = 7^8$

Base → 7 Exponente → 8

Números naturales

31. Expresa como una sola potencia y calcula.

- a) $3^2 \cdot (18:6)^4$
- b) $(14:7)^4 : (18:9)^3$
- c) $(8^3:2^3) \cdot (2^4 \cdot 2) : 2^5$
- d) $(3^3 \cdot 3^2) : (18^4:6^4)$

a) $3^2 \cdot 18:6^4 = 3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$

c) $8^3:2^3 \cdot 2^4 \cdot 2 : 2^5 = 4^3 \cdot 2^5 : 2^5 = 4^3$

b) $14:7^4 : 18:9^3 = 2^4 : 2^3 = 2^{4-3} = 2$

d) $3^3 \cdot 3^2 : 18^4:6^4 = 3^5 : 18:6^4 = 3^5:3^4 = 3$

32. Calcula estas raíces cuadradas exactas.

- a) $\sqrt{121}$
- b) $\sqrt{144}$
- c) $\sqrt{10\,000}$
- d) $\sqrt{14\,400}$

a) $\sqrt{121} = 11$

b) $\sqrt{144} = 12$

c) $\sqrt{10\,000} = 100$

d) $\sqrt{14\,400} = 120$

33. Halla el valor de a en estas raíces cuadradas no exactas.

- a) $\sqrt{a} \approx 5$ y el resto es 7.
 - b) $\sqrt{a} \approx 7$ y el resto es 3.
 - c) $\sqrt{a} \approx 8$ y el resto es 5.
- a) $a = 5^2 - 7 = 32$
- b) $a = 7^2 - 3 = 52$
- c) $a = 8^2 - 5 = 69$

34. ¿De qué número es raíz cuadrada el número 15?

De 225, $\sqrt{225} = 15$, porque $15^2 = 225$.

35. ¿Cuánto mide de lado un cuadrado cuya área es 196 cm²?

No, porque $42 = 6^2 - 6$ no es una raíz cuadrada exacta.

36. ¿Existe algún cuadrado perfecto que acabe en 2? ¿Y en 3? ¿Y en 7?

No existe ningún cuadrado perfecto que acabe en 2, 3 o 7, porque siempre que se multiplica un número por sí mismo, para saber en qué número acaba solo se tiene que multiplicar la última cifra por sí misma, y no hay ningún número de 1 cifra que al multiplicarlo por sí mismo acabe en 2, 3 o 7.

37. ¿Existe algún número cuya raíz entera sea 6? ¿Cuántos números cumplen esta condición?

Como $6^2 = 36$ y $7^2 = 49$, todos los números que estén entre ambos, con el 36 incluido, tendrán por raíz entera el 6. Es decir, lo cumplen el 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47 y 48.

38. Calcula la raíz cuadrada entera y el resto de estos números.

- a) 125
- c) 243
- e) 160
- b) 96
- d) 72
- f) 355

a) $125 = 11^2 + 4$

c) $243 = 15^2 - 18$

e) $160 = 12^2 + 16$

b) $96 = 9^2 - 15$

d) $72 = 8^2 - 8$

f) $355 = 18^2 - 31$

39. Completa en tu cuaderno.

a) $\sqrt{85} = \sqrt{\square^2 + \square}$

d) $\sqrt{138} = \sqrt{\square^2 + \square}$

b) $\sqrt{77} = \sqrt{\square^2 + \square}$

e) $\sqrt{154} = \sqrt{\square^2 + \square}$

c) $\sqrt{93} = \sqrt{\square^2 + \square}$

f) $\sqrt{2347} = \sqrt{\square^2 + \square}$

a) $\sqrt{85} = \sqrt{9^2 + 4}$

c) $\sqrt{93} = \sqrt{9^2 + 12}$

e) $\sqrt{154} = \sqrt{12^2 - 10}$

b) $\sqrt{77} = \sqrt{8^2 + 13}$

d) $\sqrt{138} = \sqrt{11^2 - 17}$

f) $\sqrt{2347} = \sqrt{48^2 - 43}$

40. Halla el radicando y escríbelo en tu cuaderno.

a) $\sqrt{\square} \approx 6$ y resto 8

c) $\sqrt{\square} \approx 8$ y resto 6

b) $\sqrt{\square} \approx 9$ y resto 9

d) $\sqrt{\square} \approx 13$ y resto 15

e) $\sqrt{\square} \approx 30$ y resto 26

a) $\sqrt{44} \approx 6$ y resto 8

c) $\sqrt{70} \approx 8$ y resto 6

e) $\sqrt{926} \approx 30$ y resto 26

b) $\sqrt{90} \approx 9$ y resto 9

d) $\sqrt{184} \approx 13$ y resto 15

41. Luis ha calculado $\sqrt{292}$ y afirma que el resto es 36. ¿Ha realizado correctamente los cálculos?

Se ha equivocado, porque lo ha descompuesto como $292 = 16^2 + 36$, pero en realidad se descompone como $292 = 17^2 - 3$, lo que implica $\sqrt{292} \approx 17$ y resto 3.

42. Entre todas estas raíces hay una que tiene distinto resto que las demás. ¿Cuál es?

a) $\sqrt{52}$

d) $\sqrt{403}$

b) $\sqrt{124}$

e) $\sqrt{173}$

c) $\sqrt{228}$

f) $\sqrt{199}$

Todas las raíces tienen resto 3, salvo la de 173. Tenemos que: $52 = 7^2 + 3$, $124 = 11^2 + 3$, $228 = 15^2 + 3$, $403 = 20^2 + 3$ y $199 = 14^2 + 3$. Y que: $173 = 13^2 + 4$.

43. ¿Cuál es el número de monedas que hay en el lado de un cuadrado formado por las siguientes monedas?

- a) 64 b) 121 c) 144 d) 324

a) $64 = 8^2 \rightarrow$ 8 monedas en el lado del cuadrado.

b) $121 = 11^2 \rightarrow$ 11 monedas en el lado del cuadrado.

c) $144 = 12^2 \rightarrow$ 12 monedas en el lado del cuadrado.

d) $324 = 18^2 \rightarrow$ 18 monedas en el lado del cuadrado.

44. Encuentra un número natural comprendido entre 100 y 121, cuya raíz cuadrada entera tenga por resto:

- a) 8 b) 10 c) 12 d) 15

¿Cuál es el mayor resto que se puede tener en este caso?

La raíz de 100 es 10 y la de 121 es 11, de modo que:

a) $108 = 10^2 + 8$ b) $110 = 10^2 + 10$ c) $112 = 10^2 + 12$ d) $115 = 10^2 + 15$

En este caso, el mayor resto puede ser 20, en el número 120, porque ya el siguiente es $121 = 11^2$, con resto 0.

Números naturales

45. Escribe todos los números que tengan como raíz entera 5. ¿Cuántos números hay? ¿Cuántos números tendrán como raíz entera 6? ¿Y 7?

Tienen como raíz entera 5 todos los números comprendidos entre 25 y 36.

Tienen como raíz entera 6 todos los números comprendidos entre 36 y 49.

Tienen como raíz entera 7 todos los números comprendidos entre 49 y 64

46. Calcula.

a) $9 : 3 + 5 \cdot 7$ d) $12 \cdot 8 - 5 \cdot 10$

b) $7 + 8 \cdot 6 - 19$ e) $7 \cdot 9 + 4 + 6 : 3$

c) $35 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5$ f) $26 + 9 : 3 - 4 \cdot 5$

a) $3 + 35 = 38$ d) $96 - 50 = 46$

b) $7 + 48 - 19 = 55 - 19 = 36$ e) $63 + 4 + 2 = 69$

c) $35 - 8 - 15 = 27 - 15 = 12$ f) $26 + 3 - 20 = 29 - 20 = 9$

47. Resuelve estas operaciones.

a) $17 + (4 \cdot 2 - 7) \cdot 3$

b) $(22 - 5 \cdot 3) \cdot 2$

c) $(4 + 4 \cdot 5) \cdot 5 - 4$

d) $(29 - 3 \cdot 5) : 7 + 5$

e) $7 \cdot 4 - 12 + 3 \cdot 6 - 2$

f) $(11 - 7) \cdot 4 + 2 \cdot (8 + 2)$

g) $3 \cdot (14 + 12 - 20) : 9 + 2$

a) $17 + 1 \cdot 3 = 20$ e) $28 - 12 + 18 - 2 = 16 + 16 = 32$

b) $(22 - 15) \cdot 2 = 7 \cdot 2 = 14$ f) $4 \cdot 4 + 2 \cdot 10 = 16 + 20 = 36$

c) $24 \cdot 5 - 4 = 120 - 4 = 116$ g) $3 \cdot 6 : 9 + 2 = 2 + 2 = 4$

d) $14 : 7 + 5 = 2 + 5 = 7$

48. Calcula el valor de estas expresiones.

a) $3 \cdot (100 - 90) + 12 \cdot (5 + 2)$

b) $7 \cdot (26 : 2) - (6 : 3) \cdot 6 + 4$

c) $66 : (15 - 9) + 7 \cdot (6 : 2) - 12 : 2$

d) $7 \cdot (4 + 8 - 5) : (12 - 5) + 7 \cdot (8 - 6 + 1)$

e) $8 \cdot (28 - 14 : 7 \cdot 4) : (22 + 5 \cdot 5 - 31)$

f) $[200 - 3 \cdot (12 : 4 - 3)] - 6 + 37 - 35 : 7$

a) $3 \cdot 10 + 12 \cdot 7 = 30 + 84 = 114$

b) $7 \cdot 13 - 2 \cdot 6 + 4 = 91 - 12 + 4 = 83$

c) $66 : 6 + 7 \cdot 3 - 6 = 11 + 21 - 6 = 26$

d) $7 \cdot 7 : 7 + 7 \cdot 3 = 49 : 7 + 21 = 7 + 21 = 28$

e) $8 \cdot (28 - 2 \cdot 4) : (22 + 25 - 31) = 8 \cdot (28 - 8) : 16 = 8 \cdot 20 : 16 = 160 : 16 = 10$

f) $[200 - 3 \cdot (3 - 3)] - 6 + 37 - 5 = [200 - 3 \cdot 0] - 6 + 37 - 5 = 200 - 6 + 37 - 5 = 226$

49. Realiza estas operaciones.

$$3 \cdot 4 - 2 + 12 : 6 - 4 - 8$$

$$3 \cdot (4 - 2) + 12 : (6 - 4) - 8$$

¿Por qué no obtienes el mismo resultado si los números y los signos de las dos operaciones son los mismos?

$$3 \cdot 4 - 2 + 12 : 6 - 4 - 8 = 12 - 2 + 2 - 4 - 8 = 10 + 2 - 4 - 8 = 12 - 4 - 8 = 8 - 8 = 0$$

$$3 \cdot (4 - 2) + 12 : (6 - 4) - 8 = 3 \cdot 2 + 12 : 2 - 8 = 6 + 6 - 8 = 12 - 8 = 4$$

No se obtiene el mismo resultado porque cambia el orden de realización de las operaciones al haber paréntesis, influyendo en el resultado final.

50. Halla el resultado de estas operaciones.

a) $4 \cdot 9 - 2^3 \cdot 3$

d) $8 - (2^4 - 3 \cdot 4) \cdot 2$

b) $5 \cdot (6 + 2^3) - 3^3$

e) $13 + 6 : (2^2 - 2) \cdot 3^2$

c) $25 : (6^2 - 11) + 18$

f) $(2^2 \cdot 7 - 3) \cdot 4$

a) $36 - 24 = 12$

d) $8 - 4 \cdot 2 = 8 - 8 = 0$

b) $5 \cdot 10 - 27 = 50 - 27 = 23$

e) $13 + 3 \cdot 9 = 13 + 27 = 40$

c) $25 : 25 + 18 = 1 + 18 = 19$

f) $25 \cdot 4 = 100$

51. Calcula.

a) $(15 - 3^2) \cdot 2^3 + \sqrt{9} : 3$

c) $(4^3 - \sqrt{169}) : (2^4 + 1)$

b) $(\sqrt{25} + \sqrt{36} - 3^2) \cdot \sqrt{4} + 8$

d) $\sqrt{16} + \sqrt{25} : (2^3 - 3)$

a) $6 \cdot 8 + 3 : 3 = 48 + 1 = 49$

c) $(64 - 13) : 17 = 51 : 17 = 3$

b) $2 \cdot 2 + 8 = 4 + 8 = 12$

d) $4 + 5 : 5 = 4 + 1 = 5$

52. Resuelve estas operaciones. ¿Por qué obtienes resultados distintos?

a) $8 \cdot \sqrt{144} : 2^2 - 2$

c) $8 \cdot (\sqrt{144} : 2^2) - 2$

b) $8 \cdot \sqrt{144} : (2^2 - 2)$

d) $8 \cdot (\sqrt{144} : 2^2 - 2)$

a) $8 \cdot 12 : 4 - 2 = 24 - 2 = 22$

b) $8 \cdot 12 : 2 = 48$

c) $8 \cdot 3 - 2 = 22$

d) $8 \cdot 1 = 8$

Se obtienen resultados distintos porque el añadir o eliminar paréntesis modifica el orden de las operaciones, y por tanto el resultado de la operación, como se ha comprobado al efectuar los cálculos de los distintos apartados.

53. Determina los errores que se han cometido.

$$(5 + \sqrt{16}) \cdot \sqrt{81} + 3 \cdot \sqrt{4} = (5 + 4) \cdot 9 + 3 \cdot 2 = 9 \cdot 12 \cdot 2 = 9 \cdot 12 + 9 \cdot 2 = 108 + 18 = 126$$

$$(5 + 4) \cdot 9 + 3 \cdot 2 = 9 \cdot 9 + 3 \cdot 2 = 81 + 6 = 87$$

Los errores en el enunciado son que en el paso $(5 + 4) \cdot 9 + 3 \cdot 2$ ha efectuado la suma $9 + 3$, cuando es prioritaria la multiplicación $3 \cdot 2$, otro error es que aplica la propiedad distributiva de la suma cuando no hay suma.

Números naturales

54. Resuelve estas operaciones.

- | | |
|--|--|
| a) $(12 + \sqrt{9}) : \sqrt{25}$ | f) $4^2 - \sqrt{25} : 5$ |
| b) $(\sqrt{9} - \sqrt{4}) \cdot (\sqrt{9} + \sqrt{4})$ | g) $\sqrt{81} : (\sqrt{16} + 5)$ |
| c) $(5^2 - 1) : \sqrt{144}$ | h) $\sqrt{196} : (2^2 + 3)$ |
| d) $\sqrt{16} \cdot (2^3 - 1)$ | i) $(\sqrt{81} - 3) : (\sqrt{25} + 1)$ |
| e) $5^2 + \sqrt{81} : 3$ | j) $(\sqrt{49} - 4) + (1 + \sqrt{25}) \cdot \sqrt{4}$ |
|
 |
 |
| a) $(12 + 3) : 5 = 15 : 5 = 3$ | f) $16 - 1 = 15$ |
| b) $(3 - 2) \cdot (3 + 2) = 1 \cdot 5 = 5$ | g) $9 : 9 = 1$ |
| c) $24 : 12 = 2$ | h) $14 : (4 + 3) = 14 : 7 = 2$ |
| d) $4 \cdot (8 - 1) = 4 \cdot 7 = 28$ | i) $(9 - 3) : 5 + 1 = 6 : 6 = 1$ |
| e) $25 + 3 = 28$ | j) $(7 - 4) + (1 + 5) \cdot 2 = 3 + 6 \cdot 2 = 3 + 12 = 15$ |

55. Obtén el resultado.

- | |
|--|
| a) $\sqrt{25} + 3^2 \cdot 2 - 2^4 : 4$ |
| b) $16^2 : \sqrt{16} \cdot 8^3 - 2^6$ |
| c) $(\sqrt{5^2 + 2^3 \cdot 3} + 2^3) : 3$ |
| d) $\sqrt{36} : 3 \cdot (3^2 - 5) + 4^2 \cdot (\sqrt{16} - 2) : 2$ |
|
 |
| a) $5 + 9 \cdot 2 - 16 : 4 = 5 + 18 - 4 = 23 - 4 = 19$ |
| b) $256 : 4 \cdot 512 - 64 = 32768 - 64 = 32704$ |
| c) $(7 + 8) : 3 = 15 : 3 = 5$ |
| d) $6 : 3 \cdot (9 - 5) + 16 \cdot (4 - 2) : 2 = 2 \cdot 4 + 16 \cdot 2 : 2 = 8 + 16 = 24$ |

ACTIVIDADES FINALES

56. Indica el valor posicional de la cifra 3.

- | | | | |
|--------------|---|-----------|------------|
| a) 5396 | b) 12463 | c) 303030 | d) 3532001 |
| a) 5 396 | 3 C = 300 U | | |
| b) 12 463 | 3 U | | |
| c) 303 030 | 3 CM = 300 000 U, 3 UM = 3 000 U y 3 D = 30 U | | |
| d) 3 532 001 | 3 U. de millón y 3 DM = 30 000 U | | |

57. Indica el valor posicional de todas las cifras.

- | | | | |
|-------------------------|------------------------------------|----------|-----------|
| a) 4596 | b) 35702 | c) 17890 | d) 252525 |
| a) 4 UM, 5 C, 9 D, 6 U | c) 1 DM, 7 UM, 8 C, 9 D | | |
| b) 3 DM, 5 UM, 7 C, 2 U | d) 2 CM, 5 DM, 2 UM, 5 C, 2 D, 5 U | | |

58. Escribe, en cada caso, números que cumplan las siguientes condiciones.

- a) Tiene ocho unidades, nueve centenas y dos unidades de millar.
- b) Tiene siete decenas, cinco unidades de millar y es capicúa de cuatro cifras.
- a) 2 908, 2 918, 2 998, 12 908 ...
- b) 5 775

59. ¿Cuántos números comprendidos entre 200 y 300 cumplen que la cifra de las decenas es igual o mayor que la cifra de las unidades?

Los números están entre 200 y 300, es decir, vamos de 201 a 299.

Para el 0 como decenas, todas las unidades que podemos escribir son mayores.

Para el 1 como decenas, podemos tener de unidades el 0 y el 1, es decir, dos números (210 y 211).

Para el 2 como decenas, podemos tener de unidades 0, 1 y 2, es decir, tres números (220, 221, 222).

Para el 3 como decenas tendríamos cuatro números, para el 4 de decenas tendríamos cinco números y así sucesivamente hasta llegar al 9 como decenas que tendríamos 10 números (290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298 y 299).

Luego, tenemos un total de $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 54$ números que cumplen la condición que se pide.

60. Transforma al sistema de numeración decimal.

- | | | | |
|----------|---------|----------|--------------|
| a) XVIII | b) LXXI | c) XCVII | d) MDCXXVIII |
| a) 18 | b) 71 | c) 97 | d) 1 628 |

62. Escribe en números romanos.

- | | | |
|------------|-----------|-------------------------------------|
| a) 148 | c) 462 | e) 57 |
| b) 99 | d) 614 | f) 9999 |
| a) CXLVIII | c) CDLXII | e) LVII |
| b) XCIX | d) DCXIV | f) $\overline{I}\overline{X}CMXCIX$ |

63. Expresa en el sistema de numeración decimal estos números romanos.

- | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-------|--------|----------|
| a) XXVII | c) DXXX | e) CMXXIV | | | |
| b) DCXLVI | d) XLVIII | f) MXXIX | | | |
| a) 27 | b) 646 | c) 530 | d) 48 | e) 924 | f) 1 029 |

64. ¿Qué números en el sistema decimal son estos números romanos?

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\overline{X}\overline{I}\overline{X}$ | c) $\overline{M}\overline{M}\overline{C}\overline{I}\overline{V}$ | e) $\overline{M}\overline{M}\overline{C}\overline{I}\overline{I}\overline{I}$ |
| b) $\overline{C}\overline{D}\overline{X}\overline{L}$ | d) $\overline{I}\overline{V}\overline{C}\overline{D}\overline{X}\overline{X}$ | f) $\overline{M}\overline{M}\overline{M}\overline{D}\overline{L}\overline{X}\overline{X}\overline{X}$ |
| a) 19 000 | c) 1 001 104 | e) 2 000 103 |
| b) 400 040 | d) 4 420 | f) 1 002 580 |

65. Aproxima estos números truncándolos a las unidades de millar y a las centenas.

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|------------|
| a) 24536 | c) 200664 | e) 456 283 |
| b) 656419 | d) 19864 | f) 6332 |
| a) UM: 24 000, C: 24 500 | d) UM: 19 000, C: 19 800 | |
| b) UM: 656 000, C: 656 400 | e) UM: 456 000, C: 456 200 | |
| c) UM: 200 000, C: 200 600 | f) UM: 6 000, C: 6 300 | |

Números naturales

66. Aproxima estos números redondeándolos a las decenas de millar y a las decenas.

- | | | |
|----------------------------|-----------|----------------------------|
| a) 33675 | c) 34 544 | e) 105 538 |
| b) 674 323 | d) 87 554 | f) 220 551 |
| a) DM: 30 000, D: 33 680 | | c) DM: 30 000, D: 34 540 |
| b) DM: 670 000, D: 674 320 | | d) DM: 90 000, D: 87 550 |
| | | e) DM: 110 000, D: 105 540 |
| | | f) DM: 220 000, D: 220 550 |

67. Completa en tu cuaderno la tabla con las aproximaciones por truncamiento y redondeo a las centenas, y elige la mejor aproximación.

	Truncamiento	Redondeo
4356		
66724		
200 443		
84 351		
79 884		

	Truncamiento	Redondeo
4356	4 300	4 400
66724	66 700	66 700
200 443	200 400	200 400
84 351	84 300	84 400
79 884	79 800	79 900

En los casos en los que la cifra que sigue a las centenas es menor que 5, la aproximación por truncamiento y por redondeo es la misma. En los casos en los que la cifra de las decenas es mayor o igual que 5, la mejor aproximación viene dada por el redondeo, porque el error cometido con respecto al número original es menor.

68. Completa en tu cuaderno la tabla con las aproximaciones por truncamiento de 37 894.

Truncamiento	37 894
A las unidades	
A las decenas	
A las centenas	
A las unidades de millar	
A las decenas de millar	

Truncamiento	37 894
A las unidades	37 894
A las decenas	37 890
A las centenas	37 800
A las unidades de millar	37 000
A las decenas de millar	30 000

69. Escribe tres números cuyo:

- a) Redondeo a las unidades de millar sea el mismo.
- b) Truncamiento a las centenas sea el mismo.
- c) Redondeo y truncamiento a las decenas coincidan.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) 37 312, 37 401 y 37 403 b) 301, 350, 387 c) 1 990, 1 992, 1 994

70. Aplica la propiedad distributiva y calcula.

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|------------------------|
| a) $2 \cdot (5 - 3)$ | d) $(12 - 7 + 3) \cdot 8$ | |
| b) $(14 - 6) \cdot 4$ | e) $16 \cdot (5 + 6)$ | |
| c) $5 \cdot (9 + 4 - 2)$ | f) $(8 - 6 + 9) \cdot 6$ | |
| a) $2 \cdot 2 = 4$ | c) $5 \cdot 11 = 55$ | e) $16 \cdot 11 = 176$ |
| b) $8 \cdot 4 = 32$ | d) $8 \cdot 8 = 64$ | f) $11 \cdot 6 = 66$ |

71. Detecta el error en cada una de las expresiones.

- a) $4 \cdot (9 - 6) = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 6$
 b) $(7 + 8) \cdot 5 = 7 \cdot 8 + 7 \cdot 5$
 c) $(3 + 12) \cdot 2 = 3 + 12 \cdot 2$
 d) $5 \cdot (10 - 3) = 5 \cdot 10 - 5 - 3$

- a) La propiedad distributiva mantiene el signo. $\rightarrow 4 \cdot (9 - 6) = 4 \cdot 9 - 4 \cdot 6$
- b) La propiedad distributiva está mal aplicada. $\rightarrow (7 + 8) \cdot 5 = 7 \cdot 5 + 8 \cdot 5$
- c) La propiedad distributiva está mal aplicada. $\rightarrow (3 + 12) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 12 \cdot 2$
- d) La propiedad distributiva está mal aplicada. $\rightarrow 5 \cdot (10 - 3) = 5 \cdot 10 - 5 \cdot 3$

72. Si D es el dividendo, d , el divisor, c , el cociente, y r , el resto, ¿son correctas las siguientes divisiones?

- a) $D = 436 \quad d = 7 \quad c = 61 \quad r = 9$
 b) $D = 10583 \quad d = 28 \quad c = 37 \quad r = 27$

- a) El resto es mayor que el divisor, eso no puede pasar. $436 : 7$ tiene como cociente 62 y resto 2.
- b) $28 \cdot 37 + 27 = 1063$, que no coincide con el dividendo 10 583.

73. Sin realizar la división indica cuáles de estas divisiones tienen resto igual a 0.

- a) $D = 6099 \quad d = 19 \quad c = 321 \quad r = ?$
 b) $D = 986 \quad d = 17 \quad c = 58 \quad r = ?$
- a) $19 \cdot 321 = 6099 \rightarrow r = 0$
 - b) $17 \cdot 58 = 986 \rightarrow r = 0$

Ambas divisiones tienen resto igual a 0.

Números naturales

74. Calcula el dividendo de estas divisiones sabiendo que su resto es igual a 0.

- a) Cociente: 14 Divisor: 8
- b) Cociente: 25 Divisor: 12
- c) Cociente: 363 Divisor: 42
- d) Cociente: 148 Divisor: 17
- e) Cociente: 4020 Divisor: 10

- a) $D = 14 \cdot 8 = 112$
- c) $D = 363 \cdot 42 = 15\,246$
- e) $D = 4\,020 \cdot 10 = 40\,200$
- b) $D = 25 \cdot 12 = 300$
- d) $D = 148 \cdot 17 = 2\,516$

75. ¿Cuántas unidades hay que añadir al dividendo de la división $412 : 26$ para que el resto sea igual a 0?

$$412 : 26 = 15 \text{ y tiene resto } r = 22.$$

Sumando al dividendo 4 unidades se obtiene 416, que al dividirlo entre 26 tiene por cociente 16 y por resto 0.

77. Encuentra el divisor.

- a) $D = 279$ $c = 23$ $r = 3$
- b) $D = 1320$ $c = 47$ $r = 4$
- c) $D = 1160$ $c = 36$ $r = 8$
- d) $D = 8035$ $c = 55$ $r = 5$
- e) $D = 17310$ $c = 84$ $r = 6$

- a) $d = (279 - 3) : 23 = 276 : 23 = 12$
- b) $d = (1\,320 - 4) : 47 = 1\,316 : 47 = 28$
- c) $d = (1\,160 - 8) : 36 = 1\,152 : 36 = 32$
- d) $d = (8\,035 - 5) : 55 = 8\,030 : 55 = 146$
- e) $d = (17\,310 - 6) : 84 = 17\,304 : 84 = 206$

78. Completa la tabla en tu cuaderno.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
195	42	4	27
7582	135	56	22
359	25	14	9
780	5	156	0

79. Indica la base y el exponente de las siguientes potencias.

- a) 23^3
- b) 34^5
- c) 5^4
- d) 7^3

- a) $23^3 \rightarrow \text{Base} = 23, \text{ Exponente} = 3$
- c) $5^4 \rightarrow \text{Base} = 5, \text{ Exponente} = 4$
- b) $34^5 \rightarrow \text{Base} = 34, \text{ Exponente} = 5$
- d) $7^3 \rightarrow \text{Base} = 7, \text{ Exponente} = 3$

80. Escribe como producto de factores estas potencias y calcula el resultado.

- a) 3^4 b) 6^5 c) 8^4 d) 7^6

a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

c) $8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$

b) $6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7776$

d) $7^6 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 117649$

81. Escribe, si es posible, las siguientes expresiones en forma de potencia:

- a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ c) $49 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 50$

- b) $4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 7$ d) 17

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$

c) $49 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 50 = (49 \cdot 50)^2 = 2450^2$

b) $4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 7 = (4 \cdot 7)^3 = 28^3$

d) $17 = 17^1$

82. Escribe con números.

- a) Diecisiete a la cuarta c) Dos a la quinta

- b) Trece al cubo d) Quince a la sexta

a) Diecisiete a la cuarta = 17^4

c) Dos a la quinta = 2^5

b) Trece al cubo = 13^3

d) Quince a la sexta = 15^6

83. Escribe cómo se leen las siguientes potencias.

- a) 3^2 b) 7^5 c) 4^3 d) 14^{17}

a) 3^2 = Tres al cuadrado

c) 4^3 = Cuatro al cubo

b) 7^5 = Siete a la quinta

d) 14^{17} = Catorce elevado a diecisiete

84. Calcula las siguientes potencias.

- a) 3^4 b) 7^1 c) 6^3 d) 5^0

a) $3^4 = 81$

b) $7^1 = 7$

c) $6^3 = 216$

d) $5^0 = 1$

85. Completa en tu cuaderno la tabla y calcula.

	Al cuadrado	Al cubo	A la cuarta
7	49	343	2401
8	64	512	4096
10	100	1000	10000
11	121	1331	14641

86. Completa en tu cuaderno.

- a) $2^\square = 32$ b) $7^\square = 1$ c) $\square^4 = 81$ d) $\square^3 = 343$

a) $2^\square = 32 \rightarrow 2^5 = 32$

c) $\square^4 = 81 \rightarrow 3^4 = 81$

b) $7^\square = 1 \rightarrow 7^0 = 1$

d) $\square^3 = 343 \rightarrow 7^3 = 343$

Números naturales

87. Obtén la expresión polinómica de estos números.

- a) 347 b) 10 286 c) 400 658 d) 533 8655

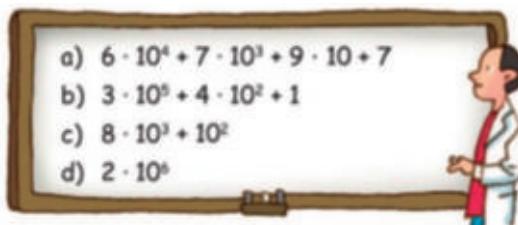
a) $347 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7$

b) $10\,286 = 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 6$

c) $400\,658 = 4 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8$

d) $5\,338\,655 = 5 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 5$

88. Averigua, en cada caso, el número cuya descomposición polinómica es:



a) $6 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10 + 7 = 67\,097$

b) $3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^2 + 1 = 300\,401$

c) $8 \cdot 10^3 + 10^2 = 8\,100$

d) $2 \cdot 10^6 = 2\,000\,000$

89. Realiza estas operaciones con potencias.

a) $5^3 \cdot 5^8$ c) $10^6 \cdot 10^3$ e) $2^5 \cdot 2^6$

b) $3^6 \cdot 3^4$ d) $10^5 \cdot 10$ f) $7^4 \cdot 7^8$

a) $5^3 \cdot 5^8 = 5^{11}$

c) $10^6 \cdot 10^3 = 10^9$

e) $2^5 \cdot 2^6 = 2^{10}$

b) $3^6 \cdot 3^4 = 3^{10}$

d) $10^5 \cdot 10 = 10^6$

f) $7^4 \cdot 7^8 = 7^{12}$

90. Calcula.

a) $3^8 : 3^2$ c) $10^8 : 10^8$ e) $2^6 : 2^4$

b) $5^7 : 5^3$ d) $7^4 : 7$ f) $10^5 : 10^2$

a) $3^8 : 3^2 = 3^6$

c) $10^8 : 10^8 = 1$

e) $2^6 : 2^4 = 2^2$

b) $5^7 : 5^3 = 5^4$

d) $7^4 : 7 = 7^3$

f) $10^5 : 10^2 = 10^3$

91. Escribe el resultado con una sola potencia.

a) $2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^7$ d) $10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^3$

b) $3^5 \cdot 3^3 \cdot 3^2$ e) $7^6 \cdot 7^3 \cdot 7^4$

c) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^2$ f) $10^9 \cdot 10 \cdot 10^5$

a) $2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^7 = 2^3$

c) $5^3 \cdot 5^6 \cdot 5^2 = 5^7$

e) $7^6 \cdot 7^3 \cdot 7^4 = 7^7$

b) $3^5 \cdot 3^3 \cdot 3^2 = 3^4$

d) $10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^3 = 10^5$

f) $10^9 \cdot 10 \cdot 10^5 = 10^{13}$

92. Escribe como una sola potencia.

a) $5^2 \cdot 3^2$ d) $8^6 : 2^6$ g) $2^{10} \cdot 10^{10}$

b) $4^7 \cdot 2^7$ e) $20^7 : 10^7$ h) $12^4 : 4^4$

c) $10^3 \cdot 10^3$ f) $3^8 \cdot 2^8$ i) $15^7 : 3^7$

a) $5^2 \cdot 3^2 = 15^2$

d) $8^6 : 2^6 = 4^6$

g) $2^{10} \cdot 10^{10} = 20^{10}$

b) $4^7 \cdot 2^7 = 8^7$

e) $20^7 : 10^7 = 2^7$

h) $12^4 : 4^4 = 3^4$

c) $10^3 \cdot 10^3 = 10^6$

f) $3^8 \cdot 2^8 = 6^8$

i) $15^7 : 3^7 = 5^7$

93. Detecta el error.

a) $2^3 \cdot 4^3 = 8^6$

c) $5^4 \cdot 5^3 = 5^{12}$

b) $8^5 : 2^2 = 4^3$

d) $7^6 : 7^4 = 7^{10}$

a) $2^3 \cdot 4^3 = 8^6$. Lo correcto es: $2^3 \cdot 4^3 = 8^3$

c) $5^4 \cdot 5^3 = 5^{12}$. Lo correcto es: $5^4 \cdot 5^3 = 5^7$

b) $8^5 : 2^2 = 4^3$. Lo correcto es: $2^{15} : 2^2 = 2^{13}$

d) $7^6 : 7^4 = 7^{10}$. Lo correcto es: $7^6 : 7^4 = 7^2$

94. Expresa como una sola potencia.

a) $5^7 \cdot 2^7 \cdot 3^7$

c) $16^3 : 4^3 : 2^3$

b) $20^4 : 5^4 \cdot 2^4$

d) $21^5 : 7^5 \cdot 2^5$

a) $5^7 \cdot 2^7 \cdot 3^7 = 30^7$

c) $16^3 : 4^3 : 2^3 = 2^3$

b) $20^4 : 5^4 \cdot 2^4 = 8^4$

d) $21^5 : 7^5 \cdot 2^5 = 6^5$

95. Escribe en tu cuaderno los exponentes que faltan.

a) $8^3 = 2^\square$

b) $27^4 = 3^\square$

c) $125^6 = 5^\square$

a) $8^3 = 2^\square \rightarrow \square = 9$

b) $27^4 = 3^\square \rightarrow \square = 12$

c) $125^6 = 5^\square \rightarrow \square = 18$

96. Completa en tu cuaderno.

a) $\square^7 : 5^3 = 5^4$

c) $9^6 : 9^\square = 9^3$

b) $12^\square : 12^6 = 12^3$

d) $3^9 : 3^\square = 3^2$

a) $5^7 : 5^3 = 5^4$

c) $9^5 : 9^2 = 9^3$

b) $12^{15} : 12^6 = 12^9$

d) $3^8 : 3^6 = 3^2$

97. Completa en tu cuaderno.

a) $3^4 \cdot \square^2 \cdot 3^7 = 3^\square$

c) $(\square^7 \cdot 10^\square) : 10 = 10^6$

b) $(5^\square : 5^\square) \cdot 5^3 = \square^4$

d) $6^8 (\square^7 : 6^\square) = 6^{12}$

a) $3^4 \cdot \square^2 \cdot 3^7 = 3^\square \rightarrow 3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^7 = 3^{13}$

c) $\square^7 \cdot 10^\square : 10 = 10^8 \rightarrow 10^7 \cdot 10^2 : 10 = 10^8$

b) $5^8 : 5^\square \cdot 5^3 = \square^4 \rightarrow 5^8 : 5^7 \cdot 5^3 = 5^4$

d) $6^8 \cdot \square^7 : 6^\square = 6^{12} \rightarrow 6^8 \cdot 6^7 : 6^3 = 6^{12}$

Números naturales

98. Completa en tu cuaderno con una potencia.

a) $7^6 = 7^4 \cdot \square$

e) $11^8 = \square \cdot 11^5$

b) $5^3 = \square : 5^6$

f) $3^4 = 3^7 : \square$

c) $28^3 = 7^3 \cdot \square$

g) $45^4 = \square \cdot 5^4$

d) $8^7 = \square : 5^7$

h) $3^6 = \square : 6^6$

a) $7^6 - 7^4 = \square \rightarrow \square = 7^2$

e) $11^8 - \square \cdot 11^5 = \square = 11^3$

b) $5^3 - \square : 5^6 = \square = 5^9$

f) $3^4 - 3^7 : \square = \square = 3^3$

c) $28^3 = 7^3 - \square \rightarrow \square = 4^3$

g) $45^4 = \square \cdot 5^4 = \square = 9^4$

d) $8^7 - \square : 5^7 = \square = 40^7$

h) $3^6 - \square : 6^6 = \square = 18^6$

99. Calcula el resultado.

a) $(2^4)^3$

b) $(5^2)^5$

c) $(3^6)^6$

d) $(7^5)^3$

a) $2^{4 \cdot 3} = 2^{12}$

b) $5^{2 \cdot 5} = 5^{10}$

c) $3^{4 \cdot 6} = 3^{24}$

d) $7^{5 \cdot 3} = 7^{15}$

100. Completa en tu cuaderno.

a) $(3^2)^{\square} = 3^6$

c) $(11^{\square})^3 = 11^{12}$

b) $(4^5)^{\square} = 4^{25}$

d) $(15^{\square})^2 = 15^{18}$

a) $(3^2)^3 = 3^6$

c) $(11^4)^3 = 11^{12}$

b) $(4^5)^5 = 4^{25}$

d) $(15^9)^2 = 15^{18}$

101. Completa en tu cuaderno con números para que las igualdades sean ciertas.

a) $9^{\square} \cdot 9^6 = 9^{11}$

d) $31^{\square} : 31^4 = 31^6$

b) $12^5 \cdot 12^{\square} = 12^9$

e) $(7^{\square})^4 = 7^{16}$

c) $8^8 : 8^{\square} = 8^5$

f) $(5^{\square})^{\square} = 5^{12}$

a) $\square = 5$

c) $\square = 3$

d) $\square = 4$

b) $\square = 4$

d) $\square = 10$

f) $\square = 16$

102. Expresa como una sola potencia.

a) $(2^3)^2 \cdot 2^4$

b) $(3^6)^3 : 3^8$

c) $4^5 \cdot (4^2)^3$

d) $6^9 : (6^2)^2$

a) $2^{3 \cdot 2} \cdot 2^4 = 2^{10}$

c) $4^5 \cdot 4^{2 \cdot 3} = 4^{11}$

b) $3^{4 \cdot 3} : 3^8 = 3^4$

d) $6^9 : 6^{2 \cdot 2} = 6^5$

103. Calcula.

a) $(3^5 \cdot 3^2) : 3^2$

c) $(8^5 : 8^3) \cdot 8^2$

b) $4^3 \cdot (4^7 : 4^4)$

d) $7^5 : (7^2 \cdot 7^3)$

a) $3^7 : 3^3 = 3^4$

b) $4^3 \cdot 4^3 = 4^6$

c) $8^2 \cdot 8^2 = 8^4$

d) $7^5 : 7^4 = 7$

104. Resuelve.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| a) $(3^2)^2 \cdot (3^2)^4$ | c) $(9^2)^3 \cdot (9^2)^3$ |
| b) $(7^2)^3 \cdot (7^2)^4$ | d) $(11^2)^2 \cdot (11^2)^4$ |
| a) $3^{10} \cdot 3^8 = 3^{18}$ | c) $9^{15} \cdot 9^{12} = 9^{27}$ |
| b) $7^9 \cdot 7^8 = 7^{17}$ | d) $11^{12} \cdot 11^{12} = 11^{24}$ |

105. Indica como una sola potencia.

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| a) $(6^2)^5 : (6^2)^3$ | c) $(10^6)^3 : (10^6)^5$ |
| b) $(8^2)^2 : (8^2)^4$ | d) $(2^2)^2 : (2^2)^5$ |
| a) $6^{10} : 6^9 = 6^1$ | c) $10^{24} : 10^{20} = 10^4$ |
| b) $8^{14} : 8^{12} = 8^2$ | d) $2^{18} : 2^{15} = 2^3$ |

106. Calcula las siguientes expresiones.

- a) $3^9 : ((3^2)^5 : 3^7) \cdot 3^3$ b) $(7^2)^3 \cdot (7^6 : 7^2) : (7^2)^4$
- a) $3^9 : (3^{10} : 3^7) \cdot 3^3 = 3^9 : 3^3 \cdot 3^3 = 3^6 \cdot 3^3 = 3^9$
 b) $7^6 \cdot 7^3 : 7^8 = 7^9 : 7^8 = 7$

107. Opera y expresa como una potencia.

- | | |
|------------------------------------|---|
| a) $7^{13} \cdot 7^9 \cdot 7^{20}$ | d) $(52^4 \cdot 52^{21}) : 52^{13}$ |
| b) $(13^6)^8 \cdot 13^{30}$ | e) $10^{18} : (10^6)^2$ |
| c) $(10^9)^6 : 10^{44}$ | f) $(9^{15} \cdot 9^6) : (9^6 : 9^3)$ |
| a) $7^{13+9+20} = 7^{42}$ | d) $52^{4+21-13} = 52^{12}$ |
| b) $13^{6 \cdot 8 + 30} = 13^{78}$ | e) $10^{18-6 \cdot 2} = 10^6$ |
| c) $10^{8 \cdot 8 - 44} = 10^{20}$ | f) $9^{15+6} : 9^{6-3} = 9^{20-3} = 9^{17}$ |

108. Calcula estas potencias y completa en tu cuaderno.

- a) $10^3 \cdot 20^8 \cdot 25^4 = 10^\square$
 b) $8^4 \cdot 16^2 = 2^\square$
 c) $27^6 : 81^4 = 3^\square$
 d) $10^2 \cdot 40 \cdot 5^2 = 10^\square$
 e) $25^5 : 125^2 = 5^\square$
- a) $10^3 \cdot 20^8 \cdot 25^4 = 10^\square \rightarrow 10^3 \cdot (2 \cdot 10)^8 \cdot (5^2)^4 = 10^\square \rightarrow \square = 19$
 b) $8^4 \cdot 16^2 = 2^\square \rightarrow \square = 20$
 c) $27^6 : 81^4 = 3^\square \rightarrow \square = 2$
 d) $10^2 \cdot 40 \cdot 5^2 = 10^\square \rightarrow \square = 5$
 e) $25^5 : 125^2 = 5^\square \rightarrow \square = 4$

Números naturales

109. Reduce estas expresiones.

- a) $3 \cdot (3 \cdot 5)^3$ c) $4^5 \cdot (4^6 : 4^4) \cdot (5 \cdot 4)^5$
b) $(7^7 : 7^4) \cdot (7 \cdot 3)^5$ d) $(2 \cdot 9)^{12} : (9 \cdot 2)^5 \cdot 9^3$
- a) $3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 3^4 \cdot 5^3$ c) $4^5 \cdot 4^2 \cdot 5^5 \cdot 4^5 = 4^{12} \cdot 5^5$
b) $7^3 \cdot 7^5 \cdot 3^5 = 7^8 \cdot 3^5$ d) $(2 \cdot 9)^7 \cdot 9^3 = 2^7 \cdot 9^{10}$

110. Expresa como una sola potencia.

- a) $2^4 \cdot 8^3$ c) $5^6 \cdot 125^2$
b) $3^7 \cdot 27^4$ d) $49^3 \cdot 7^5$
- a) $2^4 \cdot 8^3 = 2^{13}$ c) $5^6 \cdot 125^2 = 5^{12}$
b) $3^7 \cdot 27^4 = 3^{19}$ d) $49^3 \cdot 7^5 = 7^{11}$

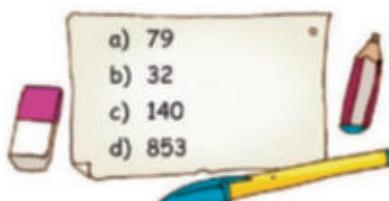
111. Completa en tu cuaderno.

- a) $\sqrt{225} = \square$, ya que $\square^2 = 225$ c) $\sqrt{1296} = \square$, ya que $\square^2 = 1296$
b) $\sqrt{729} = \square$, ya que $\square^2 = 729$ d) $\sqrt{2304} = \square$, ya que $\square^2 = 2304$
- a) $\sqrt{225} = 15$, ya que $15^2 = 225$ c) $\sqrt{1296} = 36$, ya que $36^2 = 1296$
b) $\sqrt{729} = 27$, ya que $27^2 = 729$ d) $\sqrt{2304} = 48$, ya que $48^2 = 2304$

112. Completa.

- a) $\sqrt{1024} = \square$ c) $\sqrt{361} = \square$
b) $\sqrt{\square} = 13$ d) $\sqrt{\square} = 25$
- a) 32 b) 169 c) 19 d) 625

113. Calcula la raíz cuadrada entera y el resto de los números que ha anotado Ana.



- a) $\sqrt{79} \approx 8$ y resto 15 b) $\sqrt{32} \approx 5$ y resto 7 c) $\sqrt{140} \approx 11$ y resto 19 d) $\sqrt{853} \approx 29$ y resto 12

115. Calcula el radicando en cada caso.

- a) Raíz entera = 8 Resto = 12 c) Raíz entera = 11 Resto = 15
b) Raíz entera = 17 Resto = 5 d) Raíz entera = 21 Resto = 6
- a) Raíz entera = 8 Resto = 12 → Radicando = $8^2 + 12 = 76$
b) Raíz entera = 17 Resto = 5 → Radicando = $17^2 + 5 = 294$
c) Raíz entera = 11 Resto = 15 → Radicando = $11^2 + 15 = 136$
d) Raíz entera = 21 Resto = 6 → Radicando = $21^2 + 6 = 447$

116. Halla el resto de estas raíces.

- | | |
|---------------------|--|
| a) Raíz entera = 13 | Radicando = 175 |
| b) Raíz entera = 24 | Radicando = 579 |
| c) Raíz entera = 29 | Radicando = 852 |
| a) Raíz entera = 13 | Radicando = 175 → Resto = $175 - 169 = 6$ |
| b) Raíz entera = 24 | Radicando = 579 → Resto = $579 - 576 = 3$ |
| c) Raíz entera = 29 | Radicando = 852 → Resto = $852 - 841 = 11$ |

117. Realiza las siguientes operaciones.

- | | |
|--------------------------|---------------------------------|
| a) $10 + 4 \cdot 8$ | d) $3 \cdot 2 + 5 \cdot 9$ |
| b) $12 : 3 - 3$ | e) $9 : 3 - 6 : 2$ |
| c) $7 + 5 \cdot 6$ | f) $4 \cdot 9 - 7 \cdot 5$ |
| a) $10 + 4 \cdot 8 = 42$ | d) $3 \cdot 2 + 5 \cdot 9 = 51$ |
| b) $12 : 3 - 3 = 1$ | e) $9 : 3 - 6 : 2 = 0$ |
| c) $7 + 5 \cdot 6 = 37$ | f) $4 \cdot 9 - 7 \cdot 5 = 1$ |

118. Calcula.

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| a) $(9 + 13) \cdot 4$ | d) $7 - (7 + 2) : 3$ |
| b) $26 : (5 - 3)$ | e) $10 : (6 - 4) + 14$ |
| c) $(7 + 15) : 2$ | f) $(6 - 3) \cdot 5 - 2$ |
| a) $(9 + 13) \cdot 4 = 88$ | d) $7 - (7 + 2) : 3 = 4$ |
| b) $26 : (5 - 3) = 13$ | e) $10 : (6 - 4) + 14 = 19$ |
| c) $(7 + 15) : 2 = 11$ | f) $(6 - 3) \cdot 5 - 2 = 13$ |

119. Efectúa estas operaciones.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $28 - 3 \cdot 2 \cdot 4$ | e) $(42 - 6) : 6 + 5 \cdot 3$ |
| b) $5 \cdot 9 : 3 + 7$ | f) $15 \cdot (7 - 3) : (3 - 1)$ |
| c) $25 + 4 \cdot 2 - 7 \cdot 3$ | g) $25 - 5 \cdot (10 - 6) : 10$ |
| d) $14 : 2 + 3 \cdot 9 - 5$ | h) $15 \cdot 3 - 2(8 + 4)$ |
| a) $28 - 3 \cdot 2 \cdot 4 = 4$ | e) $(42 - 6) : 6 + 5 \cdot 3 = 21$ |
| b) $5 \cdot 9 : 3 + 7 = 22$ | f) $15 \cdot (7 - 3) : (3 - 1) = 30$ |
| c) $25 + 4 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = 12$ | g) $25 - 5 \cdot (10 - 6) : 10 = 23$ |
| d) $14 : 2 + 3 \cdot 9 - 5 = 29$ | h) $15 \cdot 3 - 2(8 + 4) = 21$ |

Números naturales

120. Calcula el resultado.

- | | |
|----------------------------|--|
| a) $2 \cdot 3^2 + 5^2 - 6$ | e) $2^3 + 2^2 \cdot (5 - 2)$ |
| b) $4^2 - (2^3 + 1)$ | f) $10 + 4 \cdot (3^2 - 5)$ |
| c) $(19 - 2^2) : 5$ | g) $5^2 \cdot (4^2 - 3^2) - 2^2$ |
| d) $3^2 + 5 \cdot (8 - 6)$ | h) $5 \cdot (1 + 3^2) - 4 \cdot (2^3 - 6)$ |
-
- | | |
|---------------------------------|---|
| a) $2 \cdot 3^2 + 5^2 - 6 = 37$ | e) $2^3 + 2^2 \cdot (5 - 2) = 20$ |
| b) $4^2 - (2^3 + 1) = 7$ | f) $10 + 4 \cdot (3^2 - 5) = 26$ |
| c) $(19 - 2^2) : 5 = 3$ | g) $5^2 \cdot (4^2 - 3^2) - 2^2 = 171$ |
| d) $3^2 + 5 \cdot (8 - 6) = 19$ | h) $5 \cdot (1 + 3^2) - 4 \cdot (2^3 - 6) = 42$ |

121. Encuentra los errores, corrígelos y resuelve.

- a) $(7 + 7) \cdot 7 = 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$
- b) $(7 \cdot 7) + 7 = 7 \cdot (7 + 7) = 7^2 + 7^2$
- c) $(7 + 7 \cdot 7) \cdot 7 = 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 = 3 \cdot 7^2$
- d) $(7 + 7^2 + 7) \cdot 7 = 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7^2 + 7 \cdot 7 = 7^2 + 7^3 + 7^2$
- e) $7 \cdot (7 + 7^2 + 7^3) = 7 \cdot 7^6 = 7^7$
- f) $7^2 \cdot (7 + 7^2) = 7^2 \cdot 7 + 7^2 \cdot 7 = 7^3 + 7^3 = 7^6$
- a) $(7 - 7) \cdot 7 = 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 \rightarrow 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 = 2 \cdot (7 \cdot 7) = 2 \cdot 7^2 = 2 \cdot 49 = 98$
- b) $(7 \cdot 7) - 7 = 7 \cdot (7 - 7) = 7^2 + 7^2 \rightarrow (7 \cdot 7) - 7 = 49 + 7 = 56$
- c) $(7 - 7 \cdot 7) \cdot 7 = 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 = 3 \cdot 7^2 \rightarrow (7 - 7 \cdot 7) \cdot 7 = 7^2 - 7^3 = 7^2 \cdot (1 + 7) = 49 \cdot 8 = 392$
- d) $(7 - 7^2 - 7) \cdot 7 = 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7^2 + 7 \cdot 7 = 7^2 + 7^3 \cdot 7^2 \rightarrow (7 - 7^2 - 7) \cdot 7 = 7^2 - 7^3 - 7^2 = 2 \cdot 7^2 - 7^3 = 441$
- e) $7 \cdot (7 - 7^2 + 7^3) = 7 \cdot 7^6 = 7^7 \rightarrow 7 \cdot (7 + 7^2 - 7^3) = 7^2 \cdot (1 + 7 + 7^2) = 7^2 \cdot 57 = 2793$
- f) $7^2 \cdot (7 + 7^2) = 7^2 \cdot 7 - 7^2 \cdot 7 = 7^3 - 7^3 = 7^6 \rightarrow 7^2 \cdot (7 + 7^2) = 7^2 \cdot 7 - 7^2 \cdot 7^2 = 7^3 - 7^4 = 2744$

122. Calcula el resultado de las operaciones.

- a) $2^3 \cdot (\sqrt{25} - 2 - 1)$ c) $\sqrt{64} + 4 \cdot (11 - 5)$
b) $(\sqrt{81} + 3 \cdot 2) : 5 + 7^0$ d) $9 - \sqrt{9} \cdot 2 - \sqrt{16} : 4$
- a) $2^3 \cdot (\sqrt{25} - 2 - 1) = 8 \cdot 5 - 2 - 1 = 8 \cdot 2 = 16$
b) $(\sqrt{81} - 3 \cdot 2) : 5 + 7^0 = (9 + 6) : 5 - 1 = 15 : 5 - 1 = 3 + 1 = 4$
c) $\sqrt{64} - 4 \cdot 11 - 5 = 8 - 4 \cdot 6 = 8 - 24 = 32$
d) $9 - \sqrt{9} \cdot 2 - \sqrt{16} : 4 = 9 - 3 \cdot 2 - 4 : 4 = 9 - 6 - 1 = 2$

123. Calcula.

- a) $3^3 \cdot \sqrt{9} - 3^2 - 3^3$
b) $(12 + 3 \cdot \sqrt{25}) : 3^2 + \sqrt{49}$
c) $7^2 + \sqrt{64} - 5^3 : 5$
d) $\sqrt{81} : \sqrt{9} - (\sqrt{16} - \sqrt{4})$
e) $180 : \sqrt{4} - 3^4 + 4 \cdot \sqrt{121}$

- a) $3^3 \cdot \sqrt{9} - 3^2 - 3^3 = 27 \cdot 3 - 9 - 27 = 81 - 36 = 45$
- b) $12 \cdot 3 \cdot \sqrt{25} : 3^2 + \sqrt{49} = 12 \cdot 15 : 9 + 7 = 27 : 9 + 7 = 3 + 7 = 10$
- c) $7^2 - \sqrt{64} - 5^3 : 5 = 49 + 8 - 125 : 5 = 57 - 25 = 32$
- d) $\sqrt{81} : \sqrt{9} - \sqrt{16} - \sqrt{4} = 9 : 3 - 4 - 2 = 3 - 2 = 1$
- e) $180 : \sqrt{4} - 3^4 + 4 \cdot \sqrt{121} = 180 : 2 - 81 + 4 \cdot 11 = 90 - 81 + 44 = 9 + 44 = 53$

124. Efectúa estas operaciones.

- a) $2^4 - 2^3 + 2^2 - 2$ e) $7^2 : (\sqrt{36} + 1) - 2^2$
 b) $\sqrt{100} : 5 + 3^3 : 3$ f) $(3^2 - \sqrt{25}) : (4^2 - 12)$
 c) $7 \cdot (5 + 3) - 5^2 \cdot \sqrt{4}$ g) $2^5 : [(\sqrt{81} - 3^2) + 4^2]$
 d) $12 - 18 : 2 + 4 \cdot \sqrt{121}$ h) $5 \cdot 4^3 - (10^2 : 5) + \sqrt{100}$

 a) $16 - 8 + 4 - 2 = 10$ e) $49 : (6 + 1) - 4 = 49 : 7 - 4 = 7 - 4 = 3$
 b) $10 : 5 + 27 : 3 = 2 + 9 = 11$ f) $(9 - 5) : (16 - 12) = 4 : 4 = 1$
 c) $7 \cdot 8 - 25 \cdot 2 = 56 - 50 = 6$ g) $32 : (0 + 16) = 2$
 d) $12 - 9 + 4 \cdot 11 = 3 + 44 = 47$ h) $5 \cdot 64 - 4 + 10 = 326$

125. Un edificio tiene planta baja y cuatro pisos. La planta baja tiene 5 m de altura y cada uno de los pisos 3 m. ¿Cuál es la altura del edificio?

La planta baja mide 5 m. Hay 4 plantas que miden cada una 3 m de altura.

$1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 5 + 12 = 17 \rightarrow$ El edificio mide 17 m de altura.

126. Un barco llevaba 502 pasajeros y ha hecho paradas en tres puertos. En el primero bajan 256 pasajeros, en el segundo suben 162 pasajeros y en el tercero bajan 84 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros quedan a bordo del barco tras las tres paradas?



El barco va con 502 pasajeros.

En la primera parada bajan 256 → Quedan entonces $502 - 256 = 246$ pasajeros.

En la segunda parada suben 162 → Hay en el barco $246 + 162 = 408$ pasajeros.

En la tercera bajan 84 → Quedan al final a bordo $408 - 84 = 324$ pasajeros.

127. Para hacer una tarta grande de manzana se necesitan 3 manzanas y para hacer una pequeña se necesitan 2 manzanas. ¿Cuántas manzanas son necesarias para hacer cuatro tartas grandes y seis pequeñas?

$4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 12 + 12 = 24 \rightarrow$ Se necesitan en total 24 manzanas.

Números naturales

128. En una hucha hay 246 €, y en otra, 114 €.

a) Si todo el dinero está en monedas de 2 €, ¿cuántas monedas hay entre las dos huchas?

b) ¿Y si estuviera en billetes de 5 €?

a) $246 : 2 + 114 : 2 = (246 + 114) : 2 = 360 : 2 = 180$

Entre las dos huchas hay 180 monedas de 2 €.

b) $246 : 5 + 114 : 5 = (246 + 114) : 5 = 360 : 5 = 72$

Entre las dos huchas habría 72 billetes de 5 €.

129. En una sala de cine hay 36 filas con 15 butacas en cada fila. Si hay 146 personas sentadas en la sala, ¿cuántas butacas hay vacías?

Número de butacas en total $36 \cdot 15 = 540$ butacas.

Como hay 146 personas en la sala, en total habrá $540 - 146 = 394$ butacas libres.

130. En el garaje se van a cambiar las ruedas a cuatro motos, cinco camiones de 6 ruedas y seis coches. ¿Cuántas ruedas se cambiarán en total?

$$4 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 8 + 30 + 24 = 62 \rightarrow \text{En total se cambiarán 62 ruedas.}$$

131. ¿Cuánto dinero hay en una cartera que contiene 2 billetes de 20 €, 3 de 10 €, 6 de 5 € y 4 monedas de 2 €?

$$2 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 40 + 30 + 30 + 8 = 108$$

Hay en total en la cartera 108 €.

132. Seis personas tienen 1000 € para gastos de un viaje. Deben viajar en tren y en avión. El billete de tren cuesta 38 € y el de avión 125 €. ¿Tienen suficiente dinero para realizar el viaje?



Cada persona gasta $125 + 38 = 163$ €, por lo que en total gastarán $163 \cdot 6 = 978$ €.

Como 1000 € es más dinero que 978 €, tendrán suficiente.

134. En un festival de música étnica hay músicos de tres continentes. De Asia han llegado 350 músicos, de África 157 músicos más que de Asia y de Europa 98 músicos menos que de Asia. Halla el número total de músicos que hay.

Asia: 350. África: $350 + 157 = 507$. Europa: $350 - 98 = 252$.

En total son $350 + 507 + 252 = 1\,109$ músicos.

- 135.** En la restauración de un edificio trabajan 45 hombres y 37 mujeres. A su lado se restaura otro edificio en el que trabajan 17 hombres menos y 24 mujeres más que en el anterior. ¿En qué edificio trabajan más personas?

Los hombres del segundo edificio son $45 - 17 = 28$, y las mujeres, $37 + 24 = 61$; en total, $28 + 61 = 89$ trabajadores. Trabajan más personas en el segundo edificio.

- 136.** Para prevenir intoxicaciones alimentarias se han organizado una serie de conferencias en un instituto. A la primera charla han asistido 125 alumnos de 1.^º ESO, 100 alumnos de 2.^º ESO, 97 de 3.^º ESO y el resto de 4.^º ESO, hasta un total de 406 alumnos. ¿Cuántos alumnos de 4.^º ESO han asistido a la conferencia?

Los alumnos de 4.^º ESO son el total menos la suma de los otros cursos:
 $406 - (125 + 100 + 97) = 406 - 322 = 83$ alumnos.

- 137.** Luis tiene 6 años, su hermana Ángela tiene 3 años más, y su hermano Enrique tiene el doble de la edad de Luis. Cuando su madre tuvo a Enrique tenía el triple de la edad actual de Ángela. ¿Qué edad tiene ahora mismo la madre?

Luis tiene 6 años.

Su hermana Ángela, $6 + 3 = 9$ años, y Enrique, $2 \cdot 6 = 12$.

La madre tuvo a Ángela con $3 \cdot 9 = 27$, y como ahora Enrique tiene 12 años, entonces la madre tiene $27 + 12 = 39$ años.

- 138.** Un naranjo ha producido este año 40 kg de naranjas y el año anterior 27 kg. Si el kilo de naranjas el año pasado estaba a 3 € y este año está a 2 €, ¿han aumentado o disminuido las ganancias respecto del año pasado?



El año pasado se ganó $27 \cdot 3 = 81$ € por las naranjas del árbol, y este año la cantidad asciende a $40 \cdot 2 = 80$ €; por tanto, han disminuido las ganancias en 1 € respecto del año pasado.

- 139.** Doña Raquel tenía 12 €, se gastó la mitad en una entrada de cine y con la otra mitad se compró una participación de lotería que resultó premiada con 15 € por cada euro jugado. ¿Cuánto dinero ganó?

Tenía 12 € y se gastó 6 € en una entrada de cine. Luego, le quedaron $12 - 6 = 6$ €.

Con ese dinero se compró una participación de lotería que por cada euro ganaba 15 €, así que como gastó 6 €, ganó $6 \cdot 15 = 90$ €.

- 140.** Un conductor de autobús ha estado conduciendo desde las 6 de la mañana hasta las 4 de la tarde, descansando 2 horas para comer. Si ha llevado una velocidad de 64 km/h, ¿cuántos kilómetros ha recorrido?

Las 4 de la tarde son las 16 horas. De modo que en total ha conducido $16 - 6 - 2 = 8$ horas. Y si en cada hora ha recorrido 64 km, en 8 habrá recorrido $8 \cdot 64 = 512$ km.

Números naturales

141. Una caja vacía pesa 2 kg y llena pesa 7 kg. ¿Cuánto pesa el contenido de 26 cajas?

El contenido de una caja pesa $7 - 2 = 5$ kg.

El contenido de 26 cajas pesa $26 \cdot 5 = 130$ kg.

142. En una papelería tienen 5 paquetes de 24 lápices de colores.

a) ¿Cuántos lápices de colores hay?

b) Si en cada paquete hay el mismo número de lápices de cada color y se sabe que hay 8 colores diferentes, ¿cuántos lápices de cada color hay en los 5 paquetes?

a) Hay $5 \cdot 24 = 120$ lápices.

b) Como en total hay 8 colores distintos, y 24 lápices por caja, entonces hay en cada paquete $24 : 8 = 3$ lápices de cada color en cada uno de los paquetes.

143. Dos flores cuestan 3 € y un ramo tiene 12 flores.

a) ¿Cuántos ramos puedo hacer con 90 €?

b) Si se quieren ganar 40 €, ¿por cuánto se debe vender cada ramo?

a) En un ramo se pueden separar las 12 flores en 6 parejas de flores, ya que $12 : 2 = 6$, y como cada pareja vale 3 €, un ramo entero vale $3 \cdot 6 = 18$ €.

Sabiendo esto, si se tienen 90 €, y cada ramo vale 18, para ver cuántos puedo hacer tengo que dividir los dos números, $90 : 18 = 5$.

Por tanto, puedo hacer 5 ramos.

b) Nos hemos gastado 90 €, y queremos ganar 40, así que tenemos que vender 5 ramos por $90 + 40 = 130$ €, o lo que es lo mismo, a $130 : 5 = 26$ € cada ramo.

144. Se han invertido 12 375 € para plantar árboles en unas parcelas. Si en cada parcela se han plantado 25 árboles y cada árbol ha costado 3 €, ¿cuántas parcelas se han plantado?

En total se han plantado $12\,375 : 3 = 4\,125$ árboles con ese dinero.

Teniendo en cuenta que en cada parcela se plantan 25 árboles, en total se habrán plantado $4\,125 : 25 = 165$ parcelas.

145. Luis acaba de recibir cuatro cajas cuadradas llenas de vasos que debe colocar. La caja tiene cuatro filas y hay cuatro vasos en cada fila. ¿Cuántos vasos tiene que colocar?

$4 \text{ cajas} \cdot 4 \text{ filas} \cdot 4 \text{ vasos} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ vasos.

Tiene que colocar $4^3 = 64$ vasos.

146. Se tiene un jardín cuadrado de 36 m² y se quiere ampliar añadiendo un metro más a cada lado. ¿Qué superficie añadiremos al jardín?



Si el jardín es cuadrado de área 36 m^2 , eso quiere decir que cada lado mide $\sqrt{36} = 6$ m.

Si queremos añadir 1 m más por lado, el lado medirá $6 + 1 = 7$ m y, por tanto, el área será de 49 m^2 , con lo que estaremos añadiendo $49 - 36 = 13 \text{ m}^2$.

- 147.** Un cuadrado tiene una superficie de 100 m^2 . ¿Cuánto mide el lado de otro cuadrado que tiene la cuarta parte de la superficie que el anterior?

Si el otro cuadrado tiene una superficie de la cuarta parte, será de $100 : 4 = 25 \text{ m}^2$, por lo que el lado de ese cuadrado será $\sqrt{25} = 5 \text{ m}$.

- 148.** Tengo 100 monedas y quiero formar cuadros con el mismo número de filas y de columnas. Explica de cuántas formas distintas es posible formarlos.

Si quiero formar cuadros con el mismo número de filas y de columnas, como mucho podré hacerlos de $\sqrt{100} = 10$ monedas, así que podré hacer cuadros de 1×1 , de 2×2 , de 3×3 hasta de 10×10 , lo que me indica que tengo 10 maneras distintas.

DEBES SABER HACER

- 1.** Escribe un número que tenga 6 decenas de millar, la tercera parte son unidades de millar, 3 centenas y el triple de unidades que de centenas.

$$62\,309$$

- 2.** Escribe en el sistema de numeración decimal estos números romanos.

a) XXIV b) CDXIV c) MCMI

a) XXIV = 24 b) CDXIV = 414 c) MCMI = 1 901

- 3.** ¿Cuántas unidades hay que añadir al dividendo de la división $186 : 24$ para que el resto sea 0?

$$186 = 24 \cdot 7 + 18 \quad \cdot \quad 24 \cdot 8 - 186 = 192 - 186 = 6$$

Hay que añadir 6 unidades para que el resto sea 0.

- 4.** Completa en tu cuaderno.

a) $4^7 = \square : 5^7$ b) $3^5 = 9^7 : \square$ c) $(\square^{\square})^3 = 2^{12}$

a) 20^7 b) 3^9 c) 2^4

- 5.** Calcula la raíz cuadrada entera y el resto de 462.

$$462 = 21^2 + 21 \rightarrow \sqrt{462} \approx 21 \text{ y resto} = 21.$$

- 6.** Calcula el resultado de las operaciones.

a) $6 + 2 \cdot (\sqrt{49} + 5 \cdot \sqrt{1})$

b) $4^2 - \sqrt{16 + 9} : (4 + 5^0)$

c) $(5^3 - 6^2 - 3^2) : \sqrt{16} + (2^3)^2$

a) $6 - 2 \cdot (\sqrt{49} - 5 \cdot \sqrt{1}) = 6 - 2 \cdot 12 = 6 - 24 = 30$

b) $4^2 - \sqrt{16 - 9} : (4 + 5^0) = 16 - 5 : 5 = 16 - 1 = 15$

c) $(5^3 - 6^2 - 3^2) : \sqrt{16} + (2^3)^2 = 80 : 4 - 64 = 20 - 64 = 84$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

149. En España los números de teléfono tienen nueve dígitos, excepto los números especiales como el 112, número único para emergencias; el 091, teléfono de la policía...

Aunque hay diferencias entre las numeraciones de los teléfonos fijos y los móviles:

- Los números de la red fija empiezan por 9, excepto dos operadoras que también ofrecen el 8.
- Y los números de telefonía móvil comienzan por 6 o 7.

En cierta ocasión, la madre de Marta tuvo un accidente doméstico: se le derramó el café sobre la agenda y se le borraron algunas cifras de sus números de teléfono.

- Hoy necesita llamar al Centro Médico. ¿Cuáles son los posibles números del Centro Médico?
- Si el número del Centro Asociado tenía todas las cifras distintas, ¿cuáles son los posibles números?
- El número del carpintero era un móvil que terminaba en 0 o en 1. ¿Cuáles son los posibles números del carpintero?



- a) Hay 100 números distintos posibles para el Centro Médico, van desde 958 543 000 hasta 958 543 990.
- b) El número del Centro Asociado es de la forma 954 37_06_, y los únicos números que no aparecen en el número son 1, 2 y 8.
En total tengo 6 opciones, porque puedo elegir los números en tres parejas (1, 2), (1, 8) y (2, 8) para rellenar los dos huecos.
También son correctas las que tienen los mismos dígitos pero cambiados de orden (2, 1), (8, 1) y (8, 2) ya que generan números distintos.
- c) En total hay 20 números posibles, que van desde 657 340 000 y 657 340 001 al 657 340 090 y 657 340 091.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

150. Completa en tu cuaderno las cifras que faltan para que las siguientes igualdades se cumplan.

- a) $5\square39 + 7\square = 5517$
 - b) $3\square72 - 42\square = 2947$
 - c) $6453 - 7\square8 = 5\square65$
 - d) $987 \cdot \square6 = 25662$
 - e) $24\square \cdot 23 = 5635$
- a) $5\square39 - 7\square = 5517 \rightarrow 5439 + 78 = 5517$
 b) $3\square72 - 42\square = 2947 \rightarrow 3372 - 425 = 2947$
 c) $6453 - 7\square8 = 5\square65 \rightarrow 6453 - 788 = 5665$
 d) $987 \cdot \square6 = 25662 \rightarrow 987 \cdot 26 = 25662$
 e) $24\square \cdot 23 = 5635 \rightarrow 245 \cdot 23 = 5635$

151. Razona si las siguientes igualdades son ciertas o no.

- | | |
|-------------------------------|---|
| a) $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4$ | d) $\sqrt{24 \cdot 54} = 2^2 \cdot 3^2$ |
| b) $(\sqrt{9^2})^2 = 9^2$ | e) $\sqrt{\sqrt{16}} = 2$ |
| c) $\sqrt{(5+1)^2} = 5+1$ | f) $\sqrt{9} - \sqrt{3+1} = \sqrt{9-(3+1)}$ |
- a) $\sqrt{3^2 - 4^2} = 3 - 4 \rightarrow$ Falso, porque $\sqrt{3^2 - 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 7$
 b) $\sqrt{9^2} = 9^2 \rightarrow$ Verdadero, porque el cuadrado anula la raíz.
 c) $\sqrt{5^2 - 1^2} = 5 + 1 \rightarrow$ Verdadero, porque el cuadrado anula la raíz.
 d) $\sqrt{24 \cdot 54} = 2^2 \cdot 3^2 \rightarrow$ Verdadero, porque $24 \cdot 54 = 36^2$.
 e) $\sqrt{\sqrt{16}} = 2 \rightarrow$ Verdadero, porque $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$.
 f) $\sqrt{9} - \sqrt{3+1} = \sqrt{9-3-1} \rightarrow$ Falso, porque $\sqrt{9} - \sqrt{3+1} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$.

152. Pon los 20 primeros números como suma de, a lo más, cuatro números al cuadrado.

Por ejemplo:

$$7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

$1 = 1^2,$	$2 = 1^2 + 1^2,$	$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2,$	$4 = 2^2,$	$5 = 2^2 + 1^2,$
$6 = 2^2 + 1^2 + 1^2,$	$7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,$	$8 = 2^2 + 2^2,$	$9 = 3^2,$	$10 = 3^2 + 1^2,$
$11 = 3^2 + 1^2 + 1^2,$	$12 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,$	$13 = 3^2 + 2^2,$	$14 = 3^2 + 2^2 + 1^2,$	$15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$
$16 = 4^2,$	$17 = 4^2 + 1^2,$	$18 = 4^2 + 1^2 + 1^2,$	$19 = 4^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,$	$20 = 4^2 + 2^2$

153. Utiliza la calculadora para encontrar un número que tenga las mismas propiedades que el número 24.

- Ser anterior a un cuadrado perfecto (25).
- Su doble más 1 es otro cuadrado perfecto:

$$2 \cdot 24 + 1 = 49$$

Ensaya con los números anteriores a los cuadrados perfectos. Por ejemplo, $40^2 = 1600$; el número anterior a este cuadrado perfecto es 1599:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1599 + 1 &= 3199 \\ 56^2 = 3136 &< 3199 < 3249 = 57^2 \end{aligned}$$

El número 3199 no es un cuadrado perfecto; por tanto, 1599 no cumple la propiedad que estamos buscando.

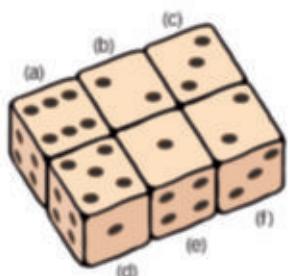
Respuesta abierta. Por ejemplo: $840 \rightarrow 840 + 1 = 841 = 29^2 \quad 2 \cdot 840 + 1 = 1681 = 41^2$

PRUEBAS PISA

154. En este dibujo puedes ver seis dados, etiquetados desde la (a) a la (f). Hay una regla que cumplen todos los dados:

La suma de los puntos de dos caras opuestas de cada dado es siempre siete.

Escribe en cada casilla de la tabla siguiente el número que tiene la cara inferior del dado correspondiente en el dibujo.

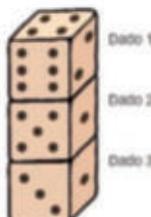


(a)	(b)	(c)
1	5	4
2	6	5
(d)	(e)	(f)

(Prueba PISA 2003)

155. Ahora se han colocado los dados como en la imagen; los tres dados se han colocado uno encima del otro. Como puedes observar, el dado 1 tiene cuatro puntos en la cara de arriba.

Recuerda la regla del ejercicio anterior:



La suma de los puntos de dos caras opuestas de cada dado es siempre siete.

¿Cuántos puntos hay en total en las cinco caras horizontales que no se pueden ver (cara de abajo del dado 1, caras de arriba y de abajo de los dados 2 y 3)?

(Prueba PISA 2003)

La cara horizontal del dado que no se ve es 3, y como las dos caras opuestas de un dado suman siempre 7, eso implica que las que no se ven del dado 2 y del dado 3 suman 7, así que en total, en las 5 caras que no se ven hay $7 + 7 + 3 = 17$.

Divisibilidad

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Decide si estas divisiones son exactas o no.

a) $54 : 6$

c) $81 : 9$

b) $45 : 4$

d) $72 : 7$

a) Exacta.

$$\begin{array}{r} 54 \\ \hline 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

c) Exacta.

$$\begin{array}{r} 81 \\ \hline 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

b) No exacta.

$$\begin{array}{r} 45 \\ \hline 4 \\ \hline 05 \\ \quad 11 \\ \quad \quad 1 \end{array}$$

d) No exacta.

$$\begin{array}{r} 72 \\ \hline 7 \\ \hline 02 \\ \quad 10 \\ \quad \quad 2 \end{array}$$

2. Realiza la prueba de la división en las divisiones de la actividad anterior.

a) $6 \cdot 9 = 54$

c) $9 \cdot 9 = 81$

b) $4 \cdot 11 + 1 = 44 + 1 = 45$

d) $7 \cdot 10 + 2 = 70 + 2 = 72$

3. Comprueba si estas divisiones están bien resueltas realizando la prueba de la división.

a) $59 \longdiv{18}$

b) $112 \longdiv{6}$

a) $18 \cdot 3 + 5 = 54 + 5 = 59$. La división está bien resuelta.

b) $18 \cdot 6 + 4 = 108 + 4 = 112$. La división está bien resuelta.

VIDA COTIDIANA

No está claro quién inventó la grapadora, este invento sencillo que, sirviéndose de unas piezas metálicas con forma de U, las grapas, ha llegado a convertirse en la forma más sencilla de unir papel de todos los tiempos.

- En las especificaciones de la grapadora dice que puede grapar hasta 15 folios. ¿Cuántas grapas como mínimo necesito para grapar 105 folios?

Si cada grapa vale para 15 folios, agrupamos los 105 folios en grupos de 15, de modo que tenemos $105 : 15 = 7$ grupos de folios, nos hacen falta 7 grapas como mínimo.

RESUELVE EL RETO

Si soy un número..., ¿los divisores de mis divisores son mis divisores?

Sí.

Después del 11, ¿cuáles son los siguientes tres números primos capicúas?

Los siguientes primos capicúas con 101, 131 y 151.

Divisibilidad

Si un número es múltiplo de otro, ¿cuál es el máximo común divisor de los dos números?

El máximo común divisor de los dos números es el menor de ellos.

Si un número es divisor de otro, ¿cuál es el mínimo común múltiplo de los dos números?

El mínimo común múltiplo de ambos es el mayor de ellos.

ACTIVIDADES

1. Comprueba si existe relación de divisibilidad entre estos números.

- a) 224 y 40 d) 654 y 32
- b) 450 y 50 e) 918 y 54
- c) 400 y 16 f) 568 y 46

- a) 224 no es divisible por 40.
- b) 450 es divisible por 50.
- c) 400 es divisible por 16.
- d) 654 no es divisible por 32.
- e) 918 es divisible por 54.
- f) 568 no es divisible por 465.

2. ¿Cuál de los siguientes números está contenido un número exacto de veces en 288?

- a) 20
- b) 36
- c) 42
- d) 8
- e) 16
- f) 24

Que un número esté contenido un número exacto de veces en el 288 significa que existe relación de divisibilidad con el número 288. Esto se da con los números 36, 8, 16 y 24.

3. ¿Es divisible 144 por alguno de los siguientes números?

- a) 2
- b) 3
- c) 6
- d) 8
- e) 10
- f) 144
- g) 288
- h) 7
- i) 1

Si es divisible por alguno de los números es porque existe relación de divisibilidad entre el número y 144. Los números por los que es divisible 144 entre los que aparecen son: 2, 3, 6, 8, 144 y 1.

4. Si un número a contiene b veces a otro número c , ¿cuál de las igualdades que ves a continuación es cierta?

- a) $c = a \cdot b$
- b) $b = a \cdot c$
- c) $a = b \cdot c$

La respuesta es el apartado c) $a = b \cdot c$.

5. Completa en tu cuaderno.

a) Como $36 : 4$ es una división exacta

Entonces 36 es ... de 4

b) Como $45 : 9$ es ...

Entonces 45 es múltiplo de 9

c) Como $51 : 18$ no es ...

Entonces 51 no es ... de 18

a) Como $36 : 4$ es una división exacta. Entonces 36 es **múltiplo** de 4 .

b) Como $45 : 9$ es **una división exacta**. Entonces 45 es múltiplo de 9 .

c) Como $51 : 18$ no es **una división exacta**. Entonces 51 no es **múltiplo** de 18 .

6. Indica los seis primeros múltiplos de 12.

Los seis primeros múltiplos de 12 son $12, 24, 36, 48, 60$ y 72 .

7. ¿Son estos números múltiplos de 6?

- a) 18 b) 260 c) 84 d) 136

a) Sí, porque $18 = 6 \cdot 3$.

b) No, porque 260 no es divisible entre 3 .

c) Sí, porque $84 = 28 \cdot 3$.

d) No, porque 136 no es divisible entre 3 .

8. Razona si es cierto o falso.

a) Cualquier número es múltiplo de 1 .

b) Cualquier número es divisible por sí mismo.

a) Verdadero, porque para todo número a , $a = 1 \cdot a$.

b) Verdadero, porque para todo número a , $a : a = 1$.

9. ¿De cuáles de estos números es divisor 8?

- a) 144 c) 18 e) 120

- b) 56 d) 24 f) 112

a) Sí, porque $144 = 8 \cdot 18$

c) No, porque $18 = 8 \cdot 2 + 2$

e) Sí, porque $120 = 8 \cdot 15$

b) Sí, porque $56 = 8 \cdot 7$

d) Sí, porque $24 = 8 \cdot 3$

f) Sí, porque $112 = 8 \cdot 14$

10. Indica los divisores en cada caso.

- a) $52 : 2 = 26$ b) $36 : 4 = 9$ c) $75 : 3 = 25$

a) Los divisores de 52 son 2 y 26 .

b) Los divisores de 36 son 4 y 9 .

c) Los divisores de 75 son 3 y 25 .

Divisibilidad

11. Razona si es verdadero o falso.

- a) Cualquier número es divisor de 1.
- b) 1 es divisor de cualquier número.
- c) 1 es múltiplo de cualquier número.
- d) Cualquier número impar es múltiplo de 3.
- e) Cualquier número es divisor de su doble.
 - a) Falso. Solo el 1 es divisor del 1.
 - b) Verdadero.
 - c) Falso. El 1 solo es múltiplo de sí mismo.
 - d) Falso. Por ejemplo, 5 es impar y no es múltiplo de 3.
 - e) Verdadero.

12. Encuentra todos los divisores de estos números.

- | | | |
|-------|-------|--------|
| a) 10 | d) 26 | g) 33 |
| b) 25 | e) 49 | h) 121 |
| c) 12 | f) 20 | i) 45 |
-
- | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| a) 1, 2, 5 y 10 | d) 1, 2, 13 y 26 | g) 1, 3, 11 y 33 |
| b) 1, 5 y 25 | e) 1, 7 y 49 | h) 1, 11 y 121 |
| c) 1, 2, 3, 4, 6 y 12 | f) 1, 2, 4, 5, 10 y 20 | i) 1, 3, 5, 9, 15 y 45 |

13. Halla todos los divisores de estos números.

- | | | |
|--------|--------|---------|
| a) 36 | c) 225 | e) 1225 |
| b) 100 | d) 845 | f) 2412 |
-
- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18 y 36 | d) 1, 5, 13, 65, 169 y 845 |
| b) 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100 | e) 1, 5, 7, 25, 35, 49, 175, 245 y 1225 |
| c) 1, 3, 5, 9, 25, 45, 75 y 225 | h) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, 67, 134, 201, 268, 402, 603, 804, 1206 y 2412 |

14. Lucía tiene 24 lápices de colores.

- a) ¿Cuántos grupos de 6 lápices puede hacer?
- b) ¿Cuántos lápices habrá en cada grupo si quiere hacer tres grupos?



- a) 4, porque $4 \cdot 6 = 24$
- b) 8, porque $3 \cdot 8 = 24$

15. Estos son todos los divisores de un número. Completa en tu cuaderno los números que faltan.

- a) {1, 2, 4, 5, , }
 - b) {1, , 3, 5, , 10, 15, }
 - c) {1, 2, 3, , 5, 6, , , 15, 20, , }
 - d) {, 3, 7, }
- a) 10 y 20 b) 2, 6 y 30 c) 4, 10, 12, 30 y 60 d) 1 y 21

16. Queremos repartir 50 caramelos entre un grupo de niños, de tal manera que a todos les corresponda el mismo número de caramelos.



Si no podemos partir los caramelos:

- a) ¿Cuántos niños puede haber en el grupo?
 - b) ¿A cuántos caramelos tocarán?
- a) 1, 2, 5, 10, 25 y 50
 b) Respectivamente, según el número de niños indicado en el apartado anterior: 50, 25, 10, 2 y 1.

17. Averigua si estos números son primos o compuestos.

- a) 101 b) 113 c) 121 d) 149
- a) 101 es primo. c) 121 es compuesto.
 b) 113 es primo. d) 149 es primo.

18. Aplica los criterios de divisibilidad para indicar los divisores de estos números.

- a) 51 b) 512 c) 5125 d) 51250
- a) $\text{Div}(51) = \{1, 3, 17, 51\}$
 b) $\text{Div}(512) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$
 c) $\text{Div}(5125) = \{1, 5, 25, 41, 125, 205, 1025, 5125\}$
 d) $\text{Div}(51250) = \{1, 2, 5, 10, 25, 41, 50, 82, 125, 205, 250, 410, 625, 1025, 1250, 2050, 5125, 10250, 25625, 51250\}$

19. Completa en tu cuaderno los siguientes números para que sean divisibles por 3.

- a) 45 c) 62 e) 114
 b) 78 d) 194 f) 201
- a) 0, 3, 6 o 9 c) 1, 4 o 7 e) 0, 3, 6 o 9
 b) 3, 6 o 9 d) 1, 4 o 7 f) 0, 3, 6 o 9

Divisibilidad

20. ¿Hay algún número primo que acabe en 2? ¿Y en 3? Razona tu respuesta.

Solo acaba en 2 y es primo el número 2, porque cualquier otro número que acabe en 2 es par y divisible entre 2.

Sí hay primos que acaben en 3, como el 3, el 13, el 23, el 43... Aunque no todos los que acaban en 3 son primos, como por ejemplo 33.

21. Decide si estos números son primos o compuestos aplicando los criterios de divisibilidad.

- | | |
|--------|---------|
| a) 39 | d) 196 |
| b) 440 | e) 126 |
| c) 137 | f) 1001 |

a) Compuesto, pues $3 + 9 = 12 \rightarrow$ Es divisible entre 3.

b) Compuesto, pues es par \rightarrow Es divisible entre 2.

c) Es primo.

d) Compuesto, pues es par \rightarrow Es divisible entre 2.

e) Compuesto, pues es par \rightarrow Es divisible entre 2.

f) Compuesto, pues la diferencia entre la suma de las cifras en lugar par y la suma de las cifras en lugar impar es 0
 \rightarrow Es divisible entre 11.

22. Descompón los números 8, 20, 45, 70 y 100 en producto de:

- a) Dos factores. b) Cuatro factores.

a) Respuesta abierta.

Por ejemplo: $8 = 2 \cdot 4$, $20 = 5 \cdot 4$, $45 = 5 \cdot 9$, $70 = 2 \cdot 35$ $100 = 2 \cdot 50$

b) Respuesta abierta.

Por ejemplo: $8 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ $20 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ $45 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
 $70 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$ $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

23. María ha escrito un número de 12 cifras que acaba en 6. ¿Es primo o compuesto?

Es compuesto, porque el 6 es un número par, y significa que el número es divisible al menos entre 2.

24. ¿En qué cifras terminan los números primos menores que 70? ¿Son primos todos los números que terminan en esas cifras?

Los primos menores que 70 acaban en: 1, 2, 3, 5, 7 o 9.

No, por ejemplo el 21, el 22, el 33, el 35, el 27 y el 49 no lo son.

25. Un número capicúa de 3 cifras es de la forma aba , con a y b números de una cifra. ¿Cuál es el menor número primo capicúa de 3 cifras? ¿Hay algún número primo que acabe en 2? ¿Y en 3? Razona tu respuesta.

El 101, que es primo con $a = 1$ y $b = 0$, y no hay ningún número capicúa de 3 cifras más pequeño.

26. Escribe una descomposición en factores de estos números.

- a) 30 c) 98 e) 38
 b) 65 d) 104 f) 72

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$	c) $98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$	e) $38 = 2 \cdot 19$
b) $65 = 5 \cdot 13$	d) $104 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$	f) $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

27. Escribe tres factorizaciones para el número 320, en las que aparezca el factor 2.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $320 = 2 \cdot 10 \cdot 16$ $320 = 2 \cdot 5 \cdot 32$ $320 = 2 \cdot 4 \cdot 40$

28. ¿A qué número corresponden estas factorizaciones?

- a) $2^4 \cdot 3 \cdot 5$ b) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ c) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
 a) 240 b) 540 c) 600

29. La descomposición en factores primos de un número es $2 \cdot 3 \cdot 5$. ¿Cuál sería la factorización si lo multiplicamos por 6? ¿Y si lo multiplicamos por 10? ¿Y por 15?

Si lo multiplicamos por 6: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Si lo multiplicamos por 10: $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Si lo multiplicamos por 15: $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

30. Factoriza estos números.

- | | | | |
|---------------------|-----------------------|-------------------------|------------------------|
| a) 15 | c) 24 | e) 55 | g) 86 |
| b) 16 | d) 29 | f) 72 | h) 99 |
| a) $15 = 3 \cdot 5$ | c) $24 = 2^3 \cdot 3$ | e) $55 = 5 \cdot 11$ | g) $86 = 2 \cdot 43$ |
| b) $16 = 2^4$ | d) $29 = 29$ | f) $72 = 2^3 \cdot 3^2$ | h) $99 = 3^2 \cdot 11$ |

31. Descompón estos números en factores primos.

- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) 270 | c) 400 | e) 675 |
| b) 2470 | d) 405 | f) 943 |
| a) $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$ | c) $400 = 2^4 \cdot 5^2$ | e) $675 = 3^3 \cdot 5^2$ |
| b) $2470 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$ | d) $405 = 3^4 \cdot 5$ | f) $943 = 23 \cdot 41$ |

32. Escribe la descomposición factorial de estos números partiendo de la descomposición del número $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.

- | | | |
|--|--|--------|
| a) 84 | c) 126 | e) 420 |
| b) 840 | d) 168 | f) 210 |
| a) $84 = 42 \cdot 2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ | d) $168 = 42 \cdot 4 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ | |
| b) $840 = 42 \cdot 20 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ | e) $420 = 42 \cdot 10 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ | |
| c) $126 = 42 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ | f) $210 = 42 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ | |

Divisibilidad

33. Escribe como descomposición de factores primos.

- a) $16 \cdot 27 \cdot 12$
 - b) $10 \cdot 12 \cdot 18$
 - c) $10^2 \cdot 15^3$
 - d) $12^4 \cdot 9^2$
 - e) $27^3 \cdot 21^2$
- a) $2^6 \cdot 3^4$ b) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$ c) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ d) $2^8 \cdot 3^8$ e) $3^{11} \cdot 7^2$

34. Contesta razonadamente si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) En la descomposición en factores primos de 320 aparecen los factores 2, 4 y 5.
 - b) El factor 3 aparece tres veces en la descomposición en factores primos de 540.
 - c) Cualquier número acabado en 0 tiene, al menos, dos factores primos en su descomposición.
- a) Falso: 4 no es un factor primo.
b) Verdadero: la descomposición es $540 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$.
c) Verdadero: todo número acabado en 0 es divisible al mismo tiempo por el 2 y el 5.

35. Escribe todos los divisores de 18 y 72, y encuentra los que sean comunes. Indica cuál es el mayor divisor común.

Divisores de 18: **1, 2, 3, 6, 9 y 18**.

Divisores de 72: **1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72**.

Los divisores comunes son: 1, 2, 3, 6, 9 y 18.

El máximo común divisor será el 18.

36. Halla el máximo común divisor.

- a) 8 y 10 c) 30 y 75 e) 25 y 70
 - b) 15 y 20 d) 8 y 12 f) 32 y 35
- a) m.c.d. (8, 10) = 2 c) m.c.d. (30, 75) = 15 e) m.c.d. (25, 70) = 5
b) m.c.d. (15, 20) = 5 d) m.c.d. (8, 12) = 4 f) m.c.d. (32, 35) = 1

37. Si m.c.d. (18, 28) = 2, calcula, sin factorizar, el máximo común divisor de:

- a) m.c.d. (36, 56) b) m.c.d. (54, 84)
- a) m.c.d. (36, 56) = 4 b) m.c.d. (54, 84) = 6

38. Encuentra tres parejas de números cuyo máximo común divisor sea 1. ¿Qué condición tienen que cumplir?

Respuesta abierta. Por ejemplo: (4, 7), (4, 9) y (7, 9).

La condición que cumplen es que no compartan ningún divisor además del 1, es decir, son primos entre sí.

- 39.** David tiene 72 coches y 126 motos en su colección de vehículos en miniatura y quiere colocarlos en las estanterías de su dormitorio sin mezclarlos.

Quiere que haya el mismo número de vehículos en cada estantería y, además, para no utilizar mucho espacio, quiere colocar el mayor número de ellos en cada una. Si no quiere que le sobren ningún coche ni ninguna moto:

- ¿Cuántos coches y motos tendrá que poner en cada estantería?
- ¿Cuántas estanterías necesita?
 - Como el m.c.d. $(72, 126) = 18$ ese es el número de vehículos en cada estantería.
 - Necesita $(72 + 126) : 18 = 11$ estanterías.

- 40.** En un establecimiento hay que repartir en lotes iguales 30 cajas de vajillas, 18 estuches de cuberterías y 54 mantelerías. Cada lote debe tener el máximo número de cada producto. ¿Cuántas vajillas, cuberterías y mantelerías habrá en cada lote?



Se calcula el m.c.d. $(18, 30, 54) = 6 \rightarrow$ Se podrá hacer un máximo de 6 lotes.

Cada lote tendrá 5 vajillas, 3 estuches de cuberterías y 9 mantelerías para que sean iguales.

- 41.** Escribe los primeros múltiplos de 16 y 18, y encuentra los que sean comunes. Indica cuál es el menor múltiplo común.

Múltiplos de 16: 16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144...

Múltiplos de 18: 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144...

El primer múltiplo común es 144, por tanto, m.c.m. $(16, 18) = 144$.

- 42. Encuentra el mínimo común múltiplo.**

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| a) 8 y 10 | c) 15 y 25 | e) 6 y 32 |
| b) 5 y 12 | d) 4 y 20 | f) 14 y 147 |
| a) m.c.m. $(8, 10) = 40$ | c) m.c.m. $(15, 25) = 75$ | e) m.c.m. $(6, 32) = 96$ |
| b) m.c.m. $(5, 12) = 60$ | d) m.c.m. $(4, 20) = 20$ | f) m.c.m. $(14, 147) = 294$ |

- 43.** Si m.c.m. $(36, 27) = 2^3 \cdot 3^3$, calcula, sin hacer las descomposiciones factoriales, el mínimo común múltiplo de estos números.

- m.c.m. $(72, 54) = 2^3 \cdot 3^3$
- m.c.m. $(72, 27) = 2^3 \cdot 3^3$

- 44. ¿Existe alguna pareja de números cuyo mínimo común múltiplo sea 1?**

De la única forma que pueda pasar es que la pareja sea el $(1, 1)$.

De no ser así, el $\text{m.c.m. } (a, b) \geq \text{máx}(a, b) > 1$, en cualquier caso en el que a o b sea distinto de 1.

Divisibilidad

45. Alfonso y Mariano han coincidido hoy en la peluquería. Alfonso se corta el pelo cada 42 días, y Mariano lo hace cada 56. Si hoy es 1 de febrero, ¿qué día volverán a coincidir en la peluquería?

Lo primero que hay que calcular es el m.c.m. $(42, 56) = 168$. Por tanto, coincidirán a los 168 días.

Si la primera vez es el 1 de febrero, y febrero tiene 28 días, marzo 31, abril 30, mayo 31 y junio 30, coincidirán el $28 + 31 + 30 + 31 + 30 = 150$, por lo que coincidirán el día 18 de julio.

46. En la feria hay tres atracciones que funcionan a la vez. El viaje en noria dura 10 minutos, los coches eléctricos duran 12 minutos y el tren de la bruja, 18 minutos. Si han comenzado a funcionar las tres a la vez, a las 17:45 de la tarde, ¿a qué hora volverán a iniciar su funcionamiento a la vez?



Lo primero es calcular el m.c.m. $(10, 12, 18) = 180$. Eso quiere decir que coincidirán cada 180 minutos, que son 3 horas. Por tanto, si coinciden por primera vez a las 17:45 h, volverán a coincidir 3 horas más tarde, es decir, a las 20:45 h.

47. En una calle, cuatro establecimientos tienen luces intermitentes como decoración navideña. Los intervalos de tiempo durante los que están encendidas son 2, 3, 6 y 8 segundos, respectivamente. Si inician el encendido todas a la vez, a las 7 de la tarde, ¿cuánto tiempo transcurre hasta que vuelven a encenderse todas al mismo tiempo?

m.c.m. $(2, 3, 6, 8) = 24 \rightarrow$ Volverán a coincidir a las 19:00:24, es decir, 24 segundos después de la primera vez.

48. Carmen tiene 4 tipos de cajas con distintas alturas: 12 cm, 15 cm, 18 cm y 20 cm, respectivamente. Quiere colocarlas en columnas, de forma que cada columna tenga solo un tipo de caja y que todas las columnas tengan la misma altura. ¿Cuántas cajas de zapatos tendrá cada columna?



m.c.m. $(12, 15, 18, 20) = 180$ es la altura mínima de las columnas. Por tanto:

- De las cajas de 12 cm habrá que apilar $180 : 12 = 15$ cajas.
- De las cajas de 15 cm habrá que apilar $180 : 15 = 12$ cajas.
- De las cajas de 18 cm habrá que apilar $180 : 18 = 10$ cajas.
- De las cajas de 20 cm habrá que apilar $180 : 20 = 9$ cajas.

ACTIVIDADES FINALES

49. Escribe en términos de división los siguientes enunciados.

- a) 42 contiene exactamente 3 veces a 14.
 - b) Entre 56 y 8 existe una relación de divisibilidad.
 - c) 34 es divisible por 2.
 - d) 5 está contenido exactamente 4 veces en 20.
- a) $42 = 3 \cdot 14$ b) $56 : 8 = 7$ c) $34 = 2 \cdot 17$ d) $20 = 5 \cdot 4$

50. Di si existe relación de divisibilidad entre:

- a) 135 y 45 c) 238 y 16
 b) 172 y 43 d) 225 y 25

- a) $135 = 45 \cdot 3 \rightarrow$ Existe relación de divisibilidad.
 b) $172 = 43 \cdot 4 \rightarrow$ Existe relación de divisibilidad.
 c) $238 = 16 \cdot 14 + 14 \rightarrow$ No existe relación de divisibilidad.
 d) $225 = 25 \cdot 9 \rightarrow$ Existe relación de divisibilidad.

51. Razona si son ciertas o falsas las afirmaciones:

- a) $51 = 3 \cdot 17$, luego 3 y 17 son divisores de 51.
 b) $3 \cdot 2 \cdot 17 + 3$ es divisible por 3, por 2 y por 17.
 c) $5 \cdot 17 - 5$ contiene exactamente 16 veces a 5.
 d) $18 + 18 + 18$ contiene exactamente 2 veces a 27.
 e) $67 = 17 \cdot 3 + 16$, por lo que 3 no es divisor de 67, pero 17 sí.
 a) Verdadera, $51 : 3 = 17$ y $51 : 17 = 3$.
 b) Falsa, si a un múltiplo de 2 se le suman 3 unidades, pasa a ser impar, con lo que no es divisible entre 2.
 c) Verdadera, $5 \cdot 17 - 5 = 5 \cdot 16 = 80$.
 d) Verdadera, porque $18 + 18 + 18 = 54$ y $27 + 27 = 54$.
 e) Falsa, si 3 no es divisor de 67, tampoco lo puede ser 17, porque el resto al dividirlo por uno y otro es distinto de 0 en ambos casos.

52. Encuentra todas las parejas de números, menores que 20, que tienen relación de divisibilidad.

Por ejemplo:

- 4 es divisible por 2.
- 12 es divisible por 3.
- 15 es divisible por 5.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 4 es divisible entre 2. | 6 es divisible entre 3. | 10 es divisible entre 5. |
| 6 es divisible entre 2. | 9 es divisible entre 3. | 15 es divisible entre 5. |
| 8 es divisible entre 2. | 12 es divisible entre 3. | 20 es divisible entre 5. |
| 10 es divisible entre 2. | 15 es divisible entre 3. | 12 es divisible entre 6. |
| 12 es divisible entre 2. | 18 es divisible entre 3. | 18 es divisible entre 6. |
| 14 es divisible entre 2. | 8 es divisible entre 4. | 14 es divisible entre 7. |
| 16 es divisible entre 2. | 12 es divisible entre 4. | 16 es divisible entre 8. |
| 18 es divisible entre 2. | 16 es divisible entre 4. | 18 es divisible entre 9. |
| 20 es divisible entre 2. | 20 es divisible entre 4. | 20 es divisible entre 10. |

Divisibilidad

53. Cuál de estas series está formada por múltiplos de 4? ¿Y por múltiplos de 5?

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| a) 1, 4, 9, 16, 25... | d) 4, 8, 16, 24, 32, 40... |
| b) 5, 10, 15, 20... | e) 1, 5, 10, 20, 30... |
| c) 8, 10, 12, 14, 16... | f) 20, 40, 60, 80... |

Por múltiplos de 4 las series d) y f).

Por múltiplos de 5 las series b) y f).

54. Escribe los diez primeros múltiplos de 5 que sean también múltiplos de 2. ¿Qué característica común tienen?

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 y 100. Todos son múltiplos de 10, es decir, terminan en 0.

55. Halla tres números que sean múltiplos de 6 y de 5 a la vez. ¿Son múltiplos de 10?

Por ejemplo: 30, 60 y 90. Todos son múltiplos de 10, porque al ser divisibles entre 5 tienen que acabar en 5 o 0, y al ser también divisibles entre 6, no pueden acabar en 5.

56. Encuentra tres números que sean múltiplos de 10 y de 3 a la vez. Observa los números que has escrito y contesta.

- a) ¿Son múltiplos de 6?
- b) ¿Son múltiplos de 15?
- c) ¿Son múltiplos de 30?

Respuesta abierta. Por ejemplo: 30, 60 y 90.

- a) Sí, porque son múltiplos de 2 y de 3.
- b) Sí, porque son múltiplos de 3 y de 5.
- c) Sí, porque son múltiplos de 2, 3 y 5.

57. Observa la siguiente tabla y relaciona los números de la primera columna con aquellos de la segunda que sean múltiplos suyos.

Número	Múltiplo
2	12
3	15
5	27
6	36
7	40
8	51
9	80
10	20
18	90

El 2 está relacionado con 12, 36, 40, 80, 20 y 90.

El 8 está relacionado con 40 y 80.

El 3 está relacionado con 12, 15, 27, 36, 51 y 90.

El 9 está relacionado con 27, 36 y 90.

El 5 está relacionado con 15, 40, 80, 20 y 90.

El 10 está relacionado con 40, 80, 20 y 90.

El 6 está relacionado con 12, 36 y 90.

El 18 está relacionado con 36 y 90.

El 7 no está relacionado con ninguno.

58. Escribe los múltiplos indicados en cada caso.

- a) Múltiplos de 2 comprendidos entre 105 y 130.
 - b) Múltiplos de 3 comprendidos entre 241 y 265.
 - c) Múltiplos de 3, pero que no lo sean de 2, comprendidos entre 50 y 70.
 - d) Múltiplos de 5, pero que no lo sean de 10, comprendidos entre 42 y 90.
 - e) Múltiplos de 9, pero que no lo sean de 3, comprendidos entre 50 y 100.
 - f) Múltiplos de 11 comprendidos entre 50 y 130.
- a) 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118, 120, 122, 124, 126, 128 y 130
 b) 243, 246, 249, 252, 255, 258, 261 y 264
 c) 51, 57, 63 y 69
 d) 45, 55, 65, 75 y 85
 e) Imposible, porque todos los múltiplos de 9 lo son también de 3.
 f) 55, 66, 77, 88, 99, 110 y 121

59. Escribe el primer múltiplo de 36 que sea mayor que 2000.

Si dividimos 2 000 entre 36, no tenemos una división exacta, el cociente sería 55, pero habría resto. De modo que $36 \cdot 55 < 2\,000$, pero $36 \cdot 56 > 2\,000$. Así que el múltiplo buscado será $36 \cdot 56 = 2\,016$.

60. Escribe dos números que sean múltiplos de 2 y 9 a la vez, que acaben en 0. ¿Son múltiplos de 6? ¿De qué más números son múltiplos?

Respuesta abierta. Por ejemplo: 90 y 180.

Son ambos múltiplos de 6.

Las condiciones pedidas las cumplen 90 y todos sus múltiplos, luego cualquiera de ellos es múltiplo de los divisores de 90, que son: $\text{Div}(90) = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$.

61. Escribe dos números que sean múltiplos de 3 y de 5 a la vez. ¿Son múltiplos de 15? ¿Y de 10?

Respuesta abierta. Por ejemplo: 15 y 45.

Son múltiplos de 15 porque lo son de 3 y de 5 a la vez. No tienen por qué ser múltiplos de 10.

62. ¿Cuántos múltiplos de 3 y de 8 a la vez hay que sean menores que 100?

En total hay cuatro: 24, 48, 72 y 96.

63. Escribe todos los números del 1 al 20.

- a) Señala los números que son múltiplo de otro número distinto.
- b) ¿Cuántos números no son múltiplo de ningún otro?
- c) ¿Cuál es el número que es múltiplo de más números?
 - a) 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 y 20
 - b) Todos son múltiplos de 1 y de sí mismos, si nos referimos a los que solo son múltiplos de ellos mismos y de la unidad, son: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19.
 - c) El 12, 18 y 20, que son, en total, múltiplos de 6 números distintos.

Divisibilidad

64. Encuentra el menor y el mayor número de tres cifras que sea múltiplo de:

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| a) 2 y 3 | c) 3 y 5 | | |
| b) 2 y 5 | d) 3 y 7 | | |
| a) 102 y 996 | b) 100 y 990 | c) 105 y 990 | d) 105 y 987 |

66. De un número se sabe que está entre 260 y 270. Además, también es múltiplo de 14. ¿Cuál es ese número?

$$260 = 14 \cdot 18 + 8 \quad 14 \cdot (18 + 1) = 14 \cdot 19 = 266, \quad 260 < 266 < 270$$

67. Enumera los números comprendidos entre 100 y 200 que son múltiplos de 5 y cumplen que:

- | | | | |
|--|--|--|--|
| a) La suma de sus cifras es igual a 6. | b) La suma de sus cifras es igual a 7. | c) La suma de sus cifras es igual a 8. | d) La suma de sus cifras es igual a 9. |
| a) 105 y 150 | b) 115 y 160 | c) 125 y 170 | d) 135 y 180 |

68. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones equivalen a esta: «La división de 56 entre 4 es exacta»?

- | | | | | | |
|------------------------|---------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|--|
| a) 56 es divisor de 4. | b) 56 es divisible por 4. | c) 4 es divisor de 56. | d) 4 es múltiplo de 56. | e) 56 es múltiplo de 4. | f) El resto de la división de 56 entre 4 es 0. |
|------------------------|---------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|--|

Equivalentes a la afirmación los apartados b), c), e) y f).

69. El resto de dividir 93 entre 9 es 3. Decide si las siguientes afirmaciones son correctas.

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------------------|--|---------------------------------|
| a) 3 es múltiplo de 9 y 93. | b) El resto es un divisor de 93. | c) Si a 93 le restamos 3 obtenemos un múltiplo de 9. | d) 93 es divisible entre 9 y 3. |
| a) Falsa | b) Verdadera | c) Verdadera | d) Falsa |

70. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y razona la respuesta:

- | | | | |
|--|---|--|--|
| a) Los únicos divisores de 12 son 2 y 4. | b) 2, 5 y 10 son divisores de 40. | c) Los divisores de 63 son 3 y 6. | d) Los divisores de 77 son 1, 7, 11 y 77. |
| a) Falsa. También son divisores de 12 el 1, el 3, el 6 y el propio 12. | b) Verdadera. La división por cualquiera de los tres números tiene resto 0. | c) Falsa. También son divisores 1, 7, 9, 21 y 63. El número 6 no es divisor. | d) Verdadera. No existen más números que al dividir 77 tengan resto 0. |

71. Dada la relación $104 = 4 \cdot 26$, ¿qué afirmaciones son verdaderas?

- a) 104 es divisible por 4. c) 26 es divisor de 104.
- b) 104 es múltiplo de 4. d) 104 es divisible por 26.
- a) Verdadera b) Verdadera c) Verdadera d) Verdadera

72. El número a es divisible por 4. Halla a si el cociente de la división es 29.

$$a = 29 \cdot 4 = 116$$

73. El número a no es divisible por 5. Halla a si el cociente de la división es 38 y el resto es 9.

$$a = 38 \cdot 5 + 9 = 199$$

74. Razona si son correctas las siguientes deducciones.

- a) Como 9 es divisor de 72, 3 también lo es.
- b) Como 3 es divisor de 42, 9 también lo es.
- a) Verdadera, porque 9 es múltiplo de 3.
- b) Falsa, porque $42 = 9 \cdot 4 + 6$, de modo que 9 no es divisor de 3.

75. Encuentra todos los divisores de cada uno de los 10 primeros números naturales.

$\text{Div } (1) = \{1\}$	$\text{Div } (4) = \{1, 2, 4\}$	$\text{Div } (7) = \{1, 7\}$	$\text{Div } (10) = \{1, 2, 5, 10\}$
$\text{Div } (2) = \{1, 2\}$	$\text{Div } (5) = \{1, 5\}$	$\text{Div } (8) = \{1, 2, 4, 8\}$	
$\text{Div } (3) = \{1, 3\}$	$\text{Div } (6) = \{1, 2, 3, 6\}$	$\text{Div } (9) = \{1, 3, 9\}$	

76. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y después aplica los criterios de divisibilidad para completarla, con «sí» o «no».

Divisible por	2	3	5	10	11
128	Sí	No	No	No	No
251	No	No	No	No	No
495	No	Sí	Sí	No	Sí
968	Sí	No	No	No	Sí
11616	Sí	Sí	No	No	Sí
5625	No	Sí	Sí	No	No

Divisibilidad

77. Un número es divisible entre 4 cuando sus dos últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de 4.
Copia la tabla en tu cuaderno y completa.

Divisible por	2	4
168	Sí	Sí
271	No	No
494	Sí	No
962	Sí	No
11610	Sí	No

78. Razona si todos los números divisibles por 2 son divisibles también por 4. ¿Y al revés?

Que un número sea divisible entre 2 no implica que también lo sea entre 4. Un ejemplo podría ser el número 6. Que es divisible entre dos pero no lo es entre 4.

Por otro lado, si un número es divisible entre 4, por fuerza tiene que ser un número par, por lo que también será divisible entre 2.

80. Comprueba si los siguientes números son divisibles entre 15.

- a) 205 b) 210 c) 215 d) 218 e) 220 f) 225

- a) $2 + 5 = 7$ que no es divisible entre 3 \rightarrow 205 no es divisible entre 15.
b) 210 es divisible entre 3 porque $2 + 1 + 0 = 3$ y entre 5, por lo que es divisible entre 15.
c) $2 + 1 + 5 = 8$ que no es divisible entre 3 \rightarrow 215 no es divisible entre 15.
d) 218 no es divisible entre 5 \rightarrow 218 no es divisible entre 15.
e) $2 + 2 + 0 = 4$ que no es divisible entre 3 \rightarrow 220 no es divisible entre 15.
f) 225 es divisible entre 3 porque $2 + 2 + 5 = 9$ y entre 5, por lo que es divisible entre 15.

81. Razona si los siguientes números son divisibles entre 33.

- a) 2145 c) 920 e) 3303
b) 462 d) 1848 f) 3003

$$33 = 3 \cdot 11$$

- a) 2 145 es divisible entre 33, porque es divisible entre 11 y también lo es entre 3.
b) 462 es divisible entre 33, porque lo es entre 11 y entre 3.
c) 920 no es divisible entre 3 ni entre 11, así que no es divisible entre 33.
d) 1 848 es divisible entre 33, porque lo es entre 11 y entre 3.
e) 3 303 no es divisible entre 11, así que no es divisible entre 33.
f) 3 003 es divisible entre 33, porque es divisible entre 11 y también lo es entre 3.

- 82.** Un número es divisible por 6 cuando lo es por 2 y 3 a la vez. Copia la tabla y complétala en tu cuaderno.

Divisible por	2	3	6
135	No	Sí	No
248	Sí	No	No
762	Sí	Sí	Sí
840	Sí	Sí	Sí
968	Sí	No	No
3054	Sí	Sí	Sí
4512	Sí	Sí	Sí

- 83.** Un número es divisible por 8 cuando sus tres últimas cifras son 0 o forman un múltiplo de 8. Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Divisible por	2	4	8
1000	Sí	Sí	Sí
1560	Sí	Sí	Sí
980	Sí	Sí	No
4120	Sí	Sí	Sí
13332	Sí	Sí	No
2408	Sí	Sí	Sí

- 84.** Un número es divisible entre 9 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9. Completa en tu cuaderno la tabla.

Divisible por	3	9
33	Sí	No
630	Sí	Sí
990	Sí	Sí
4920	Sí	No

- 85.** Encuentra tres números naturales que cumplan cada una de las siguientes condiciones.

- a) Divisibles por 2, por 4 y por 8 a la vez.
- b) Divisibles por 3, por 9 y por 27 a la vez.
- c) Divisibles por 2, por 3 y por 4 a la vez.
- d) Divisibles por 3, por 6 y por 9 a la vez.

Respuestas abiertas. Por ejemplo:

a) 8, 16 y 24

b) 27, 54 y 81

c) 12, 24 y 36

d) 18, 36 y 54

- 86.** Encuentra los múltiplos de 11 que se pueden formar con las cifras 1, 4, 3 y 6.

6413, 6314, 1463, 1364, 4631, 4136, 3641 y 3146

Divisibilidad

87. Utiliza las cifras 3, 4, 5 y 6 para escribir números de 4 cifras que sean divisibles entre 11.

3 465, 3 564, 6 435, 6 534, 5 643, 5 346, 4 653 y 4 356

88. ¿Puedes formar un múltiplo de 11 con las cifras 2, 4 y 5? Si es posible, indica cuáles, y si no es posible, indica por qué.

No se puede formar ningún número de 3 cifras múltiplo de 11 con las cifras 2, 4 y 5, porque no hay manera alguna de sumar 2 de estas cifras y restar otra para conseguir 0 o un múltiplo de 11, con lo que nunca se cumple el criterio de divisibilidad.

90. ¿Cuánto debe valer la cifra a para que el número $2a3a$ sea divisible entre 5? ¿Y para que sea divisible entre 3?

La cifra a tiene que valer 5 o 0 para ser divisible entre 5.

Para ser divisible entre 3, a tiene que ser 2, 5 u 8, de otro modo no cumple el criterio de divisibilidad.

91. ¿Cuánto debe valer a para que el número $2a31$ sea divisible entre 11? ¿Y para que sea divisible entre 3?

La cifra a tiene que valer 4, porque de otro modo no se cumple que $2 + 3 - (a + 1) = 0$ o múltiplo de 11.

Para ser múltiplo de 3, la suma $2 + a + 3 + 1 = 6 + a$ tiene que resultar un múltiplo de 3.

En este caso a puede ser 0, 3, 6 y 9.

92. Calcula el menor número que debemos sumar a 6 180 para obtener un múltiplo de 11.

$$6\,180 = 11 \cdot 561 + 9 \rightarrow 11 \cdot (561 + 1) = 6\,182$$

El menor número que se debe sumar es 2.

93. Razona si es cierto o falso.

- a) 3 es divisor de 153. d) 4 es divisor de 210.
- b) 5 es divisor de 250. e) 6 es divisor de 330.
- c) 10 es divisor de 410. f) 11 es divisor de 333.

a) Cierto. $1 + 5 + 3 = 9$ que es divisible entre 3 $\rightarrow 153$ es divisible entre 3.

b) Cierto. Como 250 acaba en 0 es divisible entre 5.

c) Cierto. Como 410 acaba en 0 es divisible entre 10.

d) Falso. 210 no es divisible entre 4 porque 10 no lo es.

e) Cierto. 330 es divisible entre 6 porque lo es a la vez entre 2 porque es par y de 3 porque $3 + 3 + 0 = 6$, que es múltiplo de 3.

f) Falso. 333 no es divisor de 11 porque $3 + 3 - 3 = 3$, que no es 0 ni un múltiplo de 11.

94. Clasifica estos números en primos y compuestos.

3 9 23 35 47 53 65 73 81 96

Primos: 3, 23, 47, 53 y 73.

Compuestos: 9, 35, 65, 81 y 96.

95. Copia en tu cuaderno y completa la tabla.

Número	Divisores	Primo/Compuesto
17	{1, 17}	Primo
29	{1, 29}	Primo
58	{1, 2, 29, 58}	Compuesto
72	{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}	Compuesto
97	{1, 97}	Primo
113	{1, 113}	Primo

96. Si la división $a : 4$ es exacta, ¿el número a es primo o compuesto?

Es un número compuesto, porque se puede dividir además de por el 1 y por sí mismo, por el 4.

En el caso que fuese el número 4, también sería un número compuesto, ya que el 4 es divisible entre 2.

97. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Un número primo no es divisible por ningún número.
- b) Los divisores de un número compuesto son compuestos también.
- c) Las divisiones entre números primos son exactas.
- d) Existen dos números primos consecutivos.
 - a) Falso. Se puede dividir entre él mismo y el 1.
 - b) Falso. El número 8 tiene como divisor el 2, que es primo.
 - c) Falso. Si se divide 7 entre 3 tenemos una división entre números primos y el resultado no es exacto.
 - d) Verdadero. El 2 y el 3 son primos y son números consecutivos.

98. Si p y q son dos números primos, discute las siguientes afirmaciones.

- a) $p + q$ es primo. c) $p - q$ es primo.
- b) $p \cdot q$ es primo. d) $3p$ es primo.
- a) Falso. $12 = 5 + 7$, que son primos, y sin embargo 12 no lo es.
- b) Falso. $p \cdot q$ no es primo porque es divisible entre p y entre q .
- c) Falso. Si $p = 11$ y $q = 7$, que son ambos primos, $p - q = 4$ no lo es, porque es divisible entre 2.
- d) Falso. $3p$ no es primo porque es divisible entre 3.

99. Obtén la descomposición factorial en factores primos de los siguientes números.

- a) 560 b) 2700 c) 616 d) 784 e) 378 f) 405

a) $560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$	c) $616 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11$	e) $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$
b) $2700 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	d) $784 = 2^4 \cdot 7^2$	f) $405 = 3^4 \cdot 5$

100. ¿A qué número corresponden las siguientes descomposiciones en factores primos?

- | | | | | | |
|--------------------|--------------------------|----------------------------------|-------|--------|--------|
| a) $2^2 \cdot 3$ | c) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ | e) $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ | | | |
| b) $2^3 \cdot 3^2$ | d) $3^2 \cdot 7$ | f) $2 \cdot 3^3 \cdot 7$ | | | |
| a) 12 | b) 72 | c) 90 | d) 63 | e) 630 | f) 378 |

Divisibilidad

101. Mario y Luis han factorizado el número 2250 obteniendo estos resultados:

Mario: $2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ Luis: $3^2 \cdot 5^2 \cdot 10$

¿Son correctos sus resultados?

Es correcto el de Mario. Luis no ha factorizado bien porque 10 no es un factor primo.

102. Agrupa factores y escribe correctamente estas descomposiciones factoriales.

- | | | | |
|--|--|--------------------|--------------------|
| a) $2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^3$ | c) $3^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3^2$ | | |
| b) $5^2 \cdot 7 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 7$ | d) $2^2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 2$ | | |
| a) $2^3 \cdot 3^4$ | b) $5^6 \cdot 7^5$ | c) $3^4 \cdot 5^2$ | d) $2^4 \cdot 7^3$ |

103. Identifica los errores existentes en las siguientes descomposiciones en factores primos.

- | | |
|-----------------------|---------------------------------|
| a) $77 = 7 \cdot 7$ | d) $1200 = 15 \cdot 8 \cdot 10$ |
| b) $99 = 33 \cdot 3$ | e) $800 = 23 \cdot 100$ |
| c) $100 = 10 \cdot 2$ | f) $500 = 5^3 \cdot 10^2$ |

- a) La igualdad no es correcta, lo correcto es: $77 = 7 \cdot 11$.
- b) 33 no es un factor primo, hay que descomponerlo en $3 \cdot 11$, lo correcto es: $99 = 3^2 \cdot 11$.
- c) El 2 no es un factor sino un exponente y 10 no es primo, lo correcto sería: $100 = 2^2 \cdot 5^2$.
- d) La igualdad es correcta pero los factores no son primos, lo correcto sería: $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$.
- e) En este caso hay un error en la igualdad, ya que para ser correcta debería ser $800 = 2^3 \cdot 100$, pero en todo caso 100 no es primo, lo correcto sería: $800 = 2^5 \cdot 5^2$.
- f) En este caso la igualdad no es cierta, además 10 no es un factor primo. Lo correcto sería: $500 = 2^2 \cdot 5^3$.

105. Factoriza estos productos.

- | | | | |
|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| a) $36 \cdot 49$ | b) $39 \cdot 96$ | c) $28 \cdot 156$ | d) $125 \cdot 24$ |
| a) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ | b) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 13$ | c) $2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ | d) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$ |

106. Halla el máximo común divisor:

- | | | |
|------------|------------|--------------|
| a) 10 y 15 | d) 5 y 36 | g) 39 y 66 |
| b) 12 y 20 | e) 15 y 18 | h) 32 y 75 |
| c) 12 y 18 | f) 70 y 90 | i) 100 y 150 |
-
- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|--|
| a) $10 = 2 \cdot 5$ | $15 = 3 \cdot 5$ | $\rightarrow \text{m.c.d. } (10, 15) = 5$ |
| b) $12 = 2^2 \cdot 3$ | $20 = 2^2 \cdot 5$ | $\rightarrow \text{m.c.d. } (12, 20) = 2^2 = 4$ |
| c) $12 = 2^2 \cdot 3$ | $18 = 2 \cdot 3^2$ | $\rightarrow \text{m.c.d. } (12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$ |
| d) $5 = 5$ | $36 = 2^2 \cdot 3^2$ | $\rightarrow \text{m.c.d. } (5, 36) = 1$ |
| e) $15 = 3 \cdot 5$ | $18 = 2 \cdot 3^2$ | $\rightarrow \text{m.c.d. } (15, 18) = 3$ |
| f) $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ | $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ | $\rightarrow \text{m.c.d. } (70, 90) = 2 \cdot 5 = 10$ |
| g) $39 = 3 \cdot 13$ | $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ | $\rightarrow \text{m.c.d. } (39, 66) = 3$ |
| h) $32 = 2^5$ | $75 = 3 \cdot 5^2$ | $\rightarrow \text{m.c.d. } (32, 75) = 1$ |
| i) $100 = 2^2 \cdot 3^2$ | $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ | $\rightarrow \text{m.c.d. } (100, 150) = 2 \cdot 5^2 = 50$ |

107. Obtén el mínimo común múltiplo:

- | | | |
|------------|------------|------------|
| a) 8 y 20 | d) 18 y 27 | g) 20 y 30 |
| b) 4 y 21 | e) 14 y 15 | h) 45 y 24 |
| c) 16 y 64 | f) 25 y 12 | i) 54 y 81 |
-
- | | | |
|-----------------------|--------------------------|---|
| a) $8 = 2^3$ | $20 = 2^2 \cdot 5$ | $\rightarrow \text{m.c.m.}(8, 20) = 2^3 \cdot 5 = 40$ |
| b) $4 = 2^2$ | $21 = 3 \cdot 7$ | $\rightarrow \text{m.c.m.}(4, 21) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ |
| c) $16 = 2^4$ | $64 = 2^6$ | $\rightarrow \text{m.c.m.}(16, 64) = 2^6 = 64$ |
| d) $18 = 2 \cdot 3^2$ | $27 = 3^3$ | $\rightarrow \text{m.c.m.}(18, 27) = 2 \cdot 3^3 = 54$ |
| e) $14 = 2 \cdot 7$ | $15 = 3 \cdot 5$ | $\rightarrow \text{m.c.m.}(14, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ |
| f) $25 = 5^2$ | $12 = 2^2 \cdot 3$ | $\rightarrow \text{m.c.m.}(25, 12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$ |
| g) $20 = 2^2 \cdot 5$ | $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ | $\rightarrow \text{m.c.m.}(20, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ |
| h) $45 = 3^2 \cdot 5$ | $24 = 2^3 \cdot 3$ | $\rightarrow \text{m.c.m.}(45, 24) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ |
| i) $54 = 2 \cdot 3^3$ | $81 = 3^4$ | $\rightarrow \text{m.c.m.}(54, 81) = 2 \cdot 3^4 = 162$ |

108. Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de estos grupos de números.

- | | | |
|-----------------|---------------|----------------|
| a) 10, 20 y 100 | c) 5, 9 y 45 | e) 4, 30 y 50 |
| b) 9, 18 y 15 | d) 2, 12 y 21 | f) 24, 36 y 42 |
-
- | | |
|------------------------------|----------------------------|
| a) m.c.d. (10, 20, 100) = 10 | m.c.m. (10, 20, 100) = 100 |
| b) m.c.d. (9, 15, 18) = 3 | m.c.m. (9, 15, 18) = 90 |
| c) m.c.d. (5, 9, 45) = 1 | m.c.m. (5, 9, 45) = 45 |
| d) m.c.d. (2, 12, 21) = 1 | m.c.m. (2, 12, 21) = 84 |
| e) m.c.d. (4, 30, 50) = 2 | m.c.m. (4, 30, 50) = 300 |
| f) m.c.d. (24, 36, 42) = 6 | m.c.m. (24, 36, 42) = 504 |

109. Encuentra tres parejas de números cuyo máximo común divisor sea cada uno de los siguientes.

- a) 4 b) 10 c) 6 d) 5 e) 2 f) 12

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- | | | |
|-------------|----------|-----------|
| a) 8 y 12, | 16 y 20, | 4 y 8 |
| b) 10 y 20, | 20 y 50, | 50 y 70 |
| c) 6 y 12, | 12 y 18, | 60 y 66 |
| d) 5 y 10, | 15 y 20, | 10 y 55 |
| e) 2 y 4, | 4 y 10, | 100 y 102 |
| f) 12 y 24, | 24 y 36, | 36 y 48 |

Divisibilidad

110. Encuentra dos parejas de números cuyo mínimo común múltiplo sea cada uno de los siguientes.

- a) 40 c) 120 e) 16
b) 45 d) 125 f) 540

a) m.c.m. (a, b) = $40 = 2^3 \cdot 5$

Por ejemplo, $a = 2^3$ y $b = 5$ o $a = 2^2 \cdot 5$ y $b = 2^3 \rightarrow$ Las parejas: (8, 5) y (8, 20).

b) m.c.m. (a, b) = $45 = 3^2 \cdot 5$

Por ejemplo, $a = 3^2$ y $b = 5$ o $a = 3 \cdot 5$ y $b = 3^2 \rightarrow$ Las parejas: (9, 5) y (15, 9).

c) m.c.m. (a, b) = $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Por ejemplo, $a = 2^3$ y $b = 5 \cdot 3$ o $a = 2^2 \cdot 5$ y $b = 2^3 \cdot 3 \rightarrow$ Las parejas: (8, 15) y (20, 24).

d) m.c.m. (a, b) = $125 = 5^3$

Por ejemplo, $a = 5^3$ y $b = 5$ o $a = 5^2$ y $b = 5^3 \rightarrow$ Las parejas: (5, 125) y (25, 125).

e) m.c.m. (a, b) = $16 = 2^4$

Por ejemplo, $a = 2^3$ y $b = 2^4$ o $a = 2^2$ y $b = 2^4 \rightarrow$ Las parejas: (8, 16) y (4, 16).

f) m.c.m. (a, b) = $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

Por ejemplo, $a = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y $b = 2^2 \cdot 3^3$ o $a = 2^2 \cdot 5$ y $b = 3^3 \rightarrow$ Las parejas: (30, 108) y (20, 27).

112. Decide si en estas parejas los números son primos entre sí.

- a) 12 y 15 c) 45 y 16 e) 42 y 36
b) 15 y 49 d) 22 y 21 f) 39 y 52

a) $12 = 2^2 \cdot 3$ y $15 = 3 \cdot 5 \rightarrow$ m.c.d. (12, 15) = 3 \rightarrow No son primos entre sí.

b) $15 = 3 \cdot 5$ y $49 = 7^2 \rightarrow$ m.c.d. (15, 49) = 1 \rightarrow Sí son primos entre sí.

c) $45 = 3^2 \cdot 5$ y $16 = 2^4 \rightarrow$ m.c.d. (16, 45) = 1 \rightarrow Sí son primos entre sí.

d) $22 = 2 \cdot 11$ y $21 = 3 \cdot 7 \rightarrow$ m.c.d. (21, 22) = 1 \rightarrow Sí son primos entre sí.

e) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ y $36 = 2^2 \cdot 3^2 \rightarrow$ m.c.d. (36, 42) = 6 \rightarrow No son primos entre sí.

f) $39 = 3 \cdot 13$ y $52 = 2^2 \cdot 13 \rightarrow$ m.c.d. (39, 52) = 13 \rightarrow No son primos entre sí.

113. Comprueba, con algunos ejemplos, que si dos números son primos entre sí, su m.c.m. es el producto de ambos números.

Se pueden usar diferentes números, por ejemplo:

$15 = 3 \cdot 5$ y $49 = 7^2 \rightarrow$ m.c.d. (15, 49) = 1 \rightarrow Son primos entre sí.

m.c.m. (15, 49) = $3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 15 \cdot 49 = 735$

$45 = 3^2 \cdot 5$ y $16 = 2^4 \rightarrow$ m.c.d. (16, 45) = 1 \rightarrow Son primos entre sí.

m.c.m. (16, 45) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 16 \cdot 45 = 720$

- 114.** En un almacén hay 18 000 platos. La empresa decide empaquetarlos en cajas que contengan una docena de platos cada una.



- a) ¿Cuántas cajas serán necesarias para empaquetar todos los platos?
 - b) Si el número de platos del almacén es el triple, ¿cuántas cajas son necesarias?
 - c) Si en las cajas solo cabe media docena de platos, ¿cuántas cajas serían necesarias?
- a) $18\,000 : 12 = 1\,500$ cajas
 b) $1\,500 \cdot 3 = 4\,500$ cajas
 c) $1\,500 \cdot 2 = 3\,000$ cajas

- 115.** Una papelería vende lápices en cajas de 8, de 10 o de 15 unidades. ¿Cuántas cajas de cada clase puede vender si tiene 270 lápices y todas tienen el mismo número? ¿Venderá todos los lápices en cada caso?

Cajas de 8: $270 : 8 \rightarrow$ Nos da 33 cajas, pero sobran 6 lápices.

Cajas de 10: $270 : 10 = 27$ cajas, no sobra ningún lápiz.

Cajas de 15: $270 : 15 = 18$ cajas, no sobra ningún lápiz.

Venderá todos los lápices si los pone a la venta en cajas de 10 y de 15, pero no en cajas de 8.

- 116.** Una familia acude a un restaurante para celebrar las bodas de oro de los abuelos; en total son 32 personas y el restaurante dispone de mesas para 4, 6 y 8 personas.

- a) ¿De cuántas formas se pueden organizar si quieren que todas las mesas tengan los mismos comensales?
- b) ¿Y si las mesas fueran de distintas capacidades?

a) Como 4 y 8 son divisores de 32, se pueden organizar las mesas de estas dos maneras:

Manera A: 8 mesas de 4 personas

Manera B: 4 mesas de 8 personas

No se pueden organizar en mesas de 6 personas, pues 6 no es divisor de 32 y sobraría gente.

- b) Hay varias maneras. Estos son algunos ejemplos:

Manera A: 4 mesas de 4 y 2 mesas de 8 $\rightarrow 4 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 32$

Manera B: 5 mesas de 4 y 2 mesas de 6 $\rightarrow 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 32$

Divisibilidad

117. Tania tenía una bolsa de 35 caramelos y se ha comido varios. No recuerda cuántos se ha comido, pero si sabe que los que le quedan los puede guardar en bolsas de 2, de 3 y de 5 caramelos, sin que le sobre ninguno.

- a) ¿Cuántos caramelos le quedan?
- b) Si los guarda en bolsas de 2, ¿cuántas necesitará?
- c) ¿Y si lo hace en bolsas de 3? ¿Y en bolsas de 5?
 - a) Quedan menos de 35 caramelos. La cantidad será un múltiplo de 2, 3 y 5.
m.c.m. (2, 3, 5) = 30 → Le quedan 30 caramelos (porque los números entre 31 y 35 que serían las otras posibilidades no cumplen las dos condiciones de menor de 35 y múltiplo de 2, 3 y 5).
 - b) Necesita $30 : 2 = 15$ bolsas de 2 caramelos cada una.
 - c) En bolsas de 3 necesitaría $30 : 3 = 10$ bolsas.
Y en bolsas de 5 serían → $30 : 5 = 6$ bolsas de 5 caramelos cada una.

118. Alicia quiere colocar 45 libros en estanterías de forma que en cada una haya el mismo número.

- a) ¿Cuántos libros puede haber en cada estantería?
- b) ¿Cuántas estanterías serían necesarias en cada caso?



- a) Los libros que puede haber en cada estantería corresponden con los divisores de 45.
 $\text{Div } (45) = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$
- b) 45 estanterías de 1 libro. 5 estanterías de 9 libros.
15 estanterías de 3 libros. 3 estanterías de 15 libros.
9 estanterías de 5 libros. 1 estantería de 45 libros.

119. Pedro quiere pegar las 120 fotos de su viaje a Granada en un álbum cuyas páginas admiten 2, 3 o 4 fotos.

- a) ¿Cuántas páginas debe tener el álbum si quiere que en cada página haya el mismo número de fotos?
- b) ¿Y si admite que haya páginas con distinto número de fotos?
 - c) ¿Cuál es el máximo número de páginas del álbum? ¿Y el mínimo?
 - a) Si coloca 2 fotos por página, $120 : 2 = 60$ páginas.
Si coloca 3 fotos por página, $120 : 3 = 40$ páginas.
Si coloca 4 fotos por página, $120 : 4 = 30$ páginas.
 - b) Hay varias posibilidades. Estos son algunos ejemplos:
POSIBILIDAD A: 5 páginas con 2 fotos, 10 páginas con 3 y 20 páginas con 4 fotos.
POSIBILIDAD B: 20 páginas con 3 fotos y 15 páginas con 4 fotos.
 - c) El máximo son 60 páginas (colocando el menor número de fotos, 2, en cada hoja).
El mínimo son 30 páginas (colocando el mayor número de fotos, 4, en cada hoja).

120. Héctor tiene 48 soldaditos de plomo y quiere colocarlos en fila de modo que en cada una haya la misma cantidad de soldaditos, pero siempre más de 3 y menos de 20.

- ¿Cuántos soldaditos puede haber en cada fila?
- ¿Cuántas formas diferentes tiene de organizar a los soldaditos?

a) El número de soldaditos que puede haber en cada fila serán divisores de 48 comprendidos entre 3 y 20.

$$\text{Div } (48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

Puede haber 4, 6, 8, 12 o 16 soldaditos en cada fila.

b) 5 formas diferentes:

12 filas de 4 soldados.	4 filas de 12 soldados.
8 filas de 6 soldados.	3 filas de 16 soldados.
6 filas de 8 soldados.	

121. Elena y Marta tienen una colección completa de cromos. Elena los cuenta de 7 en 7 y Marta de 4 en 4. ¿Cuál es el mínimo número de cromos que tiene la colección?

$$\text{m.c.m. } (4, 7) = 28 \text{ cromos}$$

122. Un carpintero quiere cortar una tabla de 56 cm de largo y 40 cm de ancho, sin que le sobre madera, en cuadros iguales lo más grandes posible. ¿Cómo debe hacerlo?

$$40 = 2^3 \cdot 5 \text{ y } 56 = 2^3 \cdot 7 \rightarrow \text{m.c.d. } (40, 56) = 2^3 = 8$$

Los cuadrados deben tener una dimensión de 8×8 cm.

$$56 : 8 = 7 \text{ y } 40 : 8 = 5 \rightarrow \text{Cortaría } 5 \cdot 7 = 35 \text{ cuadrados de } 8 \times 8 \text{ cm.}$$

123. Queremos dividir una nave rectangular de 140 m de ancho y 200 m de largo en compartimentos cuadrados con la máxima superficie posible. ¿Cuánto debe medir el lado de cada compartimento?

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \text{ y } 200 = 2^3 \cdot 5^2 \rightarrow \text{m.c.d. } (140, 200) = 2^2 \cdot 5 = 20$$

Cada lado debe medir 20 metros de ancho.

124. Se van a poner plaquetas cuadradas del mayor tamaño posible en un aula rectangular de 12 m de largo y 10 m de ancho.

- ¿Cuál será el tamaño de cada plaqueta?
- ¿Cuántas plaquetas se pondrán?

$$a) 12 = 2^2 \cdot 3 \text{ y } 10 = 2 \cdot 5 \rightarrow \text{m.c.d. } (12, 10) = 2 \rightarrow \text{El lado de cada plaqueta será de } 2 \text{ m.}$$

$$b) 12 : 2 = 6 \text{ y } 10 : 2 = 5 \rightarrow \text{Se obtendrán } 6 \cdot 5 = 30 \text{ plaquetas.}$$

Divisibilidad

125. Alfonso tiene una colección de monedas con 63 monedas de Europa y 35 de América. Quiere hacer el mínimo número posible de lotes iguales, sin mezclar monedas de distinto continente y sin que le sobre ninguna.



- a) ¿Cuántos lotes hará?
b) ¿Cuántas monedas tendrá cada lote?

$$63 = 3^2 \cdot 7 \text{ y } 35 = 5 \cdot 7 \rightarrow \text{m.c.d.}(35, 63) = 7$$

Se organizarán en lotes de 7 monedas.

Se obtienen $63 : 7 = 9$ lotes de monedas de Europa y $35 : 7 = 5$ lotes de monedas de América.

En total, $9 + 5 = 14$ lotes de 7 monedas cada uno.

126. Luisa tiene 16 tarjetas rojas, 20 amarillas, 24 azules y 32 verdes. Desea hacer grupos iguales de tarjetas sin que sobre ninguna.

- a) ¿Cuál es el número máximo de grupos que puede hacer?
b) ¿Cuántas tarjetas de cada color habrá en cada grupo?

$$16 = 2^4 \quad 20 = 2^2 \cdot 5 \quad 24 = 2^3 \cdot 3 \quad 32 = 2^5 \rightarrow \text{m.c.d.}(16, 20, 24, 32) = 2^2 = 4$$

Puede hacer 4 grupos.

b) $16 : 4 = 4$ tarjetas rojas $24 : 4 = 6$ tarjetas azules
 $20 : 4 = 5$ tarjetas amarillas $32 : 4 = 8$ tarjetas verdes

127. Raquel y Beatriz van a montar a caballo. Raquel lo hace cada 3 días, y Beatriz, cada cuatro días. Si coinciden el 24 de febrero:



- a) ¿Cuándo volverán a coincidir?
b) ¿Cuántos días habrá ido cada una a montar antes de volver a coincidir?
- a) $\text{m.c.m.}(3, 4) = 12 \rightarrow$ Cada 12 días coinciden de nuevo, con lo que vuelven a coincidir el 8 de marzo.
b) Raquel habrá ido $12 : 3 = 4$ veces y Beatriz $12 : 4 = 3$ veces.

128. En la iluminación del árbol de Navidad hay luces verdes, rojas y amarillas. Las verdes se encienden cada 12 segundos, las rojas cada 15 segundos y las amarillas cada 9 segundos.

- ¿Cada cuántos segundos coinciden los tres tipos de luces?
- En una hora, ¿cuántas veces coinciden encendidas?
 - $m.c.m.(9, 12, 15) = 180$. Coinciden cada 180 segundos.
 - $1\text{ h} = 3\,600\text{ s} \rightarrow 3\,600 : 180 = 20$. En una hora coinciden 20 veces encendidas.

129. Andrés tiene una colección de sellos que puede agrupar de 12 en 12, de 16 en 16 y de 18 en 18 sin que sobre ninguno. ¿Cuál es el número de sellos que puede tener si se sabe que es menor que 150?

$$m.c.m.(12, 16, 18) = 144 \text{ sellos}$$

DEBES SABER HACER

1. Encuentra, entre estos números, los múltiplos de 8 que sean divisibles entre 12:

288 364 576 1248 480 356 672

De entre esos números son múltiplos de 8: 288, 576, 1248, 480 y 672.

A su vez, de esos números que son múltiplos de 8, son divisibles entre 12 los siguientes: 288, 576, 1248, 480 y 672 (es decir, todos).

2. Halla todos los divisores de estos números.

- a) 75 b) 77 c) 81 d) 96 e) 121 f) 113

a) $\text{Div}(75) = \{1, 3, 5, 15, 25 \text{ y } 75\}$ d) $\text{Div}(96) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96\}$

b) $\text{Div}(77) = \{1, 7, 11, 77\}$ e) $\text{Div}(121) = \{1, 11, 121\}$

c) $\text{Div}(81) = \{1, 3, 9, 27, 81\}$ f) $\text{Div}(113) = \{1, 113\}$

3. Escribe cuáles son números primos.

133 153 179 184 210 301

Primo: 179. Compuestos $133 = 7 \cdot 19$, $153 = 3^2 \cdot 17$, $184 = 2^3 \cdot 23$, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ y $301 = 7 \cdot 43$.

4. Obtén la descomposición factorial.

- a) 240 b) 345 c) 99 d) 5700

a) $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ b) $345 = 3 \cdot 5 \cdot 23$ c) $99 = 3^2 \cdot 11$ d) $5\,700 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19$

5. Halla el máximo común divisor de estos números.

- a) 45 y 75 b) 24, 66 y 84 c) 72, 108 y 144

a) $45 = 3^2 \cdot 5$ y $75 = 3 \cdot 5^2 \rightarrow m.c.d.(45, 75) = 3 \cdot 5 = 15$

b) $24 = 2^3 \cdot 3$, $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ y $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \rightarrow m.c.d.(24, 66, 84) = 2 \cdot 3 = 6$

c) $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$ y $144 = 2^4 \cdot 3^2 \rightarrow m.c.d.(72, 108, 144) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

Divisibilidad

6. Halla el mínimo común múltiplo de estos números.

- a) 18 y 24 b) 28, 48 y 60 c) 15, 25 y 95

a) $18 = 2 \cdot 3^2$ y $24 = 2^3 \cdot 3 \rightarrow$ m.c.m. $(18, 24) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

b) $28 = 2^2 \cdot 7$, $48 = 2^4 \cdot 3$ y $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow$ m.c.d. $(28, 48, 60) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1680$

c) $15 = 3 \cdot 5$, $25 = 5^2$ y $95 = 5 \cdot 19 \rightarrow$ m.c.d. $(15, 25, 95) = 3 \cdot 5^2 \cdot 19 = 1425$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

130. En la mayoría de las empresas y oficinas, las grapadoras tradicionales han sido sustituidas por las fotocopiadoras multifunción, en las que una de las funciones es grapar las fotocopias.

Esta es una las fotocopiadoras que se quieren comprar en una empresa.

COPIADORA A COLOR CON RÁPIDA VELOCIDAD DE IMPRESIÓN

Utilice nuestra fotocopiadora para reducir sus costes. Estudie nuestra oferta y compare sus características.

Características:

- Almacena 2000 hojas de tamaño A3
- Almacena 4000 hojas de tamaño A4
- Grapa en bloque hasta 50 hojas
- Velocidad
 - 95 copias por minuto en B/N
 - 72 copias por minuto en color



Para valorar la compra, se va a realizar un informe sobre la posibilidad de llevar a cabo los siguientes trabajos:

Puede imprimir una fotocopia en B/N para cada uno de los 322 trabajadores de la empresa en menos de 5 minutos.	Sí	NO
Puede imprimir una fotocopia en color para cada uno de los 322 trabajadores de la empresa en menos de 5 minutos.	Sí	NO
Puede imprimir los 52 informes de ventas de 62 hojas cada uno grapándolos sin realimentar el cajón de folios A3.	Sí	NO
Puede agrupar el informe mensual de 474 fotocopias grapándolas en bloques para los 5 departamentos de la empresa.	Sí	NO

Realiza los cálculos necesarios para completar ese informe.

- a) $322 : 95 = 3$ con resto 37 → Tarda algo más de 3 minutos → Sí.
b) $322 : 72 = 4$ con resto: 34 → Tarda algo más de 4 minutos → Sí.
c) $52 \cdot 62 = 3224$ hojas en total; el cajón almacena solo 2 000 hojas → NO.
d) 474 cada informe → $474 : 50 = 9$ con resto: 24 → NO.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

- 131.** Comprueba que para cada pareja de números, a y b , se cumple que su producto coincide con el producto de su máximo común divisor por su mínimo común múltiplo.

Halla el valor de a en cada caso:

a) m.c.d. ($a, 36$) = 12 b) m.c.d. ($a, 45$) = 5
 m.c.m. ($a, 36$) = 72 m.c.m. ($a, 45$) = 315

a) $a \cdot 36 = 12 \cdot 72 = 864 \rightarrow a = 864 : 36 = 24$
 b) $a \cdot 45 = 5 \cdot 315 = 1575 \rightarrow a = 1575 : 45 = 35$

- 132.** Un número dividido entre 2 da de resto 1, dividido entre 3 da de resto 2 y dividido entre 4 da de resto 3.

- a) ¿Cuál es el menor número que cumple estas condiciones?
 b) ¿Puedes encontrar más números que cumplan estas condiciones?

a) Si al número que buscamos le sumamos uno sería divisible por 2, 3 y 4, con lo que:

m.c.m. ($2, 3, 4$) = 12

$12 - 1 = 11$ es el número buscado.

b) Sí; se consiguen restando 1 a todos los múltiplos comunes de 2, 3, 4 (ejemplos, $24 - 1 = 23$, $36 - 1 = 35$...).

- 133.** Hay números cuya cantidad de divisores (sin contar el 1) coincide con su última cifra, por ejemplo: 93 acaba en 3 y $\text{Div}(93) = \{1, 3, 31, 93\}$.

a) Calcula los dos primeros de estos números que acaban en: 1, 2 y 3.

b) ¿Cuál no es posible? Indica por qué.

a) Acaban en 1 $\rightarrow 11$ y 31.

Acaban en 2 \rightarrow No hay ninguno.

Acaban en 3 $\rightarrow 33$ y 93.

b) Un ejemplo de un número no podría ser cualquier número que acabe en 1 y no sea primo, pues tendrá más de un divisor distinto de 1 (ejemplos, 21, 51, 81, ...).

- 134.** Dos números son amigos cuando la suma de los divisores de cada uno, excluido él mismo, es igual al otro número.

a) Comprueba que los números 220 y 284 son números amigos.

b) Busca en Internet otros dos números amigos y comprueba que cumplen esta condición.

a) $\text{Div}(220) = 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110$ $\text{Div}(284) = 1, 2, 4, 71, 142$

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284 \quad 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

b) 1184 y 1210

$\text{Div}(1184) = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296$ y 592

$\text{Div}(1210) = 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242, 605$

PRUEBAS PISA

135. En la clase de Educación Física quieren hacer grupos para una competición deportiva que consiste en 10 pruebas distintas. En principio se pensó en hacer grupos de 5, pero sobraban 2 alumnos, luego pensaron en grupos de 6, pero sobraban 4 alumnos.



- a) ¿Cuántos alumnos tiene la clase si hay menos de 33 alumnos?
b) Al final se ha decidido hacer dos grupos y dar los siguientes puntos por cada prueba.
- Equipo ganador: 4 puntos.
 - Equipo perdedor: 1 punto.
 - Empate: 2 puntos para cada equipo.

Si al finalizar las 10 pruebas los dos equipos suman 46 puntos, ¿cuántas pruebas han acabado en empate?

- a) Los múltiplos de 5 acaban en 5 o en 0, y sobran 2 alumnos, luego el número de alumnos acaba en 7 o en 2.
Si se suma 4 al número, será múltiplo de 6. Veamos los múltiplos de 6 menores que 33: 6, 12, 18, 24, 30. Estos números sumándole 4: 10, 16, 22, 28 y 34. → La opción válida que nos queda es 22 alumnos.
- b) Por cada prueba no empatada ambos equipos suman 5 puntos (4 puntos los que ganan y 1 punto los que pierden); y por cada prueba empatada ambos equipos suman 4 puntos (2 puntos cada uno).

$$46 = 5 \cdot a + 4 \cdot b$$
 siendo a = número de pruebas que no empatan y b = número de empates.

$$a + b = 10$$
, probamos con pares de valores que cumplan esta condición en la ecuación de los puntos y tenemos que: $46 = 5 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \rightarrow 4$ empates.

136. Para construir una estantería un carpintero necesita:

- 4 tablas largas de madera
- 6 tablas cortas de madera
- 12 ganchos pequeños
- 2 ganchos grandes
- 14 tornillos

El carpintero tiene en el almacén 26 tablas largas de madera, 33 tablas cortas de madera, 200 ganchos pequeños, 20 ganchos grandes y 510 tornillos.



¿Cuántas estanterías completas puede construir este carpintero?

$$26 : 4 \text{ es } 6 \text{ con resto } 2 \quad 33 : 6 \text{ es } 5 \text{ con resto } 3 \quad 200 : 12 \text{ es } 16 \text{ con resto } 8$$

$$20 : 2 = 10 \quad 510 : 14 \text{ es } 36 \text{ con resto } 6$$

Puede construir 5 estanterías completas, ya que está limitado por el número de tablas cortas de madera.

Números enteros

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Expresa estas situaciones con un número negativo.

- a) Ayer se registró una temperatura de 8 grados bajo cero.
 - b) Las deudas de la empresa son de 200 000 €.
 - c) El almacén está en la segunda planta por debajo del nivel del suelo.
- a) -8°C b) $-200\,000\text{ €}$ c) Planta -2

2. Realiza estas operaciones.

- a) $(14 - 6):4 + 7$
 - b) $3 \cdot 5 - (10 - 4):6$
 - c) $(5 + 4) \cdot (3 - 1) - 12:6$
- a) $8 : 4 + 7 = 2 + 7 = 9$
b) $15 - 6 : 6 = 15 - 1 = 14$
c) $9 \cdot 2 - 2 = 18 - 2 = 16$

VIDA COTIDIANA

Los primeros frigoríficos eran un simple armario en el que había un compartimiento superior donde se ponía nieve, y en la parte inferior se colocaban los alimentos para su conservación.

Los actuales son algo más sofisticados, y se suelen organizar por temperaturas.

- En un frigorífico, como el de la imagen, se pasa una bolsa de guisantes del congelador a la parte superior del frigorífico. ¿Qué diferencia de temperatura va a sufrir la bolsa?

En el congelador está a -18° , si se sube a la zona de verduras, en la que estará a 10° , la diferencia es de 28° .

RESUELVE EL RETO

Un edificio tiene 3 plantas de aparcamiento, la planta baja y 4 plantas sobre ella. ¿Cuál es la mayor distancia que puede recorrer el ascensor sin paradas?

Puede ir de la planta -3 a la planta 4 , es decir, recorrer 7 plantas.

¿Cuál es el número que hay que sumar a un entero para obtener su opuesto?

Si es un entero negativo, le sumamos el doble de su valor absoluto, por ejemplo a -4 , le sumamos 8 . Si es un entero positivo, le sumamos el doble de su valor absoluto, pero con signo negativo, es decir a 4 le sumamos -8 .

Encuentra dos números enteros tales que su producto sea menor que cualquiera de ellos.

Por ejemplo, un número positivo y uno negativo como 3 y -2 . Su producto es -6 , que es menor que ambos.

ACTIVIDADES

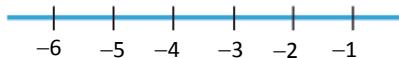
1. Expresa con un número entero.

- a) El submarino ha descendido a 100 m bajo el nivel del mar.
 - b) Ramón debe 3000 € al banco.
 - c) El nuevo edificio de la ciudad de Sara tiene 288 m de altura.
 - d) Marcos debe pagar 156 € en su declaración de la renta, mientras que a Carla le devolverán 235 €.
- a) -100 m b) $-3\,000$ € c) $+288$ m d) Marcos: -156 € y Carla: $+235$ €

2. Representa en una recta numérica.

- a) Todos los números enteros comprendidos entre -6 y -1 .
- b) Todos los números enteros comprendidos entre -4 y 6 .

a)



b)



3. ¿Qué número entero está situado 7 unidades a la derecha de -3 ? ¿Y 10 unidades a la izquierda de $+2$?

El número situado 7 unidades a la derecha de -3 es 4 . Y el situado 10 unidades a la izquierda de $+2$ es -8 .

4. Calcula el valor absoluto de los siguientes números.

- | | | |
|-----------|-----------|------------|
| a) $ +3 $ | c) $ +9 $ | e) $ -12 $ |
| b) $ -2 $ | d) $ -5 $ | f) $ +10 $ |
| a) 3 | c) 9 | e) 12 |
| b) 2 | d) 5 | f) 10 |

5. Determina los opuestos de estos números.

- | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------|
| a) $\text{Op} (+2)$ | c) $\text{Op} (-6)$ | e) $\text{Op} (+11)$ |
| b) $\text{Op} (+5)$ | d) $\text{Op} (-8)$ | f) $\text{Op} (-7)$ |
| a) -2 | c) $+6$ | e) -11 |
| b) -5 | d) $+8$ | f) $+7$ |

6. Completa en tu cuaderno con todos los números que cumplen estas igualdades.

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| a) $ \square = 5$ | c) $ \square = 3$ | e) $ \square = 12$ |
| b) $\text{Op}(\square) = -2$ | d) $\text{Op}(\square) = 9$ | f) $\text{Op}(\square) = -1$ |
| a) $+5$ y -5 | c) $+3$ y -3 | e) $+12$ y -12 |
| b) $+2$ | d) -9 | f) $+1$ |

7. ¿Existe algún valor de x que cumpla estas igualdades?

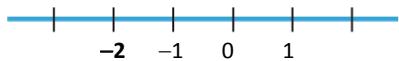
- | | |
|-------------------------|-----------------------------------|
| a) $\text{Op}(x) = 8$ | c) $ x = -4$ |
| b) $ \text{Op}(x) = 3$ | d) $\text{Op}(\text{Op}(x)) = -5$ |
- a) No, porque el valor absoluto de cualquier número es positivo y su opuesto debe ser negativo, con lo que el opuesto de un valor absoluto no puede ser positivo.
- b) Sí, tanto $+3$ como -3 cumplen esa igualdad. En ambos casos tendríamos que calcular el valor absoluto de -3 y $+3$, respectivamente, que es 3 .
- c) No, porque el valor absoluto de cualquier número es positivo, no puede ser negativo.
- d) Sí, $x = -5$, ya que $\text{Op}(-5) = +5$ y $\text{Op}(\text{Op}(-5)) = \text{Op}(+5) = -5$.

8. Escribe y representa gráficamente en una recta numérica.

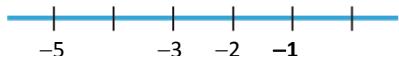
- a) Tres números mayores que -2 .
 b) Tres números menores que -1 .
 c) Tres números menores que $+1$.

Respuesta abierta. Por ejemplo, se escogen los números:

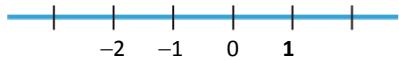
- a) $-1, 0$ y 1



- b) $-2, -3, -5$



- c) $-2, -1, 0$



9. ¿Cuál de estos números es el mayor? ¿Y el menor?

$-6, +7, -10, -4, +8, +2, 0, -3, +1, -7$

Mayor: $+8$ Menor: -10

Números enteros

10. Escribe en tu cuaderno números que cumplen estas condiciones.

- a) $\square < -5 < \square < \square < -2 < \square < 0$
- b) $\square > \square > +4 > \square > 0 > -3 > \square$
- c) $-10 < \square < -6 < \square < +4 < \square$

Respuesta abierta en los apartados que están recuadrados.

- a) $-6 < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0$
- b) $+10 > +5 > +4 > +1 > 0 > -3 > -7$
- c) $-10 < -7 < -6 < +1 < +4 < +12$

11. Siendo a un número entero, completa en tu cuaderno con $>$, $<$ o $=$.

$$\text{Op}(a) \square |a|$$

Si a es un número positivo, su opuesto será negativo, de modo que el signo será $<$ porque $|a|$ positivo.

Si a es un número negativo, su opuesto será positivo y en este caso el signo que habría que usar es $=$.

12. Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros.

+7	-6	-8	+2	0	+13
+3	-4	+5	-9	+6	-12

$$-12 < -9 < -8 < -6 < -4 < 0 < +2 < +3 < +5 < +6 < +7 < +13$$

13. Ordena de mayor a menor estos números enteros.

+10	-9	+3	-4	+6	-7
-5	0	+1	-11	+5	-6

$$+10 > +6 > +5 > +3 > +1 > 0 > -4 > -5 > -6 > -7 > -9 > -11$$

14. Sitúa en una recta numérica.

- a) Cinco números menores que $+2$.
- b) Cinco números mayores que -4 .
- c) Cinco números menores que -6 .
- d) Cinco números mayores que -2 .
- e) Cinco números menores que $+4$.
- f) Cinco números mayores que -8 .

Respuesta abierta, por ejemplo.

- a) $-3, -2, -1, 0, 1$
- c) $-7, -8, -9, -10, -11$
- e) $-1, 0, 1, 2, 3$
- b) $-3, -2, -1, 0, 1$
- d) $-1, 0, 1, 2, 3$
- f) $-7, -6, -5, -4, -3$



15. Encuentra cuatro números en cada caso.

- a) Mayores que -10 y menores que -3 .
- b) Mayores que -4 y menores que $+2$.
- c) Mayores que -8 y menores que -1 .
- d) Mayores que -2 y menores que $+6$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $-9, -6, -5, -4$ | c) $-6, -5, -3, -1$ |
| b) $-3, -2, 0, +1$ | d) $-1, 0, +1, +4$ |

16. Encuentra el número que se describe.

- a) Es 4 unidades menor que $+8$.
 - b) Es 4 unidades mayor que -8 .
 - c) Es 4 unidades menor que -8 .
 - d) Es 8 unidades mayor que -4 .
 - e) Es 8 unidades menor que $+4$.
 - f) Es 8 unidades menor que -4 .
- | | | |
|---------|----------|----------|
| a) $+4$ | c) -12 | e) -4 |
| b) -4 | d) $+4$ | f) -12 |

17. Averigua el número entero que posee estas características.

- a) Está situado 8 unidades a la derecha de -6 .
 - b) Está situado 10 unidades a la izquierda de $+7$.
 - c) Está situado 5 unidades a la izquierda de $+5$.
- | | | |
|---------|---------|--------|
| a) $+2$ | b) -3 | c) 0 |
|---------|---------|--------|

18. Ordena de menor a mayor.

$$\begin{array}{lll} \text{Op } (+7) & \text{Op } (-8) & \text{Op } (-4) \\ \text{Op } (+3) & \text{Op } (+5) & \text{Op } (-1) \end{array}$$

$$\text{Op } (+7) < \text{Op } (+5) < \text{Op } (+3) < \text{Op } (-1) < \text{Op } (-4) < \text{Op } (-8)$$

19. Ordena de mayor a menor.

$$\begin{array}{ccccccc} |-7| & |+8| & |+6| & |-2| & |+9| & |-5| \\ |+9| & |+8| & |-7| & |+6| & |-5| & |-2| \end{array}$$

20. Ordena de menor a mayor.

$$\begin{array}{cccccc} 4 & |-8| & \text{Op } (-5) & |+6| & -2 & \text{Op } (+7) \\ \text{Op } (+7) & < -2 & < 4 & < \text{Op } (-5) & < |+6| & < |-8| \end{array}$$

Números enteros

21. Halla el resultado de estas sumas.

- a) $(+5) + (+2)$ c) $(-5) + (+2)$
b) $(+5) + (-2)$ d) $(-5) + (-2)$
- a) +7 b) +3 c) -3 d) -7

22. Halla el resultado de las siguientes restas de números enteros.

- a) $(+3) - (+6)$ b) $(+3) - (-6)$ c) $(-3) - (+6)$
a) -3 b) +9 c) -9

23. Completa en tu cuaderno.

- a) $\square + (+4) = +9$ c) $\square - (-9) = +2$
b) $\square - (-9) = +16$ d) $\square + (+4) = -1$
- a) +5 b) +7 c) -7 d) -5

24. ¿La suma de dos números negativos puede ser un número positivo? ¿Y la resta de dos negativos puede ser un número negativo?

La suma de dos números negativos no puede ser un número positivo, porque en una suma con dos números del mismo signo se pone el signo de los números y en este caso es el signo negativo, con lo que el resultado es negativo.

La resta de dos negativos sí puede ser un número negativo; esto ocurre cuando el valor absoluto del primer número es mayor que el valor absoluto del segundo. Por ejemplo, $-7 - (-6) = -1$.

25. Escribe de forma abreviada estas operaciones.

- a) $(+3) - (+4) + (+8)$ d) $(-16) + (-4) + (+12) - (+1)$
b) $(-14) + (-13) - (-10)$ e) $(-21) - (-12) + (+9) + (-4)$
c) $(+20) - (+18) - (-9) + (-3)$ f) $(+15) + (-6) - (+8) - (+14)$
- a) $3 - 4 + 8$ d) $-16 - 4 + 12 - 1$
b) $-14 - 13 + 10$ e) $-21 + 12 + 9 - 4$
c) $20 - 18 + 9 - 3$ f) $15 - 6 - 8 - 14$

26. Transforma estas operaciones escritas en forma abreviada en operaciones con paréntesis.

- a) $-3 + 7 - 2$ c) $4 + 7 - 9 + 4$
b) $7 + 8 - 7$ d) $-2 - 6 + 3 - 5$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) $(-3) + (+7) + (-2)$ o $(-3) - (-7) - (+2)$
b) $(+7) - (-8) + (-7)$
c) $(+4) - (-7) + (-9) + (+4)$
d) $(-2) + (-6) - (-3) + (-5)$

27. Describe una situación real en la que se utilicen sumas y restas de números enteros.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

La puntuación de un examen tipo test: si tengo bien la respuesta se suma un punto y si fallo me restan un punto.

Al calcular la diferencia de temperaturas entre varios días o diferentes zonas.

28. Halla el resultado de estas operaciones.

a) $(-9) + (-4) - (+5)$

b) $(+7) + (-3) - (+15)$

c) $(-6) - (-9) + (+13)$

d) $(+25) + (-6) - (+8)$

e) $(-14) + (+23) - (+25)$

a) -18

b) -11

c) +16

d) +11

e) -16

29. Calcula.

a) $(-5) + (+18) - (-3) - (-5)$

d) $(-14) - (-2) - (+13) - (-7)$

b) $(+7) - (-19) - (+17) + (+6)$

e) $(+34) + (-28) - (-12) - (-2)$

c) $(+16) + (-8) - (+8) - (-4)$

f) $(-19) - (+21) - (+32) - (+22)$

a) +21

c) +4

f) -94

b) +15

d) -18

e) +20

30. Realiza estas operaciones.

a) $(+14) - (-37) - (+46) - (+39) - (+62)$

b) $(-25) + (-16) - (-29) + (+52) - (+10)$

c) $(-35) + (-48) - (-53) - (+30) + (+50)$

d) $(+18) + (-21) - (+36) - (+4) - (+9)$

e) $(-33) - (-52) - (-6) - (-11) + (-31)$

f) $(+38) + (-44) - (+9) + (-60) - (+12)$

a) -96

c) -10

e) +5

b) +30

d) -52

f) -87

31. Realiza estas operaciones.

a) $(+17) - (+4) + (+8) + (-1) - (+6) + (-3)$

b) $(-9) + (+3) - (-7) + (+4) - (-10) + (-12)$

c) $(+8) - (+5) - (+13) - (-9) - (-1) + (+7)$

d) $(-17) - (+3) - (+19) - (-4) + (-11) - (-16)$

a) +11

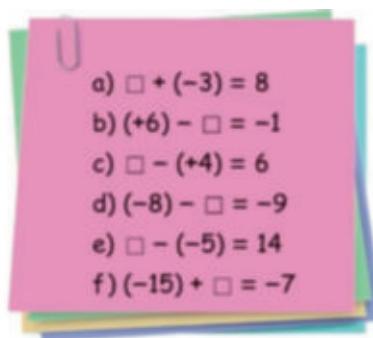
b) +3

c) +7

d) -30

Números enteros

32. Completa en tu cuaderno estas operaciones.



- a) $\square + (-3) = 8$
b) $(+6) - \square = -1$
c) $\square - (+4) = 6$
d) $(-8) - \square = -9$
e) $\square - (-5) = 14$
f) $(-15) + \square = -7$

- a) +11 c) +10 e) +9
b) +7 d) +1 f) +8

33. Completa en tu cuaderno con un número entero estas operaciones escritas en forma abreviada.

- a) $\square + 4 = 1$ e) $13 + \square = 9$
b) $-5 - \square = 2$ f) $\square + (-2) = -3$
c) $\square - 2 = 11$ g) $15 + \square = -4$
d) $2 + \square = -1$ h) $-10 - \square = 10$

a) -3 c) +13 e) -4 g) -19
b) -7 d) -3 f) -1 h) -20

34. Resuelve estas operaciones.

- a) $3 + (-4 + 8)$ e) $16 - (9 - 17)$
b) $-9 - (6 + 3)$ f) $21 + (-4 - 8)$
c) $5 - (-2 - 9)$ g) $-24 - (12 - 15)$
d) $-7 + (10 - 13)$ h) $14 + (-1 - 11)$

a) +7 c) +16 e) +24 g) -21
b) -18 d) -10 f) +9 h) +2

35. Halla el resultado de estas operaciones.

- a) $(4 - 8) + (-1 - 5)$
b) $(19 + 2) - (7 - 3)$
c) $(-5 + 2) - (6 - 7)$
d) $(14 - 5) + (-6 + 3)$
e) $(-7 - 12) - (7 - 5)$
f) $(25 - 14) + (-5 + 18)$
g) $(12 - 16) - (20 - 24)$
h) $(-24 - 12) - (28 - 16)$

a) -10 b) +17 c) -2 d) +6 e) -21 f) +24 g) 0 h) -48

36. Calcula el resultado de estas operaciones.

- a) $-4 - (2 - 4 + 6)$
 b) $13 + (7 - 3 - 9)$
 c) $23 + (-6 - 12 + 7)$
 d) $-24 - (16 + 5 - 2)$
 e) $45 + (-32 - 13 + 14)$
 f) $-26 - (-2 - 7 - 19)$
 g) $2 + (13 - 7 + 10)$
 h) $-10 - (2 + 7 - 49)$

- a) -8 b) 8 c) 12 d) -43 e) 14 f) 2 g) 18 h) 30

37. Efectúa estas operaciones.

- | | | | | | |
|---------------------------------|--------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| a) $9 + (4 - 1 - 8) - 5$ | d) $-26 + (-8 - 4 + 2) - (-5)$ | | | | |
| b) $-13 + (-5 - 7 - 9) + (-12)$ | e) $32 - (-14 + 7 - 4) - (+4)$ | | | | |
| c) $18 - (-8 - 3) + 22$ | f) $-7 - (23 + 13 - 24) - 1$ | | | | |
| a) -1 | b) -46 | c) +51 | d) -31 | e) +39 | f) -20 |

38. Calcula.

- | | | | | | |
|---|---|--------|--------|--------|--------|
| a) $(15 - 6) - (-1 - 4) - (-7)$ | b) $(7 + 5 - 12) - (4 + 5 - 17) + (-5)$ | | | | |
| c) $35 - (-8 + 1) + (-3 - 5 - 12) + 18$ | d) $23 - (11 - 15 - 17) - (-4 - 2)$ | | | | |
| e) $45 + (-24 - 6) + (13 - 2 + 7)$ | f) $(18 - 28) + (-34 - 32 - 8) - (-4)$ | | | | |
| a) +21 | b) +3 | c) +40 | d) +50 | e) +33 | f) -80 |

39. Completa en tu cuaderno estas operaciones para que las igualdades sean ciertas.

- | | |
|--|--|
| a) $1 - (5 - 8) - \square = 10 = -2 + \square$ | b) $2 + (-6 + 9) + \square = -3 = 9 + \square$ |
| c) $\square - (-2 - 5) + 6 = 4 = 5 - \square$ | d) $18 + (-7 + \square) - (-4) = -6 = \square - 4$ |
| e) $-9 - (\square - 12) = -8 = \square + (-4)$ | f) $\square + (12 - 20) - 2 = 15 = -6 - \square$ |
| g) $6 - \square + (8 - 3) = 1 = 14 - \square$ | |
| a) -6 +12 | e) +11 -4 |
| b) -8 -12 | f) +25 -21 |
| c) -9 +1 | g) +10 +13 |
| d) -21 -2 | |

Números enteros

40. Resuelve estas multiplicaciones.

a) $(+5) \cdot (+2)$ b) $(-6) \cdot (-8)$ c) $(+4) \cdot (+3)$

a) +10 b) +48 c) +12

41. Calcula.

a) $(+10) : (+2)$ c) $(+24) : (+3)$

b) $(-64) : (-8)$ d) $(-56) : (+8)$

a) +5 b) +8 c) +8 d) -7

42. Resuelve estas operaciones.

a) $\text{Op}(-3) \cdot |-3|$ b) $|\text{Op}(7)| : \text{Op}(|-1|)$

a) $(+3) \cdot (+3) = +9$ b) $(+7) \cdot (-1) = -7$

43. Completa en tu cuaderno.

a) $(+24) \cdot (\square) = -48$ c) $(-48) : (\square) = +12$

b) $(-16) \cdot (\square) = -64$ d) $(\square) : (-4) = -25$

a) -2 b) +4 c) -4 d) +100

44. Resuelve estas multiplicaciones.

a) $(+3) \cdot (+9) \cdot (-4)$ e) $(+2) \cdot (+11) \cdot (-1)$

b) $(+2) \cdot (-5) \cdot (+4)$ f) $(+9) \cdot (-12) \cdot (-6)$

c) $(-4) \cdot (+8) \cdot (-3)$ g) $(-5) \cdot (-15) \cdot (-2)$

d) $(-7) \cdot (-1) \cdot (+5)$ h) $(+10) \cdot (-3) \cdot (+3)$

a) -108 e) -22

b) -40 f) +648

c) +96 g) -150

d) +35 h) -90

45. Resuelve estas divisiones.

a) $(+36) : (-9) \cdot (-3)$ e) $(+54) : (+6) \cdot (-2)$

b) $(+42) : (-7) \cdot (+2)$ f) $(+93) : (-3) \cdot (+7)$

c) $(+38) : (+2) \cdot (-5)$ g) $(+88) : (-4) \cdot (-9)$

d) $(+63) : (+9) \cdot (-4)$ h) $(+39) : (+13) \cdot (-13)$

a) +12 e) -18

b) -12 f) -217

c) -95 g) +198

d) -28 h) -39

Números enteros

51. Calcula.

- a) $(+8) - (-9 + 5) : (-2)$ c) $(+44) - (-14) : (-7)$
b) $(-12) + (6 - 8) \cdot (-1)$ d) $(+8) - (-5) \cdot (4 - 7)$

a) $(+8) - (+2) = +6$ c) $(+44) - (+2) = +42$
b) $(-12) + (+2) = -10$ d) $(+8) - (+15) = -7$

52. Completa en tu cuaderno estas igualdades.

- a) $(4 - \square) \cdot 5 = 10$ c) $8 : (\square + 5) = 4$
b) $7 - 3 \cdot \square = -2$ d) $10 + 7 \cdot \square = -4$

a) +2 b) +3 c) -3 d) -2

53. Razona si son ciertas estas igualdades.

- a) $|1 - 3 \cdot 2| = [9 - (-1)] : (-2)$
b) $\text{Op}(-15 + 2 \cdot 5) = |-7 + 6 \cdot 2|$
c) $18 : (-6) + 8 = \text{Op}(|3 - 8|)$

a) $|-5| = -5 \rightarrow \text{Falsa, los valores absolutos son siempre positivos.}$
b) $\text{Op}(-5) = |+5| \rightarrow +5 = +5 \rightarrow \text{Verdadera.}$
c) $+5 = \text{Op}(|-5|) \rightarrow +5 = \text{Op}(+5) \rightarrow \text{Falsa, el opuesto de un número positivo es negativo.}$

54. Calcula.

- a) $[(+4) - (+16)] : (-4)$ e) $[(+2) + (+11)] \cdot (-1)$
b) $(+2) \cdot [(-5) - (+4)]$ f) $[(+9) - (-12)] : (-7)$
c) $(-4) \cdot [(+8) + (-3)]$ g) $[(-5) + (-15)] \cdot (-2)$
d) $(-7) \cdot [(-1) - (+5)]$ h) $(+10) \cdot [(-3) - (+3)]$

a) $(-12) : (-4) = 3$ e) $(+13) \cdot (-1) = -13$
b) $(+2) \cdot (-9) = -18$ f) $(+21) : (-7) = -3$
c) $(-4) \cdot (+5) = -20$ g) $(-20) \cdot (-2) = +40$
d) $(-7) \cdot (-6) = +42$ h) $(+10) \cdot (-9) = -90$

55. Realiza las operaciones.

- a) $(-28) : [(-11) - (-18)] : (+2)$
b) $(+32) : [(+8) + (-16)] : (+4)$
c) $(-72) : [(-6) - (-42)] : (-1)$
d) $(+44) : [(+11) - (+22)] : (-2)$

a) $(-28) : (+7) : (+2) = -2$
b) $(+32) : (-8) : (+4) = -1$
c) $(-72) : (+36) : (-1) = (-2) : (-1) = +2$
d) $(+44) : (-11) : (-2) = (-4) : (-2) = +2$

56. Realiza las operaciones respetando la jerarquía.

- a) $5 + 3 \cdot (-4 + 8)$
 b) $-7 - (6 + 3) : (-3)$
 c) $15 - 12 : (-2 - 1)$
 d) $-27 + 3 \cdot (10 - 13)$
 e) $16 \cdot (9 - 17) - (-9)$

a) $5 + 3 \cdot (+4) = 5 + 12 = 17$ d) $-27 + 3 \cdot (-3) = -27 + (-9) = -36$
 b) $-7 - (+9) : (-3) = -7 - (-3) = -4$ e) $16 \cdot (-8) + 9 = -128 + 9 = -119$
 c) $15 - 12 : (-3) = 15 - (-4) = 19$

57. Halla el resultado.

- a) $5 \cdot (-6) - 8 \cdot 4 + 17 - 2 \cdot 9$
 b) $-8 : (-2) + 9 : 3 - 6 - (-15) : (-5)$
 c) $-24 : (12 - 15) + (-4)$
 d) $14 + (-1 - 11) : (-6)$

a) $-30 - 32 + 17 - 18 = -63$ b) $4 + 3 - 6 - 3 = -2$ c) $8 - 4 = 4$ d) $14 + 2 = 16$

58. Calcula el resultado de las operaciones.

- a) $(4 - 8) \cdot 4 + (-1 - 5)$ e) $(-7 - 12) - (7 - 5) \cdot (-7)$
 b) $(19 + 2) : (-3) - (7 - 3)$ f) $9 \cdot (25 - 17) + (-5 + 18)$
 c) $5 \cdot (-5 + 2) - (6 - 7)$ g) $(12 - 16) - 48 : (20 - 24)$
 d) $(14 - 5) + 10 : (-7 + 5)$ h) $(-24 - 12) : (-4) - (28 - 16)$

 a) $(-4) \cdot 4 + (-6) = -16 - 6 = -22$ e) $-19 - 2 \cdot (-7) = -19 + 14 = -5$
 b) $21 : (-3) - 4 = -7 - 4 = -11$ f) $9 \cdot 8 + 13 = 72 + 13 = 85$
 c) $5 \cdot (-3) - (-1) = -15 + 1 = -14$ g) $-4 - 48 : (-4) = -4 + 12 = 8$
 d) $9 + 10 : (-2) = 9 - 5 = 4$ h) $-36 : (-4) - 12 = 9 - 12 = -3$

59. Halla el resultado.

- a) $9 + 6 \cdot (4 - 1 - 8) - 5 : (-1)$
 b) $-13 + (-5 - 7 - 9) : (-7) + (-12) : 4$
 c) $18 - (-8 - 3) \cdot 5 + 22 : (-2)$
 d) $-26 : (-2) + (-8 - 4 + 2) \cdot 7 - (-5)$
 e) $13 \cdot 9 - 3 \cdot (-14 + 7 - 4) - (+4)$

 a) $9 + 6 \cdot (-5) + 5 = 9 - 30 + 5 = -16$
 b) $13 + (-21) : (-7) - 3 = 13 + 3 - 3 = 13$
 c) $18 - (-11) \cdot 5 - 11 = 18 + 55 - 11 = 62$
 d) $13 + (-10) \cdot 7 + 5 = 13 - 70 + 5 = -52$
 e) $117 - 3 \cdot (-11) - 4 = 117 + 33 - 4 = 146$

Números enteros

60. Utiliza los números enteros para expresar el valor numérico de estas afirmaciones.

- a) Estamos a cinco grados bajo cero.
- b) En el tercer sótano venden los restos de serie.
- c) El comedor de un hotel está en el primer piso.
- d) Debo 8 € a mi amigo Juan.

a) -5 b) -3 c) 1 d) -8

61. Describe con números enteros las siguientes situaciones.

- a) Un globo aerostático está a 3460 m de altura.
- b) Roma se fundó en el 753 a.C.
- c) El Titanic se encuentra hundido a 3800 m de profundidad; allí el agua está a unos 2°C de temperatura.
- d) El iceberg sobresalía 4 m sobre el nivel del mar y su parte sumergida media 33 m.

a) $+3\,460$ m b) -753 c) $-3\,800$ m y $+2^{\circ}\text{C}$ d) $+4$ m y $+33$ m

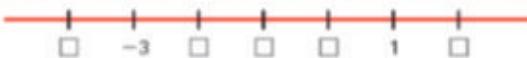
62. Escribe un enunciado que se corresponda con cada uno de estos números.

$+4$ -7 $+5\,600$ -23 $+45$

Respuesta abierta.

- El termómetro marcaba 4°C .
- El lago tiene una profundidad de 7 m.
- La cima de la montaña está a 5 600 metros de altura.
- El saldo de su cuenta indica que debe 23 euros.
- Los hechos ocurrieron en el año 45 d.C.

63. Copia la siguiente recta en tu cuaderno y completa los números que faltan.



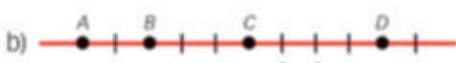
Los números que corresponden a los huecos de izquierda a derecha son: $-4, -2, -1, 0, +2$

64. Representa en la recta numérica los siguientes números enteros.

$+2$ -5 $+6$ -8 $+7$ -10



65. Indica el número entero que corresponde a cada punto marcado en la recta numérica.



a) $A = -5, B = -3, C = +2, D = +5$

b) $A = -6, B = -4, C = -1, D = +3$

66. Calcula y representa en la recta numérica los siguientes números enteros.

- a) El opuesto de 3.
- b) El valor absoluto de -9 .
- c) El número situado 3 unidades a la izquierda de -5 .
- d) El número situado 2 unidades a la derecha de -5 .

a) -3 b) 9 c) -8 d) -3



67. ¿Cuántos números hay situados a 3 unidades del número -1 ? ¿Cuáles son? Represéntalos en la recta numérica.

Dos números: el -4 (3 unidades a la izquierda) y el $+2$ (3 unidades a la derecha).



68. Escribe el grupo de números enteros que cumplen las siguientes características.

- a) Son mayores que $+2$ y menores que $+6$.
- b) Son mayores o iguales que -6 y menores que -2 .
- c) Son mayores que -2 y menores o iguales que $+6$.
- d) Son mayores o iguales que -6 y menores o iguales que $+2$.

a) $+3, +4, +5$ b) $-6, -5, -4, -3$ c) $-1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6$ d) $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2$

69. Contesta razonadamente.

- a) ¿Cuántos números enteros hay entre -1 y $+1$?
- b) ¿Y entre -2 y $+2$?
- c) ¿Y entre -3 y $+3$?
- d) Generaliza los resultados que has obtenido. ¿Cuántos números enteros hay entre un número y su opuesto?

a) Solo uno, el 0. c) Cinco, que son: $-2, -1, 0, +1, +2$.
 b) Tres, que son: $-1, 0, +1$. d) El doble de ese número menos 1.

70. Indica cuántos números enteros están comprendidos entre:

- a) $+5$ y su opuesto.
- b) -7 y su opuesto.
- c) Los opuestos de -3 y $+2$.
- d) El opuesto de -4 y el opuesto de $+5$.

a) Hay 9 números: $-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4$.
 b) Hay 13 números: $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6$.
 c) Hay 4 números: $-1, 0, +1, +2$.
 d) Hay 8 números: $-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$.

Números enteros

71. ¿Cuántos números enteros hay entre -25 y 11 ? ¿Y entre -234 y 345 ?

Entre -25 y 11 : $11 - (-25) - 1 = 11 + 25 - 1 = 35$

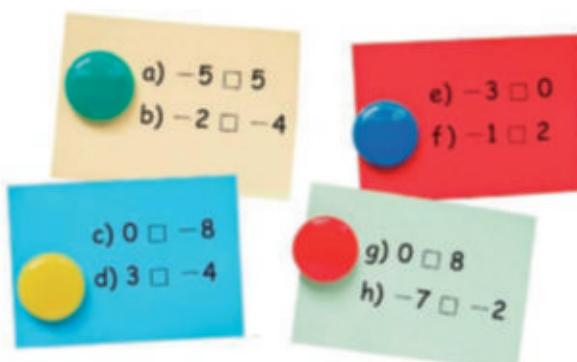
Entre -234 y 345 : $345 - (-234) - 1 = 578$

72. Indica cuáles de los siguientes números son enteros.

$$\frac{6}{5} \quad -1,52 \quad \frac{50}{10} \quad -\frac{17}{2} \quad -7 \quad \frac{9}{3}$$

Son enteros: $50/10 = 5$, -7 y $9/3 = 3$.

73. Completa en tu cuaderno con $<$, $>$ o $=$.



a) $<$ b) $>$ c) $>$ d) $>$ e) $<$ f) $<$ g) $<$ h) $<$

74. Escribe un número anterior y otro posterior a los siguientes números.

$$-5 \quad 3 \quad 0 \quad 4 \quad -8 \quad -2$$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$-7 < -5 < -1 \quad 0 < 3 < 4 \quad -1 < 0 < 1 \quad 2 < 4 < 8 \quad -10 < -8 < -5 \quad -5 < -2 < -1$$

75. Escribe tres números anteriores y tres posteriores a $+2$.

Respuesta abierta. Por ejemplo, anteriores: $-1, 0, 1$ y posteriores: $3, 7, 11$.

76. Observa los siguientes números enteros.

$$-3 \quad 4 \quad -2 \quad 0 \quad 11 \quad -9 \quad -4 \quad 1$$

- Ordénalos de menor a mayor.
- Ordena de menor a mayor sus valores absolutos.
- Ordena de menor a mayor sus opuestos.

a) $-9 < -4 < -3 < -2 < 0 < 1 < 4 < 11$

b) $0 < |1| < |-2| < |-3| < |-4| = |4| < |-9| < |11|$

c) $\text{Op}(11) < \text{Op}(4) < \text{Op}(1) < \text{Op}(0) < \text{Op}(-2) < \text{Op}(-3) < \text{Op}(-4) < \text{Op}(-9)$

77. Ordena estos números de menor a mayor.

4 -6 -7 2 -9
 -11 12 -8 16 -19

Ordena también sus opuestos y sus valores absolutos.

$$-19 < -11 < -9 < -8 < -7 < -6 < 2 < 4 < 12 < 16$$

Opuestos: Op(16) < Op(12) < Op(4) < Op(2) < Op(-6) < Op(-7) < Op(-8) < Op(-9) < Op(-11) < Op(-19)

Valores absolutos: $|2| < |4| < |-6| < |-7| < |-8| < |-9| < |-11| < |12| < |16| < |-19|$

78. Completa en tu cuaderno.

- a) $-7 < \square < \square < -2$ d) $3 < \square < \square < 8$
 b) $-6 < \square < \square < -1$ e) $-5 < \square < \square < 2$
 c) $0 < \square < \square < 6$ f) $-9 < \square < \square < -6$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) -5, -3 d) 5, 7
 b) -4, -2 e) -2, 1
 c) 2, 3 f) -8, -7

79. Escribe, en cada caso, tres números que cumplan la característica indicada.

- a) Menores que 0 y mayores que -10.
 b) Mayores que -2 y menores que 5.
 c) Mayores que -4.
 d) Menores que -6.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) -7, -3, -1 c) -3, 0, 10
 b) -1, 0, 4 d) -11, -9, -7

80. Completa con <, > o =.

- a) $|-6| \square \text{Op}(6)$ d) $|8 - 5| \square \text{Op}(-3)$
 b) $|-7| \square -6$ e) $-\text{Op}(4) \square |-5|$
 c) $|-5| \square \text{Op}(2 + 3)$ f) $\text{Op}(-9) \square \text{Op}(6 + 3)$
- a) > b) > c) > d) = e) < f) >

81. ¿Es cierto que $|a| > \text{Op}(a)$ siendo a un número entero? ¿Cuándo $|a| = \text{Op}(a)$?

No siempre, solo es cierto si a es positivo.

$|a| = \text{Op}(a)$ cuando a es negativo o $a = 0$.

Números enteros

82. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla.

a	b	$a + b$	$b + a$
-5	+3		
-8	-2		
-6	+7		
+4	+9		

Observa las dos últimas columnas: ¿es conmutativa la suma?

a	b	$a + b$	$b + a$
-5	+3	-2	-2
-8	-2	-10	-10
-6	+7	+1	+1
+4	+9	+13	+13

La suma de enteros es conmutativa.

83. Efectúa las siguientes operaciones.

- | | | | | | | | |
|------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| a) $(+9) + (-3)$ | e) $(+7) + (-8)$ | | | | | | |
| b) $(-5) + (-3)$ | f) $(-7) + (-10)$ | | | | | | |
| c) $(-6) + (+2)$ | g) $(+9) + (+8)$ | | | | | | |
| d) $(+8) + (-2)$ | h) $(-10) + (-6)$ | | | | | | |
| a) +6 | b) -8 | c) -4 | d) +6 | e) -1 | f) -17 | g) +17 | h) -16 |

84. Copia en tu cuaderno y completa esta tabla.

a	b	$a - b$	$b - a$
-5	-3		
-8	-2		
-6	+7		
+4	+9		

Observa las dos últimas columnas: ¿es conmutativa la resta?

a	b	$a - b$	$b - a$
-5	-3	-2	+2
-8	-2	-6	+10
-6	+7	-13	+13
+4	+9	-5	+5

La resta de enteros no es conmutativa.

85. Ten en cuenta los signos y halla las siguientes restas de números enteros.

- | | | | | | | | |
|-------------------|--------------------|----------|----------|----------|---------|---------|---------|
| a) $(+4) - (+6)$ | e) $(-4) - (+7)$ | | | | | | |
| b) $(-8) - (-9)$ | f) $(+8) - (+6)$ | | | | | | |
| c) $(-4) - (+10)$ | g) $(-7) - (-2)$ | | | | | | |
| d) $(+9) - (+19)$ | h) $(-12) - (-13)$ | | | | | | |
| a) -2 | b) $+1$ | c) -14 | d) -10 | e) -11 | f) $+2$ | g) -5 | h) $+1$ |

86. Completa en tu cuaderno estas sumas.

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------|----------|
| a) $(-11) + \square = +4$ | c) $\square + (-20) = -12$ | | |
| b) $(+13) + \square = +12$ | d) $\square + (+5) = -13$ | | |
| a) $+15$ | b) -1 | c) $+8$ | d) -18 |

87. Completa en tu cuaderno las restas.

- | | | | |
|---------------------------|----------|----------|----------|
| a) $(+3) - \square = -7$ | | | |
| b) $(-15) - \square = +9$ | | | |
| c) $\square - (+8) = +7$ | | | |
| d) $\square - (-4) = -11$ | | | |
| a) $+10$ | b) -24 | c) $+15$ | d) -15 |

89. Elimina los paréntesis y efectúa los cálculos correspondientes.

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $-(-8) + 17$ | e) $-(-9) + 15$ |
| b) $-(-5) - 23$ | f) $-(-12) - (-20)$ |
| c) $-(-30) + (-12)$ | g) $-(-24) + (-19)$ |
| d) $-(-6) - (-18)$ | h) $-(-16) - (-14)$ |
| a) $8 + 17 = 25$ | e) $9 + 15 = 24$ |
| b) $5 - 23 = -18$ | f) $12 + 20 = 32$ |
| c) $30 - 12 = 18$ | g) $24 - 19 = 5$ |
| d) $6 + 18 = 24$ | h) $16 + 14 = 30$ |

90. Elimina los paréntesis y realiza las operaciones indicadas.

- | | | | |
|--------------------------|---------------------------|----------|---------|
| a) $(+12) + (-3) + (+2)$ | e) $(+5) - (+6) + (-7)$ | | |
| b) $(-15) + (+6) - (-5)$ | f) $(-8) - (-2) + (-9)$ | | |
| c) $(+4) - (+3) + (-8)$ | g) $(-13) + (+5) - (-10)$ | | |
| d) $(-16) - (-2) + (+3)$ | h) $(+7) + (-2) - (+9)$ | | |
| a) $+11$ | c) -7 | e) -8 | g) $+2$ |
| b) -4 | d) -11 | f) -15 | h) -4 |

Números enteros

91. Calcula estas sumas y restas de números enteros.

- | | | | |
|----------------------|----------------------|--------|--------|
| a) $(-3 + 8) - (-2)$ | e) $(5 - 9) + (-3)$ | | |
| b) $(-2 + 4) - (+4)$ | f) $(7 - 10) + (-8)$ | | |
| c) $(1 - 3) + (-4)$ | g) $(-2 - 8) - (+6)$ | | |
| d) $(6 - 3) + (-2)$ | h) $(-1 + 4) - (-7)$ | | |
| a) 7 | c) -6 | e) -7 | g) -16 |
| b) -2 | d) 1 | f) -11 | h) 10 |

92. Efectúa los siguientes cálculos eliminando previamente los paréntesis.

- | | | | |
|-----------------------|------------------------|-------|--------|
| a) $(+7) + (10 - 12)$ | e) $(-6) - (5 - 10)$ | | |
| b) $(-9) + (3 - 9)$ | f) $(+16) + (12 - 13)$ | | |
| c) $(+5) - (-2 + 4)$ | g) $(-11) - (-2 + 7)$ | | |
| d) $(+8) + (-3 - 1)$ | h) $(-3) - (4 - 8)$ | | |
| a) 5 | c) 3 | e) -1 | g) -16 |
| b) -15 | d) 4 | f) 15 | h) 1 |

93. Calcula.

- | | | | |
|---------------------------|---------------------------|--------|-------|
| a) $(6 - 13) - (5 - 20)$ | e) $(-2 + 14) + (7 - 18)$ | | |
| b) $(3 - 10) - (-4 + 7)$ | f) $(5 - 15) + (-3 - 4)$ | | |
| c) $(-6 - 7) - (10 - 20)$ | g) $(15 + 4) + (-8 + 1)$ | | |
| d) $(-6 - 1) - (12 + 2)$ | h) $(4 - 8) - (-2 - 4)$ | | |
| a) 8 | c) -3 | e) 1 | g) 12 |
| b) -10 | d) -21 | f) -17 | h) 2 |

94. Resuelve las siguientes operaciones con paréntesis y corchetes, eliminando primero los corchetes y paréntesis; después realiza las operaciones efectuando primero las que se encuentran entre paréntesis y comprueba que el resultado coincide.

- | |
|-----------------------------------|
| a) $-1 - [-3 - 2 + (-4)]$ |
| b) $(2 - 8) + [1 - (-9) - 3]$ |
| c) $(-5 + 3) - [7 - (-8)]$ |
| d) $-6 - [5 - 10 + (-3)]$ |
| e) $-4 + [-6 + (-2) - (-5)]$ |
| f) $12 + (-9) - [(-7) - (+5)]$ |
| g) $-[5 + (-18) + (-6 - 12) - 3]$ |
| h) $4 + [-6 + (-9) - 12]$ |

a) Eliminando corchetes y paréntesis: $-1 + 3 + 2 - (-4) = -1 + 3 + 2 + 4 = 8$

Primero paréntesis: $-1 - (-9) = -1 + 9 = 8$

b) Eliminando corchetes y paréntesis: $2 - 8 + 1 + 9 - 3 = 1$

Primero paréntesis: $-6 + 7 = 1$

c) Eliminando corchetes y paréntesis: $-5 + 3 - 7 + (-8) = -5 + 3 - 7 - 8 = -17$

Primero paréntesis: $-2 - 15 = -17$

d) Eliminando corchetes y paréntesis: $-6 - 5 + 10 - (-3) = -6 - 5 + 10 + 3 = 2$

Primero paréntesis: $-6 - (-8) = 2$

e) Eliminando corchetes y paréntesis: $-4 - 6 + (-2) - (-5) = -4 - 6 - 2 + 5 = -7$

Primero paréntesis: $-4 - 3 = -7$

f) Eliminando corchetes y paréntesis: $12 - 9 + 7 + 5 = 15$

Primero paréntesis: $12 - 9 - (-12) = 12 - 9 + 12 = 15$

g) Eliminando corchetes y paréntesis: $-5 - (-18) - (-6 - 12) + 3 = -5 + 18 + 6 + 12 + 3 = 34$

Primero paréntesis: $-(-13 - 18 - 3) = -(-34) = 34$

h) Eliminando corchetes y paréntesis: $4 - 6 + (-9) - 12 = 4 - 6 - 9 - 12 = -23$

Primero paréntesis: $4 + (-27) = -23$

95. Efectúa.

a) $6 - (4 - 5) + (-2) - 7$

e) $9 - (4 + 8) + (-15)$

b) $-3 + (6 - 9) - (5 - 10)$

f) $-9 + 12 - (-14 + 7)$

c) $4 - 12 - (-8) - (1 - 3)$

g) $8 - (7 - 13) - (-9 - 4 - 6)$

d) $-7 + (-2 - 3) - (-5 - 6)$

h) $-15 + (12 - 8 - 13) - (-20)$

a) -2

b) -1

c) 2

d) -1

e) -18

f) 10

g) 33

h) -4

96. Realiza.

a) $8 - 9 + 4 - 3 - 5$

e) $-16 - 2 + 5 - 7 - 8$

b) $3 - 5 + 14 - 4 - 9$

f) $2 - 3 - 4 - 5 + 6$

c) $6 - 13 + 10 - 11 - 4$

g) $-21 + 15 - 18 + 1$

d) $23 - 17 + 9 - 3 - 8$

h) $-4 - 9 + 14 - 7$

a) -5

c) -12

e) -28

g) -23

b) -1

d) 4

f) -4

h) -6

Números enteros

97. Calcula el valor de:

- | | |
|---------------|-----------------|
| a) $ 6 - 11 $ | e) $ -3 + 2 $ |
| b) $ 12 - 4 $ | f) $ -7 + 10 $ |
| c) $ -1 - 4 $ | g) $ 5 - (-9) $ |
| d) $ -3 + 5 $ | h) $ -4 - 3 $ |
- a) 5 b) 8 c) 5 d) 2 e) 1 f) 3 g) 14 h) 7

98. Calcula.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $\text{Op}(4 - 6)$ | d) $\text{Op}(-5 + 9)$ |
| b) $\text{Op}[(-3) + 2]$ | e) $\text{Op}[8 - (-2)]$ |
| c) $\text{Op}[(-4) + 2]$ | f) $\text{Op}(-2 - 7)$ |
- a) 2 b) 1 c) 2 d) -4 e) -10 f) 9

99. Halla el valor de:

- | | |
|---------------------------|--------------------------------|
| a) $ -3 + \text{Op}(-4)$ | d) $ 12 - \text{Op}(-2) $ |
| b) $\text{Op}(-5)$ | e) $-7 - \text{Op}(-6)$ |
| c) $ \text{Op}(-8) $ | f) $\text{Op}(\text{Op}(2))$ |
- a) $3 + 4 = 7$ d) $|12 - 2| = 10$
b) $\text{Op}(5) = -5$ e) $-7 - 6 = -13$
c) $|8| = 8$ f) $\text{Op}(2) = -2$

100. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala.

a	b	$a \cdot b$	$b \cdot a$
-3	+6		
+5	-7		
-8	-4		
+9	+2		

Observa las dos últimas columnas: ¿es conmutativa la multiplicación?

a	b	$a \cdot b$	$b \cdot a$
-3	+6	-18	-18
+5	-7	-35	-35
-8	-4	+32	+32
+9	+2	+18	+18

La multiplicación de enteros es conmutativa.

101. Comprueba que se cumple la propiedad conmutativa con los siguientes productos.

- a) $(+4) \cdot (+6)$ c) $(-3) \cdot (+5)$
 b) $(-2) \cdot (-9)$ d) $(+4) \cdot (-8)$

a) $(+4) \cdot (+6) = (+6) \cdot (+4) = +24$ c) $(-3) \cdot (+5) = (+5) \cdot (-3) = -15$
 b) $(-2) \cdot (-9) = (-9) \cdot (-2) = +18$ d) $(+4) \cdot (-8) = (-8) \cdot (+4) = -32$

102. Realiza los siguientes productos y comprueba la propiedad conmutativa.

- a) $(-7) \cdot (+10)$ c) $(+6) \cdot (-8)$
 b) $(-2) \cdot (+5)$ d) $(-12) \cdot (-3)$

a) $(-7) \cdot (+10) = (+10) \cdot (-7) = -70$ c) $(+6) \cdot (-8) = (-8) \cdot (+6) = -48$
 b) $(-2) \cdot (+5) = (+5) \cdot (-2) = -10$ d) $(-12) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-12) = +36$

103. Calcula.

- a) $(+12) : (+3)$ d) $(+14) : (-2)$
 b) $(+15) : (-3)$ e) $(-20) : (-4)$
 c) $(-28) : (-7)$ f) $(+32) : (-4)$
- a) +4 b) -5 c) +4 d) -7 e) +5 f) -8

104. Completa en tu cuaderno.

- a) $(-4) \cdot \square = +36$ c) $\square \cdot (+7) = -28$
 b) $\square \cdot (-8) = -48$ d) $(+6) \cdot \square = -36$
- a) -9 b) +6 c) -4 d) -6

105. Completa en tu cuaderno.

- a) $\square : (-4) = +12$ c) $\square : (-7) = -1$
 b) $\square : (-5) = -18$ d) $\square : 8 = -3$
- a) -48 b) +90 c) +7 d) -24

106. Comprueba la propiedad asociativa.

- a) $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2)$
 b) $[(-2) \cdot 5] \cdot 9 = (-2) \cdot [5 \cdot 9]$
 c) $[(-3) \cdot (-2)] \cdot 4 = (-3) \cdot [(-2) \cdot 4]$
- a) $15 \cdot 2 = 3 \cdot 10 \rightarrow 30 = 30$
 b) $-10 \cdot 9 = -2 \cdot 45 \rightarrow -90 = -90$
 c) $6 \cdot 4 = (-3) \cdot (-8) \rightarrow 24 = 24$

Números enteros

107. Realiza las operaciones de izquierda a derecha.

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| a) $10 : (-2) \cdot 3$ | e) $-4 \cdot (-3) \cdot 8$ |
| b) $9 \cdot (-2) : (-1)$ | f) $-3 \cdot (-5) \cdot (-7)$ |
| c) $10 \cdot (-4) : (-8)$ | g) $15 : (-3) \cdot 2$ |
| d) $-8 : 2 : 2$ | h) $20 \cdot (-1) : (-4)$ |
-
- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| a) $(-5) \cdot 3 = -15$ | e) $12 \cdot 8 = 96$ |
| b) $(-18) : (-1) = 18$ | f) $15 \cdot (-7) = -105$ |
| c) $(-40) : (-8) = 5$ | g) $(-5) \cdot 2 = -10$ |
| d) $-4 : 2 = -2$ | h) $-20 : (-4) = 5$ |

108. Calcula el valor de las siguientes potencias.

- | | | |
|----------|-------------|-------------|
| a) 6^5 | b) $(-6)^5$ | c) $(-6)^4$ |
|----------|-------------|-------------|
-
- | | | |
|----------|-----------|----------|
| a) 7 776 | b) -7 776 | c) 1 296 |
|----------|-----------|----------|

109. Determina el valor de estas potencias.

- | | | | |
|----------|-------------|----------|-------------|
| a) 5^4 | b) $(-5)^4$ | c) 5^3 | d) $(-5)^3$ |
|----------|-------------|----------|-------------|
-
- | | | | |
|--------|---------|--------|---------|
| a) 625 | b) -625 | c) 125 | d) -125 |
|--------|---------|--------|---------|

110. Calcula.

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| a) $(7 - 10) \cdot (1 - 6)$ | e) $(-3 + 9) \cdot (4 - 2)$ |
| b) $(5 - 12) \cdot (-3 + 5)$ | f) $(-1 - 3) \cdot (9 - 7)$ |
| c) $(-15 + 3) : (-7 + 4)$ | g) $(9 - 18) : (6 - 3)$ |
| d) $(-12 - 6) : (-1 - 2)$ | h) $(-8 + 16) : (-4 + 6)$ |
-
- | | |
|---------------------------|------------------------|
| a) $(-3) \cdot (-5) = 15$ | e) $6 \cdot 2 = 12$ |
| b) $(-7) \cdot 2 = -14$ | f) $(-4) \cdot 2 = -8$ |
| c) $(-12) : (-3) = 4$ | g) $(-9) : 3 = -3$ |
| d) $(-18) : (-3) = 6$ | h) $8 : 2 = 4$ |

111. Calcula.

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| a) $-5 + 3 \cdot 2$ | e) $4 - (-2) \cdot 7$ |
| b) $8 + (-3) \cdot (-2)$ | f) $-10 + 5 \cdot (-3)$ |
| c) $-9 - 20 : (-5)$ | g) $12 + 6 : (-3)$ |
| d) $-18 - 7 : (-1)$ | h) $14 + (-6) : (-2)$ |
-
- | | | | |
|-------|--------|--------|-------|
| a) 1 | c) -5 | e) 18 | g) 10 |
| b) 14 | d) -11 | f) -25 | h) 17 |

112. Efectúa.

- a) $3 \cdot (-5) - 8 : 2 - (-5)$
 b) $-7 - 9 \cdot 2 + 7 \cdot (-3)$
 c) $13 - 4 \cdot (-6) + 9 : (-3)$
 d) $25 : (-5) : (-1) + 6 : (-2) : 3$
 e) $40 : (-5) \cdot 3 - (-6) \cdot 4 \cdot (-2)$
 f) $7 + 6 \cdot (-8) - (-9) \cdot (-1) : (-3)$

a) $-15 - 4 + 5 = -14$ d) $5 - 1 = 4$
 b) $-7 - 18 - 21 = -46$ e) $-24 - 48 = -72$
 c) $13 + 24 - 3 = 34$ f) $7 - 48 - (-3) = -38$

113. Calcula.

- a) $(-6 + 4) \cdot (-4) + 9$ e) $(-8 + 4) : (-4) - (-7)$
 b) $(5 - 6) \cdot (-3) - 1$ f) $(10 - 6) : (-2) + (-8)$
 c) $12 - 2 \cdot (6 - 9)$ g) $-8 + 3 \cdot (7 - 10)$
 d) $15 - 7 \cdot (-1 - 3)$ h) $20 + (-5) \cdot (9 - 1)$

 a) $8 + 9 = 17$ e) $1 + 7 = 8$
 b) $3 - 1 = 2$ f) $-2 - 8 = -10$
 c) $12 - (-6) = 18$ g) $-8 + (-9) = -17$
 d) $15 - (-28) = 43$ h) $20 + (-40) = -20$

114. Halla el resultado de las operaciones.

- a) $(3 - 5) \cdot 7 + (-4 - 8)$
 b) $(14 + 4) : (-3) - (10 - 3)$
 c) $5 \cdot (-6 + 2) - (9 - 7)$
 d) $(17 - 6) + 12 : (-9 + 5)$
 e) $(-4 - 12) - (1 - 5) \cdot (-6)$
 f) $9 \cdot (5 - 7) + (-11 + 18)$

 a) $-14 - 12 = -26$ d) $11 + (-3) = 8$
 b) $-6 - 7 = -13$ e) $-16 - 24 = -40$
 c) $-20 - 2 = -22$ f) $-18 + 7 = -11$

115. Completa.

- a) $(-6) \cdot [(-1) + \square] = -18$ d) $3 - [\square \cdot 5] = 18$
 b) $8 \cdot [4 - \square] = 32$ e) $1 + [3 : \square] = -2$
 c) $[\square \cdot (-6)] + 1 = -41$ f) $[(-2) \cdot \square] : 3 = -6$

 a) 4 b) 0 c) 7 d) -3 e) -1 f) 7

Números enteros

116. Efectúa las siguientes operaciones combinadas de números enteros.

- a) $10 - [-(3 - 5)] \cdot 5$
- b) $4 - 4 \cdot [5 - (-7)]$
- c) $-14 - 6 \cdot [-(4 - 7)]$
- d) $-1 - 3 \cdot [9 - (-4 - 2)]$
- e) $12 - 9 \cdot [2 - (-6 - 4) - 3]$
- f) $-6 - (-3) \cdot [-5 - (-7 - 8)]$

a) $10 - 10 = 0$

c) $-14 - 66 = -80$

e) $12 - 9 \cdot 9 = -69$

b) $4 - 48 = -44$

d) $-1 - 3 \cdot 15 = -46$

f) $-6 - (-3) \cdot 10 = 24$

117. Este mes, David debe pagar 1650 € por un arreglo de su coche, 1380 € de una reforma doméstica y 480 € de la hipoteca. Si tiene ahorrados 3200 €, ¿puede pagar todo?

$3200 - 1650 - 1380 - 480 = -310 \rightarrow$ No puede pagar todo, le faltan 310 €.

118. Un avión vuela a 7950 m y, en la misma vertical, un submarino navega a 275 m bajo el nivel del mar. ¿Cuántos metros los separan?

$7950 + 275 = 8225$ m → Están separados 8225 metros.

119. Un alpinista alcanza la cima de una montaña de 2532 m y un minero se encuentra bajo tierra a una profundidad de 180 m.

- a) Expresa estas medidas con números enteros.

- b) ¿Cuántos metros los separan? Calcúlalo con una operación de números enteros.

a) Alpinista: 2532

b) $2532 + 180 = 2712$ metros

Minero: -180

120. El congelador de Pilar está a -18°C y su frigorífico a $+8^{\circ}\text{C}$. ¿Cuál es la diferencia en grados entre las temperaturas de los dos aparatos?

$18 + 8 = 26 \rightarrow 26^{\circ}\text{C}$ de diferencia.

121. Cierta noche de febrero amaneció con una temperatura de 2°C bajo cero subiendo después hasta 8°C a mediodía. Por la tarde, descendió hasta 4°C bajo cero. ¿Cuál fue la máxima variación entre las temperaturas ese día?

Amanecer a mediodía: $2 + 8 = 10 \rightarrow$ Variación de 10°C .

Mediodía a tarde: $8 + 4 = 12 \rightarrow$ Variación de 12°C .

La máxima variación fue de 12°C .

122. La temperatura sube 30°C y después baja 42°C . Si al final hay 6°C bajo cero, ¿cuál era la temperatura original?

$T + 30 - 42 = -6 \rightarrow T - 12 = -6 \rightarrow 6 - 12 = -6 \rightarrow$ La temperatura original era de 6°C .

123. Un día de invierno la diferencia entre la temperatura máxima y la mínima fue de 8 °C. Calcula la temperatura máxima si la mínima fue:

- a) Siete grados bajo cero. c) Cero grados.
- b) Cuatro grados bajo cero. d) Dos grados.
- a) 1 °C b) 4 °C c) 8 °C d) 10 °C

124. Un cultivo bacteriano está congelado a 17 °C bajo cero. Para realizar un determinado experimento se baja su temperatura 15 °C, a la media hora se aumenta 4 °C y media hora más tarde se vuelve a bajar 13 °C.

- a) ¿Cuántos grados se han bajado tras estos dos descensos?
- b) Si al inicio del proceso el cultivo se encontraba a 12 °C, ¿cuántos grados en total ha descendido su temperatura?
- a) Si se baja 15, pero luego se sube 4, es como si se bajase 11, que añadidos a los 13 finales son 24 °C de descenso respecto a la temperatura original.
- b) Se han descendido 24 °C, de modo que la temperatura pasa a ser –12 °C.

125. Pedro y Luisa tienen una libreta de ahorros donde les ingresan las nóminas de su trabajo y tienen domiciliados sus recibos. Estas son las últimas anotaciones.

Movimiento	Saldo	Concepto
–120	200	Recibo luz
1500		Nómina de Pedro
	1400	Recibo gas
–1470		Hipoteca
	730	Nómina de Luisa

- a) ¿Cuál es el saldo antes de pagar el recibo de la luz?
- b) ¿Y tras el ingreso de la nómina de Pedro?
- c) ¿Cuál ha sido el importe del recibo del gas?
- d) ¿Y el saldo tras pagar la hipoteca?
- e) ¿Qué cantidad ha cobrado Luisa por su nómina?

Movimiento	Saldo	Concepto
–120	200	Recibo luz
1500	1700	Nómina de Pedro
–300	1400	Recibo gas
–1470	–70	Hipoteca
800	730	Nómina de Luisa

- a) $200 - (-120) = 200 + 120 = 320 \text{ €}$
- b) $200 + 1500 = 1700 \text{ €}$
- c) $1400 - 1700 = -300$. El recibo de gas ha sido de 300 €.
- d) $1400 - 1470 = -70 \text{ €}$
- e) $730 - (-70) = 730 + 70 = 800$. La nómina de Luisa es de 800 €.

- 126.** Alejandro trabaja en la planta 23 de un edificio y, cuando aparcá su coche en el garaje que la empresa tiene en los sótanos, tiene que subir 27 plantas para llegar a su puesto de trabajo. ¿En qué planta aparcá?



$$23 - 27 = -4$$

Aparca en la planta -4 .

- 127.** Al llegar al trabajo, Luis aparcá su coche en el segundo sótano del edificio donde trabaja. Desarrolla su actividad laboral en la sexta planta. ¿Cuántas plantas recorre desde que aparcá hasta que vuelve a montar en el coche para irse al finalizar la jornada laboral?

$$2 + 6 = 8$$

Recorre 8 plantas al ir a trabajar y otras 8 al salir de trabajar, con lo que recorre 16 plantas al cabo de su jornada.

- 128.** Cuando Marcos acude como paciente a la consulta del hospital aparcá su coche en el tercer sótano y sube cinco plantas, donde está la consulta de su médico. ¿En qué planta está la consulta?

$$5 - 3 = 2$$

La consulta está en la segunda planta.

- 129.** El matemático griego Tales de Mileto nació en el año 624 a.C. y vivió 78 años. ¿En qué año murió?

$$-624 + 78 = -546$$

Murió en el año 546 a.C.

- 130.** Euclides, famoso geómetra, murió en el año 265 a.C. y vivió 60 años.

- ¿En qué año nació?
- ¿Cuántos años de diferencia hay entre tú y Euclides?
- ¿En qué año nació una persona dos años mayor que Euclides?

$$a) -265 - 60 = -325$$

Nació en el año -325 a.C.

- Respuesta variable. Pongamos que los alumnos nacieron en 2002. Entonces sería $2\ 002 + 265 = 2\ 267$ los años que se llevan el alumno y Euclides.
- En el -267 a.C.



131. Una cámara frigorífica es capaz de enfriar su interior a un ritmo de $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$ cada hora.

- a) ¿Cuántos grados menos habrá en el interior después de tres horas?
 - b) Si la temperatura inicial es de $3\text{ }^{\circ}\text{C}$ bajo cero, ¿cuál será la temperatura después de 8 horas?
 - c) Si tras 6 horas el interior está a $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$, ¿cuál era la temperatura antes de las 6 horas?
 - d) ¿Cuánto tarda en bajar la temperatura $12\text{ }^{\circ}\text{C}$?
- a) $2 \cdot 3 = 6 \rightarrow$ Habrá $6\text{ }^{\circ}\text{C}$ menos.
 b) $-3 - 2 \cdot 8 = -19\text{ }^{\circ}\text{C}$
 c) $-7 + 2 \cdot 6 = 5\text{ }^{\circ}\text{C}$
 d) $12 : 2 = 6$ horas

132. Una empresa perdió el primer año 12000 €; el segundo año, el doble que el primero, y el tercer año, ganó el triple que las pérdidas de los dos años anteriores juntos. El cuarto año tuvo unos ingresos de 10000 €, y el quinto año, unas pérdidas iguales a la mitad de todas las pérdidas de los años anteriores. ¿Cuál fue el saldo final de la empresa?

$$\begin{array}{ll} 1.\text{º año:} & -12\,000\text{ €} \\ 2.\text{º año:} & 2 \cdot (-12\,000) = -24\,000\text{ €} \\ 3.\text{º año:} & 3 \cdot 36\,000 = 108\,000\text{ €} \\ 4.\text{º año:} & 10\,000\text{ €} \\ 5.\text{º año:} & \frac{1}{2} \text{ de } [-12\,000 + (-24\,000)] = -18\,000\text{ €} \end{array}$$

$$\text{Saldo final: } -12\,000 + (-24\,000) + 108\,000 + 10\,000 + (-18\,000) = 64\,000\text{ €}$$

133. El ascensor de una mina recorre en su descenso bajo tierra seis metros en cada planta.



- a) Si está en la séptima planta de profundidad, ¿cuántos metros ha descendido?
 - b) Ha descendido 54 m. ¿En qué planta se encuentra si partió de la segunda?
 - c) Un minero que estaba en la octava planta utiliza el ascensor y asciende 24 m, ¿en qué planta ha parado?
 - d) Si tras descender 36 m un minero está en la novena planta de profundidad, ¿de qué planta viene?
- a) $6 \cdot 7 = 42$. Ha descendido 42 m.
 b) $54 : 6 + 2 = 9 + 2 = 11$. En la planta 11 bajo la tierra.
 c) $8 - 24 : 6 = 4$. Ha parado en la 4.^a planta.
 d) $9 - 36 : 6 = 3$. Viene de la 3.^a planta.

DEBES SABER HACER

1. Responde razonadamente.

- a) ¿Cuántos números enteros hay entre -50 y $+128$?
- b) ¿Y entre -48 y $+48$?
- c) ¿Qué número entero tiene a 9 como opuesto?
- d) ¿Qué números enteros tienen igual valor absoluto?
 - a) $128 - (-50) - 1 = 177$ números
 - b) $48 \cdot 2 - 1 = 95$
 - c) -9 , puesto que el opuesto de un número se obtiene cambiando de signo dicho número.
 - d) Cada número y su opuesto.

2. Escribe cada conjunto de números enteros.

- a) Números mayores que -7 y menores que -2 .
- b) Números mayores que -4 y menores que $+2$.
- c) Los números enteros que están a 7 unidades de distancia de 3 .
- d) Los números enteros cuyo valor absoluto es menor que 6 .
 - a) $-6, -5, -4, -3$
 - b) $-3, -2, -1, 0, +1$
 - c) -10 y $+10$
 - d) $-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5$

3. Ordena de menor a mayor estos números enteros.

Op (+5) -8 Op (-3) $| -4 |$ $+6$

$$-8 < \text{Op} (+5) = -5 < \text{Op} (-3) = 3 < |-4| = 4 < +6$$

4. Efectúa los cálculos.

- a) $5 - (-3) + 7 + (-9) = 14$
- b) $12 : (-5 + 3) - (4 - 9) \cdot (-1)$
- c) $28 - 3 \cdot [(4 - 6 + 7) + (-5) \cdot (-4)]$
 - a) $5 + 3 + 7 - 9 - 14 = -8$
 - b) $12 : (-2) - (-5) \cdot (-1) = -6 - 5 = -11$
 - c) $28 - 3 \cdot (5 + 20) = 28 - 75 = -47$

5. Calcula el resultado en cada caso.

- a) $8 - 6 \cdot 3 + 12 : 2 - 5$
- b) $8 - 6 \cdot 3 + 12 : (2 - 5)$
- c) $8 - 6 \cdot (3 + 12 : 2) - 5$
- d) $8 - 6 \cdot (3 + 12 : 2 - 5)$
- e) $(8 - 6 \cdot 3 + 12) : 2 - 5$

- a) $8 - 18 + 6 - 5 = -9$
- b) $8 - 18 + 12 : (-3) = 8 - 18 - 4 = -14$
- c) $8 - 6 \cdot 9 - 5 = 8 - 54 - 5 = -51$
- d) $8 - 6 \cdot (3 + 6 - 5) = 8 - 6 \cdot 4 = -16$
- e) $(8 - 18 + 12) : 2 - 5 = 1 - 5 = -4$

6. Completa en tu cuaderno.

- a) $13 \cdot (\square - 8) = -26$
- b) $15 - \square \cdot 3 = 33$
- c) $7 + (9 - \square - 10) \cdot (-2) = 1$

- a) 6
- b) -6
- c) -4

7. Javier debía 24 € a su hermano. Como solo disponía de 15 €, pidió a su amigo Rubén un préstamo. Su amigo le prestó cierta cantidad dejándole un billete. Javier saldó la deuda con su hermano y con lo que le sobró compró tres cuadernos de 2 € cada uno, quedándose en ese momento 5 €. Elige, entre las siguientes expresiones, la que se corresponde con las operaciones que se deben realizar para averiguar el valor del billete que prestó Rubén a Javier.

- a) $15 + 24 + 2 \cdot 3 + \boxed{?} = 5$
- b) $15 - 24 - \boxed{?} = 2 \cdot 3 + 5$
- c) $24 - 15 = \boxed{?} - 2 \cdot 3 - 5$
- d) $15 - 24 + \boxed{?} = 2 \cdot 3 + 5$
- e) $15 - 24 - 2 \cdot 3 = \boxed{?} - 5$

La operación correcta es la d).

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

134. Juana compró un nuevo armario congelador. El manual da las siguientes instrucciones:

- Enchufe el electrodoméstico a la corriente y enciéndalo.
- Oirá que el motor se pone en funcionamiento.
- Se encenderá una luz roja de aviso en la pantalla.
- Gire el control de temperatura hasta la posición deseada.
La posición 2 es la normal.

Posición	1	2	3	4	5
Temperatura	-15 °C	-18 °C	-21 °C	-25 °C	-32 °C

- La luz roja de aviso permanecerá encendida hasta que la temperatura del congelador baje lo suficiente. Tardará de 1 a 3 horas dependiendo de la temperatura que elija.
- Ponga la comida en el congelador después de cuatro horas.

Juana siguió todas estas instrucciones, pero seleccionó la posición 4 en el control de temperatura. Después de cuatro horas, puso la comida en el congelador.

Después de 8 horas, la luz roja de aviso seguía encendida, aunque el motor estaba funcionando y el congelador estaba frío.

Juana se preguntaba si la luz de aviso funcionaba correctamente. ¿Cuál de las siguientes acciones y observaciones indicaría que la luz funcionaba correctamente?

- Puso el control de temperatura en la posición 5 y la luz roja se apagó.
- Puso el control de temperatura en la posición 1 y la luz roja se apagó.
- Puso el control de temperatura en posición 1 y la luz roja siguió encendida.

Justifica cada una de las respuestas.



La segunda, puso el control de temperatura en la posición 1 y la luz roja se apagó.

Si consideramos la primera opción, que se apaga la luz roja al poner en la posición cinco algo habrá mal, ya que la luz roja se mantiene encendida hasta que se alcanza la temperatura, de modo que si en la posición 4 está encendida, en la 5, que es todavía más frío, debería seguir encendida.

La tercera opción, que la luz roja siga encendida en la posición 1, supondría también un error de funcionamiento, bien podría ser de la luz roja, que está estropeada y no se apaga o en caso de que la luz roja esté bien, el congelador tendría un problema, ya que en la posición normal (2), tras 4 horas ya no debería haber problema de temperatura, de modo que en la posición 1, con la temperatura más alta, tampoco.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

135. Obtén, creando operaciones, los números enteros entre -8 y 0 . Para ello utiliza los números 1 , 2 y 3 sin repetirlos, los símbolos aritméticos $+$, $-$, \times , $:$ y paréntesis.

Hay distintas posibilidades:

$$\begin{array}{ll} -8 = -2 \cdot (3 + 1) & -8 = (-3 - 1) \cdot 2 \\ -7 = -(3 \cdot 2 + 1) & -7 = -1 - 2 \cdot 3 \\ -6 = -3 - 2 - 1 & -6 = -1 - 2 - 3 \\ -5 = -(3 \cdot 2) + 1 & -5 = 1 - 3 \cdot 2 \\ -4 = -2 - 3 + 1 & -4 = (1 - 3) \cdot 2 \\ -3 = 3 \cdot (1 - 2) & \\ -2 = -3 + 2 - 1 & \\ -1 = -3 + 2 \cdot 1 & \\ 0 = 3 - 2 - 1 & \end{array}$$

136. Realiza la siguiente operación:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 10\,000$$

Operando de dos en dos obtenemos:

$$(1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \dots + (9\,999 - 10\,000) = -1 - 1 - 1 - \dots - 1 = (-1) \cdot 5\,000 = -5\,000$$

137. Observa esta suma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = 5050$$

Sustituye algunos de los signos $+$ por signos $-$ para que el resultado sea $2\,007$.

Cada vez que cambiamos el signo de un número, la suma se ve reducida en dos veces el valor del número (una vez cuando dejamos de sumar y otra cuando restamos). En el caso del 7, nos quedaría:

$$5\,050 - 2 \cdot 7 = 5\,036$$

Por tanto, cada vez que a un número le cambiamos de signo, tenemos que restar un número par (doble de un número) y nunca se podrá obtener el número $2\,007$, porque $5\,050 - \text{par} = \text{par}$.

138. El producto de $2\,006$ números enteros es 1 . ¿Es posible que su suma sea 0 ?

Para que el producto de números enteros sea 1 , todos los números enteros deben ser 1 o -1 , y debe haber un número par de -1 .

Si queremos que la suma sea 0 , el número de 1 y -1 deben ser iguales. En este caso como hay $2\,006$ números, sería $2\,006 : 2 = 1\,003$ números de cada. Pero esto no puede ser si el producto es 1 , ya que es una cantidad impar de -1 . De modo que no es posible que su suma sea 0 .

PRUEBAS PISA

- 139.** Una libreta de ahorro es un documento en forma de cuadernillo expedido por el banco en el que se anotan los movimientos de dinero que se realizan.

Una de las páginas de la libreta de María es la siguiente:

Concepto	Fecha	Importe
Reintegro cajero	22-2	200 –
Compra tarjeta	25-2	58 –
Transferencia a su favor	24-3	250 +
Ingreso efectivo	28-3	100 +
Compra tarjeta	29-3	48 –
Recibo luz	30-3	62 –

- a) Si al comienzo de esta página el saldo que figura es de 247 €, ¿cuál es el saldo al finalizar este periodo?
- b) Cuando el saldo es negativo, se denominan números rojos. ¿En algún momento ha tenido números rojos?
- a) $247 - 200 - 58 + 250 + 100 - 48 - 62 = 229 \text{ €}$
- b) Sí, del 25 de febrero al 24 de marzo, ya que $247 - 200 - 58 = -11 \text{ €}$

- 140.** La aplicación de frío a los alimentos es uno de los métodos más antiguos y extendidos para su conservación.

Cuando los alimentos se conservan por debajo de -4°C se inhibe el crecimiento de microorganismos peligrosos para la salud y con esto se evitan intoxicaciones al comerlos.

Manuel tiene los alimentos congelados a -12°C . A las 12 de la mañana se produce un corte de luz en su casa y se estima que cada 15 minutos aumenta en 2°C la temperatura en el interior del congelador.

- a) Si el corte de la luz ha sido de 45 minutos, ¿los alimentos de la nevera han superado el nivel crítico de los -4°C ?
- b) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que los alimentos superen los -4°C ?
- a) En un corte de luz de 40 minutos la temperatura aumenta $(45 : 15) \cdot 2 = 6^\circ\text{C}$

Como el congelador estaba a -15°C , pasará a estar a $-12 + 6 = -6^\circ\text{C}$, de modo que los alimentos en la nevera no superan el nivel crítico.

- b) Para que la temperatura pase de -12°C a -4°C , tiene que aumentar $-4 - (-12) = 8^\circ\text{C}$.

Como cada 15 minutos aumenta 2°C , entonces para que los alimentos superen el nivel crítico de temperatura tienen que pasar más de $8 : 2 = 4$ bloques de 15 minutos; es decir, $15 \cdot 4 = 60$ minutos = 1 hora.

Fracciones

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Escribe cómo se leen las siguientes fracciones.

a) $\frac{4}{5}$	c) $\frac{3}{10}$	e) $\frac{13}{17}$
b) $\frac{5}{7}$	d) $\frac{8}{13}$	f) $\frac{21}{32}$

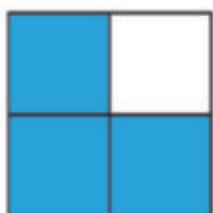
- a) Cuatro quintos.
- b) Cinco séptimos.
- c) Tres décimos.
- d) Ocho treceavos.
- e) Trece diecisieteavos.
- f) Veintiún treintaidosavos.

2. Escribe en forma de fracción.

a) Cinco sextos	d) Seis onceavos
b) Dos octavos	e) Nueve veinteavos
c) Un séptimo	f) Doce treintaitresavos

a) $\frac{5}{6}$	d) $\frac{6}{11}$
b) $\frac{2}{8}$	e) $\frac{9}{20}$
c) $\frac{1}{7}$	f) $\frac{12}{33}$

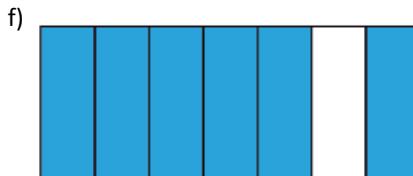
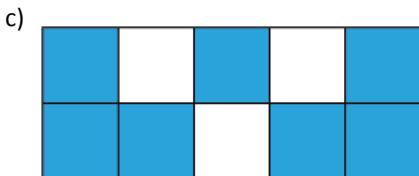
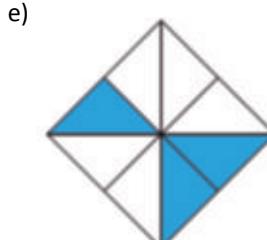
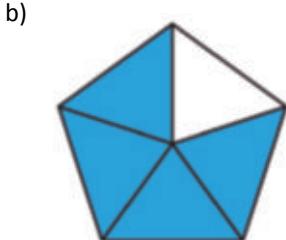
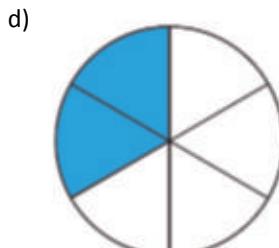
3. Representa $\frac{3}{4}$ y $\frac{10}{6}$ de forma diferente a la del ejemplo.



Fracciones

4. Representa estas fracciones.

- a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{2}{6}$ e) $\frac{3}{8}$ f) $\frac{6}{7}$



VIDA COTIDIANA

En las primeras cámaras fotográficas, para fotografiar un objeto se necesitaba que estuviera más de 30 minutos totalmente quieto.

En las cámaras actuales esto lo regula la velocidad de obturación. Con velocidades superiores a 1/60 segundos podemos conseguir congelar el movimiento de los objetos en movimiento. Sin embargo, con velocidades más lentas, inferiores a 1/60 segundos, conseguimos imágenes movidas.

- Con una velocidad de 1/30, ¿podré congelar el movimiento de un coche que circula por una calle?

Para congelar el movimiento, debemos tener abierto el obturador 1/60 segundos o menos tiempo (es decir, que la velocidad sea mayor). En el caso de 1/30 segundos tenemos el obturador abierto más tiempo, con lo que la imagen estará movida.

RESUELVE EL RETO

¿Existe una fracción cuyo numerador y denominador sean el doble que los de $\frac{3}{5}$, y que no sea equivalente a $\frac{3}{5}$?

No, porque para que sea el doble tenemos que multiplicar el numerador y denominador por 2, lo que la convertiría en una fracción equivalente.

Considera las fichas de dominó como fracciones de numerador menor o igual que el denominador.

Quitando la blanca doble, ¿cuál sería la ficha de mayor valor? ¿Y la menor?

Las fichas de mayor valor serían todas las dobles, de valor 1.

La ficha de menor valor sería la ficha en que aparecen los números 1 y 6.

ACTIVIDADES

1. Expresa los enunciados con una fracción.

- a) 7 de cada 10 estudiantes aprueban en junio.
- b) De 25 encuestados, 21 respondieron afirmativamente.
- c) De una producción de 10000 vehículos, las tres cuartas partes se exportan al extranjero.
- d) Mi abuelo reparte 12 caramelos entre sus 4 nietos.

a) $\frac{7}{10}$

b) $\frac{21}{25}$

c) $\frac{3}{4}$ de 10000 = $\frac{30\,000}{4} = 7\,500$

d) $\frac{12}{4} = 3$

2. Clasifica las fracciones del ejercicio anterior en propias e impropias.

a) $\frac{7}{10}$ es propia. c) $\frac{3}{4}$ es propia.

b) $\frac{21}{25}$ es propia. d) $\frac{12}{4}$ es impropia.

3. Carolina lee un libro de 416 páginas. Hasta ahora ha leído tres octavas partes del libro.

- a) ¿Cuántas páginas ha leído?
- b) ¿Qué fracción del total del libro le queda por leer?

a) $\frac{3}{8}$ de 416 = $\frac{1248}{8} = 156$ páginas.

b) $8 - 3 = 5 \rightarrow$ Le quedan por leer $\frac{5}{8}$ del libro.

4. Escribe cada fracción como suma de un número natural y una fracción propia.

a) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{16}{9}$ e) $\frac{31}{8}$

b) $\frac{20}{17}$ d) $\frac{17}{4}$ f) $\frac{27}{5}$

a) $\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$ c) $\frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9}$ e) $\frac{31}{8} = 3 + \frac{7}{8}$

b) $\frac{20}{17} = 1 + \frac{3}{17}$ d) $\frac{17}{4} = 4 + \frac{1}{4}$ f) $\frac{27}{5} = 5 + \frac{2}{5}$

Fracciones

5. Completa en tu cuaderno.

a) $\frac{7}{\square} = 1 + \frac{3}{4}$

d) $\frac{\square}{3} = 3 + \frac{1}{3}$

b) $\frac{19}{6} = \square + \frac{1}{6}$

e) $\frac{25}{7} = 3 + \frac{\square}{7}$

c) $\frac{14}{5} = 2 + \square$

f) $\frac{25}{8} = 3 + \frac{1}{\square}$

a) 4

b) 3

c) $\frac{4}{5}$

d) 10

e) 4

f) 8

6. Encuentra el error y corrígelo.

a) $\frac{28}{6} = 4 + \frac{1}{6}$

b) $\frac{42}{15} = 3 + \frac{3}{15}$

c) $\frac{36}{8} = 4 + \frac{3}{4}$

d) $\frac{87}{10} = 8 + \frac{7}{5}$

a) Lo correcto es: $\frac{28}{6} = 4 + \frac{4}{6}$ c) Lo correcto es: $\frac{36}{8} = 4 + \frac{4}{8} = 4 + \frac{1}{2}$ b) Lo correcto es: $\frac{42}{15} = 2 + \frac{12}{15}$ d) Lo correcto es: $\frac{87}{10} = 8 + \frac{7}{10}$

7. Halla la fracción impropia en cada caso.

a) $7 + \frac{1}{2}$

d) $8 + \frac{4}{5}$

b) $9 + \frac{3}{4}$

e) $2 + \frac{1}{6}$

c) $5 + \frac{2}{3}$

f) $4 + \frac{3}{7}$

a) $\frac{15}{2}$

d) $\frac{44}{5}$

b) $\frac{39}{4}$

e) $\frac{13}{6}$

c) $\frac{22}{3}$

f) $\frac{31}{7}$

8. Indica entre qué dos números naturales se encuentran las siguientes fracciones impropias.

a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{9}{5}$ c) $\frac{15}{7}$ d) $\frac{23}{4}$ e) $\frac{21}{5}$ f) $\frac{29}{6}$

a) Entre 3 y 4.

c) Entre 2 y 3.

e) Entre 4 y 5.

b) Entre 1 y 2.

d) Entre 5 y 6.

f) Entre 4 y 5.

9. Indica las fracciones impropias que representan estas figuras y exprésalas como la suma de un número más una fracción.

a)



b)



a) $\frac{8}{6} = 1 + \frac{2}{6}$

b) $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$

10. Indica cuáles son equivalentes.

a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ c) $\frac{3}{15}$ y $\frac{3}{9}$

a) $1 \cdot 5 = 5$ $3 \cdot 2 = 6 \rightarrow$ No son equivalentes.b) $3 \cdot 10 = 30$ $5 \cdot 6 = 30 \rightarrow$ Sí son equivalentes.c) $3 \cdot 9 = 27$ $15 \cdot 3 = 45 \rightarrow$ No son equivalentes.

11. Calcula el valor de x para que sean equivalentes.

a) $\frac{x}{3} = \frac{8}{6}$ b) $\frac{4}{x} = \frac{6}{3}$ c) $\frac{8}{4} = \frac{x}{2}$

a) 4

b) 2

c) 4

12. Escribe tres fracciones equivalentes en cada caso.

a) Un cuarto de hora b) Una semana al mes

a) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$

b) $\frac{7}{30} = \frac{14}{60} = \frac{30}{150}$

13. Si el numerador de una fracción lo dividimos por un número, y el denominador lo multiplicamos por el mismo número, ¿son equivalentes las fracciones? Pon un ejemplo.

No son equivalentes; para que lo sean se debe realizar la misma operación (multiplicación o división) en el numerador y el denominador.

Ejemplo: $\frac{6}{5} - \frac{6 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$

$6 \cdot 15 = 90$ $5 \cdot 2 = 10 \rightarrow$ No son equivalentes.

Fracciones

14. Reduce a común denominador las siguientes fracciones.

a) $\frac{7}{2}$ y $\frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{8}$ y $\frac{9}{6}$

c) $\frac{12}{96}$ y $\frac{9}{144}$

a) $\frac{14}{4}$ y $\frac{3}{4}$ b) $\frac{15}{24}$ y $\frac{36}{24}$ c) $\frac{36}{288}$ y $\frac{18}{288}$

15. Reduce estos pares de fracciones a común denominador.

a) $\frac{7}{2}$ y $\frac{5}{8}$

f) $\frac{9}{6}$ y $\frac{7}{30}$

b) $\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{6}$

g) $\frac{5}{8}$ y $\frac{1}{10}$

c) $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{15}$

h) $\frac{9}{6}$ y $\frac{2}{15}$

d) $\frac{9}{20}$ y $\frac{7}{30}$

i) $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{10}$

e) $\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{20}$

j) $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{5}$

a) $\frac{28}{8}$ y $\frac{5}{8}$

f) $\frac{45}{30}$ y $\frac{7}{30}$

b) $\frac{9}{12}$ y $\frac{18}{12}$

g) $\frac{25}{40}$ y $\frac{4}{40}$

c) $\frac{9}{15}$ y $\frac{2}{15}$

h) $\frac{45}{30}$ y $\frac{4}{30}$

d) $\frac{27}{60}$ y $\frac{14}{60}$

i) $\frac{15}{20}$ y $\frac{2}{20}$

e) $\frac{15}{20}$ y $\frac{9}{20}$

j) $\frac{10}{35}$ y $\frac{21}{35}$

16. Reduce a común denominador estos conjuntos de fracciones.

a) $\frac{7}{2}, \frac{3}{4}$ y $\frac{9}{6}$

c) $\frac{3}{4}, \frac{9}{20}$ y $\frac{2}{15}$

b) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ y $\frac{9}{6}$

d) $\frac{5}{8}, \frac{2}{15}$ y $\frac{7}{30}$

a) $\frac{42}{12}, \frac{9}{12}$ y $\frac{18}{12}$

c) $\frac{45}{60}, \frac{27}{60}$ y $\frac{8}{60}$

b) $\frac{18}{24}, \frac{15}{24}$ y $\frac{36}{24}$

d) $\frac{75}{120}, \frac{16}{120}$ y $\frac{28}{120}$

17. Reduce a común denominador las siguientes fracciones.

a) $\frac{3}{5}, \frac{2}{15}$ y $\frac{7}{30}$

b) $\frac{7}{2}, \frac{5}{8}$ y $\frac{9}{20}$

c) $\frac{2}{15}, \frac{1}{10}$ y $\frac{7}{30}$

d) $\frac{7}{2}, \frac{9}{20}$ y $\frac{7}{30}$

a) $\frac{18}{30}, \frac{4}{30}$ y $\frac{7}{30}$

c) $\frac{4}{30}, \frac{3}{30}$ y $\frac{7}{30}$

b) $\frac{140}{40}, \frac{25}{40}$ y $\frac{18}{40}$

d) $\frac{210}{60}, \frac{27}{60}$ y $\frac{14}{60}$

18. Reduce las siguientes fracciones a común denominador.

a) $\frac{1}{7}, \frac{1}{11}$ y $\frac{1}{9}$

b) $\frac{1}{13}, \frac{1}{8}$ y $\frac{1}{15}$

a) $\frac{99}{693}, \frac{63}{693}$ y $\frac{77}{693}$

b) $\frac{120}{1560}, \frac{195}{1560}$ y $\frac{104}{1560}$

19. Reduce a común denominador estos grupos de fracciones.

a) $\frac{3}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}$ y $\frac{7}{3}$

b) $\frac{7}{3}, \frac{1}{6}, \frac{9}{2}$ y $\frac{5}{12}$

c) $\frac{4}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{15}, \frac{9}{20}$ y $\frac{1}{4}$

a) $\frac{108}{180}, \frac{40}{180}, \frac{45}{180}$ y $\frac{420}{180}$

b) $\frac{28}{12}, \frac{2}{12}, \frac{54}{12}$ y $\frac{5}{12}$

c) $\frac{48}{60}, \frac{18}{60}, \frac{8}{60}$ y $\frac{15}{60}$

20. Reduce estas fracciones a común denominador.

$\frac{3}{5}, \frac{9}{20}, \frac{2}{15}, \frac{1}{10}, \frac{7}{30}, \frac{12}{450}$ y $\frac{32}{600}$

$\frac{1080}{1800}, \frac{810}{1800}, \frac{240}{1800}, \frac{180}{1800}, \frac{420}{1800}, \frac{48}{1800}$ y $\frac{96}{1800}$

21. Completa en tu cuaderno con los términos que faltan para que sean equivalentes.

a) $\frac{4}{9} = \frac{8}{\square} = \frac{40}{\square}$

b) $\frac{90}{120} = \frac{15}{\square} = \frac{\square}{12}$

a) 18 y 90

b) 20 y 9

Fracciones

22. Encuentra cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes por amplificación a $\frac{5}{7}$.

$$\frac{45}{63}, \frac{25}{30}, \frac{30}{45}, \frac{40}{56}, \frac{100}{140}$$

$$\frac{45}{63}, \frac{40}{56} \text{ y } \frac{100}{140}$$

23. Determina cuáles de estas fracciones son equivalentes por simplificación a $\frac{300}{500}$.

$$\frac{15}{20}, \frac{12}{20}, \frac{3}{5}, \frac{9}{15}, \frac{27}{45}$$

$$\frac{12}{20} \text{ y } \frac{3}{5}$$

24. Las fracciones $\frac{250}{375}$ y $\frac{14}{21}$ son equivalentes. Indica cómo se ha simplificado o amplificado una para obtener la otra.

Para llegar de la una a la otra, primero se pasa $\frac{250}{375}$ a $\frac{2}{3}$, dividiendo entre 125. Luego se amplifica multiplicando por 7.

25. Halla la fracción irreducible de las siguientes fracciones.

a) $\frac{25}{45}$	c) $\frac{3}{15}$	e) $\frac{28}{48}$			
b) $\frac{14}{21}$	d) $\frac{9}{45}$	f) $\frac{50}{15}$			
a) $\frac{5}{13}$	b) $\frac{2}{3}$	c) $\frac{3}{15}$	d) $\frac{1}{5}$	e) $\frac{7}{12}$	f) $\frac{10}{3}$

26. Determina la fracción irreducible de cada una de las siguientes fracciones.

a) $\frac{40}{26}$	c) $\frac{12}{27}$	e) $\frac{60}{55}$			
b) $\frac{12}{45}$	d) $\frac{20}{18}$	f) $\frac{65}{45}$			
a) $\frac{20}{13}$	b) $\frac{4}{15}$	c) $\frac{4}{9}$	d) $\frac{10}{9}$	e) $\frac{12}{11}$	f) $\frac{13}{9}$

27. Indica cuál de las siguientes fracciones tiene como fracción irreducible a $\frac{3}{5}$.

a) $\frac{9}{20}$	c) $\frac{6}{10}$	e) $\frac{21}{35}$
b) $\frac{20}{12}$	d) $\frac{21}{40}$	f) $\frac{24}{45}$

Es la irreducible de c) $\frac{6}{10}$ y e) $\frac{21}{35}$.

28. Determina cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles.

a) $\frac{25}{35}$ d) $\frac{9}{15}$ g) $\frac{4}{26}$

b) $\frac{14}{21}$ e) $\frac{28}{45}$ h) $\frac{13}{39}$

c) $\frac{3}{5}$ f) $\frac{5}{12}$ i) $\frac{11}{9}$

Son irreducibles: c) $\frac{3}{5}$, e) $\frac{28}{45}$, f) $\frac{5}{12}$ y i) $\frac{11}{9}$.

29. Entre todas estas fracciones, haz corresponder cada fracción con su fracción irreducible.

a) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{20}{12}$ e) $\frac{18}{20}$ g) $\frac{8}{10}$

b) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{4}{5}$ f) $\frac{3}{4}$ h) $\frac{21}{28}$

a) Irreducible.

e) $\frac{18}{20}$ se corresponde con a) $\frac{9}{10}$.

b) Irreducible.

f) Irreducible.

c) $\frac{20}{12}$ se corresponde con b) $\frac{5}{3}$.

g) $\frac{8}{10}$ se corresponde con d) $\frac{4}{5}$.

d) Irreducible.

h) $\frac{21}{28}$ se corresponde con f) $\frac{3}{4}$.

30. Utiliza cada secuencia de números para crear dos fracciones irreducibles en cada caso.

a) 2, 3, 6 e) 3, 6, 7, 9, 10

b) 3, 5, 10 f) 3, 5, 6, 9, 10

c) 5, 6, 8, 9 g) 4, 5, 8, 10, 11

d) 2, 4, 6, 9 h) 2, 3, 4, 5, 8, 9

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$

c) $\frac{5}{6}$ y $\frac{8}{9}$

e) $\frac{3}{7}$ y $\frac{7}{10}$

g) $\frac{4}{5}$ y $\frac{8}{11}$

b) $\frac{3}{5}$ y $\frac{10}{3}$

d) $\frac{2}{9}$ y $\frac{9}{4}$

f) $\frac{5}{3}$ y $\frac{9}{10}$

h) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{8}$

31. Simplifica hasta llegar a la fracción irreducible, indicando todos los pasos.

a) $\frac{120}{140}$ c) $\frac{708}{57}$

b) $\frac{210}{275}$ d) $\frac{144}{198}$

a) $\frac{6}{7}$. Dividir entre 20.

c) $\frac{236}{19}$. Dividir entre 3.

b) $\frac{42}{55}$. Dividir entre 5.

d) $\frac{8}{11}$. Dividir entre 18.

Fracciones

32. Simplifica estas fracciones hasta encontrar la fracción irreducible.

a) $\frac{2^6}{2^2 \cdot 3}$ d) $\frac{5^4}{5^2 \cdot 3^2}$ g) $\frac{3^4 \cdot 5^3}{5^5 \cdot 3^4}$
b) $\frac{3^2}{2^3 \cdot 3}$ e) $\frac{5 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 2}$ h) $\frac{3 \cdot 5^4 \cdot 2^2}{2 \cdot 5^2 \cdot 3^3}$
c) $\frac{3^4}{5^3 \cdot 3^3}$ f) $\frac{3^3 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 3^2}$ i) $\frac{7 \cdot 2^2}{5 \cdot 3^2}$

a) $\frac{2^4}{3} = \frac{16}{3}$ d) $\frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$ g) $\frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
b) $\frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$ e) $\frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$ h) $\frac{5^2 \cdot 2}{3^2} = \frac{50}{9}$
c) $\frac{3}{5^3} = \frac{3}{125}$ f) $\frac{3^3 \cdot 2^3}{5^3} = \frac{216}{125}$ i) Irreducible: $\frac{28}{45}$

33. Ordena de menor a mayor.

a) $\frac{5}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}$ b) $\frac{2}{15}, \frac{7}{15}, \frac{8}{15}, \frac{4}{15}$
a) $\frac{5}{6} < \frac{5}{4} < \frac{5}{3} < \frac{5}{2}$ b) $\frac{2}{15} < \frac{4}{15} < \frac{7}{15} < \frac{8}{15}$

34. Completa en tu cuaderno con $<$, $>$ o $=$.

a) $\frac{3}{2} \square \frac{4}{9}$ b) $\frac{2}{3} \square \frac{9}{4}$ c) $\frac{3}{4} \square \frac{6}{9}$
a) $>$ b) $<$ c) $>$

35. Escribe en tu cuaderno una fracción comprendida entre estas fracciones.

a) $\frac{3}{5} < \square < \frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{9} < \square < \frac{2}{3}$
b) $\frac{2}{7} < \square < \frac{3}{7}$ d) $\frac{5}{8} < \square < \frac{3}{4}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{7}{10}$ c) $\frac{11}{18}$
b) $\frac{5}{14}$ d) $\frac{11}{16}$

36. Realiza las siguientes operaciones entre fracciones.

a) $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}$ c) $\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{7}{2}$ e) $\frac{9}{7} - \frac{1}{7} - \frac{3}{7}$
b) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3}$ d) $\frac{9}{8} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4}$ f) $\frac{10}{6} + \frac{19}{3} - \frac{8}{3}$

a) $\frac{9}{5}$

d) $\frac{9}{8} - \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{9}{8} + \frac{5}{8} - \frac{6}{8} = \frac{8}{8} = 1$

b) $\frac{5}{3}$

e) $\frac{5}{7}$

c) $\frac{3}{2} - \frac{9}{4} + \frac{7}{2} = \frac{6}{4} - \frac{9}{4} + \frac{14}{4} = \frac{29}{4}$

f) $\frac{10}{6} - \frac{19}{3} - \frac{8}{3} = \frac{10}{6} + \frac{38}{6} - \frac{16}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

37. Resuelve las siguientes operaciones.

a) $\frac{8}{5} + \frac{13}{15} - 3$ b) $\frac{4}{9} - 5 + \frac{12}{5} - \frac{3}{10}$

a) $\frac{8}{5} - \frac{13}{15} - 3 = \frac{24}{15} - \frac{13}{15} - \frac{45}{15} = -\frac{8}{15}$

b) $\frac{4}{9} - 5 - \frac{12}{5} - \frac{3}{10} = \frac{40}{90} - \frac{450}{90} - \frac{216}{90} - \frac{27}{90} = -\frac{221}{90}$

38. Calcula y completa en tu cuaderno.

a) $\frac{5}{2} + \frac{\square}{4} = \frac{11}{4}$ b) $\frac{23}{6} - \frac{\square}{8} = \frac{41}{\square}$

a) 1

b) 17 y 24

39. Realiza las siguientes operaciones.

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{17}{9}$ b) $\frac{5}{9} : \frac{19}{3}$ c) $\frac{5}{3} : \frac{2}{7}$ d) $\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{9}$

a) $\frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

b) $\frac{15}{171} = \frac{5}{57}$

c) $\frac{35}{6}$

d) $\frac{7}{90}$

40. Calcula.

a) $3 \cdot \frac{3}{2}$ b) $\frac{7}{4} : 5$ c) $4 : \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{3}$ d) $\frac{12}{15} \cdot 4 : \frac{2}{3}$

a) $\frac{9}{2}$

b) $\frac{7}{20}$

c) $\frac{36}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{36}{18} = 2$

d) $\frac{48}{15} \cdot \frac{2}{3} = \frac{144}{30} = \frac{24}{5}$

41. Completa las siguientes multiplicaciones y divisiones en tu cuaderno.

a) $\frac{6}{8} \cdot \frac{\square}{7} = \frac{3}{14}$ c) $\frac{\square}{\square} : \frac{5}{9} = \frac{9}{10}$

b) $\frac{\square}{12} : \frac{\square}{7} = \frac{35}{24}$ d) $\frac{\square}{8} : \frac{6}{\square} = \frac{25}{48}$

a) 2

b) 5 y 2

c) 1 y 2

d) 5 y 5 o 1 y 25 o 25 y 1

Fracciones

42. Calcula.

a) $\frac{11}{6} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right)$

h) $\frac{5}{3} : \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6} \right) + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}$

b) $\left(\frac{3}{7} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{6}{5}$

i) $\frac{7}{4} : \frac{14}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{5} \right) \cdot \frac{5}{6}$

c) $\frac{4}{9} : \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{6} \right)$

j) $\frac{5}{3} + \frac{6}{4} \cdot \left(\frac{11}{9} - \frac{1}{10} \right) + 4 : \frac{5}{12}$

d) $\left(2 - \frac{1}{2} \right) : \left(4 + \frac{1}{3} \right)$

k) $\frac{5}{3} + \frac{6}{9} + 10 - \frac{9}{14} \cdot \frac{3}{2} : \frac{7}{3}$

e) $\frac{10}{3} : \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{3} \right) - 2$

l) $\frac{12}{15} \cdot \frac{10}{3} + \left(\frac{5}{18} - \frac{4}{15} : \frac{1}{3} \right)$

f) $\frac{5}{3} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{8} \right)$

m) $\left(\frac{7}{12} + \frac{11}{18} \right) \cdot \frac{1}{6} + 7$

g) $\frac{9}{10} - \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{10}$

n) $\frac{25}{16} - \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{2} \right) + 3 \cdot \frac{8}{3}$

a) $\frac{11}{6} - \left[\frac{3}{12} + \frac{2}{12} \right] = \frac{11}{6} - \frac{5}{12} = \frac{22}{12} - \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$

b) $\left[\frac{6}{14} - \frac{7}{14} \right] \cdot \frac{6}{5} = \frac{13}{14} \cdot \frac{6}{5} = \frac{78}{70} = \frac{39}{35}$

c) $\frac{4}{9} \cdot \left[\frac{10}{6} - \frac{1}{6} \right] = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{6} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

d) $\left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right] \cdot \left[\frac{12}{3} + \frac{1}{3} \right] = \frac{3}{2} \cdot \frac{13}{3} = \frac{9}{26}$

e) $\frac{10}{3} \cdot \left[\frac{12}{15} - \frac{5}{15} \right] - 2 = \frac{10}{3} \cdot \frac{17}{15} - 2 = \frac{150}{51} - 2 = \frac{150}{51} - \frac{102}{51} = \frac{48}{51} = \frac{16}{17}$

f) $\frac{5}{3} - \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{16}{40} - \frac{5}{40} \right] = \frac{5}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{40} = \frac{5}{3} - \frac{11}{240} = \frac{400}{240} - \frac{11}{240} = \frac{411}{240} = \frac{137}{80}$

g) $\frac{9}{10} - \frac{2}{150} = \frac{135}{150} - \frac{2}{150} = \frac{133}{150}$

h) $\frac{5}{3} \cdot \left[\frac{2}{18} - \frac{3}{18} \right] - \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{18} - \frac{12}{18} = \frac{90}{15} - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$

i) $\frac{7}{4} \cdot \frac{14}{2} - \left[\frac{15}{10} - \frac{8}{10} \right] \cdot \frac{5}{6} = \frac{14}{4} - \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{14}{4} + \frac{7}{12} = \frac{3}{12} + \frac{7}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

j) $\frac{5}{3} - \frac{6}{4} \cdot \left[\frac{110}{90} - \frac{9}{90} \right] - \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{3} + \frac{6}{4} \cdot \frac{101}{90} - \frac{48}{5} = \frac{5}{3} - \frac{101}{60} + \frac{48}{5} = \frac{100}{60} - \frac{101}{60} - \frac{576}{60} = \frac{777}{60} = \frac{259}{20}$

k) $\frac{5}{3} - \frac{6}{9} - 10 - \frac{27}{28} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5}{3} + \frac{6}{9} - 10 - \frac{81}{196} = \frac{980}{588} - \frac{392}{588} - \frac{5880}{588} - \frac{243}{588} = \frac{7009}{588}$

l) $\frac{12}{15} \cdot \frac{10}{3} - \left[\frac{5}{18} - \frac{12}{15} \right] = \frac{120}{45} - \left[\frac{5}{18} - \frac{4}{5} \right] = \frac{8}{3} - \frac{25}{90} - \frac{72}{5} = \frac{8}{3} - \frac{47}{90} = \frac{240}{90} - \frac{47}{90} = \frac{193}{90}$

m) $\left[\frac{21}{36} - \frac{22}{36} \right] \cdot \frac{1}{6} - 7 = \frac{43}{46} \cdot \frac{1}{6} + 7 = \frac{43}{216} - \frac{1512}{216} = \frac{1555}{216}$

n) $\frac{25}{16} - \left[\frac{9}{10} - \frac{5}{10} \right] + 8 = \frac{25}{16} - \frac{4}{16} - 8 = \frac{25}{16} - \frac{2}{5} - 8 = \frac{125}{80} - \frac{32}{80} - \frac{640}{80} = \frac{733}{80}$

43. Encuentra los errores y corrígelos.

a) $\frac{5}{2} - 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{2} - \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 5}$

b) $\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

c) $\frac{4}{3} \cdot 6 - \left(\frac{2}{7} - 2 \right) \cdot \frac{8}{5} = \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 6} - \left(\frac{2 - 2}{7 - 2} \right) \cdot \frac{8}{5}$

a) Lo correcto es: $\frac{5}{2} - 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{2} - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 5}$.

b) Lo correcto es: $\frac{7}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{4}$.

c) Lo correcto es: $\frac{4}{3} \cdot 6 - \left[\frac{2}{7} - 2 \right] \cdot \frac{8}{5} = \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 1} - \frac{2 - 14}{7} \cdot \frac{8}{5}$.

44. Calcula el resultado de estas operaciones y comprueba que los resultados son distintos según se coloquen los paréntesis.

a) $2 \cdot \frac{9}{5} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{7}{4} + \frac{5}{6} \right)$ c) $2 \cdot \frac{9}{5} - \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{4} + \frac{5}{6} \right)$

b) $2 \cdot \left(\frac{9}{5} - \frac{3}{2} \right) \cdot \frac{7}{4} + \frac{5}{6}$ d) $2 \cdot \frac{9}{5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{4} + \frac{5}{6}$

a) $\frac{18}{5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{31}{12} = \frac{18}{5} - \frac{36}{62} = \frac{18}{5} - \frac{18}{31} = \frac{558}{155} - \frac{90}{155} = \frac{468}{155}$

b) $2 \cdot \left[\frac{18}{10} - \frac{15}{10} \right] \cdot \frac{7}{4} + \frac{5}{6} = 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{4} - \frac{5}{6} = \frac{12}{35} + \frac{5}{6} = \frac{72}{210} - \frac{175}{210} = \frac{247}{210}$

c) $\frac{18}{5} - \left[\frac{12}{14} + \frac{5}{6} \right] = \frac{18}{5} - \left[\frac{6}{7} + \frac{5}{6} \right] = \frac{18}{5} - \left[\frac{36}{42} + \frac{35}{42} \right] = \frac{18}{5} - \frac{71}{42} = \frac{756}{210} - \frac{355}{210} = \frac{401}{210}$

d) $\frac{18}{5} - \frac{12}{14} - \frac{5}{6} = \frac{18}{5} - \frac{6}{7} - \frac{5}{6} = \frac{756}{210} - \frac{180}{210} - \frac{175}{210} = \frac{751}{210}$

ACTIVIDADES FINALES

45. Escribe una fracción que exprese los siguientes enunciados.

- a) Cuarenta y tres minutos de una hora.
- b) Cinco meses de un año.
- c) Once huevos de una docena.
- d) Nueve letras del abecedario.
- e) Siete horas de un día.
- f) Dos días de una semana.
- g) Las figuras de una baraja española.
- h) Treinta y siete céntimos de un euro.

a) $\frac{43}{60}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{11}{12}$

d) $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{7}{24}$

f) $\frac{2}{7}$

g) $\frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

h) $\frac{37}{100}$

Fracciones

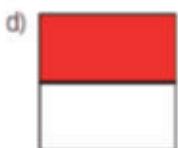
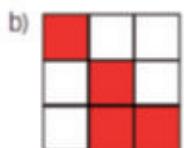
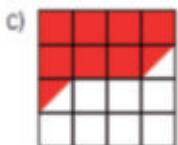
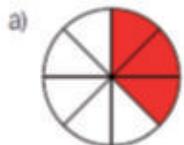
46. Escribe estos números en forma de fracción.

- a) 4 b) 7 c) 13 d) 27

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{8}{2}$ b) $\frac{21}{3}$ c) $\frac{13}{1}$ d) $\frac{81}{3}$

47. Escribe la fracción que representa cada gráfico.



a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{8}{16}$ d) $\frac{1}{2}$

48. Determina el número natural que representan estas fracciones dividiendo el numerador entre el denominador.

a) $\frac{8}{2}$ b) $\frac{16}{4}$ c) $\frac{12}{3}$ d) $\frac{10}{5}$

- a) 4 b) 4 c) 4 d) 2

49. Calcula.

a) $\frac{5}{9}$ de 36 b) $\frac{2}{3}$ de 39 c) $\frac{4}{7}$ de 28 d) $\frac{3}{5}$ de 10

a) $\frac{5 \cdot 36}{9} = 20$ b) $\frac{2 \cdot 39}{3} = 26$ c) $\frac{4 \cdot 28}{7} = 16$ d) $\frac{3 \cdot 10}{5} = 6$

50. Calcula.

- a) La tercera parte de 75.
b) La quinta parte de 80.
c) La sexta parte de 240.
d) La mitad de la mitad de 540.
e) La quinta parte de 175.

a) $\frac{75}{3} = 25$ b) $\frac{80}{5} = 16$ c) $\frac{240}{6} = 40$ d) $\frac{540}{2} = 270$ e) $\frac{175}{5} = 35$

51. Representa gráficamente estas fracciones y a través de su representación, determina cuáles de ellas son propias y cuáles son impropias.

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{5}{4}$

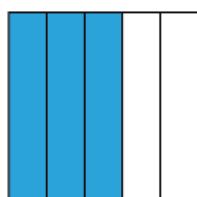
c) $\frac{7}{3}$

d) $\frac{9}{5}$

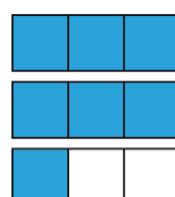
e) $\frac{17}{20}$

f) $\frac{11}{6}$

a) Propia



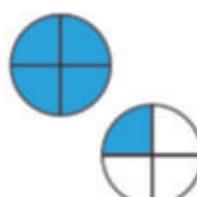
c) Impropia



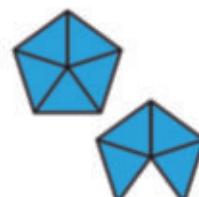
e) Propia



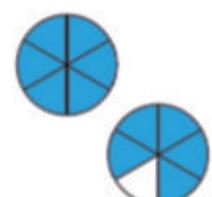
b) Impropia



d) Impropia



f) Impropia



52. Expresa las siguientes fracciones como suma de un número natural más una fracción propia.

a) $\frac{8}{5}$

b) $\frac{31}{6}$

c) $\frac{43}{9}$

d) $\frac{13}{4}$

e) $\frac{17}{7}$

f) $\frac{19}{3}$

a) $\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$

c) $\frac{43}{9} = 4 - \frac{7}{9}$

e) $\frac{17}{7} = 2 - \frac{3}{7}$

b) $\frac{31}{6} = 5 - \frac{1}{6}$

d) $\frac{13}{4} = 3 - \frac{1}{4}$

f) $\frac{19}{3} = 6 - \frac{1}{3}$

54. Representa en la recta numérica:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{5}$

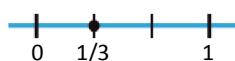
c) $\frac{4}{7}$

d) $\frac{7}{4}$

e) $\frac{15}{3}$

f) $\frac{17}{4}$

a)



d)



b)



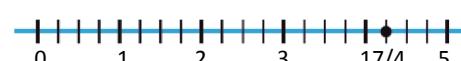
e)



c)



f)



Fracciones

55. Indica la fracción que representa cada letra.



A: $\frac{3}{5}$ B: $\frac{6}{5}$ C: $\frac{12}{5}$ D: $\frac{19}{5}$

56. Indica la fracción que representa la letra A en cada caso.



a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{17}{6}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{31}{7}$

57. Determina si los siguientes pares de fracciones son equivalentes.

a) $\frac{5}{4}$ y $\frac{20}{24}$

d) $\frac{9}{4}$ y $\frac{36}{16}$

b) $\frac{7}{3}$ y $\frac{49}{21}$

e) $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{9}$

c) $\frac{6}{5}$ y $\frac{30}{15}$

f) $\frac{8}{7}$ y $\frac{72}{63}$

a) $5 \cdot 24 = 120$, $4 \cdot 20 = 80 \rightarrow$ No son equivalentes.

d) $9 \cdot 16 = 144$, $4 \cdot 36 = 144 \rightarrow$ Sí son equivalentes.

b) $7 \cdot 21 = 147$, $3 \cdot 49 = 147 \rightarrow$ Sí son equivalentes.

e) $2 \cdot 9 = 18$, $3 \cdot 4 = 12 \rightarrow$ No son equivalentes.

c) $6 \cdot 15 = 90$, $5 \cdot 30 = 150 \rightarrow$ No son equivalentes.

f) $8 \cdot 63 = 504$, $7 \cdot 72 = 504 \rightarrow$ Sí son equivalentes.

58. Calcula, para cada fracción, tres equivalentes por amplificación y otras tres equivalentes por simplificación.

a) $\frac{72}{36}$ b) $\frac{60}{125}$ c) $\frac{100}{40}$ d) $\frac{135}{90}$

a) Por ampliación: $\frac{144}{72}$, $\frac{360}{180}$ y $\frac{720}{360}$

Por simplificación: $\frac{36}{18}$, $\frac{24}{12}$ y $\frac{6}{3}$

b) Por ampliación: $\frac{180}{375}$, $\frac{240}{500}$ y $\frac{600}{1250}$

Por simplificación: $\frac{12}{25}$

c) Por ampliación: $\frac{200}{80}$, $\frac{600}{240}$ y $\frac{1000}{400}$

Por simplificación: $\frac{10}{4}$, $\frac{50}{20}$ y $\frac{25}{10}$

d) Por ampliación: $\frac{270}{180}$, $\frac{405}{270}$ y $\frac{810}{540}$

Por simplificación: $\frac{15}{10}$, $\frac{9}{6}$ y $\frac{27}{18}$

60. Completa en tu cuaderno las expresiones para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{4}{3} = \frac{8}{\square}$

d) $\frac{81}{21} = \frac{\square}{7}$

b) $\frac{56}{\square} = \frac{7}{8}$

e) $\frac{13}{\square} = \frac{52}{36}$

c) $\frac{\square}{2} = \frac{21}{6}$

f) $\frac{48}{44} = \frac{12}{\square}$

a) 6

d) 27

b) 64

e) 9

c) 7

f) 11

61. Completa en tu cuaderno las expresiones para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{2}{3} = \frac{14}{\square} = \frac{56}{\square}$

c) $\frac{6}{\square} = \frac{\square}{22} = \frac{48}{88}$

b) $\frac{\square}{5} = \frac{9}{15} = \frac{18}{\square}$

d) $\frac{8}{9} = \frac{56}{\square} = \frac{\square}{135}$

a) 21 y 84

c) 11 y 12

b) 3 y 30

d) 63 y 120

62. Halla la fracción irreducible.

a) $\frac{50}{75}$

b) $\frac{48}{120}$

c) $\frac{12}{60}$

d) $\frac{99}{121}$

e) $\frac{84}{49}$

f) $\frac{36}{72}$

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{9}{11}$

e) $\frac{12}{7}$

f) $\frac{1}{2}$

63. ¿Cuántas fracciones irreducibles son equivalentes entre sí? Razona la respuesta.

No hay fracciones irreducibles equivalentes entre sí, ya que si una fracción es equivalente a otra, significa que una de ellas la podemos simplificar para que sea la otra y si podemos simplificar la fracción, ya no es irreducible.

64. Ordena de menor a mayor.

a) $\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{5}, \frac{4}{5}$

c) $\frac{6}{19}, \frac{6}{15}, \frac{6}{23}, \frac{6}{18}$

b) $\frac{10}{9}, \frac{16}{9}, \frac{13}{9}, \frac{19}{9}$

d) $\frac{3}{14}, \frac{3}{9}, \frac{3}{15}, \frac{3}{13}$

a) $\frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{5}{5} < \frac{6}{5}$

c) $\frac{6}{23} < \frac{6}{19} < \frac{6}{18} < \frac{6}{15}$

b) $\frac{10}{9} < \frac{13}{9} < \frac{16}{9} < \frac{19}{9}$

d) $\frac{3}{15} < \frac{3}{14} < \frac{3}{13} < \frac{3}{9}$

Fracciones

65. Ordena de menor a mayor cada grupo de fracciones, simplificando antes, siempre que sea posible.

a) $\frac{6}{4}, \frac{10}{6}, \frac{25}{20}, \frac{1}{3}$

c) $\frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{15}{18}, \frac{10}{4}$

b) $\frac{3}{9}, \frac{4}{14}, \frac{25}{30}, \frac{4}{7}$

d) $\frac{10}{12}, \frac{24}{36}, \frac{21}{18}, \frac{63}{42}$

a) $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \frac{10}{6} = \frac{5}{3}, \frac{25}{20} = \frac{5}{4}, \frac{1}{3}$ es irreducible. m.c.m. (2, 3, 4) = 12 $\rightarrow \frac{3}{2} = \frac{18}{12}, \frac{5}{3} = \frac{20}{12}, \frac{5}{4} = \frac{15}{12}, \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

$$\frac{4}{12} \asymp \frac{15}{12} \asymp \frac{18}{12} \asymp \frac{20}{12} \rightarrow \frac{1}{3} \asymp \frac{5}{4} \asymp \frac{3}{2} \asymp \frac{5}{3}$$

b) $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \frac{4}{14} = \frac{2}{7}, \frac{25}{30} = \frac{5}{6}, \frac{4}{7}$ es irreducible. m.c.m. (3, 6, 7) = 42 $\rightarrow \frac{1}{3} = \frac{14}{42}, \frac{2}{7} = \frac{12}{42}, \frac{5}{6} = \frac{35}{42}, \frac{4}{7} = \frac{24}{42}$

$$\frac{12}{42} \asymp \frac{14}{42} \asymp \frac{24}{42} \asymp \frac{35}{42} \rightarrow \frac{2}{7} \asymp \frac{1}{3} \asymp \frac{4}{7} \asymp \frac{5}{6}$$

c) $\frac{5}{3}$ es irreducible, $\frac{5}{2}$ es irreducible, $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}, \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$. Mismo numerador: $\frac{5}{6} \asymp \frac{5}{3} \asymp \frac{5}{2}$

d) $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}, \frac{24}{36} = \frac{2}{3}, \frac{21}{18} = \frac{7}{6}, \frac{63}{42} = \frac{3}{2}$ m.c.m. (2, 3, 6) = 6 $\rightarrow \frac{5}{6}, \frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2} = \frac{9}{6}$

$$\frac{4}{6} \asymp \frac{5}{6} \asymp \frac{7}{6} \asymp \frac{9}{6} \rightarrow \frac{2}{3} \asymp \frac{5}{6} \asymp \frac{7}{6} \asymp \frac{3}{2}$$

67. Indica cuáles de las siguientes fracciones son mayores que 5:

a) $\frac{36}{7}$

b) $\frac{65}{16}$

c) $\frac{45}{11}$

d) $\frac{25}{6}$

a) $5 = \frac{35}{7} \rightarrow \frac{36}{7} \gtrdot \frac{35}{7} \rightarrow \frac{36}{7}$ sí es mayor que 5.

b) $5 = \frac{80}{16} \rightarrow \frac{65}{16} \lhd \frac{80}{16} \rightarrow \frac{65}{16}$ no es mayor que 5.

c) $5 = \frac{55}{11} \rightarrow \frac{45}{11} \lhd \frac{55}{11} \rightarrow \frac{45}{11}$ no es mayor que 5.

d) $5 = \frac{30}{6} \rightarrow \frac{25}{6} \lhd \frac{30}{6} \rightarrow \frac{25}{6}$ no es mayor que 5.

68. Indica cuáles de las siguientes fracciones son menores que 3:

a) $\frac{35}{8}$

b) $\frac{23}{6}$

c) $\frac{17}{7}$

d) $\frac{44}{12}$

a) $3 = \frac{24}{8} \rightarrow \frac{35}{8} \gtrdot \frac{24}{8} \rightarrow \frac{38}{8}$ no es menor que 3.

b) $3 = \frac{18}{6} \rightarrow \frac{23}{6} \gtrdot \frac{18}{6} \rightarrow \frac{23}{6}$ no es menor que 3.

c) $3 = \frac{21}{7} \rightarrow \frac{17}{7} \lhd \frac{21}{7} \rightarrow \frac{17}{7}$ sí es menor que 3.

d) $3 = \frac{36}{12} \rightarrow \frac{44}{12} \gtrdot \frac{36}{12} \rightarrow \frac{44}{12}$ no es menor que 3.

69. Opera y simplifica cuando sea posible.

a) $\frac{5}{9} + \frac{3}{9} + \frac{10}{9}$

c) $\frac{8}{5} - \frac{2}{5} - \frac{3}{5}$

b) $\frac{7}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

d) $\frac{11}{15} + \frac{8}{15} - \frac{4}{15}$

a) $\frac{18}{9} = 2$

b) $\frac{6}{3} = 2$

c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{15}{15} = 1$

70. Resuelve estas sumas y restas de fracciones.

a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{10} - \frac{4}{15}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{6}$

d) $\frac{7}{12} - \frac{8}{9} + \frac{13}{18}$

a) m.c.m. (2, 3, 6) = 6 $\rightarrow \frac{5}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{10}{6} - \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

b) m.c.m. (4, 6, 8) = 24 $\rightarrow \frac{1}{4} - \frac{3}{8} - \frac{1}{6} = \frac{6}{24} - \frac{9}{24} - \frac{4}{24} = \frac{11}{24}$

c) m.c.m. (5, 10, 15) = 30 $\rightarrow \frac{3}{5} - \frac{1}{10} - \frac{4}{15} = \frac{18}{30} - \frac{3}{30} - \frac{8}{30} = \frac{7}{30}$

d) m.c.m. (9, 12, 18) = 36 $\rightarrow \frac{7}{12} - \frac{8}{9} - \frac{13}{18} = \frac{21}{36} - \frac{32}{36} + \frac{26}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

71. Efectúa estas operaciones.

a) $3 + \frac{1}{2}$

c) $\frac{28}{3} - 5$

b) $9 - \frac{3}{4}$

d) $\frac{5}{2} + 4$

a) $\frac{6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

b) $\frac{36}{4} - \frac{3}{4} = \frac{33}{4}$

c) $\frac{28}{3} - \frac{15}{3} = \frac{13}{3}$

d) $\frac{5}{2} - \frac{8}{2} = \frac{13}{2}$

72. Resuelve estas operaciones.

a) $\frac{3}{2} + 4 - \frac{7}{4}$

e) $\frac{8}{9} + \frac{16}{15} - \frac{2}{15}$

b) $\frac{10}{3} - \frac{11}{6} + 9$

f) $\frac{9}{7} + \frac{9}{14} + 2$

c) $\frac{3}{4} + 5 - \frac{1}{8}$

g) $\frac{15}{8} - \frac{3}{4} + \frac{3}{10}$

d) $\frac{7}{2} - \frac{7}{4} - \frac{7}{8}$

h) $3 - \frac{5}{12} + \frac{13}{6}$

a) $\frac{6}{4} - \frac{16}{4} - \frac{7}{4} = \frac{15}{4}$

e) $\frac{40}{45} - \frac{48}{45} - \frac{6}{45} = \frac{82}{45}$

b) $\frac{20}{6} - \frac{11}{6} + \frac{54}{6} = \frac{63}{6} = \frac{21}{2}$

f) $\frac{18}{14} - \frac{9}{14} - \frac{28}{14} = \frac{55}{14}$

c) $\frac{6}{8} - \frac{40}{8} - \frac{1}{8} = \frac{45}{8}$

g) $\frac{75}{40} - \frac{30}{40} + \frac{12}{40} = \frac{57}{40}$

d) $\frac{28}{8} - \frac{14}{8} - \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$

h) $\frac{36}{12} - \frac{5}{12} - \frac{26}{12} = \frac{57}{12} = \frac{19}{4}$

Fracciones

73. En las siguientes igualdades hay algunos errores. Encuéntralos y corrígelos.

a) $\frac{26}{3} + \frac{4}{9} - 5 = \frac{26+4-5}{9}$

b) $\frac{17}{2} - \frac{7}{4} + \frac{8}{3} = \frac{17-7+8}{2-4+3}$

c) $\frac{19}{5} - \frac{9}{10} + \frac{2}{15} = \frac{19}{5} - \frac{9 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{30}$

a) Lo correcto es: $\frac{26}{3} - \frac{4}{9} - 5 = \frac{26 \cdot 3 + 4 - 5 \cdot 9}{9}$

b) Lo correcto es: $\frac{17}{2} - \frac{7}{4} + \frac{8}{3} = \frac{17 \cdot 6}{2 \cdot 6} - \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{17 \cdot 6 - 7 \cdot 3 - 8 \cdot 4}{12}$

c) Lo correcto es: $\frac{19}{5} - \frac{9}{10} - \frac{2}{15} = \frac{19}{5} - \frac{9 \cdot 3}{30} - \frac{2 \cdot 2}{30} = \frac{19}{5} - \left[-\frac{9 \cdot 3}{30} + \frac{2 \cdot 2}{30} \right] = \frac{19}{5} - \frac{-9 \cdot 3 - 2 \cdot 2}{30}$

74. Realiza estas operaciones.

a) $\frac{13}{5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right)$

b) $4 - \left(2 - \frac{1}{2} \right) + \left(3 - \frac{1}{3} \right)$

c) $\frac{25}{9} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)$

d) $\frac{6}{5} - \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{4} \right)$

e) $\frac{4}{3} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{6} \right)$

f) $\frac{2}{7} - \frac{1}{5} + \left(7 - \frac{2}{5} + \frac{5}{3} \right)$

g) $\frac{11}{6} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{10} \right) + \left(4 - \frac{1}{9} \right)$

a) $\frac{13}{5} - \left[\frac{3}{6} - \frac{1}{6} \right] = \frac{13}{5} - \frac{4}{6} = \frac{13}{5} - \frac{2}{3} = \frac{39}{15} - \frac{10}{15} = \frac{29}{15}$

b) $4 - \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right] - \left[\frac{9}{3} - \frac{1}{3} \right] = 4 - \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{24}{6} - \frac{9}{6} - \frac{16}{6} = \frac{31}{6}$

c) $\frac{25}{9} - \left[\frac{2}{6} - \frac{1}{6} \right] = \frac{25}{9} - \frac{3}{6} = \frac{25}{9} - \frac{1}{2} = \frac{50}{18} - \frac{9}{18} = \frac{41}{18}$

d) $\frac{6}{5} - \left[\frac{6}{20} - \frac{5}{20} \right] = \frac{6}{5} - \frac{1}{20} = \frac{24}{20} - \frac{1}{20} = \frac{23}{20}$

e) $\frac{4}{3} - \left[\frac{3}{8} - \frac{4}{8} \right] - \left[\frac{15}{6} - \frac{1}{6} \right] = \frac{4}{3} - \frac{7}{8} + \frac{14}{6} = \frac{4}{3} - \frac{7}{8} + \frac{7}{3} = \frac{32}{24} - \frac{21}{24} - \frac{56}{24} = \frac{67}{24}$

f) $\frac{2}{7} - \frac{1}{5} - \left[\frac{105}{15} - \frac{6}{15} - \frac{25}{15} \right] = \frac{2}{7} - \frac{1}{5} - \frac{124}{15} = \frac{30}{105} - \frac{21}{105} - \frac{868}{105} = \frac{877}{105}$

g) $\frac{11}{6} - \left[\frac{15}{20} - \frac{2}{20} \right] - \left[\frac{36}{9} - \frac{1}{9} \right] = \frac{11}{6} - \frac{13}{20} + \frac{35}{9} = \frac{330}{180} - \frac{117}{180} + \frac{700}{180} = \frac{913}{180}$

75. Efectúa y simplifica cuando sea posible.

a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9}$

c) $\frac{9}{5} \cdot \frac{10}{11}$

e) $\frac{12}{5} \cdot 6$

b) $\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{2}$

d) $\frac{2}{7} \cdot \frac{28}{2}$

f) $8 \cdot \frac{3}{2}$

a) $\frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

c) $\frac{90}{55} = \frac{18}{11}$

e) $\frac{72}{5}$

b) $\frac{7}{8}$

d) $\frac{56}{14} = 4$

f) $\frac{24}{2} = 12$

76. Calcula.

a) $\frac{9}{4} : \frac{3}{8}$

c) $7 : \frac{21}{4}$

e) $\frac{16}{3} : \frac{12}{15}$

g) $\frac{6}{11} : \frac{24}{22}$

b) $\frac{5}{6} : \frac{10}{3}$

d) $\frac{8}{15} : 2$

f) $\frac{2}{5} : 5$

h) $1 : \frac{1}{2}$

a) $\frac{72}{12} = 6$

e) $\frac{240}{36} = \frac{20}{3}$

b) $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

f) $\frac{2}{25}$

c) $\frac{28}{21} = \frac{4}{3}$

g) $\frac{132}{264} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

h) $\frac{2}{1} = 2$

77. Efectúa.

a) $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{4} + 3 \right)$

c) $\left(\frac{9}{2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{4}$

b) $\left(2 + \frac{1}{4} \right) : \frac{15}{8}$

d) $\frac{2}{7} : \left(3 - \frac{1}{5} \right)$

a) $\frac{3}{2} \cdot \left| \frac{5}{4} - \frac{12}{4} \right| = \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{4} = \frac{51}{8}$

c) $\left| \frac{9}{2} - \frac{2}{2} \right| \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

b) $\left| \frac{8}{4} - \frac{1}{4} \right| : \frac{15}{8} = \frac{9}{4} : \frac{15}{8} = \frac{72}{60} = \frac{6}{5}$

d) $\frac{2}{7} : \left| \frac{15}{5} - \frac{1}{5} \right| = \frac{2}{7} : \frac{14}{5} = \frac{10}{98} = \frac{5}{49}$

78. Efectúa.

a) $\frac{13}{5} : \left(\frac{7}{9} - \frac{5}{12} \right)$

c) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{12}{7}$

b) $\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{10} \right) \cdot \frac{3}{2}$

d) $\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{12} \right) : \frac{20}{3}$

a) $\frac{13}{5} : \left| \frac{28}{36} - \frac{15}{36} \right| = \frac{13}{5} : \frac{13}{36} = \frac{13 \cdot 36}{5 \cdot 13} = \frac{36}{5}$

c) $\left| \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \right| : \frac{12}{7} = \frac{3}{6} : \frac{12}{7} = \frac{36}{42} = \frac{6}{7}$

b) $\left| \frac{8}{10} - \frac{1}{10} \right| : \frac{3}{2} = \frac{9}{10} : \frac{3}{2} = \frac{27}{20}$

d) $\left| \frac{30}{12} - \frac{5}{12} \right| : \frac{20}{3} = \frac{25}{12} : \frac{20}{3} = \frac{75}{240} = \frac{5}{16}$

Fracciones

79. Calcula.

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{10}$

c) $3 - \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}$

e) $\frac{4}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{3}$

g) $\frac{21}{2} \cdot \frac{8}{3} - \frac{15}{4}$

b) $\frac{6}{5} + 3 \cdot \frac{5}{6}$

d) $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$

f) $\frac{15}{28} - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2}$

h) $5 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2}$

a) $\frac{2}{30} - \frac{3}{10} = \frac{2}{30} - \frac{9}{30} = \frac{11}{30}$

e) $\frac{4}{3} - \frac{8}{18} = \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = \frac{12}{9} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$

b) $\frac{6}{5} - \frac{15}{6} = \frac{36}{30} - \frac{75}{30} = \frac{111}{30} = \frac{37}{10}$

f) $\frac{15}{28} - \frac{9}{4} = \frac{15}{28} - \frac{63}{28} = -\frac{48}{28} = -\frac{12}{7}$

c) $3 - \frac{8}{21} = \frac{63}{21} - \frac{8}{21} = \frac{55}{21}$

g) $\frac{168}{6} - \frac{15}{4} = 28 - \frac{15}{4} = \frac{112}{4} - \frac{15}{4} = \frac{97}{4}$

d) $\frac{14}{27} - \frac{1}{3} = \frac{14}{27} - \frac{9}{27} = \frac{5}{27}$

h) $5 - \frac{9}{6} = \frac{30}{6} - \frac{9}{6} = \frac{39}{6} = \frac{13}{2}$

80. Realiza estas operaciones.

a) $\frac{12}{7} - \frac{1}{5} + \frac{3}{4}$

d) $\frac{132}{5} - \frac{7}{3} \cdot \frac{42}{5} + \frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{5} + \frac{7}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{7}$

e) $\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{15} - \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{4}$

c) $\frac{13}{2} - \frac{1}{3} + \frac{16}{5} \cdot \frac{7}{4}$

f) $\frac{3}{2} \cdot \frac{17}{5} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2}$

a) $\frac{12}{7} - \frac{1}{5} - \frac{3}{4} = \frac{240}{140} - \frac{28}{140} - \frac{105}{140} = \frac{317}{140}$

b) $\frac{3}{5} - \frac{7}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5} + \frac{7 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5} - \frac{42}{25} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5} - \frac{42}{25 \cdot 1} = \frac{3}{5} - \frac{294}{25} = \frac{309}{25}$

c) $\frac{13}{2} - \frac{1}{3} + \frac{16}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{13}{2} - \frac{1}{3} - \frac{16 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{13}{2} - \frac{1}{3} + \frac{64}{35} = \frac{1679}{210}$

d) $\frac{132}{5} - \frac{7}{3} \cdot \frac{42}{5} + \frac{1}{2} = \frac{132}{5} - \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 42} + \frac{1}{2} = \frac{132}{5} - \frac{35}{126} + \frac{1}{2} = \frac{1198}{45}$

e) $\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{15} - \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6 \cdot 15}{7 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{90}{21} - \frac{7}{20} = \frac{1800}{420} - \frac{147}{420} = \frac{1653}{420} = \frac{551}{140}$

f) $\frac{3}{2} \cdot \frac{17}{5} - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 17} + \frac{6 \cdot 2}{5} = \frac{15}{34} - \frac{12}{5} = \frac{75}{170} - \frac{408}{170} = \frac{483}{170}$

81. Resuelve.

a) $\frac{5}{9} - \left(\frac{7}{6} - \frac{2}{3} \right)$

c) $\left(\frac{5}{12} + \frac{3}{8} \right) - \frac{2}{3}$

e) $\frac{5}{3} : \left(\frac{15}{2} : \frac{3}{4} \right)$

b) $\frac{7}{5} - \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{3} \right)$

d) $\frac{8}{3} : \left(\frac{6}{7} : \frac{3}{2} \right)$

f) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10} \right) : \frac{7}{2}$

a) $\frac{5}{9} - \frac{3}{6} = \frac{10 - 9}{18} = \frac{1}{18}$

d) $\frac{8}{3} : \frac{12}{21} = \frac{168}{36} = \frac{14}{3}$

b) $\frac{7}{5} - \frac{19}{30} = \frac{42 - 19}{30} = \frac{23}{30}$

e) $\frac{5}{3} : \frac{60}{6} = \frac{30}{180} = \frac{1}{6}$

c) $\frac{19}{24} - \frac{2}{3} = \frac{19 - 16}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

f) $\frac{7}{10} : \frac{7}{2} = \frac{14}{70} = \frac{1}{5}$

82. Calcula.

a) $\left(\frac{11}{4} - 2\right) + \frac{2}{5}$

d) $\left(\frac{9}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) : \frac{3}{5}$

b) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{5}{6} : \frac{7}{2}\right)$

e) $\left(\frac{9}{4} - \frac{3}{8}\right) : \frac{5}{4}$

c) $\frac{6}{7} : \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{2}\right)$

f) $\left(\frac{7}{8} : \frac{5}{2}\right) : \frac{3}{2}$

a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15+8}{20} = \frac{23}{20}$

d) $\frac{18}{15} : \frac{3}{5} = \frac{90}{45} = 2$

b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{42} = \frac{30}{168} = \frac{5}{28}$

e) $\frac{15}{8} : \frac{5}{4} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$

c) $\frac{6}{7} : \frac{28}{10} = \frac{60}{196} = \frac{15}{49}$

f) $\frac{14}{40} : \frac{3}{2} = \frac{28}{120} = \frac{7}{30}$

83. Calcula y simplifica el resultado.

a) $12 - \left(\frac{25}{6} - \frac{7}{6}\right) - \frac{4}{18} \cdot \frac{18}{4}$

e) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{12} + 4$

b) $\frac{2}{16} + \left(\frac{3}{6} - \frac{4}{8}\right) \cdot \frac{9}{5} - 6 \cdot \frac{4}{8}$

f) $4 - \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{5}{3} - \frac{7}{24}$

c) $\frac{7}{17} \cdot \frac{17}{57} + 6 - \frac{7}{4} + 5 \cdot \frac{2}{8}$

g) $\frac{19}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{2}{6} : \frac{4}{9}$

d) $\frac{2}{32} \cdot \frac{32}{4} \cdot \frac{4}{2} + 45 \cdot \frac{5}{7}$

h) $5 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{37}{47} - \frac{4}{8}\right) + 7$

a) $12 - \frac{18}{6} - \frac{72}{72} = 12 - 3 - 1 = 8$

b) $\frac{2}{16} + \frac{0}{24} \cdot \frac{9}{5} - \frac{24}{8} = \frac{2}{16} - 3 = \frac{-46}{16} = \frac{-23}{8}$

c) $\frac{7}{57} + 6 - \frac{7}{4} + \frac{5}{4} = \frac{7}{57} + 6 - \frac{1}{2} = \frac{14 + 684 - 57}{114} = \frac{641}{114}$

d) $1 + \frac{45 \cdot 5}{7} = \frac{7 + 225}{7} = \frac{232}{7}$

e) $\frac{5}{6} + \frac{2}{5} - \frac{3}{12} + 4 = \frac{50 + 24 - 15 + 240}{60} = \frac{299}{60}$

f) $4 - \frac{17}{35} \cdot \frac{5}{3} - \frac{7}{24} = 4 - \frac{17}{21} - \frac{7}{24} = \frac{672 - 136 - 49}{168} = \frac{487}{168}$

g) $\frac{19}{5} - \frac{17}{28} \cdot \frac{1}{3} : \frac{4}{9} = \frac{19}{5} - \frac{17}{84} : \frac{4}{9} = \frac{19}{5} - \frac{153}{336} = \frac{19}{5} - \frac{51}{112} = \\ = \frac{2128 - 255}{560} = \frac{1873}{560}$

h) $\frac{20}{9} \cdot \frac{296 - 188}{376} + 7 = \frac{20}{9} \cdot \frac{27}{94} + 7 = \frac{540}{846} + 7 = \frac{6462}{846} = \frac{359}{47}$

Fracciones

84. Escribe en tu cuaderno el número que falta.

a) $\frac{\square}{3} : \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\square} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{8}{7} \cdot \frac{6}{\square} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{7}$

c) $\frac{4}{3} \cdot \frac{12}{5} : \frac{\square}{\square} = \frac{5}{13}$

d) $\frac{3}{10} + \frac{5}{\square} = \frac{43}{60}$

e) $\frac{\square}{4} + \frac{8}{3} - \frac{7}{6} = \frac{17}{4}$

a) 1 y 2

b) 2

c) 208/25

d) 12

e) 11

85. Un tercio de 27 vecinos practican la natación. ¿Cuántos vecinos no la practican?



No la practican los $\frac{2}{3}$ de los vecinos.

$$\frac{2}{3} \text{ de } 27 = \frac{2 \cdot 27}{3} = 18 \rightarrow 18 \text{ vecinos no practican natación.}$$

86. En una clase de 1.^o de ESO hay 22 alumnos, de los cuales 13 son chicas, y en otra clase hay 20 alumnos, siendo chicas 12 de ellos. ¿En qué clase es mayor la parte de los alumnos que son chicas?

En la clase A son chicas $\frac{13}{22}$.

En la clase B son chicas $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

$$\text{m.c.m.}(5, 22) = 110 \rightarrow \frac{13}{22} = \frac{65}{110}, \frac{3}{5} = \frac{66}{110} \rightarrow \frac{66}{110} > \frac{65}{110} \rightarrow \text{Hay más chicas en la clase B.}$$

87. En un partido de baloncesto, un jugador consigue 10 canastas triples de 14 intentos y otro jugador consigue 12 canastas de 20 tiros. ¿Cuál de los dos tira mejor los triples?

Jugador A: $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

Jugador B: $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$$\text{m.c.m.}(5, 7) = 35 \rightarrow \frac{5}{7} = \frac{25}{35}, \frac{3}{5} = \frac{21}{35} \rightarrow \frac{25}{35} > \frac{21}{35} \rightarrow \text{El jugador A tira mejor los triples.}$$

88. En el desayuno, Luisa bebe $\frac{2}{8}$ de litro de leche mientras que Juan bebe $\frac{3}{4}$ de litro.

- ¿Cuánta leche beben entre los dos?
- ¿Quién bebe más? ¿Cuánto?



a) $\frac{2}{8} - \frac{3}{4} = \frac{2}{8} - \frac{6}{8} = \frac{8}{8} = 1$ litro

b) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ $\frac{6}{8} - \frac{2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ → Juan bebe medio litro más que Luisa.

89. Si llenamos tazas de un cuarto de litro con un bidón de cinco litros:

- ¿Cuántas tazas llenaremos?
- ¿Y si son tazas de un tercio de litro?
- ¿Y si son de un sexto?

a) $5 : \frac{1}{4} = 20$ tazas b) $5 : \frac{1}{3} = 12$ tazas c) $5 : \frac{1}{6} = 30$ tazas

90. Ricardo y Álex participan en una carrera popular.

Ricardo recorre, en media hora, 3 kilómetros y $\frac{2}{5}$ de kilómetro, y Álex, en el mismo tiempo, ha hecho $\frac{16}{5}$ de kilómetro. ¿Quién ha recorrido más distancia en esa media hora?

Ricardo: $3 - \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$ km Álex: $\frac{16}{5}$ km

$\frac{17}{5} > \frac{16}{5}$ → Ricardo ha recorrido más distancia.

91. Si cada día bebes 2 litros y $\frac{3}{4}$ de litro de agua, ¿bebes más de 600 litros al año?

Un año tiene 365 días, de modo que bebes: $\left|2 - \frac{3}{4}\right| \cdot 365 = \frac{11}{4} \cdot 365 = \frac{4015}{4} = 1003 - \frac{3}{4}$ litros al año > 600 .

Sí que bebes más de 600.

Fracciones

92. Una caja de 12 lápices vale 4 €. ¿Cuántos lápices son los $\frac{2}{3}$ de la caja? ¿Cuánto cuestan?

$$\frac{2}{3} \text{ de } 12 = \frac{24}{3} = 8 \text{ lápices} \rightarrow \text{Cuestan: } \frac{2}{3} \text{ de } 4 = \frac{8}{3} = 2,67 \text{ €}$$

93. En la linde de una finca que mide $\frac{3}{5}$ de km, queremos plantar un árbol cada $\frac{1}{20}$ de km. ¿Cuántos árboles podemos plantar?



$$\frac{3}{5} : \frac{1}{20} = \frac{60}{5} = 12 \rightarrow \text{Podemos plantar 12 árboles.}$$

94. Silvia y Miguel acuden a la misma escuela. Silvia va andando todos los días y tarda $\frac{3}{4}$ de hora en llegar, mientras que Miguel coge el autobús y llega en $\frac{3}{5}$ de hora. Si salen a la misma hora, ¿cuál de los dos llega antes a la escuela?

$\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$ porque tienen el mismo numerador y $5 > 4$. \rightarrow Miguel llega antes a la escuela.

95. Dos amigas, Ana y Eva, hacen sus deberes escolares. Ana está $\frac{2}{5}$ de hora estudiando Matemáticas, $\frac{2}{3}$ de hora Lengua y $\frac{3}{4}$ Inglés, mientras que Eva estudia $\frac{4}{6}$ de hora Lengua, $\frac{3}{5}$ de hora Matemáticas y $\frac{7}{12}$ de hora Idiomas.

- a) ¿A qué área ha dedicado Ana menos tiempo de estudio?
- b) ¿En qué área ha empleado Eva más tiempo?
- c) ¿Cuál de las dos dedica más tiempo a estudiar Matemáticas?
- d) ¿Cuál de ellas estudia más cada día?

a) m.c.m. (3, 4, 5) = 60 $\rightarrow \frac{2}{5} = \frac{24}{60}, \frac{2}{3} = \frac{40}{60}, \frac{3}{4} = \frac{45}{60} \rightarrow \frac{45}{60} > \frac{40}{60} > \frac{24}{60} - \frac{3}{4} > \frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

Matemáticas es la asignatura que menos estudia.

b) m.c.m. (5, 6, 12) = 60 $\rightarrow \frac{4}{6} = \frac{40}{60}, \frac{3}{5} = \frac{36}{60}, \frac{7}{12} = \frac{35}{60} \rightarrow \frac{40}{60} > \frac{36}{60} > \frac{35}{60} - \frac{4}{6} > \frac{3}{5} > \frac{7}{12}$

Lengua es la asignatura que Eva estudia más tiempo.

c) $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$ Eva dedica más tiempo que Ana a estudiar Matemáticas.

d) Ana: $\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{24}{60} - \frac{40}{60} - \frac{45}{60} = \frac{109}{60}$ Eva: $\frac{4}{6} - \frac{3}{5} - \frac{7}{12} = \frac{40}{60} + \frac{36}{60} - \frac{35}{60} = \frac{111}{60}$

$\frac{111}{60} > \frac{109}{60}$ Eva dedica más horas a estudiar que Ana.

96. Jorge reparte su tiempo de ocio, que son 4 horas, de la siguiente manera:

- Una tercera parte la dedica a hacer deporte.
- Dos quintas partes a la lectura.
- Y el resto, a ver la televisión.

a) ¿Qué fracción de su tiempo de ocio dedica a ver la televisión?

b) ¿En qué actividad emplea más tiempo?

$$\text{a)} \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

$$\text{Dedica a ver la televisión: } 1 - \frac{11}{15} = \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

$$\text{b) m.c.m. } (3, 5, 15) = 15$$

$$\text{Deporte: } \frac{1}{3} = \frac{5}{15} \quad \text{Lectura: } \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \quad \text{Televisión: } \frac{4}{15}$$

Dedica más tiempo a la lectura.



97. De todos los alumnos de la clase, $\frac{2}{3}$ son chicas. ¿Cuántos chicos hay?

1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ de los alumnos de la clase son chicos.

98. En el jardín de Paula, tres séptimas partes del total de las flores son rosas, una décima parte son petunias y el resto son margaritas.

a) ¿Qué fracción del total representan las margaritas?

b) ¿Qué flores son las menos abundantes?



$$\text{Rosas: } \frac{3}{7}$$

$$\text{Petunias: } \frac{1}{10}$$

$$\text{a)} 1 - \left[\frac{3}{7} - \frac{1}{10} \right] = 1 - \frac{37}{70} = \frac{70 - 37}{70} = \frac{33}{70} \text{ son margaritas.}$$

$$\text{b) Rosas: } \frac{3}{7} = \frac{30}{70} \quad \text{Petunias: } \frac{1}{10} = \frac{7}{70} \quad \text{Margaritas: } \frac{33}{70}$$

Las petunias son las menos abundantes.

99. En una playa, $\frac{3}{7}$ de los bañistas son españoles, $\frac{1}{5}$ franceses y el resto de otras nacionalidades.

¿Qué fracción del total representan estos últimos?

$$1 - \left[\frac{3}{7} - \frac{1}{5} \right] = 1 - \frac{22}{35} = \frac{35 - 22}{35} = \frac{13}{35} \text{ son de otras nacionalidades.}$$

Fracciones

100. Felipe camina cada día 3 120 m repartidos en dos sesiones:

- Por la mañana recorre tres quintas partes del total.
- Por la tarde hace el resto del trayecto.

a) ¿Qué fracción del total recorre por la tarde?

b) ¿Cuántos metros camina en cada sesión?

a) Por la mañana: $\frac{3}{5}$ → Por la tarde: $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

b) Por la mañana: $\frac{3}{5}$ de 3 120 = $\frac{3 \cdot 3\,120}{5} = 1\,872$ m → Por la tarde: $\frac{2}{5}$ de 3 120 = $\frac{2 \cdot 3\,120}{5} = 1\,248$ m

101. De una clase de 24 alumnos, los $\frac{3}{8}$ han tenido la gripe. ¿Qué fracción de alumnos no ha enfermado? ¿Cuántos alumnos son?

$1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ → No han enfermado $\frac{5}{8}$ de los alumnos.

$\frac{5}{8}$ de 24 = $\frac{5 \cdot 24}{8} = 15$ → No han enfermado 15 alumnos.

102. De un bote con 180 caramelos Laura se ha comido una décima parte, Marta una novena parte y Cristina una quinta parte. De lo que queda, Juan se ha comido la mitad.

a) ¿Cuántos caramelos quedan?

b) ¿Qué fracción de caramelos se han comido entre todos?

a) Laura: $\frac{1}{10}$ de 180 = 18 caramelos Marta: $\frac{1}{9}$ de 180 = 20 caramelos Cristina: $\frac{1}{5}$ de 180 = 36 caramelos

$18 + 20 + 36 = 74$ → Quedan $180 - 74 = 106$ caramelos.

Juan: $\frac{106}{2} = 53$ caramelos

Queda la mitad que Juan no ha comido, es decir, 53 caramelos.

b) Como quedan 53 caramelos, entre todos se han comido $180 - 53 = 127$, y la fracción que representa es $\frac{127}{180}$.

103. Una caja de galletas tiene 15 paquetes de 8 galletas cada uno. Alejandro ya se ha comido 40 galletas.

a) ¿Qué fracción del total de paquetes se ha comido Alejandro?

b) ¿Qué fracción del total de galletas queda?

a) Cada paquete tiene 8 galletas → $\frac{40}{8} = 5$ paquetes se ha comido Alejandro.

Alejandro se come $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ del total de los paquetes.

b) Hay $15 \cdot 8 = 120$ galletas en total.

Alejandro se ha comido 40 galletas, con lo que quedan $120 - 40 = 80$ galletas.

Las galletas que quedan son $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$ del total de las galletas.

104. De una naranja se aprovechan para hacer zumo solamente $\frac{4}{9}$ partes, siendo el resto piel.

a) Si utilizamos 27 kg de naranjas, ¿qué cantidad de zumo obtendremos?

b) ¿Qué fracción corresponderá a piel?

$$\text{a)} \frac{4}{9} \text{ de } 27 \text{ kg} = \frac{4 \cdot 27}{9} = 12 \text{ kg de zumo.}$$

$$\text{b)} 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \text{ del total es piel.}$$

105. Las $\frac{2}{5}$ partes de un grupo de 15 amigos irá de vacaciones a la playa, una tercera parte irá a la montaña y el resto no irá de vacaciones.

a) ¿Qué fracción irá de vacaciones?

b) ¿Cuántos irán a la montaña?

$$\text{a)} \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6 - 5}{15} = \frac{11}{15} \text{ del total se irán de vacaciones.}$$

$$\text{b)} \frac{1}{3} \text{ de } 15 = \frac{15}{3} = 5 \text{ amigos irán a la montaña.}$$

106. Ángel distribuye su salario así:

- Una sexta parte para comida.
- Una quinta parte a ropa y calzado.
- Una octava parte para pagar facturas domésticas.
- Y dos séptimas partes para el pago de la hipoteca.
- El resto del dinero de su salario lo reserva para imprevistos.

a) ¿Qué fracción del total destina a comida, ropa y calzado?

b) ¿Qué parte reserva para imprevistos?

c) ¿Cómo reparte su dinero si su salario es de 1260 €?

$$\text{a)} \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = \frac{5 - 6}{30} = \frac{11}{30} \text{ del total destina a comida, ropa y calzado.}$$

$$\text{b)} 1 - \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{2}{7} \right] = 1 - \frac{140 - 168 + 105 - 240}{840} = 1 - \frac{653}{840} = \frac{187}{840} \text{ del total lo reserva para imprevistos.}$$

$$\text{c)} \frac{1}{6} \text{ de } 1260 = 210 \text{ € para comida.}$$

$$\frac{1}{5} \text{ de } 1260 = 252 \text{ € para ropa y calzado.}$$

$$\frac{1}{8} \text{ de } 1260 = 157,5 \text{ € para pagar facturas domésticas.}$$

$$\frac{2}{7} \text{ de } 1260 = 360 \text{ € para el pago de la hipoteca.}$$

$$\text{El resto: } 1260 - (210 + 252 + 157,5 + 360) = 1260 - 979,5 = 280,5 \text{ € para imprevistos.}$$

Fracciones

107. El depósito de gasolina del coche de Luisa tiene una capacidad de 60 litros. En cierto momento le quedan 8 litros y se enciende el piloto de la reserva.

a) ¿Qué fracción del depósito representa la reserva?

b) ¿Y la parte vacía?

a) $\frac{8}{60} = \frac{2}{15}$ del depósito representa la reserva.

b) $1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$ del total es lo que ha consumido Luisa.

108. Ángela ha comprado un piso y paga como entrada los $\frac{3}{8}$ de su valor y el resto en 10 plazos iguales.

¿Qué fracción del total ha de pagar en cada plazo?

Falta por pagar: $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ del total.

Lo paga en 10 plazos iguales: $\frac{5}{8} : 10 = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$ del total paga en cada plazo.

109. De una botella llena que tiene una capacidad de tres cuartos de litro se extrae la sexta parte del contenido.

a) ¿Qué fracción de litro se ha extraído?

b) ¿Cuántos mililitros quedan en la botella?

a) $\frac{1}{6}$ de $\frac{3}{4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$ de litro es la cantidad extraída.

b) $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6-1}{8} = \frac{5}{8}$ de litro quedan en la botella

$\frac{5}{8}$ de litro = 0,625 litros = 625 ml

DEBES SABER HACER

1. Encuentra y escribe en tu cuaderno los valores que hacen que estas fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{\square}{4} = \frac{15}{6}$

b) $\frac{8}{\square} = \frac{6}{9}$

a) 10

b) 12

2. Obtén la fracción irreducible.

a) $\frac{84}{40}$ b) $\frac{72}{96}$ c) $\frac{255}{102}$ d) $\frac{385}{440}$

a) $\frac{21}{10}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{2}$

d) $\frac{7}{8}$

3. Completa en tu cuaderno con valores que cumplan las siguientes condiciones.

a) $\frac{1}{2} < \frac{\square}{8} < \frac{5}{8}$ c) $\frac{5}{6} < \frac{\square}{\square} < \frac{7}{8}$

b) $\frac{3}{7} < \frac{3}{\square} < \frac{3}{4}$ d) $\frac{\square}{9} < \frac{7}{9} < \frac{7}{\square}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) 4 b) 5 c) 41 y 48 d) 6 y 8

4. Realiza estas operaciones.

a) $\left(\frac{17}{6} - \frac{3}{7}\right) : \frac{5}{2} + \frac{11}{3}$

b) $\frac{5}{4} - \left(\frac{12}{5} + \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{7}{3} \cdot 5$

a) $\left[\frac{119}{42} - \frac{18}{42}\right] : \frac{5}{2} - \frac{11}{3} = \frac{101}{42} : \frac{5}{2} - \frac{11}{3} = \frac{101}{105} - \frac{11}{3} = \frac{101}{105} - \frac{385}{105} = \frac{486}{105} = \frac{162}{35}$

b) $\frac{5}{4} - \left[\frac{24}{10} + \frac{15}{10}\right] \cdot \frac{7}{3} \cdot 5 = \frac{5}{4} - \frac{39}{10} \cdot \frac{35}{3} = \frac{5}{4} - \frac{91}{2} = \frac{5 - 182}{4} = -\frac{177}{4}$

5. Lucía y Tomás están leyendo un libro de 360 páginas. Si Lucía ha leído $\frac{7}{15}$ del libro y Tomás $\frac{9}{20}$:

a) ¿Quién ha leído más de los dos?

b) ¿Cuántas páginas le quedan por leer a cada uno?

a) Lucía: $\frac{7}{15} = \frac{28}{60}$ Tomás: $\frac{9}{20} = \frac{27}{60} \rightarrow \frac{28}{60} > \frac{27}{60}$

Lucía ha leído más que Tomás.

b) A Lucía le queda por leer:

$$1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \text{ del libro.} \quad \frac{8}{15} \text{ de } 360 = \frac{8 \cdot 360}{15} = 192 \text{ páginas.}$$

A Tomás le queda por leer:

$$1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20} \text{ del libro.} \quad \frac{11}{20} \text{ de } 360 = \frac{11 \cdot 360}{20} = 198 \text{ páginas.}$$

6. Ana está pintando una pared. Si ya ha pintado la sexta parte, ¿qué fracción le queda por pintar?

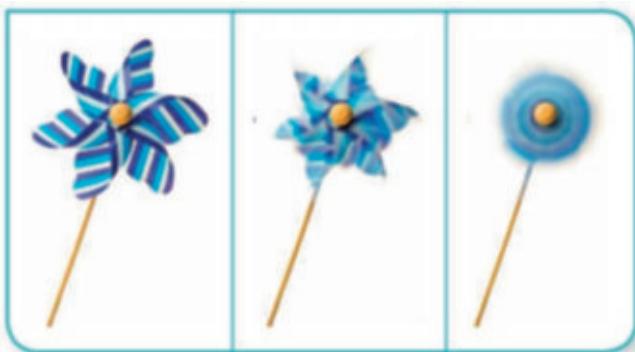
$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \text{ de la pared le queda por pintar.}$$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

110. ¿Has hecho alguna vez una foto de un objeto en movimiento?

Si lo has hecho, habrás observado que el objeto que has fotografiado aparece como si estuviera parado.

Fíjate en las fotos del molinillo. Aunque parezca mentira, en las tres gira a la misma velocidad. Para conseguir este efecto tienes que fijarte en las propiedades con las que se realiza el disparo.



En las aplicaciones de la cámara encontrarás una pantalla similar a la que ves a la izquierda. En ella aparece una fracción que indica el tiempo que está entrando luz en el sensor de la cámara. Para poder hacer fotos como las anteriores necesitamos tiempos largos para fotografiar el movimiento y necesitamos tiempos cortos para congelar la imagen.



a) Asigna a cada foto uno de los siguientes tiempos de exposición: $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{400}$, $\frac{1}{6}$.



b) La siguiente tabla muestra los tiempos, menores que el segundo, más utilizados.

1	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/15$	$1/30$	$1/60$	$1/125$	$1/250$	$1/500$
---	-------	-------	-------	--------	--------	--------	---------	---------	---------

¿Qué relación hay entre cada fracción y la siguiente?

- a) FOTO I: $1/6$, FOTO II: $1/30$ FOTO III: $1/400$.
- b) Cada fracción es la mitad de la anterior.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

111. Escribe una fracción que esté comprendida entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

a) Encuentra ahora una fracción comprendida entre $\frac{1}{2}$ y la fracción que has hallado antes.

b) ¿Podrías repetir el proceso cuantas veces quisieras? Razona tu respuesta.

Respuesta abierta. Por ejemplo, $\frac{5}{12}$.

a) Entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{12}$, por ejemplo $\frac{11}{24}$.

b) Sí puede repetirse el proceso, pues siempre puede encontrarse una fracción comprendida entre otras aumentando los denominadores.

112. Utilizando 1, 2, 3 y 4, forma todas las fracciones posibles que no sean equivalentes.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4} \text{ y } \frac{4}{3}$$

113. Si las divisiones que se han hecho entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{46}{15}$ son iguales, ¿qué fracción representa A?



Por un lado, $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$. Por otro lado, $46 - 10 = 36 \rightarrow 36 : 6 = 6$.

Cada división equivale a $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} \rightarrow A = \frac{2}{3} - 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{3} - 2 = \frac{8}{3}$

PRUEBAS PISA

114. Para evitar que un embalse se quede vacío, se establece que tiene que estar, como mínimo, a $\frac{1}{12}$ de su capacidad. Cuando el agua está por debajo de este mínimo, se ordenan cortes en el suministro de agua. Si está a $\frac{2}{3}$ de su capacidad, y se reduce $\frac{1}{60}$ por día:



- a) Despues de 30 días, ¿hay que empezar a realizar los cortes en el suministro?
 b) ¿Para cuántos días habrá agua en el embalse si no llueve durante ese tiempo?

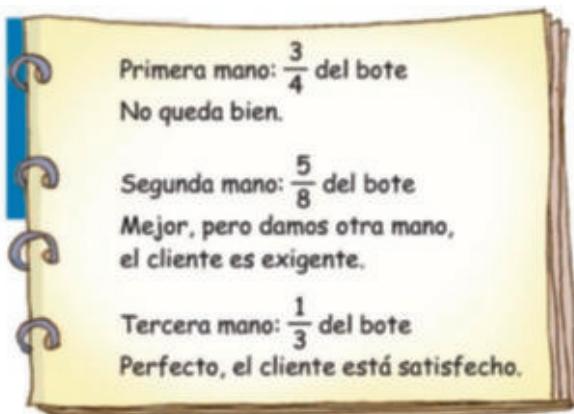
a) $\frac{2}{3} - 30 \cdot \frac{1}{60} = \frac{2}{3} - \frac{30}{60} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ de su capacidad tras los 30 días. Tenemos que $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ y $\frac{2}{12} > \frac{1}{12}$, con lo que de momento no se necesita realizar recortes.

b) Tras esos 30 días está a una capacidad de $\frac{2}{12}$, y si se vacía $\frac{1}{12}$ de su capacidad, se quedará en lo mínimo.

Cada día sin llover se reduce $\frac{1}{60} \rightarrow \frac{1}{12} : \frac{1}{60} = \frac{60}{12} = 5$ días son los que aguantará hasta estar en los mínimos.

En total, desde el principio, aguanta $30 + 5 = 35$ días.

- 115.** Se quiere pintar de blanco una pared azul oscura. Como el cambio de color es drástico, habrá que dar más de una mano de pintura. El pintor anota las manos de pintura que da y la parte del bote que utiliza.



a) ¿Tiene suficiente con un bote de pintura?

b) ¿Cuánta pintura ha sobrado en el bote?

a) $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} + \frac{1}{3} = \frac{18}{24} - \frac{15}{24} - \frac{8}{24} = \frac{41}{24} = 1 + \frac{17}{24} \rightarrow$ No tiene suficiente con un bote de pintura.

b) $24 - 17 = 7 \rightarrow$ Ha sobrado $\frac{7}{24}$ del segundo bote.

Números decimales

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Pon tres ejemplos en los que habitualmente se utilicen números decimales.

La altura de las personas: 1,66 m, 1,82 m, 1,23 m.

En las básculas en el supermercado: 1,3 kg, 0,8 kg, 2,5 kg.

En los precios: 13,20 €, 0,99 €, 2,75 €.

2. Escribe en tu cuaderno, en cada caso, la equivalencia.

a) 34 centésimas = milésimas

b) 9 unidades = centésimas

a) 340 milésimas. b) 900 centésimas.

VIDA COTIDIANA

El uso y la evolución del cronómetro siempre han estado muy ligados al deporte. Gracias a esta herramienta, en las Olimpiadas de Pekín de 2008, se pudo medir cómo Michael Phelps consiguió nadar los 100 m mariposa en 50,58 segundos.

Michael Phelps obtuvo la medalla de oro, y la segunda posición fue para el serbio Milorad Čavie.

• Si la diferencia entre ambos fue de una centésima de segundo, ¿cuánto tiempo tardó Milorad?

Milorad tardó 50,59 segundos.

RESUELVE EL RETO

Encuentra un número cuyo truncamiento sea mayor que su redondeo.

No es posible encontrar tal número. Un número aproximado por redondeo siempre será mayor o igual que su aproximación por truncamiento.

Dispongo de monedas de 5 y de 2 céntimos, ¿qué cantidades menores de 1 € no puedo tener?

Como mínimo tiene 7 céntimos, así que no puede tener cantidades menores de 0,07 €.

Si 3 melones y medio cuestan 3 € y medio, ¿cuánto cuesta un melón y medio?

Un melón y medio es la mitad de 3 melones, de modo que costará la mitad, es decir, 1,75 €.

Encuentra un número decimal exacto que esté entre estos dos:

7,79 y 7,8.

¿Puedes hacer lo mismo entre 7,9 y 8?

0,79797979... < 0,798 < 7,8888...

No se puede hacer lo mismo entre 7,999999999... y 8.

ACTIVIDADES

1. Escribe con cifras.

- a) Veinte unidades siete décimas b) Cuarenta y nueve milésimas

a) 20,7 b) 0,049

2. Compara estos números.

- a) $23,01 < 23,105$ b) $40 > 39,965$

3. Completa en tu cuaderno.

- a) 72 centésimas = □ milésimas
b) 5 unidades = □ décimas

4. ¿Qué número tiene 4 unidades, 13 décimas y 39 centésimas?

$$4 + 1,3 + 0,39 = 5,69$$

5. Ordena de menor a mayor.

- a) 1,45 1,4 1,5 1,54 1,44
 b) 0,201 0,21 0,211 0,121 0,221
 c) 15,435 15,355 15,453 15,534 15,44

a) $1,4 < 1,44 < 1,45 < 1,5 < 1,54$
 b) $0,121 < 0,201 < 0,21 < 0,211 < 0,221$
 c) $15,355 < 15,435 < 15,44 < 15,453 < 15,534$

6. Ordena de mayor a menor.

- a) 3,72 3,7 3,07 3,27 3,77
 b) 45,2 45,25 45,5 45,22 45,52
 c) 6,303 6,33 6,36 6,3 6,336

a) $3,77 > 3,72 > 3,7 > 3,27 > 3,07$
 b) $45,52 > 45,5 > 45,25 > 45,22 > 45,2$
 c) $6,36 > 6,336 > 6,33 > 6,303 > 6,3$

7. Indica dos números que cumplan:

- a) $28.4 < ? < 28.5$ b) $28.48 < ? < 28.49$ c) $28.142 < ? < 28.143$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) 28,425 y 28,47 b) 28,481 y 28,489 c) 28,1426 y 28,14265

8. Determina números que cumplen estas desigualdades.

- a) $23,08 < ? < 23,1$ c) $4,526 < ? < 4,53$
 b) $13,194 < ? < 13,2$ d) $0,01 < ? < 0,015$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) 23,09 b) 13,199 c) 4,5289 d) 0,0101

9. Escribe el número que corresponda en cada apartado.

- a) Un número que es 5 centésimas mayor que el número 4,57.
 b) Un número que es 4 milésimas menor que el número 0,485.
 c) Un número que es 6 centésimas y 9 milésimas mayor que el número 5,85.
 d) Un número que es 8 unidades, 5 décimas y 7 milésimas menor que el número 12,7.
 e) Un número que es 5 décimas mayor que el número 8.
 f) Un número que es 85 milésimas mayor que el número 2.
- a) 4,62 c) 5,919 e) 8,5
 b) 0,481 d) 4,193 f) 2,085

10. Encuentra el número correspondiente.

- a) Es 4 milésimas menor que 19,318.
 b) Es 4 milésimas menor que 3,65.
 c) Es 4 milésimas menor que 0,01.
- a) 19,314
 b) 3,646
 c) 0,006

11. Trunca a las décimas y a las centésimas.

- a) 5,47 b) 9,043 c) 72,825 d) 0,2876
- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) Truncamiento a las décimas: 5,4 | Truncamiento a las centésimas: 5,47 |
| b) Truncamiento a las décimas: 9 | Truncamiento a las centésimas: 9,04 |
| c) Truncamiento a las décimas: 72,8 | Truncamiento a las centésimas: 72,82 |
| d) Truncamiento a las décimas: 0,2 | Truncamiento a las centésimas: 0,28 |

12. Redondea a las centésimas y a las milésimas estos números.

- a) 37,643 b) 0,7205 c) 18,5081 d) 124,562
- | | |
|------------------------------------|---------------------------------|
| a) Redondeo a la centésima: 37,64 | Redondeo a la milésima: 37,643 |
| b) Redondeo a la centésima: 0,72 | Redondeo a la milésima: 0,721 |
| c) Redondeo a la centésima: 18,51 | Redondeo a la milésima: 18,508 |
| d) Redondeo a la centésima: 124,56 | Redondeo a la milésima: 124,562 |

Números decimales

13. Trunca y redondea el número decimal 1,9999999.

- a) A las décimas b) A las milésimas
- a) Truncamiento a la décima: 1,9 Redondeo a la décima: 2
b) Truncamiento a la milésima: 1,999 Redondeo a la milésima: 2

14. La aproximación por truncamiento, ¿proporciona un número mayor o menor que el número aproximado? ¿Y la que se hace por redondeo?

La aproximación por truncamiento proporciona un número menor que el número aproximado, puesto que se le resta la parte decimal de orden inferior al truncado.

La aproximación por redondeo puede dar un número mayor o menor. Da un número mayor que el número aproximado si la cifra decimal siguiente a la del orden considerado es mayor o igual que 5, ya que se suma una unidad al decimal del orden que estamos redondeando. Da un número menor que el número aproximado si la cifra decimal siguiente al del orden considerado es menor que 5, ya que, como en el truncamiento, se restan las unidades de orden inferior.

15. Resuelve estas operaciones.

- a) $0,135 \cdot 100$ b) $35,6 \cdot 0,1$ c) $9874,3 \cdot 0,001$
a) 13,5 b) 3,56 c) 9,8743

16. Calcula estas divisiones.

- a) $52,378 : 1000$ c) $193,6 : 100$
b) $68,407 : 0,1$ d) $436,72 : 0,0001$
a) 0,052378 b) 684,07 c) 1,936 d) 4 367 200

17. Completa en tu cuaderno.

- a) $2,85 : 0,01 = 2,85 \cdot \square$
b) $347,9 \cdot 0,001 = 3479 : \square$
a) 100 b) 1 000

18. Completa en tu cuaderno.

$$\square \cdot 0,01 = 5,9876 = \square : 10000 = \square \cdot 0,0001$$
$$598,76 \cdot 0,01 = 5,9876 = 59\ 876 : 10\ 000 = 59\ 876 \cdot 0,0001$$

19. Resuelve estas operaciones.

- a) $1,2 + 75,34 + 0,585$ c) $18,003 - 10,02$
b) $972,4 - 39,67$ d) $0,75 + 1,272$
a) 77,125 b) 932,73 c) 7,983 d) 2,002

20. Tengo 60 € y quiero un libro que cuesta 15,65 € y un reloj de 47,5 €. ¿Cuánto me falta?

$$15,65 + 47,5 = 63,15 \rightarrow 63,15 - 60 = 3,15 \rightarrow \text{Me faltan } 3,15\text{€}$$

21. Compro 5 billetes de tren a 28,38 € cada uno y 5 de barco a 92,52 € cada uno. ¿Cuánto gasto?

$$5 \cdot 28,38 + 5 \cdot 92,52 = 141,9 + 462,6 = 604,5 \text{ €}$$

22. Sabiendo que $364 \cdot 123 = 44772$, indica el resultado de estos productos.

- | | | |
|----------------------|---------------------|-----------------------|
| a) $36,4 \cdot 12,3$ | b) $364 \cdot 1,23$ | c) $0,364 \cdot 12,3$ |
| a) 447,72 | b) 447,72 | c) 4,4772 |

23. Resuelve estas operaciones.

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| a) $16,72 + 4,3 \cdot 5,1$ | c) $24,065 + 3,75 \cdot 4,5$ |
| b) $7,93 - 0,2 \cdot 5,86$ | d) $210,04 - 10,56 \cdot 3,9$ |
| a) $16,72 + 21,93 = 38,65$ | c) $24,065 + 16,875 = 40,94$ |
| b) $7,93 - 1,172 = 6,758$ | d) $210,04 - 41,184 = -168,856$ |

24. Efectúa los cálculos.

- | | |
|--|--------------------------------|
| a) $4,32 \cdot 6,8 + 0,7 \cdot 1,55$ | c) $23,842 + 2,01 = 25,852$ |
| b) $27,4 \cdot 2,25 - 13,6 \cdot 0,01$ | d) $812,67 - 95,807 = 716,863$ |
| c) $59,605 \cdot 0,4 + 0,02 \cdot 100,5$ | |
| d) $78,9 \cdot 10,3 - 64,3 \cdot 1,49$ | |
| a) $29,376 + 1,085 = 30,461$ | |
| b) $61,65 - 0,136 = 61,514$ | |

25. Realiza estas operaciones con paréntesis.

- | | |
|--|--|
| a) $2,7 \cdot (4,25 - 3,9) + 8,327$ | c) $1,46 \cdot (72,3 - 65,08) - 5,56$ |
| b) $19,65 - (3,2 + 4,9) \cdot 0,25$ | d) $(15,7 + 1,654) \cdot 0,01 - 0,003$ |
| a) $2,7 \cdot 0,35 + 8,327 = 0,945 + 8,327 = 9,272$ | c) $1,46 \cdot 7,22 - 5,56 = 10,5412 - 5,56 = 4,9812$ |
| b) $19,65 - 8,1 \cdot 0,25 = 19,65 - 2,025 = 17,625$ | d) $17,354 \cdot 0,01 - 0,003 = 0,17354 - 0,003 = 0,17054$ |

Números decimales

26. Calcula.

- a) $3,1 \cdot (0,4 - 0,25) \cdot 0,05$
 - b) $45,2 \cdot 2,1 - (10,4 + 3,75) \cdot 0,8$
 - c) $(15,3 - 3,7 \cdot 1,95) \cdot 1,6$
 - d) $2,5 \cdot (7,2 - 6,7) \cdot (1,8 - 0,9)$
 - e) $25,7 + 0,5 \cdot 8,4 + 3,654 \cdot (1,78 + 2,1)$
- a) $3,1 \cdot 0,15 \cdot 0,05 = 0,465 \cdot 0,05 = 0,02325$
- b) $94,92 - 14,15 \cdot 0,8 = 94,92 + 11,32 = 106,24$
- c) $(15,3 - 7,215) \cdot 1,6 = 8,085 \cdot 1,6 = 12,936$
- d) $2,5 \cdot 0,5 \cdot 0,9 = 1,125$
- e) $25,7 + 4,2 + 3,654 \cdot 3,88 = 25,7 + 4,2 + 14,17752 = 24,07752$

27. Completa en tu cuaderno con el número apropiado para que se cumplan las igualdades.

- a) $0,5 \cdot 8,4 + \square = 5,9$
 - b) $\square + 2,4 \cdot 0,1 = 6,61$
 - c) $72,5 \cdot 0,02 - \square = 0,33$
 - d) $\square - 3,96 = 6,89$
 - e) $0,01 \cdot 435,5 - \square = 4$
- a) 1,7 b) 6,37 c) 1,12 d) 10,85 e) 0,355

28. Una casa tiene planta baja y dos pisos. La planta baja tiene 3,4 m de altura y cada piso, una altura de 3,14 m. El extremo del tejado está a 2,45 m del último piso. ¿Cuál es la altura total de la casa?

$$3,4 + 2 \cdot 3,14 + 2,45 = 3,4 + 6,28 + 2,45 = 12,13 \text{ metros de altura}$$

29. Si compramos 5 entradas, 2 bolsas de palomitas pequeñas y 3 grandes, ¿tenemos suficiente con un billete de 50 €? ¿Cuánto dinero nos sobra?



$$5 \cdot 6,25 + 2 \cdot 2,45 + 3 \cdot 3,7 = 31,25 + 4,9 + 11,1 = 47,25$$

$$50 - 47,25 = 2,75$$

Sí tenemos suficiente, sobran 2,75 €.

30. Resuelve estas divisiones.

- a) $45,8 : 2$ c) $1,7862 : 3$
 b) $327,95 : 5$ d) $4,0501 : 2$
 a) 22,9 b) 65,59 c) 0,5954 d) 2,02505

31. Me han cobrado 8,10 € por 6 kg de naranjas. ¿Cuánto vale 1 kg de naranjas?

$$8,10 : 6 = 1,35 \text{ €/kg}$$

32. Averigua el precio de un rollo de papel sabiendo que 8 unidades cuestan 6,24 €.

$$6,24 : 8 = 0,78 \text{ €/rollo}$$

33. Sabiendo que $35,12 : 5 = 7,024$; calcula:

- a) $3512 : 5$ b) $3,512 : 5$ c) $351,2 : 5$
 a) 702,4 b) 0,7024 c) 70,24

34. Realiza estas divisiones.

- a) $5014 : 3,2$ b) $4752 : 0,25$ c) $98047 : 5,623$
 a) $50\,140 : 32 = 1\,566,875$ (o 1 566 con resto 28)
 b) $475\,200 : 25 = 19\,008$
 c) $98\,047\,000 : 5\,623 = 17\,436,778$ (o 17 436 con resto 4 372)

35. La merluza que he comprado ha pesado 1,750 kg y me han cobrado por ella 21 €. ¿Cuánto cuesta 1 kg de merluza?

$$21 : 1,750 = 21\,000 : 1\,750 = 12 \text{ €/kg}$$

36. Una impresora ha impreso 189 páginas en 12,6 minutos. ¿Cuántas hojas imprime por minuto?

$$189 : 12,6 = 1\,890 : 126 = 15 \text{ hojas/minuto}$$

37. Sabiendo que $7992 : 14,4 = 555$; calcula:

- a) $79920 : 144$ b) $799\,200 : 1440$
 a) 555 b) 555

38. Efectúa estas divisiones.

- a) $29,7 : 4,5$ b) $348,96 : 3,25$ c) $4604,2 : 0,02$
 a) $297 : 45 = 6$ con resto 27 b) $34\,896 : 325 = 107$ con resto 121 c) $460\,420 : 2 = 230\,210$

Números decimales

39. Un horno eléctrico de panadería que ha estado funcionando durante 4,24 horas ha consumido 12,72 kW. ¿Cuánto consume en una hora?

$$12,72 : 4,24 = 1\,272 : 424 = 3 \text{ kW/h}$$

40. Si un pulpo pesa 2,650 kg y vale 37,10 €, ¿cuánto cuesta 1 kilo de pulpo?

$$37,10 : 2,650 = 3\,710 : 265 = 14 \text{ €/kg}$$

41. Me han cobrado 0,5088 € por una llamada que ha durado 4,24 minutos. Si no me cobran establecimiento de llamada, ¿cuántos céntimos me cuesta el minuto?

$$0,5088 : 4,24 = 50,88 : 424 = 0,12 \text{ céntimos/minuto}$$

42. Divide 148 entre 7 y escribe, en cada caso, el cociente y el resto.

a) Cociente sin cifras decimales.

c) Cociente con dos cifras decimales.

b) Cociente con una cifra decimal.

d) Cociente con tres cifras decimales.

a) Cociente: 21 Resto: 1

c) Cociente: 21,14 Resto: 0,02

b) Cociente: 21,1 Resto: 0,3

d) Cociente: 21,142 Resto: 0,006

43. Completa en tu cuaderno, escribiendo el cociente con dos cifras decimales.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
17,2	6	2,86	0,04
25,36	3	8,45	0,01
84,25	5	16,85	0

44. Completa en tu cuaderno, escribiendo el cociente con tres cifras decimales.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
45,1687	2,4	18,820	0,0007
27,29	6,3	4,331	0,0047
4,7842	3,8	1,259	0

45. Completa en tu cuaderno.

a) $11,77 \cdot \square + 0,003 = 48,26$

b) $2,013 \cdot \square + 0,0022 = 11,275$

c) $\square \cdot 0,475 + 0,0325 = 7,3$

d) $\square \cdot 6,23 + 0,0004 = 53,08$

a) $(48,26 - 0,003) : 11,77 = 4,1$

c) $(7,3 - 0,0325) : 0,475 = 15,3$

b) $(11,275 - 0,0022) : 2,013 = 5,6$

d) $(53,08 - 0,0004) : 6,23 = 8,52$

46. Sin hacer la división, completa estas igualdades en tu cuaderno.

- a) $83,529 : 3,24 = \square : 324$
 b) $\square : 7,8 = 46,2 : 78$
 c) $4902,4 : 1,325 = \square : 1325$
 d) $1,8642 : 0,46 = 186,42 : \square$
 e) $5027 : \square = 50270 : 34$
- a) 8 352,9 b) 4,62 c) 4 902 400 d) 46 e) 3,4

47. Hoy es el cumpleaños de Javier. Sus 8 amigos han decidido regalarle un balón que les cuesta 34 €. ¿A cuánto toca cada amigo?



$$34 : 8 = 4,25 \text{ € cada uno.}$$

48. Expresa estas fracciones como números decimales.

- a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{56}{100}$ c) $\frac{9456}{1000}$ d) $\frac{1}{45}$ e) $\frac{13}{6}$ f) $\frac{49}{18}$
- a) 0,3 b) 0,56 c) 9,456 d) 0,02 e) 2,16 f) 2,72

49. Escribe estas fracciones como números decimales hallando primero su fracción irreducible.

a) $\frac{48}{120}$ b) $\frac{240}{4800}$ c) $\frac{196}{140}$

a) $\frac{48}{120} = \frac{2}{5} = 0,4$

b) $\frac{240}{4800} = \frac{1}{20} = 0,05$

c) $\frac{196}{140} = \frac{7}{5} = 1,4$

50. Expresa como fracciones.

- a) 34,56 b) 2,3765 c) 0,023
- a) $\frac{3456}{100}$ b) $\frac{23765}{10000} = \frac{4753}{2000}$ c) $\frac{23}{1000}$

Números decimales

51. Clasifica estos números decimales.

- a) 1,256666... c) 1,256 e) 1,252525...
b) 1,25656565... d) 1,2222 f) 1,256256256...
a) Periódico mixto. c) Exacto. e) Periódico puro.
b) Periódico mixto. d) Periódico puro. f) Periódico puro.

52. Encuentra la fracción irreducible equivalente a estos números decimales:

- a) 0,2 b) 0,08 c) 1,2 d) 2,204 e) 1,86
a) $\frac{2}{10}$ b) $\frac{8}{100}$ c) $\frac{12}{10}$ d) $\frac{2\ 204}{1000} = \frac{551}{250}$ e) $\frac{186}{100}$ $\frac{93}{50}$

53. Escribe en tu cuaderno las cinco siguientes cifras del número 3,11223344... ¿Qué tipo de número decimal es?

Las siguientes cinco cifras son 55667. Es un número decimal no exacto y no periódico.

54. Indica, sin realizar la división, si los números decimales que expresan estas fracciones son exactos:

$$\frac{5}{9}, \frac{14}{20}, \frac{18}{300}, \frac{35}{10}, \frac{7}{210}, \frac{9}{40}$$

Son exactos: $\frac{14}{20}, \frac{18}{300}, \frac{35}{10}$ y $\frac{9}{40}$

No son exactos: $\frac{5}{9}$ y $\frac{7}{210}$

ACTIVIDADES FINALES

55. Escribe estos números decimales.

- a) Ocho unidades, ciento cinco milésimas.
b) Nueve decenas, dos décimas.
c) Treinta y cinco unidades, dos centésimas.
d) Cuarenta y siete centésimas.
e) Tres centenas, una unidad, sesenta y cuatro centésimas.
f) Cuatro decenas, seis unidades, ocho milésimas.
- a) 8,105 b) 90,2 c) 35,02 d) 0,47 e) 31,64 f) 46,008

56. Escribe cómo se leen estos números decimales.

- a) 5,2 c) 9,762 e) 37,002
b) 43,17 d) 205,04 f) 6,308
- a) Cinco unidades y dos décimas.
b) Cuarenta y tres unidades y diecisiete centésimas.
c) Nueve unidades y setecientas sesenta y dos milésimas.
d) Doscientas cinco unidades y cuatro centésimas.
e) Treinta y siete unidades y dos milésimas.
f) Seis unidades y trescientas ocho milésimas.

57. Descompón en tu cuaderno en unidades los siguientes números decimales.

	Parte entera			Parte decimal		
	C	D	U	d	c	m
43,897		4	3	8	9	7
135,903	1	3	5	9	0	3
29,876		2	9	8	7	6

58. Descompón en sus órdenes de unidades.

- | | |
|-------------|-------------|
| a) 3,729 | d) 35,00256 |
| b) 54 709,1 | e) 158,039 |
| c) 0,0003 | f) 276,64 |
- a) 3U 7d 2c 9m
 b) 5DM 4M 7C 9U 1d (DM = decenas de millar, M = unidades de millar, C = centenas)
 c) 3dm (dm = diezmilésima)
 d) 3D 5U 2m 5dm 6cm (dm = diezmilésimas, cm = cienmilésimas)
 e) 1C 5D 8U 3c 9m
 f) 2C 7D 6U 6d 4c

59. Escribe los números decimales que corresponden en cada caso.

- | | | | |
|----------------------------|--------------------|----------|-------------|
| a) 7 C 1 D 4 U 3 d 2 c 5 m | c) 5 U 3 c 2 m | | |
| b) 8 D 4 d | d) 9 C 6 U 4 d 7 m | | |
| a) 714,325 | b) 80, 4 | c) 5,052 | d) 906, 407 |

60. ¿Cuántas milésimas tienen los siguientes números?

- | | | |
|----------|-----------|-----------|
| a) 4,835 | c) 0,002 | e) 75,4 |
| b) 1,38 | d) 46,9 | f) 63,51 |
| a) 4 835 | c) 2 | e) 75 400 |
| b) 1 380 | d) 46 900 | f) 63 510 |

61. Escribe el número que es cinco centésimas mayor que cada uno de los siguientes números.

- | | |
|---------|----------|
| a) 9,36 | c) 20,08 |
| b) 75,1 | d) 6,199 |

Hay que sumar a cada número 0,05.

- | | | | |
|---------|----------|----------|----------|
| a) 9,41 | b) 75,15 | c) 20,13 | d) 6,249 |
|---------|----------|----------|----------|

Números decimales

62. Escribe el número que es tres décimas y cuatro milésimas menor que cada uno de los siguientes números.

- a) 7,547 c) 16,042
b) 385,09 d) 2,67

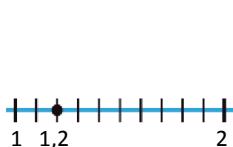
Hay que restar a cada número 0,304.

- a) 7,243 b) 384,786 c) 15,738 d) 2,366

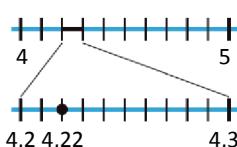
64. Representa en la recta numérica los siguientes números decimales.

- a) 1,2 c) 3,02
b) 4,22 d) 7,95

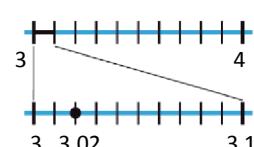
a)



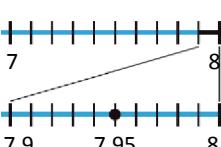
b)



c)



d)



65. Indica el número que está representado en cada caso.

- a)
b)
c)
d)

- a) 0,3 b) 2,57 c) 4,014 d) 3,7568

66. Ordena de menor a mayor:

3,76 3,7 3,67 3,677 3,767 3,77

$$3,67 < 3,677 < 3,7 < 3,76 < 3,767 < 3,77$$

67. Ordena de mayor a menor:

4,025 4,205 4,502 4,25 4,225 4,255

$$4,502 > 4,255 > 4,25 > 4,225 > 4,205 > 4,025$$

69. Encuentra tres números comprendidos entre:

- a) 9,652 y 9,658 d) 3,713 y 3,72
b) 1,2 y 1,5 e) 86,34 y 86,346
c) 4,045 y 4,05 f) 7,0983 y 7,099

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) $9,652 < 9,654 < 9,6567 < 9,657 < 9,658$
- b) $1,2 < 1,25 < 1,4 < 1,435 < 1,5$
- c) $4,045 < 4,047 < 4,0479 < 4,049 < 4,05$
- d) $3,713 < 3,7137 < 3,718 < 3,7192 < 3,72$
- e) $86,34 < 86,341 < 86,345 < 86,3452 < 86,346$
- f) $7,0983 < 7,0985 < 7,0988 < 7,09881 < 7,099$

70. Completa en tu cuaderno.

Número	Redondeo a las décimas	Redondeo a las centésimas	Redondeo a las milésimas
0,4291	0,4	0,43	0,429
5,7023	5,7	5,70	5,702
18,0999	18,1	18,10	18,100
0,8276	0,8	0,83	0,828
29,4305	29,4	29,43	29,431
9,0049	9,0	9,00	9,005

71. La aproximación del número decimal 4,6?3 es 4,7. ¿Cuál puede ser la cifra de las centésimas? ¿Qué tipo de aproximación se ha hecho?

La cifra puede ser: 5, 6, 7, 8, 9.

Se ha hecho una aproximación por redondeo a las décimas.

72. Sabiendo que la aproximación a las unidades del número decimal 3,?68 es 3, ¿qué números pueden ser la cifra de las décimas?

La cifra puede ser: 0, 1, 2, 3, 4.

73. Aproxima 4,083 por redondeo y por truncamiento a las décimas. Compara los resultados. ¿Qué observas?

Por redondeo a las décimas: 4,1

Por truncamiento a las décimas: 4,0

Se observa que el redondeo es mayor que el truncamiento. En este caso, al aproximar por redondeo se comete menor error que al hacerlo por truncamiento.

74. Realiza estas operaciones.

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|------------|
| a) $35,72 + 5,89$ | d) $92,015 - 7,327$ | |
| b) $7,92 - 4,03$ | e) $487,56 - 28,09$ | |
| c) $125,379 + 45,621$ | f) $68,568 + 345,765$ | |
| a) 41,61 | c) 171 | e) 459,47 |
| b) 3,89 | d) 84,688 | f) 414,333 |

Números decimales

75. Efectúa estas operaciones.

- | | | |
|-------------------|---------------------|------------|
| a) $4,65 + 78,2$ | d) $105,36 - 5,782$ | |
| b) $63,3 - 59,48$ | e) $674,98 - 7,495$ | |
| c) $0,045 + 0,97$ | f) $9,834 + 65,4$ | |
| a) 82,85 | c) 1,015 | e) 667,485 |
| b) 3,82 | d) 99,578 | f) 75,234 |

76. Completa, en tu cuaderno, con el número que falta.

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------|
| a) $12,4 + \square = 15,65$ | d) $183,96 - \square = 99,743$ | |
| b) $86,049 - \square = 57,3$ | e) $\square - 56,34 = 26,901$ | |
| c) $\square + 0,175 = 3,04$ | f) $\square + 7,008 = 35,6$ | |
| a) 3,25 | c) 2,865 | e) 83,241 |
| b) 28,749 | d) 84,217 | f) 28,592 |

77. Calcula estas multiplicaciones por la unidad seguida de ceros.

- | | | | |
|--------------------------|-------------------------|------------|-----------|
| a) $5,3 \cdot 100$ | e) $0,01 \cdot 1000000$ | | |
| b) $0,47 \cdot 1000$ | f) $20,05 \cdot 10000$ | | |
| c) $15,265 \cdot 10$ | g) $86,732 \cdot 1000$ | | |
| d) $3,9256 \cdot 100000$ | h) $4,0004 \cdot 100$ | | |
| a) 530 | c) 152,65 | e) 10 000 | g) 86 732 |
| b) 470 | d) 392 560 | f) 200 500 | h) 400,04 |

78. Halla estas divisiones.

- | | | | |
|-------------------|------------------------|-------------|--------------|
| a) $52,18 : 100$ | e) $923,13 : 10000$ | | |
| b) $3,475 : 1000$ | f) $648,8 : 10$ | | |
| c) $0,01 : 10$ | g) $37559,26 : 100000$ | | |
| d) $792,5 : 100$ | h) $1,584 : 1000$ | | |
| a) 0,5218 | c) 0,001 | e) 0,092313 | g) 0,3755926 |
| b) 0,003475 | d) 7,925 | f) 64,88 | h) 0,001584 |

79. Realiza estas operaciones.

- | | | | |
|-----------------------|------------------------|---------------|------------|
| a) $48,57 \cdot 0,1$ | e) $654,789 : 0,00001$ | | |
| b) $3,857 : 0,0001$ | f) $76,953 \cdot 0,01$ | | |
| c) $0,03 \cdot 0,001$ | g) $0,4825 : 0,000001$ | | |
| d) $93,153 : 0,01$ | h) $347,2 \cdot 0,001$ | | |
| a) 4,857 | c) 0,00003 | e) 65 478 900 | g) 482 500 |
| b) 38 570 | d) 9 315,3 | f) 0,76953 | h) 0,3472 |

80. Calcula estas multiplicaciones.

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|------------|
| a) $5,37 \cdot 2,4$ | d) $2,26 \cdot 0,21$ | |
| b) $0,792 \cdot 10,3$ | e) $1,324 \cdot 5,3$ | |
| c) $56,5 \cdot 1,23$ | f) $8,097 \cdot 0,04$ | |
| a) 12,888 | c) 69,495 | e) 7,0172 |
| b) 8,1576 | d) 0,4746 | f) 0,32388 |

81. Efectúa estas divisiones entre números decimales.

- | | | |
|------------------|------------------|-------------|
| a) $345,8 : 6$ | d) $45,3425 : 8$ | |
| b) $65,98 : 3$ | e) $2,8632 : 2$ | |
| c) $124,943 : 4$ | f) $54,6654 : 5$ | |
| a) 57,63 | c) 31,23575 | e) 1,4316 |
| b) 21,993 | d) 5,6678125 | f) 10,93308 |

82. Halla el cociente con un decimal de estas divisiones.

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $4456 : 1,2$ | d) $29235 : 5,92$ | |
| b) $2678 : 4,83$ | e) $4368 : 2,32$ | |
| c) $623 : 6,1$ | f) $9845 : 3,75$ | |
| a) 3 713,3 (resto: 0,04) | c) 102,1 (resto: 0,19) | e) 1 882,7 (resto: 0,136) |
| b) 554,4 (resto: 0,248) | d) 4 938,3 (resto: 0,264) | f) 2 625,3 (resto: 0,125) |

83. Calcula el cociente con dos decimales de estas divisiones.

- | | | |
|--------------------|------------------------------|-------------------------|
| a) $533,4 : 2,1$ | d) $7308,20866 : 2,561$ | |
| b) $370,95 : 0,5$ | e) $3,78 : 0,054$ | |
| c) $1354,32 : 1,8$ | f) $355,992 : 56,98$ | |
| a) 254,00 | c) 752,40 | e) 70,00 |
| b) 741,90 | d) 2 853,65 (resto: 0,01101) | f) 6,24 (resto: 0,4368) |

84. Calcula el resultado de estas operaciones y aproxima por redondeo y truncamiento a las décimas el número que hayas obtenido.

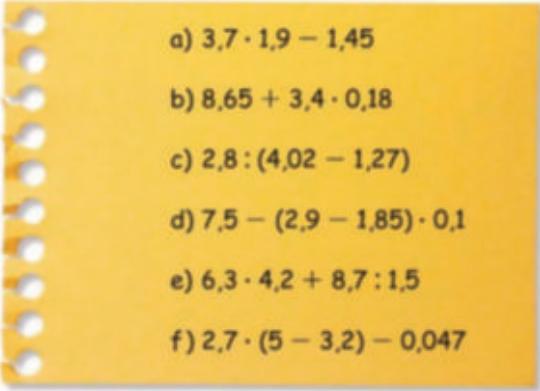
- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| a) $45,72 + 3,9$ | c) $3,2 \cdot 4,7$ |
| b) $18,65 - 1,9245$ | d) $6,159 : 3,2$ |
| a) 49,62 | c) 15,04 |
| Redondeo a las décimas: 49,6 | Redondeo a las décimas: 15 |
| Truncamiento a las décimas: 49,6 | Truncamiento a las décimas: 15 |
| b) 16,7255 | d) 1,9246875 |
| Redondeo a las décimas: 16,7 | Redondeo a las décimas: 1,9 |
| Truncamiento a las décimas: 16,7 | Truncamiento a las décimas: 1,9 |

Números decimales

85. Opera, respetando la jerarquía de las operaciones.

- | | |
|--------------------------------------|---|
| a) $134,5 : 2,5 + 12,125$ | e) $12,3 : 8,2 \cdot 2,5 - 3,29$ |
| b) $2,75 \cdot (4,605 - 3,5) + 1,37$ | f) $9,6 \cdot 2,4 - 8,5 \cdot 1,27$ |
| c) $5,7 + 6,225 : 7,5 - 0,39$ | g) $0,05 + (11,3 - 3,2) : 0,09$ |
| d) $(4,987 + 0,875) : 1,5 + 3,094$ | h) $44,4 : 0,002 \cdot 1,7 - 2,9 \cdot 3,1$ |
-
- | | |
|---|---|
| a) $53,8 + 12,125 = 65,925$ | e) $1,5 \cdot 2,5 - 3,29 = 3,75 - 3,29 = 0,46$ |
| b) $2,75 \cdot 1,105 + 1,37 = 3,03875 + 1,37 = 4,40875$ | f) $23,04 - 10,795 = 12,245$ |
| c) $5,7 + 0,83 - 0,39 = 6,53 - 0,39 = 6,14$ | g) $0,05 + 8,1 : 0,09 = 0,05 + 90 = 90,05$ |
| d) $5,862 : 1,5 + 3,094 = 3,908 + 3,094 = 7,002$ | h) $22\,200 \cdot 1,7 - 8,99 = 37\,750 \cdot 8,99 = 37\,731,01$ |

86. Determina el resultado de estas operaciones.

- 
- a) $3,7 \cdot 1,9 - 1,45$
 - b) $8,65 + 3,4 \cdot 0,18$
 - c) $2,8 : (4,02 - 1,27)$
 - d) $7,5 - (2,9 - 1,85) \cdot 0,1$
 - e) $6,3 \cdot 4,2 + 8,7 : 1,5$
 - f) $2,7 \cdot (5 - 3,2) - 0,047$

- | | |
|------------------------------------|---|
| a) $7,03 - 1,45 = 5,58$ | d) $7,5 - 1,05 \cdot 0,1 = 7,5 - 0,105 = 7,395$ |
| b) $8,65 + 0,612 = 9,262$ | e) $26,46 + 5,8 = 32,26$ |
| c) $2,8 : 2,75 = 1,0\overline{18}$ | f) $2,7 \cdot 1,8 - 0,047 = 4,86 - 0,047 = 4,813$ |

87. Efectúa los cálculos.

- | | |
|---|--|
| a) $(6,78 - 10,03 : 2,36) \cdot 0,5 + 3,1$ | d) $(15,9 - 4,2 \cdot 3) \cdot 2,6 - (6,3 : 3 - 1,05)$ |
| b) $17,5 - (8,43 \cdot 0,4 + 2,8) : 4$ | e) $20,65 + (3,7 \cdot 4 - 1,8 : 4) \cdot 5,2$ |
| c) $4,6 \cdot (12,8 - 5,08) - 3,47 \cdot 6$ | f) $146,52 : (3,5 \cdot 6,8 - 4) - 6,09$ |
-
- | | |
|---|---|
| a) $(6,78 - 4,25) \cdot 0,5 + 3,1 = 2,53 \cdot 0,5 + 3,1 = 1,265 + 3,1 = 4,365$ | d) $(15,9 - 4,2 \cdot 3) \cdot 2,6 - (6,3 : 3 - 1,05) = (15,9 - 12,6) \cdot 2,6 - (2,1 - 1,05) = 3,3 \cdot 2,6 - 1,05 = 8,58 - 1,05 = 7,53$ |
| b) $17,5 - (3,372 + 2,8) : 4 = 17,5 - 6,172 : 4 = 17,5 - 1,543 = 15,957$ | e) $20,65 + (14,8 - 0,45) \cdot 5,2 = 20,65 + 14,35 \cdot 5,2 = 20,65 + 74,62 = 95,27$ |
| c) $4,6 \cdot 7,72 - 20,82 = 35,512 - 20,82 = 14,692$ | f) $146,52 : (23,8 - 4) - 6,09 = 146,52 : 19,8 - 6,09 = 7,4 - 6,09 = 1,31$ |

88. Clasifica los siguientes números decimales e indica las cifras que forman su período en el caso de que lo tengan.

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------|
| a) 2,95 | h) 3,7555... |
| b) 2,959595... | i) 35,557557... |
| c) 2,9999... | j) 35,00777... |
| d) 2,9555... | k) 3,775775... |
| e) 2,959 | l) 357,75775577555... |
| f) 2,99559955... | m) 37,755755755... |
| g) 2,29595... | n) 337,357357357... |
| a) Exacto | |
| b) Periódico puro con período: 95 | |
| c) Periódico puro con período: 9 | |
| d) Periódico mixto con período: 5 | |
| e) Exacto | |
| f) Periódico puro con período: 9955 | |
| g) Periódico mixto con período: 95 | |
| h) Periódico mixto con período: 5 | |
| i) Periódico puro con período: 557 | |
| j) Periódico mixto con período: 7 | |
| k) Periódico puro con período: 775 | |
| l) No exacto ni periódico. | |
| m) Periódico puro con período: 755 | |
| n) Periódico puro con período: 357 | |

89. Escribe el número decimal que se obtiene a partir de las siguientes fracciones y clasificalo.

a) $\frac{7}{10}$	c) $\frac{1}{9}$	e) $\frac{7}{9}$	g) $\frac{153}{100}$
b) $\frac{14}{3}$	d) $\frac{8}{21}$	f) $\frac{16}{9}$	h) $\frac{4}{11}$

- | | |
|--|---|
| a) 0,7 es exacto. | e) $0,\overline{7}$ es periódico puro. |
| b) $4,\overline{6}$ es periódico puro. | f) $1,\overline{7}$ es periódico puro. |
| c) $0,\overline{1}$ es periódico puro. | g) 1,53 es exacto. |
| d) 0,380952 es periódico puro. | h) $0,3\overline{6}$ es periódico puro. |

90. Encuentra dos fracciones equivalentes a los siguientes números decimales.

a) 4,75	b) 5,268	c) 0,02	d) 10,004
a) $\frac{475}{100}$	$\frac{19}{4}$	c) $\frac{2}{100}$	$\frac{1}{50}$
b) $\frac{5\,628}{1000} = \frac{1\,407}{250}$	d) $\frac{10\,004}{1000} = \frac{2\,501}{250}$		

Números decimales

91. Escribe en forma fraccionaria y simplifica siempre que sea posible:

- a) Cinco décimas.
- b) Cuarenta y siete centésimas.
- c) Dos milésimas.
- d) Nueve centésimas.
- e) Veinticinco milésimas.
- f) Ochocientas veintisiete diezmilésimas.
- g) Treinta y seis décimas.
- h) Novecientas cuarenta y ocho centésimas.

a) $0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

e) $0,025 = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}$

b) $0,47 = \frac{47}{100}$

f) $0,0827 = \frac{527}{10\,000}$

c) $0,002 = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}$

g) $3,6 = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$

d) $0,09 = \frac{9}{100}$

h) $9,48 = \frac{948}{100} = \frac{237}{25}$

92. Escribe números decimales cuyas características sean las siguientes.

- a) Parte entera 26 y periodo 5.
 - b) Parte entera 8 y periodo 96.
 - c) Parte entera 5 y parte decimal 209.
 - d) Parte entera 0, parte decimal no periódica 4 y periodo 387.
 - e) Parte entera 1, parte decimal no periódica 0 y periodo 3.
- a) 26,55555... b) 8,96969696... c) 5,209 d) 0,4387387387... e) 1,033333...

93. Indica cuáles de estos números decimales son no exactos y no periódicos.

- a) 5,232233222333...
 - b) 5,223334444...
 - c) 5,2345345345...
 - d) 5,232425
 - e) 5,223223223...
 - f) 0,10120123...
- a) No exacto y no periódico.
 - b) No exacto y no periódico.
 - c) Periódico mixto.
 - d) Exacto.
 - e) Periódico puro.
 - f) No exacto y no periódico.

94. ¿Cuánto dinero hay en una cartera que contiene 3 monedas de 2 €, 6 monedas de 50 céntimos, 4 monedas de 20 céntimos, 6 monedas de 10 céntimos, 13 monedas de 5 céntimos y 4 monedas de 2 céntimos?

$$3 \cdot 2 + 6 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,1 + 13 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,02 = 6 + 3 + 0,8 + 0,6 + 0,65 + 0,08 = 11,13 \text{ €}$$

95. ¿Cuánto debe pagar Elena por 5 botes de mermelada que cuestan a 1,35 € cada uno y 3 bolsas de patatas de 3,49 € la bolsa? ¿Cuánto le devolverán si paga con un billete de 20 €?

Debe pagar: $5 \cdot 1,35 + 3 \cdot 3,49 = 6,75 + 10,47 = 17,22 \text{ €}$

Le devuelven: $20 - 17,22 = 2,78 \text{ €}$

- 96.** Esta tabla muestra la cantidad de grasas por cada 100 g de cierto producto según varias marcas comerciales.

	Marca A	Marca B	Marca C	Marca D	Marca E
Grasas	0,12 g	0,125 g	0,1 g	0,25 g	0,122 g

- a) ¿Qué marca aporta menos grasas?
- b) ¿Qué diferencia hay entre la marca que tiene más grasa y la que tiene menos?
- c) ¿Qué cantidad de grasas habrá en un kilo de cada marca?
 - a) Marca C.
 - b) $0,25 - 0,1 = 0,15$
 - c) $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$. Las cantidades son para 100 gramos, si ahora consideramos 1000 g, habrá que multiplicar por 10.
 Marca A: 1,2 g grasa/kg producto.
 Marca B: 1,25 g grasa/kg producto.
 Marca C: 1 g grasa/kg producto.
 Marca D: 2,5 g grasa/kg producto.
 Marca E: 1,22 g grasa/kg producto.

- 97.** Un manzano ha producido este año 59,78 kg de manzanas y el año anterior, 47,9 kg. Si el kilo de manzanas se vende a 2,3 €, ¿cuánto dinero se ha ganado más este año que el anterior?

Este año: $59,78 \cdot 2,3 = 137,49$ €.

Año anterior: $47,9 \cdot 2,3 = 110,17$ €.

$137,49 - 110,17 = 27,32$ € se ha ganado más este año que el anterior.

- 98.** La semana pasada Julia compró 2 kg y 300 g de carne a 13,75 €/kg y esta semana ha comprado 2,5 kg por 10,95 €/kg. ¿Qué semana ha gastado más? ¿Cuánto más?

Semana pasada: $2\text{kg y }300\text{g} = 2,3\text{kg} \rightarrow 2,3 \cdot 13,75 = 31,63$ €.

Esta semana: $2,5 \cdot 10,95 = 27,38$ €.

$31,63 - 27,38 = 4,25$ €

La semana pasado gastó 4,25€ más que esta.

- 99.** ¿Cuántas botellas de tres cuartos de litro se necesitan para envasar 4500 € de vino? ¿Se podría envasar todo ese vino en botellas de un tercio de litro?

$3/4$ de litro = 0,75 litros

Se necesitarán: $4500 : 0,75 = 6000$ botellas.

$4500 : \frac{1}{3} = 4500 \cdot 3 = 13500$ botellas para envasar el vino en botellas de $1/3$ de litro.

Números decimales

100. Sabiendo que una pulgada equivale a 2,54 cm y un pie a 30,48 cm, responde:

a) ¿Cuántos metros son 10 pies y 86 pulgadas?

b) ¿Cuántas pulgadas son 38 pies?

a) 10 pies → $30,48 \cdot 10 = 304,8$ cm = 3,048 metros

86 pulgadas → $2,54 \cdot 86 = 218,44$ cm = 2,1844 metros

b) 38 pies = $38 \cdot 30,48 = 1\,158,24$ cm → $1\,158,24 : 2,54 = 456$ pulgadas

101 Se colocan 2000 hojas de papel en formato DIN A4 ($21 \times 29,7$ cm) de forma que queden juntos los lados más largos. ¿Cuáles son las dimensiones de la figura obtenida?

Ancho: $21 \cdot 2\,000 = 42\,000$ cm. Largo: 29,7 cm.

Dimensiones: $42\,000 \times 29,7$ cm.

102. Mi madre quiere hacer 4,5 kg de compota de manzana. Para cada kilo de compota se necesitan 0,85 kg de manzanas que cuestan a 1,24 € el kilo.

a) ¿Qué cantidad de manzanas necesita?

b) ¿Cuánto dinero se gastará?

c) ¿Cuál es el coste del kilo de compota?

a) $4,5 \cdot 0,85 = 3,825$ kg de manzana.

b) $3,825 \cdot 1,24 = 4,74$ €.

c) $4,74 : 4,5 = 1,05$ €/kg de compota.

103. Alfonso ha llenado el depósito de gasolina de su coche con 56 ℓ. Si el litro de gasolina está a 1,426 € y le han devuelto 20,14 €, ¿con cuánto dinero ha pagado?

$56 \cdot 1,426 = 79,86$ € ha costado la gasolina.

$79,86 + 20,14 = 100$ € es con lo que ha pagado.

104. Unos zapatos cuestan 59,95 €. El vendedor ha decidido rebajarlos la quinta parte de su precio. ¿Cuánto cuestan ahora?

Si rebaja $\frac{1}{5}$, cuestan ahora $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ de su precio anterior: $\frac{4}{5}$ de 59,95 = $\frac{4 \cdot 59,95}{5} = 47,96$ €

105. El sueldo de Dario es de 1986,4 € mensuales. De este dinero dedica dos terceras partes a pagar la hipoteca de su casa y el resto, a gastos de la casa y al ahorro. ¿Cuánto dinero le queda tras pagar la hipoteca?

Si dedica $\frac{2}{3}$ de su sueldo a pagar la hipoteca, al resto le dedica $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ de 1986,4 = $\frac{1986,4}{3} = 662,13$

DEBES SABER HACER

1. Escribe el número que es 7 centésimas menor.

- a) 3,11 b) 6,305 c) 1,7 d) 15
 a) 3,04 b) 6,235 c) 1,63 d) 14,93

2. Efectúa las operaciones y aproxima por truncamiento y por redondeo a las milésimas los resultados.

- a) $6,92 \cdot 5,64 + 2,308$ c) $86,4293 - 32,997 : 5,1$
 b) $(10,356 - 8,941) : 3$ d) $(6,98 + 1,99) \cdot (2,1 - 1,2)$
 a) $39,0288 + 2,308 = 41,3368$

Redondeo a las milésimas: 41,337

Truncamiento a las milésimas: 41,336

b) $1,415 : 3 = 0,471\bar{6}$

Redondeo a las milésimas: 0,472

Truncamiento a las milésimas: 0,471

c) $86,4293 - 6,47 = 79,9593$

Redondeo a las milésimas: 79,959

Truncamiento a las milésimas: 79,959

d) $8,97 \cdot 0,9 = 8,073$

El resultado ya está en milésimas, no hace falta truncarlo o redondearlo.

3. Calcula:

- a) $5385,4 \cdot 0,001 + 68,402 : 100$ b) $7,3629 : 0,0001 - 6,5443 \cdot 10000$
 a) $5,3854 + 0,68402 = 6,06942$ b) $73\,629 - 65\,443 = 8\,186$

4. Andrea corta una tela de 45,6 m en trozos de 0,95 m. ¿Cuántos trozos obtiene?

$45,6 : 0,95 = 48$ trozos

5. Expresa estos números decimales en forma de fracción irreducible: 4,6; 8,95; 0,328; 156,4

$$4,6 = \frac{46}{10} = \frac{23}{5} \quad 8,95 = \frac{895}{100} = \frac{179}{20} \quad 0,328 = \frac{328}{1000} = \frac{41}{125} \quad 156,4 = \frac{1564}{10} = \frac{782}{5}$$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

106. En muchas ocasiones, el ganador de una prueba deportiva se decide por pequeñas diferencias de tiempo. Por ejemplo en natación, en las Olimpiadas de Pekín de 2008, Michael Phelps ganó por una centésima de segundo la medalla de oro de los 100 metros mariposa. Es decir, la diferencia de tiempo que tuvo con el segundo clasificado fue menor que un parpadeo o un chasquido de dedos.

Aquí tienes una tabla con los récords de las distintas disciplinas de natación en 100 m.

Prueba	Nadador	Récord	Nacionalidad	Fecha	Evento	Lugar
100 libre	Cesar Cielo Filho	46,91 s	Brasil	30/07/2009	Cto. Mundo	Roma, Italia
100 mariposa	Michael Phelps	49,82 s	USA	01/08/2009	Cto. Mundo	Roma, Italia
100 espalda	Cameron van der Burgh	58,46 s	Sudáfrica	29/07/2012	JJ.OO.	Londres, Gran Bretaña
100 braza	Brenton Rickard	58,58 s	Australia	27/07/2009	Cto. Mundo	Roma, Italia

- a) ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre la disciplina más rápida y la más lenta?
- b) Una de las pruebas de los campeonatos de natación es el 400 m estilos. En esta prueba el nadador tiene que nadar 100 m en cada uno de los diferentes estilos (mariposa, espalda, braza y libre). ¿Cuánto tardará un nadador que emplea en cada 100 m los tiempos del récord de cada disciplina?
- a) Disciplina más rápida: 46,91 s Disciplina más lenta: 58,58 s
 $58,58 - 46,91 = 11,67$ s
- b) $46,91 + 49,82 + 58,46 + 58,58 = 213,77$ s

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

107. Considera los números 3,1 y 3,2. ¿Podrías escribir 100 números comprendidos entre ambos? ¿Y 1000 números? ¿Y 1 000 000? ¿Cómo lo harías?

Entre dos números decimales existen infinitos números. Para encontrar 100 números comprendidos entre 3,1 y 3,2, se divide la amplitud del intervalo ($3,2 - 3,1 = 0,1$) en 100 partes ($0,1 : 100 = 0,001$).

El número obtenido (0,001) se suma sucesivamente al extremo inferior del intervalo, en este caso 3,1.

$$3,1 + 0,001 = 3,101$$

$$3,101 + 0,001 = 3,102$$

$$3,102 + 0,001 = 3,103\dots$$

El proceso es análogo para encontrar 1 000 o 1 000 000 números decimales comprendidos entre dos números dados.

108. Si en tu calculadora no pudieras usar la tecla para introducir los números decimales, ¿cómo harías para que apareciesen los siguientes números en la pantalla?

- a) 0,9 b) 2,02 c) 0,007

Escribiríamos en la calculadora:

a) $\frac{9}{10}$

b) $\frac{202}{100}$

c) $\frac{7}{1000}$

- 109.** Si no pudieras usar la tecla del número 0, ¿cómo harías para que apareciesen los números 0,1; 1,04; 100,3 y 30,07 en la pantalla?

Respuesta abierta, por ejemplo:

$$0,1 \rightarrow 3,2 - 3,1$$

$$100,3 \rightarrow 37,14 + 63,16$$

$$1,04 \rightarrow \frac{104}{100} = \frac{52}{50} = \frac{26}{25}$$

$$30,07 \rightarrow 18,42 + 11,65$$

- 110.** ¿Qué fracción de denominador 11322 equivale a 0,2?

$$0,2 = \frac{2}{9} = \frac{2516}{11322}$$

- 111.** Efectúa la suma $\frac{5}{9} + \frac{7}{15}$ y encuentra el número decimal que equivale a ella. Despues, resuelve esa misma suma con los números decimales que equivalen a cada una de las fracciones. Realiza el proceso tomando uno, dos, tres y cuatro cifras decimales, y compara los resultados.

$$\frac{5}{9}, \frac{7}{15}, \frac{25}{45}, \frac{21}{45}, \frac{46}{45}, 1,02\dot{1}$$

Con un decimal: $0,6 + 0,5 = 1,1$

Con dos decimales: $0,56 + 0,47 = 1,03$

Con tres decimales: $0,556 + 0,467 = 1,023$

Con cuatro decimales: $0,5556 + 0,4667 = 1,0227$

Cuantos más decimales se cojan, más exacto nos da el resultado.

- 112.** Observa los siguientes números decimales. Indica cómo se forman e indica la cifra que ocupa el lugar 100 de su parte decimal.

a) 2,34343434... b) 5,2034034034034...

a) La parte entera es 2 y el período es 34. Por ser el período de 2 cifras, la cifra que ocupa el lugar 100 es la segunda del período, ya que $100 : 2$ da resto 0. La cifra es 4.

b) La parte entera es 5, la parte no periódica es 2 y el período es 034. Al estar una cifra ocupada por la parte decimal no periódica quedan 99 cifras para llenar con el período. Como el período tiene 3 cifras y $99 : 3$ da resto 0, la cifra que ocupa el lugar 100 es la última del período. La cifra es 4.

PRUEBAS PISA

- 113.** En casa de Samuel toda la familia desayuna un vaso de leche. Como el consumo de leche en casa es grande, decide analizar todas las ofertas de leche que le ofrecen los supermercados cercanos.

Oferta 1
Llévate 3 y paga 2
Leche 1 l: 1,11 €

Oferta 2
Tenemos el mejor precio
Leche 1 l: 0,73 €



Oferta 3
Segunda unidad a mitad de precio
Leche 1 l: 0,96 €

Oferta 4
El mejor precio en botellas de 1,5 l
Leche 1,5 l: 1,80 €

a) Para realizar una compra de 6 l, ¿cuál es la mejor oferta?

b) ¿Y si solo quieren comprar 1 l?

a) Oferta 1: Si lleva 6 litros, paga 4 litros → $4 \cdot 1,11 = 4,44$ €

Oferta 2: $6 \cdot 0,73 = 4,38$ €

Oferta 3: $3 \cdot 0,96 + 3 \cdot (0,96 : 2) = 2,88 + 1,44 = 4,32$ €

Oferta 4: $6 : 1,5 = 4 \rightarrow 1,8 \cdot 4 = 7,2$ €

La mejor oferta es la Oferta 3.

b) La mejor oferta es la Oferta 2.

- 114.** Mei-Ling, ciudadana de Singapur, estaba realizando los preparativos para ir a Sudáfrica como estudiante de intercambio durante 3 meses. Necesitaba cambiar algunos dólares de Singapur (SGD) en rands sudafricanos (ZAR).

Mei-Ling se enteró de que el tipo de cambio entre el dólar de Singapur y el rand sudafricano era de 1 SGD = 4,2 ZAR.



a) Mei-Ling cambió 3000 dólares de Singapur en rands sudafricanos con este valor de cambio. ¿Cuánto dinero recibió Mei-Ling en rands sudafricanos?

b) Al volver a Singapur, tres meses después, a Mei-Ling le quedaban 3900 ZAR. Los cambió en dólares de Singapur, dándose cuenta de que el tipo de cambio había variado a 1 SGD = 4,0 ZAR. ¿Cuánto dinero recibió en dólares de Singapur?

(Prueba PISA 2003)

a) $3\,000 \cdot 4,2 = 12\,600$ ZAR

b) Si 1 SGD = 4 ZAR → 1 ZAR = $1/4$ SGD = 0,25 SGD → $3\,900 \cdot 0,25 = 975$ SGD

Álgebra

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Realiza las siguientes operaciones.

a) $5 \cdot (12 + 6)$ b) $4 \cdot (16 - 4)$

a) $5 \cdot 12 + 5 \cdot 6 = 60 + 30 = 90$ b) $4 \cdot 16 - 4 \cdot 4 = 64 - 16 = 48$

2. Expresa estos enunciados mediante expresiones algebraicas.

a) A un número le sumamos 10.

b) El cuadrado de un número menos 2 unidades.

a) m.c.m. (4, 8) = 8

c) m.c.m. (9, 21) = 63

e) m.c.m. (24, 96) = 96

b) m.c.m. (6, 18) = 18

d) m.c.m. (7, 15) = 105

f) m.c.m. (32, 64) = 64

3. Determina el mínimo común múltiplo de los siguientes números.

a) 5, 15 y 65

b) 30, 42 y 94

c) 28, 66 y 72

a) m.c.m. (5, 15, 65) = 195

b) m.c.m. (30, 42, 94) = 9 870

c) m.c.m. (28, 66, 72) = 5 544

VIDA COTIDIANA

Durante la Segunda Guerra Mundial, los alemanes inventaron una máquina llamada Enigma que les permitía enviar mensajes secretos.

Enigma sustituía unas letras por otras, mediante una serie de cilindros, que al girar de cierta manera cambiaban la letra de entrada por otra de salida.

- Si la máquina tuviera un solo rotor que cambiara las letras del siguiente modo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	E	D	H	K	T	M	I	P	O	A	Z	R	S	X	C	U	N	F	L	G	Q	W	Y	V	J

¿cómo se escribiría la palabra ÁLGEBRA?

BZMKENB

RESUELVE EL RETO

¿Has comido todo?

ż T

Parte

Álgebra

A, B y C son números del 0 al 9. Calcula el valor de cada letra para que se cumpla:

$$AB \cdot B = ACA$$

Suponemos que las cifras A, B y C son distintas entre sí. Entonces:

Si $B = 0 \rightarrow ACA = 0$, que no es un número de tres cifras.

A debe ser la última cifra de un cuadrado perfecto. Así, A puede ser 1, 4, 5, 6 o 9.

Si $A = 1 \rightarrow B = 9 \rightarrow 19 \cdot 9 = 171 \rightarrow C = 7$.

Si $A = 4 \rightarrow B = 2 \rightarrow 42 \cdot 2 = 84$, que no es un número de tres cifras.

$\rightarrow B = 8 \rightarrow 48 \cdot 8 = 384 \rightarrow$ No válida esta posibilidad.

Si $A = 5 \rightarrow$ No existe valor de B posible.

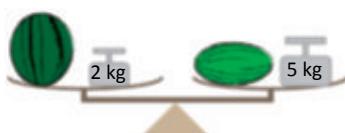
Si $A = 6 \rightarrow B = 4 \rightarrow 64 \cdot 4 = 256 \rightarrow$ No válida esta posibilidad.

Si $A = 9 \rightarrow B = 3 \rightarrow 93 \cdot 3 = 279 \rightarrow$ No válida esta posibilidad.

$\rightarrow B = 7 \rightarrow 97 \cdot 7 = 679 \rightarrow$ No válida esta posibilidad.

Por tanto, $A = 1, B = 9$ y $C = 7$

Observa esta balanza que está en equilibrio.



¿Cuánto pesa más la sandía que el melón?

Pesa 3 kilos más.

ACTIVIDADES

1. Escribe la expresión algebraica correspondiente a cada enunciado.

- La tercera parte de un número, menos 2.
- El triple de un número, más la mitad de otro número.
- El doble de la diferencia de dos números.

a) $\frac{x}{3} - 2$ b) $3x + \frac{y}{2}$ c) $2 \cdot (x - y)$

2. Expresa estos enunciados mediante expresiones algebraicas.

- A un número le sumamos 10.
 - El cuadrado de un número menos 2 unidades.
- a) $x + 10$ b) $x^2 - 2$

3. ¿Cuántas ruedas tienen en total x coches?

Tienen en total $4x$ ruedas.

4. Calcula el valor numérico de estas expresiones algebraicas para $x = -2$.

a) $4 \cdot x - 5$ d) $3 \cdot x + \frac{x}{2}$

b) $\frac{x}{2} + 9$ e) $\frac{5 \cdot x + 19}{3}$

c) $5 \cdot (x - 8)$ f) $x^2 + 7$

a) $4 \cdot (-2) - 5 = -8 - 5 = -13$

b) $\frac{-2}{2} + 9 = -1 + 9 = 8$

c) $5 \cdot (-2 - 8) = 5 \cdot (-10) = -50$

d) $3 \cdot (-2) + \frac{-2}{2} = -6 - 1 = -7$

e) $\frac{5 \cdot -2 - 19}{3} = \frac{-10 + 19}{3} = 3$

f) $(-2)^2 + 7 = 4 + 7 = 11$

5. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores indicados.

a) $x + 3y$ para $x = 7, y = -3$

f) $4 \cdot y \cdot \left(\frac{x}{3} - 7\right)$ para $x = -12, y = 10$

b) $3 \cdot x - 2 \cdot y$ para $x = -1, y = 9$

g) $x^2 + y$ para $x = -1, y = -6$

c) $\frac{x - 2 \cdot y}{4}$ para $x = 10, y = 0$

h) $(x + y)^2$ para $x = 5, y = 3$

d) $\frac{2 \cdot x - 5 \cdot y}{4}$ para $x = -4, y = 6$

i) $x^2 - 2x + y^3$ para $x = -1, y = 1$

e) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3}$ para $x = 0, y = -9$

j) $\frac{(x - 2) \cdot (7 - y)}{5}$ para $x = 7, y = 2$

a) $7 + 3 \cdot (-3) = 7 - 9 = -2$

f) $4 \cdot 10 \cdot \left| \frac{\frac{12}{3}}{7} \right| = 40 \cdot (-4 - 7) = 40 \cdot (-11) = -440$

b) $3 \cdot (-1) - 2 \cdot 9 = -3 - 18 = -21$

g) $(-1)^2 + (-6) = 1 - 6 = -5$

c) $\frac{10 - 2 \cdot 0}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

h) $(5 + 3)^2 = 8^2 = 64$

d) $\frac{2 \cdot -4 - 5 \cdot 6}{4} = \frac{-8 - 30}{4} = \frac{-19}{2}$

i) $(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1^3 = 1 + 2 + 1 = 4$

e) $\frac{0}{9} - \frac{9}{3} = 0 - 3 = -3$

j) $\frac{7 - 2 \cdot 7 - 2}{5} = \frac{5 \cdot 5}{5} = 5$

Álgebra

6. Escribe la expresión algebraica correspondiente y calcula su valor numérico para $x = 6$.

- a) El doble de un número más 2.
- b) El doble de un número más 1.
- c) La mitad de un número, menos 8.
- d) La mitad de un número más 3.
- e) El cuadrado de un número, menos 4.
- f) El cuadrado de un número más 2.
- g) El doble del cuadrado de un número.
- h) Un número más la mitad de ese mismo número más su tercera parte.
- i) La tercera parte del doble de un número.

a) $2x + 2$ Valor numérico en $x = 6$ → $2 \cdot 6 + 2 = 12 + 2 = 14$

b) $2(x + 1)$ Valor numérico en $x = 6$ → $2 \cdot (6 + 1) = 2 \cdot 7 = 14$

c) $\frac{x}{2} - 8$ Valor numérico en $x = 6$ → $\frac{6}{2} - 8 = 3 - 8 = -5$

d) $\frac{x - 3}{2}$ Valor numérico en $x = 6$ → $\frac{6 - 3}{2} = \frac{3}{2}$

e) $x^2 - 4$ Valor numérico en $x = 6$ → $6^2 - 4 = 36 - 4 = 32$

f) $(x + 2)^2$ Valor numérico en $x = 6$ → $(6 + 2)^2 = 8^2 = 64$

g) $2x^2$ Valor numérico en $x = 6$ → $2 \cdot 6^2 = 2 \cdot 36 = 72$

h) $x + \frac{x}{2} - \frac{x}{3}$ Valor numérico en $x = 6$ → $6 + \frac{6}{2} - \frac{6}{3} = 6 + 3 + 2 = 11$

i) $\frac{2x}{3}$ Valor numérico en $x = 6$ → $\frac{2 \cdot 6}{3} = 4$

7. ¿Para qué valor de x el valor numérico de la expresión $4 \cdot x + 8$ es 0? ¿Y para cuál es 4?

Para $x = -2 \rightarrow 4 \cdot (-2) + 8 = -8 + 8 = 0$

Para $x = -1 \rightarrow 4 \cdot (-1) + 8 = -4 + 8 = 4$

8. ¿Para qué valor de x el valor numérico de la expresión $2 \cdot x - 6$ es 0? ¿Y para cuál es 4?

Para $x = 3 \rightarrow 2 \cdot 3 - 6 = 6 - 6 = 0$

Para $x = 5 \rightarrow 2 \cdot 5 - 6 = 10 - 6 = 4$

9. Da el valor numérico de cada enunciado e indica la posible expresión algebraica y el valor de la letra que lo genera.

- a) Cinco más el triple de siete.
- b) Siete por ocho menos tres.
- c) La mitad de ocho, menos seis.

a) Valor numérico en $x = 7$ de la expresión $5 + 3 \cdot x$

b) Valor numérico en $x = 8$ de la expresión $7 \cdot x - 3$

c) Valor numérico en $x = 8$ de la expresión $\frac{x}{2} - 6$

10. Indica el coeficiente, la parte literal y el grado de estos monomios.

$$7x \quad -5x^4 \quad \frac{4}{3}x^3y^2 \quad xy^2 \quad -xy \quad \frac{x^2}{3}$$

	$7x$	$-5x^4$	$(4/3)x^3y^2$	xy^2	$-xy$	$x^2/3$
Coeficiente	7	-5	$4/3$	1	-1	$1/3$
Parte literal	x	x^4	x^3y^2	xy^2	xy	x^2
Grado	1	4	5	3	2	2

11. Escribe dos monomios semejantes a $-3x^2$.

$$7x^2 \text{ y } \frac{15}{2}x^2$$

12. ¿Son semejantes los monomios $2xy^2$ y $3y^2x$?

Sí, son semejantes, pues $xy^2 = y^2x$, ya que el producto tiene propiedad comutativa.

13. Realiza estas sumas y restas de monomios si es posible.

a) $7x + 8y$ d) $x - x^2$ g) $\frac{3}{2}x^3 - 2x$

b) $8x - 3x$ e) $x^2 + 2x$ h) $\frac{x}{2} - x$

c) $x - 6x$ f) $x^2 + x^2$ i) $3x^2 - \frac{x^2}{3}$

a) $7x + 8y$, no son semejantes. d) $x - x^2$, no son semejantes. g) $\frac{3}{2}x^3 - 2x$, no son semejantes.

b) $(8 - 3)x = 5x$ e) $x^2 - 2x$, no son semejantes. h) $(\frac{1}{2} - 1)x = -\frac{1}{2}x$

c) $(1 - 6)x = -5x$ f) $(1 + 1)x^2 = 2x^2$ i) $(3 - \frac{1}{3})x^2 = \frac{2}{3}x^2$

14. Halla el resultado de estas sumas y restas de monomios.

a) $6x + 8x - 3x + 7x$

b) $2y + 9y - 5y - 3y$

c) $4xy + 3xy - 7xy + 12xy$

d) $15x^2 + 6x^2 - 7x^2 + 8x^2$

e) $9x^2y - 3x^2y + 17x^2y + x^2y$

f) $10xyz - 2xyz + 5xyz - 3xyz$

a) $(6 + 8 - 3 + 7)x = 18x$ d) $(15 + 6 - 7 + 8)x^2 = 22x^2$

b) $(2 + 9 - 5 - 3)y = 3y$ e) $(9 - 3 + 17 + 1)x^2y = 24x^2y$

c) $(4 + 3 - 7 + 12)xy = 12xy$ f) $(10 - 2 + 5 - 3)xyz = 10xyz$

Álgebra

15. Resuelve estas operaciones.

a) $4xy + 7x - 3y + 2xy - x - y$

b) $3x^2 + 7x^2 - 6 + 7x - 8 - x + 5x^2$

c) $-8xy + 8x - 7xy - 3x - 2x + 5xy$

d) $y^2 + 4x^2 - 5y^2 + x^2 + 3x^2 + 2y^2$

a) $(4 + 2)xy + (7 - 1)x + (-3 - 1)y = 6xy + 6x - 4y$

b) $(3 + 7 + 5)x^2 + (7 - 1)x - 6 - 8 = 15x^2 + 6x - 14$

c) $(-8 - 7 + 5)xy + (8 - 3 - 2)x = -10xy + 3x$

d) $(1 - 5 + 2)y^2 + (4 + 1 + 3)x^2 = -2y^2 + 8x^2$

16. Identifica los monomios semejantes en cada caso, y súmalos.

a) $5x, -4y, 2x, 3x, 6y, -9x, 7y, xy$

b) $-x^2, 5x, x, 8x^2, -3x, 4x^3$

c) $5x^2, y^2, -6y^2, -3y, -4x^2$

d) $xy, -xy^2, -x^2y, x^2y^2, -4xy, 2xy^2, -7x^2y^2$

e) $-3x^3, 5x^2, 6x^2, 9x, 4x^3, x^3$

f) $2x^2, -5x, xy, 8x^2y, -3x, 9x^3$

a) $5x, 2x, 3x, -9x$ son semejantes, su suma es x .

$-4y, 6y, 7y$ son semejantes, su suma es $9y$.

xy no es semejante a ninguno.

b) $-x^2$ y $8x^2$ son semejantes, su suma es $7x^2$.

$5x, x, -3x$ son semejantes, su suma es $3x$.

$4x^3$ no es semejante a ninguno.

c) $5x^2, -4x^2$ son semejantes, su suma es x^2 .

$y^2, -6y^2$ son semejantes, su suma es $-5y^2$.

$-3y$ no es semejante a ninguno.

d) $xy, -4xy$ son semejantes, su suma es $-3xy$.

$-xy^2, 2xy^2$ son semejantes, su suma es xy^2 .

$-x^2y$ no es semejante a ninguno.

$x^2y^2, -7x^2y^2$ son semejantes, su suma es $-6x^2y^2$.

e) $-3x^3, 4x^3, x^3$ son semejantes, su suma es $2x^3$.

$5x^2, 6x^2$ son semejantes, su suma es $11x^2$.

$9x$ no es semejante a ninguno.

f) $2x^2, xy, 8x^2y, 9x^3$ no son semejantes a ninguno ni entre sí.

$-5x, -3x$ son semejantes, su suma es $-8x$.

17. Calcula el resultado de estas sumas y restas de monomios.

a) $4y + \frac{2}{5}y^2 + 9y + \frac{4}{5}y - y^2$

d) $y^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{7}y^2 + 9x^2 - 8x^2 - \frac{2}{7}y^2$

b) $-xy + \frac{3}{2}x - 7xy - x + \frac{5}{6}x + 5xy$

e) $\frac{3}{4}xy + 8x - \frac{5}{6}y + \frac{1}{2}xy - x + 3y$

c) $x^2 + \frac{5}{3}x^2 - 4x + 8x - \frac{1}{4}x - x + \frac{1}{6}x^2$

f) $\frac{1}{2}x + 2xz - 3x + 5xy - \frac{3}{4}xz - yz$

a) $\frac{69}{5}y - \frac{3}{5}y^2$

c) $\frac{17}{6}x^2 + 3x - \frac{1}{4}$

e) $\frac{5}{4}xy + 7x + \frac{13}{6}y$

b) $-3xy + \frac{4}{3}x$

d) $\frac{6}{7}y^2 + \frac{5}{4}x^2$

f) $\frac{5}{2}x + \frac{5}{4}xz + 5xy - yz$

18. ¿Se cumplen estas igualdades para $x = 3$?

a) $2x - 6 = 1$

d) $x + 1 = -2x - 1 + x$

b) $3x - 7 = 5 - x$

e) $2 \cdot (x - 1) = x + 1$

c) $-x + 4 = 2 - x$

f) $3x = (6 - x) \cdot (-3)$

a) $2 \cdot 3 - 6 = 0 \neq 1 \rightarrow$ No se cumple.

d) $3 + 1 = 4 \neq -2 \cdot 3 - 1 + 3 = -4 \rightarrow$ No se cumple.

b) $3 \cdot 3 - 7 = 2 = 5 - 3 = 2 \rightarrow$ Se cumple.

e) $2 \cdot (3 - 1) = 4 = 3 + 1 = 4 \rightarrow$ Se cumple.

c) $-3 + 4 = 1 \neq 2 - 3 = -1 \rightarrow$ No se cumple.

f) $3 \cdot 3 = 9 \neq (6 - 3) \cdot (-3) = -9 \rightarrow$ No se cumple.

19. ¿Son identidades o ecuaciones?

a) $2x + 3 = 5x - 4 + 7$

b) $2 \cdot (4x + 5) = 2 \cdot (4x - 2) + 14$

a) Para $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 + 3 = 5 \cdot 0 - 4 + 7 \rightarrow 3 = 3 \rightarrow$ Es cierta.Para $x = 1 \rightarrow 2 \cdot 1 + 3 = 5 \neq 5 \cdot 1 - 4 + 7 = 8 \rightarrow$ No se cumple la igualdad.Hay valores para los que no se cumple la igualdad \rightarrow Es una ecuación.b) Para $x = 0 \rightarrow 2 \cdot (4 \cdot 0 + 5) = 2 \cdot (4 \cdot 0 - 2) + 14 \rightarrow 10 = 10 \rightarrow$ Es cierta.Para $x = 1 \rightarrow 2 \cdot (4 \cdot 1 + 5) = 2 \cdot (4 \cdot 1 - 2) + 14 \rightarrow 10 = 10 \rightarrow$ Es cierta.Para $x = -1 \rightarrow 2 \cdot (4 \cdot (-1) + 5) = 2 \cdot (4 \cdot (-1) - 2) + 14 \rightarrow 10 = 10 \rightarrow$ Es cierta.

...

La igualdad siempre es cierta para distintos valores de $x \rightarrow$ Es una identidad.Si operamos a ambos lados del signo $=$ tenemos: $8x + 10 = 8x - 4 + 14 = 8x + 10$, que son iguales.**20. Escribe una identidad que tenga la expresión $2x + 5$ a uno de los lados del signo $=$.**Respuesta abierta: $2x + 5 = 2(x - 3) + 11$

Álgebra

21. Indica los miembros, términos, incógnitas y grado de estas ecuaciones.

- a) $3x + 2 = -5$ c) $4x^2 - 3y^2 + xy = 7xy^2 + 8$
 b) $-x = 4x - 2$ d) $3a^2 + a = 7a + 8$

	Miembros		Términos	Incógnitas	Grado
	Primero	Segundo			
a) $3x + 2 = -5$	$3x + 2$	-5	$3x, 2, -5$	x	1
b) $-x = 4x - 2$	$-x$	$4x - 2$	$-x, 4x, -2$	x	1
c) $4x^2 - 3y^2 + xy = 7xy^2 + 8$	$4x^2 - 3y^2 + xy$	$7xy^2 + 8$	$4x^2, -3y^2, xy, 7xy^2, 8$	x, y	3
d) $3a^2 + a = 7a + 8$	$3a^2 + a$	$7a + 8$	$3a^2, a, 7a, 8$	a	2

22. ¿Cuál es solución de $3x^2 - 6x = 24$?

- a) $x = 3$ b) $x = -2$ c) $x = -3$ d) $x = 4$

- a) $3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9 \neq 24 \rightarrow x = 3$ no es solución.
 b) $3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) = 24 \rightarrow x = -2$ sí es solución.
 c) $3 \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) = 45 \neq 24 \rightarrow x = -3$ no es solución.
 d) $3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 = 24 \rightarrow x = 4$ sí es solución.

23. Escribe dos ecuaciones de primer grado para las que $x = 4$ sea solución.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $5x - 3 = 20 - (x - 1)$ y $2x = 8$

24. Calcula el valor de la incógnita utilizando la transposición de sus términos.

- a) $x + 6 = 8$ c) $0 = x - 8$
 b) $x - 3 = -5$ d) $4x = 12$

- a) Se resta 6 en ambos miembros: $x + 6 - 6 = 8 - 6 \rightarrow x = 2$
 b) Se suma 3 en ambos miembros: $x - 3 + 3 = -5 + 3 \rightarrow x = -2$
 c) Se suma 8 en ambos miembros: $0 + 8 = x - 8 + 8 \rightarrow 8 = x$
 d) Se divide entre 4 ambos miembros: $4x/4 = 12/4 \rightarrow x = 3$

25. Determina si estas tres ecuaciones son equivalentes: $x + 3 = 2$, $-3x = 3$, $-x - 1 = 0$

La solución de $x + 3 = 2$ se obtiene restando 3 en ambos miembros: $x + 3 - 3 = 2 - 3 \rightarrow x = -1$

La solución de $-3x = 3$ se obtiene dividiendo entre -3 ambos miembros: $-3x/-3 = 3/-3 \rightarrow x = -1$

La solución de $-x - 1 = 0$ se obtiene sumando $+1$ y luego multiplicando por -1 ambos miembros:
 $-1 \cdot (-x - 1 + 1) = -1 \cdot (0 + 1) \rightarrow x = -1$

Todas tienen la misma solución. Por tanto, son equivalentes.

26. Escribe dos ecuaciones equivalentes a $x + 2 = 1$.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $-3ax = 3$ y $a(x - 2) - 6a = 2 - (8a + 3)$

27. Resuelve estas ecuaciones de primer grado.

- | | |
|--|--------------------|
| a) $x - 6 = 2$ | d) $3x + 2 = 11$ |
| b) $6x = -6$ | e) $5x - 2 = 3$ |
| c) $3 - x = 1$ | f) $10x - 2 = -22$ |
| a) $x = 2 + 6 \rightarrow x = 8$ | |
| d) $3x = 11 - 2 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 9 : 3 \rightarrow x = 3$ | |
| b) $x = -6 : 6 \rightarrow x = -1$ | |
| e) $5x = 3 + 2 \rightarrow 5x = 5 \rightarrow x = 5 : 5 \rightarrow x = 1$ | |
| c) $-x = 1 - 3 \rightarrow -x = -2 \rightarrow x = 2$ | |
| f) $10x = -22 + 2 \rightarrow 10x = -20 \rightarrow x = -20 : 10 \rightarrow x = -2$ | |

28. Resuelve estas ecuaciones.

- | | |
|---|--|
| a) $3 + x = 16$ | c) $-2x = 8$ |
| b) $5 - x = 9$ | d) $1 - 2x = -1$ |
| a) $x = 16 - 3 \rightarrow x = 13$ | c) $x = 8 : (-2) \rightarrow x = -4$ |
| b) $-x = 9 - 5 \rightarrow -x = 4 \rightarrow x = -4$ | d) $-2x = -1 - 1 \rightarrow -2x = -2 \rightarrow x = -2 : (-2) \rightarrow x = 1$ |

29. Escribe dos ecuaciones cuya solución sea $x = -2$.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $6x + 5 = -7$ y $x + 3 = 4x + 9$

30. Resuelve estas ecuaciones.

- | | |
|--|----------------------------|
| a) $5 \cdot (x - 3) = 20$ | e) $6 \cdot (9 - x) = 30$ |
| b) $3 \cdot (4 - x) = -3$ | f) $10 \cdot (8 + x) = 50$ |
| c) $7 \cdot (x - 1) = 56$ | g) $2 \cdot (x + 7) = 24$ |
| d) $4 \cdot (6 - x) = -8$ | h) $4 \cdot (x + 5) = 0$ |
| a) $5x - 15 = 20 \rightarrow 5x = 35 \rightarrow x = 35 : 5 \rightarrow x = 7$ | |
| b) $12 - 3x = -3 \rightarrow -3x = -15 \rightarrow x = -15 : (-3) \rightarrow x = 5$ | |
| c) $7x - 7 = 56 \rightarrow 7x = 63 \rightarrow x = 63 : 7 \rightarrow x = 9$ | |
| d) $24 - 4x = -8 \rightarrow -4x = -32 \rightarrow x = -32 : (-4) \rightarrow x = 8$ | |
| e) $54 - 6x = 30 \rightarrow -6x = -24 \rightarrow x = -24 : (-6) \rightarrow x = 4$ | |
| f) $80 + 10x = 50 \rightarrow 10x = -30 \rightarrow x = -30 : 10 \rightarrow x = -3$ | |
| g) $2x + 14 = 24 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 10 : 2 \rightarrow x = 5$ | |
| h) $4x + 20 = 0 \rightarrow 4x = -20 \rightarrow x = -20 : 4 \rightarrow x = -5$ | |

Álgebra

31. Halla la solución de estas ecuaciones.

- a) $-4 \cdot (x - 6) = 20$
- b) $-9 \cdot (-x + 4) = 18$
- c) $-5 \cdot (x + 7) = -75$
- d) $-3 \cdot (x - 1) = 15$
- e) $-6 \cdot (x + 3) = 12$
- f) $-7 \cdot (-x + 9) = -28$
- g) $-2 \cdot (-x + 10) = 32$

- a) $-4x + 24 = 20 \rightarrow -4x = -4 \rightarrow x = -4 : (-4) \rightarrow x = 1$
- b) $9x - 36 = 18 \rightarrow 9x = 54 \rightarrow x = 54 : 9 \rightarrow x = 6$
- c) $-5x - 35 = -75 \rightarrow -5x = -40 \rightarrow x = -40 : (-5) \rightarrow x = 8$
- d) $-3x + 3 = 15 \rightarrow -3x = 12 \rightarrow x = 12 : (-3) \rightarrow x = -4$
- e) $-6x - 18 = 12 \rightarrow -6x = 30 \rightarrow x = 30 : (-6) \rightarrow x = -5$
- f) $7x - 63 = -28 \rightarrow 7x = 35 \rightarrow x = 35 : 7 \rightarrow x = 5$
- g) $2x - 20 = 32 \rightarrow 2x = 52 \rightarrow x = 52 : 2 \rightarrow x = 26$

32. Calcula el valor de la incógnita en estas ecuaciones.

- a) $4 - (5 - x) = 2x$
- b) $7 - (4x + 2) = 5x$
- c) $9 - (3x - 1) = 7x$
- d) $10 - (6 - 2x) = x$
- e) $13 - (7 - x) = 3x$

- a) $4 - 5 + x = 2x \rightarrow x - 2x = -4 + 5 \rightarrow -x = 1 \rightarrow x = -1$
- b) $7 - 4x - 2 = 5x \rightarrow -4x - 5x = -7 + 2 \rightarrow -9x = -5 \rightarrow x = -5 : (-9) \rightarrow x = \frac{5}{9}$
- c) $9 - 3x + 1 = 7x \rightarrow -3x - 7x = -9 - 1 \rightarrow -10x = -10 \rightarrow x = -10 : (-10) \rightarrow x = 1$
- d) $10 - 6 + 2x = x \rightarrow 2x - x = -10 + 6 \rightarrow x = -4$
- e) $13 - 7 + x = 3x \rightarrow x - 3x = -13 + 7 \rightarrow -2x = -6 \rightarrow x = -6 : (-2) \rightarrow x = 3$

33. Calcula la solución de estas ecuaciones.

- a) $7x - 2 \cdot (x + 1) = 0$
- b) $3x + 4 \cdot (5 - 2x) = -2$
- c) $5x - 3 \cdot (9 - x) = 4$
- d) $6x + 5 \cdot (1 - 3x) = 12$
- e) $x - 3 \cdot (x - 2) = 10$
- f) $2x + 7 \cdot (x + 4) = 19$

- a) $7x - 2x - 2 = 0 \rightarrow 7x - 2x = 2 \rightarrow 5x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{5}$
- b) $3x + 20 - 8x = -2 \rightarrow 3x - 8x = -2 - 20 \rightarrow -5x = -22 \rightarrow x = \frac{22}{5}$
- c) $5x - 27 + 3x = 4 \rightarrow 5x + 3x = 4 + 27 \rightarrow 8x = 31 \rightarrow x = \frac{31}{8}$
- d) $6x + 5 - 15x = 12 \rightarrow 6x - 15x = 12 - 5 \rightarrow -9x = 7 \rightarrow x = -\frac{7}{9}$
- e) $x - 3x + 6 = 10 \rightarrow x - 3x = 10 - 6 \rightarrow -2x = 4 \rightarrow x = -2$
- f) $2x + 7x + 28 = 19 \rightarrow 2x + 7x = 19 - 28 \rightarrow 9x = -9 \rightarrow x = -1$

34. Resuelve las ecuaciones de la pizarra.

- a) $2 \cdot (x - 3) = 5 \cdot (4x - 1)$
- b) $-3 \cdot (5x - 4) = 2 \cdot (x + 7)$
- c) $7 \cdot (8 - 2x) = 6 \cdot (5 - x)$
- d) $8 \cdot (4 - 3x) = -2 \cdot (x + 7)$
- e) $5 \cdot (-x + 6) = -4 \cdot (x + 1)$

a) $2x - 6 = 20x - 5 \rightarrow 2x - 20x = -5 + 6 \rightarrow -18x = 1 \rightarrow x = -\frac{1}{18}$

b) $-15x + 12 = 2x + 14 \rightarrow -15x - 2x = 14 - 12 \rightarrow -17x = 2 \rightarrow x = -\frac{2}{17}$

c) $56 - 14x = 30 - 6x \rightarrow -14x + 6x = 30 - 56 \rightarrow -8x = -26 \rightarrow x = \frac{13}{4}$

d) $32 - 24x = -2x - 14 \rightarrow -24x + 2x = -14 - 32 \rightarrow -22x = -46 \rightarrow x = \frac{23}{11}$

e) $-5x + 30 = -4x - 4 \rightarrow -5x + 4x = -4 - 30 \rightarrow -x = -34 \rightarrow x = 34$

35. Halla la solución de estas ecuaciones.

- a) $2 \cdot (4x - 3) - 5 \cdot (x - 1) = 8$
- b) $x - 3 \cdot (5x - 4) + 2 \cdot (x + 7) = 0$
- c) $7 \cdot (8 - 2x) - 6 \cdot (5 - x) = x$
- d) $3 \cdot (3x - 2) - 2 \cdot (11 - 2x) = -5$
- e) $-7 \cdot (4 + 3x) - 8 \cdot (x + 7) = 12$
- f) $9 \cdot (x - 6) - 4 \cdot (x + 1) = 3x$
- g) $-5 \cdot (x + 7) + 3 \cdot (x - 4) = 14$

a) $8x - 6 - 5x + 5 = 8 \rightarrow 8x - 5x = 8 + 6 - 5 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$

b) $x - 15x + 12 + 2x + 14 = 0 \rightarrow x - 15x + 2x = -12 - 14 \rightarrow -12x = -26 \rightarrow x = \frac{13}{6}$

c) $56 - 14x - 30 + 6x = x \rightarrow -14x + 6x - x = -56 + 30 \rightarrow -9x = -26 \rightarrow x = \frac{26}{9}$

d) $9x - 6 - 22 + 4x = -5 \rightarrow 9x + 4x = -5 + 6 + 22 \rightarrow 13x = 23 \rightarrow x = \frac{23}{13}$

e) $-28 - 21x - 8x - 56 = 12 \rightarrow -21x - 8x = 12 + 28 + 56 \rightarrow -29x = 96 \rightarrow x = -\frac{96}{29}$

f) $9x - 54 - 4x - 4 = 3x \rightarrow 9x - 4x - 3x = 54 + 4 \rightarrow 2x = 58 \rightarrow x = 29$

g) $-5x - 35 + 3x - 12 = 14 \rightarrow -5x + 3x = 14 + 35 + 12 \rightarrow -2x = 61 \rightarrow x = -\frac{61}{2}$

Álgebra

36. Encuentra la solución de estas ecuaciones.

a) $\frac{x-3}{2} = 5 - \frac{x}{3}$

b) $\frac{x}{2} - x = \frac{x}{3} + 5$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5 - x$

d) $\frac{x}{2} - \frac{5}{3} = x + 3$

e) $\frac{x}{2} - 3 = 5 - x$

a) $\frac{6 \cdot (x-3)}{2} - 6 \cdot 5 = \frac{6x}{3} \rightarrow 3(x-3) = 30 - 2x \rightarrow 3x - 9 = 30 - 2x \rightarrow 3x + 2x = 30 + 9 \rightarrow 5x = 39 \rightarrow x = \frac{39}{5}$

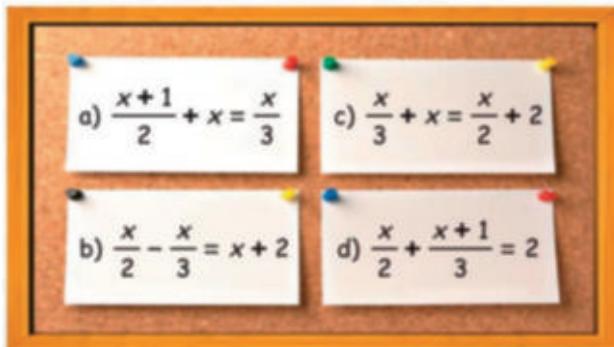
b) $\frac{6x}{2} - 6x = \frac{6x}{3} - 6 \cdot 5 \rightarrow 3x - 6x = 2x + 30 \rightarrow 3x - 6x - 2x = 30 \rightarrow -5x = 30 \rightarrow x = -6$

c) $\frac{6x}{2} - \frac{6x}{3} - 6 \cdot 5 = 6x \rightarrow 3x + 2x = 30 - 6x \rightarrow 3x + 2x + 6x = 30 \rightarrow 11x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{11}$

d) $\frac{6x}{2} - \frac{6 \cdot 5}{3} - 6 \cdot x = 6 \cdot 3 \rightarrow 3x - 10 = 6x + 18 \rightarrow 3x - 6x = 18 + 10 \rightarrow -3x = 28 \rightarrow x = -\frac{28}{3}$

e) $\frac{6x}{2} - 6 \cdot 3 = 6 \cdot 5 - 6 \cdot x \rightarrow 3x - 18 = 30 - 6x \rightarrow 3x + 6x = 30 + 18 \rightarrow 9x = 48 \rightarrow x = \frac{16}{3}$

37. Resuelve estas ecuaciones.



a) $\frac{6 \cdot (x+1)}{2} - 6x = \frac{6x}{3} \rightarrow 3(x+1) + 6x = 2x \rightarrow 3x + 3 + 6x = 2x \rightarrow 3x + 6x - 2x = -3 \rightarrow 7x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{7}$

b) $\frac{6x}{2} - \frac{6x}{3} - 6 \cdot 2 = 6x + 12 \rightarrow 3x - 2x = 6x + 12 \rightarrow 3x - 2x - 6x = 12 \rightarrow -5x = 12 \rightarrow x = -\frac{12}{5}$

c) $\frac{6x}{3} - 6x - \frac{6x}{2} - 6 \cdot 2 = 6x + 12 \rightarrow 2x + 6x = 3x + 12 \rightarrow 2x + 6x - 3x = 12 \rightarrow 5x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{5}$

d) $\frac{6x}{2} - \frac{6(x-1)}{3} - 6 \cdot 2 = 12 \rightarrow 3x + 2(x+1) = 12 \rightarrow 3x + 2x + 2 = 12 \rightarrow 3x + 2x = 12 - 2 \rightarrow 5x = 10 \rightarrow x = 2$

38. Calcula la solución de estas ecuaciones.

a) $\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{4} = 5$

b) $\frac{2x+3}{4} + \frac{x}{2} = \frac{x-1}{3}$

c) $\frac{x-2}{5} + \frac{x+5}{2} = 5x$

d) $\frac{x-3}{2} + \frac{x-1}{8} = x$

e) $\frac{2x-3}{9} + \frac{2x-1}{3} = \frac{x}{6}$

a) $\frac{4(x-1)}{2} - \frac{4(x-1)}{4} = 4 \cdot 5 \rightarrow 2(x-1) + (x+1) = 20 \rightarrow 2x - 2 + x + 1 = 20 \rightarrow 2x + x = 20 + 2 - 1 \rightarrow 3x = 21 \rightarrow x = 7$

b) $\frac{12(2x-3)}{4} - \frac{12x}{2} - \frac{12(x-1)}{3} \rightarrow 3(2x+3) + 6x = 4(x-1) \rightarrow 6x + 9 + 6x = 4x - 4 \rightarrow x = \frac{13}{8}$

c) $\frac{10(x-2)}{5} - \frac{10(x+5)}{2} = 10 \cdot 5x \rightarrow 2(x-2) + 5(x+5) = 50x \rightarrow 2x - 4 + 5x + 25 = 50x \rightarrow x = \frac{21}{43}$

d) $\frac{8(x-3)}{2} - \frac{8(x-1)}{8} = 8x \rightarrow 4(x-3) + (x-1) = 8x \rightarrow 4x - 12 + x - 1 = 8x \rightarrow 4x + x - 8x = 12 + 1 \rightarrow x = \frac{13}{3}$

e) $\frac{18(2x-3)}{9} - \frac{18(2x-1)}{3} - \frac{18x}{6} \rightarrow 2(2x-3) + 6(2x-1) = 3x \rightarrow 4x - 6 + 12x - 6 = 3x \rightarrow x = \frac{12}{13}$

39. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x+4}{3} - \frac{x+1}{5} = \frac{4-x}{2}$

b) $\frac{x-5}{2} - \frac{x+5}{6} = \frac{3+4x}{3}$

c) $\frac{x+7}{3} - \frac{x+2}{8} = \frac{x-7}{2}$

d) $\frac{x-3}{2} - \frac{x+4}{5} = \frac{2+3x}{4}$

e) $\frac{x+6}{2} - \frac{x+3}{7} = \frac{1-x}{5}$

a) $\frac{30(x-4)}{3} - \frac{30(x-1)}{5} - \frac{30(4-x)}{2} \rightarrow 10(x-4) - 6(x+1) = 15(4-x) \rightarrow 19x = 106 \rightarrow x = \frac{106}{19}$

b) $\frac{6(x-5)}{2} - \frac{6(x+5)}{6} - \frac{6(3+4x)}{3} \rightarrow 3(x-5) - (x+5) = 2(3+4x) \rightarrow -6x = 26 \rightarrow x = \frac{13}{3}$

c) $\frac{24(x-7)}{3} - \frac{24(x+2)}{8} = \frac{24(x-7)}{2} \rightarrow 8(x+7) - 3(x+2) = 12(x-7) \rightarrow -7x = -134 \rightarrow x = \frac{134}{7}$

d) $\frac{20(x-3)}{2} - \frac{20(x-4)}{5} = \frac{20(2-3x)}{4} \rightarrow 10(x-3) - 4(x+4) = 5(2+3x) \rightarrow -9x = 56 \rightarrow x = \frac{56}{9}$

e) $\frac{70(x-6)}{2} - \frac{70(x-3)}{7} = \frac{70(1-x)}{5} \rightarrow 35(x+6) - 10(x+3) = 14(1-x) \rightarrow 39x = -166 \rightarrow x = \frac{166}{39}$

Álgebra

40. Expresa mediante una ecuación estos problemas.

- a) Entre Laura y Javier tienen 54 libros. Calcula los libros que tiene cada uno sabiendo que Javier tiene el doble de libros que Laura.
- b) Si el número de libros que hay sobre la mesa lo multiplicamos por 5 y le restamos 3, se obtiene la edad que tengo, que son 12 años.

a) Libros que tiene Laura = x

Libros que tiene Javier = doble de libros que Laura = $2x$

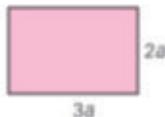
En total tienen 54 libros $\rightarrow x + 2x = 54 \rightarrow 3x = 54 \rightarrow x = 18$

Laura tiene 18 libros, y Javier, 36.

b) Libros que hay sobre la mesa = x

$$5x - 3 = 12$$

41. El perímetro de esta figura es 48 cm.



¿Con cuál de las siguientes ecuaciones puedo calcular sus dimensiones?

- a) $3a + 2a = 48$ c) $5a^2 = 48$
b) $2 \cdot (3a + 2a) = 48$ d) $6a^2 = 48$

Solución correcta: b)

Perímetro = suma de los lados = 48 \rightarrow Como hay dos lados que miden $3a$ y otros dos que miden $2a$ \rightarrow
 $\rightarrow 2 \cdot (3a + 2a) = 48$

42. Escribe problemas que se resuelvan con estas ecuaciones.

a) $2x + 1 = 5$ b) $x + 2 \cdot (x + 1) = 7$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) Me gasté 5 € en comprar dos cuadernos y un rotulador; si el rotulador me costó 1 €, ¿cuánto me costó cada cuaderno?
- b) Halla un número tal que la suma de ese número más el doble de su consecutivo es 7.

43. Un bocadillo de jamón cuesta 2,60 €. Hemos pedido 3 bocadillos de jamón y 3 refrescos y nos han cobrado 11,40 €. ¿Cuánto cuesta cada refresco?

Precio bocadillo jamón = 2,60 €

Precio refresco = x

Ecuación: $3 \cdot 2,60 + 3 \cdot x = 11,40 \rightarrow 7,8 + 3x = 11,4 \rightarrow 3x = 11,4 - 7,8 \rightarrow 3x = 3,6 \rightarrow x = 3,6 : 3 \rightarrow x = 1,2$

El precio de cada refresco es de 1,20 €.

Comprobación: $3 \cdot 2,60 + 3 \cdot 1,2 = 7,8 + 3,6 = 11,40 \rightarrow$ Es correcto.

- 44.** He comprado 2 cuadernos pequeños y 3 grandes que me han costado, en total, 13,50 €. Si los cuadernos grandes valen 1,50 € más que los pequeños, ¿cuánto cuesta un cuaderno pequeño?, ¿y uno grande?

Precio cuaderno pequeño = x

Precio cuaderno grande = $x + 1,5$

$$\text{Ecuación: } 2 \cdot x + 3 \cdot (x + 1,5) = 13,50 \rightarrow 2x + 3x + 4,5 = 13,5$$

$$2x + 3x = 13,5 - 4,5 \rightarrow 5x = 9 \rightarrow x = 9 : 5 = 1,8$$

El cuaderno pequeño cuesta 1,80 €.

El cuaderno grande cuesta $1,80 + 1,50 = 3,30$ €

Comprobación: $2 \cdot 1,8 + 3 \cdot 3,3 = 3,6 + 9,9 = 13,5 \rightarrow$ Es correcto.



- 45.** La madre de Rosa tiene tres veces la edad de su hija y entre las dos suman 48 años. ¿Cuántos años tiene Rosa? ¿Y su madre?

Edad de Rosa = x

Edad de la madre de Rosa = $3x$

$$\text{Ecuación: } x + 3x = 48 \rightarrow 4x = 48 \rightarrow x = 48 : 4 \rightarrow x = 12$$

Rosa tiene 12 años, y su madre, $3 \cdot 12 = 36$ años.

Comprobación: $12 + 36 = 48 \rightarrow$ Es correcto.

- 46. Calcula un número sabiendo que:**

- a) Si a su doble le sumamos 4 es igual a 32.
- b) Si a su doble le sumamos 3 nos da el mismo número que si a su triple le restamos 8.

Número = x

$$\text{a)} 2x + 4 = 32 \rightarrow 2x = 32 - 4 \rightarrow 2x = 28 \rightarrow x = 28 : 2 \rightarrow x = 14$$

Comprobación: $2 \cdot 14 + 4 = 28 + 4 = 32 \rightarrow$ Es correcto.

$$\text{b)} 2x + 3 = 3x - 8 \rightarrow 2x - 3x = -3 - 8 \rightarrow -x = -11 \rightarrow x = 11$$

Comprobación: $2 \cdot 11 + 3 = 3 \cdot 11 - 8 \rightarrow 22 + 3 = 33 - 8 \rightarrow 25 = 25 \rightarrow$ Es correcto.

- 47. Pedro, María y Rosa coleccionan sellos. Pedro tiene 1 sello más que María, y María, 2 más que Rosa. Entre los tres tienen 92 sellos. ¿Cuántos sellos tiene cada uno?**

Sellos que tiene Rosa = x

Sellos que tiene María = $x + 2$

Sellos que tiene Pedro = $x + 2 + 1 = x + 3$

$$\text{Ecuación: } x + x + 2 + x + 3 = 92 \rightarrow x + x + x = 92 - 2 - 3 \rightarrow 3x = 87 \rightarrow x = 29$$

Rosa tiene 29 sellos, María, 31, y Pedro, 32.

Comprobación: $29 + 31 + 32 = 92 \rightarrow$ Es correcto.

Álgebra

48. Un padre reparte 6 500 € entre sus dos hijos. ¿Cuánto dinero recibe cada uno si al menor le da la tercera parte que al mayor?

Dinero que recibe el hijo mayor: x

Dinero que recibe el hijo menor: $\frac{x}{3}$

$$\text{Ecuación: } x + \frac{x}{3} = 6\,500 \rightarrow 3x + x = 19\,500 \rightarrow 4x = 19\,500 \rightarrow x = 19\,500 : 4 \rightarrow x = 4\,875$$

El hijo mayor recibe 4 875 € y el hijo menor $4\,875 : 3 = 1\,625$ €

Comprobación $4\,875 + 1\,625 = 6\,500 \rightarrow$ Es correcto.

49. El perímetro de un rectángulo es 56 cm. Halla sus dimensiones si la base es el triple que la altura.

$$\text{Altura} = x \quad \text{Base} = 3x$$

$$\text{Perímetro: } 2 \cdot x + 2 \cdot 3x = 56 \rightarrow 2x + 6x = 56 \rightarrow 8x = 56 \rightarrow x = 56 : 8 \rightarrow x = 7$$

La altura mide 7, y la base, $3 \cdot 7 = 21$

50. Escribe en lenguaje algebraico las siguientes expresiones.

- a) El doble de un número.
- b) La mitad de un número.
- c) El triple de un número.
- d) La tercera parte de un número.
- e) El cuádruple de un número.
- f) La cuarta parte de un número.
- g) El cuadrado de un número.
- h) El cubo de un número.

a) $2x$

b) $\frac{x}{2}$

c) $3x$

d) $\frac{x}{3}$

e) $4x$

f) $\frac{x}{4}$

g) x^2

h) x^3

51. Relaciona cada enunciado con su expresión algebraica.

- a) La suma de un número más 3.
- b) La diferencia de un número menos 5.
- c) La mitad de la suma de un número más 9.
- d) La tercera parte de la diferencia entre un número y siete.

i) $\frac{x+9}{2}$ ii) $x-5$ iii) $\frac{x-7}{3}$ iv) $x+3$

- a) con iv) b) con ii) c) con i) d) con iii)

52. Determina la expresión algebraica correspondiente a estas expresiones.

- a) El cuadrado de la suma de un número más 2.
- b) El cubo de la diferencia de un número menos 6.
- c) La suma del cuadrado de un número más 9.
- d) La diferencia del cubo de un número menos 8.
- e) La mitad del cuadrado de un número.
- f) El cuadrado del doble de un número.
- g) La suma del cuadrado de un número más la mitad de ese mismo número.
- h) El triple de la diferencia del cuadrado de un número menos ese mismo número.

a) $(x + 2)^2$

c) $x^2 + 9$

e) $\frac{x^2}{2}$

g) $x^2 + \frac{x}{2}$

b) $(x - 6)^3$

d) $x^3 - 8$

f) $(2x)^2$

h) $3(x^2 - x)$

53. Encuentra una expresión, en lenguaje usual, que se corresponda con cada una de estas expresiones algebraicas.

- a) $x^2 + 2x$
- b) $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1$
- c) $3 \cdot (x^2 - 2)$
- d) $\frac{x^3}{3}$
- e) $\frac{x + 1}{3}$
- f) $x^2 - \frac{x}{2}$

a) La suma del cuadrado de un número más el doble de ese mismo número.

b) La suma del cuadrado de la mitad de un número más uno.

c) El triple de la diferencia del cuadrado de un número menos dos.

d) La tercera parte del cubo de un número.

e) La tercera parte de la suma de un número más uno.

f) La diferencia del cuadrado de un número menos la mitad de ese mismo número.

54. Traduce al lenguaje algebraico los siguientes enunciados.

- a) El total de patas de x cerdos e y gallinas.
- b) El total de ruedas de x bicis e y triciclos.
- c) El dinero total que tengo con x monedas de 0,50 € e y monedas de 0,20 €.

a) $4x + 2y$

b) $2x + 3y$

c) $0,5x + 0,2y$

Álgebra

55. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores de x :

0 1 2 -1 -2

- a) $3x - 2$ c) $5x + 4$
b) $7 - 2x$ d) $-6x + 10$

a) $x = 0 \rightarrow 3 \cdot 0 - 2 = -2$
 $x = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 - 2 = 1$
 $x = 2 \rightarrow 3 \cdot 2 - 2 = 4$
 $x = -1 \rightarrow 3 \cdot (-1) - 2 = -5$
 $x = -2 \rightarrow 3 \cdot (-2) - 2 = -8$

c) $x = 0 \rightarrow 5 \cdot 0 + 4 = 4$
 $x = 1 \rightarrow 5 \cdot 1 + 4 = 9$
 $x = 2 \rightarrow 5 \cdot 2 + 4 = 14$
 $x = -1 \rightarrow 5 \cdot (-1) + 4 = -1$
 $x = -2 \rightarrow 5 \cdot (-2) + 4 = -6$

b) $x = 0 \rightarrow 7 - 2 \cdot 0 = 7$
 $x = 1 \rightarrow 7 - 2 \cdot 1 = 5$
 $x = 2 \rightarrow 7 - 2 \cdot 2 = 3$
 $x = -1 \rightarrow 7 - 2 \cdot (-1) = 7 + 2 = 9$
 $x = -2 \rightarrow 7 - 2 \cdot (-2) = 7 + 4 = 11$

d) $x = 0 \rightarrow -6 \cdot 0 + 10 = 10$
 $x = 1 \rightarrow -6 \cdot 1 + 10 = 4$
 $x = 2 \rightarrow -6 \cdot 2 + 10 = -2$
 $x = -1 \rightarrow -6 \cdot (-1) + 10 = 16$
 $x = -2 \rightarrow -6 \cdot (-2) + 10 = 22$

56. Encuentra el valor numérico de estas expresiones algebraicas cuando las variables x e y toman los valores $x = 2$, $y = -3$.

- a) $3x - 2y + 5$ c) $-x + 4y - 2$
b) $(x - 2) \cdot (y + 8)$ d) $3 - 2x + 5 \cdot (y - 3)$

a) $3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + 5 = 6 + 6 + 5 = 17$
b) $(2 - 2) \cdot (-3 + 8) = 0$
c) $-2 + 4 \cdot (-3) - 2 = -2 - 12 - 2 = -16$
d) $3 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-3 - 3) = 3 - 4 + 5 \cdot (-6) = 3 - 4 - 30 = -31$

57. Calcula, para $a = 4$ y $b = 2$, el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas.

- a) $(a + b)(a - b)$ c) $4a + 2b - ab$
b) $3a + 2b + 1$ d) $(a - 1)^2 + (b + 1)^2$
a) $(4 + 2)(4 - 2) = 6 \cdot 2 = 12$
b) $3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 = 12 + 4 + 1 = 17$
c) $4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 16 + 4 - 8 = 12$
d) $(4 - 1)^2 + (2 + 1)^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$

58. Indica cuáles de las siguientes expresiones son monomios.

- a) $3xyz$ d) $-2x^2y^2 + x^3y$
b) $4x + 7y - 3$ e) $8x^0y^3$
c) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{4} + \frac{5}{6}$ f) $-\frac{20x}{y}$

Son monomios las expresiones a) y e).

59. Determina, en cada caso, el coeficiente, la parte literal y el grado de estos monomios.

- | | |
|-------------------|---------------|
| a) $-2x^2y$ | d) $3x^2yz^3$ |
| b) $5x^2$ | e) $4xy^3z$ |
| c) $\frac{2x}{3}$ | f) 10 |

	Coeficiente	Parte literal	Grado
a)	-2	x^2y	3
b)	5	x^2	2
c)	$\frac{2}{3}$	x	1
d)	3	x^2yz^3	6
e)	4	xy^3z	5
f)	10	---	0

60. Indica el grado de cada monomio.

- | | | |
|--------------|----------------|------|
| a) $7x^3y$ | d) $9(a^2b)^2$ | |
| b) $-8ab$ | e) $3ab^2c^2$ | |
| c) $5x^2y^2$ | f) $-2x^4$ | |
| a) 4 | c) 4 | e) 5 |
| b) 2 | d) 6 | f) 4 |

61. Escribe un monomio que cumpla las características que se indican en cada caso.

- a) Tiene grado 1, su parte literal es x y su coeficiente es $\frac{1}{2}$.
- b) Tiene grado 2, su parte literal tiene dos letras y su coeficiente es 3.
- c) Tiene grado 4, su parte literal tiene tres letras y su coeficiente es -1.
- d) Tiene grado 5, su parte literal tiene una letra y su coeficiente es $-\frac{3}{4}$.

a) $\frac{x}{2}$ b) $3xy$ c) $-xyz^2$ d) $\frac{3x^5}{4}$

62. Para cada conjunto, indica cuáles de los monomios son semejantes.

- a) $3x^2, 4xy, -2xy^2, 5x^2, xy^2, x^2$
- b) $2ab, -3b, -2a^2, ab, a^2b, 9ab$
- c) $\frac{7a}{2}, -a, 5a^2, 10a, \frac{5a^2}{3}, 8a$
- d) $9x^3, x^2y, x^2, -x^3, 2x^2y, 8x^3, \frac{x^2}{2}$

- a) Semejantes: $3x^2, 5x^2, x^2$.
 $4xy$ no es semejante a ninguno.
Semejantes: $-2xy^2, xy^2$.
- b) Semejantes: $2ab, ab, 9ab$.
El resto no son semejantes.

- c) Semejantes: $\frac{7a}{2}, -a, 10a, 8a$.
Semejantes: $5a^2, \frac{5a^2}{3}$.
- d) Semejantes: $9x^3, -x^3, 8x^3$.
Semejantes: $x^2y, 2x^2y$.
Semejantes: $x^2, \frac{x^2}{2}$.

Álgebra

63. Escribe cada enunciado utilizando un monomio e indica el coeficiente, el grado y la parte literal de cada resultado.

- a) El doble del triple de un número.
- b) La tercera parte del doble de un número.
- c) La mitad del cuadrado de un número.
- d) El triple de la mitad de un número.
- e) El cuadrado del cubo de un número.
- f) El cubo de la mitad de un número.

	Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
a)	$2 \cdot 3x = 6x$	6	x	1
b)	$\frac{2x}{3}$	$\frac{2}{3}$	x	1
c)	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{1}{2}$	x^2	2
d)	$\frac{3x}{2}$	$\frac{3}{2}$	x	1
e)	$(x^3)^2 = x^6$	1	x^6	6
f)	$\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8}$	$\frac{1}{8}$	x^3	3

64. Expresa con un monomio.

- a) El perímetro de un triángulo equilátero de lado x .
- b) El dinero que se obtiene con x billetes de 5 €.
- c) Las ruedas que tienen x camiones de 8 ruedas cada uno.
- d) El área de un cuadrado de lado x .
- e) El precio total de la compra de x kg de manzanas a 1,40 € cada kilo.

- a) $3x$
- b) $5x$
- c) $8x$
- d) x^2
- e) $1,4x$

65. Razona si es verdadero o falso.

- a) Los coeficientes de los monomios son siempre números naturales.
 - b) Todos los monomios tienen parte literal.
 - c) Todos los monomios tienen en su parte literal la letra x .
 - d) El coeficiente del monomio xyz^3 es 1.
 - e) El valor numérico de un monomio es el valor de la letra.
- a) Falso, los coeficientes son números reales (enteros, decimales...).
 - b) Verdadero.
 - c) Falso, la parte literal pueden ser otras letras.
 - d) Verdadero.
 - e) Falso, el valor numérico se obtiene sustituyendo la parte literal por unos números dados y realizando los productos que aparecen en la expresión.

66. Efectúa las sumas y restas de monomios.

- | | | | | |
|-----------------------------|-------------------------|--------------------|------------------|--------------------|
| a) $2x + 3x$ | f) $7a + 5a + 3a$ | | | |
| b) $-4ab + 2ab$ | g) $5x^4 - 2x^2 - 3x^2$ | | | |
| c) $17x^2 - 4x^2$ | h) $2xy + 4xy - 8xy$ | | | |
| d) $-5x^2y^2z - (-x^2y^2z)$ | i) $2x^2 - 4x^2 + 5x^2$ | | | |
| e) $4a^2b + 6ab^2$ | j) $2xy - 2x + 2y$ | | | |
|
 | | | | |
| a) $5x$ | c) $13x^2$ | e) $4a^2b + 6ab^2$ | g) $5x^4 - 5x^2$ | i) $3x^2$ |
| b) $-2ab$ | d) $-4x^2y^2z$ | f) $15a$ | h) $-2xy$ | j) $2xy - 2x + 2y$ |

67. Suma y resta los siguientes monomios.

- | | |
|-------------------|----------------------|
| a) $3x^2y - 9x^2$ | d) $-36x^3y + 45x^3$ |
| b) $4x y 12x$ | e) $12ab y -8ab$ |
| c) $4x y 3x^2$ | f) $12x y -4$ |

Su resultado, ¿es otro monomio?

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| a) $3x^2 + (-9x^2) = -6x^2$ | $3x^2 - (-9x^2) = 12x^2$ |
| b) $4x + 12x = 16x$ | $4x - 12x = -8x$ |
| c) $4x + 3x^2$ | $4x - 3x^2$ |
| d) $-36x^3 + 45x^3 = 9x^3$ | $-36x^3 - 45x^3 = -81x^3$ |
| e) $12ab + (-8ab) = 4ab$ | $12ab - (-8ab) = 20ab$ |
| f) $12x + (-4) = 12x - 4$ | $12x - (-4) = 12x + 4$ |

Se obtiene un monomio si los monomios que se operan son semejantes.

69. Indica cuál de estas igualdades es una identidad o una ecuación.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------------|
| a) $6x + 1 = 7$ | e) $2x + 8x = 10x$ |
| b) $2a + 3a = 5a$ | f) $9ab^2 - 5a^2b = ab(9b - 5a)$ |
| c) $12x + 6x^2 = 6x(2 + x)$ | g) $6x = 7 + 5x$ |
| d) $15x + 8x = 23x$ | h) $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$ |

a) Si $x = 0 \rightarrow 6 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 7 \rightarrow$ Es una ecuación.

b) Si $x = 1 \rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 = 5 \cdot 1$

Si $x = 2 \rightarrow 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10 = 5 \cdot 2$

Si $x = -1 \rightarrow 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -2 - 3 = -5 = 5 \cdot (-1)$

...

Operando el lado izquierdo obtenemos $5a$, que es lo mismo que el lado derecho.

Esta igualdad se cumple para cualquier valor que demos a $x \rightarrow$ Es una identidad.

c) Si $x = 1 \rightarrow 12 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 6 \cdot 1 \cdot (2 + 1) \rightarrow 12 + 6 = 6 \cdot 3 \rightarrow 18 = 18$

Si $x = -1 \rightarrow 12 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)^2 = 6 \cdot (-1) \cdot [2 + (-1)] \rightarrow -12 + 6 \cdot 1 = -6 \cdot 1 \rightarrow -6 = -6$

Si $x = 5 \rightarrow 12 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 5 \cdot (2 + 5) \rightarrow 60 + 150 = 30 \cdot 70 \rightarrow 210 = 210$

...

Operando la parte de la derecha tenemos $12x + 6x^2$, que es lo mismo que la parte izquierda.

Esta igualdad se cumple para cualquier valor que demos a $x \rightarrow$ Es una identidad.

Álgebra

d) Si $x = 0 \rightarrow 0 + 0 = 0$

Si $x = 1 \rightarrow 15 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 23 \cdot 1 \rightarrow 15 + 8 = 23 \rightarrow 23 = 23$

Si $x = -3 \rightarrow 15 \cdot (-3) + 8 \cdot (-3) = 23 \cdot (-3) \rightarrow -45 - 24 = -69 \rightarrow -69 = -69$

...

Operando el miembro de la izquierda obtenemos $23x$, que es lo mismo que el miembro de la derecha.

Esta igualdad se cumple para cualquier valor que demos a $x \rightarrow$ Es una identidad.

e) Si $x = 0 \rightarrow 0 + 0 = 0$

Si $x = 2 \rightarrow 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = 10 \cdot 2 \rightarrow 4 + 16 = 20 \rightarrow 20 = 20$

Si $x = -7 \rightarrow 2 \cdot (-7) + 8 \cdot (-7) = 10 \cdot (-7) \rightarrow -14 - 56 = -70 \rightarrow -70 = -70$

...

Operando la parte de la izquierda tenemos $10x$, que es lo mismo que la parte derecha.

Esta igualdad se cumple para cualquier valor que demos a $x \rightarrow$ Es una identidad.

f) Si $a = 1$ y $b = 0 \rightarrow 9 \cdot 1 \cdot 0 - 5 \cdot 1 \cdot 0 = 1 \cdot 0 \cdot (9 \cdot 0 - 5 \cdot 1) \rightarrow 0 - 0 = 0$

Si $a = -1$ y $b = 2 \rightarrow 9 \cdot (-1) \cdot 2^2 - 5 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = (-1) \cdot 2 \cdot [9 \cdot 2 - 5 \cdot (-1)] \rightarrow -46 = -2 \cdot 23 \rightarrow -46 = -46$

Si $a = 3$ y $b = -1 \rightarrow 9 \cdot 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot 3^2 \cdot (-1) = 3 \cdot (-1) \cdot [9 \cdot (-1) - 5 \cdot 3] \rightarrow 72 = -3 \cdot (-24) \rightarrow 72 = 72$

...

Operando la parte de la derecha tenemos $9ab^2 - 5a^2b$ que es lo mismo que la parte izquierda.

Esta igualdad se cumple para cualquier valor que demos a a y $b \rightarrow$ Es una identidad.

g) Si $x = 1 \rightarrow 6 \cdot 1 = 6 \neq 7 + 1 = 12 \rightarrow$ Es una ecuación.

h) Si $x = 0 \rightarrow (0 + 7) \cdot (0 - 7) = 0 - 49 \rightarrow 7 \cdot (-7) = -49 \rightarrow -49 = -49$

Si $x = 1 \rightarrow (1 + 7) \cdot (1 - 7) = 1^2 - 49 \rightarrow 8 \cdot (-6) = 1 - 49 \rightarrow -48 = -48$

Si $x = 4 \rightarrow (4 + 7) \cdot (4 - 7) = 4^2 - 49 \rightarrow 11 \cdot (-3) = 16 - 49 \rightarrow -33 = -33$

...

Desarrollando el producto de la izquierda obtenemos $x^2 - 49$, que es igual al miembro de la derecha.

Esta igualdad se cumple para cualquier valor que demos a $x \rightarrow$ Es una identidad.

70. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla.

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Términos	Incógnita
$7 + s = 2$	$7 + s$	2	$7, s, 2$	s
$18 = 2t$	18	$2t$	$18, 2t$	t
$5x = 1 + x$	$5x$	$1 + x$	$5x, 1, x$	x
$0 = 8 - y$	0	$8 - y$	$0, 8, -y$	y
$10r = 3$	$10r$	3	$10r, 3$	r

71. Determina cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución $x = -2$.

a) $4 - x = 6$

d) $5 - 2x = 9$

b) $-x + 3 = 1 + x$

e) $6x - 4 = 4 + 5x$

c) $3x + 7 = 1$

f) $8 = x - 3$

a) $4 - (-2) = 4 + 2 = 6 \rightarrow$ Sí es solución $x = -2$.

b) $-(-2) + 3 = 2 + 3 \neq 1 + (-2) = 1 - 2 = -1 \rightarrow$ No es solución.

c) $3 \cdot (-2) + 7 = -6 + 7 = 1 \rightarrow$ Sí es solución.

- d) $5 - 2 \cdot (-2) = 5 + 4 = 9 \rightarrow$ Sí es solución.
 e) $6 \cdot (-2) - 4 = -12 - 4 = -16 \neq 4 + 5 \cdot (-2) = 4 - 10 = -6 \rightarrow$ No es solución.
 f) $8 \neq -2 - 3 = -5 \rightarrow$ No es solución.

72. ¿De cuál de estas ecuaciones es solución $y = 3$?

- a) $2 \cdot (y + 5) = 5y + 1$ d) $7 - (y - 2) = 2y$
 b) $-y + 3 \cdot (y - 4) = 6$ e) $3 \cdot (4 - 3y) = -15$
 c) $-5 \cdot (y + 1) = 7y - 1$ f) $-6y + 2 \cdot (y - 1) = y + 9$
 a) $2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 8 = 16 = 5 \cdot 3 + 1 = 16 \rightarrow$ Sí es solución
 b) $-3 + 3 \cdot (3 - 4) = -3 + 3 \cdot (-1) = -3 - 3 = -6 \neq 6 \rightarrow$ No es solución.
 c) $-5 \cdot (3 + 1) = -5 \cdot 4 = -20 \neq 7 \cdot 3 - 1 = 21 - 1 = 20 \rightarrow$ No es solución.
 d) $7 - (3 - 2) = 7 - 1 = 6 = 2 \cdot 3 = 6 \rightarrow$ Sí es solución.
 e) $3 \cdot (4 - 3 \cdot 3) = 3 \cdot (4 - 9) = 3 \cdot (-5) = -15 \rightarrow$ Sí es solución.
 f) $-6 \cdot 3 + 2 \cdot (3 - 1) = -18 + 2 \cdot 2 = -18 + 4 = -14 \neq 3 + 9 = 12 \rightarrow$ No es solución.

73. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución $x = -1$?

- a) $\frac{3x - 2}{4} = \frac{x + 1}{2}$ d) $\frac{1 - x}{2} - \frac{3 + x}{4} = \frac{1}{2}$
 b) $x - \frac{x + 4}{3} = -2$ e) $\frac{x}{3} + \frac{2(x - 1)}{5} = \frac{2x}{15} - 1$
 c) $5(4 - x) + \frac{2x + 5}{6} = \frac{5}{2} - 10x$ f) $\frac{4x}{7} - \frac{x - 4}{3} = -x$
 a) $\frac{3 \cdot -1 - 2}{4} = \frac{-5}{4} \neq \frac{-1 - 1}{2} = 0 \rightarrow$ No es solución.
 b) $-1 - \frac{1 + 4}{3} = -1 - 1 = -2 \rightarrow$ Sí es solución.
 c) $5 \cdot [4 - (-1)] + \frac{2 \cdot -1 + 5}{6} = 25 + \frac{1}{2} = \frac{51}{2} \neq \frac{5}{2} - 10 \cdot (-1) = \frac{5}{2} + 10 = \frac{25}{2} \rightarrow$ No es solución.
 d) $\frac{1 - -1}{2} - \frac{3 - -1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow$ Sí es solución.
 e) $\frac{-1}{3} - \frac{2 \cdot -1 - 1}{5} = \frac{-1}{3} - \frac{4}{5} = \frac{-5 - 12}{15} = -\frac{17}{15} = \frac{2 \cdot -1}{15} - 1 = -\frac{17}{15} \rightarrow$ Sí es solución.
 f) $\frac{4 \cdot -1}{7} - \frac{-1 - 4}{3} = -\frac{4}{7} - \frac{5}{3} = \frac{23}{21} \neq -1 = 1 \rightarrow$ No es solución.

74. Escribe una ecuación con las características que se indican.

- a) La incógnita solo aparece en uno de los dos miembros de la ecuación y su solución es $x = 2$.
 b) Tiene dos términos sumandos en cada miembro y su solución es $a = 5$.
 c) En uno de los miembros aparece una fracción con denominador 3 y su solución es $b = -3$.
 d) En la ecuación aparece un paréntesis y una fracción, y su solución es $y = -1$.

Álgebra

a) $2x - 1 = 3$

c) $\frac{4b}{3} = 7 \rightarrow b = \frac{21}{4}$

b) $a + 6 = 1 + 2a$

d) $2 \left[\frac{3y}{5} - 2 \right] = 2y + \frac{4}{5}$

75. Resuelve estas ecuaciones.

a) $x + 2 = 5$

e) $c - 7 = 12$

b) $4 + y = 8$

f) $20 = -y + 4$

c) $11 = z + 7$

g) $-3 + b = 7$

d) $-2 + a = 2$

h) $6 - c = 9$

a) $x = 5 - 2 \rightarrow x = 3$

e) $c = 12 + 7 \rightarrow c = 19$

b) $y = 8 - 4 \rightarrow y = 4$

f) $y = -20 + 4 \rightarrow y = -16$

c) $z = 11 - 7 \rightarrow z = 4$

g) $b = 7 + 3 \rightarrow b = 10$

d) $a = 2 + 2 \rightarrow a = 4$

h) $c = 6 - 9 \rightarrow c = -3$

76. Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $2x + 7 = 3$

e) $-4 + 3a = 5$

b) $16 = -5 + 7b$

f) $5 - 4y = 1$

c) $6 = -2x$

g) $-5 = -c - 3$

d) $-3a - 8 = 4$

h) $-6z - 9 = 15$

a) $2x = -4 \rightarrow x = -4 : 2 \rightarrow x = -2$

e) $3a = 9 \rightarrow a = 9 : 3 \rightarrow a = 3$

b) $7b = 21 \rightarrow b = 21 : 7 \rightarrow b = 3$

f) $-4y = -4 \rightarrow y = -4 : (-4) \rightarrow y = 1$

c) $x = 6 : (-2) \rightarrow x = -3$

g) $c = 5 - 3 \rightarrow c = 2$

d) $-3a = 12 \rightarrow a = 12 : (-3) \rightarrow a = -4$

h) $-6z = 24 \rightarrow z = 24 : (-6) \rightarrow z = -4$

77. Resuelve las ecuaciones y comprueba la solución.

a) $4x + 1 = 5x - 8$

e) $-7 + 3y = y - 3$

b) $5 + 6x = -4 - 3x$

f) $-8x + 6 = -1 - x$

c) $10y - 3y + 3 = -18$

g) $12 = 5x - 9 - 2x$

d) $-x - 5 = 3x + 19$

h) $30 + 8y = -7y$

a) $4x - 5x = -8 - 1 \rightarrow -x = -9 \rightarrow x = 9$

Comprobación: $4 \cdot 9 + 1 = 5 \cdot 9 - 8 \rightarrow 37 = 37$

e) $3y - y = -3 + 7 \rightarrow 2y = 4 \rightarrow y = 2$

Comprobación: $-7 + 3 \cdot 2 = 2 - 3 \rightarrow -1 = -1$

b) $6x + 3x = -5 - 4 \rightarrow 9x = -9 \rightarrow x = -1$

Comprobación: $5 + 6 \cdot (-1) = -4 - 3 \cdot (-1) \rightarrow -1 = -1$

f) $-8x + x = -6 - 1 \rightarrow -7x = -7 \rightarrow x = 1$

Comprobación: $-8 \cdot 1 + 6 = -1 - 1 \rightarrow -2 = -2$

c) $10y - 3y = -18 - 3 \rightarrow 7y = -21 \rightarrow y = -3$

Comprobación: $10 \cdot (-3) - 3 \cdot (-3) + 3 = -18 \rightarrow -18 = -18$

g) $5x - 2x = 12 + 9 \rightarrow 3x = 21 \rightarrow x = 7$

Comprobación: $12 = 5 \cdot 7 - 9 - 2 \cdot 7 \rightarrow 12 = 12$

d) $-x - 3x = 19 + 5 \rightarrow -4x = 24 \rightarrow x = -6$

Comprobación: $-(-6) - 5 = 3 \cdot (-6) + 19 \rightarrow 1 = 1$

h) $8y + 7y = -30 \rightarrow 15y = -30 \rightarrow y = -2$

Comprobación: $30 + 8 \cdot (-2) = -7 \cdot (-2) \rightarrow 14 = 14$

78. Encuentra la solución de cada ecuación.

a) $6 \cdot (a - 5) - 2 = 2a$	e) $3 - (b + 4) = 0$
b) $-4 \cdot (3 - x) + 9 = x$	f) $9c - 5 \cdot (c - 1) = 1$
c) $(4 + 3x) \cdot (-7) + 12 = -8x$	g) $3 - 2 \cdot (y - 4) = 11$
d) $5a = 2 \cdot (6 - 3a) + 21$	h) $16 - 4y = 5 - 7(2 - 3y)$

a) $6a - 30 - 2 = 2a \rightarrow 6a - 2a = 30 + 2 \rightarrow 4a = 32 \rightarrow a = 32 : 4 \rightarrow a = 8$

b) $-12 + 4x + 9 = x \rightarrow 4x - x = 12 - 9 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 3 : 3 \rightarrow x = 1$

c) $-28 - 21x + 12 = -8x \rightarrow -21x + 8x = 28 - 12 \rightarrow -13x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{-13}$

d) $5a = 12 - 6a + 21 \rightarrow 5a + 6a = 12 + 21 \rightarrow 11a = 33 \rightarrow a = 33 : 11 \rightarrow a = 3$

e) $3 - b - 4 = 0 \rightarrow -b = -3 + 4 \rightarrow -b = 1 \rightarrow b = -1$

f) $9c - 5c + 5 = 1 \rightarrow 9c - 5c = 1 - 5 \rightarrow 4c = -4 \rightarrow c = -4 : 4 \rightarrow c = -1$

g) $3 - 2y + 8 = 11 \rightarrow -2y = 11 - 3 - 8 \rightarrow -2y = 0 \rightarrow y = 0$

h) $16 - 4y = 5 - 14 + 21y \rightarrow -4y - 21y = -16 + 5 - 14 \rightarrow -25y = -25 \rightarrow y = -25 : -25 \rightarrow y = 1$

79. Halla la solución de las ecuaciones.

a) $5(x - 8) = 3(x - 6)$	c) $-1(x + 3) = 2(6 + x)$
b) $2(x + 5) = 9x + 31$	d) $-5(6 - 5x) = 5x - 10$

a) $5x - 40 = 3x - 18 \rightarrow 5x - 3x = 40 - 18 \rightarrow 2x = 22 \rightarrow x = 22 : 2 \rightarrow x = 11$

b) $2x + 10 = 9x + 31 \rightarrow 2x - 9x = -10 + 31 \rightarrow -7x = 21 \rightarrow x = 21 : (-7) \rightarrow x = -3$

c) $-x - 3 = 12 + 2x \rightarrow -x - 2x = 3 + 12 \rightarrow -3x = 15 \rightarrow x = 15 : (-3) \rightarrow x = -5$

d) $-30 + 25x = 5x - 10 \rightarrow 25x - 5x = 30 - 10 \rightarrow 20x = 20 \rightarrow x = 20 : 20 \rightarrow x = 1$

80. Resuelve estas ecuaciones.

a) $(x + 28) + 15 = 2(x + 15)$
b) $(2x + 1) = 8 - (3x + 3)$
c) $2(x - 7) = 6(x + 1)$
d) $2(x - 5) = 5(x - 4)$
e) $6(x - 4) = 3(x - 3)$
f) $3(x - 3) - 4(x - 5) = 6$
g) $6(x - 3) + 5(x + 4) = 15$

a) $x + 28 + 15 = 2x + 30 \rightarrow x - 2x = -28 - 15 + 30 \rightarrow -x = -13 \rightarrow x = 13$

b) $2x + 1 = 8 - 3x - 3 \rightarrow 2x + 3x = -1 + 8 - 3 \rightarrow 5x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{5}$

c) $2x - 14 = 6x + 6 \rightarrow 2x - 6x = 14 + 6 \rightarrow -4x = 20 \rightarrow x = -5$

Álgebra

d) $2x - 10 = 5x - 20 \rightarrow 2x - 5x = 10 - 20 \rightarrow -3x = -10 \rightarrow x = \frac{10}{3}$

e) $6x - 24 = 3x - 9 \rightarrow 6x - 3x = 24 - 9 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$

f) $3x - 9 - 4x + 20 = 6 \rightarrow 3x - 4x = 9 - 20 + 6 \rightarrow -x = -5 \rightarrow x = 5$

g) $6x - 18 + 5x + 20 = 15 \rightarrow 6x + 5x = 18 - 20 + 15 \rightarrow 11x = 13 \rightarrow x = \frac{13}{11}$

82. Halla la solución de las ecuaciones.

a) $\frac{2x}{3} = 4$

c) $\frac{4x}{3} + 2 = 6$

b) $\frac{6x}{7} - 2 = 4$

d) $\frac{-8x}{3} = 16$

a) $2x = 4 \cdot 3 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$

b) $\frac{6x}{7} = 4 + 2 \rightarrow 6x = 6 \cdot 7 \rightarrow 6x = 42 \rightarrow x = 7$

c) $\frac{4x}{3} = 6 - 2 \rightarrow 4x = 4 \cdot 3 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 3$

d) $-8x = 16 \cdot 3 \rightarrow -8x = 48 \rightarrow x = -6$

83. Resuelve.

a) $\frac{6x + 4}{7} = 4$

c) $\frac{16 - x}{7} = 1$

b) $\frac{3x - 5}{2} = 2$

d) $\frac{4 + x}{3} = 5$

a) $6x + 4 = 4 \cdot 7 \rightarrow 6x = 28 - 4 \rightarrow 6x = 24 \rightarrow x = 4$

b) $3x - 5 = 2 \cdot 2 \rightarrow 3x = 4 + 5 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$

c) $16 - x = 1 \cdot 7 \rightarrow -x = 7 - 16 \rightarrow -x = -9 \rightarrow x = 9$

d) $4 + x = 5 \cdot 3 \rightarrow x = 15 - 4 \rightarrow x = 11$

84. Calcula la solución de las ecuaciones.

a) $10 + \frac{2x}{7} = 8 + 4$

c) $4x - 38 = \frac{3x + 2}{5}$

b) $\frac{x}{3} + 2x = 1 + 2x$

d) $\frac{2x}{3} = 24$

a) $\frac{2x}{7} = -10 + 8 + 4 \rightarrow \frac{2x}{7} = 2 \rightarrow 2x = 2 \cdot 7 \rightarrow 2x = 14 \rightarrow x = 7$

b) $\frac{x}{3} = -2x + 1 + 2x \rightarrow \frac{x}{3} = 1 \rightarrow x = 3$

c) $(4x - 38) \cdot 5 = 3x + 2 \rightarrow 20x - 190 = 3x + 2 \rightarrow 20x - 3x = 190 - 2 \rightarrow 17x = 188 \rightarrow x = \frac{188}{17}$

d) $2x = 24 \cdot 3 \rightarrow 2x = 72 \rightarrow x = 36$

86. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\frac{2x-1}{6} = \frac{3}{2}$ e) $\frac{x+6}{4} = \frac{x+8}{5}$

b) $\frac{4x+1}{9} = \frac{7}{3}$ f) $\frac{9-x}{2} = \frac{x+11}{3}$

c) $\frac{8-x}{6} = \frac{2}{3}$ g) $\frac{5x}{2} = \frac{x+9}{4}$

d) $\frac{3-4x}{10} = \frac{-1}{2}$ h) $\frac{x+10}{6} = \frac{-3x}{2}$

a) $(2x-1) \cdot 2 = 3 \cdot 6 \rightarrow 4x - 2 = 18 \rightarrow 4x = 18 + 2 \rightarrow 4x = 20 \rightarrow x = 5$

b) $(4x+1) \cdot 3 = 7 \cdot 9 \rightarrow 12x + 3 = 63 \rightarrow 12x = 63 - 3 \rightarrow 12x = 60 \rightarrow x = 5$

c) $(8-x) \cdot 3 = 2 \cdot 6 \rightarrow 24 - 3x = 12 \rightarrow -3x = 12 - 24 \rightarrow -3x = -12 \rightarrow x = 4$

d) $(3-4x) \cdot 2 = (-1) \cdot 10 \rightarrow 6 - 8x = -10 \rightarrow -8x = -6 - 10 \rightarrow -8x = -16 \rightarrow x = 2$

e) $(x+6) \cdot 5 = (x+8) \cdot 4 \rightarrow 5x + 30 = 4x + 32 \rightarrow 5x - 4x = -30 + 32 \rightarrow x = 2$

f) $(9-x) \cdot 3 = (x+11) \cdot 2 \rightarrow 27 - 3x = 2x + 22 \rightarrow -3x - 2x = -27 + 22 \rightarrow -5x = -5 \rightarrow x = 1$

g) $5x \cdot 4 = (x+9) \cdot 2 \rightarrow 20x = 2x + 18 \rightarrow 20x - 2x = 18 \rightarrow 18x = 18 \rightarrow x = 1$

h) $(x+10) \cdot 2 = (-3x) \cdot 6 \rightarrow 2x + 20 = -18x \rightarrow 2x + 18x = -20 \rightarrow 20x = -20 \rightarrow x = -1$

87. ¿Cuál es la solución de la ecuación del papel azul?



$$\frac{x-3}{2} - \frac{3(x-4)}{3} = \frac{4(x-5)}{5}$$

- a) 5 b) 3 c) -3 d) -1

Si $x = 5 \rightarrow \frac{5-3}{2} - \frac{3(5-4)}{3} = \frac{2}{2} - \frac{3}{3} = 0 \quad \frac{4(5-5)}{5} = 0$. Es solución.

Si $x = 3 \rightarrow \frac{3-3}{2} - \frac{3(3-4)}{3} = \frac{0}{2} - \frac{3}{3} = 0 \quad \frac{4(3-5)}{5} = \frac{8}{5}$. No es solución.

Si $x = -3 \rightarrow \frac{-3-3}{2} - \frac{3(-3-4)}{3} = \frac{-6}{2} - \frac{21}{3} = -3 \quad \frac{4(-3-5)}{5} = \frac{32}{5}$. No es solución.

Si $x = -1 \rightarrow \frac{-1-3}{2} - \frac{3(-1-4)}{3} = \frac{-4}{2} - \frac{15}{3} = -2 \quad \frac{4(-1-5)}{5} = \frac{24}{5}$. No es solución.

88. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\frac{3x}{4} - \frac{x-1}{5} = 0$ d) $\frac{5x}{2} - \frac{x+3}{5} = 1$

b) $\frac{4x}{3} - \frac{x-2}{5} = x$ e) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-5}{6} = -3$

c) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x-2}{2} = x+4$ f) $\frac{2x+7}{3} - \frac{x+5}{9} = -x$

a) $\frac{3x}{4} - \frac{x-1}{5} = 0 \rightarrow 3x \cdot 5 = (x-1) \cdot 4 \rightarrow 15x = 4x - 4 \rightarrow 15x - 4x = -4 \rightarrow 11x = -4 \rightarrow x = -4/11$

b) $\frac{15 \cdot 4x}{3} - \frac{15 \cdot x-2}{5} = 15x \rightarrow 5 \cdot 4x - 3(x-2) = 15x \rightarrow 20x - 3x + 6 = 15x \rightarrow 20x - 3x - 15x = -6 \rightarrow x = -3$

Álgebra

c) $\frac{10 \cdot 3x - 1}{5} - \frac{10 \cdot x - 2}{2} = 10x + 10 \cdot 4 \rightarrow 2 \cdot (3x - 1) - 5 \cdot (x - 2) = 10x + 40 \rightarrow$
 $6x - 2 - 5x + 10 = 10x + 40 \rightarrow x = \frac{32}{9}$

d) $\frac{10 \cdot 5x}{2} - \frac{10 \cdot x + 3}{5} = 10 \rightarrow 5 \cdot 5x - 2 \cdot (x + 3) = 10 \rightarrow 25x - 2x - 6 = 10 \rightarrow 25x - 2x = 10 + 6 \rightarrow x = \frac{16}{23}$

e) $\frac{6 \cdot x - 4}{3} - \frac{6 \cdot x - 5}{6} = 6 \cdot -3 \rightarrow 2 \cdot (x + 4) - (x - 5) = -18 \rightarrow 2x + 8 - x + 5 = -18 \rightarrow x = -31$

f) $\frac{9 \cdot 2x - 7}{3} - \frac{9 \cdot x - 5}{9} = 9 \cdot (-x) \rightarrow 3 \cdot (2x + 7) - (x + 5) = -9x \rightarrow 6x + 21 - x - 5 = -9x \rightarrow 14x = -16 \rightarrow x = \frac{8}{7}$

89. Resuelve estas ecuaciones.

a) $3(x - 2) = \frac{3}{2}$

g) $6 - 2(x - 1) = \frac{4}{5}$

b) $2(1 - x) = -\frac{2}{3}$

h) $2x - 5(x + 3) = \frac{4}{7}$

c) $4(1 - 2x) - 3x = \frac{5}{3}$

i) $3x - 4 - 2(3x - 1) = \frac{5}{4}$

d) $2(5 - 2x) + 2 = \frac{2}{5} - 3x$

j) $3x - 2(3x - 1) - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

e) $2(3x - 2) - \frac{2}{4} = \frac{8}{3}$

k) $x - 3(4x - 2) = \frac{7}{2} - 2x$

f) $x + 3(2x + 4) + 6 = \frac{8}{5}$

l) $3x - 4(1 - x) = -\frac{1}{2} - x$

a) $2 \cdot 3 \cdot (x - 2) = 3 \rightarrow 6x - 12 = 3 \rightarrow 6x = 12 + 3 \rightarrow 6x = 15 \rightarrow x = 5/2$

b) $3 \cdot 2 \cdot (1 - x) = -2 \rightarrow 6 - 6x = -2 \rightarrow -6x = -6 - 2 \rightarrow -6x = -8 \rightarrow x = 4/3$

c) $3 \cdot [4(1 - 2x) - 3x] = 5 \rightarrow 12(1 - 2x) - 9x = 5 \rightarrow 12 - 24x - 9x = 5 \rightarrow -24x - 9x = -12 + 5 \rightarrow x = 7/33$

d) $10 - 4x + 2 + 3x = 2/5 \rightarrow 5 \cdot (10 - 4x + 2 + 3x) = 2 \rightarrow 5 \cdot (12 - x) = 2 \rightarrow 60 - 5x = 2 \rightarrow -5x = -60 + 2 \rightarrow x = 58/5$

e) $12 \cdot 2 \cdot (3x - 2) - \frac{12 \cdot 2}{4} = \frac{12 \cdot 8}{3} \rightarrow 72x - 48 - 6 = 32 \rightarrow 72x = 48 + 6 + 32 \rightarrow 72x = 86 \rightarrow x = 43/36$

f) $5 \cdot (x + 6x + 12 + 6) = 8 \rightarrow 5 \cdot (7x + 18) = 8 \rightarrow 35x + 90 = 8 \rightarrow 35x = -90 + 8 \rightarrow 35x = -82 \rightarrow x = -82/35$

g) $5 \cdot (6 - 2x + 2) = 4 \rightarrow 5 \cdot (8 - 2x) = 4 \rightarrow 40 - 10x = 4 \rightarrow -10x = -40 + 4 \rightarrow -10x = -36 \rightarrow x = 18/5$

h) $7 \cdot (2x - 5x - 15) = 4 \rightarrow 7 \cdot (-3x - 15) = 4 \rightarrow -21x - 105 = 4 \rightarrow -21x = 105 + 4 \rightarrow -21x = 109 \rightarrow x = -109/21$

i) $4 \cdot (3x - 4 - 6x + 2) = 5 \rightarrow 4 \cdot (-3x - 2) = 5 \rightarrow -12x - 8 = 5 \rightarrow -12x = 8 + 5 \rightarrow -12x = 13 \rightarrow x = -13/12$

j) $3x - 6x + 2 - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \rightarrow -3x + 2 - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \rightarrow 4 \cdot (-3x) + 4 \cdot 2 - \frac{4}{2} - \frac{4 \cdot 5}{4} \rightarrow -12x + 8 - 2 = 5 \rightarrow x = 1/12$

k) $2(x - 12x + 6) = 7 - 4x \rightarrow 2 \cdot (-11x + 6) + 4x = 7 \rightarrow -22x + 12 + 4x = 7 \rightarrow -18x = -12 + 7 \rightarrow x = 5/18$

l) $2 \cdot (3x - 4 + 4x) = -1 - 2x \rightarrow 2 \cdot (7x - 4) + 2x = -1 \rightarrow 16x - 8 = -1 \rightarrow 16x = 8 - 1 \rightarrow 16x = 7 \rightarrow x = 7/16$

90. Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $4x + \frac{1}{2} = \frac{3x - 4}{2}$

b) $\frac{4x + 4}{3} = \frac{x + 6}{2}$

c) $3(x - 2) - \frac{2x}{2} = 4(x + 3)$

d) $3(x + 1) - \frac{6(x - 2)}{3} = 5$

e) $\frac{3(x - 1)}{3} + \frac{10(x + 1)}{5} = 2x + \frac{1}{4}$

f) $\frac{2(x + 1)}{2} + \frac{3(x - 1)}{3} + \frac{8(x + 2)}{4} = 5x - 1$

g) $\frac{2(x - 3)}{5} - \frac{2(x + 2)}{7} - 5 = x + 1$

a) $2 \cdot 4x + 1 = 3x - 4 \rightarrow 8x - 3x = -1 - 4 \rightarrow 5x = -5 \rightarrow x = -1$

b) $2 \cdot (4x + 4) = 3 \cdot (x + 6) \rightarrow 8x + 8 = 3x + 18 \rightarrow 8x - 3x = -8 + 18 \rightarrow 5x = 10 \rightarrow x = 2$

c) $3 \cdot (x - 2) - x = 4 \cdot (x + 3) \rightarrow 3x - 6 - x = 4x + 12 \rightarrow 3x - x - 4x = 6 + 12 \rightarrow -2x = 18 \rightarrow x = -9$

d) $3(x + 1) - 2(x - 2) = 5 \rightarrow 3x + 3 - 2x + 4 = 5 \rightarrow 3x - 2x = -3 - 4 + 5 \rightarrow x = -2$

e) $(x - 1) + 2(x + 1) = 2x + \frac{1}{4} \rightarrow x - 1 + 2x + 2 - 2x = \frac{1}{4} \rightarrow 4 \cdot (x + 1) = 1 \rightarrow 4x + 4 = 1 \rightarrow 4x = -4 + 1 \rightarrow x = -3/4$

f) $(x + 1) + (x - 1) + 2(x + 2) = 5x - 1 \rightarrow x + 1 + x - 1 + 2x + 4 = 5x - 1 \rightarrow 4x - 5x = -4 - 1 \rightarrow -x = -5 \rightarrow x = 5$

g) $\frac{2(x - 3)}{5} - \frac{2(x + 2)}{7} = 5 + x + 1 \rightarrow \frac{2(x - 3)}{5} - \frac{2(x + 2)}{7} = 6 + x \rightarrow \frac{35 \cdot 2(x - 3)}{5} - \frac{35 \cdot 2(x + 2)}{7} = 35 \cdot 6 + 35x \rightarrow$

$7 \cdot 2(x - 3) - 5 \cdot 2(x + 2) = 210 + 35x \rightarrow 14x - 42 - 10x - 20 = 210 + 35x \rightarrow 14x - 10x - 35x = 42 + 20 + 210 \rightarrow -31x = 272 \rightarrow x = -272/31$

91. Indica las ecuaciones que son equivalentes.

a) $x + 3 = 5$

b) $\frac{2x - 1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{6x - 1}{12} - \frac{2}{3}$

c) $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 4$

d) $2(x + 5) + 3(x - 2) = 24$

e) $\frac{2(x - 3)}{2} + \frac{x + 1}{4} - \frac{x - 5}{6} - \frac{x - 2}{3} = 3$

a) $x = 5 - 3 \rightarrow x = 2$

b) $\frac{12(2x - 1)}{3} - \frac{12 \cdot 3}{4} - \frac{12(6x - 1)}{12} - \frac{12 \cdot 2}{3} \rightarrow 4(2x - 1) - 3 \cdot 3 = 6x - 1 - 4 \cdot 2 \rightarrow 8x - 4 - 9 = 6x - 1 - 8 \rightarrow 8x - 6x = 4 + 9 - 1 - 8 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$

c) $6x + 3x + 2x = 24 \rightarrow 11x = 24 \rightarrow x = 24/11$

d) $2x + 10 + 3x - 6 = 24 \rightarrow 2x + 3x = -10 + 6 + 24 \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$

e) $12 \cdot (x - 3) + \frac{12 \cdot (x - 1)}{4} - \frac{12 \cdot (x - 5)}{6} - \frac{12 \cdot (x - 2)}{3} - 12 \cdot 3 \rightarrow 12 \cdot (x - 3) + 3(x + 1) - 2(x - 5) - 4(x - 2) = 36 \rightarrow 12x - 36 + 3x + 3 - 2x + 10 - 4x + 8 = 36 \rightarrow 12x + 3x - 2x - 4x = 36 - 3 - 10 - 8 + 36 \rightarrow 9x = 51 \rightarrow x = 17/3$

Son equivalentes las ecuaciones que tienen la misma solución: a) y b).

Álgebra

92. Escribe la ecuación que corresponda a cada uno de estos enunciados y obtén la solución.

- a) El triple de un número más 3 es igual a 27.
- b) El doble de un número menos 3 es igual a 9.
- c) Un número más su doble y más su triple es 50.
- d) Un número menos su mitad y menos su tercera parte es igual a 6.

a) $3x + 3 = 27 \rightarrow 3x = 27 - 3 \rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = 24 : 3 \rightarrow x = 8$

b) $2x - 3 = 9 \rightarrow 2x = 9 + 3 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 12 : 2 \rightarrow x = 6$

c) $x + 2x + 3x = 50 \rightarrow 6x = 50 \rightarrow x = 50 : 6 \rightarrow x = 25/3$

d) $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 6 \rightarrow 6x - \frac{6x}{2} - \frac{6x}{3} = 6 \cdot 6 \rightarrow 6x - 3x - 2x = 36 \rightarrow x = 36$

93. Plantea y resuelve la ecuación que se corresponde con cada enunciado.

- a) La suma del doble de un número más 5 es igual a 17.
- b) Si a la mitad de un número le restamos 8 obtenemos 11.
- c) El triple de la suma de un número más 7 es igual al doble de ese mismo número.
- d) La mitad de la diferencia de un número menos 6 es igual a la tercera parte de la suma de ese número más 3.
- e) Si al doble de un número le restamos su tercera parte, el resultado es 10.
- f) Si a la mitad de un número le sumamos 9 obtenemos 23.

a) $2x + 5 = 17 \rightarrow 2x = 17 - 5 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 12 : 2 \rightarrow x = 6$

b) $\frac{x}{2} - 8 = 11 \rightarrow x - 2 \cdot 8 = 2 \cdot 11 \rightarrow x = 22 + 16 \rightarrow x = 38$

c) $3(x + 7) = 2x \rightarrow 3x + 21 = 2x \rightarrow 3x - 2x = -21 \rightarrow x = -21$

d) $\frac{x - 6}{2} - \frac{x - 3}{3} \rightarrow 3(x - 6) = 2(x + 3) \rightarrow 3x - 18 = 2x + 6 \rightarrow 3x - 2x = 18 + 6 \rightarrow x = 24$

e) $2x - \frac{x}{3} = 10 \rightarrow 6x - x = 30 \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 30 : 5 \rightarrow x = 6$

f) $\frac{x}{2} + 9 = 23 \rightarrow \frac{x}{2} = -9 + 23 \rightarrow \frac{x}{2} = 14 \rightarrow x = 28$

94. Escribe la ecuación que representa que la suma de dos números consecutivos es 65. Resuelve esa ecuación y determina de qué números se trata.

$$x + (x + 1) = 65 \rightarrow 2x = -1 + 65 \rightarrow 2x = 64 \rightarrow x = 64 : 2 \rightarrow x = 32$$

Los números son 32 y 33.

95. Determina tres números consecutivos cuya suma sea 66.

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 66 \rightarrow x + x + x = -1 - 2 + 66 \rightarrow 3x = 63 \rightarrow x = 63 : 3 \rightarrow x = 21$$

Los números son 21, 22 y 23.

96. Si llamamos x a la base e y a la altura de un rectángulo, completa en tu cuaderno la siguiente tabla.

Área	$x \cdot y$
Perímetro	$2(x + y)$
Doble del área	$2 \cdot x \cdot y$
Mitad del perímetro	$x + y$



97. Halla la altura y la base del rectángulo en cada caso.

- a) La base es el doble de la altura y el perímetro mide 36 cm.
- b) La base es el triple de la altura y el perímetro mide 40 cm.
- c) La base es una unidad más que el doble de la altura y el perímetro mide 56 cm.
- d) La base es una unidad menos que la mitad de la altura y el perímetro mide 34 cm.

a) Altura = x Base = $2x$ Perímetro = 36

$$2(x + 2x) = 36 \rightarrow 2x + 4x = 36 \rightarrow 6x = 36 \rightarrow x = 36 : 6 \rightarrow x = 6$$

La altura mide 6 cm, y la base, $2 \cdot 6 = 12$ cm.

b) Altura = x Base = $3x$ Perímetro = 40

$$2(x + 3x) = 40 \rightarrow 2x + 6x = 40 \rightarrow 8x = 40 \rightarrow x = 40 : 8 \rightarrow x = 5$$

La altura mide 5 cm, y la base, $3 \cdot 5 = 15$ cm.

c) Altura = x Base = $2x + 1$ Perímetro = 56

$$2(x + 2x + 1) = 56 \rightarrow 2x + 4x + 2 = 56 \rightarrow 2x + 4x = 56 - 2 \rightarrow 6x = 54 \rightarrow x = 54 : 6 \rightarrow x = 9$$

La altura mide 9 cm, y la base, $2 \cdot 9 + 1 = 19$ cm.

d) Altura = x Base = $\frac{x}{2} - 1$ Perímetro = 34

$$2\left(x + \frac{x}{2} - 1\right) = 34 \rightarrow 2x + x - 2 = 34 \rightarrow 2x + x = 34 + 2 \rightarrow 3x = 36 \rightarrow x = 36 : 3 \rightarrow x = 12$$

La altura mide 12 cm, y la base, $\frac{12}{2} - 1 = 5$ cm.

98. Un kilo de patatas cuesta la cuarta parte que un kilo de manzanas. Si Isabel ha pagado 10 € por 3 kg de manzanas y 8 kg de patatas, ¿cuánto cuesta un kilo de patatas?



Dinero que cuesta un kilo de patatas = x

Dinero que cuesta un kilo de manzanas = $4x$

$$\text{Ecuación } 3 \cdot 4x + 8x = 10 \rightarrow 12x + 8x = 10 \rightarrow 20x = 10 \rightarrow x = 10 : 20 \rightarrow x = 0,5$$

Un kilo de patatas cuesta 0,50 €.

- 99.** El precio de un cuaderno y un libro es 6 €. El precio del cuaderno es igual a $\frac{3}{7}$ del precio del libro. ¿Cuál es el precio de cada uno?

$$\text{Precio del libro} = x$$

$$\text{Precio del cuaderno} = \frac{3x}{7}$$

$$\text{Ecuación: } x + \frac{3x}{7} = 6 \rightarrow 7x + 3x = 42 \rightarrow 10x = 42 \rightarrow x = 42 : 10 \rightarrow x = 4,2$$

El libro cuesta 4,20 € y el cuaderno cuesta $6 - 4,20 = 1,80$ €.

- 100.** Un bosque tiene el doble de árboles que otro bosque y entre los dos suman 120 000 árboles. ¿Cuántos árboles tiene cada uno?

$$x + 2x = 120\,000 \rightarrow 3x = 120\,000 \rightarrow x = 120\,000 : 3 \rightarrow x = 40\,000 \text{ árboles}$$

Uno de los bosques tiene 40 000 árboles, y el otro, $2 \cdot 40\,000 = 80\,000$ árboles.

- 101.** En la campaña navideña, Alberto ha vendido cinco veces más triciclos que bicis. Si entre todos tenían 68 ruedas, ¿cuántos vendió de cada tipo?

$$\text{Bicis vendidas} = x$$

$$\text{Triciclos vendidos} = 5x$$

$$\text{Ecuación: } 2x + 3 \cdot 5x = 68 \rightarrow 2x + 15x = 68 \rightarrow 17x = 68 \rightarrow x = 68 : 17 \rightarrow x = 4$$

Vendió 4 bicis y $5 \cdot 4 = 20$ triciclos.



- 102.** En un garaje hay siete coches más que motos. ¿Cuántos hay de cada tipo si entre coches y motos suman 31?

$$\text{Número de motos} = x$$

$$\text{Número de coches} = x + 7$$

$$\text{Ecuación: } x + x + 7 = 31 \rightarrow 2x = 31 - 7 \rightarrow 2x = 24 \rightarrow x = 24 : 2 \rightarrow x = 12$$

En el garaje hay 12 motos y $12 + 7 = 19$ coches.

- 103.** Alfonso tiene una colección de 168 películas que sobrepasa en 42 al doble de las que tiene Jaime. ¿Cuántas películas tiene Jaime?

$$\text{Películas de Jaime} = x$$

$$\text{Películas de Alfonso} = 2x + 42 = 168$$

$$\text{Ecuación: } 2x + 42 = 168 \rightarrow 2x = 168 - 42 \rightarrow 2x = 126 \rightarrow x = 126 : 2 \rightarrow x = 63$$

Jaime tiene 63 películas.

- 104.** Se sabe que en una granja en la que se crían vacas y gallinas hay el triple de vacas que de gallinas. ¿Cuántos animales hay de cada tipo si en total se cuentan 6 300 patas?

$$\text{Número de gallinas} = x$$

$$\text{Número de vacas} = 3x$$

$$\text{Ecuación: } 2x + 4 \cdot 3x = 6\,300 \rightarrow 2x + 12x = 6\,300 \rightarrow 14x = 6\,300 \rightarrow x = 6\,300 : 14 \rightarrow x = 450$$

Hay 450 gallinas y $3 \cdot 450 = 1\,350$ vacas.

- 105.** Rafael va al cine y a merendar con sus amigos. Gasta la mitad del dinero en ir al cine y la quinta parte en merendar, y aún le quedan 6 €. ¿Cuánto dinero tenía cuando salió de casa?

Dinero que tenía = x

Gasta en ir al cine = $x/2$

Gasta en merendar = $x/5$

$$\text{Ecuación: } x - x/2 - x/5 = 36 \rightarrow 10x - 5x - 2x = 360 \rightarrow 3x = 360 \rightarrow x = 360/3 \rightarrow x = 120$$

Rafael salió de casa con 120 €.

- 106.** De una pieza de tela se corta la tercera parte del total; luego, la quinta parte de lo que queda. Calcula la longitud de la tela sabiendo que después de los dos cortes quedan 16 m.

Longitud de la tela = x

Primero corta $\frac{x}{3}$ → Le quedan $\frac{2x}{3}$.

Luego corta $\frac{1}{5}$ de $\frac{2x}{3} = \frac{2x}{15}$

$$\text{Ecuación: } x - \frac{x}{3} - \frac{2x}{15} = 16 \rightarrow 15x - 5x - 2x = 240 \rightarrow 8x = 240 \rightarrow x = 240 : 8 \rightarrow x = 30$$

La tela medía 30 metros.

- 107.** Enrique gastó la mitad de su dinero en un regalo para su amigo Ramón. Además, empleó la cuarta parte del dinero en comprarse un balón de balonmano, y una décima parte la gastó en un pantalón de deporte. Si aún le quedaron 6 €, ¿qué cantidad de dinero tenía?

Dinero que tenía Enrique = x

Gastó en el regalo de Ramón = $x/2$

Gastó en el balón de balonmano = $x/4$

Gastó en el pantalón de deporte = $x/10$

$$x - x/2 - x/4 - x/10 = 6 \rightarrow 20x - 10x - 5x - 2x = 120 \rightarrow 3x = 120 \rightarrow x = 120 : 3 \rightarrow x = 40$$

Enrique tenía 40 €.

- 108.** Llevo recorridos $\frac{7}{15}$ de un trayecto y aún me faltan 84 m para llegar a la mitad. ¿Cuál es la longitud del trayecto?

Al llevar recorridos $\frac{7}{15}x$ y faltar 84 para llegar a la mitad, quiere decir que: $\frac{x}{2} - \frac{7x}{15} = 84$

$$\text{Ecuación: } \frac{x}{2} - \frac{7x}{15} = 84 \rightarrow 15x - 14x = 84 \cdot 30 \rightarrow x = 2\,520$$

El trayecto es de 2 520 metros.

Álgebra

109. Ana dice: «La mitad de mis años, más la tercera parte, más la cuarta parte, más la sexta parte de mis años, suman los años que tengo más 6».

- ¿Cuántos años tiene Ana?
- Israel dice: «A mí me ocurría lo mismo cuando mi edad era un tercio de la que es ahora». ¿Cuántos años tiene Israel?

Edad de Ana = x

$$\text{Ecuación: } \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = x + 6 \rightarrow 6x + 4x + 3x + 2x = 12x + 72 \rightarrow 15x - 12x = 72 \rightarrow 3x = 72 \rightarrow x = 24$$

Ana tiene 24 años.

110. Este mes he mandado 86 e-mails dirigidos a Julia, Pablo, Jaime y Tomás. A Julia le he mandado la mitad de e-mails que a Tomás, a Pablo 5 e-mails más que a Tomás y a Jaime 3 menos que la mitad que le he mandado a Tomás. ¿Cuántos e-mails he mandado a cada uno?

$$\text{E-mails a Julia} = x$$

$$\text{E-mails a Tomás} = 2x$$

$$\text{E-mails a Pablo} = 2x + 5$$

$$\text{E-mails a Jaime} = x - 3$$

$$\text{Ecuación: } x + 2x + 2x + 5 + x - 3 = 86 \rightarrow x + 2x + 2x + x = -5 + 3 + 86 \rightarrow 6x = 84 \rightarrow x = 84 : 6 \rightarrow x = 14$$

He mandado 14 e-mails a Julia, 28 e-mails a Tomás, 33 e-mails a Pablo y 11 e-mails a Jaime.

111. Rubén tiene monedas de tres tipos, de 1 €, 0,50 € y 0,20 €. Las de 0,50 € son la mitad de las de 1 € y las de 0,20 € son una tercera parte de las de 1 €. Si en total tiene 31,60 €, ¿cuántas son de cada tipo?

$$\text{Monedas de } 0,20 \text{ €} = \frac{2x}{3}$$

$$\text{Monedas de } 0,50 \text{ €} = x$$

$$\text{Monedas de } 1 \text{ €} = 2x$$

$$\text{Ecuación: } \frac{2x}{3} \cdot 0,2 + x \cdot 0,5 + 2x \cdot 1 = 31,6 \rightarrow 0,4x + 1,5x + 6x = 94,8 \rightarrow 7,9x = 94,8 \rightarrow x = 94,8 : 7,9 \rightarrow x = 12$$

Rubén tiene 8 monedas de 0,20 €, 12 monedas de 0,50 € y 24 monedas de 1 €.

112. Entre las avestruces y las cebras de una reserva se suman 80 cabezas y 220 patas. Calcula cuántas avestruces y cebras hay en la reserva.



$$\text{Número de avestruces} = x$$

$$\text{Número de cebras} = 80 - x$$

$$\text{Ecuación: } 2x + 4 \cdot (80 - x) = 220 \rightarrow 2x + 320 - 4x = 220 \rightarrow 2x - 4x = 220 - 320 \rightarrow -2x = -100 \rightarrow x = 50$$

En la reserva hay 50 avestruces y $80 - 50 = 30$ cebras.

DEBES SABER HACER

1. Expresa en lenguaje algebraico estos enunciados.

- a) El doble de la suma de un número más 9 unidades.
- b) La tercera parte de la resta de un número menos 4 unidades.
- c) La mitad de un número, más la cuarta parte de ese número.
- d) El triple de la suma del cuadrado de un número más ese mismo número.

a) $2(x + 9)$ b) $\frac{x - 4}{3}$ c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4}$ d) $3(x^2 + x)$

2. Halla el valor numérico de cada una de las expresiones para los valores dados.

a) $2xy + 5x^2$ para $x = -2, y = 3$ b) $4 \cdot (x^3 - y) - xy$ para $x = 2, y = -4$
 a) $2 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot (-2)^2 = -12 + 20 = 8$ b) $4 \cdot [2^3 - (-4)] - 2 \cdot (-4) = 4 \cdot (8 + 4) + 8 = 4 \cdot 12 + 8 = 48 + 8 = 56$

3. Realiza las operaciones entre monomios.

a) $5x - 7y + 9x - y + 2y + x$
 b) $3x^2 + 6x - 7xy + 3xy - 2x^2$
 c) $-y^2 - 9x + x - 7y^2 + 5y^2 + 10$
 a) $15x - 6y$ b) $x^2 - 4xy + 6x$ c) $-3y^2 - 8x + 10$

4. Expresa, en forma de ecuación, los siguientes enunciados y obtén su solución.

a) ¿Qué número sumado a 3 da 8?
 b) ¿Qué número multiplicado por 5 da 60?
 c) ¿Qué número dividido entre 12 da 84?
 a) $x + 3 = 8 \rightarrow x = 5$ b) $x \cdot 5 = 60 \rightarrow x = 12$ c) $x : 12 = 84 \rightarrow x = 1\,008$

5. Resuelve estas ecuaciones.

a) $x + 7 = 9$
 b) $4x - 12 = 3x$
 c) $x - 5 = 2x - 4$
 d) $3x - 5 = -5 - 7x$
 e) $3 - 4(3x + 8) = 7(x + 3)$
 f) $\frac{x}{4} + \frac{x - 8}{5} = 0$
 a) $x = 9 - 7 \rightarrow x = 2$ d) $3x + 7x = 5 - 5 \rightarrow 10x = 0 \rightarrow x = 0$
 b) $4x - 3x = 12 \rightarrow x = 12$ e) $3 - 12x - 32 = 7x + 21 \rightarrow -12x - 7x = -3 + 32 + 21 \rightarrow -19x = 50 \rightarrow x = \frac{50}{-19}$
 c) $x - 2x = 5 - 4 \rightarrow -x = 1 \rightarrow x = -1$ f) $5x + 4 \cdot (x - 8) = 0 \rightarrow 5x + 4x - 32 = 0 \rightarrow 9x = 32 \rightarrow x = \frac{32}{9}$

Álgebra

6. En los entrenamientos de balonmano dedicamos el doble de tiempo a hacer ejercicios físicos que a jugar al balonmano. Si entrenamos 6 horas a la semana, ¿cuántas horas dedicamos a jugar?

Tiempo dedicado a jugar = x Tiempo dedicado a hacer ejercicio físico = $2x$

Ecuación: $x + 2x = 6 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 6 : 3 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ Dedicamos a jugar 2 horas.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

113. La criptografía estudia el cifrado y descifrado de mensajes.

Existen muchas técnicas para cifrar la información, una de las más sencillas es el cifrado monoalfabético. Esta técnica consiste en asignar a cada letra que compone el mensaje otra letra o carácter diferente, de forma que este cambio solo es conocido por las personas que van a leer el mensaje.

Un ejemplo muy sencillo de la utilización de esta técnica puede ser la siguiente tabla. En ella se muestra cómo, a la hora de escribir un mensaje, se sustituirá cada letra por un número.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
10	8	14	9	23	2	11	3	19	15	22	1	20	13	24	16	4	26	5	21	25	12	17	27	6	18	7

- a) Escribe utilizando esta tabla la palabra AMIGA.
b) Utiliza esta técnica para escribir el siguiente mensaje:

A LA SALIDA DE CLASE NOS VEMOS EN EL PARQUE

- c) Para hacer esta técnica más segura se pueden utilizar las ecuaciones.
En el cuaderno se han escrito 4 ecuaciones cuyas soluciones representan las 4 letras que componen una palabra cifrada. ¿De qué palabra se trata?

1.º $2x - 4 = 2$
2.º $\frac{x}{2} = 8$
3.º $3x - 1 = 3 - x$
4.º $2x = 4 \cdot (x - 5)$

- a) AMIGA = 10 20 19 11 10
b) A LA SALIDA DE CLASE NOS VEMOS EN EL PARQUE =
10 1 10 21 10 1 19 9 10 9 23 14 1 10 21 23 13 16 21 17 23 20 16 21 23 13 23 1 4 10 5 26 12 23
c) 1.º: $2x = 6 \rightarrow x = 6 : 2 \rightarrow x = 3 \rightarrow H$
2.º: $x = 16 \rightarrow O$
3.º: $3x + x = 3 + 1 \rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 1 \rightarrow L$
4.º: $2x = 4x - 20 \rightarrow 2x - 4x = -20 \rightarrow x = 10 \rightarrow A$
La palabra es HOLA.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

- 114.** El cuadrado mágico de la figura (la suma de los números de cada fila, columna y diagonal debe ser la misma) está formado por números del 1 al 9. No sabemos qué número está en cada casilla, pero sí que $b > c$. Halla el valor de cada letra.

$a + b$	$a - b + c$	$a - c$
$a - b - c$	a	$a + b + c$
$a + c$	$a + b - c$	$a - b$

Debemos comenzar con $a + b + c$ y $a - b - c$, que son el número mayor y el menor (9 y 1), respectivamente: $a + b + c = 9$ y $a - b - c = 1$.

Sumando ambas expresiones obtenemos que:

$$2 \cdot a = 10, a = 10; 5 + b + c = 9 \rightarrow b + c = 4.$$

Como $b > c$, y además, son números naturales, la única solución posible es $b = 3$ y $c = 1$.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

- 115.** Sustituye a y b por dos números enteros en las igualdades algebraicas:

a) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

b) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 + b^2$

¿Se cumplen siempre las igualdades? ¿Son identidades o ecuaciones?

a) $a = 1, b = 2 \rightarrow (1 + 2)(1 - 2) = 1^2 - 2^2 \rightarrow 3 \cdot (-1) = 1 - 4 \rightarrow -3 = -3$

$a = -3, b = 6 \rightarrow (-3 + 6)(-3 - 6) = (-3)^2 - 6^2 \rightarrow 3 \cdot (-9) = 9 - 36 \rightarrow -27 = -27$

...

Se cumple para cualquier valor de a y b → Es una identidad.

b) $a = 1, b = 2 \rightarrow (1 + 2)(1 - 2) = 3 \cdot (-1) = -3 \neq 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

$a = 3, b = -5 \rightarrow (3 - 5)(3 + 5) = (-2) \cdot (8) = -16 \neq 3^2 + (-5)^2 = 9 + 25 = 34$

$a = 0, b = 0 \rightarrow 0 = 0$

...

No se cumple para cualquier valor de a y b → Es una ecuación.

- 116.** Calcula el valor de \diamond , \star y \heartsuit con los datos que proporcionan las expresiones que hay a continuación:

$\star + \star + \heartsuit = 12$
$\star + \star - \heartsuit = 12$
$\diamond - \star - \heartsuit = 6$

Sumando la primera y la tercera igualdad: $2\star = 18 \rightarrow \star = 9$

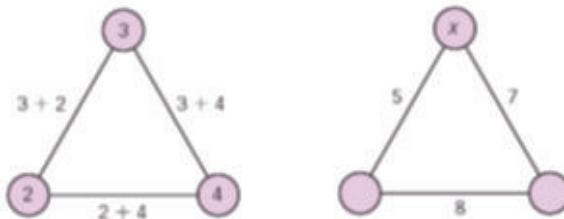
Sustituyendo \star por su valor y sumando las dos primeras

igualdades obtenemos: $2(9 + \star) = 24 \rightarrow 9 + \star = 12 \rightarrow \star = 3$

Restando las dos primeras, tenemos que $\heartsuit = 0$.

117. Ecuaciones en triángulos.

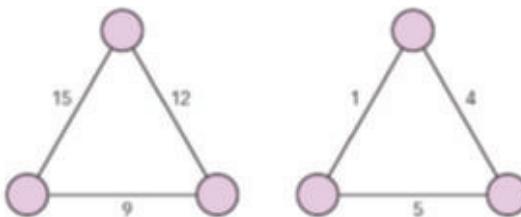
a) Observa el siguiente triángulo. En los lados está la suma de los números de los vértices.



Si no conoces los números de los vértices, pero sí su suma, ¿cómo hallarías los vértices?

Llama x al número de uno de los vértices y plantea el problema.

b) Averigua los números de los vértices de los triángulos:



Asigna el valor correspondiente a cada uno de los vértices y comprueba la solución.

a) Planteamiento: llamamos a uno de los vértices x .

El siguiente vértice tiene como valor la suma que marca el lado que los une menos el valor de x (en el ejemplo: $7 - x$).

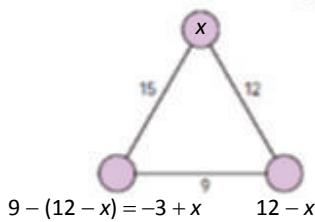
El siguiente vértice tiene como valor la suma que marca el lado que los une menos el valor del vértice anterior (en el ejemplo: $8 - (7 - x) = 8 - 7 + x = 1 + x$).

La ecuación que plantea el problema se obtiene a partir de la suma del último lado, ya que tenemos la expresión algebraica de los dos vértices que lo forman (en el ejemplo: $5 = x + (1 + x) \rightarrow 5 = 1 + 2x \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 4 : 2 \rightarrow x = 2$).

Una vez obtenido el primer vértice, $x = 2$, vamos calculando el valor numérico de los otros dos vértices sustituyendo x por 2.

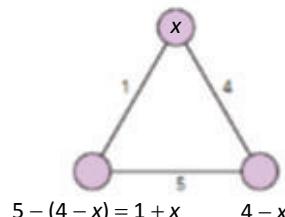
Los vértices son: $2, 7 - 2 = 5$ y $1 + 2 = 3$.

b)



$$\text{Ecuación: } 15 = x + (-3 + x) \rightarrow 15 + 3 = 2x \rightarrow 18 = 2x \rightarrow x = 9$$

Vértices: $9, 12 - 9 = 3$ y $-3 + 9 = 6$



$$\text{Ecuación: } 1 = 1 + x + x \rightarrow 0 = 2x \rightarrow x = 0$$

Vértices: 0, 4 y 1

PRUEBAS PISA

- 118.** Un agricultor planta manzanos en un terreno cuadrado. Con objeto de proteger los manzanos del viento planta coníferas alrededor de la totalidad del huerto.

Aquí ves un esquema de esta situación, donde se puede apreciar la colocación de los manzanos y de las coníferas para cualquier número (n) de filas de manzanos.

XXX	XXXXXX	XXXXXXXX	XXXXXXXXXX
X•X	X• • X	X• • • X	X• • • • X
XXX	X X	X X	X X
X• • X	X• • • X	X• • • • X	X• • • • • X
XXXXX	X X	X X	X X
	X• • • X	X• • • • X	X• • • • • X
	XXXXXXXX	X X	X X
		X• • • • X	X• • • • • X
		XXXXXXXX	XXXXXXXXXX

X = conífera • = manzano

Se pueden utilizar dos fórmulas para calcular el número de manzanos y el de coníferas.

Averigua estas dos fórmulas.

(Adaptación prueba PISA 2003)

En el primer esquema, 1 fila de manzanos, lo que nos da 1 manzano y 8 coníferas.

En el segundo esquema, 2 filas de manzanos, lo que nos da 4 manzanos y 16 coníferas.

En el tercer esquema, 3 filas de manzanos, lo que nos da 9 manzanos y 24 coníferas.

...

De este modo, para n filas de manzanos, tenemos n^2 manzanos y $8n$ coníferas.

- 119.** La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso P es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$ da una relación aproximada entre n y P , donde:

n = número de pasos por minuto, y

P = longitud del paso en metros.



- Si se aplica la fórmula a la manera de caminar de Enrique y este da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Enrique?
- Bernardo sabe que sus pasos son de 0,8 metros. El caminar de Bernardo se ajusta a la fórmula. Calcula la velocidad a la que anda Bernardo en metros por minuto.

(Modelo prueba PISA 2003)

$$\text{a)} n = 70 \rightarrow 70/P = 140 \rightarrow P = 70/140 \rightarrow P = 0,5 \text{ metros}$$

$$\text{b)} P = 0,8 \rightarrow n = 0,8 \cdot 140 \rightarrow n = 112 \text{ pasos por minuto.}$$

Si cada paso son 0,8, entonces $0,8 \cdot 112 = 89,6$ metros por minuto.

Proporcionalidad y porcentajes

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Indica si estas parejas de fracciones son equivalentes o no.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{4}$

b) $\frac{12}{16}$ y $\frac{6}{7}$

c) $\frac{4}{3}$ y $\frac{80}{60}$

a) $1 \cdot 4 \neq 2 \cdot 5 \rightarrow 4 \neq 10 \rightarrow$ No son equivalentes.

b) $12 \cdot 7 \neq 16 \cdot 6 \rightarrow 84 \neq 96 \rightarrow$ No son equivalentes.

c) $4 \cdot 60 = 3 \cdot 80 \rightarrow 240 = 240 \rightarrow$ Sí son equivalentes.

2. Determina el número que falta para que estas fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{3}{2}$ y $\frac{6}{x}$

b) $\frac{8}{6}$ y $\frac{x}{3}$

c) $\frac{x}{12}$ y $\frac{7}{6}$

a) $3 \cdot x = 2 \cdot 6 \rightarrow x = 12/3 \rightarrow x = 4$

b) $8 \cdot 3 = 6 \cdot x \rightarrow x = 24/6 \rightarrow x = 4$

c) $x \cdot 6 = 12 \cdot 7 \rightarrow x = 84/6 \rightarrow x = 14$

3. Expresa en forma de fracción estos números decimales.

a) 0,1

b) 0,25

c) 0,5

d) 0,65

e) 0,9

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{25}{100} - \frac{1}{4}$

c) $\frac{5}{10} - \frac{1}{2}$

d) $\frac{65}{100} - \frac{13}{20}$

e) $\frac{9}{10}$

4. Calcula el número decimal que expresan las siguientes fracciones.

a) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{9}{200}$

b) $\frac{8}{25}$

d) $\frac{3}{4}$

f) $\frac{20}{16}$

a) 0,4

b) 0,32

c) 1,5

d) 0,75

e) 0,045

f) 1,25

VIDA COTIDIANA

El acero se fabrica en los altos hornos. El hierro se separa de otros componentes para obtener arrabio, una de las materias primas del acero.

- Se produce 1 t de arrabio con una proporción de carbono del 1,3% y la otra tonelada, con el 0,9%. ¿Cuál es la diferencia de carbono entre las dos toneladas producidas?

El 1,3% de 1 t es 0,013 t = 13 kg

El 0,9% de 1 t es 0,009 t = 9 kg

La diferencia de carbono entre las dos es de 4 kg.

Proporcionalidad y porcentajes

RESUELVE EL RETO

Si una gallina pone 2 huevos al día, ¿cuánto tardarán 3 gallinas, al mismo ritmo, en poner una docena de huevos?

Tres gallinas pondrán 6 huevos al día, de modo que para tener una docena hacen falta dos días.

El precio de una lavadora se disminuye un 10 %. Un mes después se aumenta un 10%. ¿Cuándo era más barata, con el precio inicial o al aumentar el precio?

El precio tras el aumento es: $1,10 \cdot 0,9 \cdot \text{precio} = 0,99 \cdot \text{precio}$.

Es algo más barata al aumentar el precio.

ACTIVIDADES

- 1. Comprueba si las razones $\frac{7,1}{2}$ y $\frac{3,6}{1}$ forman una proporción.**

$$7,1 \cdot 1 \neq 2 \cdot 3,6 \rightarrow 7,1 \neq 7,2$$

- 2. Expresa mediante una razón.**

- a) De los 15 € que tenía, me he gastado 7 €.
b) Según la oferta: si llevas 3 unidades solo pagas 2.

a) $\frac{7}{15}$

b) $\frac{2}{3}$

- 3. María tiene 15 invitados para comer y quiere preparar una receta en la que se aconseja utilizar 350 g de carne para 6 raciones. Calcula la cantidad de carne que debe utilizar María para todos los invitados.**



Si para 6 personas son 350 g de carne, para una persona se aconseja: $\frac{350}{6} = \frac{175}{3}$ g de carne, con lo que para los 15 invitados:

$$15 \cdot \frac{175}{3} = \frac{2625}{3} = 875 \text{ g de carne para todos los invitados}$$

- 4. Calcula el término que falta para que las siguientes razones formen una proporción.**

- a) $\frac{x}{8}$ y $\frac{10}{16}$ c) $\frac{3}{5}$ y $\frac{x}{60}$ e) $\frac{x}{45}$ y $\frac{16}{18}$
b) $\frac{5}{x}$ y $\frac{2}{9}$ d) $\frac{15}{4}$ y $\frac{50}{x}$ f) $\frac{28}{42}$ y $\frac{50}{x}$

a) $x = \frac{8 \cdot 10}{16} = 5$

c) $x = \frac{60 \cdot 3}{5} = 36$

e) $x = \frac{45 \cdot 16}{18} = 40$

b) $x = \frac{5 \cdot 9}{2} = 22,5$

d) $x = \frac{4 \cdot 50}{15} = 13,3$

f) $x = \frac{42 \cdot 50}{28} = 75$

5. ¿Cuánto valen las x para que las siguientes razones formen una proporción?

a) $\frac{x}{4,2} = \frac{5,1}{8,4}$

c) $\frac{3,5}{1,4} = \frac{0,6}{x}$

e) $\frac{4,5}{x} = \frac{0,375}{0,6}$

b) $\frac{0,5}{x} = \frac{2,5}{12,5}$

d) $\frac{1,2}{3,4} = \frac{x}{1,7}$

f) $\frac{x}{2,7} = \frac{1,1}{9,9}$

a) $x = \frac{4,2 \cdot 5,1}{8,4} = 2,55$

c) $x = \frac{1,4 \cdot 0,6}{3,5} = 0,24$

e) $x = \frac{4,5 \cdot 0,6}{0,375} = 7,2$

b) $x = \frac{0,5 \cdot 12,5}{2,5} = 2,5$

d) $x = \frac{1,2 \cdot 1,7}{3,4} = 0,6$

f) $x = \frac{1,1 \cdot 2,7}{9,9} = 0,3$

6. Forma distintas proporciones con los números 3, 6, 9 y x . Indica el valor de x en cada una.

$\frac{3}{6}$ y $\frac{9}{18}$ con $x = 18$

$\frac{3}{9}$ y $\frac{6}{18}$ con $x = 18$

$\frac{6}{9}$ y $\frac{3}{4,5}$ con $x = 4,5$

$\frac{6}{3}$ y $\frac{18}{9}$ con $x = 18$

$\frac{9}{3}$ y $\frac{18}{6}$ con $x = 18$

$\frac{9}{6}$ y $\frac{4,5}{3}$ con $x = 4,5$

7. Halla el valor de x para que los siguientes grupos de números formen una proporción.

a) 5, 6, x , 10 d) 10, 4, 8, x

b) 5, x , 15, 9 e) 4, 9, x , 16

c) 12, 4, x , 6 f) x , 7, 4, 1

a) $\frac{5}{6} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 10}{6} = 8,3$

d) $\frac{10}{4} = \frac{8}{x} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 8}{10} = 3,2$

b) $\frac{5}{x} = \frac{15}{9} \rightarrow x = \frac{9 \cdot 5}{15} = 3$

e) $\frac{4}{9} = \frac{x}{16} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 16}{9} = 7,1$

c) $\frac{12}{4} = \frac{x}{6} \rightarrow x = \frac{12 \cdot 6}{4} = 18$

f) $\frac{x}{7} = \frac{4}{1} \rightarrow x = \frac{7 \cdot 4}{1} = 28$

8. Completa en tu cuaderno.

a) $\frac{\square}{5} = \frac{6}{15} = \frac{\square}{7,5}$

b) $\frac{20}{\square} = \frac{\square}{0,7} = \frac{5}{35}$

c) $\frac{9}{33} = \frac{\square}{0,22} = \frac{0,3}{\square}$

a) 2 y $3 \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{3}{7,5}$

b) 140 y $0,1 \rightarrow \frac{20}{140} = \frac{0,1}{0,7} = \frac{5}{35}$

c) $0,06$ y $1,1 \rightarrow \frac{9}{33} = \frac{0,06}{0,22} = \frac{0,3}{1,1}$

Proporcionalidad y porcentajes

9. Completa en tu cuaderno.

a) $\frac{\square}{75} = \frac{6}{15} = \frac{\square}{90} = \frac{30}{\square} = \frac{\square}{0,75}$

b) $\frac{\square}{70} = \frac{6}{35} = \frac{\square}{105} = \frac{30}{\square} = \frac{\square}{0,7}$

a) En orden de huecos de izquierda a derecha, los números son: 30, 36, 75, 0,3.

b) En orden de huecos de izquierda a derecha, los números son: 12, 18, 175, 0,12.

10. Una ONG que actúa en un país africano reparte cinco kilos de arroz por cada dos familias. Hoy se han repartido 45 kilos de arroz en total. Forma la proporción correspondiente y averigua el número de familias que ha recibido alimentos hoy.



La proporción que se cumple es $\frac{5}{2} : \frac{45}{18}$ con lo que han recibido alimentos 18 familias.

11. Completa la tabla en tu cuaderno y halla la constante de proporcionalidad.

N.º de billetes de 5 €	1	2	3	4	5	6
Dinero en total (€)	5	10	15	20	25	30

Constante de proporcionalidad: $\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \frac{4}{20}, \frac{5}{25}, \frac{6}{30}, 0,2$

12. Construye una tabla con los valores de dos magnitudes directamente proporcionales cuya constante de proporcionalidad sea $k = 2,4$.

Magnitud A	2,4	4,8	7,2	9,6	12
Magnitud B	1	2	3	4	5

13. Si con 14 años mides 1,4 m, ¿con 28 años medirás 2,8 m?

No, las magnitudes edad y años están relacionadas, pero no son directamente proporcionales.

14. Comprueba si son directamente proporcionales:

- a) La cantidad de litros de gasolina que caben en el depósito de un coche y la cantidad de dinero necesario para llenarlo.
 - b) Los litros de gasolina que caben en el depósito de un coche y la velocidad que puede alcanzar.
 - c) La velocidad con que se mueve un vehículo y el tiempo que tarda en recorrer cierta distancia.
 - d) El tiempo que un vehículo está en marcha, con velocidad constante, y la distancia recorrida.
- a) Sí son directamente proporcionales.
 - b) No son directamente proporcionales.
 - c) No son directamente proporcionales.
 - d) Sí son directamente proporcionales.

15. Comprueba si existe relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes A y B.

a)

A	3	4	11
B	1,65	2,2	6,05

b)

A	2	5	9
B	1,7	4	7,65

Tabla 1:

$$\frac{3}{1,65} = 1,8\bar{1} \quad \frac{4}{2,2} = 1,8\bar{1} \quad \frac{11}{6,05} = 1,8\bar{1} \rightarrow A \text{ y } B \text{ son directamente proporcionales.}$$

Tabla 2:

$$\frac{2}{1,7} = 1,1764705\dots \quad \frac{5}{4} = 1,25 \rightarrow A \text{ y } B \text{ no son directamente proporcionales.}$$

16. Sabiendo que las magnitudes A y B son directamente proporcionales, completa en tu cuaderno las tablas.

a)

A	2	5	8	17
B	4,6	11,5	18,4	39,1

b)

A	3	4	7	12
B	10,2	13,6	23,8	40,8

17. Completa la tabla en tu cuaderno para que las magnitudes A y B sean directamente proporcionales con la constante de proporcionalidad que se da en cada caso.

A	6			100
B		10	24	

- a) La constante de proporcionalidad es 2,5.
- b) La constante de proporcionalidad es 0,6.

a)

A	6	25	60	100
B	2,4	10	24	40

b)

A	6	6	14,4	100
B	10	10	24	166,7

Proporcionalidad y porcentajes

18. En el comedor han comido hoy 54 personas y se han necesitado 18 barras de pan.

- Para 72 personas, ¿cuántas barras se necesitarán?
- Si hay 22 barras, ¿para cuántas personas habrá pan?

a) $\frac{54}{18} = \frac{72}{x} \rightarrow x = \frac{18 \cdot 72}{54} = 24 \rightarrow$ Se necesitarán 24 barras de pan

b) $\frac{54}{18} = \frac{x}{22} \rightarrow x = \frac{54 \cdot 22}{18} = 66 \rightarrow$ Habrá pan para 66 personas

19. Completa en tu cuaderno estas tablas para que A y B sean directamente proporcionales.

A	1	3	4	5	
B	1,5	4,5	6	7,5	

A	6	2	12	14	18
B	5	1,67	10	11,7	15

20. La bolsa de magdalenas de 750 g cuesta, sin oferta, 1,50 € y con oferta, 1,20 €. Calcula la rebaja de los artículos A y B que se venden en el mismo establecimiento, sabiendo que se mantiene la relación entre el precio inicial y el rebajado.



$$\frac{1,5}{1,2} = \frac{4,6}{x} = \frac{1}{y} \rightarrow x = \frac{1,2 \cdot 4,6}{1,5} = 3,68 \quad y = \frac{1,2 \cdot 1}{1,5} = 0,8$$

La botella de aceite (producto A) sale a 3,68 €, su rebaja es de 92 céntimos, y la tableta de chocolate (producto B) sale a 0,8 €, su rebaja es de 20 céntimos.

21. Por 5 entradas de cine hemos pagado 36,25 €.

- ¿Cuánto pagaríamos si comprásemos 8 entradas?
- ¿Cuántas entradas podríamos comprar con 108,75 €?

Son magnitudes directamente proporcionales.

a) 5 entradas → 36,25 €
8 entradas → x €

b) 5 entradas → 36,25 €
x entradas → 108,75 €

$$x = \frac{8 \cdot 36,25}{5} = 58 \text{ €}$$

$$x = \frac{5 \cdot 108,75}{36,25} = 15 \text{ entradas}$$

22. Esta tabla relaciona el precio de una autopista de peaje con los kilómetros que se recorren en ella. Averigua si estas magnitudes son directamente proporcionales.

Distancia (km)	25	50	100
Precio (€)	3	6	12

- ¿Cuánto pagaré si recorro 180 km por la autopista?
- Si pago 15 €, ¿cuántos kilómetros he recorrido?

Son directamente proporcionales.

a) $25 \text{ km} \rightarrow 3 \text{ €}$

$180 \text{ km} \rightarrow x \text{ €}$

$$x = \frac{180 \cdot 3}{25} = 21,60 \text{ €}$$

b) $25 \text{ km} \rightarrow 3 \text{ €}$

$x \text{ km} \rightarrow 15 \text{ €}$

$$x = \frac{25 \cdot 15}{3} = 125 \text{ km}$$

23. Tres kilos de filetes valen 20,70 €.

a) ¿Cuántos kilos puedo comprar con 55,20 €?

b) ¿Cuánto cuestan 12,5 kg de filetes?

c) ¿Y 250 g de filetes?

Son magnitudes directamente proporcionales.

a) $3 \text{ kg} \rightarrow 20,70 \text{ €}$

$x \text{ kg} \rightarrow 55,20 \text{ €}$

$$x = \frac{3 \cdot 55,2}{20,7} = 8 \text{ kg}$$

b) $3 \text{ kg} \rightarrow 20,70 \text{ €}$

$12,5 \text{ kg} \rightarrow x \text{ €}$

$$x = \frac{12,5 \cdot 20,7}{3} = 86,25 \text{ €}$$

c) $3 \text{ kg} \rightarrow 20,70 \text{ €}$

$0,25 \text{ kg} \rightarrow x \text{ €}$

$$x = \frac{0,25 \cdot 20,7}{3} = 1,725 \text{ €}$$

24. Una familia gasta en comida 660 € mensuales.

a) ¿Cuál es su gasto semanal? b) ¿Y el anual?

a) $\frac{660}{30} = 22 \text{ € al día} \rightarrow 22 \cdot 7 = 154 \text{ € a la semana.}$

b) $660 \cdot 12 = 7920 \text{ € al año.}$

25. Un reloj se adelanta 2 minutos cada semana.

a) ¿Cuántos minutos de adelanto llevará ese reloj después de 5 semanas desde que se puso en la hora correcta?

b) Si lleva 18 minutos de adelanto, ¿hace cuántas semanas que se puso en hora correcta?

Los minutos que se adelanta y las semanas son magnitudes directamente proporcionales.

a) 2 minutos → 1 semana

$x \text{ minutos} \rightarrow 5 \text{ semanas}$

$$x = 5 \cdot 2 = 10 \text{ minutos de adelanto}$$

b) 2 minutos → 1 semana

$18 \text{ minutos} \rightarrow x \text{ semanas}$

$$x = 18/2 = 9 \text{ semanas}$$

Proporcionalidad y porcentajes

26. Dieciocho obreros realizan un trabajo en 30 días. Copia y completa la tabla.

N.º de obreros	3	9	18	36	72
N.º de días	180	60	30	15	7,5

27. Construye una tabla con los valores de dos magnitudes inversamente proporcionales cuya constante inversa sea $k = 1,5$.

x	0,75	1	1,5	2
y	2	1,5	1	0,75

28. Si dos albañiles tardan en hacer una pared 4 horas, ¿cuánto tardarán 3 albañiles?

$$2 \cdot 4 = 3 \cdot x \rightarrow x = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3} \rightarrow \text{Tres albañiles tardarán } 2 \text{ h y } 40 \text{ min.}$$

29. Estudia si la relación que existe entre los siguientes pares de magnitudes es inversamente proporcional.

- a) Número de personas que se reparten una tarta y la porción que le toca a cada uno.
 - b) Velocidad y tiempo en un movimiento con velocidad constante.
 - c) Horas que un alumno ve la televisión y número de horas de estudio.
 - d) Número de vehículos en circulación y número de carnets de conducir en vigor.
 - e) Cantidad de dinero que una familia destina al ahorro y cantidad de dinero que dedica a gastos.
 - f) Cantidad de aprobados y cantidad de suspensos en una asignatura.
 - g) Número de albañiles y tiempo que tardan en levantar una pared.
- a) Es inversamente proporcional. Cuantas más personas se repartan la tarta menos porción le tocará a cada uno.
 - b) No es inversamente proporcional. A medida que aumenta el tiempo la velocidad no varía.
 - c) No es inversamente proporcional. Si aumenta el número de horas que un alumno ve la televisión no tiene porqué variar el número de horas de estudio.
 - d) No es inversamente proporcional. Si aumenta el número de vehículos en circulación no disminuye el número de carnets de conducir en vigor.
 - e) No es inversamente proporcional. No existe constante de proporcionalidad, ya que si, por ejemplo, una familia gana 1 000 €, si gasta 800 ahorrará 200, si gasta 900 ahorrará 100, pero $800 \cdot 200 = 900 \cdot 100$.
 - f) No es inversamente proporcional. No existe constante de proporcionalidad, ya que si, por ejemplo, en una clase hay 30 alumnos, si aprueban 25 suspenderán 5, si aprueban 20 suspenderán 10, pero $25 \cdot 5 = 20 \cdot 10$.
 - g) Es inversamente proporcional. Cuantos más albañiles trabajen menos tiempo tardarán en levantar la pared.

30. Determina si estas tablas representan magnitudes de proporcionalidad inversa.

a)

A	1	2	3	5
B	6	3	2	1

b)

A	2	4	6	8
B	24	12	8	6

a) $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 5 \cdot 1 \rightarrow$ No representan magnitudes de proporcionalidad inversa.

b) $2 \cdot 24 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8 = 8 \cdot 6 = 48 \rightarrow$ Sí representan magnitudes de proporcionalidad inversa.

31. Corrige estas tablas sabiendo que A y B representan magnitudes inversamente proporcionales.

A	1	2	3	4	5	6
B	9	8	7	6	5	4

A	2	4	8	16	1,5	6,4
B	8	4	2	0	10	2,5

Respuesta abierta. Por ejemplo:

A	1	2	3	4	5	6
B	24	12	8	6	$\frac{24}{5}$	4

A	2	4	8	16	1,6	6,4
B	8	4	2	1	10	2,5

32. Completa estas tablas sabiendo que A y B son magnitudes inversamente proporcionales.

A	6	5	30	10
B	90	108	18	54

A	9	10	15	25
B	50	45	30	18

33. Un coche tarda 8 horas en recorrer un trayecto a 90 km/h. ¿Cuánto tardaría en recorrer el mismo trayecto si circulase a 60 km/h?

$$e = v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2 \rightarrow 90 \cdot 8 = 60 \cdot x \rightarrow x = 12 \text{ h}$$

Si circulase a 60 km/h tardaría 12 h.

34. ¿Cuál de estas ofertas es la mejor?

- a) El segundo artículo a mitad de precio.
 b) Llevando tres artículos se pagan dos.
 c) Llevando seis, se regala uno.

a)

N.º Artículos	1	2	3	4	5	6	7	...
Precio total	a	a	$\frac{a}{2}$	$\frac{3a}{2}$	$\frac{3a}{2}$	a	$\frac{5a}{2}$	$\frac{5a}{2}$
Precio/unidad	a	$0,75a$	$\frac{5}{6}a$	$0,75a$	$0,8a$	$0,75a$	$\frac{11}{14}a$...

b)

N.º Artículos	1	2	3	4	5	6	7	...
Precio total	a	$2a$	$2a$	$3a$	$4a$	$4a$	$5a$...
Precio/unidad	a	a	$\frac{2}{3}a$	$0,75a$	$0,8a$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{5}{7}a$...

c)

N.º Artículos	1	2	3	4	5	6	7	...
Precio total	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$6a$...
Precio/unidad	a	a	a	a	a	a	$\frac{6}{7}a$...

Dependiendo del número de artículos que se quieran comprar la mejor oferta será la primera o la segunda.

Proporcionalidad y porcentajes

35. Con un consumo de 4 horas diarias, un depósito de gas dura 24 días.

a) ¿Cuánto duraría con un consumo de 6 horas diarias?

b) ¿Y si solo se utiliza durante 2 horas al día?

a) $4 \cdot 24 = 6 \cdot x \rightarrow x = 16 \rightarrow$ Durará 16 días.

b) $4 \cdot 24 = 2 \cdot x \rightarrow x = 48 \rightarrow$ Durará 48 días.

36. Con Un ganadero tiene alpacas de paja para alimentar a 20 vacas durante 60 días.

a) Si compra 10 vacas más, ¿para cuántos días tiene alimento?

b) ¿Y si vende 5 vacas?

c) ¿Cuántas vacas tiene si le queda comida para un mes?

a) $20 \cdot 60 = 30 \cdot x \rightarrow x = 40 \rightarrow$ Tiene alimento para 40 días.

b) $20 \cdot 60 = 15 \cdot x \rightarrow x = 80 \rightarrow$ Tiene alimento para 80 días.

c) $20 \cdot 60 = x \cdot 30 \rightarrow x = 40 \rightarrow$ Tiene 40 vacas.

37. El agua de un pozo se saca en 200 veces utilizando un cubo de 15 litros de capacidad.

a) Si empleamos un cubo de 25 litros, ¿cuántas veces necesitaremos introducir el cubo en el pozo para sacar la misma cantidad de agua?

b) ¿Y si el cubo es de 7 litros?

a) $200 \cdot 15 = 25 \cdot x \rightarrow x = 120 \rightarrow$ Necesitaremos introducir el cubo 120 veces.

b) $200 \cdot 15 = 7 \cdot x \rightarrow x = 428,57 \rightarrow$ Necesitaremos introducir el cubo 429 veces.

38. Una tierra que aran 4 tractores se tarda en arar 3 días.

a) ¿Cuánto se tardaría si se arase con 6 tractores?

b) Si han tardado 12 días, ¿cuántos tractores se han utilizado?

c) ¿Cuánto tardarían los 4 tractores si la superficie de tierra a arar fuese el doble?

a) $4 \cdot 3 = 6 \cdot x \rightarrow x = 2 \rightarrow$ Se tardarían 2 días.

b) $4 \cdot 3 = 12 \cdot x \rightarrow x = 1 \rightarrow$ Se ha utilizado un tractor.

c) Tardarían el doble de días → Los 4 tractores tardarían 6 días.

39. Calcula estos porcentajes.

a) 22% de 88

b) 12% de 124

a) $22\% \text{ de } 88 = \frac{22}{100} \cdot 88 = 19,36$

b) $12\% \text{ de } 124 = \frac{12}{100} \cdot 124 = 14,88$

40. Expresa en forma de porcentaje:

- a) 23 de cada 50 b) 15 de cada 75

$$\text{a)} \frac{23}{50} = \frac{x}{100} = \frac{46}{100} \rightarrow 46\%$$

$$\text{b)} \frac{15}{75} = \frac{x}{100} = \frac{20}{100} \rightarrow 20\%$$

41. Comprueba si es cierto.

- a) El 24 % de 45 es lo mismo que el 45 % de 24.
 b) El 27 % de 30 es lo mismo que el 9 % de 90.
 c) El 35 % de 12 es lo mismo que el 28 % de 15.

$$\text{a)} 24\% \text{ de } 45 = \frac{24}{100} \cdot 45 = 10,8 \quad 45\% \text{ de } 24 = \frac{45}{100} \cdot 24 = 10,8 \rightarrow \text{Sí es lo mismo.}$$

$$\text{b)} 27\% \text{ de } 30 = \frac{27}{100} \cdot 30 = 8,1 \quad 9\% \text{ de } 90 = \frac{9}{100} \cdot 90 = 8,1 \rightarrow \text{Sí es lo mismo.}$$

$$\text{c)} 35\% \text{ de } 12 = \frac{35}{100} \cdot 12 = 4,2 \quad 28\% \text{ de } 15 = \frac{28}{100} \cdot 15 = 4,2 \rightarrow \text{Sí es lo mismo.}$$

42. En una empresa se fabrican diariamente 80 lavadoras, de las que un 65 % se venden en el extranjero. ¿Cuántas lavadoras se dedican a la exportación diariamente?

$$\frac{80}{100} \cdot \frac{P}{65} \rightarrow P = \frac{80 \cdot 65}{100} = 52 \text{ lavadoras se dedican a la exportación cada día.}$$

43. Ayer, de los 3750 pacientes que ingresaron en urgencias, el 12 % quedaron hospitalizados. ¿Cuántas personas de las que fueron a urgencias ayer quedaron ingresadas?

$$\frac{3750}{100} \cdot \frac{P}{12} \rightarrow P = \frac{3750 \cdot 12}{100} = 450 \text{ personas quedaron ingresadas.}$$

44. Se estima que entre el 4 % y el 7 % de la producción de tomates de una zona se estropea antes de ponerse a la venta. Si la producción ha sido de 3 t, ¿qué cantidad de tomates, como máximo, se pondrá a la venta?

$100 - 4 = 96 \rightarrow$ Se pondrá a la venta, como máximo, el 96 % de la producción.

$$\frac{3}{100} \cdot \frac{P}{96} \rightarrow P = \frac{3 \cdot 96}{100} = 2,88 \text{ t} = 2880 \text{ kg de tomates se pondrán a la venta como máximo.}$$

45. El 40 % de los trabajadores de una empresa acude a su trabajo en transporte público, el 25 % lo hace en vehículo propio y el resto llega caminando. Si la multinacional tiene 1400 trabajadores, calcula cuántos llegan caminando.

$100 - 40 - 25 = 35 \rightarrow$ El 35 % de los trabajadores va caminando al trabajo.

$$\frac{1400}{100} \cdot \frac{P}{35} \rightarrow P = \frac{1400 \cdot 35}{100} = 490 \text{ empleados llegan caminando.}$$

Proporcionalidad y porcentajes

46. El 47% de los 1500 habitantes de una localidad son mayores de edad y el 38% tienen menos de 10 años. ¿Cuántos habitantes tienen entre 10 y 18 años?



$100 - 47 - 38 = 15 \rightarrow$ El 15 % de los habitantes tienen entre 10 y 18 años.

$$\frac{1500}{100} \cdot \frac{P}{15} \rightarrow P = \frac{1500 \cdot 15}{100} = 225 \text{ habitantes tienen entre 10 y 18 años.}$$

47. Se ha entrevistado a 500 personas y 340 de ellas afirman que disponen de Internet en su casa. Expresa esta cantidad mediante un porcentaje.

$$\frac{500}{100} \cdot \frac{340}{a} \rightarrow a = \frac{340 \cdot 100}{500} = 68\%$$

48. Tenía 30000 € y me he gastado 22500 € en comprar un coche. ¿Qué porcentaje he gastado?

$$\frac{30\,000}{100} \cdot \frac{22\,500}{a} \rightarrow a = \frac{22\,500 \cdot 100}{30\,000} = 75\%$$

49. Si a es el 10% de una cantidad, razona si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- a) $2a$ es el 10% del doble de esa cantidad.
- b) $2a$ es el 20% de esa cantidad.
- c) La cantidad es $10a$.

a) $a = 10\% \text{ de } C \rightarrow a = \frac{10 \cdot C}{100} \rightarrow 2a = \frac{2 \cdot 10 \cdot C}{100} = \frac{10 \cdot 2C}{100} \rightarrow 2a = 10\% \text{ de } 2C \rightarrow$ Es cierta.

b) $a = 10\% \text{ de } C \rightarrow a = \frac{10 \cdot C}{100} \rightarrow 2a = \frac{2 \cdot 10 \cdot C}{100} = \frac{20 \cdot C}{100} \rightarrow 2a = 20\% \text{ de } C \rightarrow$ Es cierta.

c) $\frac{C}{100} \cdot \frac{a}{10} \rightarrow C = \frac{100 \cdot a}{100} = 10a \rightarrow$ Es cierta.

50. El 40% de los alumnos de un grupo de 1.º de ESO se han presentado a un concurso literario. Calcula el número de alumnos de ese grupo si los que se han presentado al concurso son 12.

Total Parte

$$100 \text{ alumnos} \rightarrow 40 \text{ alumnos}$$
$$x \text{ alumnos} \rightarrow 12 \text{ alumnos}$$

$$x = \frac{100 \cdot 12}{40} = 30 \text{ alumnos hay en total}$$

- 51.** El 15% de las ventas de un comercio ha sido de productos que valían 100 € o más. Si se han realizado 595 ventas de productos que valían menos de 100 €, ¿qué número de ventas se han realizado en total?

$100 - 15 = 85 \rightarrow$ El 85 % de los productos vendidos valía menos de 100 €.

<u>Total</u>	<u>Parte</u>
100 productos	→ 85 productos
x productos	→ 595 productos
$x = \frac{100 \cdot 595}{85} = 700$ productos	

- 52.** Se ha hecho una encuesta a 650 personas: 208 contestaron Sí, 403 contestaron NO y el resto no contestó. Calcula el porcentaje de cada grupo.

$650 - 208 - 403 = 39 \rightarrow$ 39 personas no contestaron

<u>Total</u>	<u>Parte</u>
100 personas	→ x contestaron Sí
650 personas	→ 208 contestaron Sí
$x = \frac{100 \cdot 208}{650} = 32\%$	

<u>Total</u>	<u>Parte</u>
100 personas	→ y contestaron NO
650 personas	→ 403 contestaron NO
$y = \frac{100 \cdot 403}{650} = 62\%$	

<u>Total</u>	<u>Parte</u>
100 personas	→ z no contestaron
650 personas	→ 39 no contestaron
$z = \frac{100 \cdot 39}{650} = 6\%$	

Contestaron Sí el 32 % de los encuestados; NO, el 62 %, y no contestaron, el 6 %.

- 53.** En un aeropuerto han aterrizado hoy 850 aviones.

- El 96 % ha llegado a la hora prevista.
- 765 aviones de los que han aterrizado eran vuelos de más de 2 horas de duración.

- a) ¿Cuántos aviones han llegado puntuales?
 b) ¿Qué porcentaje de los aviones han realizado vuelos de más de 2 horas?

a) 100 aviones → 96 han llegado puntuales
 850 aviones → x han llegado puntuales
 $x = \frac{850 \cdot 96}{100} = 816$ aviones han llegado a la hora prevista.

b) 100 aviones → x de más de 2 h
 850 aviones → 765 de más de 2 h
 $x = \frac{765 \cdot 100}{850} = 90\%$ de los aviones han realizado vuelos de más de 2 horas.

Proporcionalidad y porcentajes

54. De cada 20 mascotas, 9 son perros y 4 son gatos.

- a) En un vecindario en el que hay 140 mascotas, ¿cuántos gatos y perros habrá?
b) Si en un barrio hay 32 perros, ¿cuántos gatos habrá?

a) Total Parte

$$20 \text{ mascotas} \rightarrow 9 \text{ perros}$$
$$140 \text{ mascotas} \rightarrow x \text{ perros}$$

$$x = \frac{140}{20} \cdot 9 = 63 \text{ perros}$$

Total Parte

$$20 \text{ mascotas} \rightarrow 4 \text{ gatos}$$
$$140 \text{ mascotas} \rightarrow y \text{ gatos}$$

$$y = \frac{140}{20} \cdot 4 = 28 \text{ gatos}$$

b) Total Parte

$$9 \text{ perros} \rightarrow 4 \text{ gatos}$$
$$36 \text{ perros} \rightarrow x \text{ gatos}$$

$$x = \frac{36}{9} \cdot 4 = 16 \text{ gatos}$$

ACTIVIDADES FINALES

55. Expresa mediante una razón.

- a) Para elaborar una tarta de ocho raciones se necesitan 400 g de harina.
b) Para pintar una pared de 7 m^2 se han empleado 2 kg de pintura.
c) Para escribir 52 páginas de un libro se han invertido 16 días.
d) En un restaurante se consume 1,5 kg de arroz por cada 10 comensales.

a) $\frac{8}{400} \quad \frac{1}{50}$

b) $\frac{7}{2}$

c) $\frac{52}{16} \quad \frac{13}{4}$

d) $\frac{1,5}{10}$

56. En el comedor del colegio ponen 3 barras de pan por cada 8 alumnos. Hoy hemos comido 124 alumnos y han puesto 50 barras. ¿Se ha mantenido la proporción?

Proporciones: $\frac{3}{8}$ y $\frac{50}{124} \rightarrow 3 \cdot 124 \neq 8 \cdot 50 \rightarrow 372 \neq 400 \rightarrow$ No se ha mantenido la proporción.

57. Para construir una pared se necesitan 3 379 ladrillos y 62 sacos de cemento. ¿Cuál es la razón entre ladrillos y cemento en esa pared?



$$\frac{3\,379}{62} \quad \frac{109}{2}$$

58. Escribe una proporción en cada caso.

- a) Los extremos son 8 y 15.
- b) Los medios son 10 y 12.
- c) Los antecedentes son 4 y 10.
- d) Los consecuentes son 16 y 20.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{8}{5} \quad \frac{24}{15}$

c) $\frac{4}{12} \quad \frac{10}{30}$

b) $\frac{20}{10} \quad \frac{12}{6}$

d) $\frac{8}{16} \quad \frac{10}{20}$

59. Escribe la proporción $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$ de otra forma y comprueba que sigue siendo una proporción.

$$\frac{9}{4} = \frac{18}{8} \rightarrow 9 \cdot 8 = 4 \cdot 18 \rightarrow 72 = 72$$

60. Forma proporciones con estos números.

- a) 6, 15, 8 y 20
- b) 10, 15, 18 y 27
- c) 8, 22, 12 y 33

a) $\frac{6}{15} \quad \frac{8}{20}$

b) $\frac{10}{15} \quad \frac{18}{27}$

c) $\frac{22}{8} \quad \frac{33}{12}$

61. Halla el valor de x.

a) $\frac{x}{2} = \frac{4}{8}$

c) $\frac{6}{x} = \frac{10}{5}$

b) $\frac{18}{15} = \frac{x}{25}$

d) $\frac{9}{27} = \frac{10}{x}$

a) $x = \frac{2 \cdot 4}{8} = 1$

b) $x = \frac{18 \cdot 25}{15} = 30$

c) $x = \frac{6 \cdot 5}{10} = 3$

d) $x = \frac{27 \cdot 10}{9} = 30$

Proporcionalidad y porcentajes

62. Completa en tu cuaderno.

a) $\frac{\square}{50} = \frac{6}{10} = \frac{\square}{60} = \frac{30}{\square} = \frac{\square}{0,5}$

b) $\frac{\square}{54} = \frac{6}{27} = \frac{\square}{91} = \frac{30}{\square} = \frac{\square}{5,4}$

c) $\frac{\square}{77} = \frac{6}{33} = \frac{\square}{121} = \frac{30}{\square} = \frac{\square}{0,22}$

a) 30, 36, 50 y 0,3

b) 12, 18, 135 y 1,2

c) 14, 7, 22, 165 y 0,04

64. Calcula el valor de x para que las siguientes razones formen una proporción.

a) $\frac{x+1}{6} = \frac{4}{8}$

c) $\frac{1}{x-2} = \frac{14}{7}$

e) $\frac{5}{9} = \frac{10}{x+3}$

b) $\frac{15}{28} = \frac{2x}{7}$

d) $\frac{22}{5} = \frac{2}{3-x}$

f) $\frac{x-8}{6} = \frac{2}{3}$

a) $(x+1) \cdot 8 = 6 \cdot 4 \rightarrow 8x + 8 = 24 \rightarrow 8x = 24 - 8 \rightarrow x = 16/8 \rightarrow x = 2$

b) $15 \cdot 7 = 28 \cdot 2x \rightarrow 105 = 56x \rightarrow x = 105/56 \rightarrow x = 1,875$

c) $7 = (x-2) \cdot 14 \rightarrow 7 = 14x - 28 \rightarrow 14x = 7 + 28 \rightarrow x = 35/14 \rightarrow x = 2,5$

d) $22 \cdot (3-x) = 5 \cdot 2 \rightarrow 66 - 22x = 10 \rightarrow 22x = 66 - 10 \rightarrow x = 56/22 \rightarrow x = 2,54$

e) $5 \cdot (x+3) = 9 \cdot 10 \rightarrow 5x + 15 = 90 \rightarrow 5x = 90 - 15 \rightarrow x = 75/5 \rightarrow x = 15$

f) $(x-8) \cdot 3 = 6 \cdot 2 \rightarrow 3x - 24 = 12 \rightarrow 3x = 24 + 12 \rightarrow x = 36/3 \rightarrow x = 12$

65. Forma una razón con estos datos: «5 litros de aceite valen 15,25 €». Establece proporciones de esta razón con los siguientes datos y calcula su constante de proporcionalidad.

a) 20 litros

c) 76,25 €

b) 25 litros

d) 61 €

$$\frac{5}{15,25} = \frac{20}{61} \quad 20 \text{ litros de aceite valen } 61 \text{ euros}$$

$$\frac{5}{15,25} = \frac{25}{76,25} \quad 25 \text{ litros de aceite vale } 76,25 \text{ euros}$$

Constante de proporcionalidad = 0,328



66. Para hacer un pastel se emplean 100 g de azúcar por cada 240 g de harina. Escribe la proporción que corresponde a estas cantidades y calcula la cantidad de harina o azúcar correspondiente.

a) 200 g de azúcar d) 320 g de harina

b) 150 g de harina e) 475 g de azúcar

c) 750 g de azúcar f) 770 g de harina



Proporción: $\frac{100}{240}$

a) $\frac{100}{240} = \frac{200}{x} \rightarrow x = \frac{240 \cdot 200}{100} \rightarrow x = 480 \text{ g de harina}$

b) $\frac{100}{240} = \frac{x}{150} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 150}{240} \rightarrow x = 62,5 \text{ g de azúcar}$

c) $\frac{100}{240} = \frac{750}{x} \rightarrow x = \frac{240 \cdot 750}{100} \rightarrow x = 1800 \text{ g de harina}$

d) $\frac{100}{240} = \frac{x}{320} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 320}{240} \rightarrow x = 133,3 \text{ g de azúcar (133 g aproximadamente)}$

e) $\frac{100}{240} = \frac{475}{x} \rightarrow x = \frac{240 \cdot 475}{100} \rightarrow x = 1140 \text{ g de harina}$

f) $\frac{100}{240} = \frac{x}{770} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 770}{240} \rightarrow x = 320,83 \text{ g de azúcar (321 g aproximadamente)}$

67. Comprueba que estos datos forman una proporción.

Barras de pan	1	4
Harina	250 g	1 kg

Escribe esta proporción de todas las maneras que sepas y calcula en cada caso la constante de proporcionalidad y su significado. ¿Qué relación observas entre las constantes calculadas?

$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$

$\frac{1}{250} = \frac{4}{1000} \rightarrow 1 \cdot 1000 = 250 \cdot 4 \rightarrow 1000 = 1000 \rightarrow \text{Es una proporción.}$

Constante de proporcionalidad = 0,004

Formas de escribir la proporción:

$\frac{1}{250} = \frac{4}{1000} \rightarrow \text{Constante de proporcionalidad} = 0,004$

$\frac{250}{1} = \frac{1000}{4} \rightarrow \text{Constante de proporcionalidad} = 250$

Las constantes de proporcionalidad son inversas $\rightarrow \frac{1}{250} = 0,004 \quad \frac{1}{0,004} = 250$

68. Indica cuáles de estas magnitudes son directa o inversamente proporcionales.

- a) El número de amigos que van al cine y el número de entradas que necesitan.
 - b) Las horas de trabajo que dedica un albañil a hacer una pared y el tiempo que tarda en terminarla.
 - c) La cantidad de agua que sale de un grifo y el tiempo necesario para llenar una bañera.
 - d) El número de animales que hay en una granja y la cantidad de pienso que se consume.
- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) Son directamente proporcionales. | c) Son inversamente proporcionales. |
| b) Son inversamente proporcionales. | d) Son directamente proporcionales. |

Proporcionalidad y porcentajes

69. Indica si estas magnitudes son directa o inversamente proporcionales y en qué condiciones lo serían.

- a) El número de personas que acuden a una cena y la cantidad de alimento necesario.
 - b) El número de personas que participan en la compra de un regalo y el dinero que aporta cada una.
 - c) La capacidad de una botella de agua y el número de vasos que se pueden llenar.
 - d) El número de jornaleros y el tiempo que tardan en la recogida de la aceituna.
 - e) El número de pisos de un edificio y la altura de este.
 - f) El número de viviendas de un edificio y las personas que viven en él.
- a) Son directamente proporcionales. Cuanta más gente acuda más alimento será necesario.
 - b) Son inversamente proporcionales. Cuanta más gente participe menos dinero aportará cada uno.
 - c) Son directamente proporcionales. Cuanta más capacidad tenga la botella más vasos se podrán llenar.
 - d) Son inversamente proporcionales. Cuantos más jornaleros haya menos tiempo se tardará en la recogida.
 - e) Son directamente proporcionales. Cuantos más pisos tenga el edificio mayor será su altura.
 - f) Podrían ser directamente proporcionales bajo la condición de que en cada vivienda habitase el mismo número de personas.

70. Los datos de la tabla corresponden a diferentes pesos de pintura y su precio. Completa los valores que faltan.

Pintura (kg)	1	2	3	b
Precio (€)	8	16	a	48

$$\frac{1}{8} = \frac{2}{16} = 0,125 \rightarrow \text{Son directamente proporcionales}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{3}{a} \rightarrow a = \frac{8 \cdot 3}{1} \rightarrow a = 24 \text{ €} \quad \frac{1}{8} = \frac{b}{48} \rightarrow b = \frac{48}{8} \rightarrow b = 6 \text{ kg}$$

71. Calcula la constante de proporcionalidad entre las magnitudes A y B y completa las tablas en tu cuaderno.

- a) A: Número de toneles para almacenar una cantidad de vino

B: Capacidad de los toneles

A	4	8	16
B		200	

- b) A: Litros de agua consumidos en una casa

B: Precio a pagar por el agua consumida

A	25	38	66
B		2,28 €	

- c) A: Minutos que he estado caminando

B: Kilómetros recorridos

A	30	45	70
B	3		

a) Constante de proporcionalidad = $8 \cdot 200 = 1600$

A	4	8	16
B	400	200	100

b) Constante de proporcionalidad = $\frac{38}{2,28} = \frac{950}{57}$

A	25	38	66
B	1,5	2,28	3,96

c) Constante de proporcionalidad = $\frac{30}{3} = 10$

A	30	45	70
B	3	4,5	7

72. Determina si estas magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa las tablas.

La primera tabla corresponde a dos magnitudes inversamente proporcionales, y la segunda a dos magnitudes directamente proporcionales.

Magnitud A	6	2	12	14	26	24/5
Magnitud B	12	36	6	36/7	36/13	15

Magnitud A	7	21	8	42	105	10
Magnitud B	14	42	16	84	210	20

73. Construye una tabla con valores de dos magnitudes directamente proporcionales sabiendo que su constante de proporcionalidad es:

- a) $k = 1,6$ b) $k = 0,2$ c) $k = 4$

Construye otra tabla considerando que estas son las constantes de proporcionalidad inversa.

a)

MAGNITUD A	1	2	3	4
MAGNITUD B	0,625	1,25	1,875	2,5

MAGNITUD A	1	2	4	8
MAGNITUD B	1,6	0,8	0,4	0,2

b)

MAGNITUD A	1	2	3	4
MAGNITUD B	5	10	15	20

MAGNITUD A	1	2	4	8
MAGNITUD B	0,2	0,1	0,05	0,025

c)

MAGNITUD A	8	10	12	16
MAGNITUD B	2	2,5	3	4

MAGNITUD A	1	2	4	8
MAGNITUD B	4	2	1	0,5

Proporcionalidad y porcentajes

74. Si un sofá de 2 plazas cuesta la mitad que uno de cuatro, y uno de tres plazas cuesta una cuarta parte menos que el de cuatro plazas, ¿el número de plazas y el precio son directamente proporcionales?

El sofá de 3 plazas cuesta $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ partes de lo que cuesta el de 4.

$$\frac{2}{1} = \frac{3}{\frac{3}{4}} \rightarrow 2 \cdot 0,75 = 0,5 \cdot 3 \rightarrow 1,5 = 1,5 \rightarrow$$
 Sí, son directamente proporcionales.

75. Sergio sale a correr todos los días. Descansa 5 minutos cada 3,5 km de recorrido.

- a) ¿Cuántos minutos descansa si recorre 14 km?
b) Si ha descansado 30 minutos, ¿cuántos kilómetros ha recorrido?

$$a) \frac{5}{3,5} = \frac{x}{14} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 14}{3,5} \rightarrow x = 20 \text{ minutos}$$

$$b) \frac{5}{3,5} = \frac{30}{x} \rightarrow x = \frac{3,5 \cdot 30}{5} \rightarrow x = 21 \text{ km}$$

76. Luis se ha leído un libro de 270 páginas en 15 días. Si mantiene su ritmo de lectura, ¿cuánto tardará en leer uno de 450 páginas?

$$\frac{270}{15} = \frac{450}{x} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 450}{270} \rightarrow x = 25 \text{ días}$$



77. Un comerciante gana 3 € por cada 14 € en ventas.

- a) ¿Cuánto ganará si logra hacer unas ventas de 406 €?
b) ¿Qué ventas ha realizado si ha ganado 102 €?

$$a) \frac{3}{14} = \frac{x}{406} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 406}{14} \rightarrow x = 87 \text{ € de ganancia}$$

$$b) \frac{3}{14} = \frac{102}{x} \rightarrow x = \frac{14 \cdot 102}{3} \rightarrow x = 476 \text{ € de ventas}$$

78. Tres caballos consumen una carga de heno en 10 días. ¿Cuánto les durará la misma cantidad de heno a 5 caballos?

$$3 \cdot 10 = 5 \cdot x \rightarrow x = 6$$

Les durará 6 días.

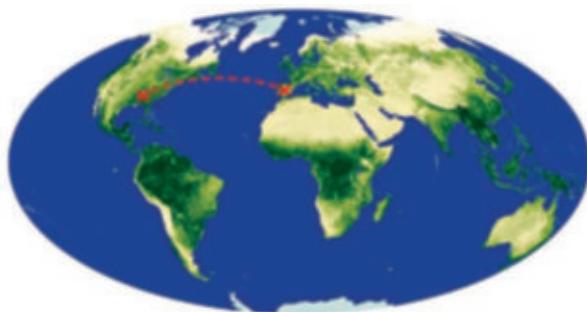
79. Cuatro excavadoras han levantado las aceras de mi calle en 14 días. Para tardar 7 días, ¿cuántas excavadoras se necesitarán?

$$4 \cdot 14 = x \cdot 7 \rightarrow x = 8$$

Necesitarán 8 excavadoras.

80. El cambio de euros a dólares en el día de hoy es: 1 euro = 1,165 dólares.

Queremos ir de viaje a Estados Unidos y vamos al banco para cambiar 325 euros. ¿Cuántos dólares recibiremos por esa cantidad de euros?



$$\frac{1}{1,165} \quad \frac{325}{x} \rightarrow x = 325 \cdot 1,165 = 378,63 \text{ dólares}$$

81. Una casa de 80 m^2 cuesta 150 000 € y otra de 90 m^2 cuesta 20 000 € más. ¿Son directamente proporcionales la superficie y el precio? ¿Cuánto debería costar la segunda casa para que sí lo fueran?

$$150\,000 + 20\,000 = 170\,000$$

Las proporciones son: $\frac{80}{150\,000}$ y $\frac{90}{170\,000} \rightarrow 80 \cdot 170\,000 \neq 150\,000 \cdot 90 \rightarrow 13\,600\,000 \neq 13\,500\,000 \rightarrow$ No son directamente proporcionales.

$$\frac{80}{150\,000} = \frac{90}{x} \rightarrow x = \frac{150\,000 \cdot 90}{80} \rightarrow x = 168\,750 \text{ € debería costar la segunda casa.}$$

82. Un arquitecto se compromete a terminar un edificio en un año y medio, contando con 36 obreros. Si le conceden una prórroga de medio año, averigua de cuántos obreros puede prescindir.

$$18 \text{ meses} \cdot 36 \text{ obreros} = 24 \text{ meses} \cdot x \text{ obreros} \rightarrow x = 27 \text{ obreros}$$

Puede prescindir de $36 - 27 = 9$ obreros.

83. Una rueda recorre 377 cm en dos vueltas completas. ¿Cuántos metros recorrerá en 6 vueltas? ¿Y después de 15 vueltas?

$$\frac{377}{2} \quad \frac{x}{6} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 377}{2} \rightarrow x = 1\,131 \text{ cm avanza si recorre 6 vueltas.}$$

$$\frac{377}{2} \quad \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 377}{2} \rightarrow x = 2\,827,5 \text{ cm avanza si recorre 15 vueltas.}$$



84. Para elaborar un bizcocho de 5 raciones son necesarios 250 g de harina, 200 g de azúcar, 3 huevos y 100 ml de leche.

a) ¿Qué cantidades de cada ingrediente son necesarias para elaborar un bizcocho de 8 raciones?

b) ¿Y uno de 13 raciones?

c) ¿De cuántas raciones será un bizcocho hecho con 375 g de harina si mantenemos las proporciones?

d) ¿Y uno que lleva 9 huevos?

Proporcionalidad y porcentajes

Ingredientes	Para 5 raciones	a) Para 8 raciones	b) Para 13 raciones
Harina	250 g	$\frac{250 \cdot 8}{5} = 400$ g	$\frac{250 \cdot 13}{5} = 650$ g
Azúcar	200 g	$\frac{200 \cdot 8}{5} = 320$ g	$\frac{200 \cdot 13}{5} = 520$ g
Huevos	3	$\frac{3 \cdot 8}{5} = 4,8$ huevos (5 aprox.)	$\frac{3 \cdot 13}{5} = 7,8$ huevos (8 aprox.)
Leche	100 ml	$\frac{100 \cdot 8}{5} = 160$ ml	$\frac{100 \cdot 13}{5} = 260$ ml

c) $\frac{5}{250} = \frac{x}{375} \rightarrow x = \frac{375 \cdot 5}{250} \rightarrow x = 7,5$ raciones

d) $\frac{5}{3} = \frac{x}{9} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 9}{3} \rightarrow x = 15$ raciones

85. Trabajando a un ritmo constante, un novelista tarda siete días en escribir 20 páginas de un libro. Si lleva escritas 180 páginas:



- a) ¿Cuántos días lleva escribiendo?
b) ¿Cuántos días más deberá escribir para finalizar una novela de 460 páginas?

a) $\frac{7}{20} = \frac{x}{180} \rightarrow x = \frac{7 \cdot 180}{20} \rightarrow x = 63$ días

b) $460 - 180 = 280$ páginas le quedan

$\frac{7}{20} = \frac{x}{280} \rightarrow x = \frac{7 \cdot 280}{20} \rightarrow x = 98$ días más

86. Con una velocidad de 20 nudos, un barco hace una travesía en 8 horas. Halla la velocidad de otro que hace la misma travesía en 6 horas y 30 minutos.

$20 \cdot 8 = x \cdot 6,5 \rightarrow x = 24,6$

La velocidad a la que va el segundo barco es de 24,6 nudos.

87. Con el dinero que tengo en la hucha puedo ir al cine 18 veces. ¿Cuántas veces podré ir ahora que la entrada ha subido de 3,50 a 4,50 €?

La entrada costaba 3,50 → Si puedo ir 18 veces tengo $18 \cdot 3,50 = 63$ €.

Ahora que cuesta 4,50 podré ir $63 : 4,50 = 14$ veces.

- 88.** La madre de Lucía se debe tomar 20 mg de una medicina cada 8 horas durante un periodo de tiempo. Según su médico, también se lo puede tomar cada 6 horas o cada 4 horas, adecuando las dosis para que al cabo del día se haya tomado la cantidad establecida.

Calcula la dosis que debe tomar de cada manera.

Si se lo toma cada 8 h, realiza $24/8 = 3$ tomas al día y toma $20 \cdot 3 = 60$ mg de medicina al día.

Si se lo toma cada 6 h, realiza $24/6 = 4$ tomas al día → Cada toma debe ser de $60/4 = 15$ mg.

Si se lo toma cada 4 h, realiza $24/4 = 6$ tomas al día → Cada toma debe ser de $60/6 = 10$ mg



- 89. Escribe el porcentaje que equivale a cada número decimal.**

- a) 0,45 b) 0,286 c) 0,03 d) 0,9
a) 45 % b) 28,6 % c) 3 % d) 90 %

- 90. Escribe la razón y el número decimal que equivalen a estos porcentajes.**

- a) 18% b) 5,6% c) 24,8% d) 2%

a) $\frac{18}{100} = 0,18$

c) $\frac{24,8}{100} = 0,248$

b) $\frac{5,6}{100} = 0,056$

d) $\frac{2}{100} = 0,02$

- 91. Indica el porcentaje que equivale a estas razones.**

- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{17}{10}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{9}{4}$

a) $\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$

c) $\frac{9}{20} = 0,45 = 45\%$

b) $\frac{17}{10} = 1,7 = 170\%$

d) $\frac{9}{4} = 2,25 = 225\%$

- 92. Expresa en forma de porcentaje.**

- a) La quinta parte del año son vacaciones escolares.
b) Las tres cuartas partes del salario se emplean en gastos domésticos.
c) Las tres octavas partes de la población sufren algún tipo de alergia.

a) $\frac{1}{5} = 0,2 \rightarrow$ El 20% del año son vacaciones.

b) $\frac{3}{4} = 0,75 \rightarrow$ El 75% del salario se emplea en gastos domésticos.

c) $\frac{3}{8} = 0,375 \rightarrow$ El 37,5% de la población sufre algún tipo de alergia.

Proporcionalidad y porcentajes

93. Expresa en forma de porcentaje.

- a) Siete de cada diez personas usan el móvil a diario.
- b) Tres de cada cinco alumnos realizan una actividad deportiva durante el fin de semana.
- c) Uno de cada tres encuestados respondió afirmativamente.

a) $\frac{7}{10} = 0,7 \rightarrow$ El 70% de las personas usan el móvil a diario.

b) $\frac{3}{5} = 0,6 \rightarrow$ El 60% de los alumnos realizan una actividad deportiva durante el fin de semana.

c) $\frac{1}{3} = 0,\bar{3} \rightarrow$ El 33,3% de los encuestados respondieron afirmativamente.

94. Calcula.

- a) El 30% de 24
- b) El 3% de 24
- c) El 30% de 240
- d) El 3% de 240
- e) El 3% de 2,4
- f) El 30% de 2,4

a) $\frac{30 \cdot 24}{100} = 7,2$

c) $\frac{30 \cdot 240}{100} = 72$

e) $\frac{3 \cdot 2,4}{100} = 0,072$

b) $\frac{3 \cdot 24}{100} = 0,72$

d) $\frac{3 \cdot 240}{100} = 7,2$

f) $\frac{30 \cdot 2,4}{100} = 0,72$

95. Calcula.

- a) El 20% de 56
 - b) El 15% de 380
 - c) El 52% de 46
 - d) El 63% de 104
- a) $\frac{20 \cdot 56}{100} = 11,2$
- b) $\frac{15 \cdot 380}{100} = 57$
- c) $\frac{52 \cdot 46}{100} = 23,92$
- d) $\frac{63 \cdot 104}{100} = 65,52$

96. Halla.

- a) El 9,6% de 52,5
- b) El 8,2% de 40,54
- c) El 26,8% de 2000,9
- d) El 5,1% de 76,45

a) $\frac{9,6 \cdot 52,5}{100} = 5,04$

c) $\frac{26,8 \cdot 2\,000,9}{100} = 536,2412$

b) $\frac{8,2 \cdot 40,54}{100} = 3,32428$

d) $\frac{5,1 \cdot 76,45}{100} = 3,89895$

97. Aumenta las siguientes cantidades un 14%.

- a) 30
- b) 260
- c) 34,8
- d) 125,75

a) $30 + \frac{14 \cdot 30}{100} = 30 + 4,2 = 34,2$

c) $34,8 + \frac{14 \cdot 34,8}{100} = 34,8 + 4,872 = 39,672$

b) $260 + \frac{14 \cdot 260}{100} = 260 + 36,4 = 296,4$

d) $125,75 + \frac{14 \cdot 125,75}{100} = 125,75 + 17,605 = 143,355$

98. Razóna si estos enunciados son verdaderos o falsos.

- a) El 20% de una cantidad es lo mismo que el 10% del doble de esa cantidad.
- b) El 20% más el 30% de una cantidad es lo mismo que el 50% de esa cantidad.
- c) El 2% del 3% de una cantidad es el 6% de esa cantidad.
- d) El 20% del 30% de una cantidad es igual al 30% del 20% de esa cantidad.

a) $\frac{20 \cdot C}{100} = \frac{10 \cdot 2C}{100} \rightarrow \text{VERDADERO}$

b) $\frac{20 \cdot C}{100} + \frac{30 \cdot C}{100} = \frac{20C + 30C}{100} = \frac{50C}{100} \rightarrow \text{VERDADERO}$

c) $2\% \text{ de } \frac{3 \cdot C}{100} = \frac{2 \cdot \frac{3 \cdot C}{100}}{100} = \frac{6 \cdot C}{10000} \rightarrow \text{FALSO}$

d) $20\% \text{ de } \frac{30 \cdot C}{100} = \frac{20 \cdot \frac{30 \cdot C}{100}}{100} = \frac{60 \cdot C}{10000}$ $30\% \text{ de } \frac{20 \cdot C}{100} = \frac{30 \cdot \frac{20 \cdot C}{100}}{100} = \frac{60 \cdot C}{10000} \rightarrow \text{VERDADERO}$

99. Sabiendo que 18 vecinos representan el 72% del total del vecindario, ¿cuántos vecinos hay en total?

Total Parte

100 vecinos \rightarrow 72 vecinos

x vecinos \rightarrow 18 vecinos

$$x = \frac{18}{72} \cdot 100 = 25 \text{ vecinos}$$

100. La etiqueta de una prenda de vestir especifica que está confeccionada con un 60% de algodón. Calcula la cantidad de algodón que tiene esa prenda si pesa 850 g.

$$60\% \text{ de } 850 \text{ g} = \frac{60}{100} \cdot 850 = 510 \text{ g de algodón contiene la prenda.}$$

101. Para ingresar un cheque de 644 euros me han cobrado un 2% de comisión. ¿Qué cantidad he tenido que pagar al banco?

$$2\% \text{ de } 644 \text{ €} = \frac{2}{100} \cdot 644 = 12,88 \text{ € he pagado al banco de comisión.}$$

102. En la dieta mediterránea se consume diariamente un 55% de glúcidos, un 30% de lípidos y un 15% de proteínas. Si cada día se consumen 2500 calorías, averigua qué cantidad de calorías corresponde a los glúcidos, los lípidos y las proteínas.

$$\text{Glúcidos: } 55\% \text{ de } 2500 = \frac{55 \cdot 2500}{100} = 1375 \text{ calorías}$$

$$\text{Lípidos: } 30\% \text{ de } 2500 = \frac{30 \cdot 2500}{100} = 750 \text{ calorías}$$

$$\text{Proteinas: } 15\% \text{ de } 2500 = \frac{15 \cdot 2500}{100} = 375 \text{ calorías}$$

Proporcionalidad y porcentajes

103. Para calcular la cantidad de carne que tiene un cerdo, a su peso hay que quitarle un 40% de vísceras y huesos, y un 15% de grasa. Si un cerdo pesa 184 kg, ¿qué cantidad de carne tiene?

$$\text{Viscera: } 40\% \text{ de } 184 = \frac{40 \cdot 184}{100} = 73,6 \text{ kg}$$

$$\text{Grasa: } 15\% \text{ de } 184 = \frac{15 \cdot 184}{100} = 27,6 \text{ kg}$$

$$184 - (73,6 + 27,6) = 82,8 \text{ kg de carne}$$

105. De las 1936 familias que se han alojado en un hotel de la costa durante estas vacaciones, el 37,5% han permanecido en él 5 días o más. ¿Qué porcentaje de familias han estado menos de 5 días en el hotel? ¿Qué número de familias representa ese porcentaje?



$100 - 37,5 = 62,5\%$ de las familias han estado menos de 5 días en el hotel.

$$62,5\% \text{ de } 1936 = \frac{62,5 \cdot 1936}{100} = 1210 \text{ familias han estado menos de 5 días en el hotel.}$$

106. Un agente inmobiliario cobra un porcentaje de un 2% del valor de la finca vendida: una tercera parte del comprador, y el resto, del vendedor. Si acaba de vender un piso por 150 000 €:

- ¿Cuál será su comisión?
- ¿Cuánto le pagará el vendedor del piso?
- ¿Y el comprador?

$$\text{a) } 2\% \text{ de } 150\,000 \text{ €} = \frac{2 \cdot 150\,000}{100} = 3\,000 \text{ € de comisión}$$

$$\text{b) } 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ de esa comisión la pagará el vendedor} \rightarrow \frac{2 \cdot 3\,000}{3} = 2\,000 \text{ € le pagará el vendedor}$$

$$\text{c) } 3\,000 - 2\,000 = 1\,000 \text{ € le pagará el comprador.}$$

107. El 8% de los 25 alumnos de una clase ha obtenido un sobresaliente en Matemáticas y un 12%, un notable. Averigua cuántos alumnos han obtenido las siguientes calificaciones.

- Una nota inferior a sobresaliente.
- Una nota inferior a notable.

$$\text{a) } 8\% \text{ de } 25 \text{ alumnos} = \frac{8}{100} \cdot 25 = 2 \text{ alumnos han sacado sobresaliente.}$$

$$25 - 2 = 23 \text{ alumnos han sacado una nota inferior a sobresaliente.}$$

$$\text{b) } 12\% \text{ de } 25 \text{ alumnos} = \frac{12}{100} \cdot 25 = 3 \text{ alumnos han sacado notable.}$$

$$25 - 2 - 3 = 20 \text{ alumnos han sacado una nota inferior a notable.}$$

109. Calcula el precio final de estos artículos a los que se quiere aplicar un 35% de descuento.



El precio resultante de los artículos tras el descuento equivale al $100 - 35 = 65\%$ del precio actual

$$\text{Camisa: } 65\% \text{ de } 34 \text{ €} = \frac{65}{100} \cdot 34 = 22,1 \text{ €}$$

$$\text{Pantalón: } 65\% \text{ de } 80 \text{ €} = \frac{65}{100} \cdot 80 = 52 \text{ €}$$

$$\text{Zapatos: } 65\% \text{ de } 45 \text{ €} = \frac{65}{100} \cdot 45 = 29,25 \text{ €}$$

$$\text{Chaqueta: } 65\% \text{ de } 62 \text{ €} = \frac{65}{100} \cdot 62 = 40,3 \text{ €}$$

110. Calcula el precio rebajado de un coche que cuesta 23 500 € después de aplicarle estos descuentos.

- a) 8% b) 15% c) 20,5% d) 24%

a) El precio final equivale al $100 - 8 = 92\%$ de precio inicial.

$$92\% \text{ de } 23\,500 \text{ €} = \frac{92 \cdot 23\,500}{100} = 21\,620 \text{ €}$$

b) El precio final equivale al $100 - 15 = 85\%$ de precio inicial.

$$85\% \text{ de } 23\,500 \text{ €} = \frac{85 \cdot 23\,500}{100} = 19\,975 \text{ €}$$

c) El precio final equivale al $100 - 20,5 = 79,5\%$ de precio inicial.

$$79,5\% \text{ de } 23\,500 \text{ €} = \frac{79,5 \cdot 23\,500}{100} = 18\,682,5 \text{ €}$$

d) El precio final equivale al $100 - 24 = 76\%$ de precio inicial.

$$76\% \text{ de } 23\,500 \text{ €} = \frac{76 \cdot 23\,500}{100} = 17\,860 \text{ €}$$

111. Calcula el descuento que se hace en cada una de estas ofertas y exprésalo mediante un porcentaje.



OFERTA AMARILLA: Descuenta 5 € por cada 40 € de compra

Total Descuento

Por 40 → 5 € de descuento

Por 100 → x

$$x = \frac{5}{40} \cdot 100 = 12,5 \rightarrow \text{El descuento es del } 12,5\%$$

Proporcionalidad y porcentajes

OFERTA AZUL: Al comprar 2 unidades, la 2.^a a mitad de precio → se paga $\frac{1,5}{2} = 0,75 = 75\%$

El descuento es del $100 - 75 = 25\%$

OFERTA ROJA: Si compras 3 unidades solo pagas 2 → Se paga $\frac{2}{3} = 0,666 \dots = 66,6\%$

El descuento es del $100 - 66,6 = 33,3\%$

- 112.** Una caja de galletas cuesta 2,40 €, pero al comprar tres hacen un descuento del 15%.

¿Cuánto costarán 9 cajas de galletas teniendo en cuenta el descuento?

Como 9 es múltiplo de 3 se aplica el 15 % de descuento a toda la compra, con lo que pagaría el $100 - 15 = 85\%$ del precio de las 9 cajas de galletas:

$$9 \cdot 2,4 = 21,6 \text{ €} \rightarrow 85\% \text{ de } 21,6 = \frac{85}{100} \cdot 21,6 = 18,36 \text{ €} \text{ costarán las 9 cajas.}$$

- 113.** Una prenda de vestir tiene un precio inicial de 24 €. Indica en porcentajes el descuento que se aplica si:

- a) Le descuentan 4,80 €.
- b) Le descuentan 5 € por cada 10 €.
- c) El precio final es de 15,60 €.

a) Total Descuento

$$\begin{aligned} 24 &\rightarrow 4,8 \\ 100 &\rightarrow x \\ x &= \frac{100}{24} \cdot 4,8 = 20\% \text{ de descuento} \end{aligned}$$

b) Si descuenta 5 € cada 10 €, a 24 € le descontará un total de 10 €, es decir, se pagará 14 €.

Total Descuento

$$\begin{aligned} 24 &\rightarrow 10 \\ 100 &\rightarrow x \\ x &= \frac{100}{24} \cdot 10 = 41,67\% \text{ de descuento} \end{aligned}$$

c) El descuento es de $24 - 15,6 = 8,4 \text{ €}$

Total Descuento

$$\begin{aligned} 24 &\rightarrow 8,4 \\ 100 &\rightarrow x \\ x &= \frac{100}{24} \cdot 8,4 = 35\% \text{ de descuento} \end{aligned}$$

- 114.** Si una botella de limonada cuesta 0,80 euros, y al comprar una caja de 12 botellas hacen un descuento de un 5%, ¿cuánto cuesta una caja?

Precio total sin descuento: $0,8 \cdot 12 = 9,6 \text{ €}$

Al aplicar el 5 % de descuento se paga el $100 - 5 = 95\%$ del precio inicial.

$$95\% \text{ de } 9,6 \text{ €} = \frac{95}{100} \cdot 9,6 = 9,12 \text{ €} \text{ cuesta la caja de 12 botellas.}$$

115. Antonio se ha comprado dos camisas y ha pagado por ellas 72,50 euros. Si cuando ha ido a pagar le han dicho que le hacían un 12% de descuento, y las dos camisas tenían el mismo precio, ¿cuánto costaba cada camisa antes de la rebaja?

Ha pagado por las camisas $100 - 12 = 88\%$ del precio original.

Antes Ahora

$$100 \rightarrow 88$$

$$x \rightarrow 72,50$$

$$x = \frac{72,5}{88} = 82,3864$$

Como ha comprado dos camisas que costaban igual: $82,3864 : 2 = 41,19\text{ €}$ es el precio de cada camisa.

117. El precio de la gasolina se ha incrementado un 8,8% desde principios de año. Si el 1 de enero de este año un litro valía 1,38 €, ¿cuál es su precio ahora?

Ahora la gasolina cuesta un $100 + 8,8 = 108,8\%$ del precio anterior.

Antes Ahora

$$100 \rightarrow 108,8$$

$$1,38 \rightarrow x$$

$$x = \frac{1,38 \cdot 108,8}{100} = 1,50144 \text{ €/l de gasolina}$$

118. Calcula el precio de estos electrodomésticos si el IVA que se les aplica es del 21%.



Aplicando el IVA, el precio es un $100 + 21 = 121\%$ el precio sin IVA

Antes Ahora

$$100 \rightarrow 121$$

$$456 \text{ €} \rightarrow x$$

$$342 \text{ €} \rightarrow y$$

$$136 \text{ €} \rightarrow z$$

$$364 \text{ €} \rightarrow q$$

$$x = \frac{456 \cdot 121}{100} = 551,76 \text{ €} \text{ cuesta la nevera.}$$

$$y = \frac{342 \cdot 121}{100} = 413,82 \text{ €} \text{ cuesta la televisión.}$$

$$z = \frac{136 \cdot 121}{100} = 164,56 \text{ €} \text{ cuesta el microondas.}$$

$$q = \frac{364 \cdot 121}{100} = 440,44 \text{ €} \text{ cuesta la lavadora.}$$

Proporcionalidad y porcentajes

119. Un fabricante de calzado vende sus zapatos a un 120% del precio que le cuesta fabricarlos. Si el coste de fabricación es 14 euros. ¿por cuánto los venderá?

Coste fabricación Precio venta

$$\begin{array}{ccc} 100 & \rightarrow & 120 \\ 14\text{ €} & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{14\ 120}{100} = 16,8 \text{ € es el precio por el que los venderá}$$

120. La Seguridad Social paga un 60% del precio de algunas medicinas. Si he comprado unas pastillas, que están cubiertas por la Seguridad Social, cuyo precio de venta al público es de 19 €, ¿cuánto he tenido que pagar?

Si la seguridad paga el 60 % del precio, yo tengo que pagar el $100 - 60 = 40$ % del precio.

40% de 19 € = $\frac{40 \cdot 19}{100} = 7,6$ € es el precio que tengo que pagar por las pastillas

- 121.** Calcula qué porcentaje de aumento se produce en cada caso.

- a) Aumento de 42 a 46.
b) Aumento de 5 a 6.
c) Aumento de 15 a 20.
d) Aumento de 1000 a 1300.

a) Antes Ahora

$$\begin{array}{ccc} 42 & \rightarrow & 46 \\ 100 & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{100 + 46}{42} = 109,52\ldots \rightarrow 109,52 - 100 = 9,52\% \text{ de aumento}$$

b) Antes Ahora

$$\begin{array}{ccc} 5 & \rightarrow & 6 \\ 100 & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{100}{5} = 120 \rightarrow 120 - 100 = 20\% \text{ de aumento}$$

c) Antes Ahora

$$\begin{array}{ccc} 15 & \rightarrow & 20 \\ 100 & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{100 + 20}{15} = 133,3 \rightarrow 133,3 - 100 = 33,3\% \text{ de aumento}$$

d) Antes Ahora

$$\begin{array}{rcl} 1000 & \rightarrow & 1300 \\ 100 & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{100 \cdot 1300}{1000} = 130 \rightarrow 130 - 100 = 30\% \text{ de aumento}$$

DEBES SABER HACER

1. Calcula el valor de x para que sean proporciones.

a) $\frac{4}{8} = \frac{3}{x}$ b) $\frac{4}{x} = \frac{6}{30}$ c) $\frac{x}{5} = \frac{14}{7}$

a) $4x = 8 \cdot 3 \rightarrow x = 24 : 4 \rightarrow x = 6$

b) $4 \cdot 30 = 6x \rightarrow x = 120 : 6 \rightarrow x = 20$

c) $7x = 5 \cdot 14 \rightarrow x = 70 : 7 \rightarrow x = 10$

2. En dos puestos, A y B, se venden manzanas, con los siguientes precios:

Puesto A			Puesto B		
1 kg	2 kg	3 kg	1 kg	2 kg	3 kg
0,53 €	1,06 €	1,59 €	0,60 €	1 €	1,50 €

¿En cuál de estos puestos son directamente proporcionales las magnitudes peso y precio?

Puesto A: $\frac{1}{0,53} = \frac{2}{1,06} = \frac{3}{1,59}$. Son directamente proporcionales.

Puesto B: $\frac{1}{0,60} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{3}{1,50}$. No son directamente proporcionales.

3. Si para embotellar una cierta cantidad de zumo necesitamos 320 botellas de 1,5 litros, ¿cuántas botellas de 2,5 litros necesitamos?

$320 \cdot 1,5 = x \cdot 2,5$

$x = 192$

Necesitamos 192 botellas.



4. El 12,5 % de los 56 alumnos de 1.º de ESO han suspendido al menos una asignatura.

a) ¿Cuál es el porcentaje de alumnos que no ha suspendido ninguna asignatura?

b) ¿Cuántos alumnos han aprobado todas las asignaturas?

a) No han suspendido nada el $100 - 12,5 = 87,5\%$ de los alumnos.

b) $87,5\% \text{ de } 56 \text{ alumnos} = \frac{87,5}{100} \cdot 56 = 49$ alumnos han aprobado todo.

5. Un CD de música cuesta 16 €, pero al comprar tres hacen un 10 % de descuento. ¿Cuánto costarán 6 CD de música teniendo en cuenta el descuento?

Como 6 es múltiplo de 3 me aplican el 10 % de descuento en toda la compra → Pago el $100 - 10 = 90\%$

Los 6 CD cuestan sin el descuento $16 \cdot 6 = 96 \text{ €}$

$90\% \text{ de } 96 \text{ €} = \frac{90}{100} \cdot 96 = 86,4 \text{ €}$ me cuestan los 6 CD

Proporcionalidad y porcentajes

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

122. El hierro es el metal más abundante en la corteza terrestre. En estado puro no tiene demasiadas aplicaciones, aunque al mezclarlo con pequeñas cantidades de carbono se convierte en un metal consistente y muy resistente.

Aleación	% de carbono	Algunos usos
Hierro dulce	Menos del 0,1%	Electroimanes y conducciones eléctricas
Acero	Del 0,1% al 2%	Vehículos, chapas, alambres...
Hierro de fundición	Del 2% al 5%	Bloques de motores, cilindros de laminación...

Pero también hay hierro en los alimentos; es un nutriente de suma importancia para los seres humanos. La falta de hierro puede producir anemia.

La cantidad de hierro recomendada para un adolescente al día es de unos 11 mg en los chicos y 15 mg en las chicas.



La tabla muestra la cantidad de alimento que se necesita ingerir para aportar dos miligramos de hierro a nuestro cuerpo.



Exposición «La materia del tiempo».

Lentejas	57 g
Garbanzos	95 g
Espinacas	125 g
Cereales integrales	17 g
Pipas de girasol	315 g

- ¿Cuántos gramos de lentejas se necesitan para completar la cantidad de hierro recomendada para un chico y una chica? ¿Y de pipas?
- Calcula cuánto carbono hay en los siguientes bloques de aleación de hierro.

300 kg de hierro dulce

2,5 t de acero

900 kg de fundición

LENTEJAS: 57 g de lentejas aportan 2 mg de hierro:

$$\frac{57}{2} \cdot \frac{x}{11} \rightarrow x = \frac{57 \cdot 11}{2} \rightarrow x = 313,5 \text{ g}$$

$$\frac{57}{2} \cdot \frac{y}{15} \rightarrow y = \frac{57 \cdot 15}{2} = 427,5 \text{ g}$$

Un chico necesita 313,5 g de lentejas, y una chica, 427,5 g

PIPAS: 315 g de pipas aportan 2 mg de hierro:

$$\frac{315}{2} \cdot \frac{x}{11} \rightarrow x = \frac{315 \cdot 11}{2} \rightarrow x = 1\,732,5 \text{ g}$$

$$\frac{315}{2} \cdot \frac{y}{15} \rightarrow y = \frac{315 \cdot 15}{2} = 2\,362,5 \text{ g}$$

Un chico necesita 1 732,5 g de pipas, y una chica, 2 362,5 g

$$0,1 \% \text{ de } 300 \text{ kg} = \frac{0,1 \cdot 300}{100} = 0,3 \text{ kg}$$

En 300 kg de hierro dulce hay menos de 0,3 kg de carbono.

2,5 t = 2 500 kg

$$0,1 \% \text{ de } 2\,500 \text{ kg} = \frac{0,1 \cdot 2\,500}{100} = 2,5 \text{ kg}$$

$$2 \% \text{ de } 2\,500 \text{ kg} = \frac{2 \cdot 2\,500}{100} = 50 \text{ kg}$$

En 2,5 t de acero puede haber entre 2,5 kg y 50 kg de carbono.

$$2\% \text{ de } 900 \text{ kg} = \frac{2}{100} \cdot 900 = 18 \text{ kg}$$

$$5\% \text{ de } 900 \text{ kg} = \frac{5}{100} \cdot 900 = 45 \text{ kg}$$

En 900 kg de fundición puede haber entre 18 kg y 45 kg de carbono.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

123. Señala cuáles de los siguientes problemas se pueden resolver con esta proporción:

$$\frac{60}{150} = \frac{8}{x}$$

- a) Un granjero tiene 60 gallinas. Si vende 8 gallinas y después compra 150, ¿cuántas gallinas tendrá?
- b) En un almacén hay alimentos para 150 personas durante 8 días. Si solo fuesen 60 personas, ¿para cuántos días tendrían comida?
- c) Para pintar 60 m² de pared se han gastado 8 kilos de pintura. ¿Cuántos se necesitarán para pintar 150 m²?
 - a) $60 - 8 + 150 = 202 \rightarrow$ No se resuelve con esta regla de tres, este problema se resuelve con operaciones de suma y resta.
 - b) Tendrían para más días, puesto que son menos personas → Estas magnitudes no son directamente proporcionales → No se resuelve con esta regla de tres.
 - c) $\frac{60}{8} = \frac{150}{x} \rightarrow 60x = 8 \cdot 150 \rightarrow$ Sí se resuelve con esta regla de tres, son relaciones equivalentes.

124. Al medir una serie de longitudes, varios alumnos han cometido el error que viene expresado en la tabla.

Alumno	Medida	Error
Enrique	18,5 m	90 cm
Félix	5 m	13 cm
Carlos	12 m	16 cm
Pilar	10,8 m	80 cm
Domingo	3 m	10 cm

¿Quién crees que ha cometido mayor error?

$$\text{Enrique: } \frac{90}{1850} = 0,0486$$

$$\text{Félix: } \frac{13}{500} = 0,025$$

$$\text{Carlos: } \frac{16}{1200} = 0,013$$

$$\text{Pilar: } \frac{80}{1080} = 0,074$$

$$\text{Domingo: } \frac{10}{300} = 0,03$$

Pilar ha cometido el mayor error relativo.

PRUEBAS PISA

125. Las monedas que utilizamos están fabricadas con una mezcla de metales que tienen ciertas características:

- La mezcla tiene que generar un metal lo suficientemente duro como para que no se deterioren con el uso.
- El precio de los metales que se mezclan no debe ser superior al valor de la moneda.

La composición y el peso de algunas monedas es:

Composición	Peso		
89% cobre			
5% aluminio			
5% cinc			
1% estaño	peso 7,8 g	peso 5,7 g	peso 4,1 g

- ¿Qué peso llevo en el bolsillo si tengo 3 monedas de 50 céntimos, 4 de 20 céntimos y 2 de 10 céntimos?

- Este es el precio de los metales que componen estas monedas a día de hoy:

$$\begin{array}{ll} \text{Cobre } 3,14 \text{ €/kg} & \text{Cinc } 1,82 \text{ €/kg} \\ \text{Aluminio } 1,79 \text{ €/kg} & \text{Estaño } 20,14 \text{ €/kg} \end{array}$$

¿Cuál es el coste del metal de una moneda de 50 céntimos?

$$3 \cdot 7,8 + 4 \cdot 5,7 + 2 \cdot 4,1 = 23,4 + 22,8 + 8,2 = 54,4 \text{ g pesan todas las monedas}$$

$$\text{Cobre: } 89\% \text{ de } 7,8 \text{ g} = \frac{89}{100} \cdot 7,8 = 6,942 \text{ g} = 0,006942 \text{ kg} \rightarrow 0,006942 \cdot 3,14 = 0,02179788 \text{ €}$$

$$\text{Aluminio: } 5\% \text{ de } 7,8 = \frac{5}{100} \cdot 7,8 = 0,39 \text{ g} = 0,00039 \text{ kg} \rightarrow 0,00039 \cdot 1,79 = 0,0006981 \text{ €}$$

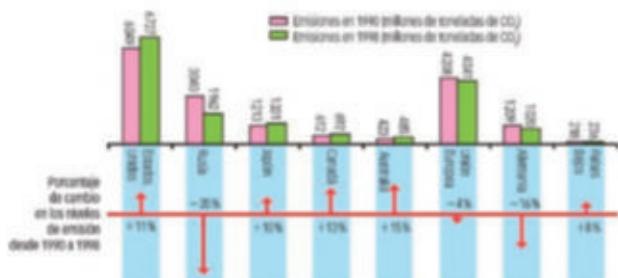
$$\text{Cinc: } 5\% \text{ de } 7,8 = \frac{5}{100} \cdot 7,8 = 0,39 \text{ g} = 0,00039 \text{ kg} \rightarrow 0,00039 \cdot 1,82 = 0,0007098 \text{ €}$$

$$\text{Estaño: } 1\% \text{ de } 7,8 = \frac{1}{100} \cdot 7,8 = 0,078 \text{ g} = 0,000078 \text{ kg} \rightarrow 0,000078 \cdot 20,14 = 0,00157092 \text{ €}$$

$$\text{Coste total} = 0,02179788 + 0,0006981 + 0,0007098 + 0,00157092 = 0,0247767 \text{ €}$$

126. Muchos científicos temen que el aumento del nivel de gas CO₂ en nuestra atmósfera esté causando un cambio climático.

El diagrama siguiente muestra los niveles de emisión de CO₂ en 1990 (las barras rosas) de varios países (o regiones), los niveles de emisión en 1998 (las barras verdes), y el porcentaje de cambio en los niveles de emisión entre 1990 y 1998 (las flechas con porcentajes).



En el diagrama se puede leer que el aumento de emisiones de CO₂ en Estados Unidos entre 1990 y 1998 fue del 11%.

- Escribe los cálculos para demostrar cómo se obtiene ese 11%.

(Prueba PISA 2003)

En 1998 emitieron 6 727 millones de toneladas de CO₂ y en 1990 emitieron 6 049

$$6\,727 - 6\,049 = 678 \text{ millones de toneladas más de un año al otro}$$

Total

$$6\,049 \rightarrow 678$$

$$100 \rightarrow x$$

$$x = \frac{100 \cdot 678}{6\,049} = 11,208 \% \text{ de aumento}$$

Rectas y ángulos

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Copia en tu cuaderno y completa las igualdades con el orden adecuado.

- a) $32 \text{ D} = 0,32 \square$ b) $7,2 \text{ UM} = 7200 \square$ c) $134,25 \text{ d} = 1,3425 \square$
- a) M b) U c) D

2. Ordena de mayor a menor las siguientes cantidades.

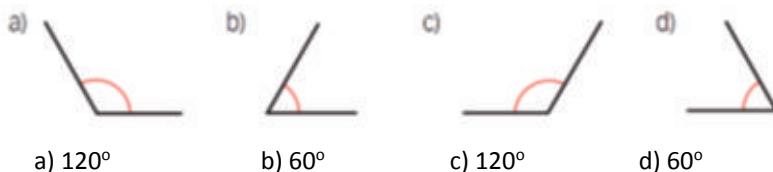
4587,33 m 22,33 D 0,345 UM 1234444 m

Se pasa todo a milésimas:

$$22,33 \text{ D} = 223\,300 \text{ m} \quad 0,345 \text{ M} = 345\,000 \text{ m}$$

$$1234\,444 < 345\,000 < 223\,300 < 4\,587,33 \rightarrow 1234\,444 \text{ m} < 0,345 \text{ M} < 22,33 \text{ D} < 4\,587,33 \text{ m}$$

3. Mide con tu transportador estos ángulos.



a) 120°

b) 60°

c) 120°

d) 60°

VIDA COTIDIANA

Observa la imagen y contesta.

- ¿Cuál es la posición relativa de los tensores? ¿Y la posición relativa de las rectas que forman los tensores y la recta que forma el tablero?
- Contesta ahora tomando como ejemplo el puente Alamillo de Sevilla.

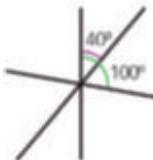


En el dibujo, los tensores son paralelos entre sí y perpendiculares al tablero.

En el puente Alamillo de Sevilla, los tensores son paralelos entre sí, pero no son perpendiculares al tablero, forman un ángulo de 45° aproximadamente con él.

RESUELVE EL RETO

¿Cuántos ángulos de medidas diferentes se pueden ver en esta figura?

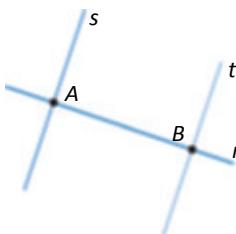


Tenemos tres que suman 180° , que son uno de 40° , otro de 60° y otro de 80° (los tres siguientes serán iguales a estos).

Además, ángulos formados por la suma de estos, como el ángulo de 100° o el que se formaría al unir el consecutivo de 80° y 40° , que es de 120° . O los de la parte izquierda, que es la suma de 80° y 60° ; es decir, un ángulo de 140° . O el ángulo de 180° que se forma al unir los tres.

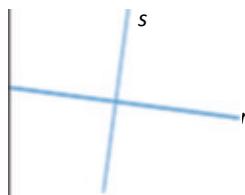
ACTIVIDADES

1. Marca en tu cuaderno dos puntos y traza una recta r que pase por ellos. Luego, traza una recta t perpendicular a r que pase por B y una recta s paralela a t que pase por A . ¿Cómo son entre sí las rectas r y s ?



Las rectas r y s son perpendiculares.

2. Dibuja dos rectas, r y s , que sean perpendiculares. ¿Puedes dibujar una recta secante a r que no sea secante con s ?



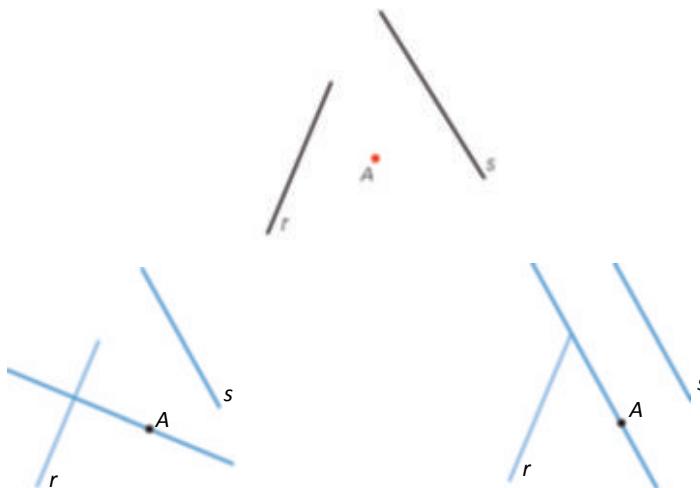
Sí, cualquier recta paralela a s será secante con r y no será secante con s .

3. ¿Cuántas rectas perpendiculares a una recta dada puedes trazar? ¿Y paralelas?

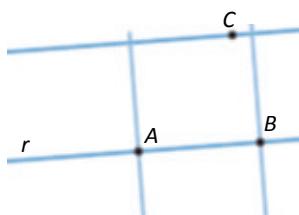
Se pueden trazar infinitas rectas perpendiculares a una recta dada, ya que por una recta pasan infinitos puntos y en cada uno de ellos se puede trazar una recta perpendicular.

Las rectas paralelas a una recta son, a su vez, rectas perpendiculares a las rectas perpendiculares de esa recta, y como hay infinitas perpendiculares, existirán infinitas perpendiculares de las perpendiculares.

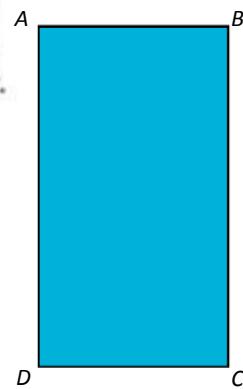
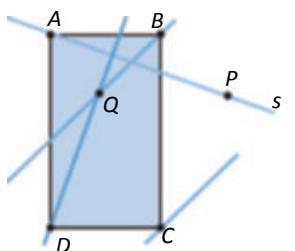
4. Copia en tu cuaderno estas rectas y traza una recta perpendicular a r que pase por A y una paralela a s que pase también por A .



5. Trazo en tu cuaderno una línea recta r y marca en ella dos puntos, A y B . Dibuja un punto C que no esté en r . Trazo las rectas perpendiculares a r por A y B , y la recta paralela a r pasando por C .



6. Dibuja en tu cuaderno un rectángulo como este. Marca un punto P en el exterior del rectángulo y otro punto Q en su interior. Después, traza una línea recta s que pase por P y por A y otra recta t que pase por Q y por B . Por último, traza una perpendicular a s que pase por D , y una paralela a t que pase por C



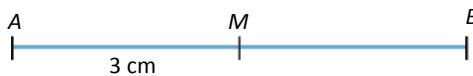
7. Dibuja una recta y señala sobre ella tres puntos. Indica las semirrectas y segmentos que se forman.



Se forman seis semirrectas (2 por cada punto) y tres segmentos (AB , AC , BC).

Rectas y ángulos

8. Dibuja un segmento AB de 6 cm de longitud y determina su punto medio. ¿A qué distancia se encuentra este punto de A ?



La distancia de A a M es la mitad de la medida del segmento, es decir, 3 cm.

9. Marca dos puntos, A y B , en tu cuaderno. Dibuja dos rectas que se corten en un punto C , de tal manera que una pase por A y la otra por B . Indica los segmentos y semirrectas que se forman.



Se forman 2 segmentos: CA y CB .

Se forman 8 semirrectas: 4 por cada recta (dos las forma el punto A , dos las forma el punto B y cuatro las forma el C).

10. ¿Cuántos segmentos y semirrectas se forman con tres puntos no alineados?

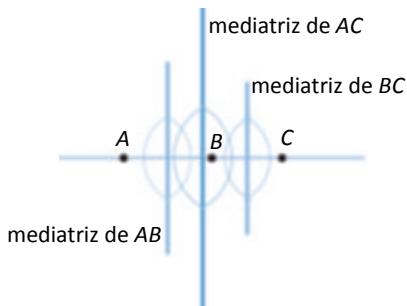


3 segmentos: AB , BC , CA .

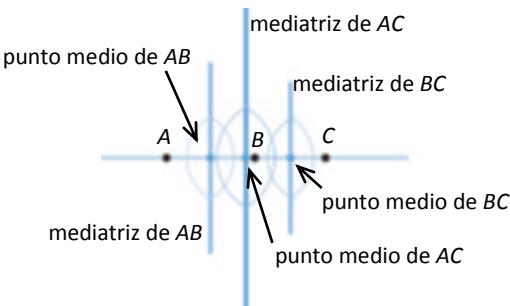
12 semirrectas: 4 por cada punto (dos en cada recta por punto).

11. Dibuja una línea recta y señala en ella tres puntos A , B y C .

- Traza las mediatrices de los segmentos AB , AC y BC . ¿Cómo son las tres mediatrices entre sí?
 - Señala los puntos medios de los segmentos AB , BC y AC .
 - Si el segmento AB mide 6 cm y el BC mide 3,6 cm, ¿qué distancia hay entre sus puntos medios?
- a) Las mediatrices de los segmentos de una misma recta son paralelas entre sí.

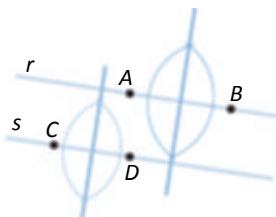


b) Los puntos medios son los puntos de corte del segmento con su mediatrix.



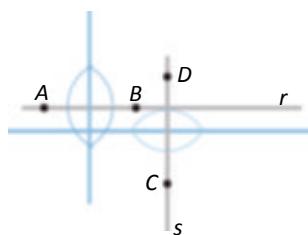
c) Del punto medio de AB a B hay $6 : 2 = 3$ cm y del punto B al punto medio de BC hay $3,6 : 2 = 1,8$ cm, con lo que del punto medio de AB al punto medio de BC hay $3 + 1,8 = 4,8$ cm.

- 12.** Dibuja dos rectas paralelas y señala dos segmentos de distinta medida, uno en cada recta. Traza las mediatrixes de los dos segmentos. ¿Cómo son estas mediatrixes entre sí?



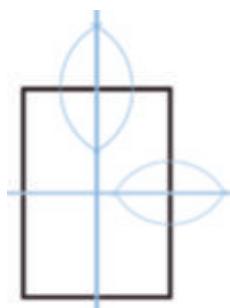
Las mediatrixes de dos segmentos de rectas paralelas son también paralelas entre sí.

- 13.** Dibuja dos rectas perpendiculares y señala dos segmentos de distinta medida, uno en cada recta. Traza las mediatrixes de esos segmentos e indica su posición relativa.



Las mediatrixes de segmentos de dos rectas perpendiculares también son perpendiculares entre sí.

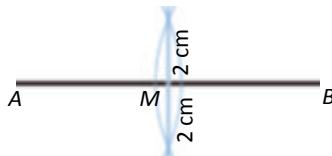
- 14.** Dibuja un rectángulo de 6,5 cm de largo y 4,7 cm de ancho. Traza las mediatrixes de los lados.



Las mediatrixes de los lados paralelos coinciden.

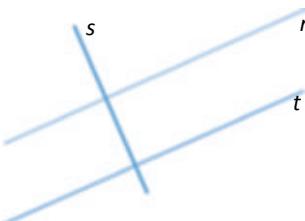
Rectas y ángulos

15. Dibuja un segmento AB con una longitud de 8 cm. Traza su mediatrix y señala su punto medio. Encuentra un segmento CD de longitud 4 cm cuya mediatrix sea la recta que pasa por A y B .



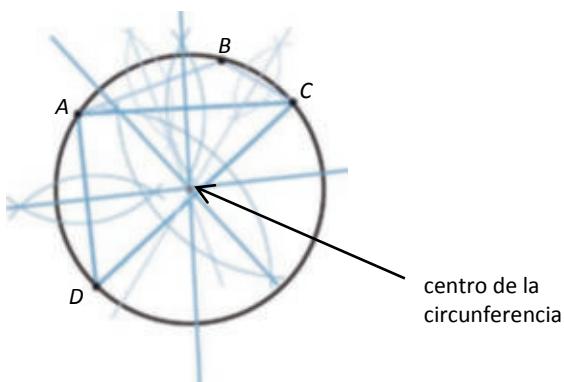
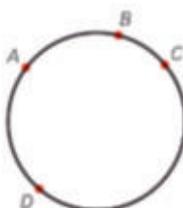
El segmento CD está en la mediatrix y los extremos distan de M dos centímetros.

16. Dibuja una recta r y, ayudándote de la escuadra, traza una perpendicular s a dicha recta. Traza, después, una recta t perpendicular a s . ¿Cómo son entre sí las rectas r y t ?



Las rectas r y t son paralelas entre sí.

17. Dibuja en tu cuaderno una circunferencia como la del dibujo y traza en ella dos triángulos. Uno con vértices A , B y C y otro con vértices A , C y D . Traza las mediatrixes de sus lados. ¿En qué punto se cortan las mediatrixes?



Las mediatrixes de los lados de los triángulos inscritos en una circunferencia se cortan en el centro de la circunferencia.

18. Junta tus manos, palma con palma y sepáralas poco a poco manteniendo juntas las muñecas. ¿Cómo son los ángulos que se forman?

Los ángulos que se forman son agudos, puesto que son menores que un ángulo recto.

19. Describe más ángulos que encuentres tomando partes de tu cuerpo.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Ángulo que se forma al ir separando un brazo del cuerpo, tomando como vértice al hombro: dependiendo de la abertura del brazo podemos tener:

Ángulo nulo: si el brazo está pegado al cuerpo.

Ángulo agudo: si la mano está por debajo del hombro.

Ángulo recto: si el brazo está a la altura del hombro.

Ángulo obtuso: si levanto el brazo por encima del hombro.

Ángulo llano: si la mano está justo encima del hombro.

Ángulo que forman las dos piernas estiradas, tomando como vértice la cadera.

Ángulo que forma el brazo, tomando como vértice el codo, o la pierna tomando como vértice la rodilla.

Ángulo que forma el torso con las piernas, tomando como vértice el ombligo.

20. Responde razonadamente.

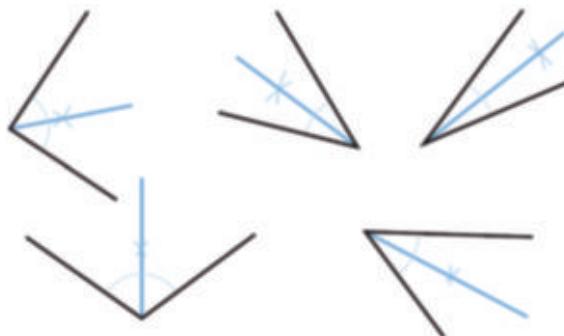
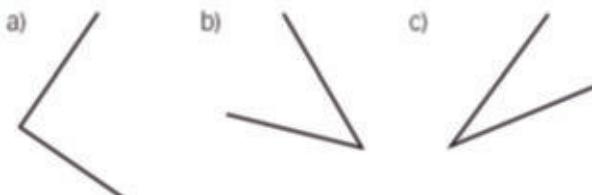
a) ¿Qué relación hay entre los lados de un ángulo llano y su bisectriz?

b) En un ángulo \widehat{AOB} , la bisectriz forma dos ángulos agudos. ¿Cómo es el ángulo \widehat{AOB} ?

a) Cada lado forma con la bisectriz un ángulo recto.

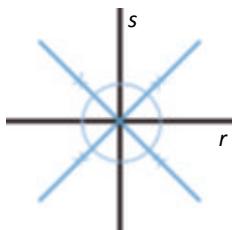
b) El ángulo \widehat{AOB} debe ser menor que un ángulo llano.

21. Copia estos ángulos en tu cuaderno y dibuja sus bisectrices.

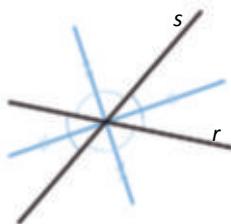


Rectas y ángulos

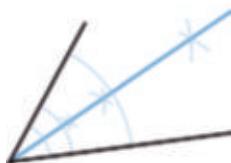
22. Dibuja dos líneas rectas perpendiculares y traza las bisectrices de los cuatro ángulos que se forman.



23. Dibuja dos líneas rectas secantes. Trazá las bisectrices de los ángulos que se forman.



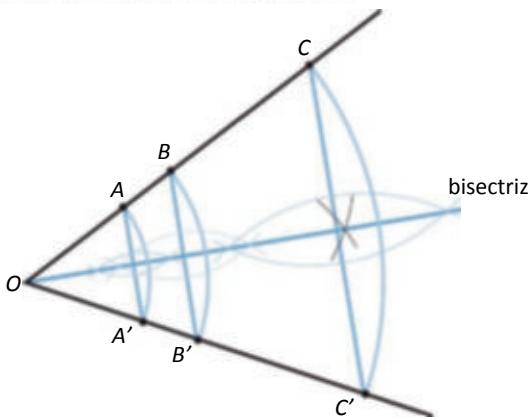
24. Dibuja un ángulo y traza varias bisectrices utilizando en cada caso una abertura distinta del compás. ¿Obtienes siempre la misma recta?



Sí, se obtiene siempre la misma recta, pues cada ángulo solo tiene una bisectriz.

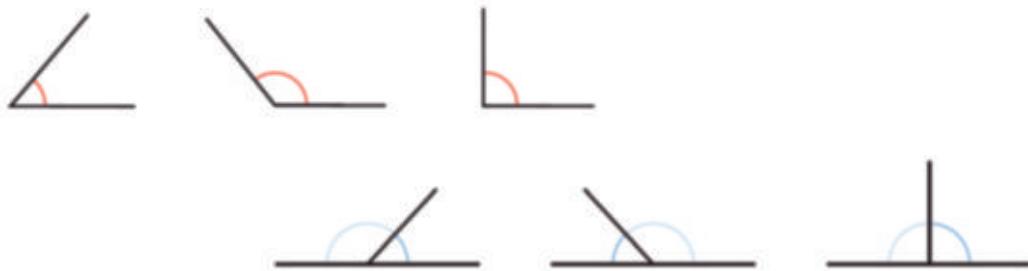
25. Dibuja en tu cuaderno un ángulo como en la figura y señala los puntos de forma que el segmento OA mida lo mismo que OA' , OB lo mismo que OB' y OC lo mismo que OC' . Trazá la bisectriz del ángulo y las mediatrixes de los segmentos AA' , BB' y CC' .

- a) ¿Qué relación tienen la bisectriz y las mediatrixes que has dibujado?
b) Prueba que la bisectriz pasa por el punto medio de los segmentos.



- a) La bisectriz del ángulo y las mediatrixes de los segmentos coinciden.
b) La mediatrix de un segmento pasa por su punto medio. En este caso, la bisectriz coincide con las mediatrixes obtenidas y, por tanto, la bisectriz pasa por los puntos medios de los segmentos.

26. Copia en tu cuaderno estos ángulos y construye sus ángulos adyacentes.



27. Dibuja dos ángulos consecutivos tales que el ángulo que forman entre los dos tenga un ángulo recto como suplementario.



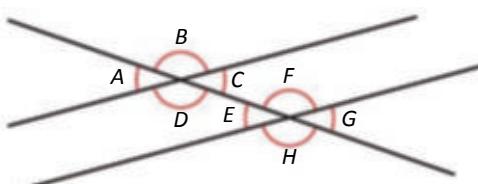
Ángulos suplementarios son los que forman un ángulo llano, por lo que el suplementario de un ángulo recto es otro ángulo recto. Entonces, los ángulos consecutivos que nos piden deben ser complementarios (forman un ángulo recto).

28. ¿Cuántos ángulos adyacentes tiene un ángulo? ¿Y complementarios? ¿Cuántos tiene suplementarios?

Un ángulo tiene dos ángulos adyacentes a él, uno por cada lado.

Un ángulo tiene un único ángulo complementario y suplementario, respectivamente.

29. Copia en tu cuaderno, nombra los ángulos e identifica los que sean iguales.



$$A = C \quad A = E \quad A = G$$

$$B = D \quad B = F \quad B = H$$

$$C = E \quad C = G$$

$$D = F \quad D = H$$

$$E = G$$

$$F = H$$

Rectas y ángulos

30. Determina en la figura anterior los ángulos que sean suplementarios.

A y B A y D A y F A y H

B y C B y E B y G

C y D C y F C y H

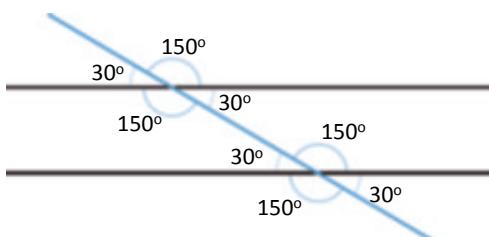
D y E D y G

E y F E y H

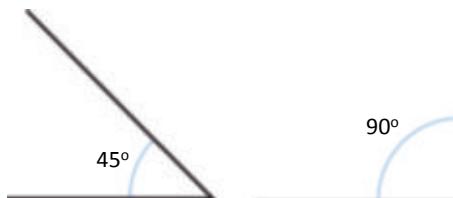
F y G

G y H

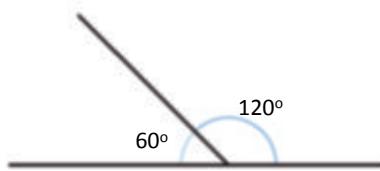
31. Si dadas dos paralelas y una secante sabemos que uno de los ángulos que se forman mide 30° , ¿puedes dar el valor del resto de ángulos? Haz un dibujo e indica el valor de cada ángulo.



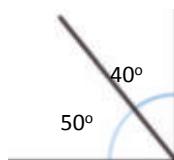
32. Con ayuda del transportador, dibuja un ángulo de 45° y otro de 90° .



33. Dibuja dos ángulos adyacentes, uno de ellos de 60° .



34. Dibuja dos ángulos consecutivos que sean complementarios. ¿Cuánto mide cada ángulo?
¿Puede haber otros dos ángulos con medidas distintas que cumplan las mismas condiciones?



Cualquier par de ángulos consecutivos cuya suma sea 90° cumple esta condición (ejemplo: 35° y 55° , 12° y 78° ...).

35. Expresa en minutos.

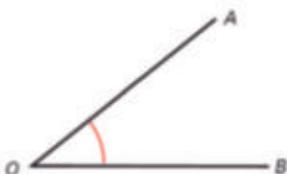
- | | | |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| a) 10° | c) 90° | e) $105''$ |
| b) 52° | d) 75° | f) 164° |
| a) $10 \cdot 60 = 600'$ | c) $90 \cdot 60 = 5400'$ | e) $105 : 60 = 1,75'$ |
| b) $52 \cdot 60 = 3120'$ | d) $75 : 60 = 1,25'$ | f) $164 \cdot 60 = 9840'$ |

36. Expresa en segundos.

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| a) 24° | c) 56° | e) $65'$ |
| b) $34'$ | d) 82° | f) 186° |
| a) $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400''$ | c) $56 \cdot 60 = 3360''$ | e) $65 \cdot 60 = 3900''$ |
| b) $34 \cdot 60 = 2040''$ | d) $82 \cdot 60 \cdot 60 = 295200''$ | f) $186 \cdot 60 \cdot 60 = 669600''$ |

37. Expresa en grados.

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $1440'$ | d) $3240''$ | e) $5040'$ |
| b) $14400''$ | c) $4500'$ | f) $82800''$ |
| a) $1440 : 60 = 24^\circ$ | c) $3240 : 60 : 60 = 0,9^\circ$ | e) $5040 : 60 = 84^\circ$ |
| b) $14400 : 60 : 60 = 4^\circ$ | d) $4500 : 60 = 75^\circ$ | f) $82800 : 60 : 60 = 23^\circ$ |

38. Mide este ángulo y expresa su medida en minutos y en segundos.

El ángulo mide $40^\circ = 2400' = 144000''$

39. Expresa en minutos cada una de estas medidas de tiempo.

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| a) 4 h | c) 48 s | e) $5,5\text{ h}$ |
| b) 23 h | d) $78,25\text{ h}$ | f) 120 s |
| a) $4 \cdot 60 = 240\text{ min}$ | c) $48 : 60 = 0,8\text{ min}$ | e) $5,5 \cdot 60 = 330\text{ min}$ |
| b) $23 \cdot 60 = 1380\text{ min}$ | d) $78,25 \cdot 60 = 4695\text{ min}$ | f) $120 : 60 = 2\text{ min}$ |

40. Expresa en segundos cada una de estas medidas de tiempo.

- | | | |
|---|--|--|
| a) 45 min | c) 12 h | e) $4,5\text{ min}$ |
| b) 6 h | d) 40 min | f) $3,25\text{ h}$ |
| a) $45 \cdot 60 = 2700\text{ s}$ | c) $12 \cdot 60 \cdot 60 = 43200\text{ s}$ | e) $4,5 \cdot 60 = 270\text{ s}$ |
| b) $6 \cdot 60 \cdot 60 = 21600\text{ s}$ | d) $40 \cdot 60 = 2400\text{ s}$ | f) $3,25 \cdot 60 \cdot 60 = 11700\text{ s}$ |

Rectas y ángulos

41. Andrés ha cronometrado el tiempo que ha estado paseando a su perro. En total ha estado 1 h y 22 minutos. ¿Cuántos minutos en total ha durado el paseo?

1 h = 60 min → El paseo ha durado $60 + 22 = 82$ minutos.

42. El récord en el tiempo mínimo para superar unas pruebas de un videojuego está en 2 minutos y 36 segundos. ¿Cuántos segundos hay que hacer para superar el récord?

2 min = $2 \cdot 60 = 120$ s → Para superar el récord hay que hacer menos de $120 + 36 = 156$ segundos.

43. Realiza estas sumas en tu cuaderno.

a)
$$\begin{array}{r} 24^\circ 16' 31'' \\ + 17^\circ 29' 42'' \\ \hline \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 125^\circ 26' 18'' \\ + 15^\circ 47' 53'' \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 38^\circ 54' 3'' \\ + 12^\circ 26' 14'' \\ \hline \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r} 72^\circ 35' 32'' \\ + 58^\circ 24' 58'' \\ \hline \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 43^\circ 5' 52'' \\ + 8^\circ 4' 48'' \\ \hline \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{r} 67^\circ 25' 19'' \\ + 78^\circ 40' 38'' \\ \hline \end{array}$$

a) $41^\circ 45' 73'' = 41^\circ 46' 13''$

d) $140^\circ 73' 71'' = 141^\circ 14' 11''$

b) $50^\circ 80' 17'' = 51^\circ 20' 17''$

e) $130^\circ 59' 90'' = 131^\circ 30''$

c) $51^\circ 9' 100'' = 51^\circ 10' 40''$

f) $145^\circ 65' 57'' = 146^\circ 5' 57''$

44. Efectúa estas sumas de ángulos.

a) $35^\circ 44'' + 28' 39''$

c) $57' 36'' + 9^\circ 15'$

b) $74^\circ 12' + 14^\circ 32''$

d) $18^\circ 4'' + 46^\circ 52' 37''$

a) $35^\circ 28' 83'' = 35^\circ 29' 23''$

b) $88^\circ 12' 32''$

c) $9^\circ 72' 36'' = 10^\circ 12' 36''$

d) $64^\circ 52' 41''$

45. Dados los ángulos $\hat{A} = 28^\circ 3'$ y $\hat{B} = 19' 26''$, calcula $\hat{A} + \hat{B}$.

$28^\circ 22' 26''$

46. Dados los ángulos $\hat{A} = 11^\circ 22''$, $\hat{B} = 6^\circ 52''$ y $\hat{C} = 37^\circ 32'$, calcula $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.

$54^\circ 32' 74'' = 54^\circ 33' 14''$

- 47.** El autobús de línea que va desde Villarta hasta San Juan hace paradas en San Pedro y San Jacinto. En el trayecto de esta mañana ha tardado:



- Desde Villarta hasta San Pedro: 46 min.
- Desde San Pedro a San Jacinto: 73 min.
- Desde San Jacinto hasta San Juan: 1 h y 26 min.

¿Cuánto ha durado el trayecto en total?

$$1 \text{ h } 145 \text{ min} = 3 \text{ h } 25 \text{ min}$$

- 48.** El avión que salía a las 18:05 h ha despegado con 22 minutos de retraso. ¿A qué hora ha salido?

$$18 \text{ h } 5 \text{ min} + 22 \text{ min} = 18 \text{ h } 27 \text{ min} \rightarrow \text{Ha salido a las 18:27 h.}$$

- 49.** Realiza en tu cuaderno las siguientes restas de mediciones de ángulos.

$$\begin{array}{r} 24^\circ 16' 31'' \\ - 17^\circ 29' 42'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72^\circ 35' 32'' \\ - 58^\circ 24' 58'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38^\circ 54' 3'' \\ - 12^\circ 26' 14'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 67^\circ 25' 19'' \\ - 26^\circ 40' 38'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43^\circ 5' 52'' \\ - 8^\circ 4' 48'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7^\circ 25' 29'' \\ - 50^\circ 38'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125^\circ 26' 18'' \\ - 15^\circ 47' 53'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25^\circ 45' 21'' \\ + 3^\circ 24' 56'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23^\circ 75' 91'' \\ - 17^\circ 29' 42'' \\ \hline 6^\circ 46' 49'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72^\circ 34' 92'' \\ - 58^\circ 24' 58'' \\ \hline 14^\circ 10' 34'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38^\circ 53' 63'' \\ - 12^\circ 26' 14'' \\ \hline 26^\circ 27' 49'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 66^\circ 84' 79'' \\ - 26^\circ 40' 38'' \\ \hline 40^\circ 44' 41'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43^\circ 5' 52'' \\ - 8^\circ 4' 48'' \\ \hline 35^\circ 1' 4'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6^\circ 84' 89'' \\ - 50' 38'' \\ \hline 6^\circ 34' 51'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 124^\circ 85' 78'' \\ - 15^\circ 47' 53'' \\ \hline 109^\circ 38' 25'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25^\circ 44' 81'' \\ - 3^\circ 24' 56'' \\ \hline 22^\circ 20' 25'' \end{array}$$

- 50.** Resuelve estas restas.

$$\begin{array}{r} a) 35^\circ 44'' - 28^\circ 39'' \\ b) 74^\circ 12' - 14^\circ 32'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} c) 20^\circ 57' 36'' - 9^\circ 15' \\ d) 118^\circ 4'' - 6^\circ 52' 37'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a) 34^\circ 60' 44'' \\ - 28' 39'' \\ \hline 34^\circ 32' 5'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} c) 20^\circ 57' 36'' \\ - 9^\circ 15' \\ \hline 11^\circ 42' 36'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) 74^\circ 11' 60'' \\ - 14^\circ 32'' \\ \hline 60^\circ 11' 28'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} d) 117^\circ 59' 64'' \\ - 6^\circ 52' 37'' \\ \hline 111^\circ 7' 27'' \end{array}$$

Rectas y ángulos

51. Dados los ángulos $\hat{A} = 28^\circ 3'$, $\hat{B} = 19^\circ 26''$ y $\hat{C} = 40^\circ 3' 12''$, calcula:

a) $\hat{C} - (\hat{A} + \hat{B})$

a) $A + B = 28^\circ 22' 26''$

$C - (A + B) \rightarrow 40^\circ 3' 12''$

$39^\circ 62' 72''$

$- 28^\circ 22' 26''$

$- 28^\circ 22' 26''$

$11^\circ 40' 46''$

b) $(A - B) \rightarrow 28^\circ 3'$

$27^\circ 62' 60''$

$- 19' 26'' \rightarrow$

$- 19' 26''$

$27^\circ 43' 34''$

$C - (A - B) \rightarrow 40^\circ 3' 12''$

$39^\circ 62' 72''$

$- 27^\circ 43' 34'' \rightarrow$

$- 27^\circ 43' 34''$

$12^\circ 19' 38''$

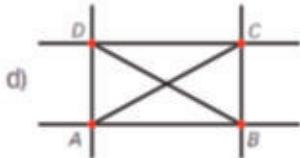
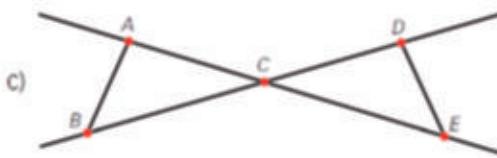
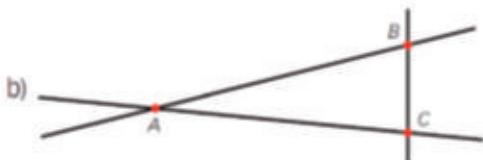
52. Sergio ha cronometrado el tiempo que ha tardado en desplazarse hasta la casa de sus abuelos: 1 hora, 35 minutos y 50 segundos. Pensaba tardar 2 horas. ¿Cuánto tiempo le ha sobrado?

$$\begin{array}{r} 2 \text{ h} \\ - 1 \text{ h } 35 \text{ min } 50 \text{ s} \\ \hline 24 \text{ min } 10 \text{ s} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \text{ h } 59 \text{ min } 60 \text{ s} \\ - 1 \text{ h } 35 \text{ min } 50 \text{ s} \\ \hline 24 \text{ min } 10 \text{ s} \end{array}$$

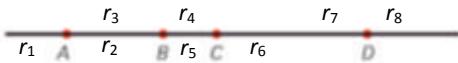
Le han sobrado 24 minutos y 10 segundos.

ACTIVIDADES FINALES

53. Copia en tu cuaderno, nombra las semirrectas e indica qué segmentos se forman.



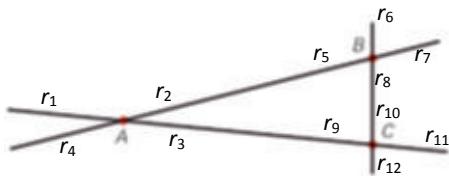
a)



Semirrectas: dos por cada punto (en total 8); por ejemplo: r_1 es la recta con origen en A que va hacia la izquierda; r_2 es la recta con origen en A que va hacia la derecha...

Segmentos (6 en total): \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{BC} , \overline{BD} , \overline{CD} .

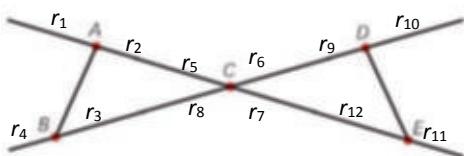
b)



Semirrectas: cuatro por cada punto (en total, 12). Por ejemplo: r_1 es la semirrecta que tiene origen en A y va hacia la izquierda, r_4 es la semirrecta que tiene origen en A y va debajo de r_1 , r_2 es la semirrecta con origen en A que pasa por B , r_3 es la semirrecta con origen en A que pasa por C ...

Segmentos (3 total): \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} .

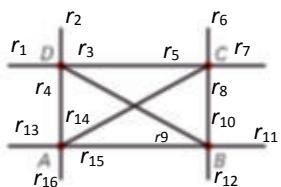
c)



Semirrectas: dos semirrectas por los puntos A, B, D y E y cuatro por el punto C (12 en total).

Segmentos (8 en total): \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AE} , \overline{BC} , \overline{BD} , \overline{CD} , \overline{CE} , \overline{DE} .

d)

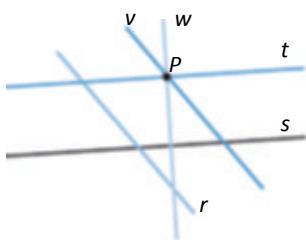


Semirrectas: cuatro por cada punto (16 en total).

Segmentos (6 en total): \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{BC} , \overline{BD} , \overline{CD} .

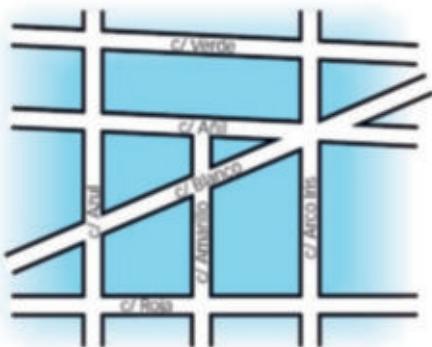
54. Dibuja en tu cuaderno dos rectas r y s secantes, y un punto P que no pertenezca a ellas.

- Traza otra recta t que pase por P y que sea secante a r pero no a s .
- Traza otra recta v que pase por P y que sea secante a s pero no a r .
- Traza otra recta w que pase por P y que sea secante a r y s .



Rectas y ángulos

55. Observa el plano y contesta.



Si consideras las calles como líneas rectas:

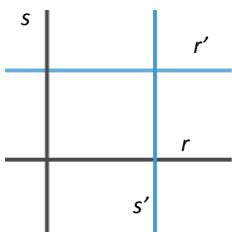
- a) La calle Amarillo y la calle Azul.
- b) La calle Roja.
- c) La calle Blanco, la calle Añil, la calle Roja y la calle Verde.
- d) Son paralelas.
- e) Son secantes.

56. Dadas dos rectas r y s que son secantes:

- a) ¿Puedes trazar una recta perpendicular a r y s a la vez?
- b) ¿Y una paralela a ambas rectas?
- a) No, cualquier recta perpendicular a una de ellas será secante con la otra.
- b) Tampoco.

57. Considerando dos rectas r y s perpendiculares, traza una recta r' paralela a r y otra s' paralela a s .

- a) ¿Cómo son r' y s' entre sí?
- b) ¿Cómo son r' y s entre sí?
- c) ¿Cómo son r y s' entre sí?

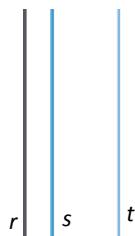


- a) Perpendiculares.
- b) Perpendiculares.
- c) Perpendiculares.

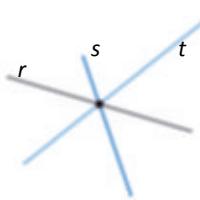
58. Dibuja tres rectas, r , s y t , que cumplan cada una de estas condiciones.

- a) No tienen ningún punto en común.
- b) Tienen un punto en común.
- c) Tienen un punto en común dos a dos.

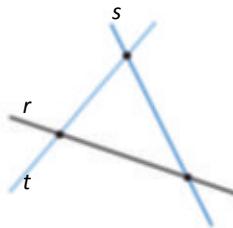
a)



b)



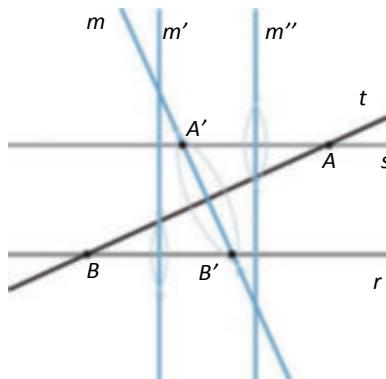
c)



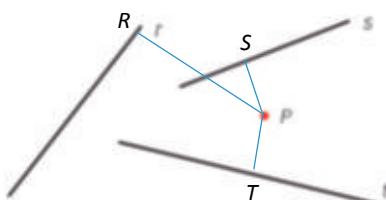
59. Sean r y s dos rectas paralelas y t una recta secante a ellas. Sean A y B los puntos de corte de t con r y s , respectivamente.

- Traza la mediatrix m del segmento AB . Llama A' y B' a los puntos de corte de m con r y s , respectivamente.
- Traza las mediatrixes m' y m'' de los segmentos AA' y BB' .
- Indica la posición relativa de m' y m'' .

a) y b)

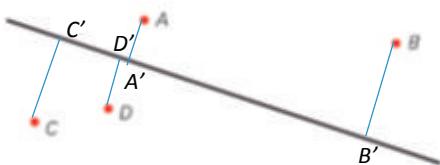
c) m' y m'' son rectas paralelas.

61. Copia en tu cuaderno estas rectas y el punto P . Halla la distancia del punto P a cada una de las rectas.

Distancia de P a r = medida $RP = 1,9$ cm = 19 mmDistancia de P a s = medida $SP = 0,7$ cm = 7 mmDistancia de P a t = medida $TP = 0,7$ cm = 7 mm

Rectas y ángulos

62. Copia en tu cuaderno estos puntos y esta recta. Después, halla la distancia de cada punto a la recta r .



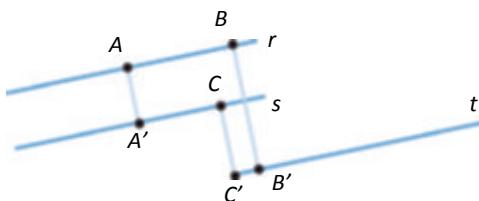
Distancia de A a r = medida $AA' = 0,5 \text{ cm} = 5 \text{ mm}$

Distancia de B a r = medida $BB' = 1,2 \text{ cm} = 12 \text{ mm}$

Distancia de C a r = medida $CC' = 1,1 \text{ cm} = 11 \text{ mm}$

Distancia de D a r = medida $DD' = 0,6 \text{ cm} = 6 \text{ mm}$

64. Dibuja estas rectas en tu cuaderno y halla la distancia entre ellas.



Distancia de r a s = medida $AA' = 0,7 \text{ cm} = 7 \text{ mm}$

Distancia de r a t = medida $BB' = 1,6 \text{ cm} = 16 \text{ mm}$

Distancia de s a t = medida $CC' = 0,9 \text{ cm} = 9 \text{ mm}$

65. Razona si estos enunciados son ciertos.

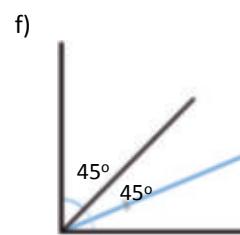
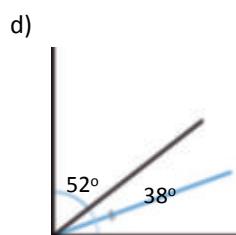
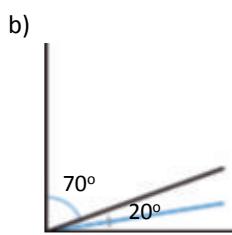
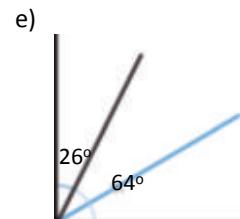
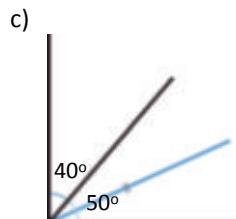
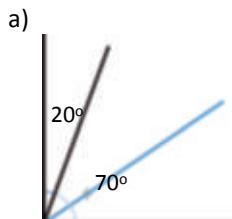
- a) Dos ángulos agudos son siempre complementarios.
 - b) Dos ángulos complementarios son siempre agudos.
 - c) Dos ángulos adyacentes son siempre consecutivos.
 - d) Dos ángulos consecutivos son siempre adyacentes.
 - e) Dos ángulos consecutivos son siempre suplementarios.
 - f) Dos ángulos obtusos siempre se diferencian en uno agudo.
 - g) Dos ángulos agudos siempre suman uno obtuso.
- a) Falso. b) Verdadero. c) Verdadero. d) Falso. e) Falso. f) Verdadero. g) Falso.

66. Copia estas frases en tu cuaderno y complétalas con las palabras que faltan.

- a) El suplementario de un ángulo recto es un ángulo...
 - b) El ángulo adyacente de un agudo es un ángulo...
 - c) El suplementario de un ángulo obtuso es un ángulo...
 - d) El complementario de un ángulo de 45° es el suplementario de un ángulo de...
- a) Recto. b) Obtuso. c) Agudo. d) 135° .

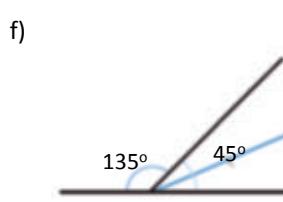
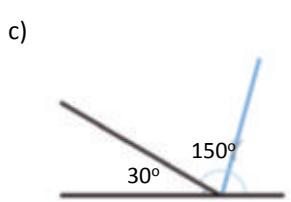
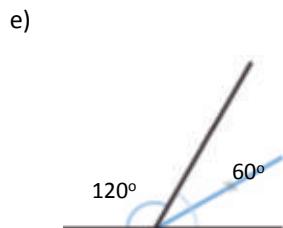
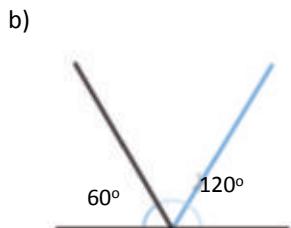
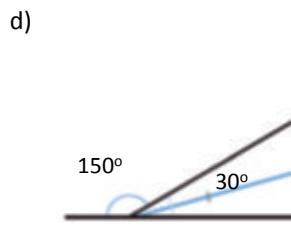
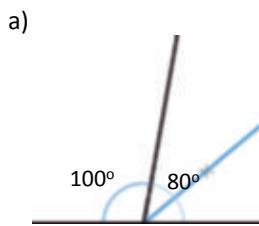
68. Dibuja los siguientes ángulos y, para cada uno, traza su bisectriz y su ángulo complementario.

- a) $\hat{A} = 70^\circ$
- b) $\hat{B} = 20^\circ$
- c) $\hat{C} = 50^\circ$
- d) $\hat{D} = 38^\circ$
- e) $\hat{E} = 64^\circ$
- f) $\hat{F} = 45^\circ$



69. Dibuja los siguientes ángulos y, para cada uno, traza su bisectriz y su ángulo suplementario.

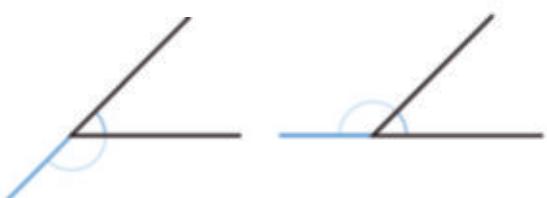
- a) $\hat{A} = 80^\circ$
- b) $\hat{B} = 120^\circ$
- c) $\hat{C} = 150^\circ$
- d) $\hat{D} = 30^\circ$
- e) $\hat{E} = 60^\circ$
- f) $\hat{F} = 45^\circ$



70. Dado el ángulo de la figura construye en tu cuaderno estos otros que se indican continuación.

- Sus adyacentes.
- Su ángulo opuesto por el vértice.
- Su complementario.
- Su suplementario.

a)



c)



b)



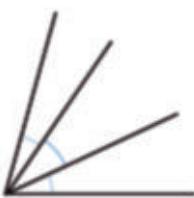
d)



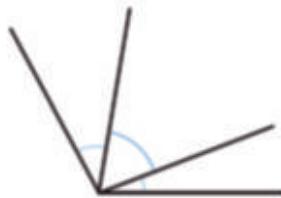
71. Dibuja tres ángulos agudos consecutivos de forma que se cumplan las condiciones.

- Entre los tres forman un ángulo agudo.
- Entre los tres forman un ángulo recto.
- Entre los tres forman un ángulo obtuso.
- Entre los tres forman un ángulo llano.

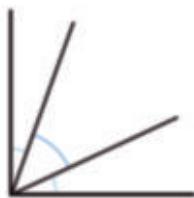
a)



c)



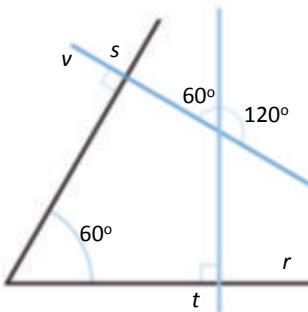
b)



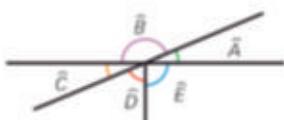
d)



72. Dibuja en tu cuaderno un ángulo de 60° y lláma a las semirrectas que forman sus lados r y s . Dibuja una perpendicular a r y llámala t , y otra a s que debes llamar v . ¿Qué ángulo forman las rectas t y v ?



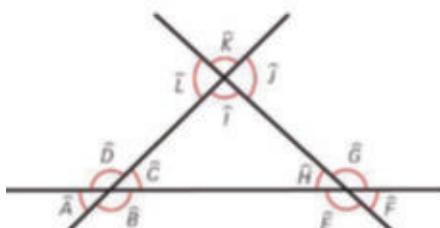
73. Observa la figura.



- a) Indica qué ángulos son opuestos por los vértices.
 b) Señala los ángulos adyacentes.
- a) A y C
 b) A y \hat{B} A, \hat{E} y D C y \hat{B} C, D y \hat{E}

74. Observa la siguiente figura y señala.

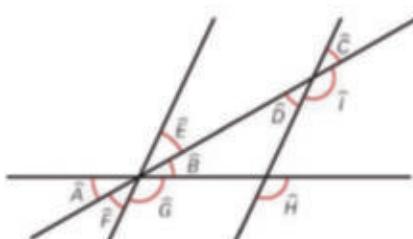
- a) Los pares de ángulos opuestos por el vértice.
 b) Los pares de ángulos adyacentes.



- a) K y \hat{I} , \hat{J} y \hat{L} , \hat{B} y D , A y C , F y H , \hat{E} y G
 b) A y \hat{B} , A y D , \hat{B} y C , C y D , \hat{E} y \hat{F} , \hat{E} y H , \hat{F} y G , G y H , \hat{I} y J , \hat{I} y \hat{L} , J y K , K y \hat{I}

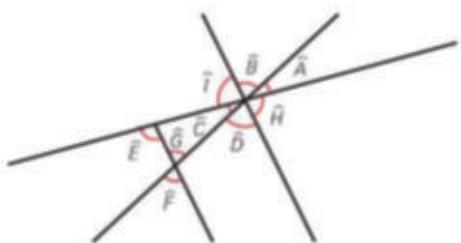
75. Observa la figura y completa en tu cuaderno estas igualdades.

- | | | | |
|--|--|--------------|--------|
| a) $\hat{B} + \square = \hat{I}$ | e) $\hat{D} + \square = 180^\circ$ | | |
| b) $\hat{B} + \hat{F} + \square = 180^\circ$ | f) $\hat{E} = \square = \hat{C}$ | | |
| c) $\hat{H} = \square$ | g) $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \square$ | | |
| d) $\hat{B} + \square = \hat{F} + \square$ | | | |
| a) G | c) G | e) \hat{I} | g) G |
| b) G | d) \hat{E}, A | f) \hat{F} | |



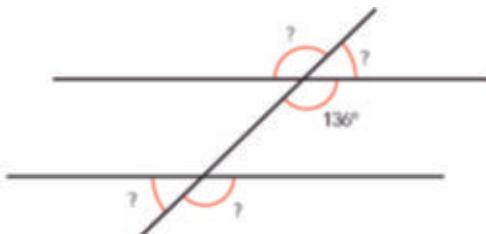
Rectas y ángulos

76. Observa la figura y completa en tu cuaderno cada apartado añadiendo los signos $=$, $+$ o $-$ para tener igualdades que sean ciertas.



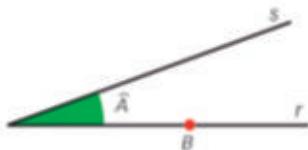
- a) $\hat{A} \square \hat{B} \square 180^\circ \square \hat{I}$
 b) $\hat{B} \square \hat{G}$
 c) $\hat{E} \square \hat{I} \square 180^\circ$
- d) $\hat{G} \square 180^\circ \square \hat{A} \square \hat{I}$
 e) $180^\circ \square \hat{A} \square \hat{H} \square \hat{F}$
 f) $\hat{C} \square \hat{D} \square \hat{E} \square$
- a) $\hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - \hat{I}$
 b) $\hat{B} = \hat{G}$
 c) $\hat{E} - \hat{I} = 180^\circ$
- d) $G = 180^\circ - A - I$
 e) $180^\circ = \hat{A} - \hat{H} + \hat{F}$
 f) $\hat{C} - \hat{D} = \hat{E}$

77. Calcula la medida de los ángulos desconocidos en esta figura.



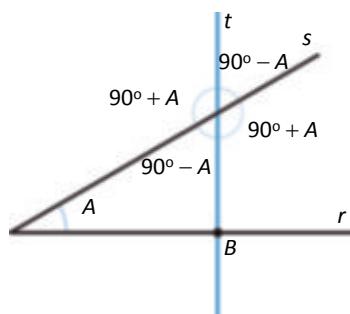
De izquierda a derecha y de arriba abajo: 136° , 44° , 44° y 136° .

78. Dibuja en tu cuaderno el ángulo \hat{A} .



Traza la perpendicular t a la recta r desde el punto B.

¿Cuánto medirán los cuatro ángulos que forma la recta t con la recta s?



79. Expresa en minutos las medidas de estos ángulos.

a) $\hat{A} = 38^\circ$ b) $\hat{B} = 5100''$ c) $\hat{C} = 127^\circ$

a) $38 \cdot 60 = 2280'$ b) $5100 : 60 = 85'$ c) $127 \cdot 60 = 7620'$

80. Expresa en segundos estas medidas de ángulos.

a) $\hat{A} = 92^\circ$ b) $\hat{B} = 135^\circ$ c) $\hat{C} = 68^\circ 4'$

a) $92 \cdot 60 \cdot 60 = 331\,200''$ b) $135 \cdot 60 \cdot 60 = 486\,000''$ c) $4 \cdot 60 = 240''$

81. Expresa en grados estas medidas de ángulos.

a) $\hat{A} = 54\,000''$ b) $\hat{B} = 420'$ c) $\hat{C} = 180' 30''$

a) $54\,000 : 60 : 60 = 15^\circ$ b) $420 : 60 = 7^\circ$ c) $30 : 60 : 60 = 0,0083^\circ$

82. Transforma en minutos estas medidas de tiempo.

a) 3 h b) 32400 s c) 85 h d) 72000 s

a) $3 \cdot 60 = 180$ min c) $85 \cdot 60 = 5\,100$ min

b) $32\,400 : 60 = 540$ min d) $72\,000 : 60 = 1\,200$ min

84. Expresa estas medidas de tiempo en segundos.

a) 94 min b) 3,5 h c) 21 h 14 min

a) $94 \cdot 60 = 5\,640$ s

b) $3,5 \cdot 60 \cdot 60 = 12\,600$ s

c) $21 \cdot 60 + 14 = 1\,274$ min $= 1\,274 \cdot 60 = 76\,440$ s

85. Expresa en segundos.

a) $2^\circ 3' 40''$ c) 3 h 15 min 25 s

b) $20^\circ 25' 30''$ d) 9 h 17 min 43 s

a) $2 \cdot 60 \cdot 60 + 3 \cdot 60 + 40 = 7\,420$ s

c) $3 \cdot 60 \cdot 60 + 15 \cdot 60 + 25 = 11\,725$ s

b) $20 \cdot 60 \cdot 60 + 25 \cdot 60 + 30 = 73\,530$ s

d) $9 \cdot 60 \cdot 60 + 17 \cdot 60 + 43 = 33\,463$ s

87. Expresa, en grados, minutos y segundos, un ángulo de amplitud $8000''$.

$$\begin{array}{r} 8000 \mid 60 \\ 200 \quad 133 \\ \quad 200 \\ \quad 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 133 \mid 60 \\ \quad 13 \quad 2 \\ \quad \quad 2 \end{array}$$

$$8000'' = 2^\circ 13' 20''$$

Rectas y ángulos

88. Expresa en grados, minutos y segundos, o en horas, minutos y segundos, según corresponda.

- a) $8213''$ c) $465''$ e) 12000 s
b) $7365''$ d) 15784 s f) 5678 s

a) $8213 \overline{)60}$
 $\begin{array}{r} 221 \\ 136 \\ \hline 413 \\ 53 \end{array}$

136 $\overline{)60}$
 $\begin{array}{r} 16 \\ 2 \end{array}$

$$8213'' = 2^\circ 16' 53''$$

b) $7365 \overline{)60}$
 $\begin{array}{r} 136 \\ 122 \\ \hline 165 \\ 45 \end{array}$

122 $\overline{)60}$
 $\begin{array}{r} 02 \\ 2 \end{array}$

$$7365'' = 2^\circ 2' 45''$$

c) $465 \overline{)60}$
 $\begin{array}{r} 45 \\ 7 \end{array}$

$$465'' = 7' 45''$$

d) $15784 \overline{)60}$
 $\begin{array}{r} 375 \\ 263 \\ \hline 184 \\ 04 \end{array}$

263 $\overline{)60}$
 $\begin{array}{r} 23 \\ 4 \end{array}$

$$15784\text{ s} = 4\text{ h }23\text{ min }4\text{ s}$$

e) $12000 \overline{)60}$
 $\begin{array}{r} 000 \\ 200 \\ \hline 00 \\ 0 \end{array}$

200 $\overline{)60}$
 $\begin{array}{r} 20 \\ 3 \end{array}$

$$12000\text{ s} = 3\text{ h }20\text{ min}$$

f) $5678 \overline{)60}$
 $\begin{array}{r} 278 \\ 94 \\ \hline 38 \end{array}$

94 $\overline{)60}$
 $\begin{array}{r} 34 \\ 1 \end{array}$

$$5678\text{ s} = 1\text{ h }34\text{ min }38\text{ s}$$

89. Expresa en forma compleja.

- a) 20953 s c) $402,25\text{ min}$
b) $9,57\text{ días}$ d) $10,5\text{ semanas}$

a) $20953\text{ s} = 5\text{ h }49\text{ min }13\text{ s}$

b) $9,57\text{ días} = 229\text{ h }40\text{ min }48\text{ s}$

c) $402,25\text{ min} = 6\text{ h }42\text{ min }15\text{ s}$

d) $10,5\text{ semanas} = 1764\text{ h}$

90. Completa en tu cuaderno la tabla.

Ángulos	Grados	Minutos	Segundos
310,36°	310	21	36
164 880"	45	48	0
3379,7'	56	19	42

91. Realiza las siguientes sumas de ángulos.

a) $34^\circ 15' 23'' + 46^\circ 5' 12''$

b) $49^\circ 43'' + 68^\circ 35' 38''$

c) $84^\circ 54' + 46^\circ 14''$

a) $34^\circ 15' 23''$

$$\begin{array}{r} + 46^\circ 5' 12'' \\ \hline 80^\circ 20' 35'' \end{array}$$

b) $49^\circ 43''$

$$\begin{array}{r} + 68^\circ 35' 38'' \\ \hline 117^\circ 35' 81'' \rightarrow 117^\circ 36' 21'' \end{array}$$

c) $84^\circ 54'$

$$\begin{array}{r} + 46^\circ 14'' \\ \hline 130^\circ 54' 14'' \end{array}$$

d) $72' 28'' + 6^\circ 47' 2''$

e) $123^\circ 32' 45'' + 45^\circ 8''$

f) $54^\circ 7' + 36' 4''$

d) $72' 28''$

$$\begin{array}{r} + 6^\circ 47' 2'' \\ \hline 6^\circ 119' 30'' \rightarrow 7^\circ 59' 30'' \end{array}$$

e) $123^\circ 32' 45''$

$$\begin{array}{r} + 45^\circ 8'' \\ \hline 168^\circ 32' 53'' \end{array}$$

f) $54^\circ 7'$

$$\begin{array}{r} + 36' 4'' \\ \hline 54^\circ 43' 4'' \end{array}$$

92. Realiza las siguientes restas de ángulos.

a) $35^\circ 17' 22'' - 26^\circ 5' 12''$

b) $89^\circ 16' 3'' - 8^\circ 38''$

c) $61^\circ 34'' - 7^\circ 14'$

a) $35^\circ 17' 22''$

$$\begin{array}{r} - 26^\circ 5' 12'' \\ \hline 9^\circ 12' 10'' \end{array}$$

b) $89^\circ 15' 63''$

$$\begin{array}{r} - 8^\circ 38'' \\ \hline 81^\circ 15' 25'' \end{array}$$

c) $60^\circ 60' 34''$

$$\begin{array}{r} - 7^\circ 14' \\ \hline 53^\circ 46' 34'' \end{array}$$

d) $95^\circ 22' - 47^\circ 52' 43''$

e) $63^\circ 32' 45'' - 46^\circ 8''$

f) $55^\circ 72' 28'' - 6^\circ 47' 52''$

d) $94^\circ 61' 60''$

$$\begin{array}{r} - 47^\circ 52' 43'' \\ \hline 47^\circ 9' 17'' \end{array}$$

e) $63^\circ 32' 45''$

$$\begin{array}{r} - 46^\circ 8'' \\ \hline 17^\circ 32' 37'' \end{array}$$

f) $55^\circ 71' 88''$

$$\begin{array}{r} - 6^\circ 47' 52'' \\ \hline 49^\circ 24' 36'' \end{array}$$

Rectas y ángulos

93. Halla el complementario y el suplementario de los siguientes ángulos.

a) $56^\circ 4' 26''$ e) $39' 7''$

b) $14^\circ 43' 8''$ f) 75°

c) $39^\circ 24'$ g) $53^\circ 41' 2''$

d) $88^\circ 45'$ h) $54' 3''$

a) Complementario: $33^\circ 55' 34''$

$$89^\circ 59' 60''$$

$$- 56^\circ 4' 26''$$

$$\hline 33^\circ 55' 34''$$

Suplementario: $123^\circ 55' 34''$

$$179^\circ 59' 60''$$

$$- 56^\circ 4' 26''$$

$$\hline 123^\circ 55' 34''$$

b) Complementario: $75^\circ 16' 52''$

$$89^\circ 59' 60''$$

$$- 14^\circ 43' 8''$$

$$\hline 75^\circ 16' 52''$$

Suplementario: $165^\circ 16' 52''$

$$179^\circ 59' 60''$$

$$- 14^\circ 43' 8''$$

$$\hline 165^\circ 16' 52''$$

c) Complementario: $50^\circ 59' 36''$

$$89^\circ 59' 60''$$

$$- 39^\circ 24''$$

$$\hline 50^\circ 59' 36''$$

Suplementario: $140^\circ 59' 36''$

$$179^\circ 59' 60''$$

$$- 39^\circ 24''$$

$$\hline 140^\circ 59' 36''$$

d) Complementario: $1^\circ 15'$

$$89^\circ 60'$$

$$- 88^\circ 45'$$

$$\hline 1^\circ 15'$$

Suplementario: $91^\circ 15'$

$$179^\circ 60'$$

$$- 88^\circ 45'$$

$$\hline 91^\circ 15'$$

e) Complementario: $89^\circ 20' 53''$

$$89^\circ 59' 60''$$

$$- 39' 7''$$

$$\hline 89^\circ 20' 53''$$

Suplementario: $179^\circ 20' 53''$

$$179^\circ 59' 60''$$

$$- 39' 7''$$

$$\hline 179^\circ 20' 53''$$

f) Complementario: $90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$

Suplementario: $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

g) Complementario: $36^\circ 18' 58''$

$$89^\circ 59' 60''$$

$$- 53^\circ 41' 2''$$

$$\hline 36^\circ 18' 58''$$

Suplementario: $126^\circ 18' 58''$

$$179^\circ 59' 60''$$

$$- 53^\circ 41' 2''$$

$$\hline 126^\circ 18' 58''$$

h) Complementario: $89^\circ 5' 57''$

$$89^\circ 59' 60''$$

$$- 54' 3''$$

$$\hline 89^\circ 5' 57''$$

Suplementario: $179^\circ 5' 57''$

$$179^\circ 59' 60''$$

$$- 54' 3''$$

$$\hline 179^\circ 5' 57''$$

94. Utiliza el transportador para medir estos ángulos.



a) $360 - 90 = 270^\circ$

b) $360 - 110 = 250^\circ$

c) $360 - 30 = 330^\circ$

d) $360 - 45 = 315^\circ$

95. Considera los ángulos $\hat{A} = 26^\circ 38' 19''$ y $\hat{B} = 14^\circ 11' 35''$. Determina las amplitudes de los siguientes ángulos.

a) $\hat{A} + \hat{B}$
b) $\hat{A} - \hat{B}$

c) $2\hat{A} + \hat{B}$
d) $3\hat{A} - 2\hat{B}$

a) $A - B = 40^\circ 49' 54''$

$$\begin{array}{r} 26^\circ 38' 19'' \\ + 14^\circ 11' 35'' \\ \hline 40^\circ 49' 54'' \end{array}$$

b) $A - B = 12^\circ 26' 44''$

$$\begin{array}{r} 26^\circ 37' 79'' \\ - 14^\circ 11' 35'' \\ \hline 12^\circ 26' 44'' \end{array}$$

c) $2A = 2 \cdot (26^\circ 38' 19'') = 52^\circ 74' 158'' = 52^\circ 76' 38'' = 53^\circ 16' 38''$

$$\begin{array}{r} 53^\circ 16' 38'' \\ + 14^\circ 11' 35'' \\ \hline 67^\circ 27' 73'' \end{array}$$

$$2A - B = 67^\circ 27' 73'' - 14^\circ 11' 35'' = 53^\circ 16' 38''$$

d) $2B = 2 \cdot (14^\circ 11' 35'') = 28^\circ 22' 70'' = 28^\circ 23' 10''$

$$\begin{array}{r} 3A = 3 \cdot (26^\circ 38' 19'') = 78^\circ 114' 57'' = 78^\circ 54' 37'' \\ - 2B = 2 \cdot (14^\circ 11' 35'') = 28^\circ 22' 70'' = 28^\circ 23' 10'' \\ \hline 50^\circ 31' 27'' \end{array}$$

Rectas y ángulos

97. Determina la medida de estos dos ángulos, y resuelve las operaciones que se indican.



- a) $\hat{A} + \hat{B}$ b) $\hat{B} - \hat{A}$ c) $3 \cdot \hat{A}$ d) $2 \cdot \hat{B}$

$$A = 90^\circ$$

$$\hat{B} = 270^\circ$$

$$a) 90 + 270 = 360^\circ$$

$$c) 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$$

$$b) 270 - 90 = 180^\circ$$

$$d) 2 \cdot 270^\circ = 540^\circ$$

98. Considera los ángulos $\hat{A} = 63^\circ 15' 47''$ y $\hat{B} = 74^\circ 18' 16''$. Determina las amplitudes de los siguientes ángulos.

- a) Complementario de $\hat{B} - \hat{A}$
 b) Suplementario de $\hat{A} + \hat{B}$
 c) Suplementario de $\hat{B} - \hat{A}$
 d) Complementario de $3\hat{A} - 2\hat{B}$
 e) Suplementario de $2\hat{B} - \hat{A}$

$$a) \hat{B} - \hat{A} = 11^\circ 2' 29''$$

$$74^\circ 18' 16''$$

$$74^\circ 17' 76''$$

$$\underline{- 63^\circ 15' 47''}$$

$$\underline{- 63^\circ 15' 47''}$$

$$11^\circ 2' 29''$$

$$\text{Complementario de } \hat{B} - \hat{A} = 78^\circ 57' 31''$$

$$89^\circ 59' 60''$$

$$\underline{- 11^\circ 2' 29''}$$

$$78^\circ 57' 31''$$

$$b) \hat{A} - \hat{B} = 137^\circ 33' 63'' = 137^\circ 34' 3''$$

$$63^\circ 15' 47''$$

$$+ 74^\circ 18' 16''$$

$$\underline{137^\circ 33' 63''}$$

$$\text{Suplementario de } \hat{A} - \hat{B} = 42^\circ 25' 57''$$

$$179^\circ 59' 60''$$

$$\underline{- 137^\circ 34' 3''}$$

$$42^\circ 25' 57''$$

$$c) \hat{B} - \hat{A} = 11^\circ 2' 29''$$

$$\text{Suplementario de } \hat{B} - \hat{A} = 168^\circ 57' 31''$$

$$179^\circ 59' 60''$$

$$\underline{- 11^\circ 2' 29''}$$

$$168^\circ 57' 31''$$

$$d) 3 \cdot A = 3 \cdot (63^\circ 15' 47'') = 189^\circ 45' 141'' = 189^\circ 47' 21'' \quad 2 \cdot \hat{B} = 2 \cdot (74^\circ 18' 16'') = 148^\circ 36' 32''$$

$$3A - 2\hat{B} = 41^\circ 10' 49''$$

$$\begin{array}{r} 189^\circ 47' 21'' \\ - 148^\circ 36' 32'' \\ \hline 41^\circ 10' 49'' \end{array}$$

$$\text{Complementario de } 3A - 2\hat{B} = 48^\circ 49' 11''$$

$$89^\circ 59' 60''$$

$$\begin{array}{r} - 41^\circ 10' 49'' \\ \hline 48^\circ 49' 11'' \end{array}$$

$$e) 2 \cdot \hat{B} = 148^\circ 36' 32'' \quad 2\hat{B} - A = 85^\circ 20' 45''$$

$$\begin{array}{r} 148^\circ 36' 32'' \\ - 63^\circ 15' 47'' \\ \hline 85^\circ 20' 45'' \end{array}$$

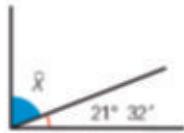
$$\text{Suplementario de } 2\hat{B} - A = 94^\circ 39' 15''$$

$$179^\circ 59' 60''$$

$$\begin{array}{r} - 85^\circ 20' 45'' \\ \hline 94^\circ 39' 15'' \end{array}$$

99. Calcula la amplitud del ángulo \hat{X} en cada figura.

a)



b)



a) X es el complementario del ángulo dado $\rightarrow X = 68^\circ 28'$

$$\begin{array}{r} 89^\circ 60' \\ - 21^\circ 32' \\ \hline 68^\circ 28' \end{array}$$

b) X es el suplementario del ángulo dado $\rightarrow X = 59^\circ 45'$

$$\begin{array}{r} 179^\circ 60' \\ - 120^\circ 15' \\ \hline 59^\circ 45' \end{array}$$

Rectas y ángulos

100. Calcula la amplitud del ángulo de una porción de pizza que está dividida en:

- a) 6 porciones.
- b) 8 porciones.
- c) 10 porciones.
- d) 12 porciones.

a) $360^\circ : 6 = 60^\circ$

c) $360^\circ : 10 = 36^\circ$

b) $360^\circ : 8 = 45^\circ$

d) $360^\circ : 12 = 30^\circ$



101. Tres amigos, Marcos, Roberto y Ricardo, se están comiendo un pastel:

- Marcos se ha comido un trozo equivalente a $35^\circ 10'$.
- Roberto se ha comido $40^\circ 30'$.
- Ricardo se ha comido $50^\circ 40'$.

a) ¿Cuánto mide el ángulo del trozo de pastel que se han comido entre los tres?

b) ¿Cuánto mide el trozo del círculo que queda?



a) $35^\circ 10' + 40^\circ 30' + 50^\circ 40' = 125^\circ 80' = 126^\circ 20'$

b) $359^\circ 60'$

$\underline{- 126^\circ 20'}$

$233^\circ 40'$

El trozo que queda tiene una amplitud de $233^\circ 40'$.

102. Los rayos del Sol entran por la mañana en la habitación de Luis y dan en la pared con una determinada inclinación. A las 7 de la mañana de un día de verano, ese ángulo es de $22^\circ 14'$. Cada hora que pasa, el ángulo de inclinación aumenta en $2^\circ 10' 20''$.

a) ¿Qué ángulo tendrá a las 8 de la mañana?

b) ¿Y a las 9 de la mañana?

c) ¿Y a la una del mediodía?

a) Ha transcurrido una hora.

$$22^\circ 14' + 2^\circ 10' 20'' = 24^\circ 24' 20''$$

El ángulo de inclinación a las 8 de la mañana es de $24^\circ 24' 20''$.

b) Han transcurrido dos horas.

$$22^\circ 14' + 2 \cdot (2^\circ 10' 20'') = 22^\circ 14' + 4^\circ 20' 40'' = 26^\circ 34' 40''$$

El ángulo de inclinación a las 9 de la mañana es de $26^\circ 34' 40''$.

c) Han transcurrido seis horas.

$$22^\circ 14' + 6 \cdot (2^\circ 10' 20'') = 22^\circ 14' + 12^\circ 60' 120'' = 22^\circ 14' + 13^\circ 2' = 35^\circ 16'$$

103. Calcula el valor exacto de los ángulos que forman la aguja horaria y la aguja del minutero de un reloj a las siguientes horas.

- a) Las tres de la tarde.
- b) Las tres y diez minutos.
- c) Las tres y media.
- d) Las cuatro menos cuarto.
- e) Las cinco y cuarto.
- f) Las seis en punto.



Minutero

$$\begin{array}{rcl} 60 \text{ min} & \rightarrow & 360^\circ \\ 1 \text{ min} & \rightarrow & x \end{array}$$

$x = 6^\circ \rightarrow$ La aguja del minutero recorre 6° cada minuto.

Horaria

$$\begin{array}{rcl} 12 \cdot 60 \text{ min} & \rightarrow & 360^\circ \\ 1 \text{ min} & \rightarrow & x \end{array}$$

$x = 0,5^\circ \rightarrow$ La aguja horaria recorre $0,5^\circ$ cada minuto.

- a) Ángulo = 90° ($(3 \cdot 60) \cdot 0,5 = 90^\circ$)
- b) Minutero: $10 \cdot 6^\circ = 60^\circ$ Horaria: $(3 \cdot 60 + 10) \cdot 0,5^\circ = 95^\circ \rightarrow$ Ángulo = $95^\circ - 60^\circ = 35^\circ$
- c) Minutero: $30 \cdot 6^\circ = 180^\circ$ Horaria: $(3 \cdot 60 + 30) \cdot 0,5^\circ = 105^\circ \rightarrow$ Ángulo = $180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$
- d) Minutero: $45 \cdot 6^\circ = 270^\circ$ Horaria: $(3 \cdot 60 + 45) \cdot 0,5^\circ = 112,5^\circ \rightarrow$ Ángulo = $270^\circ - 112,5^\circ = 157,5^\circ$
- e) Minutero: $15 \cdot 6^\circ = 90^\circ$ Horaria: $(5 \cdot 60 + 15) \cdot 0,5^\circ = 157,5^\circ \rightarrow$ Ángulo = $157,5^\circ - 90^\circ = 67,5^\circ$
- f) Ángulo = 180°

104. Mariano tarda 20 minutos en ir desde su casa al instituto. ¿Cuánto tiempo emplea a la semana en ir de su casa al instituto considerando la ida y la vuelta?

En ir y volver tarda $20 \text{ min} + 20 \text{ min} = 40 \text{ min}$ al día

Va al instituto 5 días a la semana (de lunes a viernes): $40 \cdot 5 = 200 \text{ min} = 3 \text{ h } 20 \text{ min}$

Mariano emplea 3 h 20 min a la semana en ir y volver al instituto.

105. Una fotocopiadora funcionó 8 h 15 min 12 s el lunes; 3 h 40 min el martes, y 8 h 15 min 40 s el miércoles.

- a) ¿Cuánto tiempo estuvo funcionando en total?
- b) ¿Cuánto tiempo funcionó el miércoles más que el martes?

a) 8 h 15 min 12 s

+ 3 h 40 min

8 h 15 min 40 s

19 h 70 min 52 s

La fotocopiadora estuvo funcionando los tres días 19 h 70 min 52 s = 20 h 10 min 52 s.

Rectas y ángulos

b) $7 \text{ h } 75 \text{ min } 40 \text{ s}$

$$- 3 \text{ h } 40 \text{ min}$$

$$\hline 4 \text{ h } 35 \text{ min } 40 \text{ s}$$

El miércoles estuvo funcionando la fotocopiadora 4 h 35 min 40 s más que el martes.

106. Marcos se conectó a Internet desde las 8 h 25 min hasta las 10 h 15 min 12 s. Calcula el tiempo total que estuvo conectado.

$$10 \text{ h } 15 \text{ min } 12 \text{ s}$$

$$- 8 \text{ h } 25 \text{ min}$$

$$9 \text{ h } 75 \text{ min } 12 \text{ s}$$

$$- 8 \text{ h } 25 \text{ min}$$

$$\hline 1 \text{ h } 50 \text{ min } 12 \text{ s}$$

Marcos ha estado conectado 1 h 50 min 12 s.

107. En una carrera solidaria los tiempos en llegar a la meta de los tres primeros corredores han sido: 25 minutos 34 segundos, 26 minutos 2 segundos y 26 minutos 11 segundos.



- a) ¿Cuánto tiempo separa al primer corredor de los otros dos corredores?
- b) Si el corredor que ha llegado en cuarta posición lo ha hecho 56 segundos después del tercero, ¿a cuánto tiempo ha llegado del primero?
- c) El último corredor ha llegado a meta con un tiempo de 34 minutos 45 segundos. ¿Cuánto tiempo separa al primero del último?

a) $26 \text{ min } 2 \text{ s}$

$$- 25 \text{ min } 34 \text{ s}$$

$$25 \text{ min } 62 \text{ s}$$

$$- 25 \text{ min } 34 \text{ s}$$

$$\hline 0 \text{ min } 28 \text{ s}$$

$$26 \text{ min } 11 \text{ s}$$

$$25 \text{ min } 71 \text{ s}$$

$$- 25 \text{ min } 34 \text{ s}$$

$$- 25 \text{ min } 34 \text{ s}$$

$$\hline 0 \text{ min } 37 \text{ s}$$

El segundo corredor ha llegado 28 s después del primero y el tercer corredor 37 s después del primero.

b) $37 \text{ s} + 56 \text{ s} = 93 \text{ s} = 1 \text{ min } 33 \text{ s}$

El cuarto corredor ha llegado 1 min 33 s después del primero.

c) $34 \text{ min } 45 \text{ s}$

$$- 25 \text{ min } 34 \text{ s}$$

$$\hline 9 \text{ min } 11 \text{ s}$$

El primero ha llegado 9 min 11 s antes a meta que el último.

108. Lola trabajó el lunes durante 8 h 40 min 25 s. Como tiene exceso horario, ha decidido trabajar media hora menos los restantes días de esa semana.

- a) ¿Cuánto trabajará cada uno de los otros días?
 b) Suponiendo que su jornada laboral es de lunes a viernes, ¿cuánto tiempo trabajará en total esta semana?

$$\text{a)} \quad 8 \text{ h } 40 \text{ min } 25 \text{ s} - 30 \text{ min} = 8 \text{ h } 10 \text{ min } 25 \text{ s}$$

$$\text{b)} \quad 8 \text{ h } 40 \text{ min } 25 \text{ s} + 4 \cdot (8 \text{ h } 10 \text{ min } 25 \text{ s}) = 8 \text{ h } 40 \text{ min } 25 \text{ s} + 32 \text{ h } 40 \text{ min } 100 \text{ s} = 40 \text{ h } 80 \text{ min } 125 \text{ s} = \\ 40 \text{ h } 82 \text{ min } 5 \text{ s} = 41 \text{ h } 22 \text{ min } 5 \text{ s}$$

109. Anabel, para ir al trabajo, coge el tren de cercanías. Desde su casa hasta el trabajo hay dos estaciones; hasta la primera suele tardar 32 min 54 s, y hasta la segunda, 44 min 27 s. Hoy, debido a una avería en las vías, el tren se ha retrasado. En llegar a la primera estación ha tardado 19 min 40 s más de lo habitual y hasta la segunda se ha retrasado 26 min 32 s.

- a) ¿Cuánto ha tardado Anabel en llegar a su trabajo?
 b) Si en la vuelta no ha tenido retrasos, ¿cuánto tiempo ha invertido hoy en los dos trayectos?

$$\text{a)} \quad \text{Hasta la primera estación ha tardado: } 32 \text{ min } 54 \text{ s} + 19 \text{ min } 40 \text{ s} = 51 \text{ min } 94 \text{ s} = 52 \text{ min } 34 \text{ s}$$

$$\text{Hasta la segunda estación ha tardado: } 44 \text{ min } 27 \text{ s} + 26 \text{ min } 32 \text{ s} = 70 \text{ min } 59 \text{ s} = 1 \text{ h } 10 \text{ min } 59 \text{ s}$$

$$52 \text{ min } 34 \text{ s} + 1 \text{ h } 10 \text{ min } 59 \text{ s} = 1 \text{ h } 62 \text{ min } 93 \text{ s} = 2 \text{ h } 3 \text{ min } 33 \text{ s}$$

Anabel ha tardado 2 h 3 min 33 s en llegar al trabajo.

$$\text{b)} \quad \text{En volver ha tardado: } 32 \text{ min } 54 \text{ s} + 44 \text{ min } 27 \text{ s} = 76 \text{ min } 81 \text{ s} = 1 \text{ h } 17 \text{ min } 21 \text{ s}$$

$$2 \text{ h } 3 \text{ min } 33 \text{ s} + 1 \text{ h } 17 \text{ min } 21 \text{ s} = 3 \text{ h } 20 \text{ min } 54 \text{ s}$$

Anabel ha invertido 3 h 20 min 54 s en los dos trayectos.

110. Una máquina de reciclaje de aluminio puede trabajar de manera ininterrumpida durante 4 h 50 min 30 s, parando después 1 h 50 min. ¿Cuánto tiempo tardará la máquina en hacer tres turnos de trabajo y descanso?

$$3 \cdot (4 \text{ h } 50 \text{ min } 30 \text{ s}) + 3 \cdot (1 \text{ h } 50 \text{ min}) = 12 \text{ h } 150 \text{ min } 90 \text{ s} + 3 \text{ h } 150 \text{ min} = 15 \text{ h } 300 \text{ min } 90 \text{ s} = 20 \text{ h } 1 \text{ min } 30 \text{ s}$$

La máquina tarda en hacer tres turnos (con sus descansos) 20 h 1 min 30 s.

111. En una fábrica de muebles se fabrican sillas y sillones. Los trabajadores cobran 12,50 € por cada silla terminada y 22,50 € por cada sillón. En fabricar una silla tardan 1 h 20 min, y en fabricar un sillón, 2 h 15 min. Si la jornada laboral es de 8 horas diarias, ¿qué es más rentable, fabricar solo sillas o solo sillones?

Una jornada de 8 h equivale a 480 min.

En hacer una silla se tarda 1 h 20 min = 80 min, y en hacer un sillón, 2 h 15 min = 135 min.

En 8 h se pueden hacer $480 : 80 = 6$ sillas → Se obtiene $6 \cdot 12,50 = 75$ €.

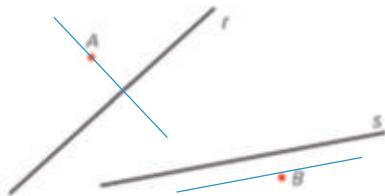
En 8 h se pueden hacer $480 : 135 = 3,5$ sillones (3 completos) → Se obtiene $3 \cdot 22,5 = 67,5$ €.

Es más rentable fabricar solo sillas.

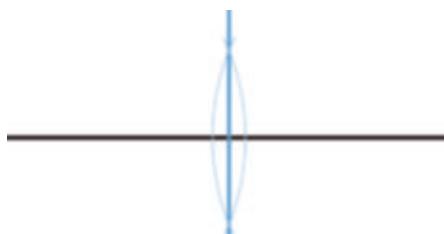
Rectas y ángulos

DEBES SABER HACER

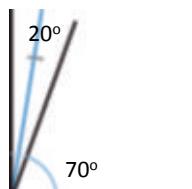
1. Copia estas rectas y estos puntos en tu cuaderno. Despues traza una perpendicular a r que pase por A , y una paralela a s pasando por B .



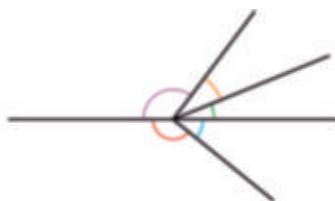
2. Dibuja un segmento de 5,8 cm y traza su mediatrix.



3. Dibuja un ángulo de 20° y su ángulo complementario. Traza la bisectriz del complementario.



4. Señala en la figura un par de ángulos consecutivos y un par de ángulos adyacentes.



Respuesta abierta. Por ejemplo:

Consecutivos: morado y rojo.

Adyacentes: rojo y azul.

5. Realiza los siguientes cálculos.

a) $53^\circ 32' 45'' + 45^\circ 39' 8''$

b) $87^\circ 41' 25'' - 25^\circ 59' 48''$

a) $53^\circ 32' 45''$

b) $87^\circ 41' 25''$

$86^\circ 100' 85''$

$\underline{+ 45^\circ 39' 8''}$

$\underline{- 25^\circ 59' 48''}$

$\underline{- 25^\circ 59' 48''}$

$98^\circ 71' 53'' \rightarrow 99^\circ 11' 53''$

$61^\circ 41' 37''$

6. Un autobús parte de su estación a las 9 h 26 min y llega a la estación de destino a las 13 h 14 min.

¿Cuánto dura el trayecto?

$$\begin{array}{r} 13 \text{ h } 14 \text{ min} \\ - 9 \text{ h } 26 \text{ min} \\ \hline \end{array}$$

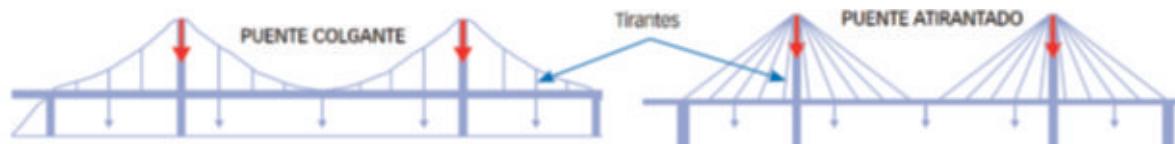
$$\begin{array}{r} 12 \text{ h } 74 \text{ min} \\ - 9 \text{ h } 26 \text{ min} \\ \hline 3 \text{ h } 48 \text{ min} \end{array}$$

El trayecto dura 3 h 48 min.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

112. Los puentes colgantes

atravesaron una edad de oro en Europa durante la primera mitad del siglo XIX, llegando a su máximo esplendor con el puente de Menai, finalizado en 1826. Este puente une la isla de Anglesey con Bangor (Gales), y es considerado el primer puente colgante moderno y sigue en servicio hoy en día.



Mario está de vacaciones y le llama su amigo Javier justo en el momento en que está asomado a un puente. Su amigo le pregunta por las vacaciones y se produce esta conversación:

MARIO: ¿Y dónde estás ahora?

JAVIER: No te lo vas a creer, en un puente colgante, como los que estudiamos en la clase de Tecnología.

MARIO: ¿Y de qué tipo es? ¿Atirantado o colgante?

JAVIER: Ni idea, no me acuerdo de la diferencia.

- a) Si Mario solo se fija en la posición relativa de los tirantes, ¿cuál es la de cada uno de los tipos de puente?
- b) Para medir la distancia del puente, Mario cuenta los pasos que hay entre un tirante y el siguiente, y le sale que son 23 pasos. Si cada paso de Mario abarca 125 centímetros, ¿cuánto mide el puente si ha contado que de cada torre salen 7 tirantes y tiene tres torres?

a) Si los tirantes son paralelos, es un puente colgante, y si los tirantes son secantes, es un puente atirantado.

b) $7 \cdot 3 = 21$ tirantes tiene el puente. Entre cada dos tirantes hay una distancia de $23 \cdot 125 = 2875$ cm.

$20 \cdot 2875 = 57\,500$ cm = 575 metros mide el puente.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

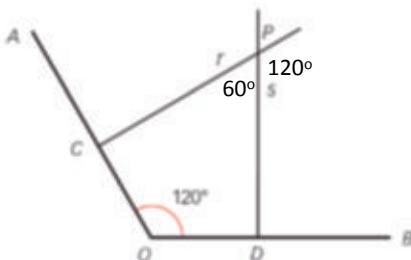
113. Observa el dibujo; utilizando el transportador, se dibujó un ángulo \widehat{AOB} de 120° .

Después, se señaló un punto C , en el lado OA , y un punto D , en el lado OB .

Se trazó la recta r , perpendicular al lado OA por el punto C , y la recta s , perpendicular al lado OB por el punto D .

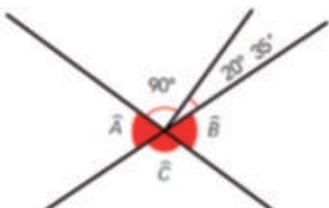
Se llamó P al punto de corte de las rectas r y s .

¿Cuánto mide el ángulo \widehat{CPD} ?



$$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

114. Halla el valor de cada uno de los ángulos de esta figura:



$$C = 90^\circ + 20^\circ 35' = 110^\circ 35'$$

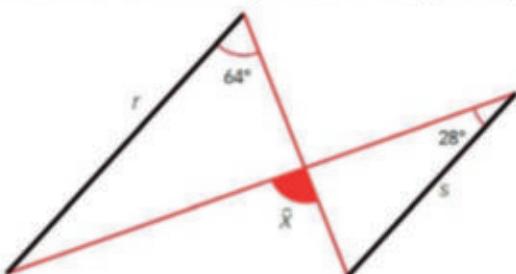
$$A = \dot{B} = 180^\circ - C = 69^\circ 25'$$

$$179^\circ 60'$$

$$\underline{- 110^\circ 35'}$$

$$69^\circ 25'$$

115. Calcula X sabiendo que las rectas r y s son paralelas.



$$A = 28^\circ$$

$$\dot{B} = 180^\circ - (64^\circ + 28^\circ) = 88^\circ$$

Por ser adyacentes \dot{B} y $X \rightarrow X = 180^\circ - 88^\circ = 92^\circ$

PRUEBAS PISA

116. Elena, Rosa, Alberto y Pedro se apuntan como equipo a un campeonato de *minikarts*.

En el campeonato se eligen las dos mejores vueltas que hace cada uno. En la tabla están esos tiempos.

	N.º de vuelta	Tiempo
Elena	12	1 min 02,2 s
	16	1 min 01,7 s
Rosa	14	1 min 01,6 s
	19	1 min 01,3 s
Alberto	20	1 min 00,3 s
	21	59,6 s
Pedro	18	1 min 01,1 s
	22	59,8 s

En este campeonato hay diversas clasificaciones; calcula el tiempo con el que compiten ellos para cada una de las siguientes clasificaciones.

- a) La suma de los cuatro mejores tiempos de los miembros del equipo.
- b) La menor diferencia entre el mejor tiempo y el peor del equipo.

a) $1 \text{ min } 1,7 \text{ s} + 1 \text{ min } 1,3 \text{ s} + 59,6 \text{ s} + 59,8 \text{ s} = 2 \text{ min } 122,4 \text{ s} = 4 \text{ min } 2,4 \text{ s}$

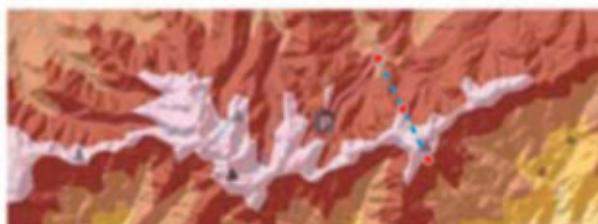
b) Mejor: 59,6 s Peor: $1 \text{ min } 2,2 \text{ s} = 62,2 \text{ s} \rightarrow 62,2 \text{ s} - 59,6 \text{ s} = 2,6 \text{ s}$

117. Tres amigos van de excursión al campo. En un punto deciden separarse tomando cada uno una dirección. Para poder comunicarse bien con los *walkis* que llevan es mejor que caminen a la misma velocidad y mantengan la misma distancia entre ellos.

- a) Dibuja en tu cuaderno la dirección que debe llevar el tercer amigo.



- b) Pasado un rato, dos amigos se paran pero el tercero decide avanzar. Traza la dirección que debe seguir.



- a) El tercer amigo debe caminar por la bisectriz del ángulo que forman.
- b) Debe seguir por puntos de la mediatriz del segmento que une a los dos amigos que se pararon.

Polígonos. Triángulos

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Di cómo es el ángulo que forman las agujas del reloj a todas las horas en punto.

Cada hora equivale a una abertura de $360^\circ : 12 = 30^\circ$

A las 12 h: ángulo = 0°

A las 11 h y a la 1 h: ángulo = 30°

A las 9 h y a las 3 h: ángulo = 90°

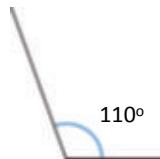
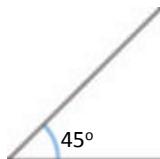
A las 7 h y a las 5 h: ángulo = 150°

A las 10 h y a las 2 h: ángulo = 60°

A las 8 h y a las 4 h: ángulo = 120°

A las 6 h: ángulo = 180°

2. Dibuja en tu cuaderno un ángulo de 45° y otro de 110° .



VIDA COTIDIANA

Un teodolito es un instrumento para medir ángulos, con el que podemos realizar mediciones a cierta distancia e incluso en lugares inaccesibles.

Con un teodolito María y Juan han medido los ángulos que forman con Andrés.



- ¿Qué tipo de triángulo forman María, Juan y Andrés?
- ¿Cuál es el ángulo que forma Juan con Andrés y María?

Forman un triángulo rectángulo.

Un ángulo recto.

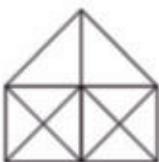
RESUELVE EL RETO

Si junto dos triángulos iguales por uno de sus lados, ¿cuántos lados puede tener la figura resultante?

Tendrá 4 lados.

Polígonos. Triángulos

¿Cuántos triángulos hay en esta figura?



Hay 10 triángulos pequeños y luego podemos considerar diferentes uniones de ellos hasta hacer un total de 23 triángulos.

Camino durante 1 minuto en línea recta y luego cambio de dirección. Si hago esto durante 6 minutos y vuelvo al punto de partida sin pasar dos veces por el mismo sitio, ¿cuánto suman todos los giros que he dado?

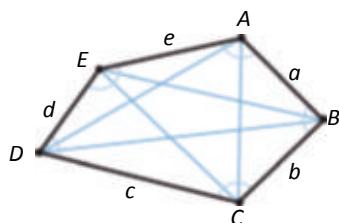
Hay varias opciones, pero al final es como dar una vuelta entera, es decir, 360° .

Al dibujar uno de los puntos notables de un triángulo ha coincidido con uno de sus vértices. ¿Qué punto he dibujado y cómo es el triángulo?

Se han dibujado las alturas de un triángulo rectángulo.

ACTIVIDADES

1. Dibuja un polígono irregular de 5 lados y señala todos sus elementos.



Vértices: A, B, C, D, E

Lados: a, b, c, d, e

Ángulos interiores: A, \hat{B}, C, D, E

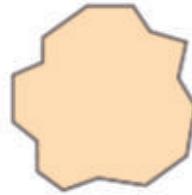
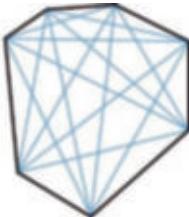
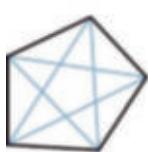
Diagonales: $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CE}$

2. Razona si es verdadero o falso.

- El número de lados es igual al de vértices más uno.
- En un polígono irregular ningún lado es igual a otro.
- Falso. El número de lados y vértices es el mismo.
- Falso. Un polígono es irregular si hay al menos un lado o un ángulo diferente al resto.

3. Dibuja varios polígonos, con 5, 6, 7... lados. Traza sus diagonales y cuéntalas.

¿Puedes deducir cuántas diagonales tendrá un polígono de 16 lados?



Un polígono de 5 lados tiene 5 diagonales.

Un polígono de 6 lados tiene 9 diagonales.

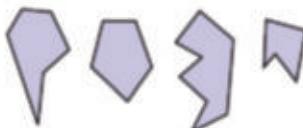
Un polígono de 7 lados tiene 14 diagonales.

...

El número de diagonales de un polígono de n lados es igual a $\frac{n(n-3)}{2}$.

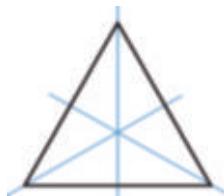
Un polígono de 16 lados tiene 104 diagonales

4. Clasifica los polígonos que ves a la derecha según su número de lados.



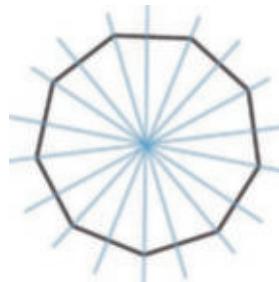
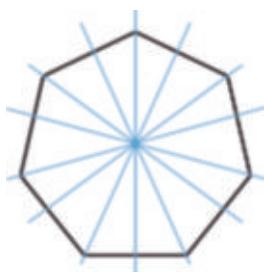
De izquierda a derecha: hexágono, pentágono, octógono y pentágono.

5. Dibuja un polígono que tenga tres ejes de simetría.



Un triángulo regular (equilátero).

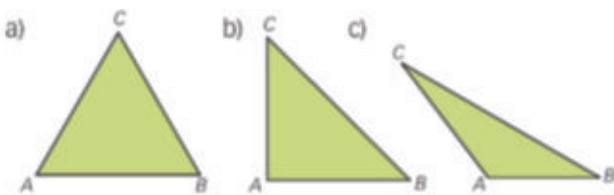
6. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un heptágono? ¿Y un eneágono?



Un heptágono regular tiene 7 ejes de simetría y un eneágono regular tiene 9 ejes, cada eje pasa por un vértice y la mitad del lado opuesto.

Polígonos. Triángulos

7. Clasifica estos triángulos según sus vértices y según sus lados.



a) Triángulo equilátero.

b) Triángulo rectángulo.

c) Triángulo obtusángulo.

8. Dibuja un triángulo escaleno que sea también rectángulo.



Tiene un ángulo recto y todos sus ángulos y lados son distintos.

9. Averigua si existen estos triángulos.

- a) Triángulo rectángulo isósceles.
- b) Triángulo obtusángulo rectángulo.
- c) Triángulo escaleno acutángulo.
- d) Triángulo isósceles escaleno.

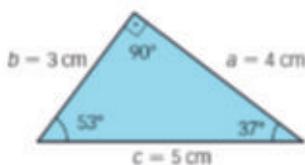
a) Sí existe. Un triángulo rectángulo en el que los catetos miden lo mismo.

b) No existe. Si un ángulo mide 90° y otro más de 90° , entre los dos ya suman más de 180° y eso no puede ser.

c) Sí existe.

d) No existe. Si es isósceles, dos lados son iguales; pero si es escaleno, sus tres lados son distintos, de modo que no es posible que se den las dos cosas a la vez.

10. Comprueba las relaciones entre los lados y los ángulos de este triángulo



$$37^\circ + 53^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$4 < 3 + 5 \quad 3 < 4 + 5 \quad 5 < 3 + 4$$

$$4 > 5 - 3 \quad 3 > 5 - 4 \quad 5 > 4 - 3$$

11. ¿Existen triángulos con estas medidas?

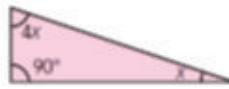
- a) 3, 3 y 4 cm
- b) 3, 5 y 9 cm
- c) 2, 4 y 6 cm

a) $3 < 3 + 4 \quad 4 < 3 + 3 \quad 3 > 4 - 3 \quad 4 > 3 - 3 \rightarrow$ Sí existe.

b) $9 > 3 + 5 \rightarrow$ No existe.

c) $6 = 2 + 4 \rightarrow$ No existe.

- 12.** En un triángulo rectángulo uno de los ángulos es el cuádruple de otro. Calcula los ángulos de este triángulo.



$$90^\circ + 4x + x = 180^\circ \rightarrow 5x = 90^\circ \rightarrow x = 18^\circ \rightarrow \text{Los ángulos valen } 18^\circ \text{ y } 72^\circ.$$

- 13.** Determina cuáles de estos segmentos pueden formar un triángulo y dibújalo.

a) $a = 5,2 \text{ cm}; b = 7,3 \text{ cm}; c = 4 \text{ cm}$

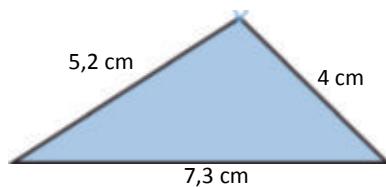
c) $a = 2 \text{ cm}; b = 5,2 \text{ cm}; c = 3,7 \text{ cm}$

b) $a = 1,8 \text{ cm}; b = 3 \text{ cm}; c = 5 \text{ cm}$

d) $a = 5 \text{ cm}; b = 6 \text{ cm}; c = 7 \text{ cm}$

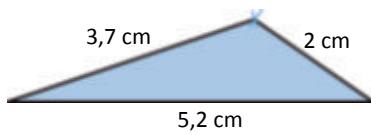
a) $5,2 < 7,3 + 4 \quad 7,3 < 5,2 + 4 \quad 4 < 5,2 + 7,3$

Sí, forman un triángulo.



c) $2 < 5,2 + 3,7 \quad 5,2 < 2 + 3,7 \quad 3,7 < 2 + 5,2$

Sí forman un triángulo.

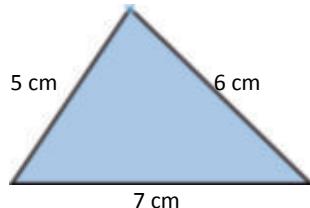


b) $5 > 1,8 + 3 \rightarrow$

No forman un triángulo .

d) $5 < 7 + 6 \quad 6 < 5 + 7 \quad 7 < 5 + 6$

Sí forman un triángulo.



- 14.** Construye el triángulo que tiene por lados estos segmentos.

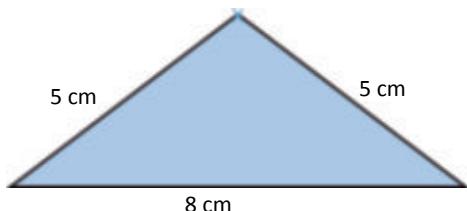
a) $a = 5 \text{ cm}; b = 5 \text{ cm}; c = 8 \text{ cm}$

c) $a = 6 \text{ cm}; b = 8 \text{ cm}; c = 10 \text{ cm}$

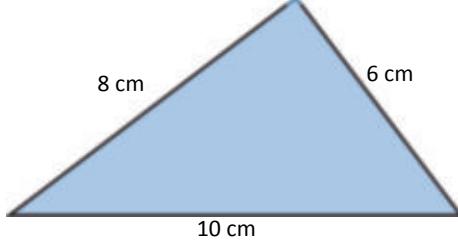
b) $a = 3,4 \text{ cm}; b = 4,6 \text{ cm}; c = 5,8 \text{ cm}$

d) $a = 5 \text{ cm}; b = 7,2 \text{ cm}; c = 9 \text{ cm}$

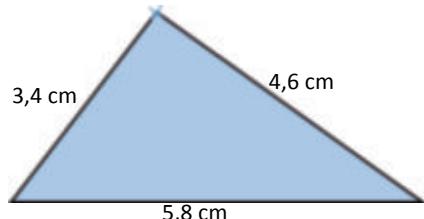
a)



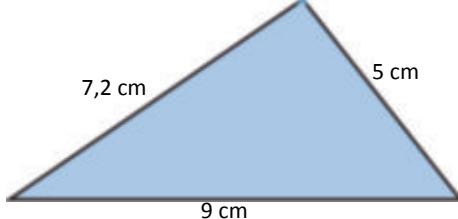
c)



b)



d)



Polígonos. Triángulos

15. Calcula entre qué valores se puede encontrar el lado c para que se pueda formar un triángulo.

a) $a = 4 \text{ cm}$ y $b = 7 \text{ cm}$ b) $a = 2 \text{ cm}$ y $b = 5 \text{ cm}$

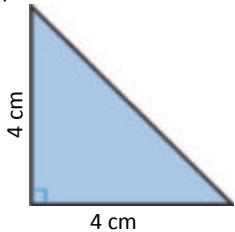
a) $7 - 4 < c < 4 + 7 \rightarrow 3 < c < 11 \rightarrow c$ debe ser mayor que 3 y menor que 11.

b) $5 - 2 < c < 2 + 5 \rightarrow 3 < c < 7 \rightarrow c$ debe ser mayor que 3 y menor que 7.

16. Construye un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales midan:

- a) 4 cm b) 2,8 cm c) 5,6 cm d) 6 cm

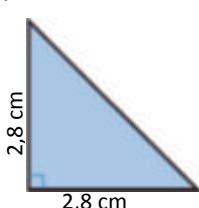
a)



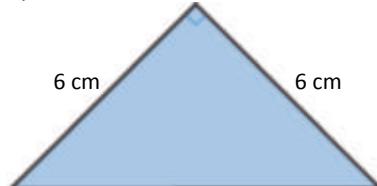
c)



b)



d)



17. Razona si estas medidas pueden ser las de los lados de un triángulo para cualquier valor de a .

- a) $a, 4a$ y $5a$ b) $a, 2a$ y $\frac{7}{5}a$



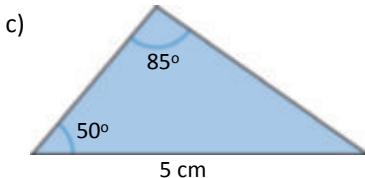
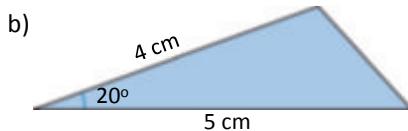
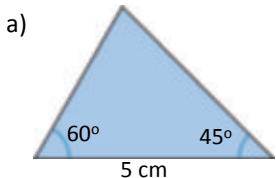
a) $a + 4a = 5a \rightarrow$ Estas medidas no forman un triángulo para cualquier valor de a .

b) $a < 2a + \frac{7}{5}a \quad 2a < a + \frac{7}{5}a = \frac{12}{5}a \quad \frac{7}{5}a < a + 3a = 3a \rightarrow$ Estas medidas sí forman un triángulo para cualquier valor de a .

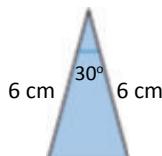
18. Dibuja triángulos cuyos elementos sean:

a) $a = 5 \text{ cm}$, $\hat{B} = 60^\circ$ y $C = 45^\circ$ c) $a = 5 \text{ cm}$, $\hat{B} = 50^\circ$ y $A = 85^\circ$

b) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $C = 20^\circ$

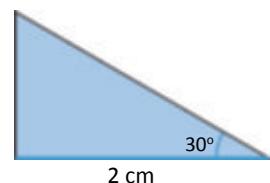


19. Construye un triángulo isósceles en el que cada uno de sus dos lados iguales mide 6 cm y el ángulo comprendido entre esos dos lados mide 30° .



20. Fíjate en esta figura y explica cómo se puede construir un triángulo rectángulo del que sabemos que uno de sus lados mide $c = 2 \text{ cm}$ y tiene un ángulo agudo $\hat{B} = 30^\circ$.

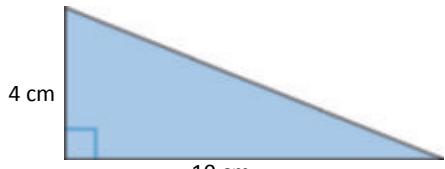
Primero dibujamos un segmento igual a uno de los lados conocidos (2 cm), y construimos sobre él sus ángulos contiguos (90° y 30° respectivamente).



Después, prolongamos los lados de los ángulos hasta que se corten.

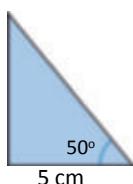
21. Construye un triángulo rectángulo cuyos dos lados menores midan 4 cm y 10 cm.

Dibujamos un segmento igual a uno de los lados conocidos (por ejemplo, 10 cm) y construimos sobre él un ángulo de 90° .



Prolongamos el lado del ángulo hasta que tenga la longitud del segundo lado conocido (4 cm), y unimos los extremos de ambos lados.

22. Construye un triángulo rectángulo en el que uno de sus lados menores mida 5 cm y uno de sus ángulos contiguos sea $\hat{B} = 50^\circ$.



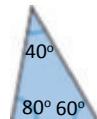
Polígonos. Triángulos

23. Dibuja un triángulo cuyos ángulos sean $A = 80^\circ$, $B = 60^\circ$ y $C = 40^\circ$.

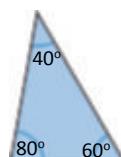
¿Puedes dibujar otro triángulo con los mismos ángulos y cuyos lados midan más que los lados que el triángulo que has dibujado anteriormente?

¿Y un triángulo con lados más pequeños?

¿Cuántos triángulos existen que tengan los mismos ángulos?



Sí se puede dibujar otro triángulo con los mismos ángulos y lados mayores. Por ejemplo:

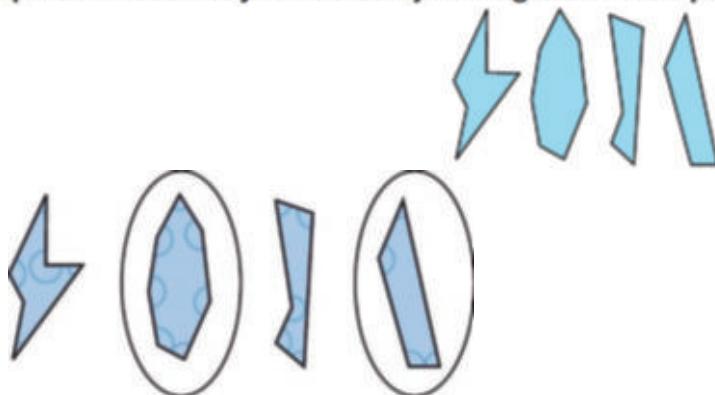


Sí se puede dibujar otro triángulo con los mismos ángulos y lados menores. Por ejemplo:



Existen infinitos triángulos con los mismos ángulos.

24. Copia en tu cuaderno y colorea de rojo los ángulos de estos polígonos y redondea los convexos.



25. Dibuja un octágono y traza todas sus diagonales. Calcula el número total de diagonales.



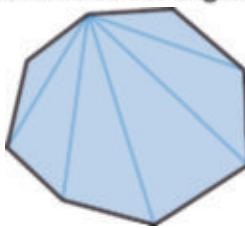
$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{8 \cdot (8-3)}{2} = 20 \text{ diagonales.}$$

26. ¿Cuántos lados tiene un polígono en el que se pueden dibujar en total 27 diagonales?

$$\frac{n(n-3)}{2} = 27 \rightarrow n(n-3) = 54$$

$9 \cdot (9 - 3) = 9 \cdot 6 = 54 \rightarrow$ Un polígono de 9 lados tiene 27 diagonales.

- 27.** Trazas las diagonales de un octágono y halla la suma de sus ángulos.



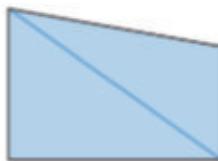
Se obtienen $8 - 2 = 6$ triángulos → La suma de los ángulos del octágono es $180^\circ \cdot 6 = 10\,080^\circ$

- 28.** ¿Cuánto suman los ángulos de un polígono que tiene 8 diagonales?

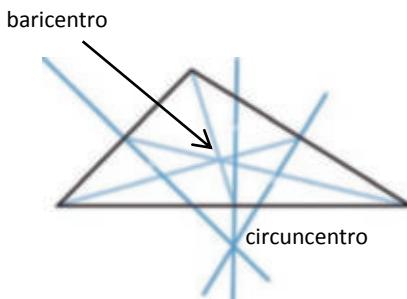
Si desde un vértice salen 8 diagonales, se obtienen entonces $8 + 1 = 9$ triángulos, con lo que la suma de los ángulos del polígono es $9 \cdot 180^\circ = 1\,620^\circ$.

- 29.** ¿Cuál es el menor número de lados que debe tener un polígono para que se pueda hacer su triangulación? Dibuja ese polígono y triangúlalo. ¿Cuánto mide la suma de sus ángulos?

El menor número de lados es 4. La suma de sus ángulos es 360° .

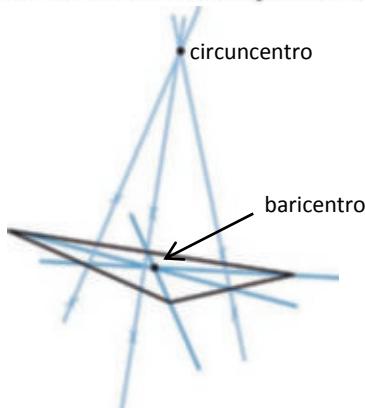


- 30.** Dibuja un triángulo cuyos lados midan 6, 8 y 11 cm, respectivamente. Trazas en él las medianas y las mediatrixes.

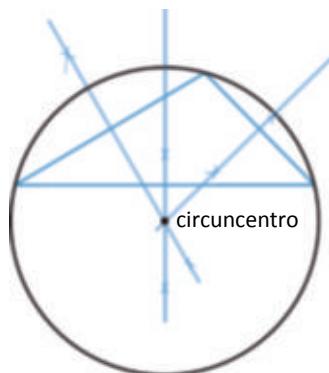


Polígonos. Triángulos

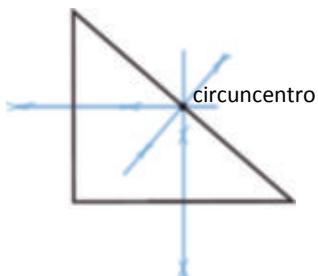
31. Dibuja un triángulo obtusángulo y determina su baricentro y su circuncentro.



32. Dibuja la circunferencia circunscrita del triángulo cuyos lados miden 5, 7 y 9,5 cm.

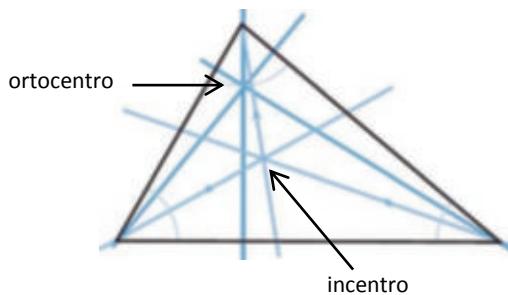


33. Dibuja un triángulo rectángulo. ¿Dónde está situado su circuncentro? ¿Ocurre lo mismo con todos los triángulos rectángulos?

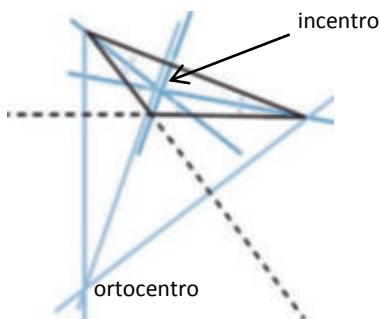


El circuncentro en cualquier triángulo rectángulo está situado en el punto medio del lado opuesto al ángulo recto.

34. Dibuja un triángulo acutángulo y traza sus alturas y sus bisectrices.



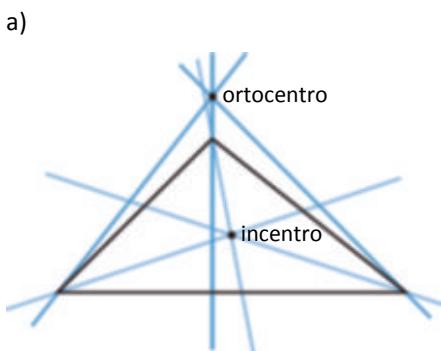
35. Dibuja un triángulo obtusángulo y traza sus alturas y sus bisectrices.



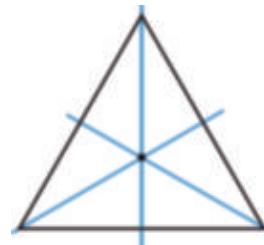
36. Para los siguientes triángulos, encuentra el ortocentro y el incentro.

a) $a = 5,6 \text{ cm}; b = 6,4 \text{ cm}; c = 9 \text{ cm}$

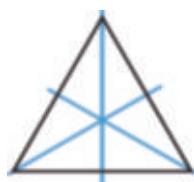
b) $a = b = c = 8 \text{ cm}$



b)



37. Comprueba que en un triángulo equilátero coinciden sus medianas, sus mediatrizes, sus alturas y sus bisectrices.



En un triángulo equilátero coinciden sus alturas, bisectrices, mediatrizes y medianas.

Polígonos. Triángulos

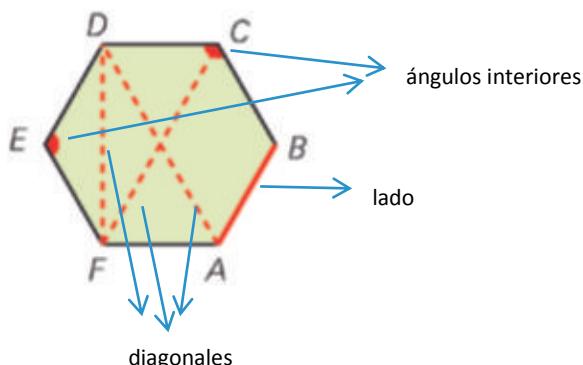
38. Razona qué características tiene un triángulo cuyo ortocentro está:

- a) En el exterior del triángulo.
 - b) En el interior del triángulo.
 - c) En uno de los lados del triángulo.
-
- a) Es un triángulo obtusángulo.
 - b) Es un triángulo acutángulo.
 - c) Es un triángulo rectángulo.

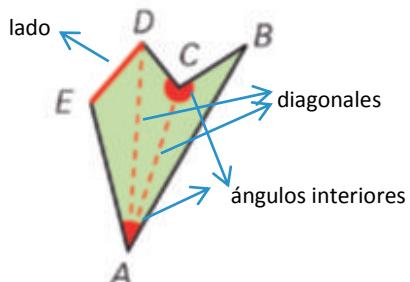
ACTIVIDADES FINALES

39. Indica el nombre de los elementos de estos polígonos que están coloreados de rojo.

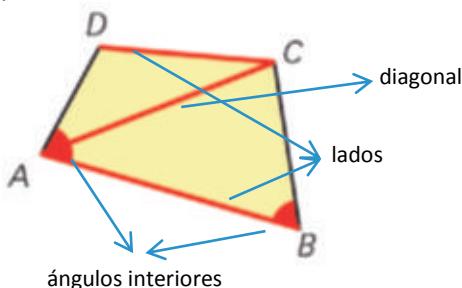
a)



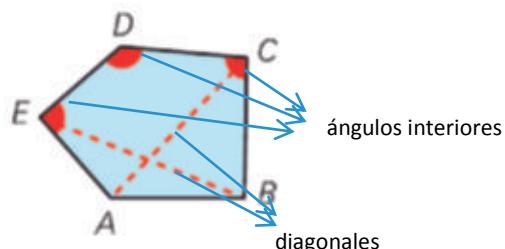
c)



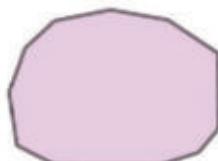
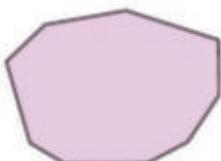
b)



d)

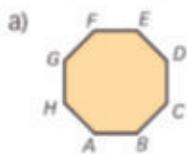


40. Indica según sus lados el nombre de estos polígonos.

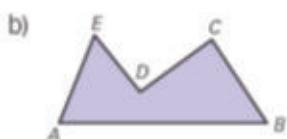


El de la izquierda es un eneágono; el de la derecha, endecágono.

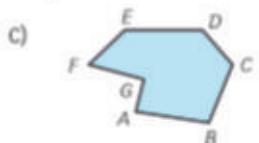
41. Dibuja los siguientes polígonos en tu cuaderno y colorea en rojo los elementos que se indican.



Lados: FG, AB y CD
Diagonales: EH, EA y BD
Ángulos: \hat{F}, \hat{G} y \hat{A}

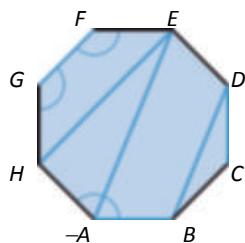


Lados: ED y AB
Diagonales: DA y DB
Ángulos: \hat{E}, \hat{D} y \hat{B}

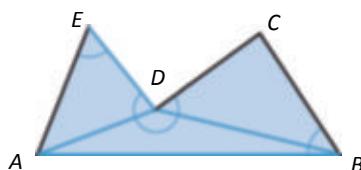


Lados: FG, GA y DC
Diagonales: FC, GB y AD
Ángulos: \hat{E}, \hat{G} y \hat{B}

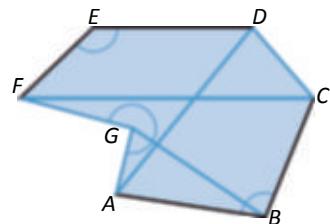
a)



b)



c)



42. ¿Existe algún polígono que tenga una sola diagonal? ¿Y un polígono que no tenga diagonales?

No existe ningún polígono con una única diagonal.

El triángulo no tiene diagonales.

43. ¿Puede tener un polígono más vértices que lados? Razona la respuesta.

No, no puede, porque si fuera posible existiría al menos un par de vértices no unidos por un lado.

Los polígonos tienen el mismo número de vértices y de lados.

44. ¿Existe algún polígono que tenga más lados que ángulos interiores?

No, porque por cada vértice, hay un ángulo interior, con lo que un polígono tiene el mismo número de lados, que de vértices y que de ángulos interiores.

45. ¿Cuál es el número mínimo de lados de un polígono? ¿Y de ángulos interiores? ¿Y de diagonales?

El mínimo de lados de un polígono es 3, el triángulo.

El de ángulos también 3.

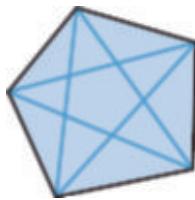
El triángulo no tiene diagonales.

Polígonos. Triángulos

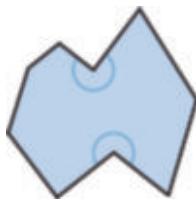
46. Dibuja, en cada caso, un polígono con estas características.

- a) Tiene cinco diagonales.
- b) Tiene nueve ángulos interiores y dos de ellos miden más de 180° .
- c) Tiene dos diagonales y una mide el doble que la otra.
- d) Tiene siete vértices y tres ángulos interiores que miden 90° .
- e) Tiene seis ángulos interiores, dos de ellos rectos.

a)



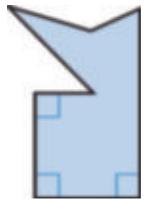
b)



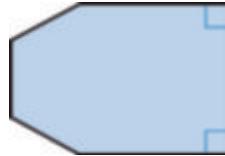
c)



d)



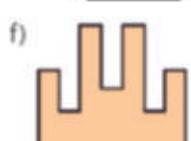
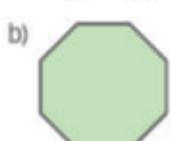
e)

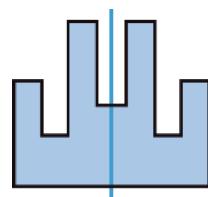
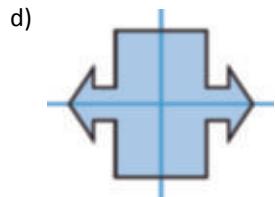
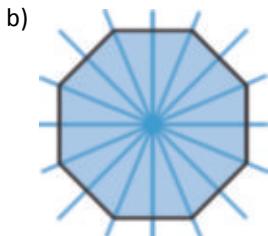
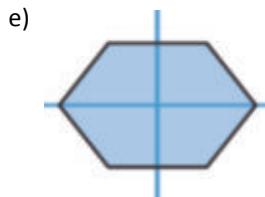
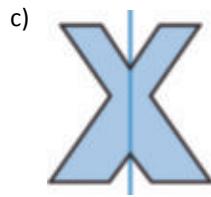
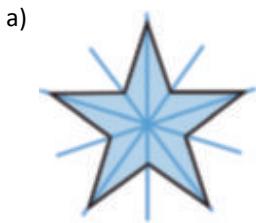


48. Determina los ejes de simetría de los siguientes polígonos.

- a) Un triángulo equilátero.
 - b) Un triángulo isósceles.
 - c) Un triángulo rectángulo isósceles.
 - d) Un cuadrado.
 - e) Un rectángulo.
 - f) Un rombo.
 - g) Un romboide.
- a) 3 ejes (pasan por cada vértice y la mitad del lado opuesto).
 - b) 1 eje (de la mitad del lado desigual al vértice opuesto).
 - c) 1 eje (bisectriz del ángulo recto).
 - d) 4 ejes (las dos diagonales y las dos rectas que pasan por el medio de un lado y el medio del lado opuesto).
 - e) 2 ejes (las dos rectas que pasan por el medio de un lado y el medio del lado opuesto).
 - f) 2 ejes (las 2 diagonales).
 - g) No tiene.

49. Determina los ejes de simetría para cada uno de estos polígonos.





50. Dibuja un polígono que tenga dos ejes de simetría perpendiculares.

Respuesta abierta.

Por ejemplo:

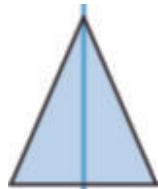


51. Dibuja un polígono, con el menor número de lados posible, que tenga al menos un eje de simetría:

- a) Vertical. b) Horizontal. c) Oblicuo.

Respuesta abierta.

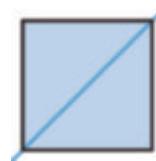
a) Triángulo isósceles



b) Rectángulo



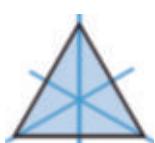
c) Cuadrado



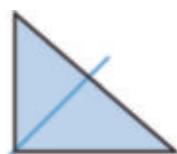
52. Dibuja, en cada caso, un triángulo que cumpla estas características.

- a) Tiene tres ejes de simetría.
b) Tiene un eje de simetría y es rectángulo.
c) No tiene ningún eje de simetría.

a) Triángulo equilátero.



b) Triángulo rectángulo isósceles.

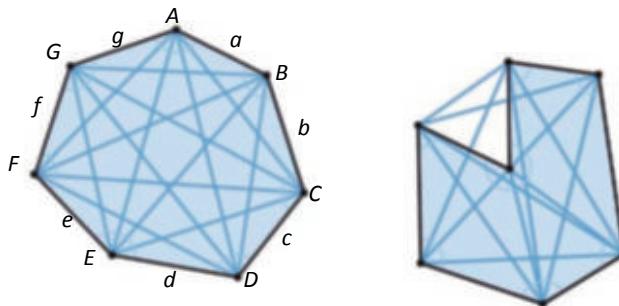


c) Triángulo escaleno.



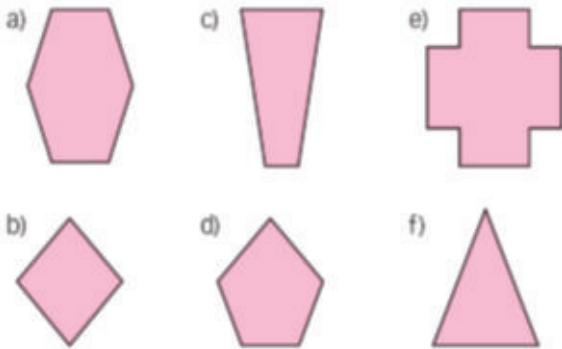
Polígonos. Triángulos

53. Dibuja un heptágono convexo y otro cóncavo, y señala en ellos los vértices, lados, ángulos interiores y diagonales.



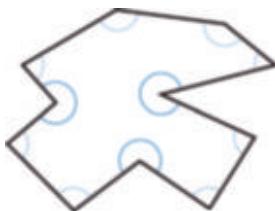
En los polígonos cóncavos, al menos una de las diagonales es exterior.

54. Para los siguientes polígonos, indica su nombre, si son regulares y si son convexos o cóncavos.



- a) Hexágono convexo irregular.
- b) Cuadrilátero convexo irregular.
- c) Dodecágono cóncavo irregular.
- d) Cuadrilátero convexo irregular.
- e) Pentágono convexo irregular.
- f) Triángulo convexo irregular.

55. Dibuja un polígono cóncavo de 11 lados. Colorea de azul los ángulos mayores de 180° y de rojo los menores de 180° .



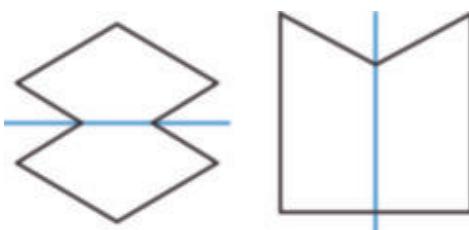
Los menores de 180° están en azul claro y los mayores en azul oscuro.

56. ¿Puede ser un polígono cóncavo regular? Razona tu respuesta.

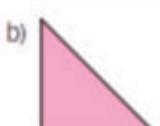
No. Un polígono regular tiene todos sus ángulos iguales, con lo que si es cóncavo, todos los ángulos deberían medir más de 180° , algo no posible.

57. Dibuja un polígono cóncavo que tenga un eje de simetría horizontal y otro que lo tenga vertical.

Respuesta abierta.



58. Clasifica estos triángulos según sus lados y sus ángulos.



a) Equilátero

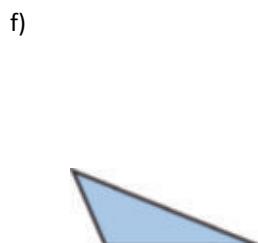
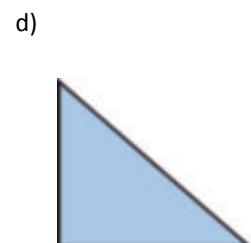
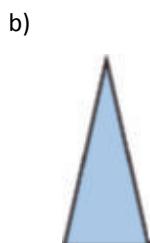
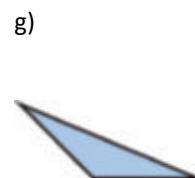
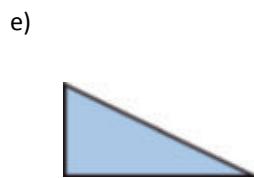
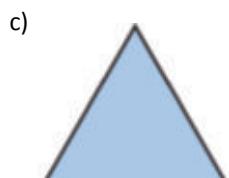
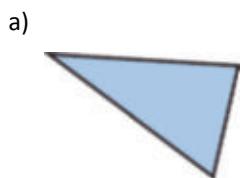
b) Isósceles rectángulo

c) Escaleno

d) Isósceles

59. Dibuja los siguientes triángulos.

- a) Un triángulo acutángulo escaleno.
- b) Un triángulo acutángulo isósceles.
- c) Un triángulo acutángulo equilátero.
- d) Un triángulo rectángulo isósceles.
- e) Un triángulo rectángulo escaleno.
- f) Un triángulo obtusángulo escaleno.
- g) Un triángulo obtusángulo isósceles.

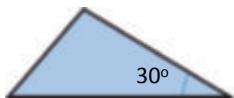


Polígonos. Triángulos

60. Con la ayuda de un transportador construye, en cada caso, un triángulo con las siguientes características.

- Triángulo acutángulo con un ángulo de 30° .
- Triángulo rectángulo con un ángulo de 30° .
- Triángulo rectángulo con un ángulo de 45° .
- Triángulo obtusángulo con un ángulo de 50° .
- Triángulo isósceles con un ángulo de 30° .
- Triángulo escaleno con un ángulo de 80° .

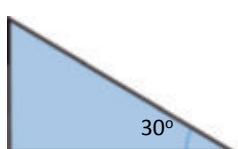
a)



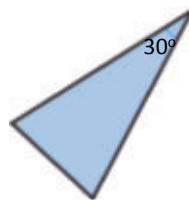
d)



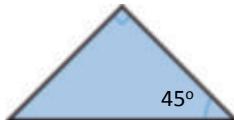
b)



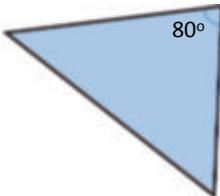
e)



c)



f)



61. Analiza si se puede dibujar un triángulo con estos segmentos. Dibuja los triángulos cuando sea posible.

a) $a = 4 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm} \text{ y } c = 7 \text{ cm}$

d) $a = 6 \text{ cm}, b = 2 \text{ cm} \text{ y } c = 10 \text{ cm}$

b) $a = 4 \text{ cm}, b = 6 \text{ cm} \text{ y } c = 9 \text{ cm}$

e) $a = 4 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm} \text{ y } c = 7 \text{ cm}$

c) $a = 3 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm} \text{ y } c = 9 \text{ cm}$

f) $a = 3 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm} \text{ y } c = 5 \text{ cm}$

a) $7 < 4 + 5$

$5 < 4 + 7$

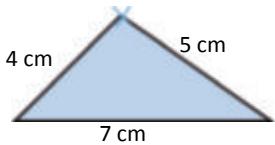
$4 < 7 + 5$

$7 > 5 - 4$

$5 > 7 - 4$

$4 > 7 - 5$

Se puede dibujar.



b) $9 < 6 + 4$

$6 < 9 + 4$

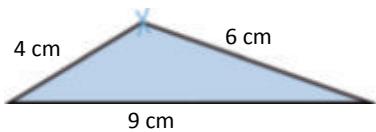
$4 < 9 + 6$

$9 > 6 - 4$

$6 > 9 - 4$

$4 > 9 - 6$

Se puede dibujar.



c) $9 > 5 + 3 \rightarrow$ No se puede dibujar.

d) $10 > 6 + 2 \rightarrow$ No se puede dibujar.

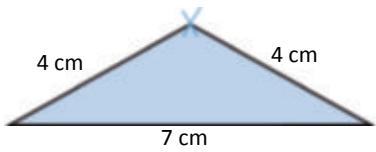
e) $7 < 4 + 4$

$4 < 4 + 7$

$7 > 4 - 4$

$4 > 7 - 4$

Se puede dibujar.



f) $5 < 3 + 4$

$3 < 5 + 4$

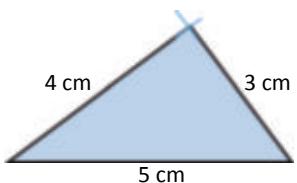
$4 < 5 + 3$

$5 > 4 - 3$

$4 > 5 - 3$

$3 > 5 - 4$

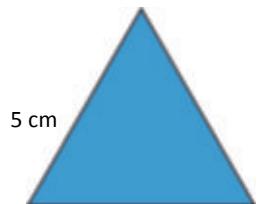
Se puede dibujar.



62. Dibuja un triángulo equilátero cuyos lados midan 5 cm. Mide con un transportador la dimensión de sus ángulos.

a) ¿Cuánto miden sus ángulos?

b) ¿Sucede esto con todos los triángulos equiláteros?



a) Miden todos 60° .

b) Sí, todos los ángulos de cualquier triángulo equilátero miden 60° .

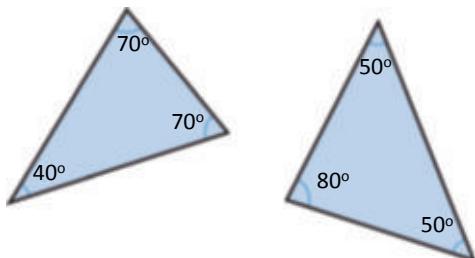
Polígonos. Triángulos

63. Dibuja varios triángulos isósceles.
Mide la amplitud de sus ángulos.

- a) ¿Cuánto miden sus ángulos?
b) ¿Sucede esto con todos los triángulos isósceles?



a)

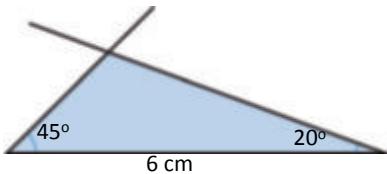


b) En un triángulo isósceles dos de los ángulos miden lo mismo.

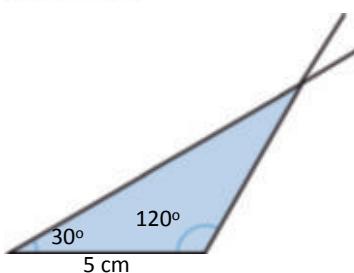
64. Construye un triángulo con estos elementos.

- a) Uno de sus lados mide 6 cm y sus dos ángulos contiguos 20° y 45°.
b) Uno de sus lados mide 7,5 cm y sus dos ángulos contiguos 60° y 30°.
c) Uno de sus lados mide 5 cm y sus dos ángulos contiguos 120° y 30°.
d) Uno de sus lados mide 8 cm y sus dos ángulos contiguos son iguales y miden 50°.

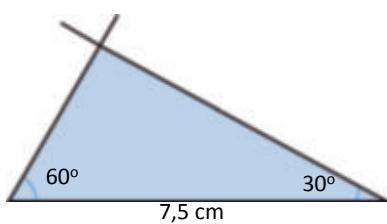
a)



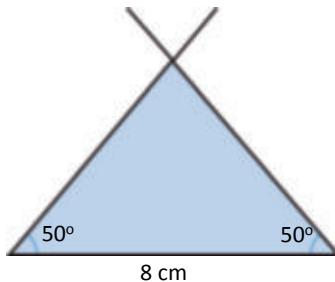
c)



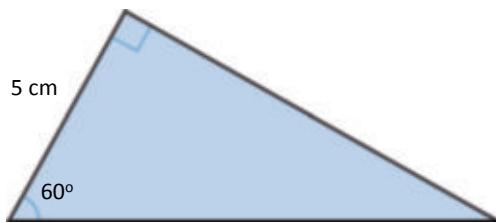
b)



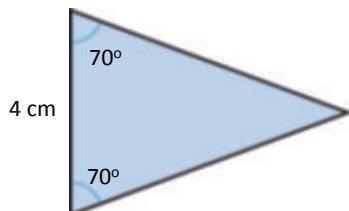
d)



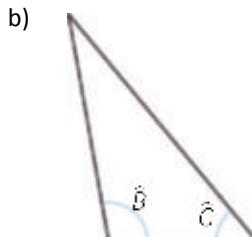
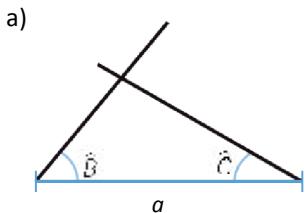
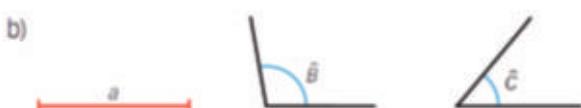
65. Construye un triángulo rectángulo que tiene un lado menor que mide 5 cm y un ángulo contiguo a este lado que mide 60°.



66. Construye un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 4 cm y sus ángulos iguales 70° cada uno.

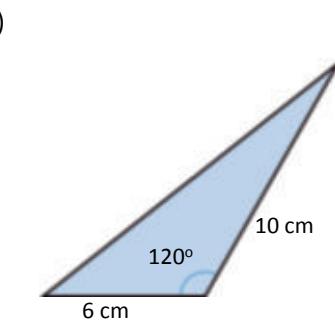
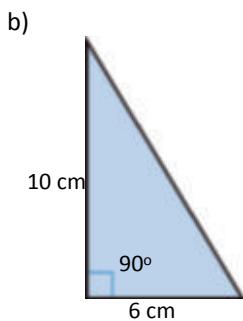
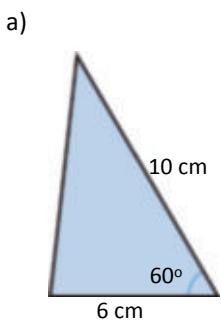


67. Copia estos elementos en tu cuaderno y construye un triángulo con ellos.



68. Los lados a y b de un triángulo ABC miden 6 cm y 10 cm, respectivamente. Dibuja un triángulo en cada caso.

- El ángulo comprendido entre a y b mide 60° .
- El ángulo comprendido entre a y b mide 90° .
- El ángulo comprendido entre a y b mide 120° .



Polígonos. Triángulos

69. Completa en tu cuaderno la tabla, sabiendo que \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} son los ángulos de un triángulo.

\hat{A}	\hat{B}	\hat{C}
35°	65°	80°
85°	75°	20°
15°	150°	15°
80°	60°	40°
20°	135°	25°

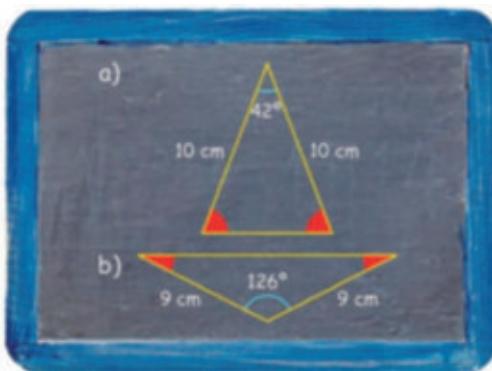
70. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 40°. ¿Cuánto miden sus otros dos ángulos?

Al ser rectángulo, uno de sus ángulos mide 90° y el otro $180 - (40 + 90) = 50^\circ$.

71. Un triángulo rectángulo \widehat{ABC} tiene su ángulo recto en \hat{B} .

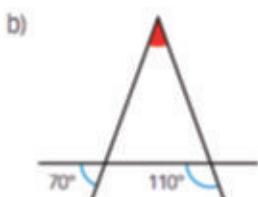
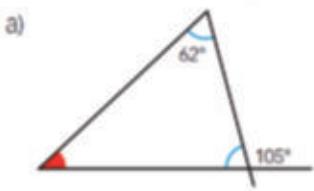
- a) ¿Cuánto mide \hat{A} si $\hat{C} = 20^\circ$?
- b) ¿Cuánto mide \hat{C} si $\hat{A} = 35^\circ$?
- c) ¿Cuánto miden \hat{A} y \hat{C} si es isósceles?
 - a) $180 - (90 + 20) = 70^\circ$
 - b) $180 - (90 + 35) = 55^\circ$
 - c) $90 : 2 = 45^\circ$

72. Calcula cuánto miden los ángulos coloreados.



- a) Es un triángulo isósceles, con lo que esos dos ángulos son iguales: $(180 - 42) : 2 = 69^\circ$ mide cada ángulo.
- b) Es un triángulo isósceles, con lo que esos dos ángulos son iguales: $(180 - 126) : 2 = 27^\circ$ mide cada ángulo.

73. Calcula el valor del ángulo coloreado.



a) $180 - 105 = 75^\circ \quad 180 - (75 + 62) = 43^\circ$

El ángulo coloreado mide 43° .

b) $180 - 110 = 70^\circ \quad 180 - (70 + 70) = 40^\circ$

El ángulo coloreado mide 40° .

74. El ángulo exterior de este triángulo isósceles mide 168° . Calcula el valor de los tres ángulos del triángulo.



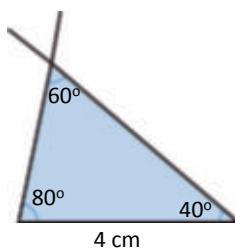
El triángulo es isósceles. Sus ángulos iguales miden $180^\circ - 168^\circ = 12^\circ$.

Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180° , el ángulo desigual mide $180^\circ - 2 \cdot 12^\circ = 156^\circ$.

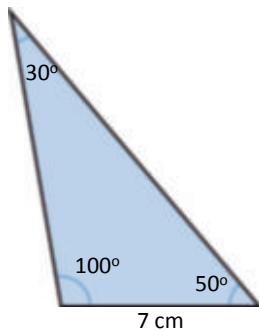
75. Construye un triángulo con estos elementos.

- a) Uno de sus lados mide 4 cm, un ángulo contiguo a este lado 40° y un ángulo no contiguo 60° .
 b) Uno de sus lados mide 7 cm, un ángulo contiguo a este lado 100° y un ángulo no contiguo 30° .

a) El otro ángulo contiguo al lado dado es $180 - (60 + 40) = 80^\circ$



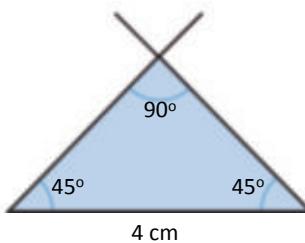
b) El otro ángulo contiguo al lado dado es $180 - (100 + 30) = 50^\circ$



Polígonos. Triángulos

78. Construye un triángulo rectángulo e isósceles cuyo lado mayor mida 4 cm. Explica cómo lo haces.

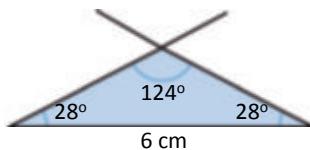
Como es rectángulo, uno de los ángulos (el opuesto a la hipotenusa que nos dan) mide 90° y como es isósceles, los otros dos ángulos miden igual: $(180 - 90) : 2 = 45^\circ$



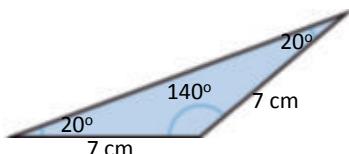
77. Dibuja estos triángulos.

- Un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual es $\hat{A} = 124^\circ$ y el lado desigual mide 6 cm.
- Un triángulo isósceles cuyos ángulos iguales miden 20° y sus lados iguales miden 7 cm.

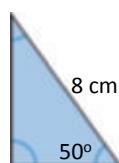
a) Los otros dos ángulos miden $(180 - 124) : 2 = 28^\circ$.



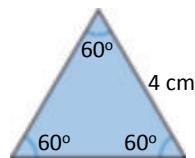
b) Su ángulo diferente miden $180 - (20 + 20) = 140^\circ$.



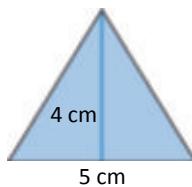
78. Construye un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 8 cm y tenga un ángulo de 50° .



79. Construye un triángulo equilátero cuyo lado sea de 4 cm.

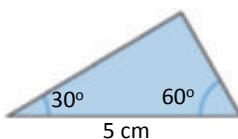


80. Construye un triángulo isósceles cuyo lado desigual mida 5 cm y la altura sobre él sea de 4 cm.



81. Construye un triángulo rectángulo cuyo lado mayor sea de 5 cm y uno de sus ángulos agudos sea el doble que el otro.

$$2x + x + 90 = 180 \rightarrow x = 30^\circ$$



82. Construimos un triángulo cuyos lados miden 5, 6 y 8 cm. A partir de este, queremos construir otro triángulo con los mismos ángulos pero cuyo lado menor sea de 3 cm.

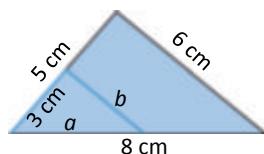
a) ¿Cómo lo harías?

b) ¿Cuánto valdrán los otros dos lados?

a) Primero trazamos un segmento de longitud 8 cm (base del triángulo). Con un compás, trazamos un círculo de radio 5 cm desde uno de los extremos del segmento, y otro de radio 6 cm desde el otro extremo.

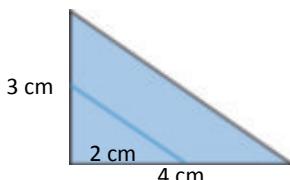
Formamos los otros dos lados del triángulo uniendo los extremos del segmento con uno de los puntos de intersección de los dos círculos.

b) $\frac{5}{3} = \frac{a}{8} = \frac{b}{6}$; $a = 13,33 \text{ cm}; b = 10 \text{ cm}$



83. Construye un triángulo rectángulo cuyos lados menores midan 3 y 4 cm.

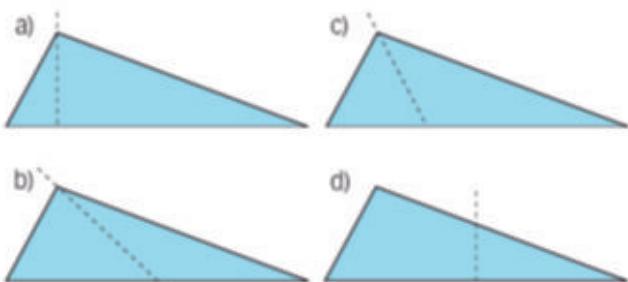
A la vista de este triángulo, ¿se te ocurre una manera rápida de construir un triángulo con un lado de 2 cm?



Se puede construir uniendo los puntos medios de los lados de 3 cm y 4 cm con el vértice del ángulo recto.

Polígonos. Triángulos

84. Escribe en tu cuaderno el nombre de las rectas notables dibujadas en los triángulos.

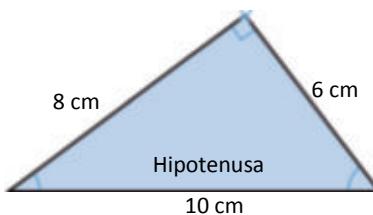


- a) Altura.
- b) Mediana.
- c) Bisectriz.
- d) Mediatrix.

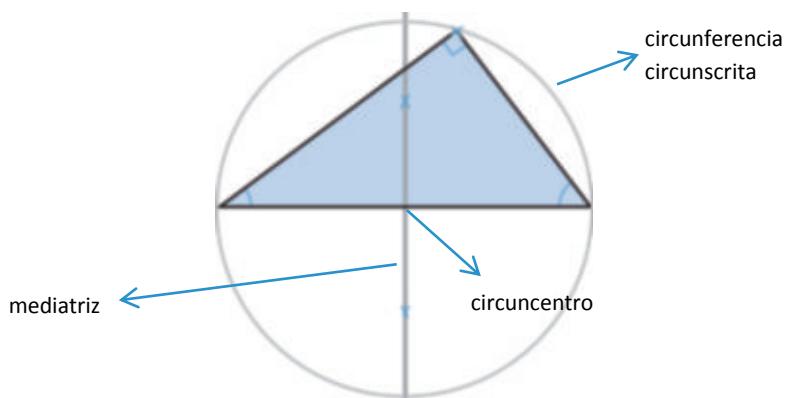
85. Construye un triángulo de lados 6, 8 y 10 cm.

- a) ¿Qué tipo de triángulo es?
- b) Trazas su circunferencia circunscrita.

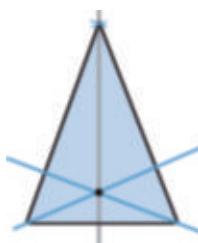
a) Es un triángulo rectángulo. Cumple el teorema de Pitágoras: $10^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow 100 = 36 + 64$.



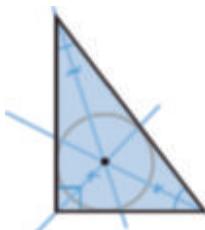
- b) Su circuncentro está en el punto medio de la hipotenusa.



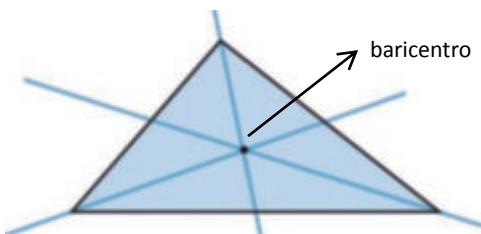
86. Construye un triángulo isósceles de lados 5, 8 y 8 cm. Dibuja sus alturas y señala el ortocentro.



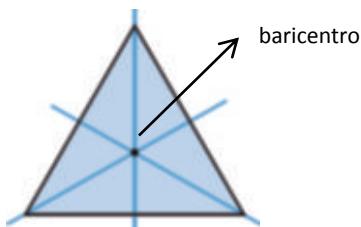
87. Construye un triángulo rectángulo de 3, 4 y 5 cm. Construye la circunferencia inscrita a dicho triángulo.



88. Construye un triángulo de lados 5, 6 y 8 cm y señala su baricentro.



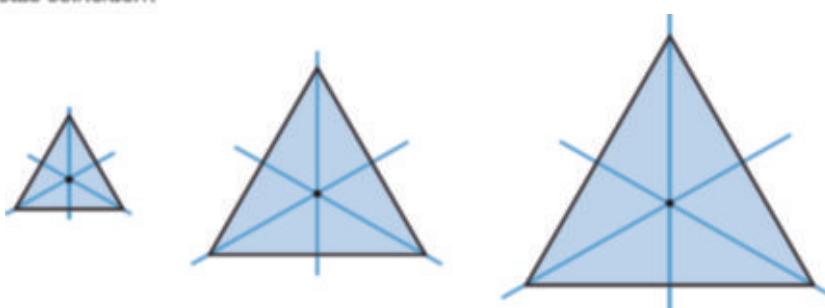
89. Construye un triángulo equilátero de 6 cm de lado. Dibuja sus medianas y señala el baricentro. Mide la distancia entre el baricentro y cada uno de los vértices. ¿Cuánto vale?



La distancia del baricentro a cada uno de los vértices mide 4 cm

90. Construye tres triángulos equiláteros, uno cuyo lado mida 3 cm, otro con lado 6 cm y otro con lado 8 cm. Determina en cada caso sus puntos notables.

- ¿Qué observas?
- ¿Cuáles de sus rectas coinciden?



- Todos los puntos notables (baricentro, ortocentro, incentro y circuncentro) coinciden.
- Todas las rectas coinciden: mediatrices, bisectrices, medianas y alturas.

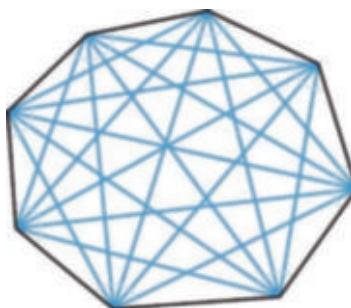
Polígonos. Triángulos

DEBES SABER HACER

1. Di cuál de estos polígonos es regular.

- a) Un triángulo equilátero.
 - c) Un rectángulo.
 - b) Un cuadrado.
 - d) Un rombo.
- a) Regular.
 - c) Irregular ya que tiene lados diferentes.
 - b) Regular.
 - d) Irregular, ya que tiene ángulos diferentes.

2. Dibuja un polígono convexo de ocho lados y señala en él los ángulos interiores y las diagonales. ¿Cuántas diagonales puedes trazar?



$$\text{Número de diagonales} = 8 \cdot (8 - 3) : 2 = 20$$

3. Halla el número de lados de un polígono cuya suma de todos sus ángulos vale:

- a) 540°
 - b) 1260°
- a) $180 \cdot (n - 2) = 540 \rightarrow n = 5$
 - b) $180 \cdot (n - 2) = 1260 \rightarrow n = 7$

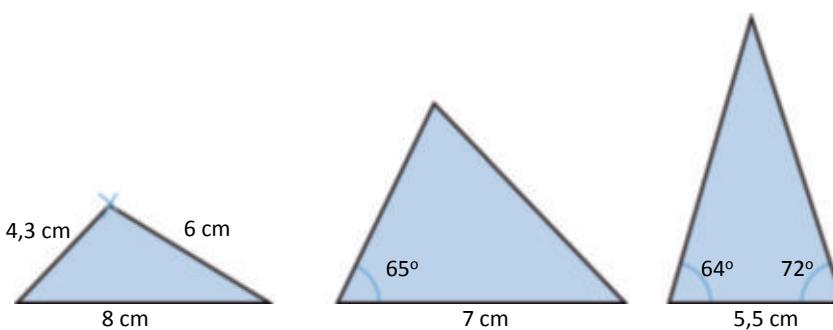
4. Razona si es posible construir un triángulo con estas características:

- a) Sus lados miden 4,3; 6 y 8 cm.
- b) Dos de sus lados miden 5 y 7 cm y un ángulo es de 65° .
- c) Dos de sus ángulos miden 120° y 100° .
- d) Dos de sus ángulos miden 72° y 64° y uno de sus lados mide 5,5 cm.

$$\text{a) } 8 < 6 + 4,3 \quad 6 < 8 + 4,3 \quad 4,3 < 8 + 6 \quad 8 > 6 - 4,3 \quad 6 > 8 - 4,3 \quad 4,3 > 8 - 6$$

Sí es posible.

- b) Sí es posible.
- c) No es posible porque los ángulos suman más de 180° .
- d) Sí es posible.



5. ¿Puede haber un triángulo isósceles y rectángulo a la vez?

Sí, la hipotenusa sería el lado desigual.

$$a^2 = 28^2 + 21^2 = 1\,225 \rightarrow a = \sqrt{1\,225} = 35 \text{ cm}$$

Debe cumplir el teorema de Pitágoras.

Imaginemos que falta la hipotenusa: $a^2 = 15^2 + 12^2 = 369 \rightarrow a = \sqrt{369} = 19,21 \text{ cm.}$

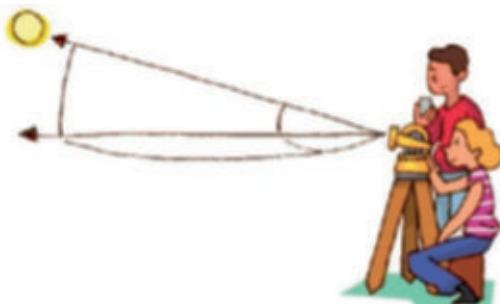
El lado que falta mide 19,21 cm.

Si el lado que falta es un cateto: $b^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \rightarrow b = \sqrt{81} = 9 \text{ cm.}$

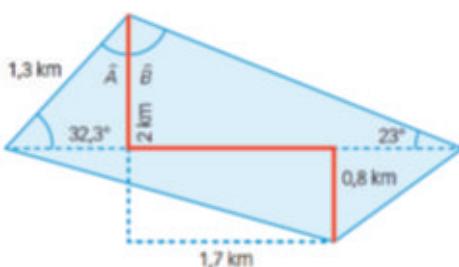
El lado que falta mide 9 cm.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

- 91.** Muchas veces habrás visto construir edificios, carreteras u otras grandes obras. En estas obras habrás observado a personas mirando por una especie de prismáticos. La persona que realiza esto es un topógrafo y está usando un teodolito. El teodolito sirve para medir distancias y ángulos tanto horizontales como verticales.



A continuación puedes ver el plano de un estanque en el que se quiere construir una pasarela que lo atraviese (marcada con una línea roja).



El plano tiene solo algunas distancias y las medidas de algunos ángulos, y con ellos hay que calcular:

- La distancia que recorre la pasarela.
 - Los ángulos A y B que forma la pasarela con los lados del estanque.
- a) La longitud de la pasarela es $2 + 1,7 + 0,8 = 4,5 \text{ km}$
- b) $A = 180 - (90 + 32,3) = 57,7^\circ$
- $\hat{B} = 180 - (90 + 23) = 67^\circ$

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

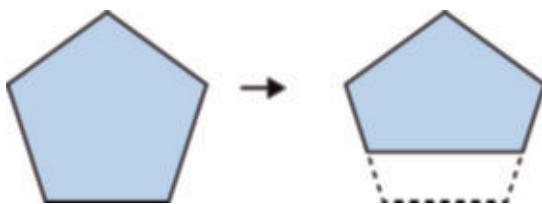
92. ¿Puede haber un polígono de 3, 4, 5, 6... lados, con todos los ángulos iguales, pero que no tenga los lados iguales?

a) Construye y dibuja los polígonos que cumplen esta condición.

b) Explica en qué casos no es posible y por qué.

En el caso del polígono de 3 lados no es posible, porque si tiene todos sus ángulos iguales, sus lados han de ser también iguales.

En el resto de polígonos sí es posible; basta con tomar una recta paralela a uno de los lados de un polígono regular y sustituirla por el lado correspondiente, alargando o acortando los adyacentes.



93. Construye un cuadrado sabiendo que su diagonal mide 6 cm.



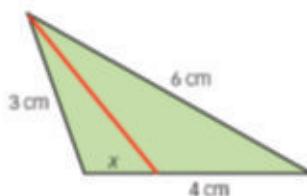
Construimos un segmento de 6 cm. Trazamos otro segmento de 6 cm perpendicular al anterior y que se corte en sus puntos medios.

Los extremos de los segmentos son los vértices del cuadrado.

94. Una de las propiedades de las bisectrices de un ángulo es la siguiente:

La bisectriz de un ángulo divide el lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados correspondientes.

A partir de esta propiedad, calcula el valor de x en el triángulo siguiente.



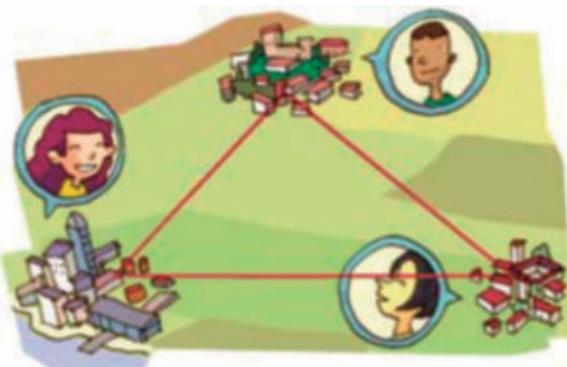
Teniendo en cuenta la proporcionalidad que se cumple:

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{4} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 4}{6} \rightarrow x = 2 \text{ cm}$$

PRUEBAS PISA

95. Marcos, Raúl y Andrea viven en tres pueblos diferentes que no están alineados sobre el mapa.

Han decidido que harán una excursión. Cada uno saldrá de su pueblo a la misma hora y se dirigirá, campo a través, hacia un punto que se encuentre a la misma distancia de los tres pueblos.



Han cogido un mapa y quieren determinar ese punto en el que se encontrarán, ¿cómo pueden calcular ese lugar?

Lo pueden calcular hallando el circuncentro del triángulo formado por los tres pueblos (vértices del triángulo).

96. Elige la figura que se ajusta a la siguiente descripción.

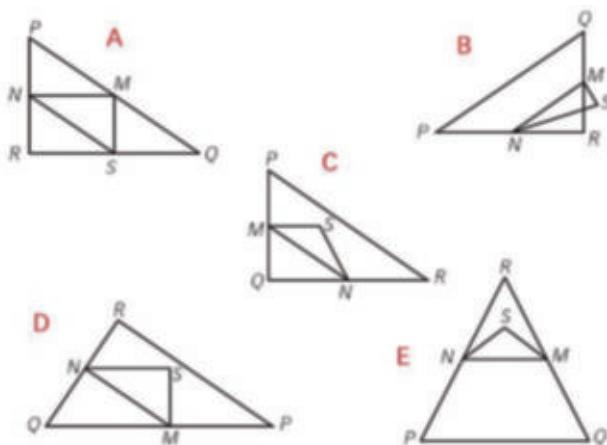
El triángulo PQR es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en R.

El lado RQ es menor que el lado PR.

M es el punto medio del lado PQ y N es el punto medio del lado QR.

S es un punto del interior del triángulo.

El segmento MN es mayor que el segmento MS.



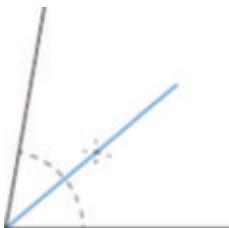
La figura D.

Cuadriláteros y circunferencia

CLAVES PARA EMPEZAR

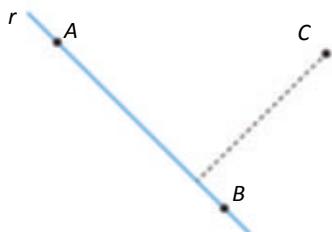
1. Dibuja en tu cuaderno un ángulo de 80° y traza su bisectriz.

¿Qué medida tienen los dos ángulos resultantes?



Cada ángulo mide 40° .

2. Dibuja tres puntos que no estén alineados, traza la recta que pasa por dos de ellos y halla la distancia del punto restante a esa recta.



La distancia de C a la recta r es de 2,5 cm.

VIDA COTIDIANA

Las primeras bicicletas empezaron a rodar por nuestras calles y caminos hace varios siglos y no han parado. En la actualidad hay alrededor de 800 millones de bicicletas en el mundo (la mayor parte de ellas en China).

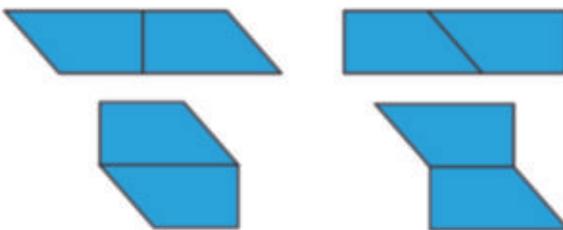
- Teniendo en cuenta la forma que tiene la bicicleta de la ilustración, ¿por qué motivo crees que hay un triángulo en el cuadro de la bicicleta?

Porque el triángulo es la figura más difícil de deformar, lo que le da robustez a la bicicleta.

RESUELVE EL RETO

Si unimos dos trapecios rectángulos iguales por uno de sus lados, ¿qué figura se obtiene?

Depende del lado por el que los unamos:

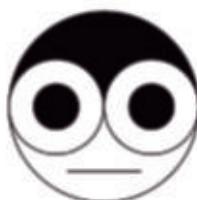


Si se unen por los lados que no son bases, se forma un trapecio isósceles o un rectángulo. Si se unen por alguna de las bases, se forma un polígono de 6 lados.

¿Cuántos lados tiene un polígono regular si su lado mide más que su radio?

En un polígono regular se forman triángulos isósceles con dos radios y el lado. Para que el lado sea mayor que los radios, en el triángulo isósceles el ángulo desigual que forman los dos radios, que es un ángulo central, tiene que ser mayor que los otros dos. Esto ocurre cuando ese ángulo es mayor que 60° . De modo que se cumplirá lo que dice el enunciado para triángulos equiláteros, cuadrados y pentágonos regulares.

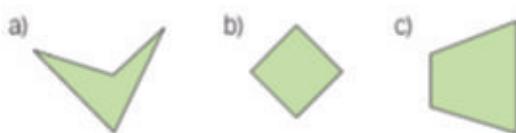
Dibuja en tu cuaderno esta figura.



Dibujar la figura usando regla y compás.

ACTIVIDADES

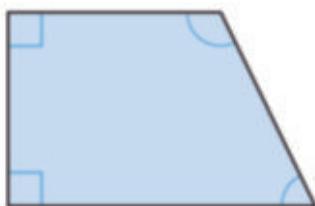
1. Clasifica estos cuadriláteros.



a) Trapezoide. b) Cuadrado. c) Trapecio escaleno.

2. ¿Qué cuadrilátero tiene dos ángulos rectos y otros dos de 64° y 116° , respectivamente?

El trapecio rectángulo.



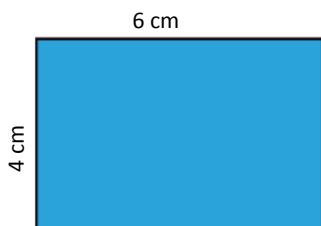
3. ¿Puedes dibujar un trapecio cóncavo?

No. Es imposible que en un cuadrilátero con un ángulo cóncavo haya dos lados paralelos.

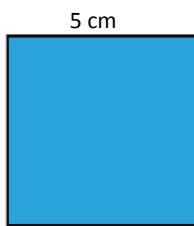
4. Construye cada uno de los siguientes paralelogramos.

- a) Rectángulo de lados 6 y 4 cm.
- b) Cuadrado de lado 5 cm.
- c) Rombo de lado 6 cm y ángulo de 60° .

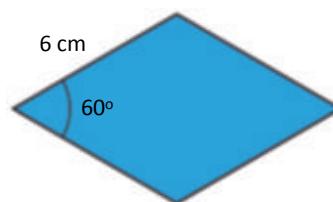
a)



b)



c)



5. Construye cada uno de los siguientes paralelogramos.

- a) Rombo de lado 5 cm y ángulo de 20° .
- b) Romboide de lados 7 y 5 cm y ángulo de 60° .
- c) Rectángulo de lados 1 y 5 cm.

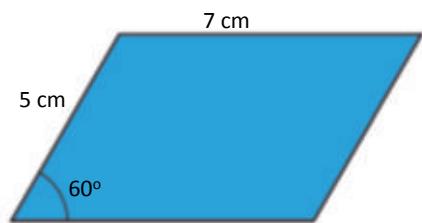
a)



c)



b)



6. Calcula la medida de los ángulos del paralelogramo en cada caso:

- a) Tiene un ángulo de 50° .
- b) Tiene un ángulo de 100° .
- c) Tiene un ángulo de 70° .

a) $A = C = 50^\circ \quad B = D = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

b) $A = C = 100^\circ \quad B = D = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

c) $A = C = 70^\circ \quad B = D = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

Cuadriláteros y circunferencia

7. ¿Qué paralelogramo tiene un ángulo de 45°?

Rombo o romboide.

8. Razona si es verdadero o falso.

- a) Las diagonales de todos los paralelogramos tienen la misma medida.
 - b) Las diagonales de todos los paralelogramos son perpendiculares entre sí.
 - c) Las diagonales de todos los paralelogramos se cortan en sus puntos medios.
- a) Falso. En el caso de los rombos, las diagonales son distintas.
 - b) Falso. En los romboideos, las diagonales no son perpendiculares.
 - c) Verdadero.

9. Calcula la medida del ángulo interior de estos polígonos.

- a) Un pentágono regular. c) Un octógono regular.
- b) Un heptágono regular. d) Un decágono regular.

$$\text{a) Ángulo interior} = \frac{180^\circ \cdot (5 - 2)}{5} = 108^\circ$$

$$\text{b) Ángulo interior} = \frac{180^\circ \cdot (7 - 2)}{7} = 128,57^\circ$$

$$\text{c) Ángulo interior} = \frac{180^\circ \cdot (8 - 2)}{8} = 135^\circ$$

$$\text{d) Ángulo interior} = \frac{180^\circ \cdot (10 - 2)}{10} = 144^\circ$$

10. ¿Qué polígono regular tiene un ángulo interior de 60°? ¿Cuál lo tiene de 150°?

El triángulo equilátero tiene un ángulo interior de 60°.

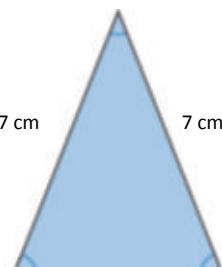
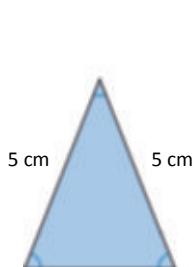
El dodecágono tiene un ángulo interior de 150°.

11. ¿Existe algún polígono regular cuyo ángulo interior mida 180°? Razona tu respuesta.

No, no existe, sería una línea recta.

12. Dibuja un triángulo cordobés cuyos lados iguales midan 5 cm y otro en el que midan 7 cm.

¿Guardan la razón cordobesa?



En ambos triángulos, los lados guardan esa razón.

- 13.** Dibuja un triángulo cordobés cuyo lado desigual mida 4 cm.



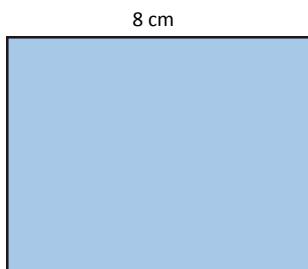
- 14.** ¿Cuánto medirá, aproximadamente, el lado desigual de un triángulo cordobés cuyos lados iguales miden 10 cm?

Medirá aproximadamente $10 : 1,3 = 7,69$ cm.

- 15.** Los ángulos iguales de un triángulo isósceles miden 65° , ¿es un triángulo cordobés?

El ángulo desigual medirá $180^\circ - 2 \cdot 65^\circ = 50^\circ$. No mide 45° , luego no es un triángulo cordobés.

- 16.** Construye un rectángulo cordobés que tenga un lado que mida 8 cm.



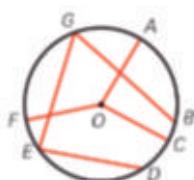
- 17.** En un rectángulo cordobés, su lado mayor mide 10 cm. ¿Cuánto medirá su otro lado?

Su otro lado medirá $10 : 1,3 = 7,69$ cm.

- 18.** Mide los lados de este rectángulo. ¿Es un rectángulo cordobés?

$3,5\text{ cm} : 2\text{ cm} = 1,5$. La razón entre sus lados no es el número cordobés; no es un rectángulo cordobés.

- 19.** Indica el nombre de los elementos de esta circunferencia.

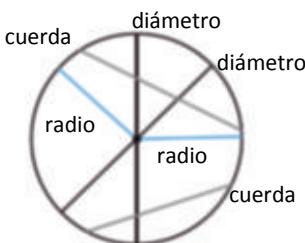


OA , OC y OF son radios.

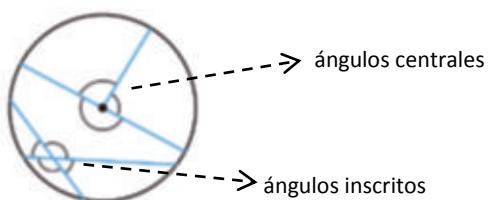
BG , DE y EG son cuerdas.

Cuadriláteros y circunferencia

20. Dibuja una circunferencia de radio 4,5 cm y traza dos diámetros, dos radios y dos cuerdas.

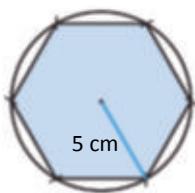


21. De los ángulos que se forman en esta circunferencia, indica cuáles son ángulos centrales y cuáles son inscritos.



22. Construye un hexágono regular cuyo radio mida 5 cm.

Se dibuja una circunferencia de radio 5 cm y sobre ella se hacen marcas con un compás con una apertura de 5 cm. Se unen las marcas.



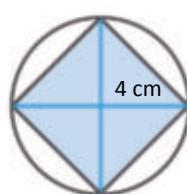
23. Construye un hexágono regular cuyo lado mida 4 cm.

Se dibuja una circunferencia de radio 4 cm y sobre ella se hacen marcas con un compás con una apertura de 4 cm. Se unen las marcas.

El dibujo es análogo al del ejercicio anterior.

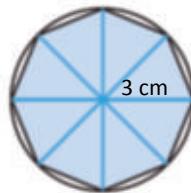
24. Construye un cuadrado cuyas diagonales midan 8 cm.

Se dibuja una circunferencia de 4 cm de radio y se trazan dos diámetros perpendiculares entre sí. Se unen los extremos de los diámetros.



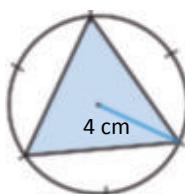
25. Construye un octágono regular cuyo radio mida 3 cm.

Se dibuja una circunferencia de 3 cm de radio y se trazan dos diámetros perpendiculares entre sí y sus bisectrices. Se unen los extremos de los diámetros y las bisectrices.

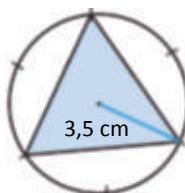


26. Construye los siguientes triángulos equiláteros.

- a) Su radio es 4 cm.
- b) El diámetro de la circunferencia circunscrita es 7 cm.
- a) Se dibuja una circunferencia de radio 4 cm y sobre ella se hacen marcas con un compás con una apertura de 4 cm. Se unen las marcas alternas.

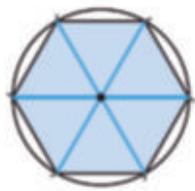


- b) Se dibuja una circunferencia de radio 3,5 cm y sobre ella se hacen marcas con un compás con una apertura de 3,5 cm. Se unen las marcas alternas.



27. Traz a un hexágono regular inscrito en una circunferencia. Despu s, traza los tres diámetros que unen sus vértices opuestos. ¿En cuántos triángulos queda descompuesto el hexágono?

Comprueba que todos los triángulos formados son equiláteros.



El hexágono queda descompuesto en 6 triángulos.

Los triángulos son equiláteros, ya que en un hexágono el lado y el radio son iguales y cada triángulo est á formado por un lado y dos radios, con lo que sus tres lados miden igual.

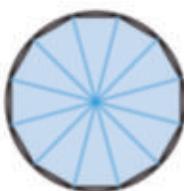
Cuadriláteros y circunferencia

28. Divide una circunferencia en doce partes iguales:

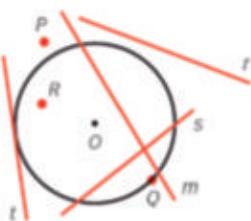
- ¿Cuántos grados mide cada arco que se forma?
- Une cada dos puntos consecutivos. ¿Qué polígono regular se forma?
¿Cuánto mide su ángulo central?

Para dividir la circunferencia, se marcan los vértices de un hexágono y se dibujan 3 diámetros uniendo vértices opuestos. Se dibujan las bisectrices de los ángulos formados.

- $360 : 12 = 30^\circ$
- Se forma un dodecágono regular. Cada ángulo central mide $360 : 12 = 30^\circ$.



29. Observa el dibujo e indica la posición relativa de los puntos de color rojo y las rectas respecto de la circunferencia.



- P es un punto exterior.
R es un punto interior.
r es una recta exterior.

- Q es un punto de la circunferencia.
m es una recta secante.
t es una recta tangente.

30. El diámetro de una circunferencia es 4,8 cm. Halla la posición relativa de una recta que dista del centro de esta:

- $d = 2,3 \text{ cm}$
- $d = 2,4 \text{ cm}$
- $d = 3 \text{ cm}$

El radio de la circunferencia es de $r = 4,8 : 2 = 2,4 \text{ cm}$

- $r > 2,4 \rightarrow$ La recta es secante.
- $r = 2,4 \rightarrow$ La recta es tangente.
- $r < 2,4 \rightarrow$ La recta es exterior.

31. ¿Cómo encontrarías el centro de una circunferencia que no lo tiene señalado?

Dibujamos una recta tangente a la circunferencia en cualquier punto. Trazamos el diámetro de la circunferencia en ese punto, que es perpendicular a la recta tangente. Finalmente, hallamos el punto medio del diámetro trazando su mediatrix.

Ese punto es el centro de la circunferencia.

32. ¿En cuántos sectores circulares de 45° se puede dividir un círculo?

$360 : 45 = 8 \rightarrow$ Un círculo puede dividirse en 8 sectores circulares de 45° .

33. La rueda de una bicicleta tiene 60 radios. Calcula la amplitud del sector circular formado por:

- a) Dos radios consecutivos.
 - b) El primero y el sexto.
- a) $360 : 60 = 6^\circ$
- b) Abarcan 5 sectores circulares $\rightarrow 6 \cdot 5 = 30^\circ$

34. Calcula la amplitud del sector circular que forman las agujas de un reloj a las siguientes horas.

- a) Las cinco.
- b) Las cinco y media.
- c) Las nueve y cuarto.

Minutero

$$60 \text{ min} \rightarrow 360^\circ$$

$$1 \text{ min} \rightarrow x$$

$x = 6^\circ$. La aguja del minutero recorre 6° cada minuto.

$y = 0,5^\circ$. La aguja horaria recorre $0,5^\circ$ cada minuto.

a) Minutero: 0°

Horaria: $5 \cdot 60 \cdot 0,5 = 150^\circ$

Ángulo: 150°

Horaria

$$12 \cdot 60 \text{ min} \rightarrow 360^\circ$$

$$1 \text{ min} \rightarrow y$$

b) Minutero: $30 \cdot 6 = 180^\circ$

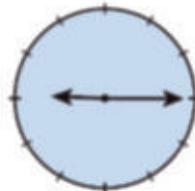
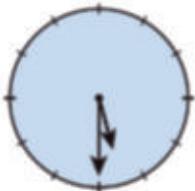
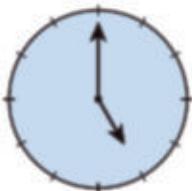
Horaria: $(5 \cdot 60 + 30) \cdot 0,5 = 165^\circ$

Ángulo: $180 - 165 = 15^\circ$

c) Minutero: $15 \cdot 6 = 90^\circ$

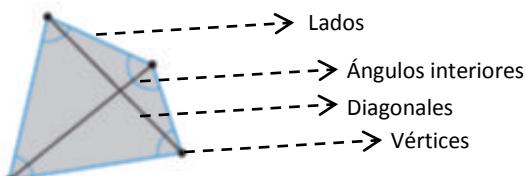
Horaria: $(9 \cdot 60 + 15) \cdot 0,5 = 277,5^\circ$

Ángulo: $277,5 - 90 = 187,5^\circ$



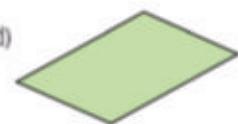
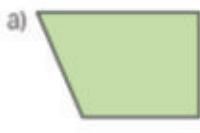
ACTIVIDADES FINALES

35. Copia en tu cuaderno este cuadrilátero y señala sus lados, sus diagonales, sus vértices y sus ángulos interiores.



Cuadriláteros y circunferencia

36. Clasifica los siguientes cuadriláteros en función del paralelismo de sus lados.



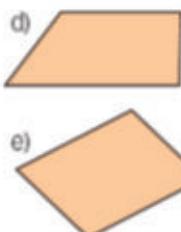
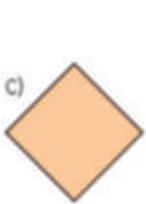
a) Trapecio rectángulo.

b) Trapezoide convexo.

c) Trapezoide rectángulo convexo.

d) Romboide.

37. Clasifica estos cuadriláteros en función de sus ángulos y del paralelismo de sus lados.



a) Rectángulo.

b) Trapecio isósceles.

c) Cuadrado.

d) Trapecio rectángulo.

e) Romboide.

38. Determina si los siguientes enunciados corresponden a un cuadrado, un rectángulo o un rombo.

- a) Sus diagonales son perpendiculares, de distinta medida y se cortan en sus puntos medios.
- b) Sus diagonales son iguales, son perpendiculares y se cortan en sus puntos medios.
- c) Sus diagonales se cortan en un punto medio.
- d) Sus diagonales tienen la misma medida, no son perpendiculares y se cortan en sus puntos medios.

a) Rombo.

c) Romboide.

b) Cuadrado.

d) Rectángulo.

39. Indica si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, todos sus ángulos son rectos.
 - b) Si un cuadrilátero tiene un ángulo recto, tendrá al menos otro ángulo recto.
 - c) Si un cuadrilátero tiene dos diagonales iguales, es un paralelogramo.
 - d) Hay cuadriláteros que no son paralelogramos y que tienen las diagonales iguales.
 - e) Un cuadrilátero que no sea paralelogramo puede tener dos ángulos rectos.
 - f) Un cuadrilátero que no sea paralelogramo puede tener tres ángulos rectos.
- a) Verdadero.
- b) Falso. Un trapezoide puede tener un ángulo recto y todos los demás distintos.
- c) Falso. Los trapecios isósceles tienen sus dos diagonales iguales y no son paralelogramos.

- d) Verdadero. Los trapecios isósceles.
- e) Verdadero. El trapecio rectángulo.
- f) Falso. Si un cuadrilátero tiene 3 ángulos rectos, el cuarto también lo tiene que ser. Es decir, debería ser un cuadrado o un rectángulo, que son paralelogramos.

40. ¿En qué cuadriláteros las diagonales se cortan en sus puntos medios?

En los paralelogramos.

41. ¿En qué cuadriláteros, no paralelogramos, las diagonales son iguales?

Trapecios isósceles.

42. Razona si es verdadero o falso.

- a) Un cuadrado es, al mismo tiempo, un rombo.
 - b) Las diagonales de un rombo son iguales.
 - c) Los ángulos opuestos de un romboide son iguales.
 - d) Las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio.
 - e) Un rectángulo se puede dividir en dos cuadrados.
 - f) Un rombo está compuesto por dos triángulos isósceles.
- a) Verdadero, porque tiene las características de los rombos: lados iguales y ángulos iguales dos a dos.
 - b) Falso.
 - c) Verdadero.
 - d) Verdadero.
 - e) Falso. Esto solo ocurre si el lado mayor mide el doble que el lado menor.
 - f) Verdadero. Cualquiera de sus diagonales divide al rombo en dos triángulos isósceles.

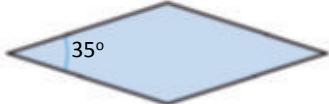
43. Dibuja estos paralelogramos.

- a) Un romboide con un ángulo de 30° .
- b) Un rombo con un ángulo de 35° .
- c) Un rectángulo de base 9 cm y diagonal 11 cm.

a)

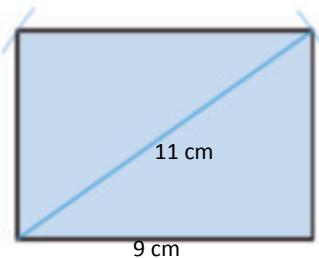


b)



Cuadriláteros y circunferencia

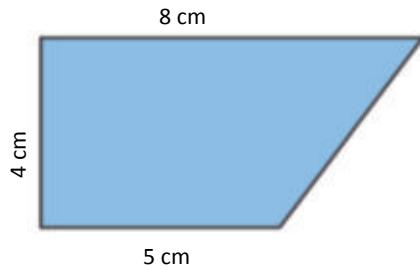
- c) Se dibuja la base y se trazan líneas perpendiculares a cada extremo de la base. Con un compás apoyado en cada uno de los extremos, dibujamos un radio de 9 cm que corte a las líneas perpendiculares trazadas. Unimos esos cortes.



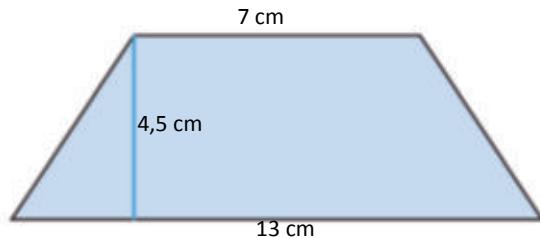
44. Dibuja los siguientes trapecios.

- a) Trapecio rectángulo de bases 5 y 8 cm, y altura 4 cm.
b) Trapecio isósceles de bases 7 y 13 cm, y altura 4,5 cm.

a)



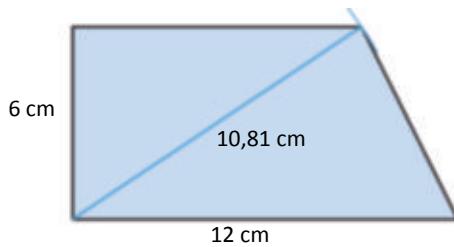
b)



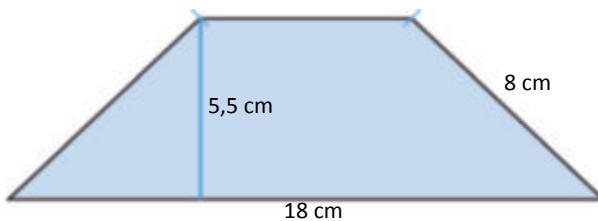
45. Construye estos trapecios.

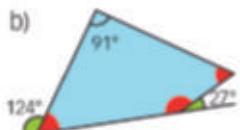
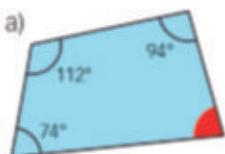
- a) Trapecio rectángulo de base mayor 12 cm, altura 6 cm y diagonal menor 10,81 cm.
b) Trapecio isósceles de base mayor 18 cm, altura 5,5 cm y lado oblicuo 8 cm.

- a) Se traza la base mayor de 12 cm y en uno de los extremos se dibuja un segmento perpendicular a ella con medida de 6 cm. En ese mismo extremo se coloca el compás con una apertura de 10,81 cm y se dibuja un arco. Del extremo del segmento vertical, se traza una línea paralela a la base mayor hasta que corte el arco. Ese punto se une con el otro extremo de la base mayor.



- b) Se traza la base mayor. Se dibuja una recta paralela a ella y separada 5,5 cm. En los extremos de la base se coloca el compás con una apertura de 8 cm y se trazan dos arcos que corten a la recta paralela. Se unen esos puntos con los extremos de la base.



46. Calcula el valor de los ángulos desconocidos.

a) En un cuadrilátero la suma de los ángulos debe ser 360° .

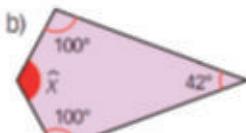
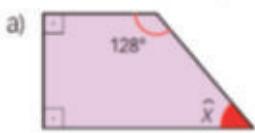
$$360^\circ - (112^\circ + 74^\circ + 94^\circ) = 80^\circ$$

b) Nombramos los ángulos de izquierda a derecha: A , B y C .

$$A = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$$

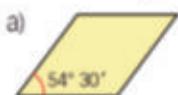
$$B = 180^\circ - 27^\circ = 153^\circ$$

$$C = 360^\circ - (91^\circ + 56^\circ + 153^\circ) = 60^\circ$$

47. Calcula el ángulo que falta en cada uno de los cuadriláteros.

$$a) X = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$$

$$b) X = 360^\circ - (100^\circ + 100^\circ + 42^\circ) = 118^\circ$$

48. Halla los ángulos de cada paralelogramo.

a) Si $\overset{\circ}{B}$ es el ángulo opuesto al ángulo conocido, entonces $\overset{\circ}{B} = 54^\circ 30'$. Como los ángulos son iguales dos a dos,

$$A = C = 180^\circ - 54^\circ 30' = 125^\circ 30'.$$

b) Si $\overset{\circ}{A}$ es el ángulo opuesto al ángulo conocido, entonces $\overset{\circ}{A} = 143^\circ$. Como los ángulos son iguales dos a dos,

$$B = C = 180^\circ - 143^\circ = 37^\circ.$$

49. Uno de los ángulos de un rombo mide 38° . ¿Cuánto mide el resto de los ángulos?

$$A = C = 38^\circ$$

$$\overset{\circ}{B} = D = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$$

50. En un romboide un ángulo mide 115° . ¿Cuánto miden los otros tres?

$$A = 115^\circ$$

$$\overset{\circ}{B} = C = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

51. Un ángulo de un trapecio rectángulo mide 126° . ¿Cuánto miden los demás ángulos?

$$\overset{\circ}{B} = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$$

$$A = C = 90^\circ$$

Cuadriláteros y circunferencia

52. Los dos ángulos iguales de un trapecio isósceles miden 42° . ¿Cuánto miden el resto de ángulos?

Por ser trapecio isósceles, los dos ángulos restantes también son iguales. Además, la suma de todos los ángulos es 360° . Por tanto:

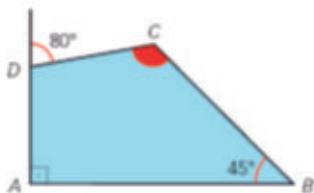
$$A = B = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

53. En un trapecio isósceles, un ángulo mide 53° . ¿Cuánto miden los otros tres ángulos?

Por ser trapecio isósceles, los ángulos son iguales dos a dos. Además, la suma de todos los ángulos es 360° . Por tanto, si C es el ángulo opuesto al ángulo conocido:

$$C = 53^\circ \quad A = B = 180^\circ - 53^\circ = 127^\circ$$

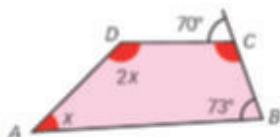
54. Calcula el valor del ángulo \hat{C} marcado en el cuadrilátero dibujado a la derecha.



$$D = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$C = 360^\circ - (100^\circ + 90^\circ + 45^\circ) = 125^\circ$$

55. Calcula el valor de los ángulos \hat{A} , \hat{C} y \hat{D} .



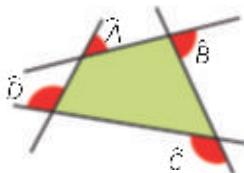
$$C = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$A + D = 360^\circ - (73^\circ + 110^\circ) = 177^\circ \rightarrow x + 2x = 177 \rightarrow 3x = 177 \rightarrow x = 177 : 3 = 59$$

$$A = 59^\circ$$

$$D = 2 \cdot 59^\circ = 118^\circ$$

56. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos exteriores indicados en la figura?

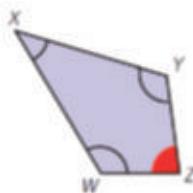


$$(180^\circ - A) + (180^\circ - B) + (180^\circ - C) + (180^\circ - D) = 360^\circ$$

$$4 \cdot 180^\circ - 360^\circ = A - B - C + D \rightarrow A - B - C + D = 360^\circ$$

57. Halla el valor de \hat{Z} sabiendo que:

- \hat{X} es complementario de 55° .
- \hat{Y} es suplementario de 58° .
- \hat{W} es el triple de \hat{X} .



$$X = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$$

$$Y = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$$

$$W = 3 \cdot X = 3 \cdot 35^\circ = 115^\circ$$

$$Z = 360^\circ - (X + Y + W) = 360^\circ - (35^\circ + 122^\circ + 115^\circ) = 88^\circ$$

58. En un dodecágono regular, averigua:

- Lo que mide el ángulo central correspondiente a dos radios consecutivos.
- La suma de todos los ángulos interiores.
- La medida de cada uno de los ángulos interiores.

$$a) 360^\circ : 12 = 30^\circ$$

$$b) 360^\circ$$

$$c) \text{Ángulo interior} = \frac{180^\circ \cdot (12 - 2)}{12} = 150^\circ$$

59. Calcula la suma de los ángulos interiores de estos polígonos.

- Pentágono regular.
- Hexágono regular.
- Octógono regular.
- Eneágono regular.

$$a) \text{La suma de los ángulos interiores} = 5 \cdot \frac{180^\circ \cdot (5 - 2)}{5} = 180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$$

$$b) \text{La suma de los ángulos interiores} = 6 \cdot \frac{180^\circ \cdot (6 - 2)}{6} = 180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$$

$$c) \text{La suma de los ángulos interiores} = 8 \cdot \frac{180^\circ \cdot (8 - 2)}{8} = 180^\circ \cdot 6 = 1080^\circ$$

$$d) \text{La suma de los ángulos interiores} = 9 \cdot \frac{180^\circ \cdot (9 - 2)}{9} = 180^\circ \cdot 7 = 1260^\circ$$

60. Halla el valor del ángulo central de:

- Un icoságono regular.
- Un pentadecágono regular.
- Un icoságono tiene 20 lados \rightarrow Ángulo central $= 360^\circ : 20 = 18^\circ$
- Un pentadecágono tiene 15 lados \rightarrow Ángulo central $= 360^\circ : 15 = 24^\circ$

61. Calcula el número de lados de un polígono regular cuya medida del ángulo central es:

- 36°
- 30°
- 40°
- $27^\circ 41' 32,3''$

$$a) 360^\circ : 36^\circ = 10 \rightarrow 10 \text{ lados (decágono).}$$

$$b) 360^\circ : 30^\circ = 12 \rightarrow 12 \text{ lados (dodecágono).}$$

$$c) 360^\circ : 40^\circ = 9 \rightarrow 9 \text{ lados (eneágono).}$$

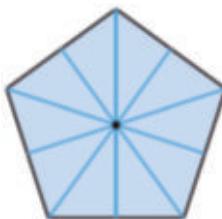
$$d) 360^\circ : (27^\circ 41' 32,3'') = 1296000'' : 99692,3'' = 13 \rightarrow 13 \text{ lados (tridecágono).}$$

- 62.** Esta figura se ha obtenido trazando las diagonales de un hexágono regular. Construye en tu cuaderno una figura igual, dibujando un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 6 cm de radio.

Compruebe que las figuras obtenidas por los alumnos son iguales a la ofrecida en el libro.

- 63.** ¿Cómo calcularías el centro de un pentágono regular?

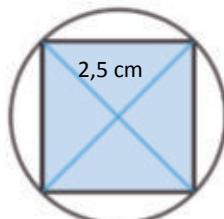
El centro es el punto de corte de los segmentos que unen cada vértice del pentágono con la mitad del lado opuesto.



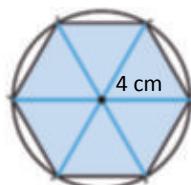
- 64.** Dibuja estos polígonos regulares, trazando una circunferencia y dividiéndola en partes iguales.

- Un cuadrado cuyas diagonales midan 5 cm.
- Un hexágono de lado 4 cm.
- Un octógono cuya diagonal mida 8 cm.

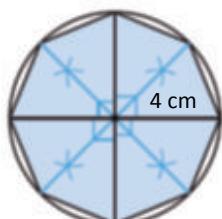
a) Se dibuja una circunferencia de radio 2,5 cm y se trazan dos diámetros paralelos entre sí dividiendo la circunferencia en 4 partes iguales. Se unen los extremos de los diámetros para obtener el cuadrado.



b) Se dibuja una circunferencia de radio 4 cm con un compás. Apoyando el compás en la circunferencia con la misma apertura, se hace una marca en la circunferencia; apoyándolo en esa marca, se traza otra... y así hasta tener las 6 marcas. Se une cada marca con la opuesta (son diámetros), quedando la circunferencia dividida en 6 partes iguales por 3 diámetros. Se unen las marcas consecutivamente para obtener el hexágono.



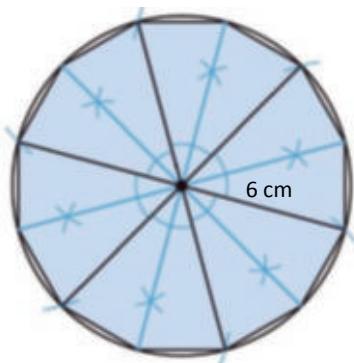
c) Se dibuja una circunferencia de 4 cm de radio. Se dibujan dos diámetros perpendiculares y se trazan sus bisectrices, quedando la circunferencia dividida en 8 partes iguales. Se unen los extremos de los diámetros para formar el octógono.



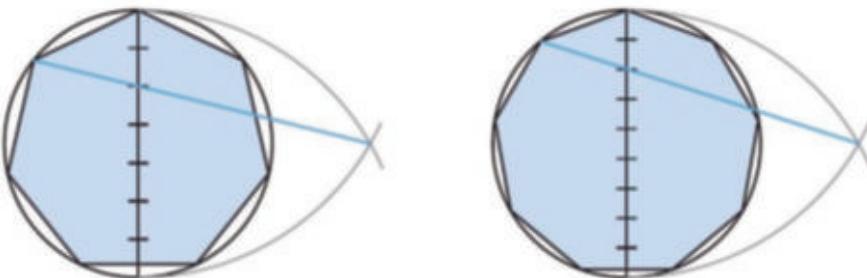
- 65.** Construye un dodecágono regular dividiendo una circunferencia de 12 cm de diámetro en doce partes iguales.

Se dibuja una circunferencia de radio 6 cm con un compás. Apoyando el compás en la circunferencia con la misma apertura, se hace una marca en la circunferencia; apoyándolo en esa marca, se traza otra... y así hasta tener 6 marcas. Se une cada marca con la opuesta (son diámetros), quedando la circunferencia dividida en 6 partes iguales por 3 diámetros. Se hallan las bisectrices de los ángulos formados por dos diámetros, quedando la circunferencia dividida en 12 partes iguales.

Se unen los extremos de los diámetros para obtener el dodecágono.

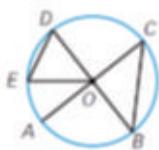


- 67.** Dibuja en tu cuaderno un heptágono y un eneágono regular.



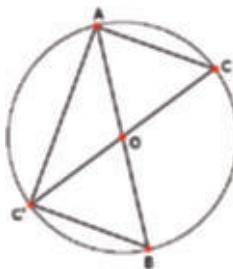
- 68.** Identifica en esta figura.

- Los radios.
 - Los diámetros.
 - Las cuerdas.
- OA, OB, OC, OD y OE .
 - AC y BD .
 - CB y DE .



- 69.** Dibuja una circunferencia de 5 cm de radio. Señala su centro, O . Elige tres puntos de la circunferencia A, B y C de forma que AB sea un diámetro y AC , una cuerda. Traza un diámetro de la circunferencia desde C y llama C' al punto de corte con la circunferencia. Une C' con A y B . ¿Cuántas cuerdas y arcos obtienes?

Cuadriláteros y circunferencia



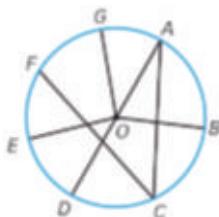
Se obtienen 3 cuerdas: \overline{AC} , $\overline{AC'}$, \overline{BC}

Se obtienen 4 arcos: AC , CB , BC' , $C'A$

70. Si el radio de una circunferencia mide 3 cm, responde razonadamente.

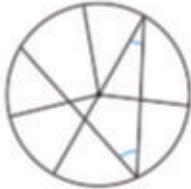
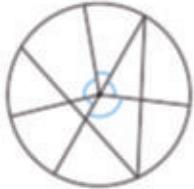
- ¿Cuánto mide el diámetro?
- ¿Entre qué valores se sitúan las medidas de las cuerdas?
 - El doble, 6 cm.
 - De 0 cm (los dos extremos de la cuerda coinciden) a 6 cm (la cuerda coincide con el diámetro).

71. Indica los ángulos centrales y los ángulos inscritos en la figura.

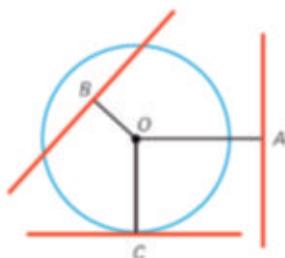


Ángulos centrales:

Ángulos inscritos:



72. En la siguiente circunferencia se han trazado una recta exterior, una recta secante y una tangente. También se han dibujado los segmentos perpendiculares a las rectas indicadas desde el centro, O , de la circunferencia.

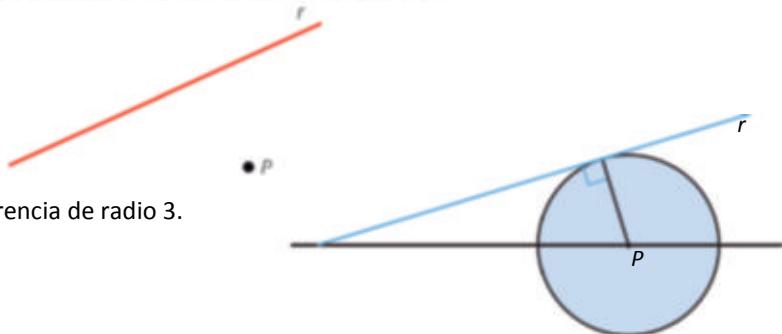


Compara los segmentos OA , OB y OC con el radio, r , y escribe el signo $<$, $>$ o $=$, según corresponda.

a) $OA \square r$ b) $OB \square r$ c) $OC \square r$

a) $>$ b) $<$ c) $=$

73. Si la distancia del punto P a la recta r es de 3 cm, ¿cómo podrías trazar una circunferencia de centro P que fuese tangente a la recta r ? ¿Cuál sería el valor del radio?



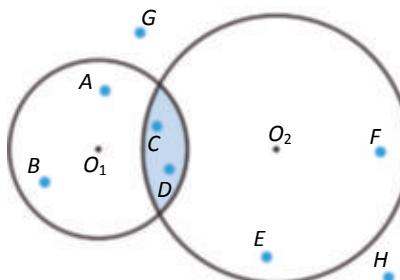
74. Dibuja dos circunferencias:

- Una circunferencia C_1 de radio 4 cm y centro O_1 .
- Y otra, C_2 , de radio 6 cm y centro O_2 .

Hazlo de forma que la distancia entre los centros de las dos circunferencias sea de 8 cm.

- Señala dos puntos interiores respecto a C_1 y a la vez exteriores respecto a C_2 .
- Señala dos puntos interiores respecto a C_1 y a la vez interiores respecto a C_2 .
- Señala los puntos que pertenezcan a ambas circunferencias.
- Señala dos puntos interiores respecto a C_2 y a la vez exteriores respecto a C_1 .
- Señala dos puntos exteriores respecto a C_1 y a la vez exteriores respecto a C_2 .

- | | |
|-----------|-----------|
| a) A, B | d) E, F |
| b) C, D | e) G, H |
| c) $C,$ | |



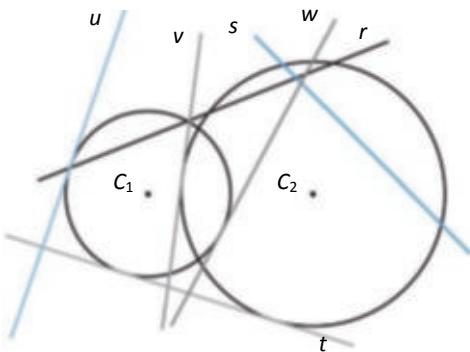
75. Dibuja dos circunferencias:

- Una circunferencia C_1 de radio 5 cm y centro O_1 .
- Y otra, C_2 , de radio 8 cm y centro O_2 .

Hazlo de forma que la distancia entre los centros de las dos circunferencias sea de 10 cm.

- Traza una recta secante a C_1 que también lo sea a C_2 .
- Traza una recta secante a C_2 que no lo sea a C_1 .
- Traza una recta tangente a C_1 y a C_2 .
- Traza una recta tangente a C_1 que no sea tangente a C_2 .
- Traza una recta que sea secante a C_1 y tangente a C_2 .
- Traza una recta tangente a C_1 y secante a C_2 .

Cuadriláteros y circunferencia

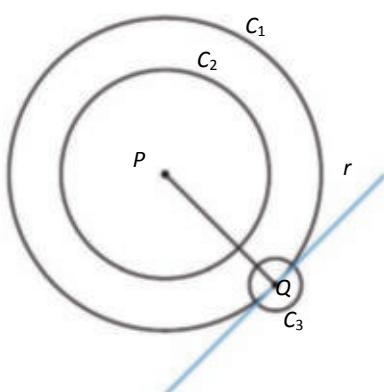


- a) r
b) s
c) t
d) u
e) v
f) w

76. Marca en tu cuaderno un punto P y traza una recta r que esté a 6 cm de P . Señala en r el punto Q tal que PQ sea perpendicular a r . Sitúa los siguientes elementos en el mismo dibujo:

- Una circunferencia C_1 de radio 6 cm y centro en P .
- Una circunferencia C_2 de radio 4 cm y centro en P .
- Una circunferencia C_3 de radio 1 cm y centro en Q .

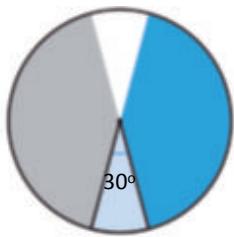
- a) ¿Cuál es la posición relativa de C_1 y C_2 ?
 b) ¿Y la posición relativa de r y C_2 ?
 c) Determina la posición relativa de C_1 y r .
 d) ¿Cuál es la posición relativa de C_3 y r ?
 a) C_2 es interior a C_1 .
 b) r es exterior a C_2 .
 c) r es tangente a C_1 en Q .
 d) r es secante a C_3 .



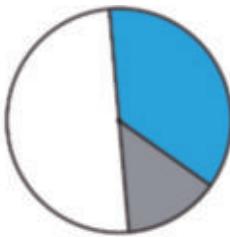
77. Dibuja una circunferencia de radio 4 cm y traza en ella las siguientes figuras.

- a) Dos semicírculos que tengan en común un sector de 30° de amplitud.
 b) Dos sectores consecutivos de distinta amplitud cuya unión sea un semicírculo.
 c) Cuatro sectores de 40° alternando con otros cuatro de 50° .

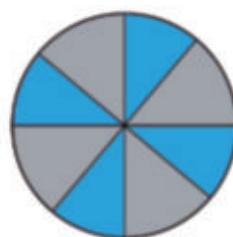
a)



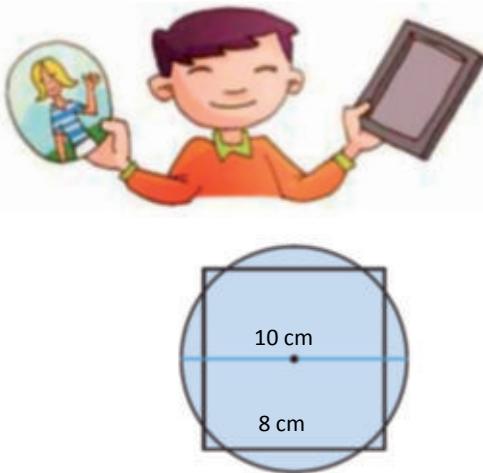
b)



c)



- 78.** Tengo una fotografía circular, de radio 5 cm, que quiero enmarcar en un marco cuadrado, de 8 cm de lado. ¿Quedará tapada alguna zona de la fotografía?



El marco tiene unas dimensiones de 8 cm de ancho por 8 cm de alto. Como la foto tiene un diámetro de 10 cm, quedarán tapadas las áreas de la foto delimitadas por los lados del marco (cuerdas) y los arcos de la circunferencia delimitados por los puntos de corte del cuadrado del marco.

- 79.** La llanta de las ruedas de un coche tiene un diseño en el que aparecen seis radios distribuidos regularmente. Calcula la amplitud entre dos radios consecutivos.

$$360^\circ : 6 = 60^\circ \text{ de amplitud}$$

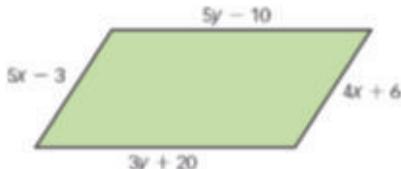
Los radios dividen la rueda en 6 sectores de 60° cada uno.

- 80.** En la noria que hay instalada en un parque de atracciones, la amplitud entre cada una de las cabinas es de 18° . Calcula el número de cabinas que tiene la noria.

$$360^\circ : 18 = 20 \text{ cabinas}$$

Cuadriláteros y circunferencia

81. La finca de Andrés tiene forma de paralelogramo, pero, en los planos, sus dimensiones no aparecen con números, sino que han utilizado estas expresiones. Calcula las medidas de cada lado.



En los romboídes los lados opuestos son iguales.

$$5y - 10 = 3y + 20 \rightarrow 5y - 3y = 10 + 20 \rightarrow 2y = 30 \rightarrow y = 30 : 2 \rightarrow y = 15$$

$$5x - 3 = 4x + 6 \rightarrow 5x - 4x = 3 + 6 \rightarrow x = 9$$

Las bases miden 65 cm ($5 \cdot 15 - 10 = 65$). Y los lados oblicuos, 42 cm ($5 \cdot 9 - 3 = 42$).

82. Un eclipse de Sol se produce cuando la Luna se interpone entre el Sol y la Tierra. Haz un esquema donde se detallen las posiciones relativas que pueden tener los tres astros en un eclipse de Sol.



La Luna es exterior al Sol:



La Luna es secante con el Sol:



La Luna es interior al Sol:



83. Copia en tu cuaderno la figura siguiente y dibuja una circunferencia que sea tangente a las dos. Explica cómo lo haces.

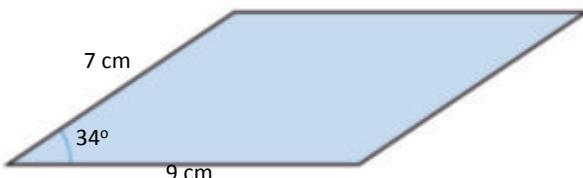
Elegimos una distancia cualquiera, r . Trazamos, con centro en C_1 , y radio $r_1 + r$, un arco, a un lado de la línea que une los centros de las dos circunferencias. Trazamos otro arco con centro en C_2 , y radio $r_2 + r$. El punto de corte de los dos arcos será el centro de la circunferencia buscada y su radio será r .

84. Traz la circunferencia a la que pertenece cada uno de los siguientes arcos. Para ello señala tres puntos de cada arco.

En ambos casos el proceso a seguir es el mismo. Se eligen tres puntos cualesquiera del arco. Se trazan los segmentos que unen el primer punto con el segundo y el segundo punto con el tercero. Despues, se obtienen las mediatrices de ambos segmentos. El punto de corte de ambas es el centro de la circunferencia y el radio la distancia a uno cualquiera de los tres puntos.

DEBES SABER HACER

1. Dibuja un romboide con un ángulo de 34° y dos segmentos de longitudes 7 y 9 cm.



2. Un ángulo de un rombo mide 40° . Calcula el valor del resto de ángulos del rombo.

El ángulo opuesto mide también 40° . Los otros dos ángulos miden cada uno $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

3. En un cuadrilátero ABCD se sabe que $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 80^\circ$ y $\hat{C} = 70^\circ$. Calcula lo que mide el ángulo \hat{D} . ¿Qué clase de cuadrilátero es?

$\hat{D} = 360^\circ - 90^\circ - 80^\circ - 70^\circ = 120^\circ$. Es un trapezoide.

4. Calcula la medida de los ángulos interiores de un octágono regular.

$180^\circ \cdot 6 = 1080^\circ$; $1080^\circ : 8 = 135^\circ$. Cada ángulo interior mide 135° .

5. Dibuja una circunferencia de radio 4 cm y señala:

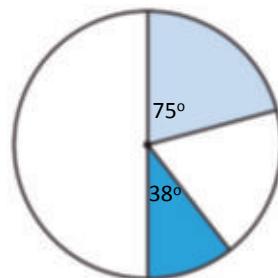
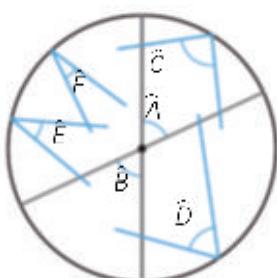
- Un radio.
- Un diámetro.
- Una cuerda.



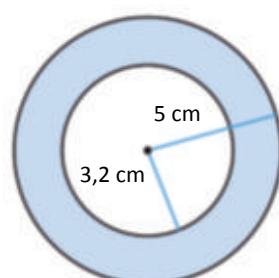
6. Dibuja una circunferencia de 5 cm de radio y traza en ella las siguientes figuras.

- Dos ángulos centrales de 65° opuestos por el vértice.
- Ángulos inscritos tomando cuatro puntos de la circunferencia.
- Un sector de 75° y otro de 38° de amplitud y no consecutivos.
- Una corona cuya circunferencia menor tenga 3,2 cm de radio.

- a) \hat{A} y \hat{B} b) \hat{C} , \hat{D} , \hat{E} y \hat{F} c)



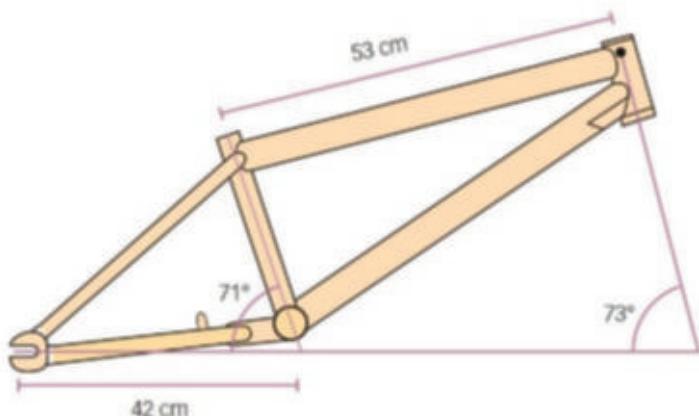
- d)



COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

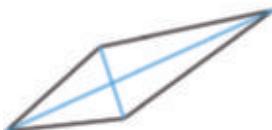
85. Desde la aparición de las primeras bicicletas, la evolución de este medio de transporte no ha cesado, tanto en los materiales utilizados como en su diseño.

Estos son los planos reales del diseño de una bicicleta actual.



- a) ¿Cómo se podría reforzar el cuadrilátero que forma parte del cuadro? Realiza un dibujo para indicarlo.
 b) Uno de los diseños más actuales es el cuadro formado por dos triángulos isósceles que forman un cuadrilátero. En estos casos se suele hacer todo el cuadro del mismo material, añadiendo al diseño las dos diagonales para reforzarlo. Si en el diseño que muestra las figuras, las diagonales miden 24 y 88 centímetros, ¿qué longitud total tienen todas las varillas que forman el cuadro añadiendo sus diagonales?

- a) Añadiendo la diagonal mayor.



b) $2 \cdot 53 \text{ cm} + 2 \cdot 42 \text{ cm} + 24 \text{ cm} + 88 \text{ cm} = 302 \text{ cm}$
 La longitud total de las varillas es de 302 cm.

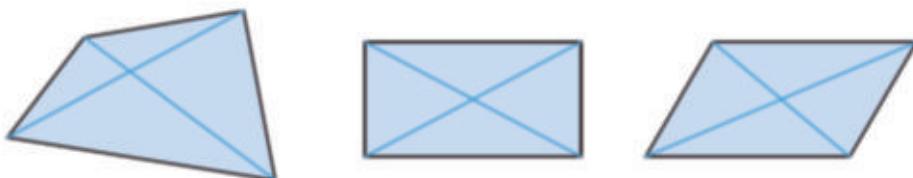
FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

- 86.** Considera dos segmentos AB y CD . Dibújalos en diferentes posiciones (paralelos, secantes, perpendiculares), y combina estas situaciones variando a su vez sus longitudes: primero iguales y después distintas. Une los extremos en cada una de las situaciones e indica qué tipo de cuadrilátero obtienes.

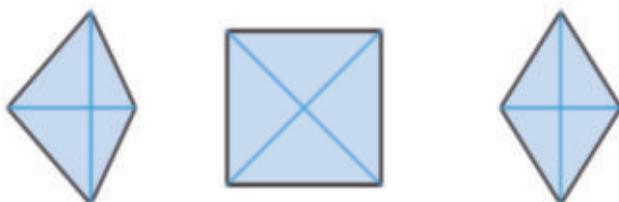
Paralelos: se obtienen trapezios. Si miden lo mismo, se obtienen paralelogramos.



Secantes: se obtienen trapezoides. Si miden lo mismo y se cortan en sus puntos medios, se obtienen rectángulos o romboides.



Perpendiculares: se obtienen trapezoides. Si se cortan en sus puntos medios, se obtienen rombos o cuadrados en el caso que midan lo mismo.



- 87.** Responde razonadamente y dibuja los polígonos a los que se hace referencia.

- ¿Cuántos rombos se pueden construir con un ángulo de 20° ?
- ¿Y si añadimos la condición de que el lado del rombo mida 6 cm?

a) Infinitos, porque el lado podría ser de cualquier medida.



b) Un único rombo.

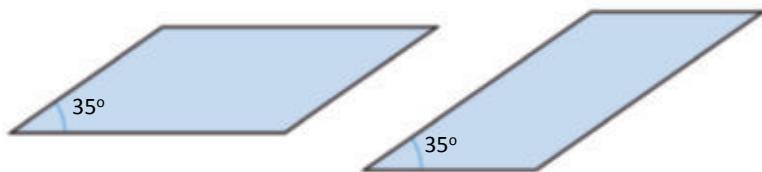


- 88.** Responde razonadamente y dibuja los polígonos a los que se hace referencia.

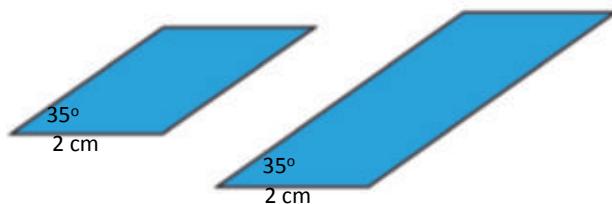
- ¿Cuántos romboides se pueden construir con un ángulo de 35° ?
- ¿Y con un ángulo de 35° y un segmento de 2 cm?
- ¿Y con un ángulo de 35° y dos segmentos de 2 y 5 cm?

Cuadriláteros y circunferencia

a) Infinitos, porque los lados podrían ser de cualquier medida.



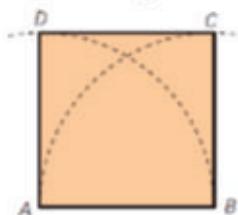
b) Infinitos, porque el otro segmento podría ser de cualquier medida.



c) Uno solo.



89. Explica paso a paso cómo se ha construido el cuadrado de la derecha. ¿Qué datos eran necesarios como mínimo para construirlo?



Se han trazado desde cada extremo del segmento AB un arco con radio la longitud de dicho segmento. Luego se han trazado segmentos perpendiculares a cada extremo de AB hasta cortar con esos arcos y se han unido los puntos.

Es necesaria la medida del segmento AB , el lado del cuadrado.

PRUEBAS PISA

90. Una constructora ha diseñado una urbanización en forma de pentágono regular de 20 m de lado y 15 m de radio.

En el diseño han situado cada vivienda en el punto medio del lado del pentágono regular, tal y como muestra el plano.

Quieren construir una valla para dotar a cada casa de un terreno triangular. ¿Cuántos metros de valla necesitan para toda la urbanización?

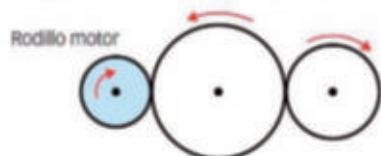
$$5 \cdot 15 \text{ m} + 5 \cdot 20 \text{ m} = 175 \text{ m}$$

Necesitarán 175 m de valla.

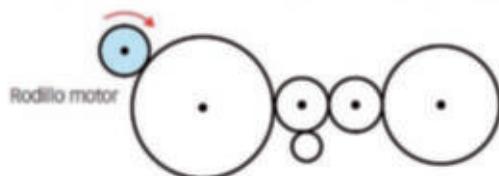


91. Existen muchas máquinas basadas en sistemas de rodillos que giran de una forma concreta.

Habitualmente uno de los rodillos es el que está conectado al motor y hace girar a los demás.



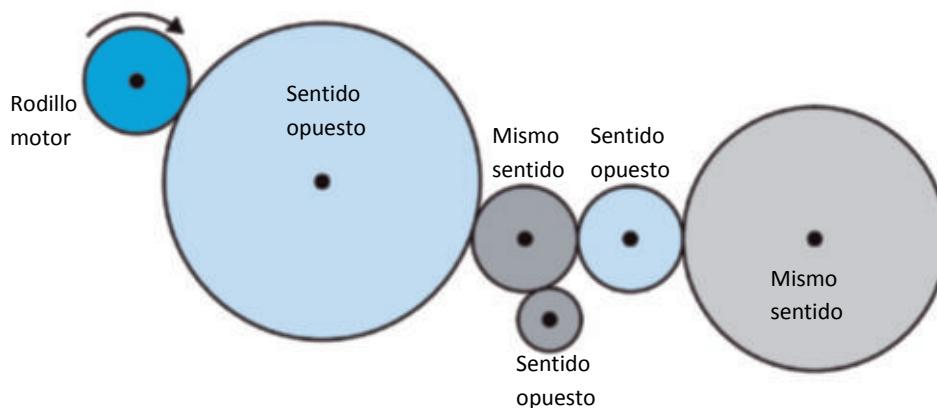
- a) ¿Qué posición relativa deben tener los rodillos dos a dos para que el sistema funcione?
- b) A continuación tienes el sistema de rodillos de una nueva máquina. ¿Qué rodillo o rodillos girarán en el mismo sentido que el rodillo motor, y cuáles girarán en sentido opuesto?



(Adaptación PISA 2003)

a) Deben ser tangentes entre sí.

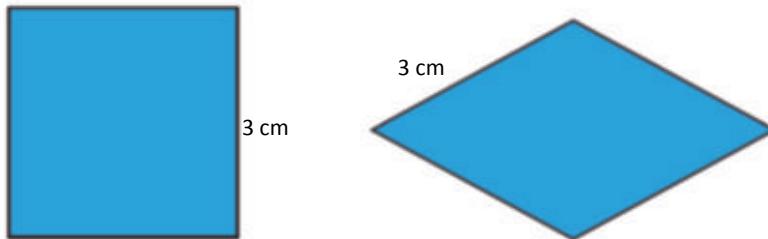
b)



Perímetros y áreas

CLAVES PARA EMPEZAR

- 1.** Dibuja un polígono de 4 lados con los lados iguales y de 3 cm. ¿Cuántos cuadriláteros hay con estas características? ¿Por qué?



Hay infinitos cuadriláteros de esa forma, porque podemos construir diferentes rombos con distintos grados entre sus lados.

- 2.** Transforma en metros cuadrados.

- | | | | |
|------------------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) 25,33 km ² | b) 1,03 hm ² | c) 37 785 mm ² | d) 103,24 cm ² |
| a) 25 330 000 m ² | b) 10 300 m ² | c) 0,037785 m ² | d) 0,010324 m ² |

VIDA COTIDIANA

Uno de los usos del láser es la obtención de medidas: mide el tiempo que tarda la señal de luz en ir y volver a un objeto.

Se quiere cambiar la tarima y el rodapié de una habitación. Con un medidor láser se miden 2,42 m de largo y 6,24 m de ancho. La habitación tiene una puerta de 1,25 m de ancho.

- ¿Cuántos metros cuadrados de tarima y cuántos metros de rodapié se necesitan?

De tarima: $2,42 \cdot 6,24 = 15,1008 \text{ m}^2$

De rodapié: $2,42 + 6,24 + 2,42 + 6,24 - 1,25 = 16,07 \text{ m}$

RESUELVE EL RETO

Si un triángulo tiene 12 cm de perímetro, ¿cuánto mide como mínimo su lado mayor?

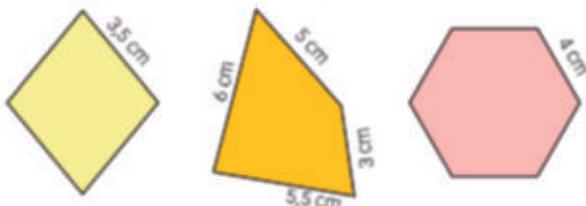
Su lado mayor más pequeño es el del triángulo equilátero, en el que todos los lados son iguales, de modo que como mínimo su lado mayor mide $12 : 3 = 4 \text{ cm}$.

¿Cuál es el área de un triángulo cuyos lados miden 12 cm, 28 cm y 16 cm?

No se puede formar este triángulo porque $12 + 16 = 28$ y para que exista un triángulo cualquier lado tiene que ser menor que la suma de los otros dos.

ACTIVIDADES

1. Halla el perímetro de estos polígonos.



Del rombo amarillo: $3,5 \cdot 4 = 14$ cm

Del cuadrilátero naranja: $5 + 3 + 5,5 + 6 = 19,5$ cm

Del hexágono rosa: $4 \cdot 6 = 24$ cm

2. Calcula el perímetro de estos polígonos.

a) Triángulo equilátero de lado 8 cm.

b) Un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 6 cm y el lado distinto, 4 cm.

$$a) 8 \cdot 3 = 24 \text{ cm}$$

$$b) 6 \cdot 2 + 4 = 16 \text{ cm}$$

3. Calcula el perímetro de un rectángulo cuyo ancho es el doble que su largo.

Si llamamos l a la longitud de su largo, entonces el ancho será $2l$. El perímetro será Perímetro: $2l + 4l = 6l$.

4. Calcula la longitud de las siguientes circunferencias.

a) Circunferencia de diámetro 12 cm.

b) Circunferencia de radio 4,6 cm.

$$a) d \cdot \pi = 12 \cdot \pi = 37,68 \text{ cm}$$

$$b) 2\pi r = 2\pi \cdot 4,6 = 28,89 \text{ cm}$$

5. Calcula el radio de una circunferencia que tiene una longitud de 51,52 cm.

$$2\pi r = 51,52 \rightarrow r = \frac{51,52}{2\pi} = 8,20 \text{ cm}$$

6. Halla la longitud de la circunferencia a la que pertenece un arco de 40° cuya longitud es 3,98 cm.

Calculamos el radio de la circunferencia usando la longitud del arco de la circunferencia:

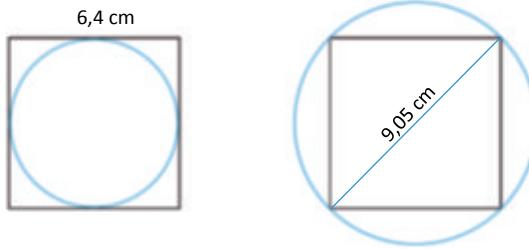
$$3,98 = \frac{2\pi r \cdot 40}{360} \rightarrow r = 5,70 \text{ cm}$$

De modo que la longitud de la circunferencia es: $2\pi \cdot 5,7 = 35,80 \text{ cm}$.

7. Considera un cuadrado de 6,4 cm de lado. Halla la longitud de la circunferencia:

a) Que se inscribe dentro de él.

b) A la que está circunscrito si su diagonal mide 9,05 cm.



- a) Si la circunferencia está inscrita el diámetro es igual al lado. De modo que la longitud de la circunferencia es:
 $6,4 \cdot \pi = 20,10 \text{ cm}$
- b) Si la circunferencia lo circunscribe, el diámetro es igual a la diagonal del cuadrado. De modo que la longitud de la circunferencia es: $9,05 \cdot \pi = 28,417 \text{ cm}$

8. Obtén el área y el perímetro del suelo de una habitación rectangular de lados 3 m y 7 m.

$$\text{Área: } 3 \cdot 7 = 21 \text{ m}^2 \quad \text{Perímetro: } 2 \cdot (3 + 7) = 20 \text{ m}$$

9. Determina el área de una finca cuadrada de lado 1 200 m.

$$\text{Área: } 1\,200 \cdot 1\,200 = 1\,440\,000 \text{ m}^2$$

10. Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de altura 48 cm y ancho la mitad de su altura.

$$\text{Área: } 48 \cdot 24 = 1\,152 \text{ cm}^2 \quad \text{Perímetro: } 2 \cdot (24 + 48) = 144 \text{ cm}$$

11. Halla el área y el perímetro de un cuadrado de perímetro 34 cm.

$$\text{Lado: } 34 : 4 = 8,5 \text{ cm} \quad \text{Área: } 8,5 \cdot 8,5 = 72,25 \text{ cm}^2 \quad \text{Perímetro: } 4 \cdot 8,5 = 34 \text{ cm}$$

12. Un terreno de forma rectangular mide 4,5 hm de largo y 3 000 dm de ancho.

a) Halla el área del terreno en metros cuadrados y en hectáreas.

b) Calcula su precio si se vende a 3,60 €/m².

a) Área: $450 \text{ m} \cdot 300 \text{ m} = 135\,000 \text{ m}^2 = 13,5 \text{ ha}$

b) Precio: $3,60 \cdot 135\,000 = 486\,000 \text{ €}$

13. Halla el área de un rombo de diagonal mayor 24 cm y diagonal menor 18 cm.

$$\text{Área: } (24 \cdot 18) : 2 = 216 \text{ cm}^2$$

14. Determina el área de un romboide de base 8 cm y altura 5 cm.

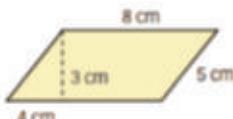
$$\text{Área: } 8 \cdot 5 = 40 \text{ cm}^2$$

15. Obtén el área de un rombo cuya diagonal menor mide 6 cm y su diagonal mayor el doble.

$$\text{Área: } (12 \cdot 6) : 2 = 36 \text{ cm}^2$$

Perímetros y áreas

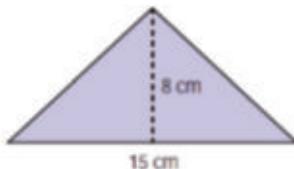
16. Calcula el área y el perímetro de esta figura.



$$\text{Área: } (8 \cdot 3) : 2 = 12 \text{ cm}^2$$

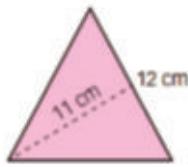
$$\text{Perímetro: } 2 \cdot 8 + 2 \cdot 5 = 26 \text{ cm}$$

17. Determina el área de este triángulo.



$$\text{Área} = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

18. Calcula el área de este triángulo isósceles.



$$\text{Área} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66 \text{ cm}^2$$

19. Calcula el área del triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales miden 12 cm.

Tomamos como base y como altura del triángulos esos dos lados iguales.

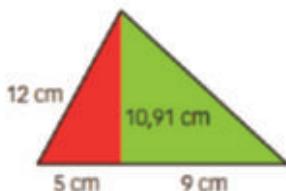
$$\text{Área: } \frac{12 \cdot 12}{2} = 72 \text{ cm}^2$$

20. Calcula el perímetro de un triángulo equilátero sabiendo que su área es $43,3 \text{ cm}^2$ y su altura $8,66 \text{ cm}$.

$$43,3 = \frac{b \cdot 8,66}{2} \rightarrow b = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro: } 30 \text{ cm}$$

21. Halla el área de este triángulo y el área de cada uno de los triángulos en los que queda dividido por su altura. Comprueba que la suma de las áreas de los dos triángulos es igual al área total del triángulo.



$$\text{Área del triángulo rojo} = \frac{5 \cdot 10,91}{2} = 27,275 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del triángulo verde} = \frac{9 \cdot 10,91}{2} = 49,095 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{14 \cdot 10,91}{2} = 76,37 \text{ cm}^2$$

$$\text{Suma del área de los triángulos rojo y verde} = 27,275 + 49,095 = 76,37 \text{ cm}^2$$

22. Calcula el área de un trapecio cuyas bases miden 7 y 11 cm, y su altura 5 cm.

$$A = \frac{7 + 11 \cdot 5}{2} = 45 \text{ cm}$$

23. Averigua la altura de un trapecio con área 760 cm², y cuyas bases miden 22 cm y 16 cm.

$$760 = \frac{22 + 16 \cdot h}{2} \rightarrow h = 40 \text{ cm}$$

24. Calcula el área de un trapecio rectángulo en el que la base mayor es doble que la menor, y la base menor mide lo mismo que su altura, que mide 6,8 cm.

La base menor mide 6,8 cm, la base mayor mide $6,8 \cdot 2 = 13,6$ cm.

$$A = \frac{13,6 + 6,8 \cdot 6,8}{2} = 69,36 \text{ cm}^2$$

25. Calcula el área de un octógono regular de 7,5 cm de lado y 9,05 cm de apotema.

El perímetro del octágono es $7,5 \cdot 8 = 60$ cm.

$$A = \frac{60 \cdot 9,05}{2} = 271,5 \text{ cm}^2$$

26. Calcula el lado de un pentágono regular de 61,5 cm² de área y 4,1 cm de apotema.

$$61,5 = \frac{P \cdot 4,1}{2} \rightarrow P = 30 \text{ cm}$$

Es un pentágono, de modo que tiene 5 lados y cada lado mide $30/5 = 6$ cm.

27. Averigua la apotema de un hexágono regular de área 93,5 cm² y lado 6 cm.

$$93,5 = \frac{6 \cdot a}{2} \rightarrow a = 31,17 \text{ cm}$$

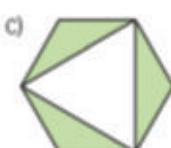
28. Si llamamos A al área del hexágono regular, indica qué expresión, en función de A , nos proporciona el área de la parte coloreada.



a) $A/2$



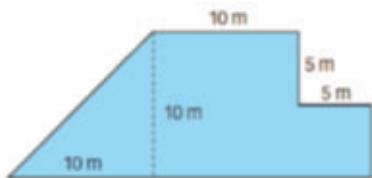
b) $4A/6 = 2A/3$



c) $A/2$

Perímetros y áreas

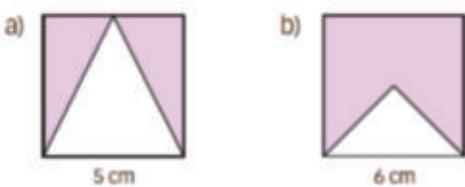
29. Obtén el área de esta figura partiendo del área de un trapecio.



Calculamos el área como el área de un trapecio rectángulo menos el área de un cuadrado.

$$\text{Área: } \frac{25 + 15}{2} \cdot 10 - 5^2 = 175 \text{ cm}^2$$

30. Halla el área de la zona coloreada de las siguientes figuras.



a) Calculamos el área morada como el área del cuadrado menos el área del triángulo blanco.

Señalar también que la zona coloreada es la mitad del área del cuadrado.

$$\text{Área: } 5^2 - \frac{5 \cdot 5}{2} = 12,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) Área: } 6^2 - \frac{6 \cdot 3}{2} = 27 \text{ cm}^2$$

31. Calcula el área de un círculo de 5,2 cm de radio.

$$A = \pi \cdot 5,2^2 = 84,91 \text{ cm}^2$$

32. Calcula el área de un sector circular perteneciente a un círculo de 7 dm de diámetro con esta amplitud:

- a) 40° b) 60° c) 150° d) 210°

$$\text{a) } A = \frac{\pi \cdot 7^2 \cdot 40}{360} = 17,10 \text{ dm}^2$$

$$\text{c) } A = \frac{\pi \cdot 7^2 \cdot 150}{360} = 64,11 \text{ dm}^2$$

$$\text{b) } A = \frac{\pi \cdot 7^2 \cdot 60}{360} = 25,64 \text{ dm}^2$$

$$\text{d) } A = \frac{\pi \cdot 7^2 \cdot 210}{360} = 89,75 \text{ dm}^2$$

33. Calcula el área de un círculo limitado por una circunferencia de 30,16 cm de longitud.

A partir de la longitud de la circunferencia se calcula el radio: $30,16 = 2\pi r \rightarrow r = 4,80 \text{ cm}$.

$$A = \pi \cdot 4,80^2 = 72,35 \text{ cm}^2$$

- 34.** Halla la longitud de la circunferencia que delimita una rotonda de $162,86 \text{ m}^2$. Despues calcula el área del círculo que limita un vehículo en su giro alrededor de ella si se sitúa en una circunferencia con 3 m más de radio que el de la propia rotonda.

Para calcular la longitud de la circunferencia se necesita el radio, que calculamos a partir del área.

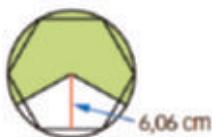
$$162,86 = \pi r^2 \rightarrow r = 7,20 \text{ m}$$

$$\text{Longitud de la circunferencia: } 2\pi r = 2\pi \cdot 7,2 = 45,22 \text{ m}$$

Con 3 metros más de radio tiene un radio de 10,2 m; por tanto, su área es:

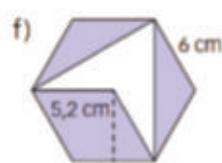
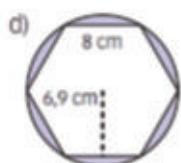
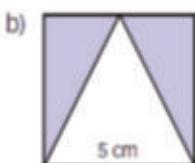
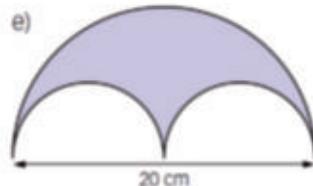
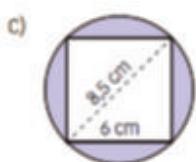
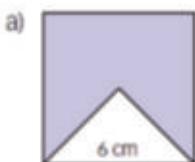
$$A = \pi \cdot 10,2^2 = 326,69 \text{ m}^2$$

- 35.** Calcula el área de la parte coloreada sabiendo que el círculo tiene 7 cm de radio.



$$A = \frac{\pi \cdot 7^2 \cdot 240^\circ}{360^\circ} = 102,57 \text{ cm}^2$$

- 36.** Calcula el área de la parte coloreada.



- a) Es el área de un cuadrado menos la de un triángulo de base el lado del cuadrado y altura la mitad del lado.

$$A = 6^2 - \frac{6 \cdot 3}{2} = 27 \text{ cm}^2$$

- b) Es el área de un cuadrado menos la de un triángulo que tiene de base el lado del cuadrado y de altura también el lado.

$$A = 5^2 - \frac{5 \cdot 5}{2} = 12,5 \text{ cm}^2$$

- c) Es el área de un círculo de diámetro 8,5 cm menos la de un cuadrado de lado 6 cm.

$$A = \pi \cdot 4,25^2 - 6^2 = 20,72 \text{ cm}^2$$

Perímetros y áreas

- d) Es el área de un círculo menos el área del hexágono inscrito en él que tiene de lado 8 cm, como el radio de un círculo es igual al lado del hexágono inscrito, el radio del círculo es 8 cm.

$$A = \pi \cdot 8^2 - \frac{6 \cdot 8 \cdot 6,9}{2} = 35,36 \text{ cm}^2$$

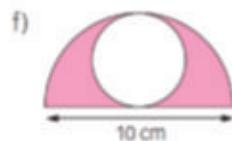
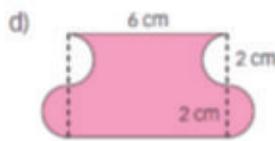
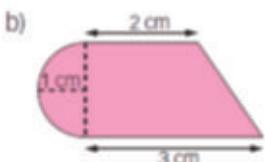
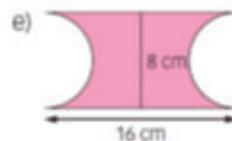
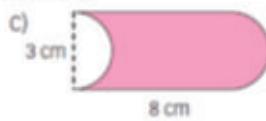
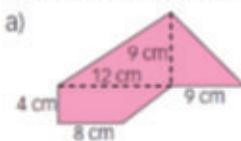
- e) Es el área de un semicírculo de diámetro 20 cm menos el área de dos semicírculos de diámetro 10 cm.

$$A = \pi \cdot 20^2 - 2 \cdot (\pi \cdot 10^2) = 628 \text{ cm}^2$$

- f) Son cuatro sextos del área de un hexágono de 6 cm de lado.

$$A = \frac{4}{6} \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot 5,2}{2} = 62,4 \text{ cm}^2$$

37. Halla el área de la parte coloreada.



- a) Es la suma de tres áreas:

- El área de un triángulo de base 12 cm y altura 9 cm: $\frac{12 \cdot 9}{2} = 54 \text{ cm}^2$

- El área de un triángulo de base 9 cm y altura 9 cm: $\frac{9 \cdot 9}{2} = 40,5 \text{ cm}^2$

- El área de un trapecio de bases 12 y 8 cm y altura 4 cm: $\frac{12 + 8 \cdot 4}{2} = 40 \text{ cm}^2$

$$A = 54 + 40,5 + 40 = 134,5 \text{ cm}^2$$

- b) Es la suma de dos áreas:

- Un trapecio de bases 3 y 2 cm y altura 2 cm: $\frac{2 + 3 \cdot 2}{2} = 5 \text{ cm}^2$

- Un semicírculo de radio 1 cm: $\pi \cdot 1^2 = 3,14 \text{ cm}^2$

$$A = 5 + 3,14 = 8,14 \text{ cm}^2$$

- c) Es el área de un rectángulo de base 8 cm y altura 3 cm (lo que se resta de un lado se suma en el otro).

$$A = 8 \cdot 3 = 24 \text{ cm}^2$$

- d) Es el área de un rectángulo de base 6 cm y altura 4 cm (lo que se resta de un lado se suma en el otro).

$$A = 6 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2$$

- e) Es el área de un rectángulo de base 16 cm y altura 8 cm menos la de un círculo de 8 cm de diámetro.

$$A = 16 \cdot 8 - \pi \cdot 4^2 = 77,76 \text{ cm}^2$$

- f) Es el área de un semicírculo de diámetro 10 cm menos el área de un círculo de diámetro 5 cm.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 2,5^2 = 19,63 \text{ cm}^2$$

ACTIVIDADES FINALES

38. Halla el perímetro de cada polígono.

- a) Un triángulo cuyos lados miden 3, 5 y 7 cm.
- b) Un rectángulo cuya base mide 10 cm y cuya altura mide 6 cm.
- c) Un rombo de lado 3 cm.
- d) Un pentágono regular de lado 4,8 cm.

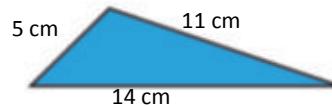
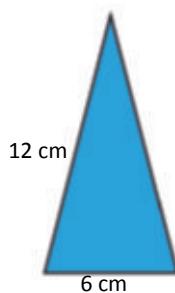
a) $3 + 5 + 7 = 15 \text{ cm}$

c) $4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}$

b) $2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 32 \text{ cm}$

d) $5 \cdot 4,8 = 24 \text{ cm}$

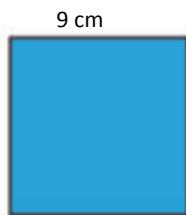
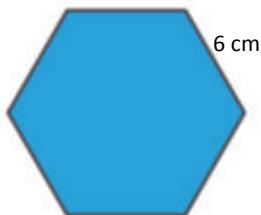
39. Dibuja un triángulo escaleno, otro isósceles y otro equilátero que tengan el mismo perímetro, 30 cm.



40. Dibuja los siguientes polígonos.

- a) Un hexágono regular de perímetro 36 cm.
- b) Un hexágono no regular de perímetro 36 cm.
- c) Un rectángulo cuya base es el doble de la altura y el perímetro es 36 cm.
- d) Un cuadrado de perímetro 36 cm.

¿Puedes decir cuál es la longitud de los lados de los polígonos que has dibujado?



41. Halla la longitud del lado de los siguientes polígonos regulares.

- a) Octógono de 32 cm de perímetro.
- b) Pentágono de 75 cm de perímetro.
- c) Heptágono de 56 cm de perímetro.
- d) Hexágono de 72 cm de perímetro.

a) $32/8 = 4 \text{ cm}$

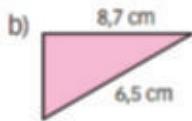
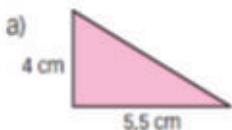
b) $75/5 = 15 \text{ cm}$

c) $56/7 = 8 \text{ cm}$

d) $72/6 = 12 \text{ cm}$

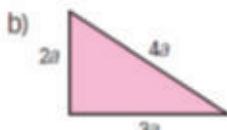
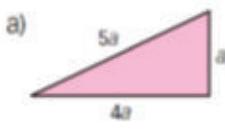
Perímetros y áreas

42. Halla el lado que falta en estos triángulos rectángulos sabiendo que su perímetro es 15 cm.



- a) $a = 15 - 4 - 5,5 = 5,5 \text{ cm}$
- b) $a = 15 - 5,7 - 6,5 = 2,8 \text{ cm}$

43. Calcula el perímetro de estos triángulos rectángulos sabiendo que $a = 2,5 \text{ cm}$.



- a) Perímetro = $10a = 25 \text{ cm}$
- b) Perímetro = $9a = 22,5 \text{ cm}$

44. Sobre una cuadrícula, dibuja cinco figuras distintas que se puedan formar con 5 cuadraditos. Estas figuras se denominan pentominós.

- a) Obtén el perímetro de cada figura.
- b) ¿Tienen todas la misma área?
 - a) Existen doce pentominós distintos. Sus perímetros son diferentes.
 - b) Todos tienen la misma área, 5 unidades cuadradas.

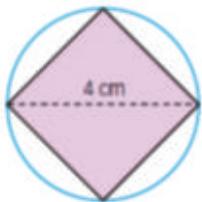
45. Si la medida del lado de un polígono regular es x , completa la siguiente tabla, escribiendo los perímetros de polígonos regulares de 3, 4, 5, ..., n lados.

N.º de lados	3	4	5	6	...	n
Perímetro	$3x$	$4x$	$5x$	$6x$		nx

46. Halla la longitud de las siguientes circunferencias.

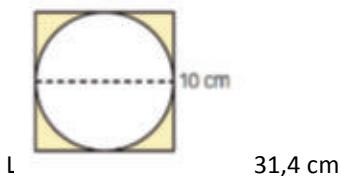
- a) Con radio 8 cm.
- b) Con diámetro 10 cm.
- c) Inscrita en un cuadrado de lado 7 cm.
 - a) $2\pi \cdot 8 = 50,24 \text{ cm}$
 - b) $\pi \cdot 10 = 31,41 \text{ cm}$
 - c) El radio es la mitad del lado $\rightarrow L = 2\pi \cdot 3,5 = 24,5 \text{ cm}$

48. La diagonal de un cuadrado inscrito en una circunferencia mide 4 cm. Calcula la longitud de la circunferencia.



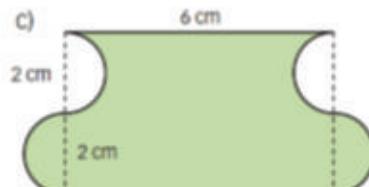
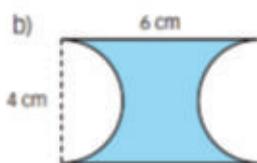
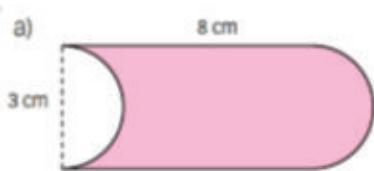
$$\text{Longitud} = \pi \cdot 4 \text{ cm} = 12,56 \text{ cm}$$

49. Dado un cuadrado de 10 cm de lado, calcula la longitud de la circunferencia inscrita al cuadrado.



$$31,4 \text{ cm}$$

50. Determina el perímetro de estas figuras.



a) Perímetro: $2 \cdot 8 + \pi \cdot 3 = 25,42 \text{ cm}$

b) Perímetro: $2 \cdot 6 + \pi \cdot 4 = 24,56 \text{ cm}$

c) Perímetro: $2 \cdot 6 + 2 \cdot \pi \cdot 2 = 24,56 \text{ cm}$

51. Halla la longitud de estos arcos sabiendo que pertenecen a una circunferencia de radio 4,8 cm.

a) Arco de 30°

c) Arco de 50°

b) Arco de 120°

d) Arco de 145°

a) $L = \frac{2\pi \cdot 4,8 \cdot 30}{360} = 2,09 \text{ cm}$

c) $L = \frac{2\pi \cdot 4,8 \cdot 50}{360} = 4,19 \text{ cm}$

b) $L = \frac{2\pi \cdot 4,8 \cdot 120}{360} = 10,05 \text{ cm}$

d) $L = \frac{2\pi \cdot 4,8 \cdot 145}{360} = 12,14 \text{ cm}$

52. Halla la longitud de un arco de 60° para cada una de estas circunferencias.

a) Circunferencia de radio 4 cm.

b) Circunferencia de diámetro 14 cm.

a) $L = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 60}{360} = 4,19 \text{ cm}$

b) $L = \frac{\pi \cdot 14 \cdot 60}{360} = 7,33 \text{ cm}$

Perímetros y áreas

53. Halla la longitud de una circunferencia sabiendo que un arco de 270° mide 628 cm.

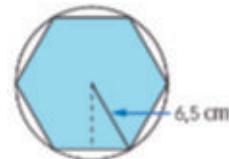
$$\text{Calculamos el radio: } 628 = \frac{2\pi \cdot r \cdot 270}{360} \rightarrow r = 133,33 \text{ cm}$$

$$\text{Longitud de la circunferencia: } 2\pi \cdot 133,33 = 837,31 \text{ cm}$$

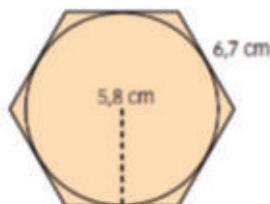
54. Considera un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6,5 cm.

- a) Halla el perímetro del polígono.
- b) Halla la longitud de la circunferencia.
- c) ¿En qué cantidad difieren las dos medidas anteriores? ¿Cuál es mayor?

- a) $6 \cdot 6,5 = 39 \text{ cm}$
- b) $2\pi \cdot 6,5 = 40,82 \text{ cm}$
- c) Es mayor la longitud de la circunferencia, difieren $40,82 - 39 = 1,82 \text{ cm}$



55. Halla el perímetro de un hexágono regular cuyo lado mide 6,7 cm y que circunscribe a una circunferencia de radio 5,8 cm y la longitud de esta circunferencia. ¿Cuál es mayor?

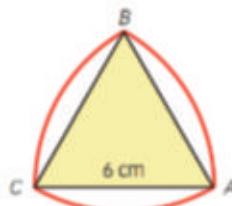


$$\text{La longitud de la circunferencia es } 2\pi \cdot 5,8 = 36,42 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro del hexágono: } 6 \cdot 6,7 = 40,2 \text{ cm}$$

Es mayor el perímetro del hexágono que la longitud de la circunferencia.

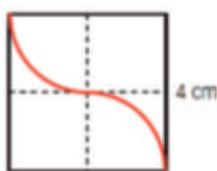
57. Calcula la longitud de los arcos trazados en el siguiente triángulo equilátero de lado 6 cm.



$$\text{Longitud de cada arco} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60}{360} = 18,84 \text{ cm}$$

$$\text{Longitud total} = 3 \cdot 18,84 = 56,52 \text{ cm}$$

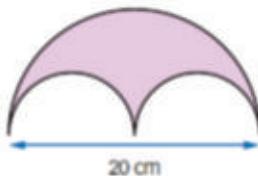
58. ¿Cuánto mide la longitud de la línea señalada en rojo?



La línea roja tiene una longitud igual a la mitad de la longitud de una circunferencia de diámetro 4 cm.

$$\text{Longitud} = (\pi \cdot 4) : 2 = 6,28 \text{ cm}$$

59. Calcula la longitud de los arcos de esta figura.



$$\text{Longitud} = (\pi \cdot 20) : 2 + \pi \cdot 10 = 62,8 \text{ cm}$$

60. A un cuadrado de diagonal 8 cm se circunscribe una circunferencia. ¿Cuánto medirá el arco de cada circunferencia correspondiente a un lado del cuadrado?

Ese arco tiene una amplitud de 90° y un radio de 4 cm.

$$\text{Longitud del arco} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 90}{360} = 12,56 \text{ cm}$$

61. Calcula la longitud del camino recorrido por una rueda de 32 cm de radio que da 100 vueltas.

El diámetro de la rueda será el doble del radio, es decir, 64 cm.

$$\text{Longitud} = 100 \cdot (\pi \cdot 64) = 20096 \text{ cm} = 200,96 \text{ m}$$

62. La longitud de un arco de circunferencia es 40 cm.

a) ¿Cuál es la longitud de un arco de igual amplitud si el radio de la circunferencia es el doble?

b) ¿Y si el radio es el triple?

a) Si el radio es el doble la longitud será el doble, es decir, 80 cm.

b) Si el radio es el triple, la longitud será el triple, es decir, 120 cm.

63. Calcula estas áreas.

a) Cuadrado cuyo lado mide 11 cm.

b) Cuadrado cuyo perímetro es 48 cm.

c) Cuadrado que circunscribe a una circunferencia de radio 9 cm.

$$\text{a)} A = 11^2 = 121 \text{ cm}^2$$

$$\text{b)} l = 48/4 = 12 \text{ cm}$$

$$A = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$$

c) El diámetro de la circunferencia es igual al lado del cuadrado.

$$A = 18^2 = 324 \text{ cm}^2$$

64. Un cuadrado tiene un área de $42,25 \text{ cm}^2$. ¿Cuánto mide su diagonal?

$$\text{El lado mide } l = \sqrt{42,25} = 6,5 \text{ cm}$$

Calculamos la diagonal usando el teorema de Pitágoras: $d^2 = 6,5^2 + 6,5^2 \rightarrow d = 9,19 \text{ cm}$

Perímetros y áreas

65. Calcula el área de estos rectángulos.

- a) Rectángulo de base 15 cm y de altura la tercera parte de la base.
- b) Rectángulo de base 12 cm y de altura la mitad de la base.
- c) Rectángulo de perímetro 56 cm y altura 8 cm.
- d) Rectángulo de perímetro 44 cm y base 16 cm.

a) La tercera parte de la base es $15/3 = 5$ cm

$$A = 15 \cdot 5 = 75 \text{ cm}^2$$

b) La mitad de la base es $12/2 = 6$ cm

$$A = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}$$

c) $56 - 2 \cdot 8 = 40 \rightarrow \text{Base} = 40/2 = 20$ cm

$$A = 20 \cdot 8 = 160 \text{ cm}^2$$

d) $44 - 16 \cdot 2 = 12 \rightarrow \text{Altura} = 12/2 = 6$ cm

$$A = 16 \cdot 6 = 96 \text{ cm}$$

66. Encuentra dos rectángulos que tengan la misma área que el cuadrado cuyo lado mide 8 cm.

El área del cuadrado es $8^2 = 64 \text{ cm}^2$. Algunas respuestas posibles serían 32 cm de largo y 2 cm de alto, 16 cm de largo y 4 cm de alto...

67. Calcula el área de los siguientes rombos.

- a) Rombo cuyas diagonales miden 20 y 14 cm.
- b) Rombo cuya diagonal menor es la cuarta parte de la mayor, y esta última mide 18 cm.
- c) Rombo cuya diagonal mayor es el triple de la menor y la suma de las dos resulta 20 cm.

a) $A = \frac{20 \cdot 14}{2} = 140 \text{ cm}^2$

b) Si la diagonal menor es la cuarta parte de la mayor, entonces mide $18/4 = 4,5$ cm

$$A = \frac{18 \cdot 4,5}{2} = 40,5 \text{ cm}^2$$

c) Tenemos que resolver la ecuación $x + 3x = 20 \rightarrow x = 5$ cm

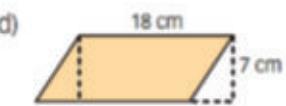
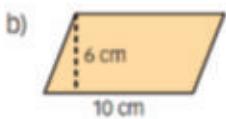
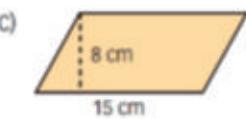
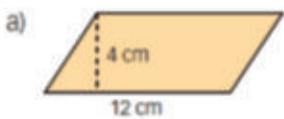
La diagonal menor mide 5 cm, y la mayor, 15 cm.

$$A = \frac{15 \cdot 5}{2} = 37,5 \text{ cm}^2$$

68. El área de un rombo es 300 cm^2 y una de sus diagonales mide 20 cm. Halla la otra diagonal.

$$300 = \frac{20 \cdot d}{2} \rightarrow d = 30 \text{ cm}$$

69. Halla el área de los siguientes romboídes.



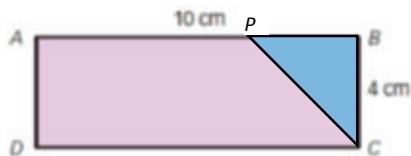
a) $A = 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^2$

b) $A = 10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2$

c) $A = 15 \cdot 8 = 120 \text{ cm}^2$

d) $A = 18 \cdot 7 = 126 \text{ cm}^2$

70. Dibuja un rectángulo $ABCD$, tal que $AB = 10 \text{ cm}$ y $BC = 4 \text{ cm}$. Señala, en el lado AB , un punto P tal que $PB = BC$, y calcula:



a) El área del rectángulo $ABCD$.

b) El área del triángulo CPB .

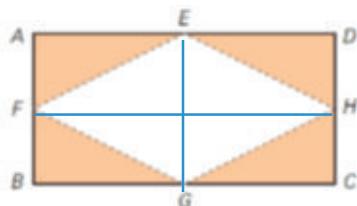
c) El área del trapecio $ADCP$.

a) $A = 10 \cdot 4 = 40 \text{ cm}^2$

b) $A = (4 \cdot 4) : 2 = 8 \text{ cm}^2$

c) $A = 40 - 8 = 32 \text{ cm}^2$

71. Un rectángulo $ABCD$, mide 8 cm de ancho y el doble de largo. Los puntos E , F , G y H son los puntos medios de los lados del rectángulo. Calcula el área de la zona coloreada.

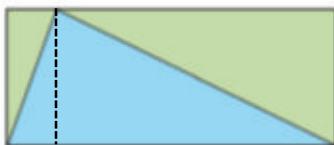


La zona coloreada es la mitad del rectángulo $ABCD$; por tanto, su área será la mitad de la de ese rectángulo.

$$A = (8 \cdot 16) : 2 = 64 \text{ cm}^2$$

Perímetros y áreas

- 72.** Razona en la siguiente figura por qué el área del triángulo azul es igual a la suma de las áreas de los triángulos verdes.



Si trazamos la altura paralela al ancho del rectángulo, observamos que el triángulo azul queda dividido en otros dos triángulos. Cada uno de ellos es igual al triángulo verde con el que comparte uno de sus lados.

El área del triángulo azul es igual a la suma de las áreas de esos dos triángulos azules en los que queda dividido, por tanto, su área es igual a la suma de las áreas de los triángulos verdes.

- 73.** Copia en tu cuaderno y completa la tabla.

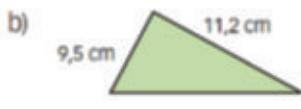
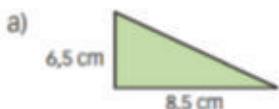
Área del triángulo	Base	Altura
	15 cm	8 cm
42 cm ²		6 cm
12,25 cm ²	7 cm	

$$1.^a \text{ fila: } A = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

$$2.^a \text{ fila: } 42 = \frac{b \cdot 6}{2} \rightarrow b = 14 \text{ cm}$$

$$3.^a \text{ fila: } 12,25 = \frac{7 \cdot h}{2} \rightarrow h = 3,5 \text{ cm}$$

- 74.** Halla el área de los siguientes triángulos rectángulos.



$$\text{a) } A = \frac{8,5 \cdot 6,5}{2} = 27,625 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) Si lo giramos, tenemos un triángulo de base 9,5 cm y altura 11,2 cm: } A = \frac{11,2 \cdot 9,5}{2} = 53,2 \text{ cm}^2$$

- 76.** Calcula la altura de un triángulo de base 132 cm y que tiene un área de 54 cm².

$$54 = \frac{132 \cdot h}{2} \rightarrow h = 0,81 \text{ cm}$$

- 77.** La base de un triángulo de área 45,15 cm² mide 10,5 cm. ¿Cuánto mide su altura?

$$45,15 = \frac{10,5 \cdot h}{2} \rightarrow h = 8,6 \text{ cm}$$

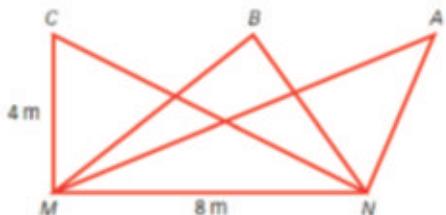
- 78.** Halla la altura de un triángulo sabiendo que su área es 37,44 cm² y su base es 9,6 cm.

$$37,44 = \frac{9,6 \cdot h}{2} \rightarrow h = 7,8 \text{ cm}$$

79. El área de un triángulo es $10,26 \text{ cm}^2$. ¿Cuánto mide su base si su altura es $3,8 \text{ cm}$?

$$10,26 = \frac{b \cdot 3,8}{2} \rightarrow b = 5,4 \text{ cm}$$

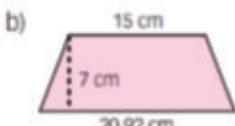
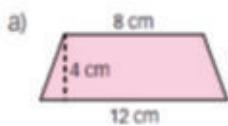
80. Calcula el área de los triángulos AMN , BMN y CMN .



Las bases y las alturas de los tres triángulos tienen las mismas longitudes, 8 m y 4 m , respectivamente; por tanto, el área de los tres triángulos es la misma.

$$A = (8 \cdot 4) : 2 = 16 \text{ m}^2$$

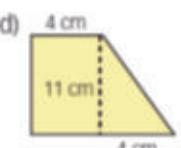
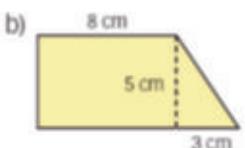
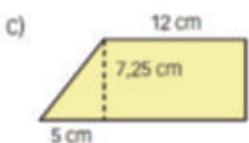
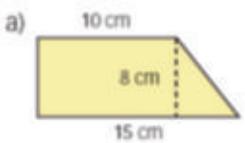
81. Halla el área de estos trapecios isósceles.



$$\text{a)} A = \frac{12 + 8 \cdot 4}{2} = 40 \text{ cm}^2$$

$$\text{b)} A = \frac{20,92 + 15 \cdot 7}{2} = 125,72 \text{ cm}^2$$

82. Halla el área de estos trapecios rectángulos.



$$\text{a)} A = \frac{15 + 10 \cdot 8}{2} = 100 \text{ cm}^2$$

$$\text{b)} A = \frac{8 + 3 + 8 + 5}{2} = 47,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{c)} A = \frac{12 + 5 + 12 + 7,25}{2} = 105,13 \text{ cm}^2$$

$$\text{d)} A = \frac{4 + 4 + 4 + 11}{2} = 66 \text{ cm}^2$$

Perímetros y áreas

83. Halla la altura de los siguientes trapecios.

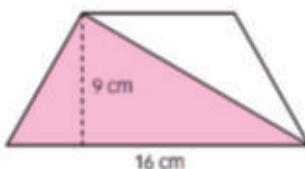
- a) Bases 11 cm y 8 cm y área 38 cm².
- b) Bases 14 cm y 10 cm y área 72 cm².
- c) Bases 25 cm y 18 cm y área 118,25 cm².

$$a) 38 = \frac{11 + 8 \cdot h}{2} \rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

$$b) 72 = \frac{14 + 10 \cdot h}{2} \rightarrow h = 6 \text{ cm}$$

$$c) 118,25 = \frac{25 + 18 \cdot h}{2} \rightarrow h = 5,5 \text{ cm}$$

84. En el trapecio de la figura, el área del triángulo coloreado es 8/13 del área total del trapecio.



- a) Halla el área del triángulo coloreado.
- b) ¿Cuál es el área del trapecio?
- c) Calcula el valor del área del triángulo que aparece sin colorear en la figura.
- d) Halla el valor de la base menor del trapecio.

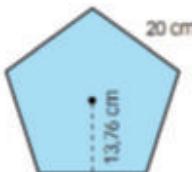
$$a) A = \frac{16 \cdot 9}{2} = 72 \text{ cm}^2$$

$$b) 72 = \frac{8}{13} \cdot A \rightarrow A = 117 \text{ cm}^2$$

$$c) A = 117 - 72 = 45 \text{ cm}^2$$

$$d) 117 = \frac{16 + b}{2} \cdot 9 \rightarrow b = 10 \text{ cm}$$

85. Calcula el área de un pentágono regular cuyo lado mide 20 cm y su apotema 13,76 cm.



$$A = \frac{5 \cdot 20 \cdot 13,76}{2} = 688 \text{ cm}^2$$

86. Obtén el área de un hexágono regular cuyo lado mide 25 cm y su apotema 21,65 cm.

$$A = \frac{6 \cdot 25 \cdot 21,65}{2} = 1623,75 \text{ cm}^2$$

87. Halla el lado de un hexágono regular de apotema 6 cm y área 124,7 cm².

$$A = \frac{6 \cdot l \cdot 6}{2} = 124,7 \text{ cm}^2 \rightarrow l = 6,93 \text{ cm}$$

88. Determina el perímetro de un heptágono regular de área 215,75 dm² y apotema 8 dm.

$$A = \frac{P \cdot 8}{2} = 215,75 \text{ dm}^2 \rightarrow P = 53,94 \text{ dm}$$

89. Halla las áreas de estos polígonos regulares.

- a) Pentágono de lado 20 cm y apotema 13,76 cm.
- b) Heptágono de 7,7 cm de lado y 8 cm de apotema.
- c) Octógono de perímetro 48 cm y apotema 7,24 cm.
- d) Eneágono de lado 4 cm y apotema 5,49 cm.
- e) Decágono de perímetro 25 cm y apotema 3,85 cm.
- f) Dodecágono de apotema 6 cm y perímetro 38,6 cm.

$$\text{a)} A = \frac{20 \cdot 5 \cdot 13,76}{2} = 688 \text{ cm}^2$$

$$\text{d)} A = \frac{9 \cdot 4 \cdot 5,49}{2} = 98,82 \text{ cm}^2$$

$$\text{b)} A = \frac{7,7 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 215,6 \text{ cm}^2$$

$$\text{e)} A = \frac{25 \cdot 3,85}{2} = 48,13 \text{ cm}^2$$

$$\text{c)} A = \frac{48 \cdot 7,24}{2} = 173,76 \text{ cm}^2$$

$$\text{f)} A = \frac{38,6 \cdot 6}{2} = 115,8 \text{ cm}^2$$

90. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla.

Radio del círculo	Área del círculo
5 cm	78,5 cm ²
7,5 cm	176,63 cm ²
1,75 cm	9,62 cm ²

91. Copia en tu cuaderno y completa la tabla.

Radio del círculo	Área del círculo
5/2 cm	$\frac{25\pi}{4} \text{ cm}^2$
4 cm	50,265 cm ²
3 cm	9 π cm ²

Perímetros y áreas

92. Halla el área del círculo en cada caso.

- a) Su diámetro es 12,8 cm.
b) La longitud de la circunferencia que lo delimita mide 28,9 cm.

a) Radio: 6,4 cm

$$A = 6,4^2\pi = 128,61 \text{ cm}^2$$

b) $28,9 = 2\pi r \rightarrow r = 4,6 \text{ cm}$

$$A = 4,6^2\pi = 66,44 \text{ cm}^2$$

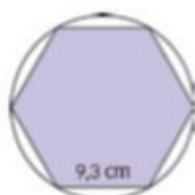
93. Calcula cuánto aumenta el área de un círculo de 4 cm de radio al aumentar su radio en 1,5 cm.

$$A_1 = 4^2\pi = 50,24 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 5,5^2\pi = 94,99 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aumenta } 94,99 - 50,24 = 44,75 \text{ cm}^2.$$

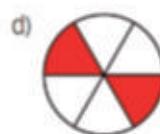
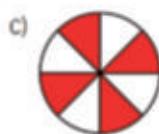
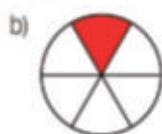
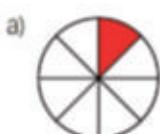
94. Halla el área del círculo tal que la circunferencia que lo delimita es la circunferencia circunscrita de un hexágono regular de 9,3 cm de lado.



El lado del hexágono inscrito coincide con el radio del hexágono y, por tanto, con el radio de la circunferencia.

$$A = 9,3^2\pi = 271,58 \text{ cm}^2$$

95. Calcula el área de las regiones coloreadas, si todas las circunferencias son de radio 2 cm.



El área del círculo de radio 2 es $2^2\pi = 12,56 \text{ cm}^2$

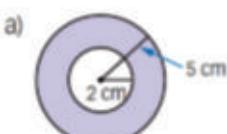
a) $12,56/8 = 1,57 \text{ cm}^2$

b) $12,56/6 = 2,09 \text{ cm}^2$

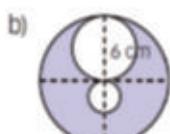
c) $12,56/2 = 6,28 \text{ cm}^2$

d) $12,56/3 = 4,19 \text{ cm}^2$

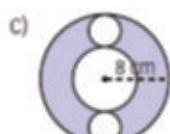
96. Calcula el área de las siguientes figuras circulares.



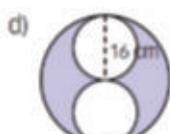
a) $5^2\pi - 2^2\pi = 65,94 \text{ cm}^2$



b) $6^2\pi - 3^2\pi - 1,5^2\pi = 77,72 \text{ cm}^2$



c) $8^2\pi - 4^2\pi - 2 \cdot 2^2\pi = 125,6 \text{ cm}^2$



d) $16^2\pi - 2 \cdot 8^2\pi = 401,92 \text{ cm}^2$

97. En un círculo de radio 6 cm, halla la amplitud, en grados, que tiene el sector circular cuya superficie es la siguiente:

- a) 8,79 cm² c) 22,61 cm²
 b) 14,76 cm² d) 45,53 cm²

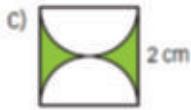
$$a) 8,79 = \frac{6^2 \cdot \pi \cdot a}{360} \rightarrow a = 28^\circ$$

$$c) 22,61 = \frac{6^2 \cdot \pi \cdot a}{360} \rightarrow a = 72^\circ$$

$$b) 14,76 = \frac{6^2 \cdot \pi \cdot a}{360} \rightarrow a = 47^\circ$$

$$d) 45,53 = \frac{6^2 \cdot \pi \cdot a}{360} \rightarrow a = 145^\circ$$

98. Halla el área de las zonas coloreadas.

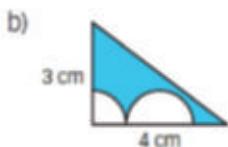
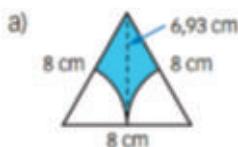


$$a) A = 10^2 - \frac{10^2 \cdot \pi}{4} = 21,5 \text{ cm}^2$$

$$b) A = 7^2 - \frac{3,5^2 \cdot \pi}{2} = 29,77 \text{ cm}^2$$

$$c) A = 2^2 - 1^2 \pi = 0,86 \text{ cm}^2$$

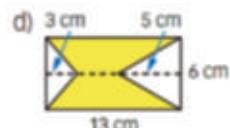
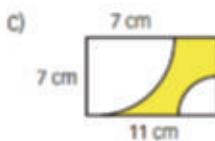
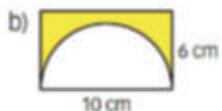
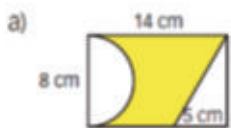
99. Obtén las áreas de las zonas coloreadas.



$$a) A = \frac{8 \cdot 6,92}{2} - 2 \frac{4^2 \cdot \pi \cdot 60}{360} = 10,93 \text{ cm}^2$$

$$b) A = \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{3}{4} 1^2 \pi = 3,65 \text{ cm}^2$$

100. Determina el área de las zonas coloreadas.



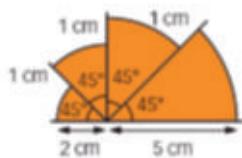
$$a) A = 14 \cdot 8 - \frac{1}{2} 4^2 \pi = 66,88 \text{ cm}^2$$

$$b) A = 10 \cdot 6 - \frac{1}{2} 5^2 \pi = 20,75 \text{ cm}^2$$

$$c) A = 11 \cdot 7 - \frac{1}{4} 7^2 \pi - \frac{1}{4} 4^2 \pi = 25,98 \text{ cm}^2$$

$$d) A = 13 \cdot 6 - \frac{6 \cdot 5}{2} - \frac{6 \cdot 3}{2} = 54 \text{ cm}^2$$

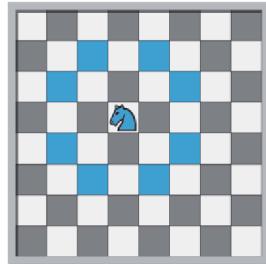
101. Halla el área de esta figura.



$$A = \frac{2^2 \pi \cdot 45}{360} + \frac{3^2 \pi \cdot 45}{360} + \frac{4^2 \pi \cdot 45}{360} + \frac{5^2 \pi \cdot 45}{360} = (2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) \frac{\pi \cdot 45}{360} = 21,20 \text{ cm}^2$$

102. Considera un tablero de ajedrez: 64 cuadrados dispuestos en ocho filas y ocho columnas, alternados en dos colores: claro y oscuro.

- a) Calcula el área de cada cuadrado del tablero sabiendo que su lado es 52 mm.
 - b) Calcula el lado del tablero y el área que ocupa.
 - c) Calcula el área en la que puede moverse el caballo en uno de sus movimientos.
 - d) Si los peones tienen una base circular de 1,5 cm de radio y el resto de piezas tienen una base circular de 1,8 cm, ¿qué área queda ocupada por las 32 piezas?
- a) $A = 52^2 = 2704 \text{ mm}^2 = 27,04 \text{ cm}^2$
- b) Lado del tablero: $52 \cdot 8 = 416 \text{ mm} = 41,6 \text{ cm}$ Área del tablero: $41,6^2 = 1730,56 \text{ cm}^2$
- c)



Es un área compuesta por 21 cuadrados. De modo que $21 \cdot 27,04 = 567,84 \text{ cm}^2$

d) Área ocupada por un peón: $1,5^2 \pi = 7,07 \text{ cm}^2$

Área ocupada por una pieza distinta de un peón: $1,8^2 \pi = 10,17 \text{ cm}^2$

Hay 8 peones y 8 piezas distintas del peón de cada color, de modo que el área ocupada por las piezas es:
 $16 \cdot 7,07 + 16 \cdot 10,17 = 275,84 \text{ cm}^2$

103. Enrique quiere poner baldosas en el suelo de su habitación y empapelar la pared. Las dimensiones de la estancia son: 4,2 m de largo, 3,6 m de ancho y 2,4 m de alto. Hay una ventana cuyas dimensiones son 1,6 m de largo por 1,8 m de alto. Además, hay que considerar la puerta, que mide 1 m de ancho por 2 m de alto.

Las baldosas son cuadradas y su lado mide 30 cm. Cada una cuesta 2,80 € y el papel para la pared cuesta 5,60 € por metro cuadrado. Calcula el coste total de la obra que quiere hacer.

SUELO:

El largo es 4,2 m = 420 cm → El largo se cubre con $420/30 = 14$ baldosas.

El ancho es 3,6 m = 360 cm → El ancho se cubre con $360/30 = 12$ baldosas.

Necesitamos $14 \cdot 12 = 168$ baldosas, cuyo coste es $168 \cdot 2,8 = 470,4$ €.

PARED:

Tenemos dos paredes de $4,2 \cdot 2,4 = 10,08 \text{ m}^2$ y dos paredes de $3,6 \cdot 2,4 = 8,64 \text{ m}^2$. Total: $18,72 \text{ m}^2$.

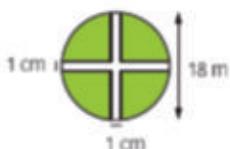
Hay que restar el área que ocupan la ventana y la puerta, puesto que no se empapelarán.

El área de la ventana es $1,6 \cdot 1,8 = 2,88 \text{ m}^2$. El área de la puerta es $1 \cdot 2 = 2 \text{ m}^2$.

El área que se va a empapelar es $18,72 - 2,88 - 2 = 13,84 \text{ m}^2$.

El coste del papel es $13,84 \cdot 5,6 = 77,50 \text{ €}$.

El coste total de la obra es $470,4 + 77,5 = 547,90 \text{ €}$.

104. Se adorna una rotonda con flores según el diseño en la zona coloreada.

a) ¿Cuál es el área adornada de flores?

b) Si en cada metro cuadrado se plantan 36 flores, ¿cuántas flores adornarán la rotonda?

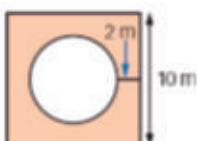
a) Al restar el área de la cruz que se forma hay que tener cuidado de no restar dos veces el cuadrado de en medio de 1 cm por 1 cm.

$$A = 9^2\pi - 18 \cdot 1 - (18 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 219,34 \text{ cm}^2$$

b) $36 \cdot 219,34 = 7896,24$ flores

105. Alrededor de una fuente circular se pavimenta una zona cuadrada como se ve en la figura.

Calcula el coste si el metro cuadrado que se pavimenta se cobra a 3 €.



El círculo tiene un radio de 3, de modo que el área que se pavimenta es $10^2 - 3^2\pi = 71,74 \text{ m}^2$.

El coste de pavimentar es $3 \cdot 71,74 = 215,22 \text{ €}$.

106. Un atleta entrena diariamente en el circuito de la figura. ¿Qué distancia recorre cada día si da 10 vueltas en su entrenamiento?

Los lados de la pista forman entre los dos la longitud de una circunferencia de diámetro 28 m. Esta longitud es $28 \cdot \pi = 87,92 \text{ m}$.

De modo que la longitud de la pista es $87,92 + 2 \cdot 120 = 327,92 \text{ m}$.

Si da 10 vueltas: $10 \cdot 327,92 = 3279,2 \text{ m} = 3,2792 \text{ km}$.

Perímetros y áreas

107. Se tienen dos manteles, uno cuadrado de 1,6 m de lado, y otro circular de 1,8 m de diámetro. ¿Cuál de los dos se debe extender sobre una mesa circular de 70 cm de radio si se desea que sobresalga lo menos posible?

La superficie de la mesa con 70 cm = 0,7 m de radio es $0,7^2\pi = 1,54 \text{ m}^2$.

La superficie que cubre el mantel cuadrado es $1,6^2 = 2,56 \text{ m}^2$.

La superficie que cubre el mantel circular de 1,8 m de diámetro, es decir 0,9 m de radio, es $0,9^2\pi = 2,54 \text{ m}^2$.

Sobra menos superficie si se usa el mantel circular.

108. Héctor ha comprado un bajoplato de 17 cm de radio. Si sus platos tienen un área de 615,75 cm², ¿cuál es el área del bajoplato no cubierta por el plato?

El área del bajoplato es $17^2\pi = 907,46 \text{ cm}^2$.

El área que no se cubre es $907,46 - 615,75 = 291,71 \text{ cm}^2$.

109. ¿Cuánto costará cubrir de plástico un invernadero en forma de rombo con diagonales de 68 m y 54 m, si cada metro cuadrado cuesta 30 €?

El área del invernadero es $\frac{68 \cdot 54}{2} = 1836 \text{ m}^2$

Como el metro cuadrado cuesta 30 €, costará cubrirlo $30 \cdot 1836 = 55\,080 \text{ €}$.

110. Se plantan árboles cada 4 m en el perímetro de los jardines de una ciudad. Calcula cuántos árboles se han plantado sabiendo que la ciudad dispone de estos jardines: dos cuadrados de 256 m² y 400 m², y uno rectangular de 30 m de largo y 24 m de ancho.

Veamos cuál es el perímetro de cada jardín, teniendo en cuenta que $A = l^2$:

Jardín 1: $l = \sqrt{256} = 16 \text{ m}$, por tanto, un perímetro de $4 \cdot 16 = 64 \text{ m}$. En este se plantarán $64/4 = 16$ árboles.

Jardín 2: $l = \sqrt{400} = 20 \text{ m}$, por tanto, un perímetro de $4 \cdot 20 = 80 \text{ m}$. Se plantarán $80/4 = 20$ árboles.

Finalmente, el perímetro del jardín rectangular es de $2 \cdot 30 + 2 \cdot 24 = 108 \text{ m}$. Se plantarán $108/4 = 27$ árboles.

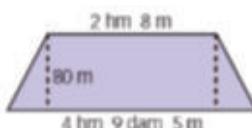
Se plantan en total $16 + 20 + 27 = 63$ árboles.

111. María circula en bicicleta de su casa al trabajo. ¿Qué distancia recorre en su viaje de ida si el radio de las ruedas mide 35 cm y las ruedas giran un total de 1200 vueltas cada una?

La longitud en una vuelta es $2\pi \cdot 35 = 219,8 \text{ cm}$.

Como da 1200 vueltas, recorre $1200 \cdot 219,8 = 263\,760 \text{ cm} = 2,6376 \text{ m} = 2,6376 \text{ km}$.

112. Un campo de golf con forma de trapecio se va a sembrar de césped. ¿Cuánto costará si sembrar una hectárea vale 20 €?



Expresamos todas las medidas en metros. De modo que tenemos un trapecio de bases: 2 hm 8 m = 208 m y 4 hm 9 dam 5 m = 495 m, y altura 80 m.

$$A = \frac{208 + 495 \cdot 80}{2} = 28\,120 \text{ m}^2 = 2,8120 \text{ hm}^2 = 2,8120 \text{ ha}$$

El precio que costará sembrarlo es $2,8120 \cdot 20 = 56,24 \text{ €}$.

113. Cuántas vueltas dan las ruedas de un coche si su radio es 32 cm y han recorrido 3 kilómetros?

En una vuelta recorren $2\pi \cdot 32 = 200,96$ cm.

$3 \text{ km} = 300\,000 \text{ cm}$

De modo que al recorrer 3 km, las vueltas que dan son $300\,000 / 200,96 = 1\,492,86$ vueltas

114. La luz que emite un faro forma un ángulo de 150° .

- a) A 6 millas marinas del faro, ¿cuál es la longitud del arco que describe? (1 milla marina = 1852 m)
- b) ¿Cuál es el área de la sección en la que un barco vería la luz suponiendo que el alcance máximo de iluminación fuera de 7 millas?

$$\text{a)} L = \frac{2\pi \cdot 6 \cdot 1852}{360} \cdot 150 = 29\,076,4 \text{ m}$$

b) Si alcanza el máximo, el área que cubre es la de un sector circular de 7 millas de radio.

$$A = \frac{7^2 \pi \cdot 150}{360} = 64,11$$

El barco vería una sección de 64,11 millas cuadradas.

115. Las agujas de un reloj miden 15 y 10 cm, respectivamente.

- a) ¿Qué arco recorre el extremo de la aguja horaria desde las 6 h a las 7 h?
- b) ¿Y la minutera?
- c) ¿Qué arco recorren las agujas horaria y minutera desde las 6 h a las 8 h?

a) $360^\circ : 12 = 30^\circ$ Recorre un arco de 30° .

$$\text{Longitud} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 10}{360} \cdot 30 = 5,23 \text{ cm.}$$

b) Recorre un arco de 360° .

$$\text{Longitud} = 2 \cdot \pi \cdot 15 = 94,2 \text{ cm.}$$

c) El arco recorrido mide el doble de los arcos de los apartados anteriores.

Horaria: 10,46 cm. Minutera: 188,4 cm.

116. Considerando el reloj anterior y sus dos agujas horaria y minutera.

- a) ¿Qué arco recorre el extremo de la aguja horaria desde las 6 h a las 6 h 18 min? ¿Y la aguja minutera?

- b) ¿Qué ángulo recorre el extremo de la aguja horaria cada hora? ¿Y la minutera?

a) Calculamos el arco recorrido por cada aguja en 60 minutos y lo multiplicamos por 18.

$$\text{Horaria: } (5,23 : 60) \cdot 18 = 1,57 \text{ cm} \quad \text{Minutera: } (94,2 : 60) \cdot 18 = 28,26 \text{ cm}$$

b) La horaria: $360^\circ : 12 = 30^\circ$. La minutera: una vuelta completa, 360° .

DEBES SABES HACER

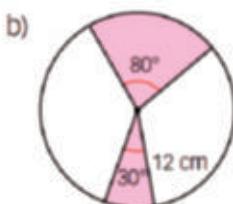
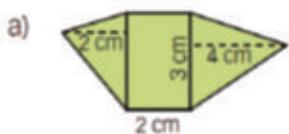
- 1.** Calcula la longitud de una circunferencia de 3,5 cm de radio.

$$\text{Longitud} = 2 \cdot \pi \cdot 3,5 = 21,98 \text{ cm}$$

- 2.** Un lado de un rectángulo mide 1 cm y su perímetro 8 cm. ¿Cuánto mide el otro lado?

$$P = 8 \text{ cm} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot l \rightarrow l = 3 \text{ cm}$$

- 3.** Calcula el área de las zonas coloreadas.



a) Se trata de un triángulo de altura 2 cm y base 3 cm, un rectángulo de base 2 cm y altura 3 cm y un triángulo de base 3 cm y altura 4 cm.

$$A = \frac{2 \cdot 3}{2} + 2 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 4}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

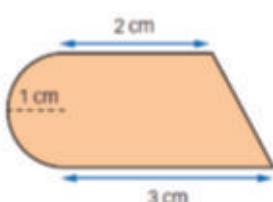
b) Es el área de dos sectores circulares de una circunferencia de radio 12. Calcular el área de un sector de 30° y de uno de 80° es como calcular el área de un sector de 110°.

$$A = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 110}{360} = 138,16 \text{ cm}^2$$

- 4.** Si un lado de un rectángulo mide 12 m y su área es 54 m², ¿cuánto mide su otro lado?

$$A = 54 \text{ m}^2 = 12 \cdot l \rightarrow l = 4,5 \text{ m}$$

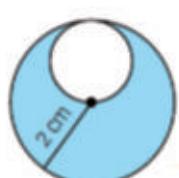
- 5.** Calcula el área de esta figura.



La descomponemos en un trapecio y una semicircunferencia.

$$A = \frac{(3 - 2) \cdot 2}{2} + \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 6,57 \text{ cm}^2$$

- 6.** Determina el área de la zona coloreada.

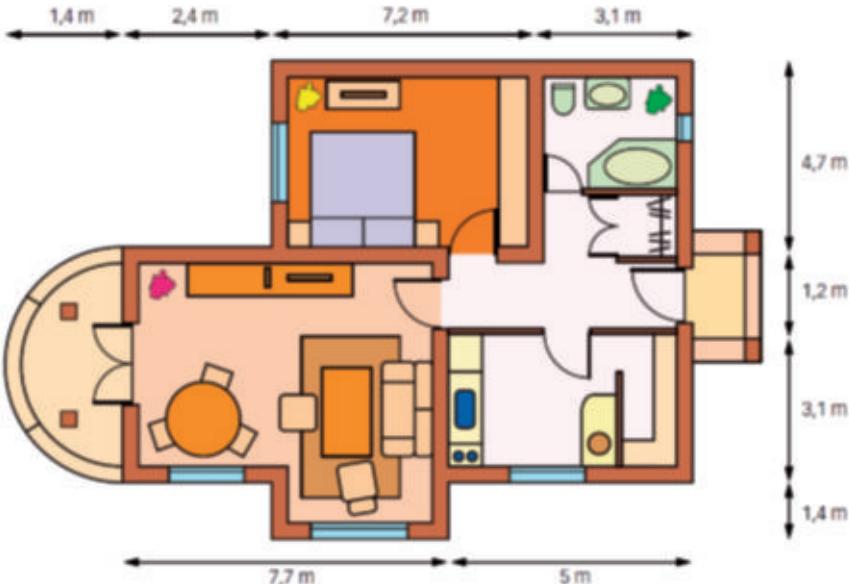


Al área del círculo mayor le restamos el área del círculo de color blanco.

$$A = \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 9,42 \text{ cm}^2$$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

117. Juan tiene una empresa de reformas y tiene que elaborar un presupuesto para cambiar los suelos y pintar las paredes de algunas habitaciones. Los propietarios del piso le han dado un plano de la casa y Juan ha hecho las siguientes anotaciones sobre el plano.



Realiza los cálculos que tiene que hacer Juan para presupuestar los siguientes trabajos.

- Cambio de la tarima del salón y el dormitorio.
- Cambio del suelo del mirador, que es de baldosas.
- Pintura del salón.

suelo tarima → 15,30 €/m ²
suelo baldosa → 12,50 €/m ²
pintura pared → 6,25 €/m ²
pintura techos → 15,30 €/m ²
m ² de ventanas y puertas en salón → 3,5 m ²
altura salón → 2,9 m

- a) El dormitorio es un rectángulo de base 7,2 m y largo 4,7 m. Su área es 34,78 m².

El salón se compone de dos rectángulos, uno de base 7,7 m y largo 3,1 + 1,2 = 4,3 m y otro de largo 1,4 m y base 7,7 - 2,4 = 5,3 m. De modo que el área es $7,7 \cdot 4,3 + 1,4 \cdot 5,3 = 33,11 + 7,42 = 40,53$ m².

Se necesita tarima para $34,78 + 40,53 = 75,31$ m². → $15,3 \cdot 75,31 = 1152,24$ €.

- b) El mirador es un semicírculo de diámetro 4,3, de modo que su área será $\frac{1}{2} \cdot 2,15^2 \cdot \pi = 7,26$ m².

El coste de suelo de baldosa para esta área es de $12,5 \cdot 7,26 = 90,75$ €.

- c) El techo del salón tendría igual área que el suelo. Por tanto la pintura para el techo sería $15,30 \cdot 40,53 = 620,11$ €.

Las paredes son:

$$7,7 \cdot 2,9 = 22,33 \text{ m}^2$$

$$(1,2 + 3,1 + 1,4) \cdot 2,9 = 16,53 \text{ m}^2$$

$$(7,7 - 2,4) \cdot 2,9 = 15,37 \text{ m}^2$$

$$1,4 \cdot 2,9 = 4,06 \text{ m}^2$$

$$2,4 \cdot 2,9 = 6,96 \text{ m}^2$$

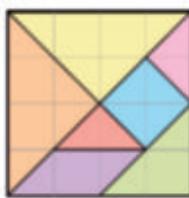
$$(3,1 + 1,2) \cdot 2,9 = 12,47$$

En total hay que pintar 74,22 m². → $6,25 \cdot 74,22 = 463,88$.

El presupuesto de pintar el salón es $620,11 + 463,88 = 1\,083,99$ €.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

- 118.** Calcula el área de cada una de las piezas del tangram chino.



Triángulos mayores: 4 cuadraditos. Triángulo mediano: 2 cuadraditos. Triángulos pequeños: 1 cuadradito.

Romboide: 2 cuadraditos. Cuadrado: 2 cuadraditos.

- 119.** Averigua cuánto varía el área del círculo si:

- a) Aumenta más el radio a su doble.
- b) Aumenta más el radio a su triple.
- c) Disminuimos el radio a la mitad.
- d) Disminuimos el radio a la tercera parte.

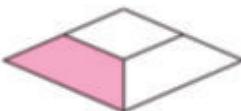
a) $A = (2r)^2\pi = 4r^2\pi \rightarrow$ Se cuadriplica.

c) $A = \left(\frac{1}{2}r\right)^2\pi = \frac{1}{4}r^2\pi \rightarrow$ Se divide por 4.

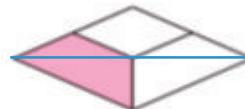
b) $A = (3r)^2\pi = 9r^2\pi \rightarrow$ Es 9 veces mayor.

d) $A = \left(\frac{1}{3}r\right)^2\pi = \frac{1}{9}r^2\pi \rightarrow$ Se divide por 9.

- 120.** ¿Qué fracción del área del rombo ocupa la zona coloreada?



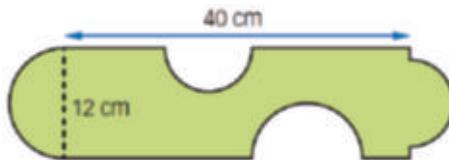
Es $\frac{1}{4}$ del área del rombo grande más el área de otro triángulo que se forma.



Este triángulo es la mitad del rombo pequeño y, a su vez, el rombo pequeño es $\frac{1}{4}$ del rombo grande. De modo que representa $\frac{1}{8}$ del rombo grande.

Así, tenemos que el área coloreada es $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ del área del rombo grande.

121. Calcula el área de esta figura.



Los huecos semicirculares pueden rellenarse con los dos semicírculos formándose así un rectángulo.

$$A = 40 \cdot 12 = 480 \text{ cm}^2.$$

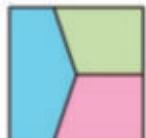
122. ¿Podrías encontrar diferentes paralelogramos, con la misma base, que tengan la misma área, pero diferentes perímetros?

Sí, por ejemplo:

Un rectángulo de base 10 y altura 2 y un romboide de base 10 y altura 2.

Tienen igual área, pero perímetro diferente.

123. Dividimos un cuadrado de lado 1 en tres partes de igual área, uniendo el centro del cuadrado con tres lados, como indica la figura.



Se forman así dos trapecios iguales y un pentágono.

Calcula la longitud de la base mayor de cada trapecio.

La base mayor de los dos trapecios es igual.

El área del trapecio es $\frac{l^2}{3}$ según indica el enunciado, por otro lado, la base menor y la altura del trapecio son $\frac{l}{2}$.

El lado del cuadrado es 1, de modo que el área sería $\frac{1}{3}$ y los lados indicados $\frac{1}{2}$.

$$A = \frac{1}{3} = \frac{\left|B - \frac{1}{2}\right| \cdot \frac{1}{2}}{2} \rightarrow B = \frac{5}{6}$$

PRUEBAS PISA

- 124.** La estación Mir permaneció en órbita 15 años y durante ese tiempo dio alrededor de 86 500 vueltas a la Tierra.

La permanencia más larga de un astronauta en la Mir fue de 680 días.



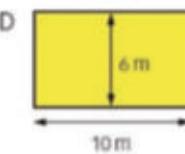
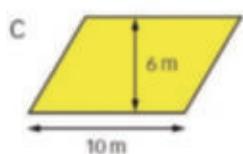
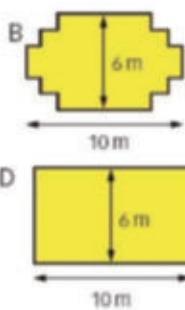
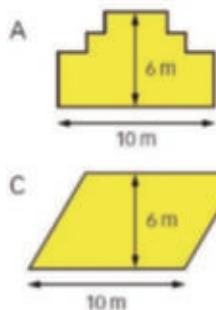
La Mir daba vueltas alrededor de la Tierra a una altura aproximada de 400 kilómetros. El diámetro de la Tierra mide aproximadamente 12 700 km y su circunferencia es de alrededor de 40 000 km ($\pi \times 12\,700$).

Calcula aproximadamente la distancia total recorrida por la Mir durante sus 86 500 vueltas mientras estuvo en órbita. Redondea el resultado a las decenas de millón.

(Prueba PISA 2003)

Si una circunferencia son aproximadamente 40 000 km y ha dado 86 500 vueltas, ha recorrido $40\,000 \cdot 86\,500 = 3\,460\,000\,000$ km (redondeado ya a las decenas de millón).

- 125.** Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Está considerando los siguientes diseños para el parterre.



Contesta si, para cada diseño, se puede o no se puede construir el parterre con los 32 metros de madera.

(Prueba PISA 2003)

Diseño D \rightarrow Perímetro = 32 m \rightarrow Sí se puede construir.

Diseño C \rightarrow Perímetro > 32 m porque el lado desconocido es mayor que la altura (6 m) \rightarrow No se puede construir.

Diseños A y B \rightarrow Perímetro = 32 m \rightarrow Sí se puede construir.

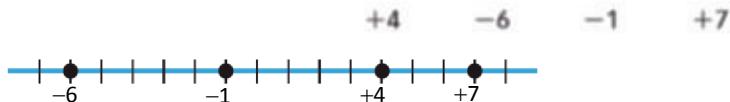
Funciones y gráficas

CLAVES PARA EMPEZAR

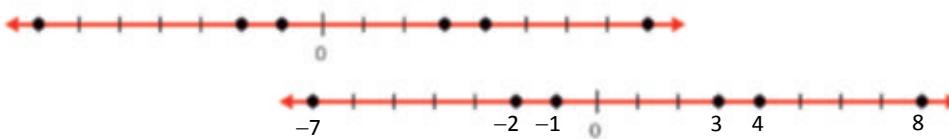
1. Expresa en lenguaje algebraico.

- a) La mitad de un número
 - b) La suma de dos números
 - c) El cuadrado de un número, más 4
- a) $x/2$ b) $x + y$ c) $x^2 + 4$

2. Representa los siguientes números en una recta.



3. Identifica los números que están representados.



VIDA COTIDIANA

Hay planetas como Venus o Mercurio cuya temperatura media es mayor de 150 °C.

En nuestro planeta, debido a los efectos de la contaminación, la temperatura se ha incrementado en unos 0,6 °C durante el último siglo.

- ¿En qué año del siglo pasado se produjo la temperatura más baja?
- ¿Cuánto descendieron las temperaturas en el año 1940?

La temperatura más baja se produjo en 1918.

En 1940 las temperaturas bajaron 0,2 °C.

RESUELVE EL RETO

Un punto tiene la primera coordenada positiva y la segunda no es negativa, pero no está en el primer cuadrante. ¿Cómo puede ser?

Porque la segunda coordenada es 0.

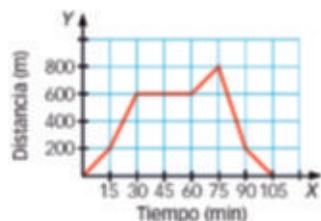
Funciones y gráficas

Completa la tabla.

x	y
1	3
2	3
3	4
4	6
5	5
6	4
7	5
8	4
9	—

Se completa con un 5. La tabla relaciona el número con el número de letras que tiene su nombre.

¿Cuánto tiempo estuvo Julia sentada en el parque?



Julia estuvo media hora sentada en el parque.

ACTIVIDADES

1. Representa los siguientes números en una recta numérica horizontal:

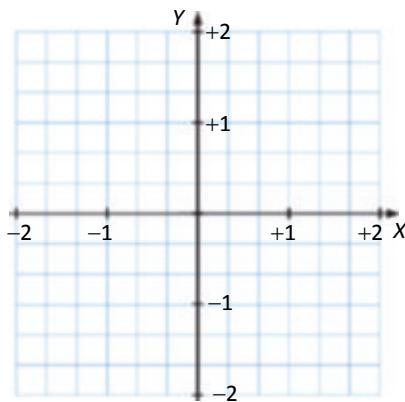
4 -2 0 -1 -3 7



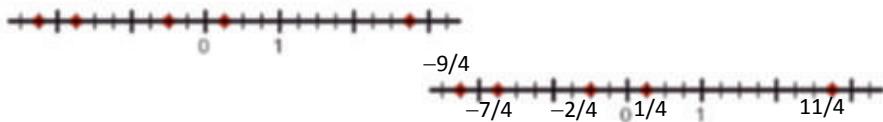
2. Representa los siguientes números en una recta numérica vertical: 3, -2, -4, 1, 0, 6.



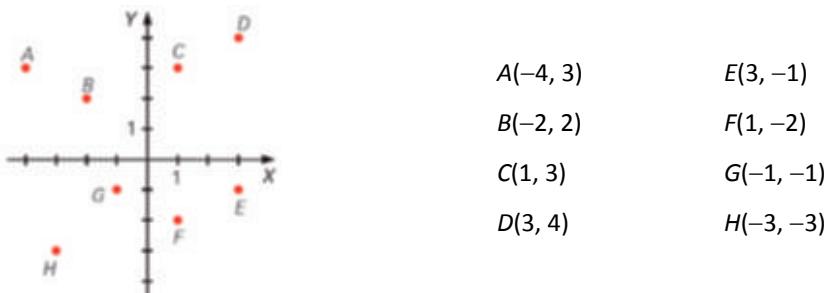
3. En una hoja cuadriculada, dibuja un sistema de coordenadas en el que 3 cuadrados sean una unidad.



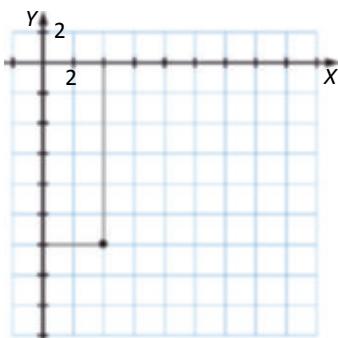
4. Indica qué números están representados.



5. Escribe las coordenadas de los puntos representados sobre este sistema de coordenadas.



6. Un punto tiene abscisa 4 y ordenada -12 . Represéntalo y señala en qué cuadrante está.

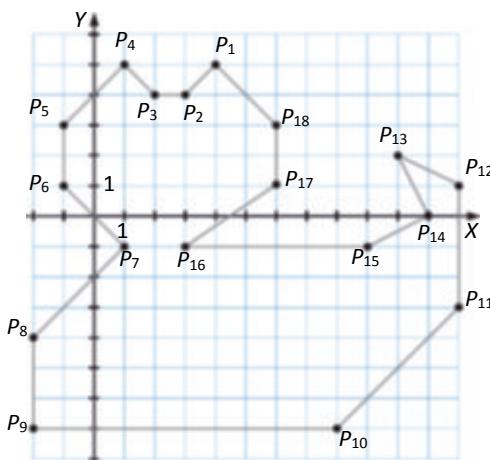


Está en el cuarto cuadrante.

Funciones y gráficas

7. Representa los puntos y únelos ordenadamente.

- | | | |
|--------------|------------------|-----------------|
| $P_1(4, 5)$ | $P_7(1, -1)$ | $P_{13}(10, 2)$ |
| $P_2(3, 4)$ | $P_8(-2, -4)$ | $P_{14}(11, 0)$ |
| $P_3(2, 4)$ | $P_9(-2, -7)$ | $P_{15}(9, -1)$ |
| $P_4(1, 5)$ | $P_{10}(8, -7)$ | $P_{16}(3, -1)$ |
| $P_5(-1, 3)$ | $P_{11}(12, -3)$ | $P_{17}(6, 1)$ |
| $P_6(-1, 1)$ | $P_{12}(12, 1)$ | $P_{18}(6, 3)$ |

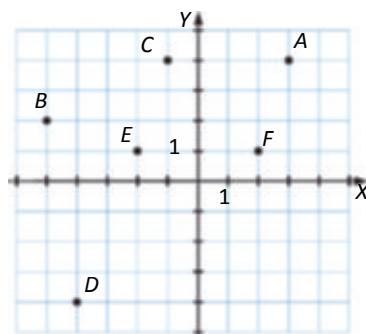


8. Representa estos puntos e indica en qué cuadrante se encuentran: $A(3, 4)$, $B(-5, 2)$, $C(-1, 4)$, $D(-4, -4)$, $E(-2, 1)$ y $F(2, 1)$.

A, F se encuentran en el primer cuadrante.

B, C, E se encuentran en el segundo cuadrante.

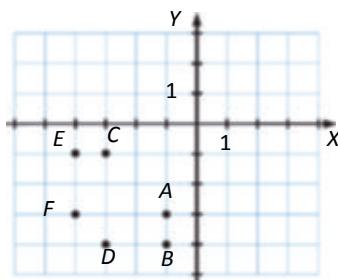
D se encuentra en el tercer cuadrante



9. Escribe todas las parejas posibles combinando los números -1 , -3 y -4 . Despues represéntalos en un sistema de coordenadas. ¿Qué tienen en común todos esos puntos?

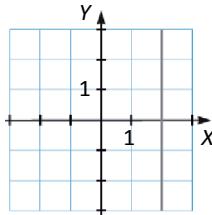
$A(-1, -3)$ $B(-1, -4)$ $C(-3, -1)$ $D(-3, -4)$ $E(-4, -1)$ $F(-4, -3)$

Como ambas coordenadas son negativas, todos los puntos están en el tercer cuadrante.

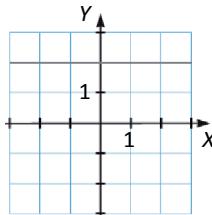


10. Contesta estas preguntas.

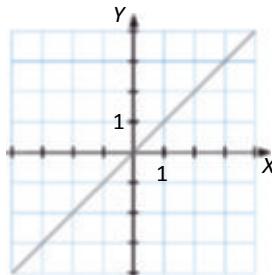
- ¿Dónde se sitúan todos los puntos del plano cuya abscisa es 2?
- ¿Dónde se sitúan todos los puntos del plano cuya ordenada es 2?
- ¿Dónde se sitúan los puntos del plano que tienen iguales su abscisa y su ordenada?
- Son todos los puntos tales que su abscisa (primera coordenada) es 2, es decir, $(2, -15), (2, -1), (2, 0), (2, 7), (2, 31), \dots$ Es una recta vertical.



- Son todos los puntos tales que su ordenada (segunda coordenada) es 2, es decir, $(-7, 2), (0, 2), (5, 2), (21, 2), \dots$ Es una recta horizontal.



- Son todos los puntos tales que su abscisa y ordenada coinciden, es decir, los puntos $(-5, -5), (-2, -2), (0, 0), (4, 4), (12, 12), \dots \rightarrow$ Es una recta inclinada.



11. Indica el punto en el que estamos al realizar, partiendo del origen, estos desplazamientos:

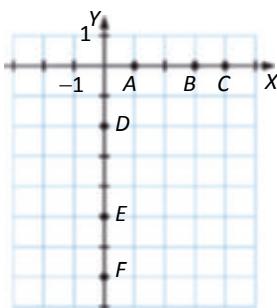
- 3 unidades a la derecha.
- 5 unidades hacia abajo.
- 4 unidades a la izquierda.
- 2 unidades hacia arriba.
- $(3, 0)$
- $(0, -5)$
- $(-4, 0)$
- $(0, 2)$

Funciones y gráficas

12. Escribe tres puntos situados en el eje X de abscisa positiva, y otros tres en el eje Y de ordenada negativa. Represéntalos en unos ejes de coordenadas.

En el eje X de abscisa positiva: $A(1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(4, 0)$.

En el eje Y de ordenada negativa: $D(0, -2)$, $E(0, -5)$, $F(0, -7)$.



13. ¿Existe algún punto que siendo del eje X pertenezca también al eje Y? ¿Y al revés?

El origen de coordenadas $(0, 0)$ pertenece a ambos ejes.

14. Indica cuáles de las siguientes relaciones son funciones:

a) Número de barras de pan que se compran y cantidad de dinero que tenemos que pagar por ellas.

b) Número de monedas de 2 € y cantidad de dinero que representan.

c) Metros cuadrados de una vivienda y número de personas que viven en ella.

a) La magnitud *número de barras de pan* toma los valores 1, 2, 3, ...; es la variable independiente.

La magnitud *cantidad de dinero* toma valores en función de la cantidad de barras; es la variable dependiente.

A cada valor de la primera magnitud le corresponde un único valor de la segunda, por tanto, la relación es una función.

b) La magnitud *número de monedas de 2 €* toma los valores 1, 2, 3, ...; es la variable independiente.

La magnitud *cantidad de dinero que representa* toma valores en función de la cantidad de monedas:

1 moneda = 2 €, 2 monedas = 4 €, 3 monedas = 6 €, ...; es la variable dependiente.

A cada valor de la primera magnitud le corresponde un único valor de la segunda, por tanto, la relación es una función.

c) La magnitud *metros cuadrados de una vivienda* toma los valores 30, 35, 75, ...; es la variable independiente.

La magnitud *número de personas que viven en ella* podría tomar valores en función de la primera, pues cuantos más metros cuadrados se tienen más personas pueden vivir en ellas, pero no es una cantidad fija para un cierto número de metros. Por tanto, la relación no es una función.

15. Considera la relación que asigna a cada número su opuesto. Razona si es una función y escribe algunos pares de valores.

La magnitud *número* toma los valores $-25, -2, 0, 1, 7, 40, \dots$; es la variable independiente.

La magnitud *número opuesto* toma valores en función del número: opuesto $(-25) = 25$, opuesto $(-1) = 1$, opuesto $(0) = 0$, opuesto $(7) = -7$.

A cada valor de la primera magnitud le corresponde un único valor de la segunda, por tanto, la relación es una función.

- 16.** Determina si es una función la relación que hay entre el precio de un producto y el número de monedas y billetes necesarios para pagarlo. Pon algunos ejemplos que acompañen tu respuesta.

No es una función, ya que un mismo precio puede pagarse de distintas formas. Por ejemplo:

15 € pueden pagarse con:

- 1 billete de 10 € y 1 billete de 5 €
- 3 billetes de 5 €
- 1 billete de 10 € y 5 monedas de 1 €
- 2 billetes de 5 €, 2 monedas de 2 € y 1 moneda de 1 €
- ...

50,25 € pueden pagarse con:

- 1 billete de 50 €, 1 moneda de 20 céntimos y 1 moneda de 5 céntimos.
- 2 billetes de 20 €, 1 billete de 10 €, 2 monedas de 10 céntimos y 5 monedas de 1 céntimo.
- ...

- 17.** En esta tabla se muestran las temperaturas máximas alcanzadas en una ciudad durante la primera semana de julio.

Día	1	2	3	4	5	6	7
Temperatura (°C)	23	25	28	32	29	30	31

La relación que asigna a cada día la temperatura máxima alcanzada, ¿es una función?

Sí es una función, puesto que a cada día, le corresponde una única temperatura.

- 18.** Construye la tabla de valores de la función que hace corresponder a cada número su doble más 5 unidades.

Variable independiente (x): número.

Variable dependiente (y): su doble más 5 = $2x + 5$

x	-3	-1	0	2
y	$2 \cdot (-3) + 5 = -1$	$2 \cdot (-1) + 5 = 3$	$2 \cdot 0 + 5 = 5$	$2 \cdot 2 + 5 = 9$

- 19.** Determina si estas relaciones son funciones y haz una tabla con algunos de sus valores.

a) El perímetro de un triángulo equilátero y su lado.

b) El lado de un cuadrado y su perímetro.

c) El radio de un círculo y su área.

a) Sí es una función, ya que para cada valor del lado del triángulo hay un único valor del perímetro.

x : medida del lado del triángulo y : triple de la medida del lado = $3x$

x (cm)	2	5	10	12
y (cm)	$3 \cdot 2 = 6$	$3 \cdot 5 = 15$	$3 \cdot 10 = 30$	$3 \cdot 12 = 36$

b) Sí es una función, ya que para cada valor del lado del cuadrado hay un único valor del perímetro.

x : medida del lado del cuadrado y : cuatro veces la medida del lado = $4x$

x (cm)	2	5	10	12
y (cm)	$4 \cdot 2 = 8$	$4 \cdot 5 = 20$	$4 \cdot 10 = 40$	$4 \cdot 12 = 48$

Funciones y gráficas

c) Sí es una función, ya que para cada valor del radio del círculo hay un único valor del área ($A = \pi \cdot r^2$).

x: medida del radio del círculo y: área del círculo

x (cm)	2	5	10	12
y (cm)	$\pi \cdot 2^2 = 12,57$	$\pi \cdot 5^2 = 78,54$	$\pi \cdot 10^2 = 314,16$	$\pi \cdot 12^2 = 452,39$

20. Imprimir una foto vale 9 céntimos. Determina si la relación que asocia cada número de fotos impresas con su precio es una función. Determina su ecuación y construye una tabla de valores.

La magnitud *número de fotos* toma los valores 1, 2, 3...; es la variable independiente.

El *precio* es la variable dependiente, ya que dependiendo del número de fotos que imprimamos el precio será diferente.

Es una función, ya que para cada número de fotos hay un único precio.

x (fotos)	1	2	3	4
y (precio €)	$1 \cdot 0,09 = 0,09€$	$2 \cdot 0,09 = 0,18€$	$3 \cdot 0,09 = 0,27€$	$4 \cdot 0,09 = 0,36€$

21. Construye una tabla de valores para las siguientes funciones.

a) $y = x - 1$ c) $y = 3x + 2$

b) $y = 2x$ d) $y = x^2 - x$

a)

x	-1	0	1	2
y	-2	-1	0	1

c)

x	-1	0	1	2
y	-1	2	5	8

b)

x	-1	0	1	2
y	-2	0	2	4

d)

x	-2	-1	0	1
y	6	2	0	0

22. Escribe la ecuación de la función que asocia a cada número con:

- a) Su doble más 7. b) Su mitad menos 2.

a) $y = 2x + 7$

b) $y = \frac{x}{2} - 2$

23. Determina la ecuación de la función que corresponde a esta tabla de valores.

x	0	1	2	3
y	1	3	5	7

$y = 2x + 1$

24. Calcula el valor de la variable para $x = -2$, $x = 3$ y $x = 0$ en estas funciones.

a) $y = 6x - 1$ d) $y = \frac{x+5}{2}$

b) $y = x^2 + x - 2$ e) $y = (x - 1)^2$

c) $y = 2x^3 - 4x$ f) $y = \frac{3x^2 + 2}{x}$

a) $x = -2 \rightarrow y = 6 \cdot (-2) - 1 = -13$	$x = 3 \rightarrow y = 6 \cdot 3 - 1 = 17$	$x = 0 \rightarrow y = 6 \cdot 0 - 1 = -1$
b) $x = -2 \rightarrow y = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$	$x = 3 \rightarrow y = 3^2 + 3 - 2 = 10$	$x = 0 \rightarrow y = 0 + 0 - 2 = -2$
c) $x = -2 \rightarrow y = 2 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) = -8$	$x = 3 \rightarrow y = 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3 = 42$	$x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0 = 0$
d) $x = -2 \rightarrow y = \frac{2+5}{2} = \frac{3}{2}$	$x = 3 \rightarrow y = \frac{3-5}{2} = 4$	$x = 0 \rightarrow y = \frac{0-5}{2} = \frac{5}{2}$
e) $x = -2 \rightarrow y = (-2-1)^2 = 9$	$x = 3 \rightarrow y = (3-1)^2 = 4$	$x = 0 \rightarrow y = (0-1)^2 = 1$
f) $x = -2 \rightarrow y = \frac{3 \cdot (-2)^2 - 2}{2} = -7$	$x = 3 \rightarrow y = \frac{3 \cdot 3^2 - 2}{3} = \frac{29}{3}$	$x = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

25. Considera los puntos:

$$A(-1, -1) \quad B(0, -2) \quad C(3, 1) \quad D(5, 2)$$

Establece cuáles de estos puntos pertenecen a estas funciones.

$$f(x) = 2 - \frac{x}{3} \quad g(x) = 5x - 2 \quad h(x) = \frac{x-1}{2}$$

Veamos qué ocurre con $f(x)$:

$$f(-1) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \neq -1 \rightarrow A \text{ no pertenece a } f(x).$$

$$f(3) = 2 - \frac{3}{3} = 1 \rightarrow C \text{ pertenece a } f(x).$$

$$f(0) = 2 - \frac{0}{3} = 2 \neq -2 \rightarrow B \text{ no pertenece a } f(x).$$

$$f(5) = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \neq 2 \rightarrow D \text{ no pertenece a } f(x).$$

Veamos qué ocurre con $g(x)$:

$$g(-1) = 5 \cdot (-1) - 2 = -7 \neq -1 \rightarrow A \text{ no pertenece a } g(x).$$

$$g(3) = 5 \cdot 3 - 2 = 13 \neq 1 \rightarrow C \text{ no pertenece a } g(x).$$

$$g(0) = 5 \cdot 0 - 2 = -2 \rightarrow B \text{ pertenece a } g(x).$$

$$g(5) = 5 \cdot 5 - 2 = 23 \neq 2 \rightarrow D \text{ no pertenece a } g(x).$$

Veamos qué ocurre con $h(x)$:

$$h(-1) = \frac{-1-1}{2} = -1 \rightarrow A \text{ pertenece a } h(x).$$

$$h(3) = \frac{3-1}{2} = 1 \rightarrow C \text{ pertenece a } h(x).$$

$$h(0) = \frac{1}{2} \neq -2 \rightarrow B \text{ no pertenece a } h(x).$$

$$h(5) = \frac{5-1}{2} = 2 \rightarrow D \text{ pertenece a } h(x).$$

26. Escribe cinco puntos que pertenezcan a estas funciones.

$$a) y = 3x + 1 \quad d) y = (x + 2)^2$$

$$b) y = 4x \quad e) y = \frac{2-x}{4}$$

$$c) y = x^2 - 1 \quad f) y = -x^3$$

$$\begin{array}{lll} a) x = -1 \rightarrow y = 3 \cdot (-1) + 1 = -2 & x = 0 \rightarrow y = 3 \cdot 0 + 1 = 1 & x = 1 \rightarrow y = 3 \cdot 1 + 1 = 4 \\ x = 2 \rightarrow y = 3 \cdot 2 + 1 = 7 & x = 3 \rightarrow y = 3 \cdot 3 + 1 = 10 & \end{array}$$

Los puntos $A(-1, -2), B(0, 1), C(1, 4), D(2, 7), E(3, 10)$ pertenecen a la función.

$$\begin{array}{lll} b) x = -2 \rightarrow y = 4 \cdot (-2) = -8 & x = -1 \rightarrow y = 4 \cdot (-1) = -4 & x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = 4 & x = 2 \rightarrow y = 4 \cdot 2 = 8 & \end{array}$$

Los puntos $A(-2, -8), B(-1, -4), C(0, 0), D(1, 4), E(2, 8)$ pertenecen a la función.

$$\begin{array}{lll} c) x = -2 \rightarrow y = (-2)^2 - 1 = 3 & x = -1 \rightarrow y = (-1)^2 - 1 = 0 & x = 0 \rightarrow y = 0 - 1 = -1 \\ x = 1 \rightarrow y = 1 - 1 = 0 & x = 2 \rightarrow y = 2^2 - 1 = 3 & \end{array}$$

Los puntos $A(-2, 3), B(-1, 0), C(0, -1), D(1, 0), E(2, 3)$ pertenecen a la función.

Funciones y gráficas

d) $x = -2 \rightarrow y = (-2 + 2)^2 = 0$
 $x = 1 \rightarrow y = (1 + 2)^2 = 9$

$x = -1 \rightarrow y = (-1 + 2)^2 = 1$
 $x = 2 \rightarrow y = (2 + 2)^2 = 16$

$x = 0 \rightarrow y = 2^2 = 4$

Los puntos $A(-2, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 4)$, $D(1, 9)$, $E(2, 16)$ pertenecen a la función.

e) $x = -2 \rightarrow y = \frac{2(-2)}{4} = 1$
 $x = 1 \rightarrow y = \frac{2(1)}{4} = \frac{1}{2}$

$x = -1 \rightarrow y = \frac{2(-1)}{4} = \frac{3}{4}$
 $x = 2 \rightarrow y = \frac{2(2)}{4} = 0$

$x = 0 \rightarrow y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Los puntos $A(-2, 1)$, $B(-1, 3/4)$, $C(0, 1/2)$, $D(1, 1/4)$, $E(2, 0)$ pertenecen a la función.

f) $x = -2 \rightarrow y = (-2)^3 = -8$
 $x = 1 \rightarrow y = 1^3 = 1$

$x = -1 \rightarrow y = (-1)^3 = -1$
 $x = 2 \rightarrow y = 2^3 = 8$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

Los puntos $A(-2, -8)$, $B(-1, -1)$, $C(0, 0)$, $D(1, 1)$, $E(2, 8)$ pertenecen a la función.

27. Completa en tu cuaderno las siguientes tablas.

a) $f(x) = \frac{x+2}{3}$

x	1	4	0	-2	-5	-5
y	1	2	2/3	0	-1	-1

b) $g(x) = \frac{x}{2} + 1$

x	0	4	-4	-6	8	-2
y	1	3	-1	-2	5	0

c) $h(x) = 4 - 3x$

x	4/3	-1	2	-2	0	1
y	0	7	-2	10	4	1

28. Determina la primera coordenada de estos puntos que pertenecen a la función $y = \frac{1}{2}x - 1$.

- a) $A(a, 0)$ b) $B(b, 1)$ c) $C(c, 2)$

a) $y = 0 \rightarrow 0 = \frac{1}{2}a - 1 \rightarrow a = 2$

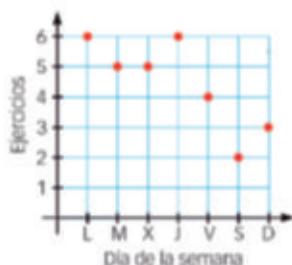
b) $y = 1 \rightarrow 1 = \frac{1}{2}b - 1 \rightarrow b = 4$

c) $y = 2 \rightarrow 2 = \frac{1}{2}c - 1 \rightarrow c = 6$

29. ¿Puede un mismo punto pertenecer a dos funciones diferentes? Pon algún ejemplo.

Sí. Por ejemplo, el punto $(2, 4)$ pertenece a la función $f(x) = x + 2$ y a la función $g(x) = x^2$.

30. La gráfica representa el número de ejercicios de matemáticas hechos la última semana.

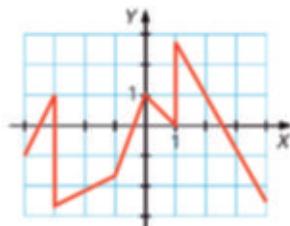


¿Es una función? Construye su tabla de valores.

Sí, es una función, ya que a cada día de la semana (variable independiente) le corresponde un único número de ejercicios (variable dependiente).

Día	L	M	X	J	V	S	D
N.º ejercicios	6	5	5	6	4	2	3

31. Determina si esta gráfica corresponde a una función.



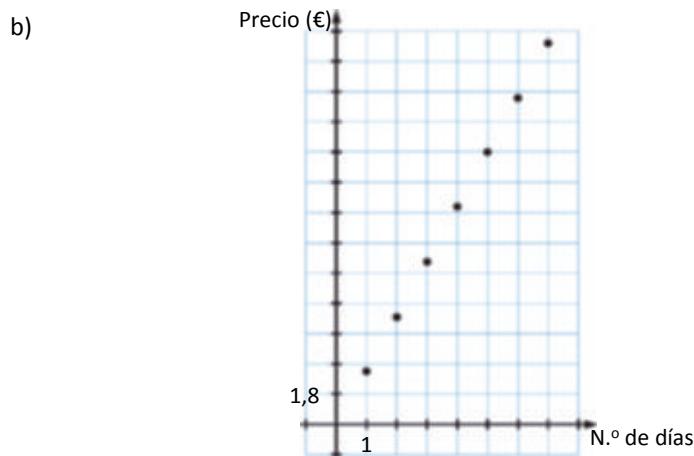
No es una función porque hay valores de la variable X a la que le corresponden varios valores de la variable Y . Por ejemplo, si $x = -3$, y toma valores comprendidos entre $-2,5$ y 1 .

32. El alquiler de una película cuesta 1,80 € por cada día.

- Haz una tabla que relacione los días de alquiler y su precio.
- Dibuja la gráfica correspondiente.
- Indica cuáles son las variables independiente y dependiente.

N.º de días	1	2	3	4	5	6	7
Precio (€)	1,80	3,60	5,40	7,20	9	10,80	12,60

c) N.º de días: variable independiente
Precio: variable dependiente.

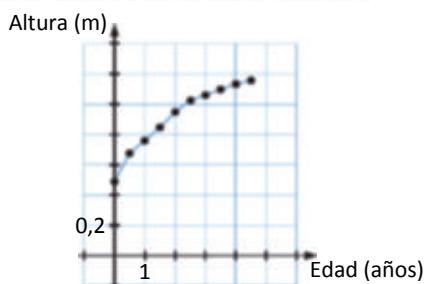


Funciones y gráficas

33. La siguiente tabla relaciona la altura de Marta con su edad.

Edad (años)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Altura (m)	0,48	0,65	0,75	0,84	0,95	1,02	1,05	1,08	1,12	1,16

Construye una gráfica de puntos con los valores de la tabla anterior.



34. Representa la función que relaciona las siguientes magnitudes.

a) Kilos de naranjas que se compran y precio, sabiendo que un kilo de naranjas cuesta 1,70 €.

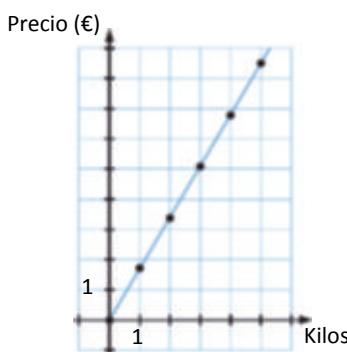
b) Kilómetros recorridos por un automóvil que circula a 90 km/h y tiempo que está circulando.

a) Variable independiente → Kilos de naranjas.

Variable dependiente → Precio en €.

Kilos	1	2	3	4	5
Precio (€)	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5

$y = 1,7x$ → Se pueden unir los puntos porque es posible comprar fracciones de kilo.

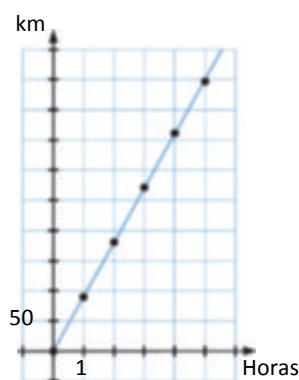


b) Variable independiente → Tiempo en horas.

Variable dependiente → Kilómetros que recorre.

Horas	1	2	3	4	5
km	90	180	270	360	450

$y = 90x$ → Se pueden unir los puntos porque es posible estar conduciendo fracciones de horas.



35. Construye la tabla de valores para las siguientes funciones y realiza su representación gráfica.

a) $y = 2x$

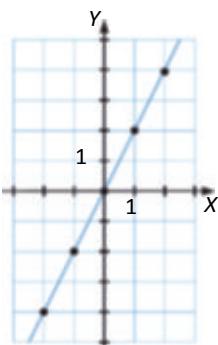
b) $y = \frac{x}{3}$

c) $y = 5x$

d) $y = \frac{x}{4}$

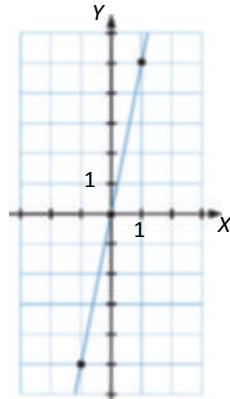
a)

x	y
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4



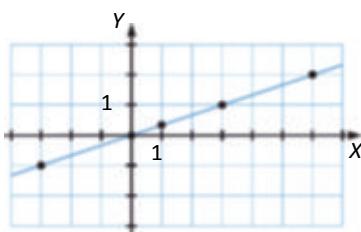
c)

x	y
-2	-10
-1	-5
0	0
1	5
2	10



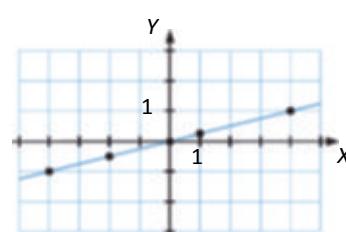
b)

x	y
-3	-1
0	0
1	1/3
3	1



d)

x	y
-4	-1
-2	-1/2
0	0
1	1/4



36. Construye la tabla de valores para las siguientes funciones y realiza su representación gráfica.

a) $y = 2x + 1$

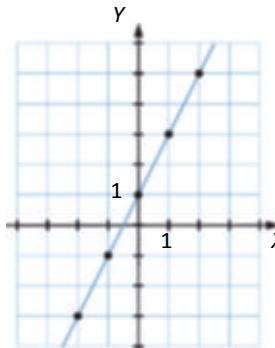
b) $y = \frac{x}{3} - 4$

c) $y = 5x + 1$

d) $y = \frac{x}{4} - 3$

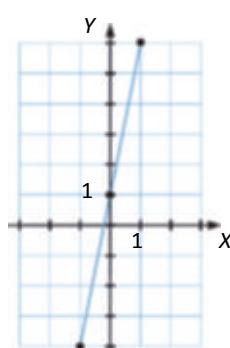
a)

x	y
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5



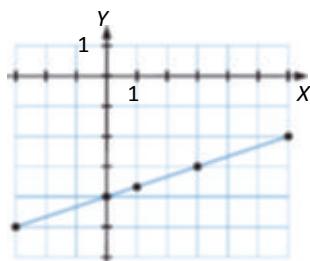
c)

x	y
-2	-9
-1	-4
0	1
1	6
2	11



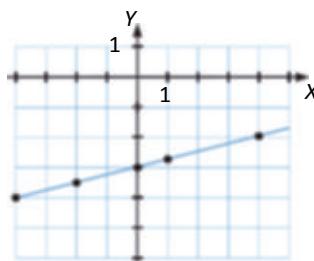
b)

x	-3	0	1	3	6
y	-5	-4	-11/3	-3	-2



d)

x	-4	-2	0	1	4
y	-4	-7/2	-3	-11/4	-2



Funciones y gráficas

37. Representa la función que relaciona la altura de un rectángulo con su perímetro, sabiendo que la base es el triple que la altura.

Variable independiente (x): altura.

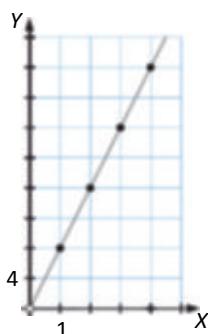
Variable dependiente (y): perímetro.

Como la base es el triple de la altura, si $x = \text{altura} \rightarrow \text{Base} = 3x$.

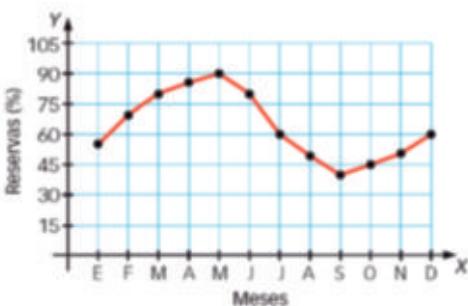
$$y = 2x + 2 \cdot 3x = 8x$$

x (metros)	1	2	3	4
y (metros)	8	16	24	32

Se unen los puntos porque los lados de un rectángulo pueden ser números decimales.



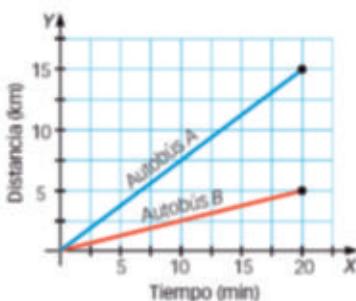
38. Interpreta esta gráfica, que representa las reservas de agua de un pantano durante el último año.



En el mes de mayo es cuando hay mayor reserva de agua en el pantano, llegando al 90 % de su capacidad, mientras que en septiembre la reserva está al 40 %, el valor más bajo.

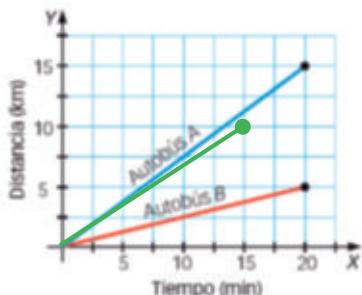
Durante los primeros 7 meses y los meses de noviembre y diciembre, la reserva está a más del 50 %, mientras que en los meses de agosto, septiembre y octubre la reserva está a menos del 50 % de la capacidad.

39. Interpreta esta gráfica, que representa el tiempo empleado por dos autobuses en realizar una vez su trayecto.



El autobús A tarda 20 min en recorrer los 15 km de distancia que mide su trayecto, mientras que el autobús B, en el mismo tiempo, recorre 5 km de distancia.

40. Representa una línea recta en el gráfico anterior que, partiendo del origen, acabe en (15, 10) e interprétala.



El nuevo autobús realiza una ruta de 10 km en 15 min.

41. Representa este enunciado mediante una gráfica, y decide si es posible unir o no los puntos.

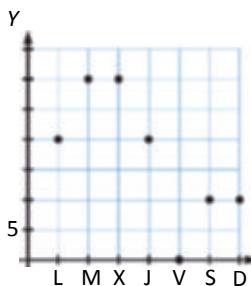
El número de clientes de un restaurante durante la semana ha sido: el primer día 20 clientes, el segundo y el tercero 30 clientes cada día, el cuarto el mismo número de clientes que el primero. El quinto día cerraron por descanso, y el fin de semana solo hubo 10 clientes cada día.

Variable independiente → Día de la semana.

Variable dependiente → Número de clientes.

x (día)	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
y (n.º clientes)	20	30	30	20	0	10	10

Los puntos no se unen, ya que la variable independiente no puede tomar valores comprendidos entre los días de la semana.



42. Representa este enunciado mediante una gráfica. Razona si tiene sentido unir los puntos que obtienes.

Cuatro amigos van de excursión.

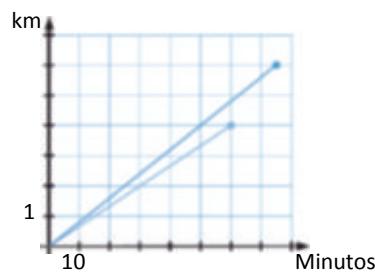
- *El primero de ellos recorre 6 kilómetros en 75 minutos.*
- *El segundo recorre 4 kilómetros y tarda 60 minutos.*
- *El tercero tarda lo mismo que el primero, y el cuarto tarda lo mismo que el segundo.*

Variable independiente → Tiempo en minutos.

Variable dependiente → km que recorren.

x (minutos)	60	75
y (km)	4	6

No tiene sentido unir los dos puntos porque cada uno corresponde a una observación distinta.

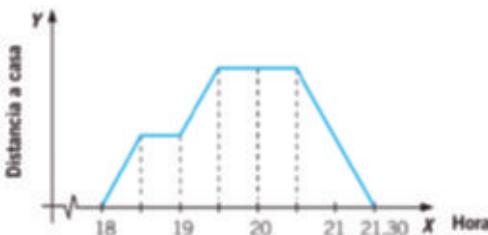


Funciones y gráficas

43. Representa el texto mediante una gráfica.

Tomás salió a pasear a las 18:00 h. A las 18:30 h se encontró con Juan y se detuvo media hora.

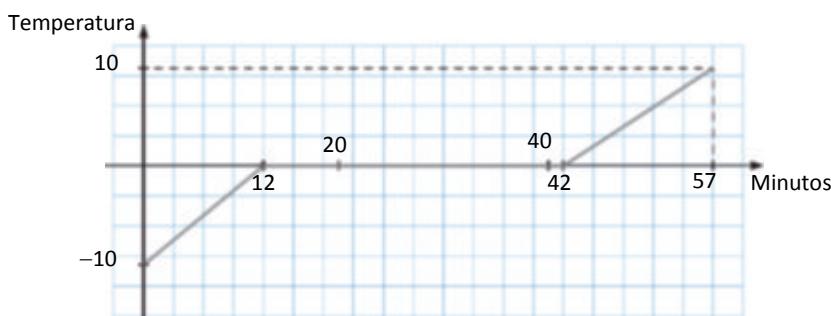
Luego siguió andando hasta que a las 19:30 h llegó a una ermita. Allí decidió pararse a descansar una hora. Después, regresó a su casa: tardó una hora en llegar y no hizo ninguna parada en el camino.



44. Tenemos un trozo de hielo a 10 grados bajo cero.

- Durante 12 minutos la temperatura sube uniformemente hasta 0 °C.
- Después, comienza a derretirse durante 30 minutos sin aumentar su temperatura.
- Una vez que el hielo es agua a 0 °C, se calienta 15 minutos y alcanza una temperatura de 10 °C.

Averigua a qué temperatura estará el agua después de 20 y 40 minutos.

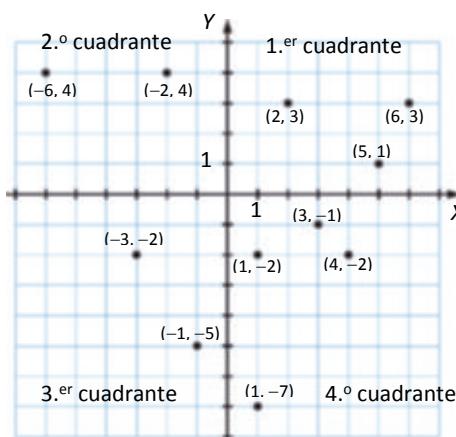


La gráfica nos muestra que a los 20 minutos la temperatura es de 0 °C y a los 40 minutos sigue siendo de 0 °C.

ACTIVIDADES FINALES

45. Dibuja unos ejes coordenados, representa estos puntos e indica en qué cuadrante está cada uno de ellos.

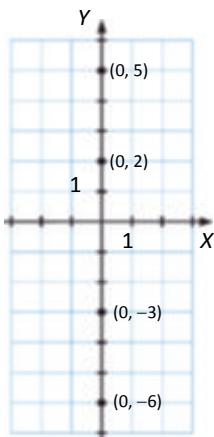
Abscisa	5	-2	3	-1	6	-3	2	1	4	-6	1
Ordenada	1	4	-1	-5	3	-2	3	-2	-2	4	-7



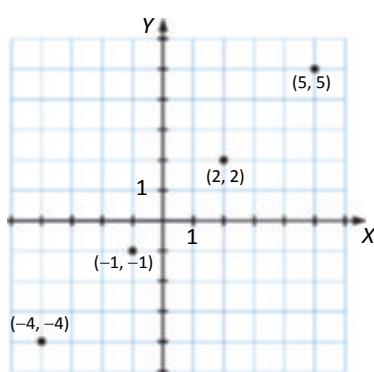
46. Representa los siguientes puntos en un sistema de ejes coordenados. ¿Qué característica tienen en común?

- | | |
|--|---|
| a) $(0, 5), (0, -3), (0, 2)$ y $(0, -6)$ | d) $(-4, -4), (2, 2), (-1, -1)$ y $(5, 5)$ |
| b) $(4, 0), (-3, 0), (5, 0)$ y $(-2, 0)$ | e) $(-3, 6), (-3, 2), (-3, 7)$ y $(-3, -4)$ |
| c) $(1, 3), (-2, 3), (3, 3)$ y $(-5, 3)$ | |

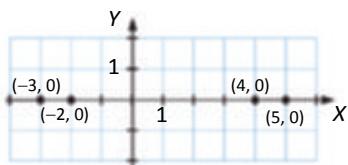
a) Están todos en el eje de ordenadas.



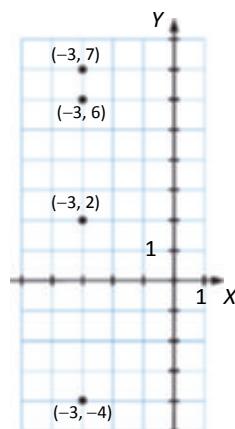
d)



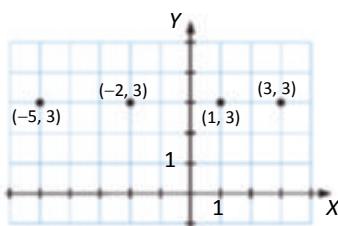
b) Están todos en el eje de abscisas.



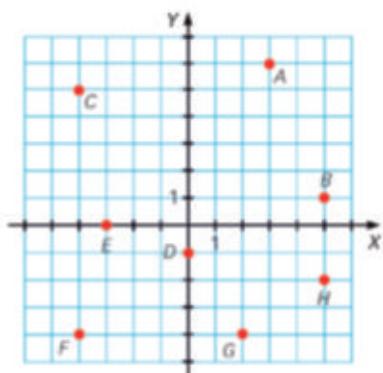
e) Están alineados respecto al eje de ordenadas.



c) Están alineados respecto al eje de abscisas.



47. Indica las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos:



$A(3, 6)$ $B(5, 1)$ $C(-4, 5)$ $D(0, -1)$ $E(-3, 0)$ $F(-4, -4)$ $G(2, -4)$ $H(5, -2)$

Funciones y gráficas

48. En general, ¿cuántos puntos hay que tengan igual su abscisa? ¿Cuántos que tengan igual su ordenada?

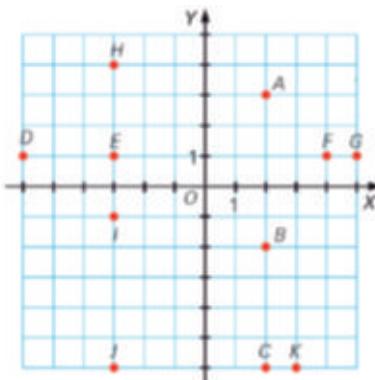
Infinitos. Puesto que si tienen la misma abscisa se encuentran en la misma recta vertical y una recta tiene infinitos puntos, y si tienen la misma ordenada se encuentran en la misma recta horizontal.

49. Indica en qué cuadrante están estos cuatro puntos.

- a) A, B, C y D de abscisa 3 y ordenadas 3, 5, 1 y 7.
- b) E, F, G y H de abscisa -2 y ordenadas -2, -4, -1 y -7.
- c) I, J, K y L de ordenada 4 y abscisas -1, -8, -3 y -5.

- a) Primer cuadrante.
- b) Tercer cuadrante.
- c) Segundo cuadrante.

50. Indica las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos y contesta.

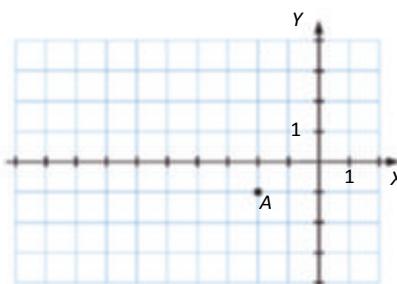


- a) ¿Qué tienen en común los puntos A, B y C? ¿Y los puntos A, F y G?
- b) ¿Qué tienen en común los puntos D, E, F y G?
- c) ¿En qué coinciden los puntos H, E, I y J?
- d) ¿Qué similitudes guardan los puntos J, C y K? ¿Y los puntos J e I?

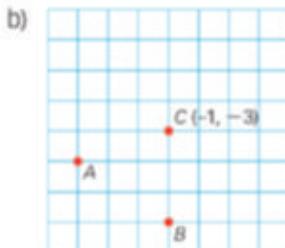
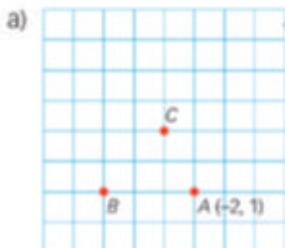
A(2, 3) B(2, -2) C(2, -6) D(-6, 1) E(-3, 1) F(4, 1) G(5, 1) H(-3, 4) I(-3, -1) J(-3, -6)

- a) A, B y C tienen la misma abscisa, pertenecen a la misma recta vertical. A, F y G están en el primer cuadrante.
- b) D, E, F y G tienen la misma ordenada, pertenecen a la misma recta horizontal.
- c) H, E, I y J tienen la misma abscisa, pertenecen a la misma recta vertical.
- d) J, C y K tienen la misma ordenada, pertenecen a la misma recta horizontal. J e I están en el tercer cuadrante.

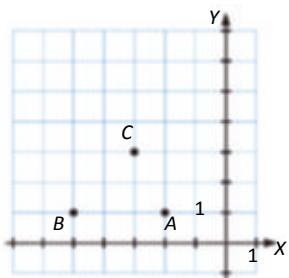
51. Dibuja en tu cuaderno los ejes de coordenadas para que el punto marcado en la gráfica de la derecha sea A(-2, -1).



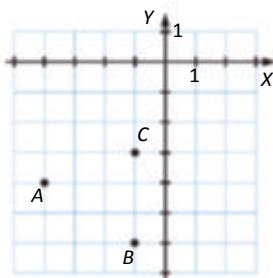
52. Dibuja en tu cuaderno los ejes coordenados que correspondan y completa las coordenadas de los puntos señalados.



a) $B(-5, 1) \quad C(-3, 3)$

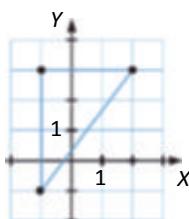


b) $A(-4, -4) \quad B(-1, -6)$



53. Representa en un sistema de coordenadas un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ que tenga el ángulo recto en el punto $A(-1, 3)$, y cuyos catetos midan 4 y 3 unidades, respectivamente.

Hay varias opciones. Una de ellas es $B(2, 3)$ y $C(-1, -1)$. AB cateto que mide 3 unidades, AC cateto que mide 4 unidades y BC hipotenusa.

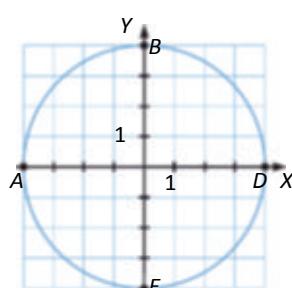
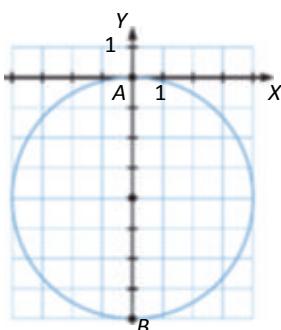


54. Dibuja una circunferencia de radio 4 unidades con centro en el origen de coordenadas. ¿En qué puntos corta a los ejes? ¿Y si el centro estuviera en el punto $C(0, -4)$?

Si el centro es $C(0, 0)$, los puntos de corte con los ejes son:

Con el eje de abscisas: $A(-4, 0)$ y $D(4, 0)$.

Con el eje de ordenadas: $E(0, -4)$ y $B(0, 4)$.



Si el centro es $C(0, -4)$, los puntos de corte con los ejes son:

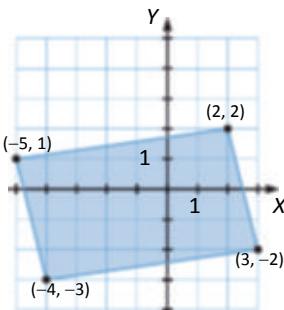
Con el eje de abscisas $\rightarrow A(0, 0)$.

Con el eje de ordenadas $\rightarrow A(0, 0)$ y $B(0, -8)$.

Funciones y gráficas

55. Dibuja un rectángulo de lados no paralelos a los ejes y de forma que cada vértice esté en un cuadrante diferente. Escribe las coordenadas de sus vértices.

Hay varias opciones. Una de ellas es la siguiente.



56. Escribe una tabla de valores para las funciones que hacen corresponder a cada número:

- a) Su doble menos 3.
b) Su triple más 5.
c) Su cuadrado.
d) Su tercera parte más 6.
e) Su mitad más 1.
f) Un tercio menos su doble.

a) La función es $y = 2x - 3$.

x	-2	-1	0	1	2
y	-7	-5	-3	-1	1

b) La función es $y = 3x + 5$.

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	2	5	8	11

c) La función es $y = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

d) La función es $y = x/3 + 6$.

x	-6	-3	0	1	3
y	4	5	6	19/3	7

e) La función es $y = x/2 + 1$.

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1/2	1	3/2	2

f) La función es $y = 1/3 - 2x$.

x	-2	-1	0	1	2
y	13/3	7/3	1/3	-5/3	-11/3

57. Expresa en lenguaje cotidiano la asociación que indican estas funciones.

- a) $y = x^2 - 3$ c) $y = 2 \cdot (x + 1)$
b) $y = -x + 5$ d) $y = \frac{x-5}{2}$
- a) Su cuadrado menos tres. c) El doble de su consecutivo.
b) Su opuesto más cinco. d) La mitad de la diferencia del número menos cinco.

58. Considera la función $y = 3x - 2$. Indica cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ella.

- | | | | |
|-------------|-----------------------|--------------|----------------------------------|
| a) $(0, 2)$ | c) $(-2, -8)$ | e) $(2, 4)$ | g) $(3, 7)$ |
| b) $(1, 1)$ | d) $(\frac{1}{3}, 1)$ | f) $(0, -2)$ | h) $(\frac{1}{6}, -\frac{3}{2})$ |

- a) $x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow (0, 2)$ no pertenece a la función.
 b) $x = 1 \rightarrow y = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \rightarrow (1, 1)$ pertenece a la función.
 c) $x = -2 \rightarrow y = 3 \cdot (-2) - 2 = -8 \rightarrow (-2, -8)$ pertenece a la función.
 d) $x = 1/3 \rightarrow y = 3 \cdot (1/3) - 2 = -1 \rightarrow (1/3, 1)$ no pertenece a la función.
 e) $x = 2 \rightarrow y = 3 \cdot 2 - 2 = 4 \rightarrow (2, 4)$ pertenece a la función.
 f) $x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow (0, -2)$ pertenece a la función.
 g) $x = 3 \rightarrow y = 3 \cdot 3 - 2 = 7 \rightarrow (3, 7)$ pertenece a la función.
 h) $x = 1/6 \rightarrow y = 3 \cdot (1/6) - 2 = -3/2 \rightarrow (1/6, -3/2)$ pertenece a la función.

59. Considera el punto $(3, 1)$. Indica a cuál de las siguientes funciones pertenece.

- | | |
|-------------------|---------------------------|
| a) $y = 2x^2 - 3$ | d) $y = \frac{x-1}{2}$ |
| b) $y = -x + 2$ | e) $y = -2x + 7$ |
| c) $y = 4x - x$ | f) $y = -x + \frac{1}{2}$ |

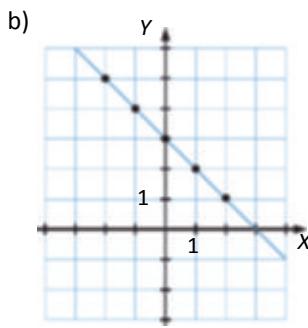
- a) $x = 3 \rightarrow y = 2 \cdot 3^2 - 3 = 15 \rightarrow (3, 1)$ no pertenece a la función.
 b) $x = 3 \rightarrow y = -3 + 2 = -1 \rightarrow (3, 1)$ no pertenece a la función.
 c) $x = 3 \rightarrow y = 4 \cdot 3 - 3 = 9 \rightarrow (3, 1)$ no pertenece a la función.
 d) $x = 3 \rightarrow y = \frac{3-1}{2} = 1 \rightarrow (3, 1)$ pertenece a la función.
 e) $x = 3 \rightarrow y = -2 \cdot 3 + 7 = 1 \rightarrow (3, 1)$ pertenece a la función.
 f) $x = 3 \rightarrow y = -3 + 1/2 = -5/2 \rightarrow (3, 1)$ no pertenece a la función.

60. Dada la función $y = -x + 3$:

- a) Haz una tabla de valores.
 b) Represéntala gráficamente.
 c) ¿Pertenece el punto $(3, -1)$ a la función?

a)

x	y
-2	5
-1	4
0	3
1	2
2	1



- c) $x = 3 \rightarrow y = -3 + 3 = 0 \rightarrow (3, -1)$ no pertenece a la función.

Funciones y gráficas

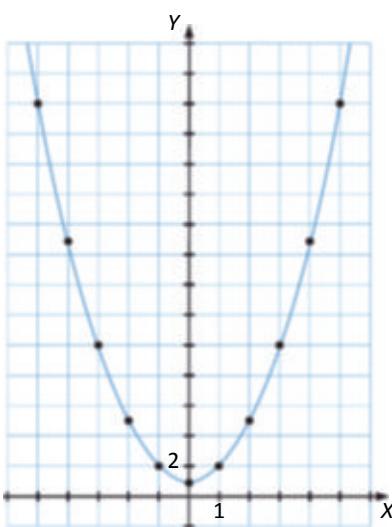
62. Dada la expresión algebraica $y = x^2 + 1$:

- Construye una tabla con valores de la variable x entre -5 y 5 .
- Representa gráficamente estos puntos y únelos mediante una línea.

a)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26

b)



63. Haz una tabla de valores para la función $f(x) = 2x - 5$.

- Represéntala gráficamente.
- Estudia sus características.
- El punto $P(2, -2)$, ¿está en la gráfica?

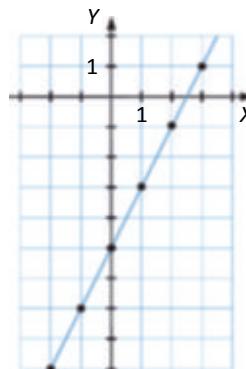
a)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-7	-5	-3	-1	1

b) Es una función creciente.

Los puntos de corte con los ejes son $(0, -5)$ y $(5/2, 0)$.

c) $x = 2 \rightarrow y = 2 \cdot 2 - 5 = -1 \rightarrow (2, -2)$ no pertenece a la función.



64. Si las cerezas se venden a 3,25 €/kg:

- Escribe la expresión algebraica que relaciona el coste (y) en función de los kilos de cerezas (x).
- ¿Cuál es la variable dependiente en esta expresión? ¿Y la variable independiente?
- Haz una tabla y representa gráficamente sus pares de valores.

a) $y = 3,25x$

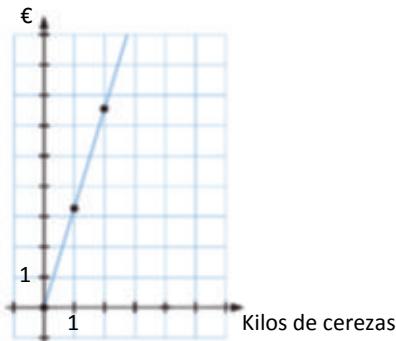
b) Variable dependiente: Coste en €.

Variable independiente: Kilos de cerezas.

c)

x	0	1	2	3	4	5
y	0	3,25	6,5	9,75	13	16,25

Se unen los puntos porque es posible comprar fracciones de kilo.

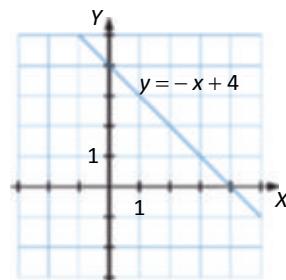
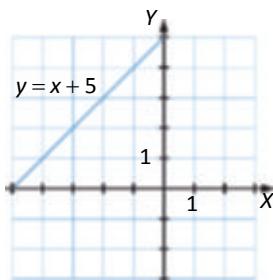
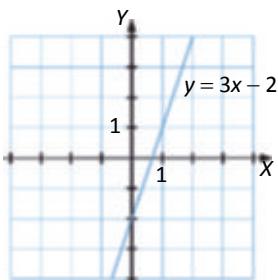


65. Completa estas tablas en tu cuaderno y haz una gráfica de las funciones que representan.

x	1	2	-1	0	-2
$y = 3x - 2$	1	4	-5	-2	-8

x	-2	-3	1	-5	-7
$y = x + 5$	3	2	6	0	-2

x	4	6	5	10	-3
$y = -x + 4$	0	-2	-1	-6	7

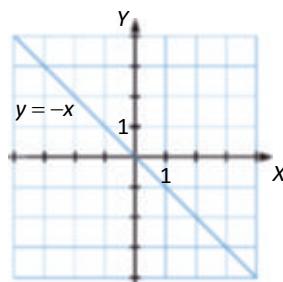
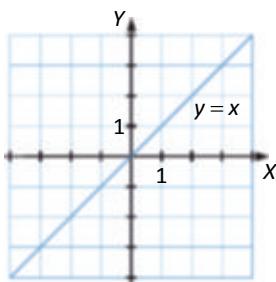
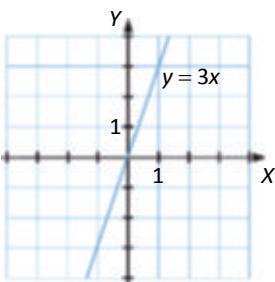


67. Representa gráficamente estas funciones de proporcionalidad directa.

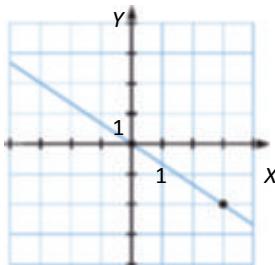
a) $y = 3x$ b) $y = x$ c) $y = -x$

- a) Si $x = 1 \rightarrow y = 3 \rightarrow (1, 3)$ pertenece a la función.
- b) Si $x = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow (1, 1)$ pertenece a la función.
- c) Si $x = 1 \rightarrow y = -1 \rightarrow (1, -1)$ pertenece a la función.

Funciones y gráficas

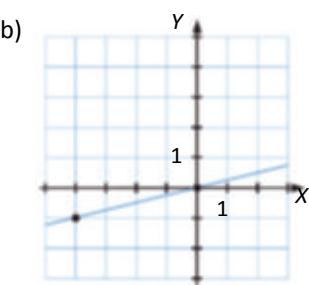
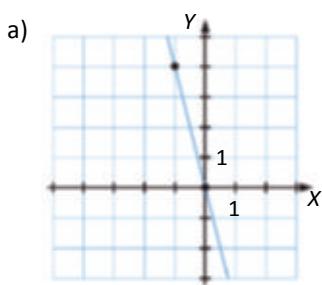


- 68.** Representa gráficamente la función de proporcionalidad directa cuya gráfica pasa por el punto $(3, -2)$.



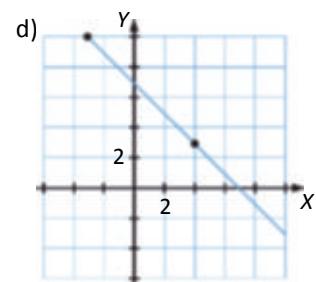
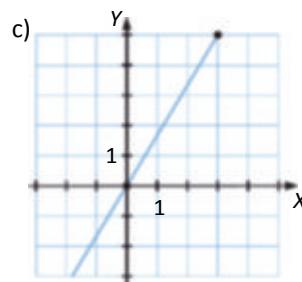
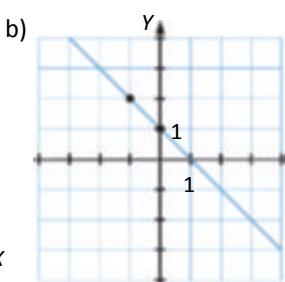
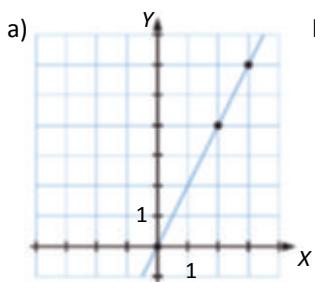
- 69.** Representa la función de proporcionalidad directa en cada caso.

- a) El punto $(-1, 4)$ pertenece a la función.
 b) La gráfica de la función pasa por el punto $(-4, -1)$.



- 70.** Razona si existe alguna función de proporcionalidad directa que pase por los siguientes pares de puntos.

- a) $(2, 4)$ y $(3, 6)$ c) $(3, 5)$ y $(0, 0)$
 b) $(-1, 2)$ y $(0, 1)$ d) $(-3, 10)$ y $(4, 3)$



Son funciones de proporcionalidad directa a) y c), porque son las que pasan por el origen de coordenadas.

71. Encuentra los puntos pertenecientes a las siguientes funciones que están sobre el eje X y sobre el eje Y.

a) $y = 2x - 3$ d) $y = \frac{3}{4} + x$

b) $y = -x + 8$ e) $y = \frac{2x}{7}$

c) $y = 6 - x$ f) $y = -2x$

a) Sobre el eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = 2x - 3 \rightarrow x = 3/2 \rightarrow (3/2, 0)$

Sobre el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 - 3 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

b) Sobre el eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = -x + 8 \rightarrow x = 8 \rightarrow (8, 0)$

Sobre el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 + 8 \rightarrow y = 8 \rightarrow (0, 8)$

c) Sobre el eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = 6 - x \rightarrow x = 6 \rightarrow (6, 0)$

Sobre el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow (0, 6)$

d) Sobre el eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = 3/4 + x \rightarrow x = -3/4 \rightarrow (-3/4, 0)$

Sobre el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 3/4 \rightarrow (0, 3/4)$

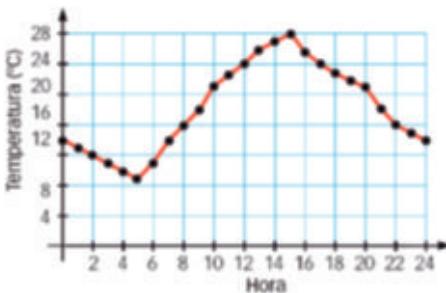
e) Sobre el eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = x \rightarrow (0, 0)$

Sobre el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

f) Sobre el eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Sobre el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

72. La gráfica siguiente muestra la evolución de la temperatura en un día del mes de septiembre.

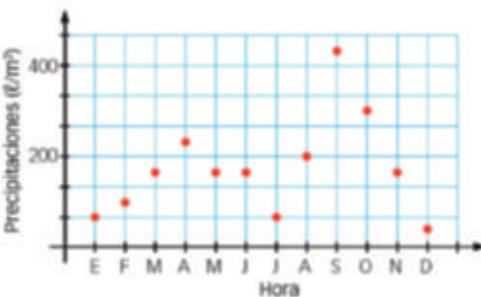


- a) ¿Qué crees que representa cada uno de los ejes?
- b) ¿A qué hora la temperatura ha sido más alta? ¿Y más baja?
- c) ¿Cuánto tiempo ha habido una temperatura inferior a 15 °C?
- d) ¿En qué tramo de tiempo la temperatura ha sido superior a 24 °C?

- a) El eje X representa las horas del día y el eje Y la temperatura tomada en esa hora.
- b) A las 15:00 h la temperatura ha sido la más alta y a las 5:00 h la más baja.
- c) Las primeras 7 horas y entre las 23 h y las 24 h.
- d) Entre las 12 h y las 17:00 h.

Funciones y gráficas

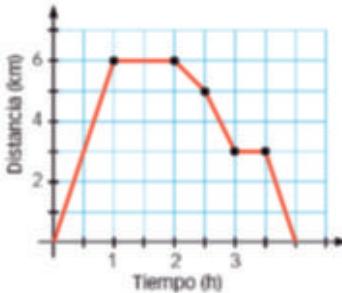
73. La gráfica muestra las precipitaciones en una localidad durante un año. En el eje de abscisas están representados los meses del año, y en el de ordenadas, las precipitaciones, en L/m^2 .



- a) ¿Cuál fue el mes más lluvioso?
b) ¿Y el más seco?
c) ¿Qué mes tuvo unas precipitaciones de 300 L/m^2 ?
d) ¿Cuáles fueron las precipitaciones en enero?
e) ¿En qué estación se produjeron más precipitaciones?

a) Septiembre.
b) Diciembre.
c) Octubre.
d) $200/3 = 66,6 \text{ L/m}^2$
e) Otoño.

74. Observa la gráfica siguiente. En ella está representado el paseo que ha hecho María: ha salido de casa, ha ido al campo y ha vuelto a casa.



- a) ¿Qué variables están representadas?
b) ¿Qué significado les darias a los tramos horizontales?
c) ¿Cuánto tiempo ha durado el paseo?
d) ¿Cuál es la distancia más lejana a la que ha ido María?
e) ¿Cuándo ha caminado más rápido, a la ida o a la vuelta?

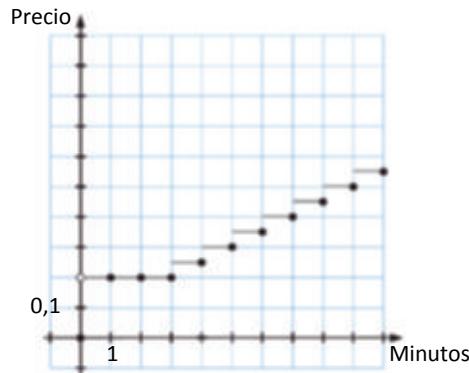
a) El eje X representa las horas transcurridas y en el eje Y la distancia que María ha ido recorriendo.
b) Durante esos períodos de tiempo María ha descansado.
c) 4 h
d) 6 km
e) A la ida, porque ha recorrido 6 km en 1 h.

- 75.** El precio de una llamada urbana en una compañía es el siguiente: 0,20 € los tres primeros minutos, independientemente de que se agoten o no, y 5 céntimos por minuto o fracción que sobrepase los tres primeros minutos.

- Construye una tabla y la gráfica correspondiente a una llamada de hasta 10 minutos.
- Explica cuál es la variable dependiente y la variable independiente y cuáles son las características de la gráfica.

a)

Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Precio €	0	0,20	0,20	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55



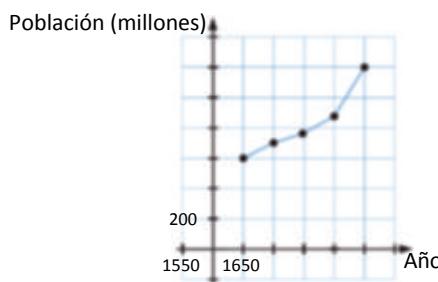
- b) Variable independiente: Tiempo en minutos.

Variable dependiente: Precio.

- 76.** La evolución de la población mundial viene dada por la siguiente tabla:

Año	1650	1700	1750	1800	1850
Población (millones)	600	700	750	900	1200

- ¿Cuál es la variable independiente?
- ¿Y la variable dependiente?
- Representa gráficamente los valores.
- ¿Se pueden unir los puntos representados?
- ¿Cuál fue el mayor aumento de población entre los años representados?
- El año.
- La población.
- c)



- Sí, ya que a años intermedios también le corresponden datos de la población, aunque serían datos aproximados.
- De 1800 a 1850; aumentó la población en 300 millones de personas.

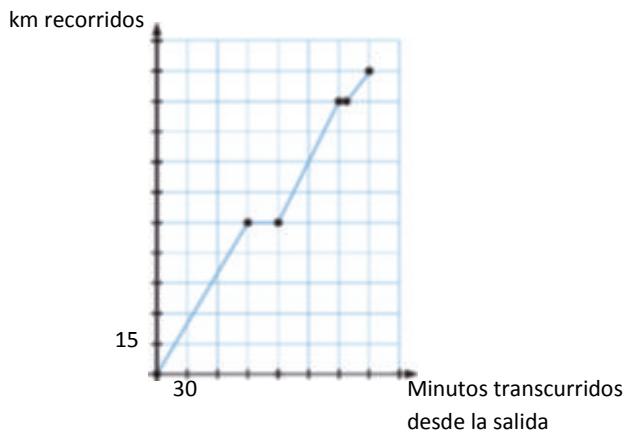
Funciones y gráficas

77. Representa este enunciado mediante una gráfica:

El domingo fuimos a la casa de mis abuelos, que está situada a 150 km.

Partimos a las 9:00 h y a las 10:30 h, a mitad de camino, paramos a desayunar durante media hora.

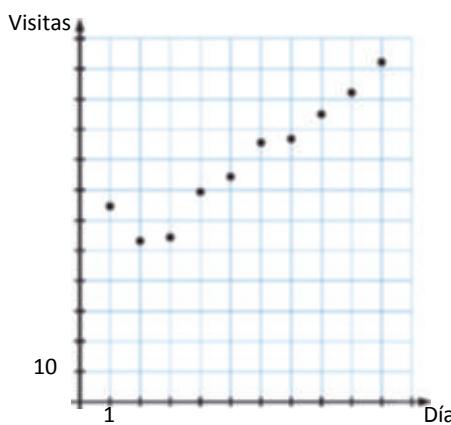
A las 12:00 h, cuando quedaba un décimo de camino, entramos en la ciudad, y nos detuvimos 5 min a hablar con un amigo. Llegamos finalmente a la casa de mis abuelos a las 12:30 h.



78. La siguiente tabla refleja el número de visitantes a un blog de Internet durante los primeros 10 días del mes.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Visitas	65	53	55	70	75	87	88	95	102	111

- a) ¿Es una función?
b) ¿Se puede expresar mediante una expresión algebraica?
c) Dibuja la gráfica.
a) Sí, porque a cada día del mes le corresponde un único número de visitas.
b) No.
c)



79. Las manzanas se venden a 0,85 €/kg.

- a) Escribe la expresión algebraica que relaciona el coste (y) con la cantidad de kilos (x) comprados.
 b) ¿Cuánto dinero cuestan 6,5 kg de manzanas?

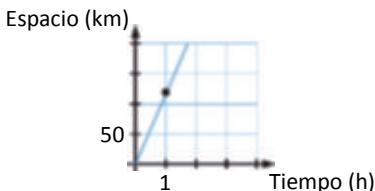
a) $y = 0,85x$
 b) $y = 0,85 \cdot 6,5 = 5,53$ € → 6,5 kg de manzanas cuestan 5,53 €.

80. Un automóvil circula a 115 km/h.

- a) Escribe la expresión algebraica que relaciona el espacio recorrido por el vehículo (y) en función del tiempo empleado en recorrerlo (x).
 b) Realiza su representación gráfica.
 c) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 805 km?

a) $y = 115x$
 b) Es una función de proporcionalidad, con lo que pasa por el $(0, 0)$.

Si $x = 1 \rightarrow y = 115$



c) $y = 805 \rightarrow 805 = 115x \rightarrow x = 805/115 = 7 \rightarrow$ Se tardan 7 horas en recorrer 805 km.

81. Un globo sonda mide la temperatura de la atmósfera a distintas alturas. Se comprueba que, cada 200 m de ascensión, la temperatura disminuye 1 °C.

- a) Escribe la expresión algebraica.
 b) ¿Cuánto baja la temperatura si subimos 1000 m?
 a) $y = -x/200$
 b) $x = 1000 \rightarrow y = -1000/200 = -5 \rightarrow$ A 1000 metros ha disminuido 5 °C.

82. La tabla siguiente muestra el precio de los bolígrafos en función del número de bolígrafos que compramos.

Bolígrafos	1	2	3	4	5	6	7	8
Precio (€)	0,90							

Completa en tu cuaderno la tabla y escribe la expresión algebraica que relaciona las dos variables.

Bolígrafos	1	2	3	4	5	6	7	8
Precio (€)	0,45	0,90	1,35	1,80	2,25	2,7	3,15	3,60

Variable independiente: Número de bolígrafos.

Variable dependiente: Precio.

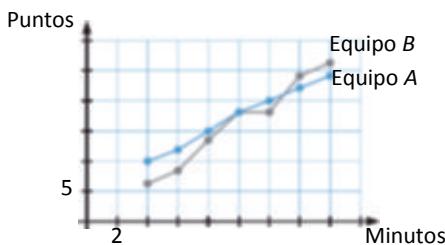
Expresión algebraica: $y = 0,45x$.

Funciones y gráficas

83. En un partido de baloncesto se hace una tabla con los puntos por equipo. Antes del final del 2.º cuarto tenemos:

Minuto	4	6	8	10	12	14	16
Equipo A	10	12	15	18	20	22	24
Equipo B	6	8	14	18	18	24	26

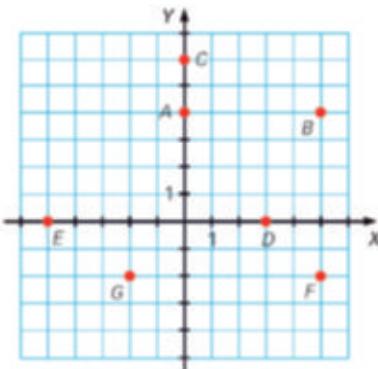
Dibuja las gráficas de los equipos y haz un resumen del partido.



Durante los primeros 9 minutos llevaba ventaja el equipo A, pero en el minuto 10 el equipo B consiguió empatar. A los 16 minutos, el equipo B ganaba al equipo A por una diferencia de 2 puntos.

DEBES SABER HACER

1. Señala las coordenadas de estos puntos.



$A(0, 4)$ $B(5, 4)$ $C(0, 6)$ $D(3, 0)$ $E(-5, 0)$ $F(5, -2)$ $G(-2, -2)$

2. Una relación entre números enteros se expresa de la siguiente manera: «A cada número entero lo relacionamos con su doble más una unidad». Escribe la expresión de la función y completa en tu cuaderno la tabla.

x	-2	-1	0	1	3	7	10
y	-3	-1	1	3	7	15	21

Expresión algebraica: $y = 2x + 1$.

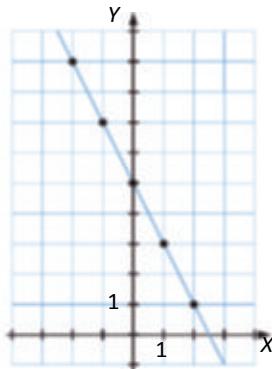
3. Dada la función $y = -2x + 5$:

- Haz una tabla de valores.
- Representala gráficamente.
- ¿Pertenece el punto $(3, -1)$ a la función?

a)

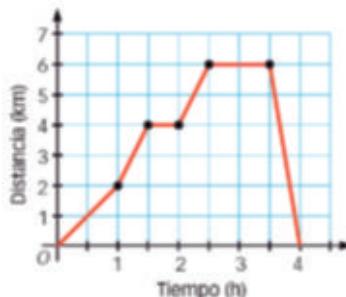
x	-2	-1	0	1	2
y	9	7	5	3	1

b)



c) $x = 3 \rightarrow y = -2 \cdot 3 + 5 \rightarrow y = -1 \rightarrow (3, -1)$ pertenece a la función.

4. La gráfica representa el paseo que ha dado Julio: ha salido de casa, ha ido a comprar y ha regresado.



- a) ¿Qué variables están representadas?
 - b) ¿Cuánto tiempo ha durado el paseo?
 - c) ¿Cuál es la distancia más lejana a la que ha ido?
 - d) ¿Cuándo ha caminado más rápido, a la ida o a la vuelta?
 - e) ¿Se ha parado en algún momento? ¿Cuándo?
- a) Las variables representadas son el tiempo que dura el paseo y la distancia que se aleja del punto de origen del paseo.
 - b) Dura 4 h.
 - c) 6 km del origen.
 - d) A la vuelta.
 - e) Sí, varias veces. Primero tras hora y media de recorrido y luego tras dos horas y media.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

84. Las personas tenemos una temperatura corporal de aproximadamente 37°C . Más exactamente, se puede decir que la temperatura media de las personas está entre $36,3^{\circ}\text{C}$ y $37,1^{\circ}\text{C}$.



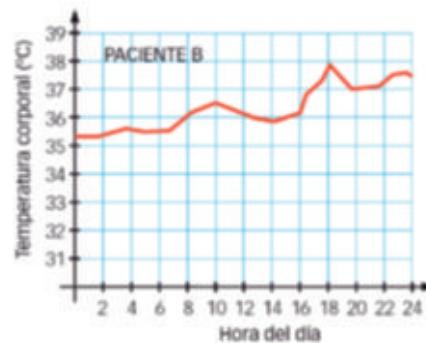
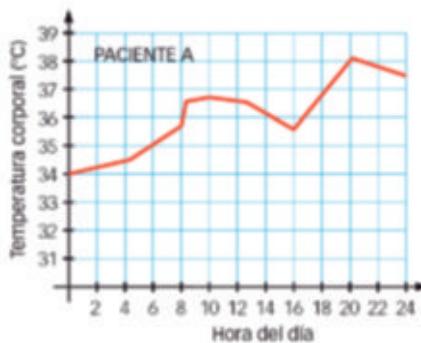
La temperatura corporal funciona como el termostato de nuestro cuerpo. El aumento de esta es un claro síntoma de enfermedad. La fiebre es el mecanismo de defensa de nuestro cuerpo para combatir los organismos que causan las enfermedades.

La siguiente tabla muestra los estados de una persona dependiendo de su temperatura corporal.

Menos de 35°C	35°C a 37°C	37°C a 38°C	38°C a 40°C	40°C a 42°C
HIPOTERMIA	NORMAL	FEBRÍCULA	FIEBRE	HIPERPIREXIA

Se considera que el cuerpo humano no puede soportar una temperatura corporal superior a 42°C .

Estas son las gráficas de dos pacientes de un hospital.



- a) ¿Cuál fue la temperatura máxima y la temperatura mínima de cada uno de ellos?
 - b) ¿Cuál de los dos pacientes se encontró durante mayor tiempo en una situación *normal*?
 - c) Uno de ellos fue rescatado de una inundación y pasó toda la noche en el agua. ¿Cuál de los dos pacientes es? Justifica la respuesta.
- a) Los pacientes A y B alcanzaron una temperatura máxima de 38°C . El paciente A a las 20 h y el paciente B a las 18 h.

El paciente A alcanzó la temperatura mínima de 34°C a las 0 h. A la misma hora, el paciente B alcanzó la temperatura mínima de $35,30^{\circ}\text{C}$.

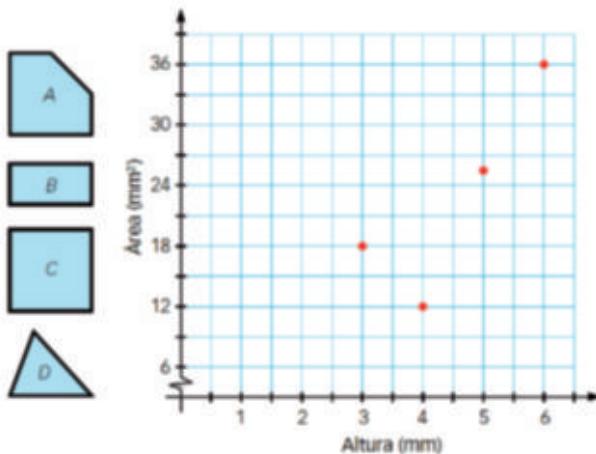
- b) Una situación normal es la comprendida entre 35°C y 37°C .

El paciente B estuvo más tiempo en una situación normal, desde las 0 h hasta las 17 h, hora a la que le empezó a subir la temperatura.

- c) El paciente A, ya que se observan signos de hipotermia hasta las 6 h, hora a la que empieza a tener una temperatura considerada en el rango de normal.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

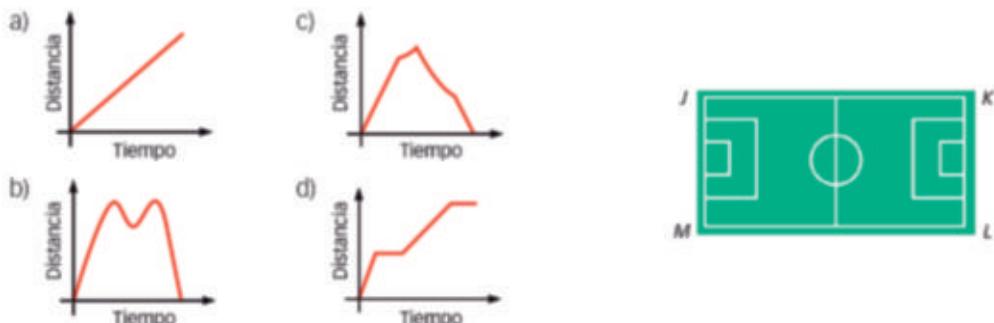
85. Estas figuras tienen la misma base, pero diferentes forma y altura. La gráfica representa el área en función de la altura. Relaciona los puntos con las figuras.



Como C es un cuadrado, su área tiene que ser un cuadrado perfecto, es decir, se puede corresponder con (5, 25) o (6, 36). Como C es la figura de mayor área, será (6, 36). Así, la base de todas las figuras es 6 y, por lo tanto, B se corresponde con (3, 18), D con (4, 12), y por exclusión, A con (5, 25).

86. María empieza a correr desde J en este sentido: J - K - L - M - J - ...

¿Qué gráfica representa la distancia en cada instante al punto de partida?



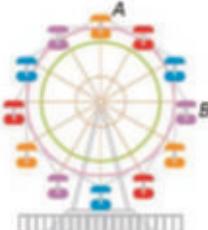
De J a K se aleja del punto de origen de modo lineal, entre K y L se sigue alejando pero de modo no lineal. De L a M comienza a acercarse de nuevo al punto de origen, por lo que la gráfica tiene que descender. De M a J se sigue acercando de modo lineal.

Por tanto, la gráfica buscada es la c).

PRUEBAS PISA

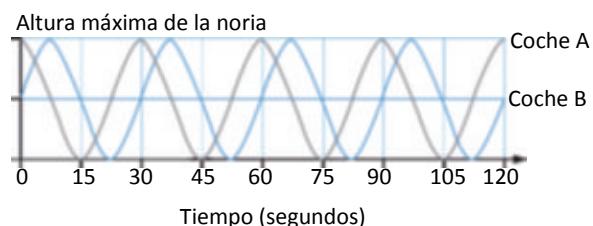
87. Una de las atracciones de la feria es una noria que tarda 30 segundos en dar una vuelta completa.

- a) Utilizando el mismo eje de coordenadas realiza dos gráficas que muestren cómo varía la altura del coche A y la del coche B durante 2 minutos.

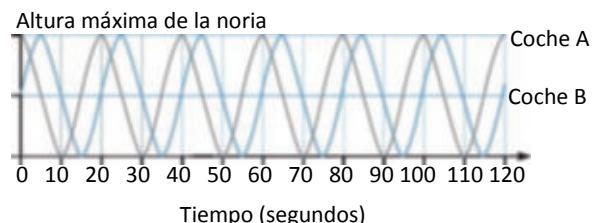


- b) ¿Cómo serían las gráficas si la noria tardase en dar una vuelta completa 20 segundos?

- a) Dan 4 vueltas.



- b) Dan 6 vueltas.



88. Este gráfico muestra cómo varía la velocidad de un coche de carreras a lo largo de una pista llana de 3 km durante su segunda vuelta.



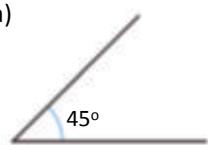
- a) ¿Cuál es la distancia aproximada desde la línea de salida hasta el comienzo del tramo más largo que hay en la pista?
- b) ¿Dónde alcanzó el coche la velocidad más baja durante la segunda vuelta?
- c) ¿Qué se puede decir sobre la velocidad del coche entre el kilómetro 2,6 y el 2,8?
- (Prueba PISA 2003)
- a) 1,4 km.
b) En el km 1,35 del recorrido.
c) La velocidad aumenta en unos 50 km/h, aproximadamente. El coche está acelerando durante ese tramo.

Estadística y probabilidad

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Dibuja en tu cuaderno estos ángulos.

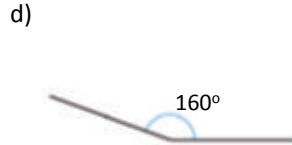
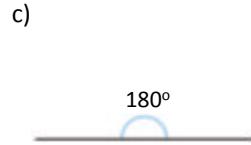
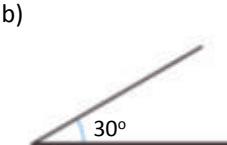
a) 45°



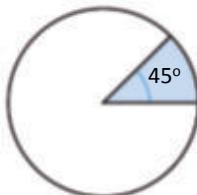
c) 180°

b) 30°

d) 160°

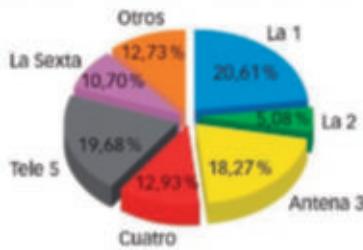


2. Dibuja un sector circular de amplitud 45° en una circunferencia de radio 1,5 cm.



VIDA COTIDIANA

La gráfica representa los datos de la audiencia de la última semana.



- ¿Cuál es la cadena con más audiencia?
- Ordena de mayor a menor los canales según su audiencia.
- Si preguntamos a una persona que pase por la calle, ¿hay más probabilidades de que haya visto TVE o La 2?

La cadena con más audiencia es La 1.

El orden de los canales según la audiencia sería La 1, Tel 5, Antena 3, Cuatro, Otros, La Sexta, La 2.

Preguntando aleatoriamente hay más probabilidades de que haya visto La 1.

RESUELVE EL RETO

¿Está bien construido este diagrama de barras?

No, en el eje vertical no todas las unidades miden lo mismo.



En el armario tengo pañuelos de tres colores: blanco, negro y azul.

-Mi madre dice que si cojo tres, al menos uno será blanco.

-Mi padre dice que si cojo tres, al menos uno será negro.

¿Cuántos pañuelos azules tengo?

Tengo un pañuelo azul.

¿Cuántas veces hay que tirar un dado para asegurar que se repite un resultado?

Al menos siete veces, porque hay 6 posibles resultados.

ACTIVIDADES

1. Para hacer un estudio sobre los gustos musicales de los alumnos de 12 años de una ciudad, se ha escogido a 125 niños de esa edad. Determina:

- a) La población.
- b) La muestra y su tamaño.
- c) Los individuos.
- a) Todos los niños de 12 años de la ciudad.
- b) 125 niños de 12 años de esa ciudad.
- c) Cada niño de 12 años de la muestra.

2. Explica cómo realizarías un estudio sobre el lugar de nacimiento de los alumnos de 1.º de ESO de tu instituto. Indica la población y la muestra.

Como en un colegio el número de alumnos de 1.º ESO no es extremadamente grande, tomaría como población y muestra a todos los alumnos de 1.º ESO.

3. En un estudio sobre la duración de las bombillas que fabrica una empresa, ¿crees conveniente estudiar toda la población? ¿Por qué?

No sería conveniente porque la población es muy grande. Se podría elegir una muestra que represente a la población.

4. Clasifica estas variables estadísticas.

- a) Marca de coche.
- b) Talla de pantalón.
- c) Última cifra del teléfono móvil.
- d) Cantidad de agua bebida en un día.
- a) Cualitativa; ejemplos de valores de la variable: Fiat, Seat, Hyundai, Opel, Renault, Citroën...
- b) Cuantitativa discreta; ejemplos de valores de la variable: 36, 38, 40, 42, 44...
- c) Cuantitativa discreta; la variable solo puede tomar los valores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 o 0.
- d) Cuantitativa continua; ejemplos de valores de la variable: 1,5 litros; 2,3 litros...

5. Escribe tres variables cualitativas, tres cuantitativas discretas y tres cuantitativas continuas.

Respuesta abierta. Por ejemplo

Variables cualitativas:

- Color del pelo (rubio, moreno, castaño, pelirrojo).
- Deporte preferido (fútbol, baloncesto, tenis, ajedrez, ...).
- Resultado final en una asignatura (suspenso, aprobado, bien, notable, sobresaliente, matrícula de honor).

Variables cuantitativas discretas:

- Número de hermanos (0, 1, 2, 3, ...).
- Número de puntos en un partido de baloncesto (0, 1, 2, ..., 60, 61, ...).
- Número de pulsaciones por minuto en un teclado (50, 60, 82...).

Variables cuantitativas continuas:

- Temperatura registrada cada hora en un experimento ($-12,3^{\circ}\text{C}$; 0°C ; $22,7^{\circ}\text{C}$; ...).
- Velocidad de los automóviles por una zona (70 km/h; 89,2 km/h; 110,35 km/h; ...).
- Precio de las revistas de un kiosco (1 €; 1,75 €; 2,20 €; 4,50 €; ...).

6. ¿Puede existir una variable cualitativa y cuantitativa a la vez?

No, ya que la variable cualitativa no toma valores numéricos, y la cuantitativa sí.

7. Recuenta estas calificaciones.

3 2 7 1 9 5 3 4 5 6 7 8 4 5 6
7 4 5 7 3 6 8 9 7 5 9 4 2 8 8

Calificaciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Recuento	1	2	3	4	5	3	5	4	3	30

8. Calcula las frecuencias absolutas y relativas de los datos del ejercicio anterior.

Calificaciones (x_i)	Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia relativa (h_i)
1	1	$1/30 = 0,03$
2	2	$2/30 = 0,06$
3	3	$3/30 = 0,1$
4	4	$4/30 = 0,13$
5	5	$5/30 = 0,16$
6	3	$3/30 = 0,1$
7	5	$5/30 = 0,16$
8	4	$4/30 = 0,13$
9	3	$3/30 = 0,1$
Total	30	1

9. Lanza un dado 20 veces y anota los resultados. Después, haz un recuento y organiza los datos obtenidos. ¿Cuál es la variable que estás estudiando?

Resultados:

2 3 3 4 6 5 1 2 1 3
1 5 6 4 3 6 3 1 5 3

Resultado	1	2	3	4	5	6	Total
Recuento	4	2	6	2	3	3	20

La variable que se estudia es el resultado obtenido al lanzar un dado, que es una variable cuantitativa discreta que puede tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

10. Construye una tabla de frecuencias para los siguientes datos relativos al número de películas estrenadas cada viernes durante varios meses en un cine.



4 6 5 3 4 5 6 3
4 7 7 5 3 5 4 4

x_i	1	2	3	4	5	6	7	Total
f_i	0	0	3	5	4	2	2	16
h_i	0	0	0,1875	0,3125	0,25	0,125	0,125	1

11. Construye una tabla de frecuencias para las notas de un examen de Matemáticas realizado por los alumnos de un grupo de 1.º de ESO.

6 5 6 4 3 2 3 4 4 5 6 8 9 5
7 6 5 8 4 3 3 5 4 7 8 10 7 5

x_i	f_i	h_i
1	0	0,000
2	1	0,036
3	4	0,143
4	5	0,179
5	6	0,214
6	4	0,143
7	3	0,107
8	3	0,107
9	1	0,036
10	1	0,036
Total	28	1

12. Completa en tu cuaderno estas tablas de frecuencias.

Datos	f_i	h_i
2	6	0,24
3	9	0,36
5	10	0,4
Total	$N = 25$	1

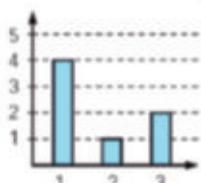
Datos	f_i	h_i
4	8	0,2
6	15	0,375
7	7	0,175
10	10	0,25
Total	$N = 40$	1

13. Construye una tabla de frecuencias para un grupo de 50 datos cuyas frecuencias relativas son:

$$h_1 = 0,1 \quad h_2 = 0,12 \quad h_3 = 0,2 \quad h_4 = 0,3 \quad h_5 = 0,28$$

x_i	f_i	h_i
1	5	0,1
2	6	0,12
3	10	0,2
4	15	0,3
5	14	0,28
Total	50	1

14. Observa este diagrama de barras.



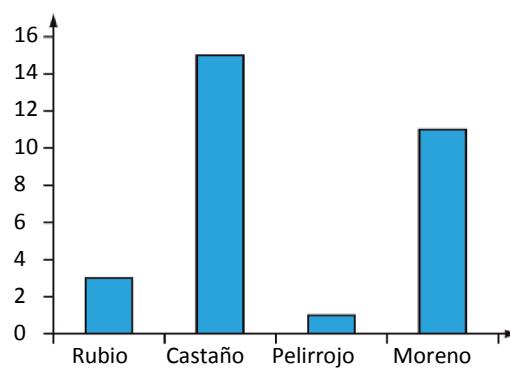
- a) ¿Qué tipo de variable está representada?
b) ¿Cuál es el dato de mayor frecuencia absoluta?

- a) Una variable cuantitativa discreta. b) 1

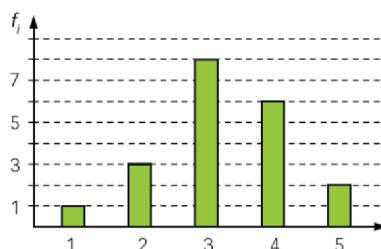
15. Inventa un estudio estadístico con una variable cualitativa que se pueda representar mediante un diagrama de barras.

Respuesta abierta. Por ejemplo, se estudia la variable cualitativa *color del pelo de los alumnos de la clase*.

x_i	f_i	h_i
Rubio	3	0,1
Castaño	15	0,5
Pelirrojo	1	0,033
Moreno	11	0,367
Total	30	1



16. Construye la tabla de frecuencias que se corresponde con el gráfico:



x_i	f_i	h_i
1	1	0,05
2	3	0,15
3	8	0,4
4	6	0,3
5	2	0,1
Total	20	1

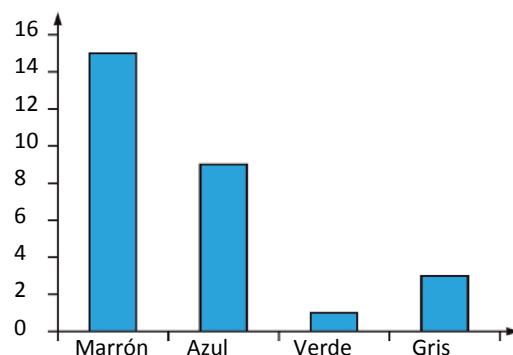
17. Estos son los datos sobre el color de ojos de los alumnos de 1.^º de ESO.

M	M	M	A	G	A	M
A	A	M	A	M	G	M
V	A	G	M	M	M	M
M	M	A	A	A	M	M

M = Marrón A = Azul V = Verde G = Gris

Realiza un gráfico de barras para representar esta información. Indica qué se representa en el eje horizontal y qué en el vertical.

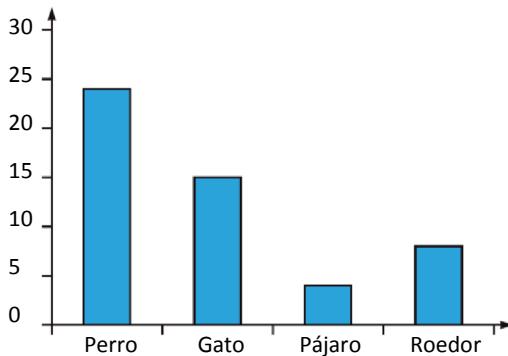
x_i	f_i	h_i
Marrón	15	0,536
Azul	9	0,321
Verde	1	0,036
Gris	3	0,107
Total	28	1



18. Estas son las mascotas de un vecindario:

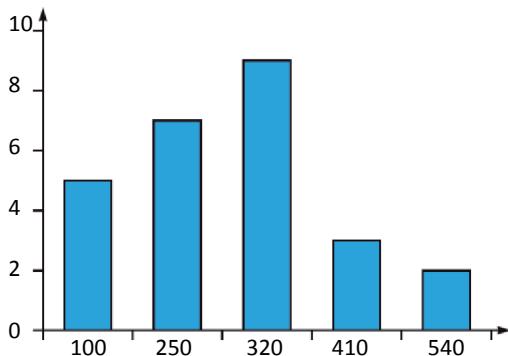
Mascotas	Perro	Gato	Pájaro	Roedor
f_i	24	15	4	8

Representa estos datos en un diagrama de barras.



19. Dibuja un diagrama de barras con esta información.

Datos	100	250	320	410	540
f_i	5	7	9	3	2



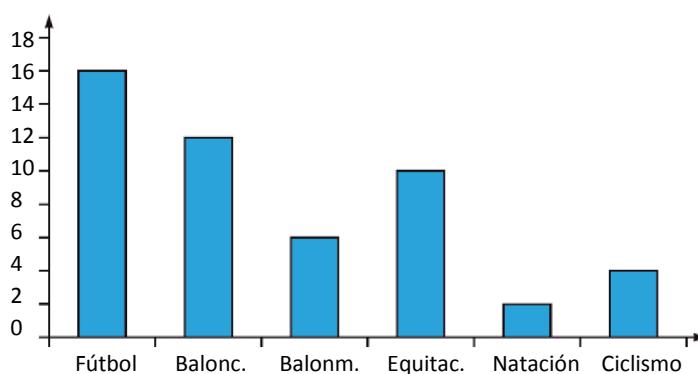
20. Se ha realizado una encuesta en la que se ha preguntado a 50 alumnos por su deporte preferido.

Estos son los resultados:

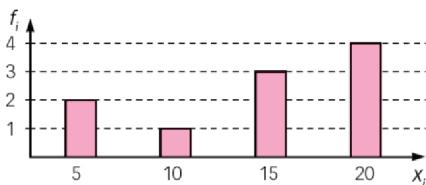
- 16 han respondido fútbol.
- 12, baloncesto.
- 6, balonmano.
- 10, equitación.
- 2, natación.
- Y el resto, ciclismo.

- Construye una tabla de frecuencias.
- Representa la información en un diagrama de barras.

x_i	f_i	h_i
Fútbol	16	0,32
Baloncesto	12	0,24
Balonmano	6	0,12
Equitación	10	0,2
Natación	2	0,04
Ciclismo	4	0,08
Total	50	1

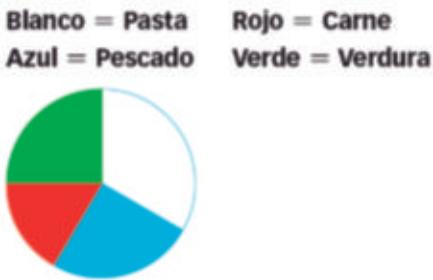


21. Observa este diagrama y responde:



- a) ¿Cuántos datos hay?
- b) ¿Cuál es la frecuencia relativa del dato 15?
- a) Los datos tomados son: $2 + 1 + 3 + 4 = 10$
- b) $3/10 = 0,3$

22. El siguiente diagrama de sectores muestra las respuestas de un grupo de personas sobre el plato de comida preferido.



- a) ¿Qué plato es el preferido?
- b) ¿Y el que menos han elegido?
- a) Pasta.
- b) Carne.

23. Se ha realizado una encuesta a 900 personas en la que se les ha preguntado por su programa de televisión preferido. De todos los encuestados, 150 personas han elegido los informativos. Si representamos los datos en un diagrama de sectores, ¿qué amplitud tendrá el sector correspondiente a los informativos?

$$\text{Ángulo del sector circular correspondiente a los informativos: } \frac{150}{900} \cdot 360^\circ = 60^\circ$$

24. Según el diagrama de sectores de la actividad PRACTICA, determina si es cierto o falso.

- a) Hay el doble de personas que han elegido verduras que carne.
- b) Por cada dos personas que han elegido pasta, solo una ha elegido pescado.

Amplitud de los sectores:

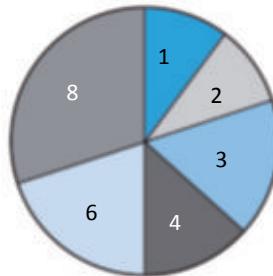
$$\begin{array}{ll} \text{Blanco} = \text{Pasta} = 120^\circ & \text{Azul} = \text{Pescado} = 90^\circ \\ \text{Rojo} = \text{Carne} = 60^\circ & \text{Verde} = \text{Verdura} = 90^\circ \end{array}$$

- a) Falso.
- b) Falso.

25. Representa gráficamente estos datos mediante un diagrama de sectores.

Datos	1	2	3	4	6	8
f_i	15	15	25	20	30	45

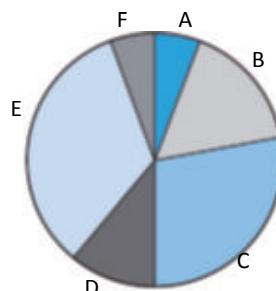
x_i	f_i	h_i	Amplitud
1	15	0,100	36°
2	15	0,100	36°
3	25	0,167	60°
4	20	0,133	48°
6	30	0,200	72°
8	45	0,300	108°
Total	150	1	360°



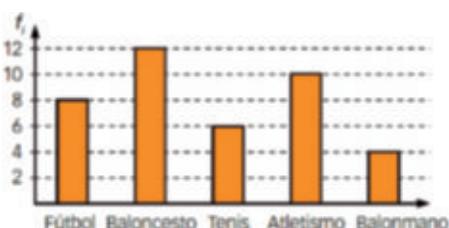
26. Haz un diagrama de sectores de los datos de la tabla.

Datos	A	B	C	D	E	F
f_i	2	6	10	4	12	2

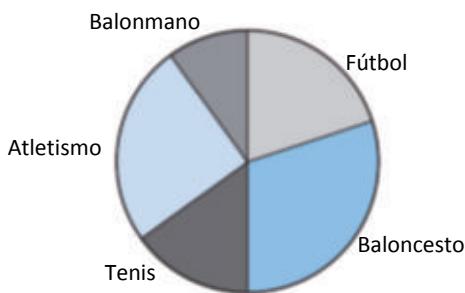
x_i	f_i	h_i	Amplitud
A	2	0,056	20°
B	6	0,167	60°
C	10	0,278	100°
D	4	0,111	40°
E	12	0,333	120°
F	2	0,056	20°
Total	36	1	360°



27. Dibuja un diagrama de sectores que se corresponda con este diagrama de barras.



x_i	f_i	h_i	Amplitud
Fútbol	8	0,20	72°
Baloncesto	12	0,30	108°
Tenis	6	0,15	54°
Atletismo	10	0,25	90°
Balonmano	4	0,10	36°
Total	40	1	360°



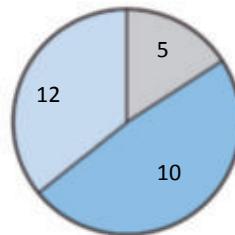
28. Completa en tu cuaderno la tabla y representa los datos mediante un diagrama de sectores.

Datos	f_i	h_i
5	4	0,16
10	12	0,48
12	9	0,36

$$N = 4 : 0,16 = 25 \rightarrow \text{Hay un total de 25 datos.}$$

Calculamos la amplitud para cada uno de los datos:

Datos	Amplitud
5	$0,16 \cdot 360 = 57,6^\circ$
10	$0,48 \cdot 360 = 172,8^\circ$
12	$0,36 \cdot 360 = 129,6^\circ$



29. ¿Cuál de los siguientes diagramas de sectores representa estos datos?

2	3	1	0	2
4	2	2	3	1
3	3	2	1	1
1	2	3	2	4



El diagrama b) representa unos datos que aparecen todos en la misma proporción, ya que sus sectores son iguales. Al fijarse en los datos de este ejercicio, se ve que ese no es el caso, de modo que será el diagrama a) el que los represente.

Se puede también comprobar de modo más detallado, realizando el recuento:

x_i	f_i	h_i	Amplitud
0	1	0,05	18°
1	5	0,25	90°
2	7	0,35	126°
3	5	0,25	90°
4	2	0,1	36°
Total	20	1	360°

El diagrama a) representa los datos.

30. Las edades de un grupo de 8 amigos son: 16, 15, 17, 22, 14, 15, 15 y 16 años. Determina las medidas estadísticas e interprétilas.

$$\text{Media: } \frac{14 - 15 - 15 - 16 + 16 - 17 - 22}{8} = 16,25$$

Moda: 15

Mediana: 15,5

31. Determina las medidas estadísticas.

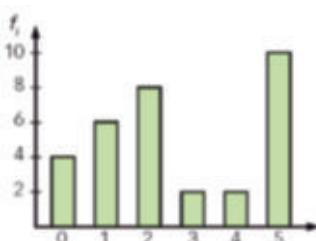
X_i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	4	6	9	0	2	5	1	3

Media: $\frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3}{30} = 3,8$

Moda: 3

Mediana: 3

32. Este diagrama de barras muestra el número de llamadas telefónicas recibidas por un grupo de personas. Calcula sus medidas estadísticas.



Media: $\frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 10}{32} = 2,69$

Moda: 5

Mediana: 2

33. Indica si son experimentos aleatorios.

- a) Medir la longitud de una circunferencia de la que conocemos el radio.
- b) Lanzar un dardo a una diana y observar en qué número cae.
- c) Abrir un libro y anotar el número de página.
- d) Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo del que conocemos sus catetos.
 - a) No es un experimento aleatorio porque si conocemos el radio, podemos calcular la longitud, no es algo aleatorio.
 - b) Sí es un experimento aleatorio.
 - c) Sí es un experimento aleatorio.
 - d) No es un experimento aleatorio. Si conocemos los catetos, podemos calcular la hipotenusa, no es algo aleatorio.

34. Determina el espacio muestral de:

- a) Lanzar un dado y anotar el número que sale.
- b) Sacar una bola de una bolsa que contiene bolas blancas, rojas y verdes.
- c) Lanzar dos dados y sumar las puntuaciones.
 - a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 - b) $E = \{\text{Bola blanca, Bola roja, Bola verde}\}$
 - c) $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

35. Al lanzar dos monedas y anotar el número de caras que salen, ¿cuántos sucesos elementales tiene «Obtener más de 1 cara»?

$$X = \text{cruz} \quad C = \text{cara}$$

$$E = \{XX, XC, CX, CC\}$$

$$S = \text{«Obtener más de una cara»} = \text{«Obtener 2 caras»} = \{CC\}$$

36. ¿Qué probabilidad hay de sacar un 9 al tirar un dado? ¿Y de sacar un número menor que 9?

La probabilidad de sacar un 9 es 0, ya que es un suceso imposible.

La probabilidad de sacar un número menor que 9 es 1, ya que es un suceso seguro.

37. ¿Qué probabilidad hay de sacar el rey de copas al sacar una carta de una baraja de 40 cartas?

$$1/40 = 0,025$$

38. Si tiramos una moneda:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara?
- b) ¿Y de sacar cruz?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara o cruz?

$$E = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$$

$$\text{a)} P(\text{cara}) = 1/2 = 0,5$$

$$\text{b)} P(\text{cruz}) = 1/2 = 0,5$$

$$\text{c)} P(\text{«cara o cruz»}) = 2/2 = 1 \rightarrow \text{Es un suceso seguro.}$$

39. Un cómic tiene 52 páginas. Abrimos el cómic por una página al azar y observamos su numeración.

Calcula las probabilidades de que la página sea:

- a) La página 12.
 - b) La página 62.
 - c) Un número mayor que 45.
 - d) Un número menor que 60.
 - e) Un número entre 10 y 30, ambos incluidos.
 - f) Un número par.
- a) $A = \{12\} \rightarrow \text{Número de casos posibles} = 1 \rightarrow P(A) = 1/52 = 0,019$
 - b) $B = \{62\} \rightarrow \text{Número de casos posibles} = 1 \rightarrow P(B) = 1/52 = 0,019$
 - c) $C = \{46, 47, 48, 49, 50, 51, 52\} \rightarrow \text{Número de casos posibles} = 7 \rightarrow P(C) = 7/52 = 0,135$
 - d) $P(D) = 1$, ya que es un suceso seguro.
 - e) $E = \{10, 11, 12, \dots, 28, 29, 30\} \rightarrow \text{Número de casos posibles} = 21 \rightarrow P(E) = 21/52 = 0,404$
 - f) $F = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 48, 50, 52\} \rightarrow \text{Número de casos posibles} = 52/2 = 26 \rightarrow P(F) = 26/52 = 0,5$

40. Natalia tiene una caja de chinchetas de colores. Hay 12 de color azul, 15 de color verde, 8 de color rojo y 10 de color amarillo. Escoge una al azar. Calcula las probabilidades de que la chincheta sea:

- a) De color rojo.
- b) De color blanco.
- c) De color verde o azul.
- d) No sea de color verde.

Número de casos totales = $12 + 15 + 8 + 10 = 45$

- a) $A = \{\text{Rojo}\}$ → Número de casos posibles = 8 → $P(A) = 8/45 = 0,178$
- b) $B = \{\text{Blanco}\}$ → Número de casos posibles = 0 → $P(B) = 0$, ya que es un suceso imposible.
- c) $C = \{\text{Verde, Azul}\}$ → Número de casos posibles = $12 + 15 = 27$ → $P(C) = 27/45 = 0,6$
- d) $D = \{\text{Azul, Rojo, Amarillo}\}$ → Número de casos posibles = $12 + 8 + 10 = 30$ → $P(D) = 30/45 = 0,667$

41. Pedro tiene en la nevera 6 refrescos de cola, 4 de naranja y 8 de limón. Si elige uno sin mirar, calcula la probabilidad de que su sabor sea:

- a) Limón.
- b) Naranja o limón.

Número de casos totales = $6 + 4 + 8 = 18$

- a) $A = \{\text{Limón}\}$ → Número de casos posibles = 8 → $P(A) = 8/18 = 0,444$
- b) $B = \{\text{Naranja, Limón}\}$ → Número de casos posibles = $4 + 8 = 12$ → $P(B) = 12/18 = 0,667$

42. Los resultados de un examen de Matemáticas son:

- 3 alumnos han obtenido sobresaliente.
- 12 han obtenido suficiente.
- 6 alumnos han suspendido el examen.
- Y el resto han obtenido notable.

Elegido un alumno de los 26, calcula la probabilidad de que haya suspendido el examen.

Número de casos totales = 26 $A = \{\text{suspensos}\}$ → Número de casos posibles = 6

$$P(A) = 6/26 = 3/13$$

43. En un hospital trabajan 450 personas: 156 médicos, 164 enfermeros, 15 celadores, 68 auxiliares y el resto, personal de administración. Se elige un trabajador al azar de este hospital. Calcula la probabilidad de que esa persona sea:

- a) Médico.
- b) Enfermero.
- c) Personal de administración.
- d) Celador o auxiliar.

Número de casos totales = 450

- a) $A = \{\text{Médico}\}$ → Número de casos posibles = 156 → $P(A) = 156/450 = 0,347$
- b) $B = \{\text{Enfermero}\}$ → Número de casos posibles = 164 → $P(B) = 164/450 = 0,364$
- c) $C = \{\text{Personal de administración}\}$ → Número de casos posibles = $450 - (156 + 164 + 15 + 68) = 47$ → $P(C) = 47/450 = 0,104$
- d) $D = \{\text{Celador, Auxiliar}\}$ → Número de casos posibles = $15 + 68 = 83$ → $P(D) = 83/450 = 0,184$



ACTIVIDADES FINALES

44. Se quieren conocer los siguientes datos sobre los alumnos de una clase de 1.º de ESO. Determina la población, la muestra, los individuos y el tipo de variable en cada caso.

- a) Altura de los alumnos.
- b) Profesión de los padres.
- c) Lugar en que desearían vivir cuando sean mayores.
- d) Número de calzado que utilizan.
- e) Número de libros leídos en el último mes.
- f) Comida preferida.
- g) Distancia que recorren hasta llegar al instituto.
- h) Número de amigos invitados a la fiesta de su último cumpleaños.

a) Población y muestra: alumnos de la clase de 1.º ESO.

Individuos: cada uno de los alumnos.

Tipo de variable: la altura es una variable cuantitativa continua.

b) Población y muestra: padres de los alumnos de la clase de 1.º ESO.

Individuos: cada uno de los padres de cada alumno.

Tipo de variable: la profesión es una variable cualitativa.

c) Población y muestra: alumnos de la clase de 1.º ESO.

Individuos: cada uno de los alumnos.

Tipo de variable: el lugar donde desearían vivir es una variable cualitativa.

d) Población y muestra: alumnos de la clase de 1.º ESO.

Individuos: cada uno de los alumnos.

Tipo de variable: el número de calzado es una variable cuantitativa discreta.

e) Población y muestra: alumnos de la clase de 1.º ESO.

Individuos: cada uno de los alumnos.

Tipo de variable: el número de libros es una variable cuantitativa discreta.

f) Población y muestra: alumnos de la clase de 1.º ESO.

Individuos: cada uno de los alumnos.

Tipo de variable: la comida preferida es una variable cualitativa.

g) Población y muestra: alumnos de la clase de 1.º ESO.

Individuos: cada uno de los alumnos.

Tipo de variable: la distancia es una variable cuantitativa continua.

h) Población y muestra: alumnos de la clase de 1.º ESO.

Individuos: cada uno de los alumnos.

Tipo de variable: el número de amigos invitados es una variable cuantitativa discreta.

45. Clasifica las siguientes variables estadísticas en cualitativas o cuantitativas y, en este último caso, en discretas o continuas.

- a) Número de amigos.
- b) Peso.
- c) Color de ojos.
- d) Número de aviones que aterrizan en un aeropuerto cada hora.
- e) Actividad en la que una persona emplea su tiempo libre.
- f) Número de tareas escolares a realizar.
- g) Género literario preferido.
- h) Número de personas que viven en tu casa.

Variable cuantitativa discreta: a), d), f), h).

Variable cuantitativa continua: b).

Variable cualitativa: c), e), g).

- 46.** Se ha realizado una encuesta entre los alumnos de 1.º de ESO en la que se ha preguntado sobre el número de mascotas que tienen en casa. Estos son los datos que se han recogido.

0 1 1 0 3 2 2 2 3 1 1
1 0 1 2 2 3 4 5 3 4 2

Haz el recuento y organiza los datos en una tabla de frecuencias.

Número de mascotas (x_i)	f_i	h_i
0	3	0,136
1	6	0,273
2	6	0,273
3	4	0,182
4	2	0,091
5	1	0,045
Total	22	1

- 47.** Se ha preguntado a un grupo de turistas españoles su lugar de procedencia. Estos son los resultados.

M M PV A PV CL N N M PV A
A CL CL M N A M M CL CL E
A E CL M N CL E A A CL M

Siendo:

M = Madrid

A = Aragón

E = Extremadura

N = Navarra

CL = Castilla y León

PV = País Vasco

Haz el recuento y organiza los datos en una tabla de frecuencias.

x_i	Madrid	Navarra	Aragón	Castilla y León	Extremadura	País Vasco	Total
f_i	8	4	7	8	3	3	33
h_i	0,242	0,121	0,212	0,242	0,091	0,091	1

- 48.** En la biblioteca se ha hecho una encuesta sobre las preferencias literarias de los lectores.

Aventuras: 104

Terror: 28

Novela histórica: 45

Drama: 12

Biografía: 4

Otros: 57

Elabora una tabla de frecuencias con los resultados obtenidos.

x_i	f_i	h_i
Aventuras	104	0,416
Novela histórica	45	0,180
Biografía	4	0,016
Terror	28	0,112
Drama	12	0,048
Otros	57	0,228
Total	250	1

50. Este es el tiempo, en minutos, que dedican a su actividad deportiva preferida los socios de un club.

45	60	50	60	30	25	50	60	80
45	50	60	70	90	30	40	50	65
60	40	60	70	80	40	50	60	60
40	30	50	60	45	50	60	70	80
80	80	70	60	50	40	60	50	40

a) Elabora una tabla de frecuencias en la que también aparezcan los porcentajes que corresponden a cada dato.

b) ¿Cuántos socios participaron en la encuesta?

c) ¿Qué dato tiene mayor frecuencia absoluta? ¿Qué significa?

d) ¿Qué porcentaje de socios dedica más de una hora a su actividad deportiva preferida?

a)

x_i	f_i	h_i	Porcentaje
25	1	0,022	2,2 %
30	3	0,067	6,7 %
40	6	0,133	13,3 %
45	3	0,067	6,7 %
50	9	0,200	20,0 %
60	12	0,267	26,7 %
65	1	0,022	2,2 %
70	4	0,089	8,9 %
80	5	0,111	11,1 %
90	1	0,022	2,2 %
Total	45	1	100,0 %

b) 45

c) 60 minutos; la mayoría de los socios dedican 60 min a su actividad deportiva preferida.

d) $1 + 4 + 5 + 1 = 11$ son los socios que dedican más de 1 h a la actividad.

$$h = 11/45 = 0,244 \rightarrow 0,244 \cdot 100 = 24,4\%$$

24,4 % de los socios dedican más de una hora a su actividad deportiva preferida.

51. Completa en tu cuaderno esta tabla de frecuencias.

x_i	f_i	h_i	Porcentaje
A	5	0,20	20%
B	9	0,36	36%
C	3	0,12	12%
D	8	0,32	32%

Como el porcentaje es 20 %, entonces $h_i = 0,2$. De modo que el total de datos será $N = 5/0,2 = 25$

52. Los resultados del examen de Matemáticas realizado por los alumnos de 1.^o de ESO son:

3	5	6	5	7	5	8	2	7	8	9	4
3	4	5	5	6	5	7	5	6	7	8	9

- a) Elabora una tabla de frecuencias con estos datos.
- b) ¿Qué porcentaje de alumnos ha obtenido un 4 en el examen?
- c) ¿Qué porcentaje de alumnos ha obtenido una nota inferior a 5?
- d) Elabora una tabla de frecuencias donde los datos de la variable sean:

Suspenso Bien (6) Sobresaliente (9 y 10)
 Suficiente (5) Notable (7 y 8)

a)

x_i	f_i	h_i	Porcentaje
2	1	0,042	4,2%
3	2	0,083	8,3%
4	2	0,083	8,3%
5	7	0,292	29,2%
6	3	0,125	12,5%
7	4	0,167	16,7%
8	3	0,125	12,5%
9	2	0,083	8,3%
Total	24	1	100%

b) 8,3%

c) 2 han obtenido un 4, otros dos un 3 y uno un 2 \rightarrow 5 alumnos han sacado menos de un 5 $\rightarrow h = 5/24 = 0,208 \rightarrow 0,208 \cdot 100 = 20,8\%$

El 20,8% de los alumnos han sacado menos de un 5.

d)

x_i	f_i	h_i	Porcentaje
Suspenso	5	0,208	20,8%
Suficiente	7	0,292	29,2%
Bien	3	0,125	12,5%
Notable	7	0,292	29,2%
Sobresaliente	2	0,083	8,3%
Total	24	1	100%

53. En una encuesta realizada a 160 personas sobre su color preferido, el 10% respondió rojo, el 5% naranja, el 30% azul, el 25% verde, el 15% amarillo y el resto negro y blanco a partes iguales. Elabora una tabla de frecuencias para esta información.



Para saber los porcentajes de negro y blanco:

$$100\% - (10\% + 5\% + 30\% + 25\% + 15\%) = 15\% \rightarrow \% \text{ de negro} = \% \text{ de blanco} = 15 : 2 = 7,5\%$$

Estadística y probabilidad

Las frecuencias relativas se calculan dividiendo entre 100 los porcentajes.

Las frecuencias absolutas se calculan multiplicando por 160 las relativas ($f_i = 160 \cdot h_i$)

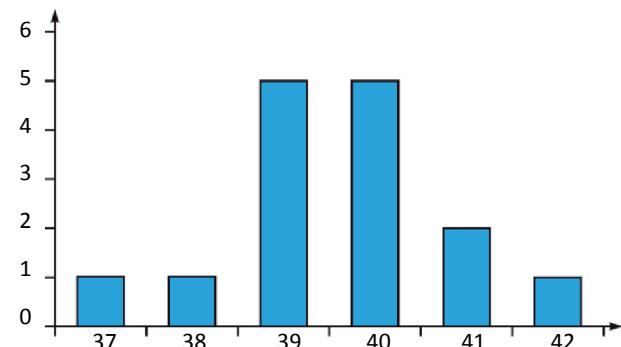
x_i	f_i	h_i	Porcentaje
Rojo	16	0,100	10 %
Naranja	8	0,050	5 %
Azul	48	0,300	30 %
Verde	40	0,250	25 %
Amarillo	24	0,150	15 %
Negro	12	0,075	7,5 %
Blanco	12	0,075	7,5 %
Total	160	1	100 %

54. Las temperaturas máximas, en grados centígrados, que se han registrado en los últimos quince días de agosto han sido:

40 40 41 39 42 41 39 40
40 38 39 37 40 39 39

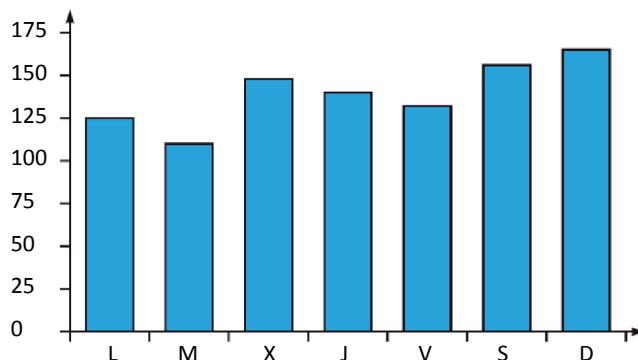
Construye un diagrama de barras que represente estos datos.

x_i	f_i
37	1
38	1
39	5
40	5
41	2
42	1
Total	15



55. Esta tabla recoge los minutos de conexión a Internet en una vivienda a lo largo de una semana. Elabora un diagrama de barras con estos datos.

Día	L	M	X	J	V	S	D
Min.	125	110	148	140	132	156	165

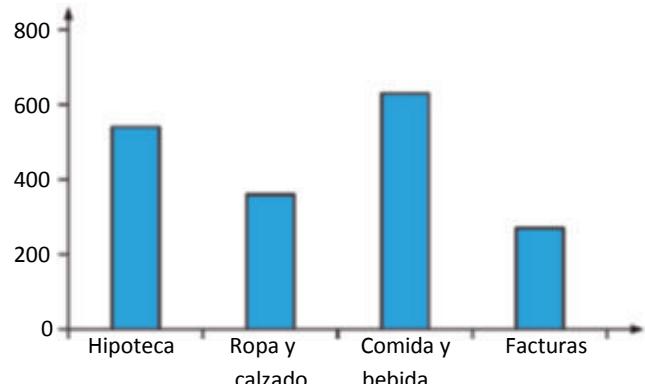


56. Una familia gasta mensualmente 1800 € repartidos de la siguiente manera:

- 30% para la hipoteca de su vivienda.
- 20% en ropa y calzado.
- 35% para comida y bebida.
- Y el resto para el pago de facturas.

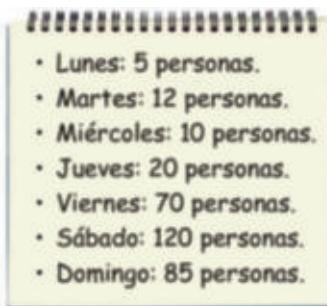
Representa los gastos con un diagrama de barras.

x_i	Porcentaje	f_i
Hipoteca	30 %	540
Ropa y calzado	20 %	360
Comida y bebida	35 %	630
Facturas	15 %	270
Total	100 %	1800



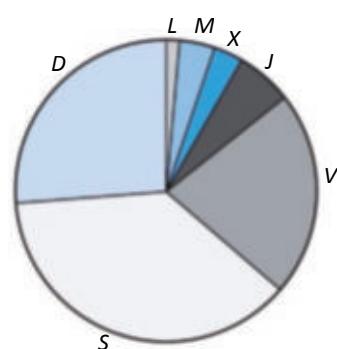
57. Un grupo de personas responde a la pregunta: ¿cuál es el día que prefieres para ir al cine?

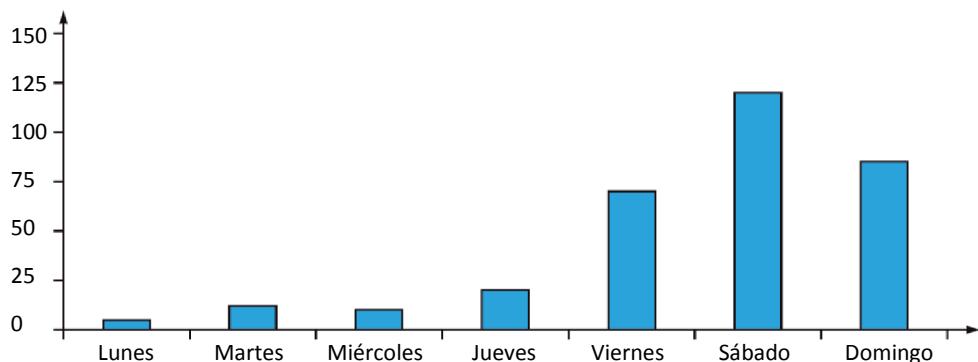
Se obtienen los siguientes resultados:



Representa estos datos en un diagrama de barras y en un diagrama de sectores.

x_i	f_i	h_i	Porcentaje	Amplitud sectores
Lunes	5	0,016	1,6 %	5,76°
Martes	12	0,037	3,7 %	13,32°
Miércoles	10	0,031	3,1 %	11,16°
Jueves	20	0,062	6,2 %	22,32°
Viernes	70	0,217	21,7 %	78,12°
Sábado	120	0,373	37,3 %	134,28°
Domingo	85	0,264	26,4 %	95,04°
Total	322	1	100 %	360°



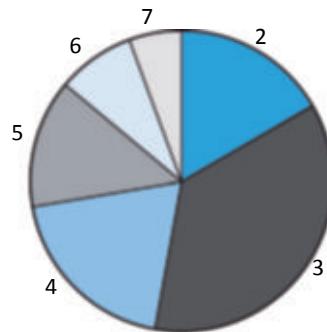


58. Estos datos indican el número de veces que un grupo de personas utiliza el transporte público durante el día.

3	4	2	5	6	7	4	3	5
4	6	2	3	4	3	3	4	2
5	3	2	5	3	3	3	2	5
6	7	4	3	2	3	4	3	3

Construye la tabla de frecuencias y representa estos datos en un diagrama de sectores.

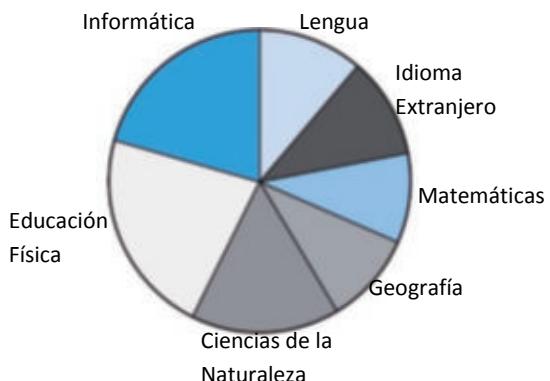
x_i	f_i	h_i	Amplitud sectores
2	6	0,167	60,12°
3	13	0,361	129,96°
4	7	0,194	69,84°
5	5	0,139	50,04°
6	3	0,083	29,88°
7	2	0,056	20,16°
Total	36	1	360°



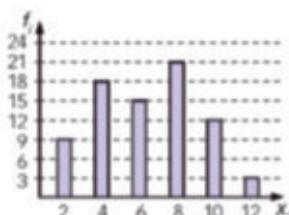
59. Esta tabla muestra la materia preferida por los alumnos de 1.^º de ESO. Representa mediante un diagrama de sectores estas preferencias.

Materia	f_i
Lengua	16
Idioma Extranjero	15
Matemáticas	13
Geografía	14
Ciencias de la Naturaleza	22
Educación Física	31
Informática	29

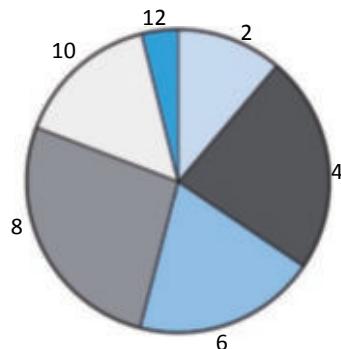
x_i	f_i	h_i	Amplitud sectores
Lengua	16	0,114	41,04°
Idioma Extranjero	15	0,107	38,52°
Matemáticas	13	0,093	33,48°
Geografía	14	0,100	36°
Ciencias de la Naturaleza	22	0,157	56,52°
Educación Física	31	0,221	79,56°
Informática	29	0,207	74,52°
Total	140	1	360°



60. A partir del siguiente gráfico elabora la tabla de frecuencias correspondiente y representa los datos mediante un diagrama de sectores.



x_i	f_i	h_i	Amplitud sectores
2	9	0,115	41,4°
4	18	0,231	83,16°
6	15	0,192	69,12°
8	21	0,269	96,84°
10	12	0,154	55,44°
12	3	0,038	13,68°
Total	78	1	360°



61. Las edades de los padres de 20 alumnos de 1.^o de ESO de un instituto son:

43 40 44 46 50 51 52 46 47 45
40 43 44 46 44 46 48 49 48 46

- a) Construye una tabla de frecuencias.
b) Calcula la media, la mediana, la moda y el rango e interpreta su significado.

a)

Edad	40	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
Frecuencia	2	2	3	1	5	1	2	1	1	1	1

b) Media: $\frac{40 \cdot 2 + 43 \cdot 2 + 44 \cdot 3 + 45 + 46 \cdot 5 + 47 - 48 \cdot 2 + 49 - 50 - 51 + 52}{20} = 45,9$

Mediana: 46

Moda: 46

Rango: 52 - 40 = 12

62. El número de restaurantes en 20 ciudades es:

60 50 50 61 51 64 62 65 53 68
70 70 71 56 60 58 60 59 69 54

- ¿Qué porcentaje de ciudades tienen más de 60 restaurantes?
- Calcula la media, la mediana, la moda y el rango de los restaurantes.
- Interpreta su significado.

a) 50 50 51 53 54 56 58 59 60 60 60 61 62 64 65 68 69 70 70 71

Hay 9 ciudades con más de 60 restaurantes, lo que supone un 45 % de las 20 ciudades.

b) Media: $\frac{50 \cdot 2 - 51 - 53 + 54 - 56 + 58 - 59 - 60 \cdot 3 - 61 - 62 - 64 + 65 - 68 - 69 + 70 \cdot 2 - 71}{20} = 60,55$

Mediana: 60

Moda: 60

c) Interpretación de la media: por término medio en las ciudades hay 60,55 hoteles.

Interpretación de la mediana: el 50 % de las ciudades tienen 60 hoteles o menos.

Interpretación de la moda: lo más común es que en las ciudades haya 60 hoteles.

63. El año pasado las entradas a un país de turistas procedentes del extranjero, expresadas en miles, fueron:

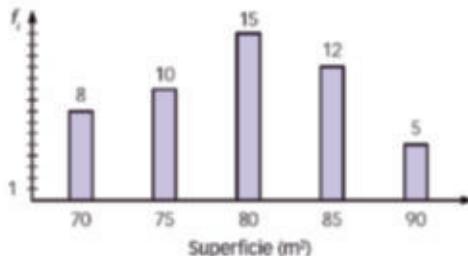
Enero	3002	Julio	9060
Febrero	2920	Agosto	10401
Marzo	3523	Septiembre	6506
Abril	4223	Octubre	4778
Mayo	5041	Noviembre	3126
Junio	5064	Diciembre	3782

¿Cuál fue la media de visitantes? ¿Y la mediana?

Hubo un total de 61 426 visitantes.

La media fue de 5 118,83 por mes. Y la mediana es julio, es decir, el 50 % de los visitantes fueron antes o en julio.

64. En el siguiente diagrama de barras se muestran los metros cuadrados de la vivienda habitual de un grupo de familias.



- a) ¿A cuántas familias se ha encuestado?
 b) ¿Cuántas viven en una casa de más de 80 m²?
 c) ¿Cuál es la superficie media de las viviendas?
 d) ¿Cuál es la mediana de los datos representados? ¿Y la moda? ¿Qué representan estas medidas?

- a) Se ha encuestado a 50 familias.
 b) 17 familias viven en una casa de más de 80 m².

c) $\frac{70 \cdot 8 + 75 \cdot 10 + 80 \cdot 15 + 85 \cdot 12 + 90 \cdot 5}{50} = 79,6 \text{ m}^2$

d) Mediana: 80 m² → El 50 % de las viviendas tienen 80 m² o menos.

Moda: 80 m² → La superficie más habitual de una vivienda es de 80 m².

65. Di cuál de estos experimentos es aleatorio.

- a) Lanzar una piedra al aire y comprobar si cae al suelo.
 b) Determinar el área de un cuadrado.
 c) Determinar la cantidad de agua que cae en un día lluvioso.
 d) Averiguar la nota del próximo examen.
 e) Predecir los goles que se marcarán en un partido de fútbol.
 f) Medir la longitud de una circunferencia.
 g) Extraer una tarjeta de una urna en la que hay 20 tarjetas numeradas del 1 al 20.
 h) Anotar el color de ojos de la próxima persona que suba al autobús.
 i) Averiguar el número de palabras de una página de un libro que empiezan por vocal.
 j) Elegir un alumno de una clase en la que todos son varones y anotar su nombre.

- | | |
|-------|-------|
| a) No | f) No |
| b) No | g) Sí |
| c) No | h) Sí |
| d) Sí | i) Sí |
| e) Sí | j) Sí |

66. Escribe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

- a) Extraer una carta de la baraja española y anotar el palo al que pertenece.
 b) Extraer una carta de la baraja española y anotar si es figura o no.
 c) Extraer una moneda de un monedero en el que hay monedas de 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos.
 d) Tomar una pieza de fruta de un frutero en el que hay manzanas, naranjas, ciruelas, melocotones y plátanos.
 e) Escoger un día de la semana para ir al cine.
 f) Elegir una respuesta a una pregunta entre cuatro posibles: a, b, c y d.

- | | |
|--|--|
| a) $E = \{\text{oros, bastos, espadas, copas}\}$ | d) $E = \{\text{manzana, naranja, ciruela, melocotón, plátano}\}$ |
| b) $E = \{\text{sí, no}\}$ | e) $E = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$ |
| c) $E = \{2, 5, 10, 20, 50\}$ | f) $E = \{a, b, c, d\}$ |

67. Calcula estos sucesos en el experimento que consiste en extraer una moneda de un monedero en el que hay monedas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos.

- a) «Sacar una moneda de 50 céntimos».
- b) «Sacar una moneda cuyo valor sea par».
- c) «Sacar una moneda que valga más de 5 céntimos».
- d) «Sacar una moneda con un número acabado en 0».
- e) «Sacar una moneda que valga menos de 1 céntimo».

$$\begin{array}{ll} \text{a)} S = \{50\} & \text{d)} S = \{10, 20, 50\} \\ \text{b)} S = \{2, 10, 20, 50\} & \text{e)} S = \{\emptyset\} \\ \text{c)} S = \{10, 20, 50\} & \end{array}$$

68. Se extrae una carta de la baraja española. Determina estos sucesos.

- a) «Que sea el 5 de oros».
- b) «Que sea de espadas».
- c) «Que sea un as».
- d) «Que sea una figura».

$$\begin{array}{ll} \text{a)} S = \{5 \text{ de oros}\} & \\ \text{b)} S = \{1 \text{ de espadas}, 2 \text{ de espadas}, 3 \text{ de espadas}, 4 \text{ de espadas}, 5 \text{ de espadas}, 6 \text{ de espadas}, 7 \text{ de espadas}, \text{sota de espadas}, \text{caballo de espadas}, \text{rey de espadas}\} & \\ \text{c)} S = \{\text{as de oros}, \text{as de copas}, \text{as de bastos}, \text{as de espadas}\} & \\ \text{d)} S = \{\text{sota de oros}, \text{sota de copas}, \text{sota de bastos}, \text{sota de espadas}, \text{caballo de oros}, \text{caballo de copas}, \text{caballo de bastos}, \text{caballo de espadas}, \text{rey de oros}, \text{rey de copas}, \text{rey de bastos}, \text{rey de espadas}\} & \end{array}$$

69. Se lanzan dos monedas al aire y se anota el número de caras. Calcula la probabilidad de:

- a) «Obtener una cara».
- b) «Obtener dos cruces».
- c) «Obtener al menos una cara».

$$X: \text{cruz} \quad C: \text{cara} \quad E = \{\text{XX}, \text{XC}, \text{CX}, \text{CC}\} \rightarrow 4 \text{ resultados posibles.}$$

$$\begin{array}{ll} \text{a)} A = \{\text{XC}, \text{CX}\} \rightarrow P(A) = 2/4 = 1/2 = 0,5 & \\ \text{b)} B = \{\text{XX}\} \rightarrow P(B) = 1/4 = 0,25 & \\ \text{c)} C = \{\text{XC}, \text{CX}, \text{CC}\} \rightarrow P(C) = 3/4 = 0,75 & \end{array}$$

70. Se hace girar una ruleta como la del dibujo. Halla la probabilidad de que caiga en:

- a) El número 1.
- b) El número 6.
- c) Un número impar.
- d) Un múltiplo de 3.



$$\begin{array}{ll} \text{a)} P(1) = 4/8 = 0,5 & \text{d)} A = \{1, 3\} \rightarrow P(A) = 7/8 = 0,875 \\ \text{b)} P(3) = 3/8 = 0,375 & \text{e)} B = \{3, 6\} \rightarrow P(B) = 4/8 = 0,5 \\ \text{c)} P(6) = 1/8 = 0,125 & \end{array}$$

71. Considera el experimento que consiste en sacar una bola de una bolsa que contiene 5 bolas azules, 7 rojas y 3 verdes. Calcula la probabilidad de estos sucesos.

- a) «Sacar una bola verde».
- b) «Sacar una bola verde o roja».
- c) «Sacar una bola que no sea verde».
- d) «Sacar una bola negra».

a) $P(\text{verde}) = 3/15 = 0,2$

b) $P(\text{verde o roja}) = 10/15 = 0,667$

c) $P(\text{no verde}) = P(\text{azul o roja}) = 12/15 = 0,8$

d) $P(\text{negra}) = 0$, es una suceso imposible porque no hay bolas negras en la bolsa.

72. Lanzamos dos dados y sumamos los puntos obtenidos. Calcula la probabilidad de obtener:

- | | |
|----------------------|------------------------|
| a) Suma 2. | d) Suma distinta de 7. |
| b) Suma mayor que 2. | e) Suma menor que 12. |
| c) Suma 7. | f) Suma mayor que 12. |

$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \rightarrow 36$ resultados posibles.

a) $A = \{(1, 1)\} \rightarrow P(A) = 1/36 = 0,028$

b) $B = E - \{(1, 1)\} \rightarrow P(B) = 35/36 = 0,972$

c) $C = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \rightarrow P(C) = 6/36 = 1/6 = 0,167$

d) $D = E - C \rightarrow P(D) = 30/36 = 5/6 = 0,833$

e) $F = E - \{(6, 6)\} \rightarrow P(F) = 35/36 = 0,972$

f) $P(\text{suma mayor que } 12) = 0 \rightarrow$ Es un suceso imposible.

73. En la clase de Mario y Lucía hay 16 niños y 14 niñas contándolos a ellos dos. Calcula la probabilidad de que al elegir a un alumno al azar:

- a) Sea niña.
- b) Sea niño.
- c) Sea Mario.

a) $P(\text{niña}) = 14/30 = 0,467$

b) $P(\text{niño}) = 16/30 = 0,533$

c) $P(\text{Mario}) = 1/30 = 0,033$

74. En un examen tipo test, cada pregunta tiene cinco posibles respuestas de las que solo una es la correcta. El alumno solo puede elegir una respuesta. ¿Qué probabilidad tiene de acertar cada pregunta?

$P(\text{acerto}) = 1/5 = 0,2$

75. Raquel pide a su padre un globo. El vendedor tiene 24 globos: 8 son rojos, 6 amarillos, 4 verdes, 4 rosas y 2 blancos. El vendedor coge un globo al azar. Calcula la probabilidad de que:

- a) El globo sea de color blanco.
- b) El globo sea de color amarillo.
- c) El globo no sea rosa.
- d) El globo no sea verde ni rojo.

a) $P(\text{blanco}) = 2/24 = 0,083$

b) $P(\text{amarillo}) = 6/24 = 0,25$

c) $P(\text{no sea rosa}) = 20/24 = 0,833$

d) $P(\text{ni verde ni rojo}) = 12/24 = 0,5$

76. Se saca una moneda de una hucha en la que hay tres monedas de 2 €, cinco de 1 €, diez de 50 céntimos y cuatro de 20 céntimos. Calcula la probabilidad de obtener una cantidad de dinero:

- a) Mayor de 20 céntimos.
- b) Mayor de 50 céntimos.
- c) Mayor de 1,50 €.
- d) Menor o igual a 1 €.

Hay 22 monedas en total.

a) $A = \text{«mayor de 20 céntimos»} = \{2 \text{ €}, 1 \text{ €}, 50 \text{ céntimos}\} \rightarrow P(A) = 18/22 = 0,818$

b) $B = \text{«mayor de 50 céntimos»} = \{2 \text{ €}, 1 \text{ €}\} \rightarrow P(B) = 8/22 = 0,364$

c) $C = \text{«mayor de } 1,5 \text{ €»} = \{2 \text{ €}\} \rightarrow P(C) = 3/22 = 0,136$

d) $D = \text{«menor o igual a 1 €»} = \{1 \text{ €}, 50 \text{ céntimos}, 20 \text{ céntimos}\} = 19/22 = 0,864$

DEBES SABER HACER

1. Clasifica estas variables estadísticas.

- a) Duración de una película de cine.
 - b) Número de hojas de un árbol.
 - c) Color de los calcetines.
- a) Variable cuantitativa continua.
 - b) Variable cuantitativa discreta.
 - c) Variable cualitativa.

2. El número de sucursales que un banco tiene en las 16 provincias en las que se ha instalado es:

1	4	2	4	3	2	5	4
2	3	2	1	2	3	3	2

Organiza los datos en una tabla de frecuencias, dibuja un diagrama de barras y calcula su media, moda, mediana y rango.

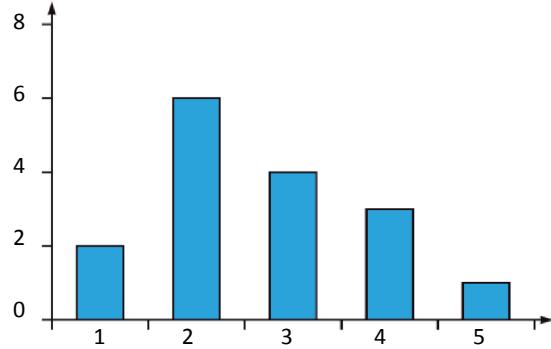
x_i	f_i	h_i	Amplitud sectores
1	2	0,125	45º
2	6	0,375	135º
3	4	0,250	90º
4	3	0,1875	67,5º
5	1	0,0625	22,5º
Total	16	1	360º

$$\text{Media: } \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{16} = 2,69$$

Mediana = 2,5

Moda = 2

Rango = 5 - 1 = 4.



3. En el experimento consistente en lanzar tres monedas y anotar el número de caras que salen, determina los siguientes sucesos:

- a) «Sacar menos de dos caras».
- b) «Sacar más de 1 cara».
- c) «Sacar menos de 4 caras».

X: cruz

C: cara

$$E = \{\text{XXX}, \text{XXC}, \text{XCX}, \text{CXX}, \text{XCC}, \text{CXC}, \text{CCX}, \text{CCC}\}$$

- a) A = «Sacar menos de dos caras» = «Sacar una cara» = {XXC, XCX, CXX, XXX}
- b) B = «Sacar más de 1 cara» = «Sacar 2 o 3 caras» = {XCC, CXC, CCX, CCC}
- c) Suceso imposible → C = «Sacar 4 caras»

Suceso seguro → D = «Sacar al menos una cara o una cruz»

4. En una caja tenemos ocho bolígrafos, cinco lapiceros y siete rotuladores. Se extrae uno de ellos. Calcula la probabilidad de obtener:

- a) Un bolígrafo.
- b) Un lapicero.
- c) Un rotulador.
- d) Una goma.

$$\text{a) } P(\text{bolígrafo}) = 8/20 = 2/5 = 0,4$$

$$\text{b) } P(\text{lapicero}) = 5/20 = 1/4 = 0,25$$

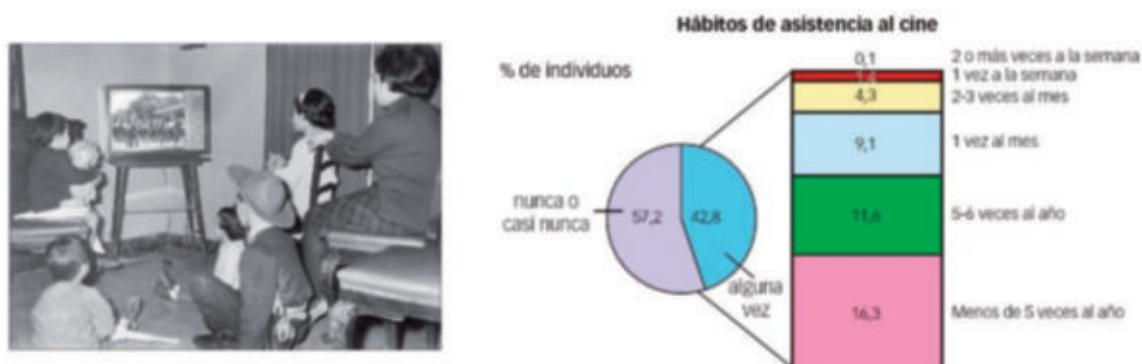
$$\text{c) } P(\text{rotulador}) = 7/20 = 0,35$$

$$\text{d) } P(\text{goma}) = 0 \rightarrow \text{Es un suceso imposible.}$$

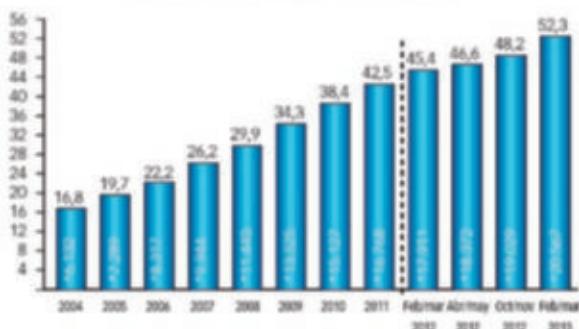
COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

77. Desde que en 1956 comenzaran las primeras emisiones de Radio Televisión Española, la televisión se ha convertido en uno de los elementos de ocio más importantes. Hoy en día, según los datos de un estudio estadístico publicado recientemente, el 48 % de los encuestados señala la televisión como su primer medio de entretenimiento. Aunque no es el único.

Estos son los datos publicados, extraídos de una gran encuesta que se denomina Estudio General de Medios.



Evolución del uso de Internet 2012

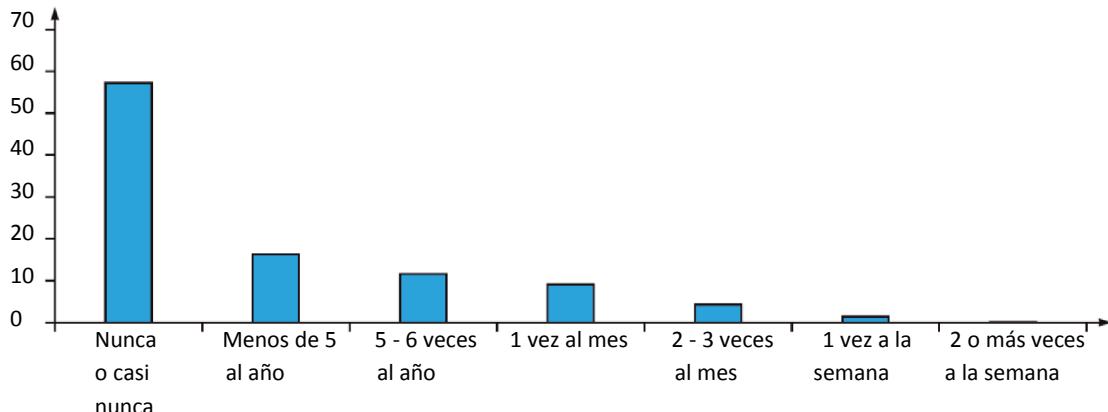


- Si la encuesta Hábitos de asistencia al cine se realizó a 1000 personas, ¿cuántas contestaron «Menos de 5 veces al año»?
- Realiza un diagrama de barras con todas las opciones de la encuesta Hábitos de asistencia al cine.
- ¿En qué período se produce el mayor incremento de porcentaje en el uso de Internet?
- Observa el gráfico de Evolución del uso de Internet; ¿a cuántas personas aproximadamente preguntaron?

$$a) 16,3 \% \text{ de } 1000 = 163 \text{ personas}$$

$$b) \text{Amplitud sectores} = \frac{360 \cdot \text{porcentaje}}{100}$$

x_i	Nunca o casi nunca	Menos de 5 veces al año	5 - 6 veces al año	1 vez al mes	2 - 3 veces al mes	1 vez a la semana	2 o más veces a la semana	Total
Porcentaje	57,2 %	16,3 %	11,6 %	9,1 %	4,3 %	1,4 %	0,1 %	100 %



c) Del 2008 al 2009.

d) El 52,3 % de los encuestados = 20 567 → Encuestados = $\frac{20\ 567 \cdot 100}{52,3} = 39\ 325$

Se han encuestado a unas 40 000 personas

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

- 78.** ¿Cómo elegirías una muestra de 200 individuos que fuese representativa de una población formada por 3 000 menores de 18 años, 1 500 adultos y 2 000 personas mayores de 65 años? Ten en cuenta que la muestra debe tener representantes de los distintos grupos en la misma proporción que se encuentran en la población.

$$\text{Población total} = 3\ 000 + 1\ 500 + 2\ 000 = 6\ 500$$

$$6\ 500 \text{ personas} \rightarrow 3\ 000 \text{ menores de 18 años}$$

$$200 \text{ personas} \rightarrow x$$

$$x = \frac{200 \cdot 3\ 000}{6\ 500} = 92,31$$

$$6\ 500 \text{ personas} \rightarrow 1\ 500 \text{ adultos}$$

$$200 \text{ personas} \rightarrow y$$

$$y = \frac{200 \cdot 1\ 500}{6\ 500} = 46,15$$

$$6\ 500 \text{ personas} \rightarrow 2\ 000 \text{ mayores de 65 años}$$

$$200 \text{ personas} \rightarrow z$$

$$z = \frac{200 \cdot 2\ 000}{6\ 500} = 61,54$$

La muestra consta de 92 menores de 18 años, 46 adultos y 62 mayores de 62 años.

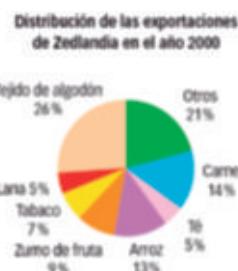
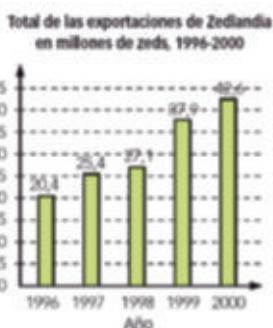
- 79.** Las calculadoras científicas tienen la función *Ran* o *Random*. Con dicha función obtenemos un número entre 0 y 1 que podemos considerar que es aleatorio. ¿Cómo podrías obtener un número aleatorio entre 0 y 100 usando esa función?

Multiplicando por 100 el número que da la función y tomando la parte entera.



PRUEBAS PISA

80. Los siguientes diagramas muestran información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país cuya moneda es el zed.



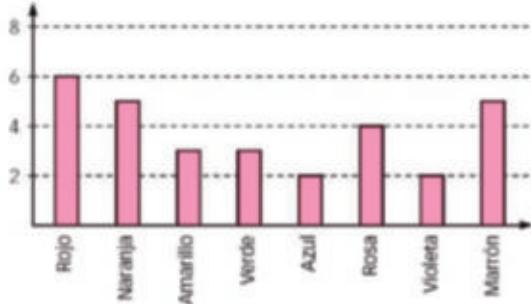
- a) ¿Cuál fue el valor total (en millones de zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998?
b) ¿Cuál fue el valor de las exportaciones de zumo de fruta de Zedlandia en el año 2000?

(Prueba PISA 2003)

- a) 27,1 millones.
b) El 9 % de las exportaciones del 2000 fueron de zumo de fruta → 9 % de 42,6 millones = 3,834 millones.

Las exportaciones de zumo de fruta en 2000 fueron de 3 834 000.

81. La madre de Roberto le deja coger un caramelito de una bolsa. Él no puede verlos. El número de caramelos de cada color que hay en la bolsa se muestra en el siguiente gráfico.



- ¿Cuál es la probabilidad de que Roberto coja un caramelito rojo?

(Prueba PISA 2003)

Número total de caramelos = $6 + 5 + 3 + 3 + 2 + 4 + 2 + 5 = 30$

$$P(\text{rojo}) = 6/30 = 1/5 = 0,2$$