แคลคูลัส

x ลู่เข้า a ใดๆ

ลิมิต

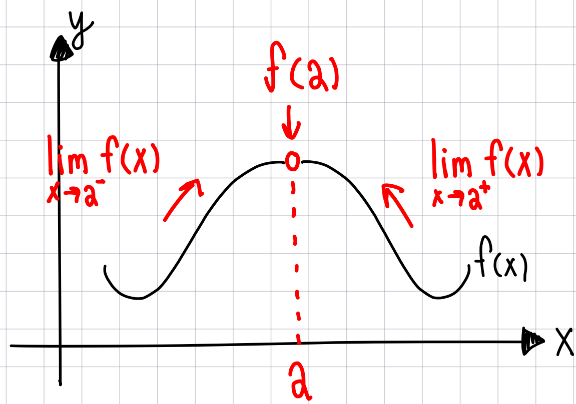
หมายถึงค่าเข้าใกล้ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

พิจารณา 2 กรณี
- $x < a$ เข้าใกล้ a ทางซ้าย $x \to a^-$
- $x > a$ เข้าใกล้ a ทางขวา $x \to a^+$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ จะหาค่าได้เมื่อ
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ หาค่าได้
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

ทฤษฎีลิมิต



- $\lim\limits_{x \to a} k = k$
- $\lim\limits_{x \to a} x = a$
- $\lim\limits_{x \to a} x^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$
- $\lim\limits_{x \to a} k f(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

→ $\times$, $\div$ ใช้หลักคล้ายกัน

- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \left| \lim\limits_{x \to a} f(x) \right|$
- $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x) \right)^n$
- $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

หลักการหาลิมิต

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ แทน x ด้วย a

$\frac{\text{เลข}}{\text{เลข}}$, $\frac{0}{\text{เลข}} \rightarrow 0$, $\frac{\text{เลข}}{0} \rightarrow$ หาค่าไม่ได้ , $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ → แยกตัวประกอบ , Conjugate , กฎโลปิตาล

ลิมิตเข้าใกล้ ∞

expo ; $\lim_{x \to \infty} r^x = 0$ เมื่อ $|r| < 1$

พหุนาม ; $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = 0$ เมื่อ $m, n \in I^+$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

- $f(a)$ หาค่าได้
- $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ $\left(\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)\right)$
- $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

ขาดสมบัติข้อใดข้อหนึ่ง f จะไม่ต่อเนื่องที่ x = a

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อัตราการเปลี่ยนแปลง

แบบเฉลี่ย เช่น x_1 ถึง x_2 $= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

ตำแหน่ง x_n $= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_n + h) - f(x_0)}{h}$

กำหนดให้ $y = f(x)$ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ตำแหน่ง $x = a$; $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

การหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร

$$\frac{d}{dx} k = 0$$

$$\frac{d}{dx} kx^n = k\frac{dx^n}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v'$$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = uv' + vu'$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a$$

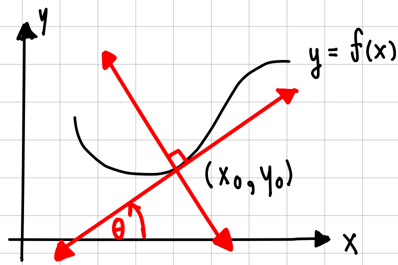
กฎลูกโซ่

→ อนุพันธ์ของ $f \circ g(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

→ $y = f(u)$ และ $u = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ความชันของเส้นโค้ง (m)



ความชันของเส้นสัมผัสโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(x_0, y_0) = f'(x_0)$

- ถ้าเส้นสัมผัสตั้งฉาก $m_1 \cdot m_2 = -1$
- $f'(x_0) = \tan\theta$ เมื่อ θ คือมุมเอียงของเส้นสัมผัส

ฟังก์ชันเพิ่ม - ฟังก์ชันลด

- ฟังก์ชันเพิ่ม: $f'(x) > 0$
- ฟังก์ชันลด: $f'(x) < 0$

หลักการหาค่าสุดขีด

- หาค่าวิกฤติจากสมการ $f'(x) = 0$
- ตรวจสอบโดย $f''(a)$
  - $f''(a) < 0$ มีค่าสูงสุดที่ $x = a$
  - $f''(a) > 0$ มีค่าต่ำสุดที่ $x = a$
- หาค่าต่ำสุด, สูงสุดสัมบูรณ์
  - หาค่าฟังก์ชันของค่าวิกฤต
  - เทียบค่าฟังก์ชันจากขั้นแรก
    - ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f
    - ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f

กฎโลปิตาล (L'Hopital's Rule)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

การอินทิเกรต เขียนแทนด้วย $\int f(x)\,dx$

- เรียกว่า ปริพันธ์ หรือ ปฏิยานุพันธ์ ของ $f(X)$
- $$f(x) \underset{\text{integrate}}{\overset{\text{diff}}{\rightleftharpoons}} f'(x) \underset{\text{integrate}}{\overset{\text{diff}}{\rightleftharpoons}} f''(x)$$

สูตรการหาอินทิเกรต

→ $\int dx = x + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่

→ $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$ เมื่อ $k \neq 0$

→ $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

→ $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $n \neq -1$

อินทิเกรตจำกัดเขต

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

จาก $a \rightarrow b$

กำหนดให้เป็นอินทิเกรต

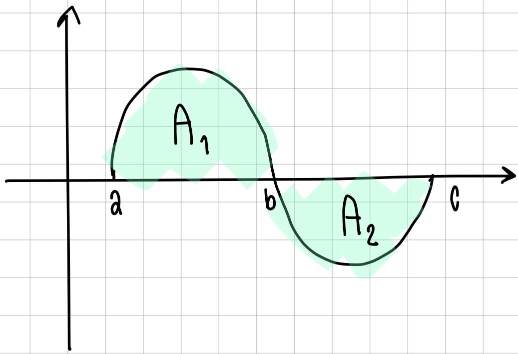
สมบัติของอินทิเกรตจำกัดเขต

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

พวกมีค่าคงตัวหรือ
การบวก $f(x)$, $g(x)$
ก็คล้ายอนุพันธ์

พื้นที่ระหว่างกราฟกับแกน X



พท. A_1 อยู่เหนือแกน X อินทิเกรตออกมาจะได้เป็นบวก

พท. A_2 อยู่ใต้แกน X อินทิเกรตออกมาจะได้เป็นลบ

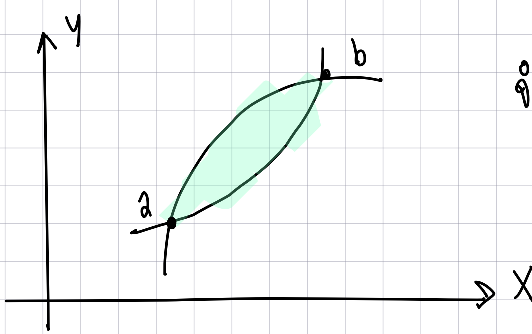
$$-\int_b^c f(x)\,dx$$

Note

- $S \underset{\text{integrate}}{\overset{\text{diff}}{\rightleftarrows}} V \underset{\text{integrate}}{\overset{\text{diff}}{\rightleftarrows}} a \rightarrow$ อัตราเร่ง

  S → ระยะทาง

  V → ความเร็ว

- 

  จำกัดเขตบน – จำกัดเขตล่าง

NATTHRAT YOYOO

ตัวอย่าง !

$$\int (4x+5)^{10}\,dx$$

ให้ $u = 4x+5$

$$\int (4x+5)^{10}\,dx = \int u^{-4}\,dx$$

$$\frac{du}{dx} = 4$$

$$dx = \frac{du}{4}$$

$$\therefore \int (4x+5)^{10}\,dx = \int u^{10}\,\frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{u^{11}}{11} + C$$

$$= \frac{1}{44}(4x+5)^{11} + C \quad \#$$