

Math

ຈົນສະການສຸຂ ແລະ ຮູ່ຈັກຕ້ວເມີນ

“ ນຶ່ງ ຂຽນ ”

สูตรคณิตศาสตร์ 1

1. เซต (set) - เป็นอbjek.

$\{ \text{~~~~~} \}$ < วงแหวนสีสีก
สีสีกภายใน set

- เซตจำกัด = ของจำนวนจำกัดใน set ตัว EX. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
- เซตอนันต์ = ของจำนวนไม่จำกัดใน set ไม่ต่อ $\{1, 2, 3, \dots\}$
- เซตว่าง \emptyset = เซตที่ไม่มีสมาชิกใน set * จвл. สังเคราะห์ = 0 ตัว \rightarrow เซตจำกัด
 \hookrightarrow ที่นี่ Subset ของ set ใดๆ

$$\begin{array}{l|l} Z = I = \text{จำนวนเต็ม} & R = \text{จำนวนจริง} \left\{ 1, 0, -5, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0.7, \sqrt{7}, -\sqrt{8} \right\} \\ I^+ = \text{จำนวนเต็ม}^+ & I^- = \text{จำนวนเต็ม}^- \\ N = \text{จำนวนบวก} & \end{array}$$

- จำนวนสมาชิก $n(\cdot)$ EX. $n(A)$

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow n(A) = 4$$

- Subset = เซตย่อย “แท้ไม่แท้ แท้ไม่แท้”

ถ้า A เป็น $\subset B$ และ สมาชิกทุกตัวใน A เป็นสมาชิกใน B ด้วย.

สูตรหา จำนวน Subset
 $2^{n(\cdot)}$

$$\begin{array}{l} \text{EX. } \therefore A = \{1, 3, 5\} \\ B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} A \subset B$$

- การเทียบกัน

\hookrightarrow สมาชิกทุกตัวใน set A อยู่ใน set B
และ สมาชิกทุกตัวใน set B อยู่ใน set A ด้วย.

- เปรียบเทียบ \rightarrow สมาชิกทุกตัวใน A เป็นสมาชิกใน B แน่นอน สมาชิกบางตัวใน B ไม่เป็นสมาชิกใน A
 $\therefore n(A) < n(B)$

$$\text{Ex. } B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad \text{Subset B มีกี่ตัว?} \quad \Rightarrow 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 \text{ ตัว}$$

$$n(B) = 5$$

$$\text{Subset } 0 \text{ ตัว } \emptyset \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 5$$

$$2 \rightarrow \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$3 \rightarrow \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10$$

$$4 \rightarrow \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2} = 5$$

$$5 \rightarrow 1$$

- Power set = ម៉ូលបន្ទុកស៊ីបេចតែងអង្គ $P(A) = 2^{n(A)}$

EX. set A : $A = \{3, 4, 5\}$

តើ $n(A) = 3$, subset = $2^{n(A)} = 8$ នៅទំនួរ

គឺ $\{\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \emptyset\}$

អំពីការ = $P(A)$

សម្របតិ ① $\emptyset \in P(A)$

⑤ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

② $\emptyset \subset P(A)$

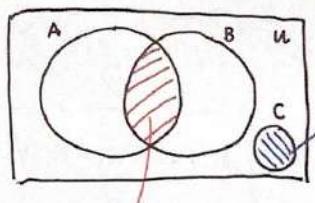
⑥ $(\text{ឯា}) P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

③ $A \in P(A)$

⑦ $\{\emptyset\} \subset P(A)$ តែងតាំង

④ តើ $A \subset B$ នៅលើ $P(A) \subset P(B)$ — *

- ធនធានភាពទេនន៍ - ចុចមន់លទ្ធផល

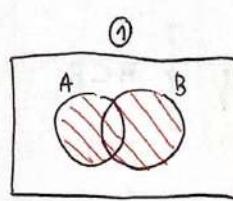


មិនមែនសមាជិកចំណែក A, B ឡែ

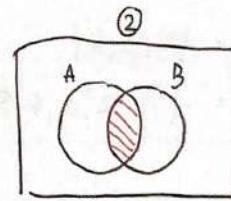
បែងសមាជិកចំណែក A, B

Operation of Set *

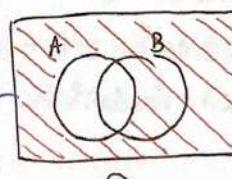
① Union \cup ($A \cup B$) "ឱ្យមេឃើញ"



② Intersection \cap ($A \cap B$)

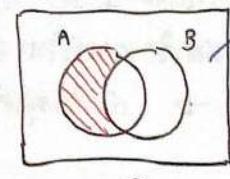


③ Complement \complement (A')

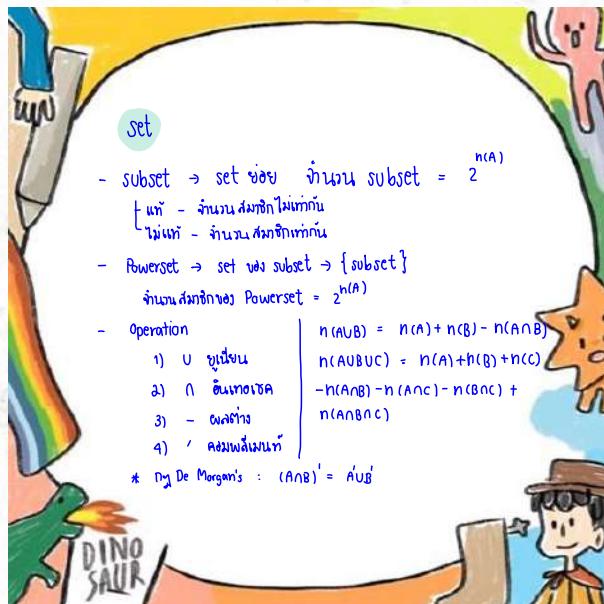


④ ធម៌កា - ($A - B$)

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$



$$A - B \neq B - A$$



2. ตรรกศาสตร์

- ประพจน์ = ข้อความที่สามารถดูออกได้ว่า ข้อความนี้ จริง เท็จ อย่างใดอย่างหนึ่ง
 - ประพจน์เป็น จริง
+ ตัวอย่าง สัตว์ไปรษณีย์ค่าตัวแพง ได้
- ข้าค่าความจริงได้ → กล่าวเป็น ประพจน์

$$\text{EX. } 5 \times 2 = 10 \text{ ประพจน์}$$

$$x + z = 10 \text{ ประพจน์} \rightarrow x + z = 10 ; x = 5 \text{ (F)} \rightarrow \text{ประพจน์}$$

ตารางค่าความจริง → วิธีหา ตัวเขียนประพจน์

ກວດ.

- ① และ (\wedge)
- ② หรือ (\vee)
- ③ แต่...แล้ว (\rightarrow)
- ④ ก็ต่อเมื่อ (\leftrightarrow)

قوله $p \wedge q$ เป็นประพจน์

หมายเหตุ

↑ ตัวบ่งปฐมภัย 2 แบบ

(A) , (E)
all
some

(ทั้งหมด) (บางส่วน 1 ตัว)

P	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \neg q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

* นิสัย \Rightarrow คือสิ่ง
จะเกิดที่ใช้ไปล้วนๆ
ค่าความจริงหากเดิม
(ตรงกันกับประพจน์
เดิม)

P เมื่อ T
 $\sim p$ เมื่อ F

ประพจน์ที่สมมูลกัน

ค่าความจริงเหมือนกัน.

- ① $p \vee q \equiv q \vee p$
- ② $\sim(\sim p) \equiv p$
- ③ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- ④ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- ⑤ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
- ⑥ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- ⑦ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- ⑧ $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- ⑨ $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- ⑩ $\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
- ⑪ $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- ⑫ $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$$p \vee \sim p \equiv T$$

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

$$p \wedge T \equiv p$$

$$p \wedge F \equiv F$$

$$p \vee T \equiv T$$

$$p \vee F \equiv p$$

สัจฉินีสันดร์ = ประพจน์สี่ค่าความจริงเป็น (T) เสมอ

- กรณีสอบโดย ① สัมภาษณ์ด้วยความจริง
② ใช้ชื่อลักษ์ 'ข้อเท็จจริง' *

③ หลักความสัมมูล

วิธี นัยการสัมมต์ ความข้อเท็จจริง

→ สัจฉินีสันดร์ สี่ค่าความจริง (T) เสมอ ผล สัมมต์ในประพจน์ ถ้าก็ตาม สี่ค่าความจริง, (F)
แล้วคือชุด หาค่าความจริง ประพจน์ซ่อน

ตัวข้อเท็จจริง → จะวิ่งทุกกรณี → สัจฉินีสันดร์

* การให้เหตุผล (ความลับเหตุผล)

กรณีสอบโดย ① หลักความสัมมต์สัมมูล (ท่อง)

② หลักความข้อเท็จจริง " เหตุ เป็นจริง \rightarrow ผล เป็นจริง "

\hookrightarrow เหตุ (จริง) \xrightarrow{F} ผล (เท็จ)

3 จำนวนจริง

- ทุกจำนวน **ยกเว้น** ที่ **หักติดลบ**

สมบัติ

เอกลักษณ์การบวก \rightarrow บวกแล้วได้ตัวเดิม $a + 0 = a$

$\overbrace{\quad}$ คูณ \rightarrow คูณแล้วได้ตัวเดิม $a \times 1 = a$

อินเวอร์สการบวก \rightarrow จน. ที่บวกแล้วได้เอกลักษณ์ $a + (-a) = 0$

$\overbrace{\quad}$ คูณ \rightarrow จน. ที่คูณแล้วได้เชกลักษณ์ $a \times \frac{1}{a} = 1 ; a \neq 0$

นัยการ

$$1. y = |x| \quad x \in \mathbb{R}, y \geq 0$$

$$2. y = \frac{a}{x} \quad x \neq 0$$

$$3. y = x^2 \quad x \in \mathbb{R}, y \geq 0$$

$$4. y = \sqrt{x} \quad x \in \mathbb{R}, y \text{ เป็นจำนวนบวก}$$

กฎชี้ว่าค่าสัมบูรณ์

$$|a|^2 = a^2$$

$$|x| = \sqrt{x^2} - \text{รูปแบบ} \quad ***$$

$$* |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$* |x-y| \geq |x| - |y|$$

$$|xy| = |x||y| \quad \left. \begin{array}{l} \text{สำหรับ } \\ |x| = |x|/|y| \end{array} \right\} \text{สำหรับ } y \neq 0$$

$$|x/y| = |x|/|y|$$

หลักการแก้สมการ, อสมการค่าสัมบูรณ์

การคูณด้วยการ จะต้องกลับเครื่องหมายกลับ - *

$$|x| = a \rightarrow -x = a \text{ หรือ } x = a$$

$$|x| < a \rightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \rightarrow x < -a \text{ หรือ } x > a$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{x} > 3 \\ x \rightarrow \end{array} \right\} \text{รูปแบบ } * \text{ ไม่ได้ } - **$$

$$|a| + |b| = 0 \text{ แสดงว่า } 0 + 0 = 0$$

* หากมีค่าคงที่ใน || สำหรับค่าของจะได้.

ตัวเรย์ factor

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

ถ้า x จำนวนใดๆ ส่มการก็ล้วนสอด

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ผลบวกของ

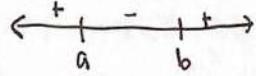
ผลคูณของ

$$b^2 - 4ac > 0 \text{ มี } 2 \text{ ค่าตอบ}$$

$$= 0 \text{ มี } 1 \text{ ค่าตอบเดียว}$$

$$< 0 \text{ ไม่มีค่าตอบ}$$

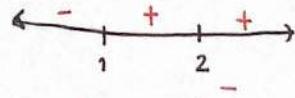
คิดช่วง



กรณีที่ +, -, + ไปเรียงๆ (ปกติ)

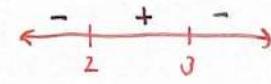
กรณีที่ +, -, - จะมีซึ้ง - **

$$\text{Ex. } (x-1)(x-2)^2 > 0$$



* กรณีลูกคูณลบ

$$(-1)(x-2)(x-3) > 0$$



NOTE

เอกลักษณ์การบวก = 0

$\overbrace{\quad}$ คูณ = 1

* Inverse = ตัวที่ทำให้ได้เอกลักษณ์

$$\text{ທຄງໝູນທີ່ປະກອບ} \quad P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k$$

ກົດໆ : ມັກຕ້ອງໃຫ້ a ຂານຈະກຳລົມການ ແມ່ນໄດ້ ສປປ ຕົວແຮກ = 1

$$P(x) = x^n + \frac{b}{a}x^{n-1} + \frac{c}{a}x^{n-2} + \dots + \frac{k}{a}$$

$$\text{ອັນປະກອບ } P(x) \text{ ຄູແກ້ນ} = (-1)^n \frac{k}{a}$$

$$\text{ບວກຕົວ} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{EX. } P(x) = 2x^2 - 3x + 5 \text{ ນາເສຫະແລ້ວ ເນື່ອນກຳ } P(x) \text{ ຕ້າຍ } x-1$$

$$\text{ຈະໄດ້ } (x+4) \text{ ແລ້ວ } \frac{6}{x-1} - *$$

$$\text{ໜັກກາງ} : \text{ອັນຕົວ} = k(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) + \text{ເຄີຍ}$$

ພනຸນກນ $P(x)$ ນາຮຕ້າຍ $x-c$ ໄດ້ເສີ່ນໃນ $P(c)$

ຕໍ່ $P(c) = 0$ ແລ້ວ $x-c$ ພົນຍິ່ງປະກອບຂອງ $P(x)$

4 ความสัมพันธ์ และ พังก์ชัน (ความสัมพันธ์)

- 1) คู่อันต่ำบัน → ประกอบถ่าย สภาชิกตัวน้ำ, สภาชิกตัวน้ำ (A, B)
- 2) ผลคูณคาร์ทีเซียน → เซตของคู่อันต่ำบันทั้งหมด (x, y) โดย $x \in A, y \in B$ "A × B"
เช่น $A = \{a, b, c\}, B = \{p, q\}$

$$A \times B = \{(a, p), (a, q), (b, p), (b, q), (c, p), (c, q)\}$$

สมบัติ $A \times B \neq B \times A$

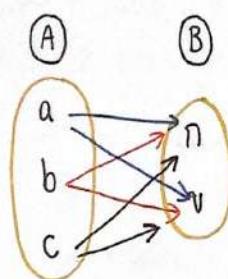
จำนวนส่วนชิกในเซต $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ จำนวนความสัมพันธ์ $2^{n(A) \times n(B)}$

- 3) ความสัมพันธ์ = ความเกี่ยวข้อง (ไม่ลับทึบ)

ex. ตัวกำหนดความสัมพันธ์ = กิน

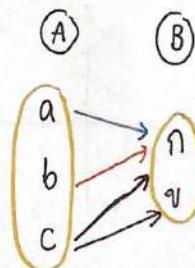
หนุ → ชีส, นม → กระเทียม

จากผลคูณคาร์ทีเซียน



มี 6 ส่วนชิก

ความสัมพันธ์ (ไม่จำเป็นต้องเชื่อมกันหมด)



ดังนั้น ความสัมพันธ์ = เซตของคู่อันต่ำบันที่เกี่ยวข้องกัน $\{(a, p), (b, q), (c, p), (c, q)\}$

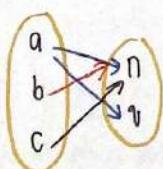
• โถเม่น & เรนจ์

โถเม่น = เซตของส่วนชิกตัวน้ำในความสัมพันธ์ (ที่ได้ใช้) D_r

เรนจ์ = เซตของส่วนชิกตัวน้ำในความสัมพันธ์ (ที่ถูกใช้) R_r

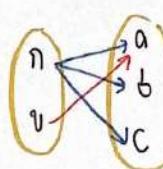
• อินเวอร์ส : ผกผัน, ความสัมพันธ์กลับทาง (r^{-1}) พิจารณาทิศทางเป็นหลัก

ex. A B



Inv.

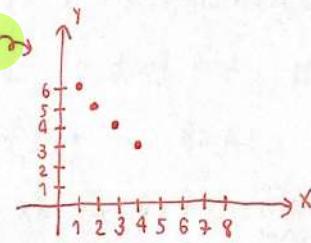
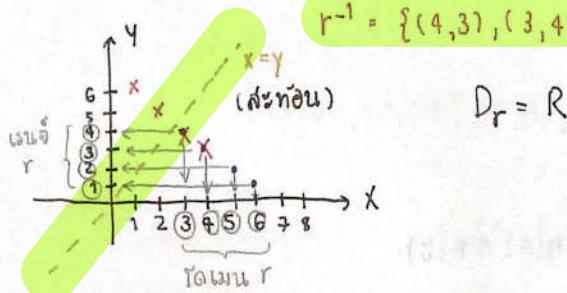
B A



ex. $r = \{(x, y) \in B \times A \mid x+y=7\}$

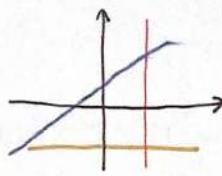
$r^{-1} = \{(y, x) \in A \times B \mid x+y=7\}$

- กราฟความสัมพันธ์ $r = \{(3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$.

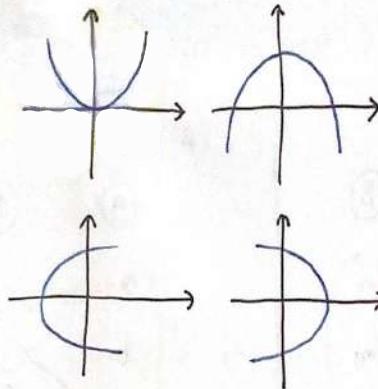


- รูปแบบกราฟ

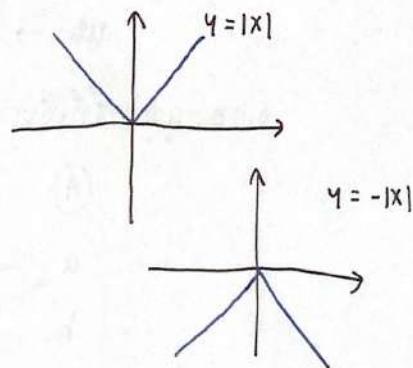
1) กราฟเส้นตรง



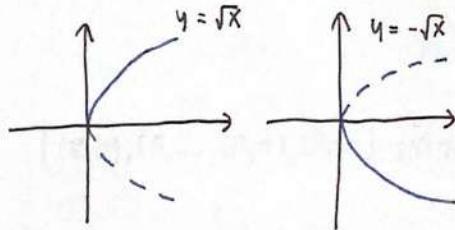
2) กราฟพาราโบลา



3) กราฟค่าสัมบูรณ์



4) กราฟรากที่สอง



5. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (ฟังก์ชัน)

ฟังก์ชัน \Rightarrow ความสัมพันธ์ที่ x ตัวคู่กับ y ໄດ້ເພື່ອງ x ຕົວເທິ່ນນີ້ f \rightarrow $(x \text{ ຫັມຫັກ}) \quad y \text{ ຫັ້ນໄປປັບໄປ}$

1. ສัญลักษณ์ที่ໃຊ້ເທັນ f

$\rightarrow f, g, h$ (ເຮັດ) $\rightarrow f(x), g(x), h(x)$

$$\text{ex. } f(x) = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow f = \{(x, y) \mid y = 2x^2 + 1\}$$

2. ລັກສະນະຂອງ f

1) f ເພີ່ມ ເນື້ອ x ເພີ່ມ y ເພີ່ມ (ແນວທາງເຕື່ອງກັນ) ex. $y = 1+x$

2) f ລດ ເນື້ອ x ເພີ່ມ y ລດ (ແນວທາງບົດເຊັ່ງ) ex. $y > 1-x$

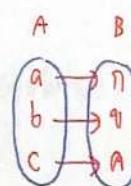
3. ອຸປະບບນຂອງ f (ຈາກ $A \rightarrow B$)

1) ຈາກ A ໄປ B $f: A \rightarrow B$ (ໃຫ້ A ຄວບ B ນຳຄອບ)

2) ຈາກ A ໄປກ່ຽວຂ້ອງ B (onto) $f: A \xrightarrow{\text{onto}} B$ (ໃຫ້ A ຄວບ B ຄອບ)

3) ຈາກ A ໄປ B ແບນ 1-1 $f: A \xrightarrow{1-1} B$ (ນັ້ນໃຫ້ y ທັກ)

4) ຈາກ A ໄປ B ແບນ 1-1 ກ່ຽວຂ້ອງ $f: A \xrightarrow{1-1} B$



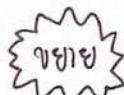
4. ການດຳນັນການຂອງ f

- ການບວກ $f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

- ການລົບ $f(x) - g(x) = (f-g)(x)$

- ກາຣຄຸນ $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$

- ກາຣນາຣ $\frac{f(x)}{g(x)} = (\frac{f}{g})(x)$



\rightarrow ບວກ ເນື້ອ D_f ກັບ D_g ສີສາທິກທາງຕໍ່ວ່າແມ່ນອືນກັນຈິງບວກກັນໄດ້ (ບວກຕໍ່ວ່ານມີອືນກັນ)

$$\text{ex. } f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (5,1)\} \rightarrow D_f = \{1,2,3,5\}$$

$$g = \{(1,1), (2,2), (4,4)\} \rightarrow D_g = \{1,2,4\}$$

$$D_{f+g} = \{1,2\} \rightarrow f+g = \{(1,3), (2,5)\}$$

$$f(1) + g(1) = (f+g)(1) = 2 + 1 = 3$$

* ການລົບກົດກ່ຽວຂ້ອງການບວກ * ກາຣຄຸນ, ກາຣຕ້າຍ * ນະໂຮ : ນັ້ນໃຫ້ $g(x) = 0$

5. f ປະກອບ (composite function)

$$gof(x) = g(\underbrace{f(x)})$$

ຕີ y ຂອງ $f \rightarrow$ ຕີ x ຂອງ g

$$R_f \leftarrow D_g$$

ໂຄງນີ້ເຈື້ອນໄຟ່ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

ex. $f = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$

$g = \{(1,2), (2,3), (4,6)\}$

① $gof = ?$ ② $fog = ? \rightarrow$

$g(f(x)) = \{(1,3), (3,6)\}$

$R_f = \{2, 4, 6\}$ $D_g = \{1, 2, 4\} \Rightarrow R_f \cap D_g = \{2, 4\}$

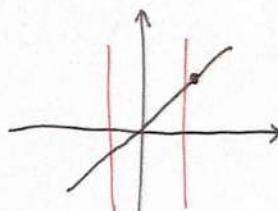
$\therefore R_{gof} \subset R_g$ และ $D_{gof} \subset D_f = \{1, 3\}$
 $= \{3, 6\}$

6. f ยกผัง \Rightarrow การสับที่กันของสมาชิกตัวหน้างลังนั้น ในแต่ละคู่อันดับ

ex. $f = \{(1,2), (3,4), (5,6)\} \rightarrow f^{-1} = \{(2,1), (4,3), (6,5)\}$

* หาก f^{-1} ไม่เป็น function ก็ต้องโดยพิจารณาหาก R_f (ห้ามซ้ำกัน)

7. ภาพฟังก์ชัน $f \rightarrow$ ห้ามใช้ x -ซ้ำกัน *

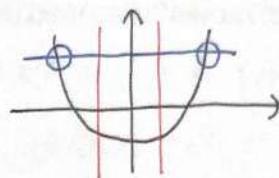


ตรวจสอบ ► ลากเส้นขนานแกน y ต้องตัดเพียง 1 จุด
เท่านั้น

* พิจารณากราฟใดเป็น f แบบ 1-1

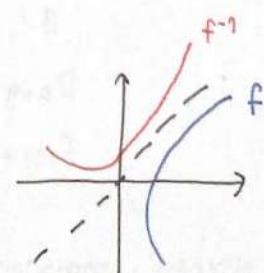
1) พิจารณาว่า f มี y (ลากเส้นขนานแกน y)

2) พิจารณาว่า เป็น 1-1 มั้ย (ลากเส้นขนานแกน x ตัด 1 จุด)



สามารถ f^{-1} ได้

กฎฟ. Inverse \rightarrow เกต菊花กราฟโดยง่าย สำหรับสัมบูรณ์ $y = x$



8. สमบูรณ์ Inverse

1) $f(a) = b \rightarrow f'(b) = a$

2) $(gof)^{-1}(x) \leftrightarrow f^{-1} \circ g^{-1}(x)$

3) $f^{-1}(f(x)) = x$ $f(f^{-1}(x)) = x$] พิจารณา D, R ก่อน

6 Expo & log

- ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล \rightarrow เลขยกกำลังที่เพิ่มนิรูปฟังก์ชัน

1) เลขยกกำลัง

$$\textcircled{a} \quad a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ ตัว}} \quad \text{หมายความว่า } n \text{ ตัว}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \end{array} \right\} \quad a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

สมบัติเลขยกกำลัง

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. a^m / a^n = a^{m-n}$$

$$3. (ab)^n = a^n b^n$$

$$4. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$5. (a^n)^m = a^{nm}$$

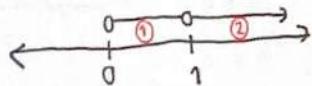
$$6. (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$7. a^0 = 1$$

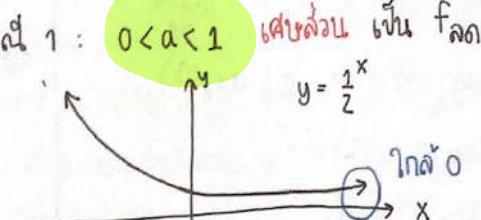
$$8. a^{mn} \neq (a^m)^n \neq a^{n^m}$$

นิยาม Expo: $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid y = a^x, a > 0, a \neq 1\}$

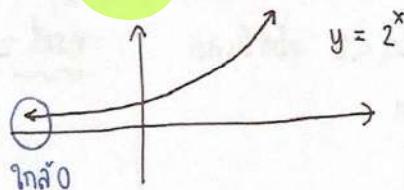
- พิจารณา $a > 1$ และ $0 < a < 1$ กรณี 1: $0 < a < 1$ เส้นล้อบ เป็น f ลด



- กราฟจะต้องผ่านจุด $(0,1)$
และ — *



- กรณี 2: $a > 1$ จัดงานได้ดี เป็น f เพิ่ม



* สูตร / อสมการ expo

หลักการ 1. หักฐานให้เท่ากัน

2. หักรูป [สูตรยกกำลัง 2
สูตรเด่นเต็ง]

* ฐานไม่เท่ากัน ต้อง Inverse ของ expo \rightarrow logarithm

สำคัญ! ① $0 < a < 1$ ถ้า $a^x > a^z$ จะได้ $x < z$] สำคัญมาก

② $a > 1$ ถ้า $a^x > a^z$ จะได้ $x > z$]

• พื้นที่นี้ของการห้าม = Inverse ของ Expo

จาก expo $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid y = a^x, a > 0, a \neq 1\}$

$$f^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid x = a^y, a > 0, a \neq 1\}$$

แนวโน้มเป็น $y = \text{Exp}$ ที่ x

$$y = \log_a x$$

$$\text{จะได้ log } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid y = \log_a x, a > 0, a \neq 1\}$$

↳ ค่า x เป็นค่าของเส้นอว.

$y = \log_a x \rightarrow$ ต้อง $\log > 0$ เมื่อ
ค่า $a > 0, a \neq 1$

สมบัติของ log $\rightarrow a, M, N, x \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, k \in \mathbb{R}$

$$1. \log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$$

$$2. \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

ระวัง $\log_a(M+N) \neq \log_a M + \log_a N$

$$3. \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$4. \log_a(M^k) = k(\log_a M)$$

$$5. \log_a a = 1$$

$$6. \log_a 1 = 0$$

$$7. \log_a k^M = \frac{1}{k} \log_a M$$

$$8. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$9. \log_a M = M$$

$$10. \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

* $b > 0, b \neq 1$

กับ base ที่ สำคัญ *

$$\log_{10} x = \log x$$

$$\log_e x = \ln x$$

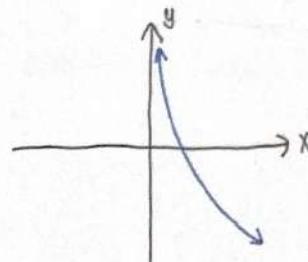
▪ natural log

$e = \text{natural number}$

≈ 2.71828

กราฟ

กรณี 1 $0 < a < 1$ พื้นที่นี้ลดลง



*) สำหรับ $0 < a < 1$
เมื่อ $\log_a M > \log_a N$
จะได้ $M < N$

กรณี 2 $a > 1$ พื้นที่นี้เพิ่ม



*) สำหรับ $a > 1$
เมื่อ $\log_a M > \log_a N$
จะได้ $M > N$

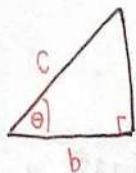
* การแก้สมการ/อสมการ * ต้องเช็คทุกครั้ง ว่า หลัง log ตัดลบมั้ย *

1. ฐานเท่ากัน เปลี่ยนรูป / แทนค่าเข้าไป

2. หาค่า x และนำ去ไปเช็คก่อน

๓. ตรีโกณมิติ

๑) อัตราส่วนตรีโกณมิติ

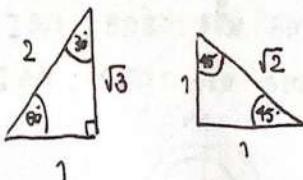


$$\sin \theta = \frac{a}{c}, \cos \theta = \frac{b}{c}, \tan \theta = \frac{a}{b}$$

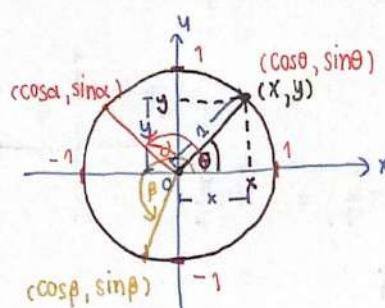
$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{c}{a}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{c}{b}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{b}{a}$$

๒) ตัวอัตราส่วนตรีโกณมิติ 30°, 45°, 60°

	30°	45°	60°
sin	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2
tan	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

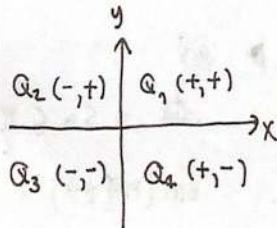


๓) ผลลัพธ์ของนัยน์ยะ กับค่าของตรีโกณ $\rightarrow x^2 + y^2 = 1^2$



$$\sin \theta = \frac{y}{1} \rightarrow \sin \theta = y$$

$$\cos \theta = \frac{x}{1} \rightarrow \cos \theta = x$$



จากสมการวงกลมนัยน์ยะ $\rightarrow x^2 + y^2 = 1^2$

จะได้ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \rightarrow \text{เอกลักษณ์ตรีโกณ } ①$

หากนิยม $\cos^2 \theta$ หารทั้งสองข้าง ;

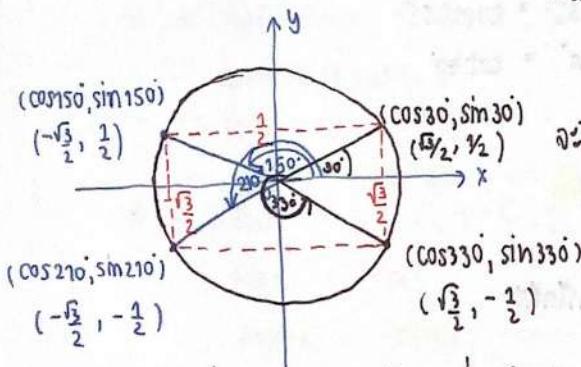
$$\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad ②$$

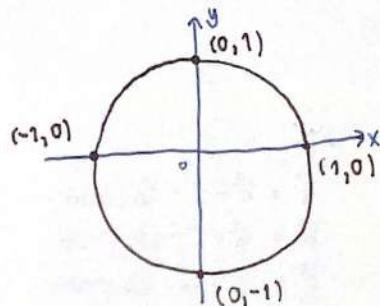
นำ $\sin^2 \theta$ หารทั้งสองข้าง ;

$$\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$1 + \cot^2 \theta + 1 = \operatorname{cosec}^2 \theta \quad ③$$



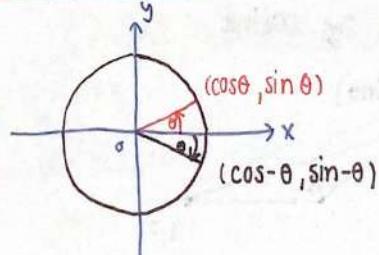
๔) ลักษณะเด่น, ค่านองค์กรีโกณ เมื่อเทียบกับมุม 180°, 90°, Co-function



$$\begin{array}{ll} \cos 0^\circ = 1 & \cos 180^\circ = -1 \\ \sin 0^\circ = 0 & \sin 180^\circ = 0 \\ \cos 90^\circ = 0 & \cos 270^\circ = 0 \\ \sin 90^\circ = 1 & \sin 270^\circ = -1 \end{array}$$

ทูนเข็ม → มุมบีบีบ +
ตามเข็ม → มุมเป็น -

$$\begin{array}{l} \text{ex. } \cos 30^\circ = \cos 330^\circ \\ \sin 30^\circ = \sin 330^\circ \end{array}$$



มิติของเรื่องนี้ ($2\pi = 360^\circ$)

$$\pi = 180^\circ \quad \frac{\pi}{3} = 60^\circ \quad \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ \quad \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

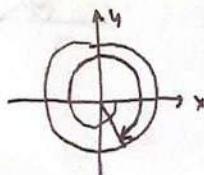
ค่าตรีโกณเทียบมุม $180^\circ, 90^\circ$, co-function

► 180°

สำหรับ $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

$$\sin(n180^\circ \pm \theta) = \sin\theta \text{ หรือ } -\sin\theta; \text{ nei}$$

$$\cos(n180^\circ \pm \theta) = \cos\theta \text{ หรือ } -\cos\theta; \text{ nei}$$



$2(180) - 45^\circ$

$$\text{ex. } \sin 315^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\text{ex. } \sin(-\frac{7\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{7\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-\frac{7\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

► 90°

สำหรับ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ n เป็นเลขคี่

$$\sin(n\frac{\pi}{2} \pm \theta) = \cos\theta \text{ หรือ } -\cos\theta$$

$$\cos(n\frac{\pi}{2} \pm \theta) = \sin\theta \text{ หรือ } -\sin\theta$$

► Co-function

$$\sin \beta = \cos \alpha$$

$$\tan \beta = \cot \alpha$$

$$\sec \beta = \cosec \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta + \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \end{array} \right\}$$

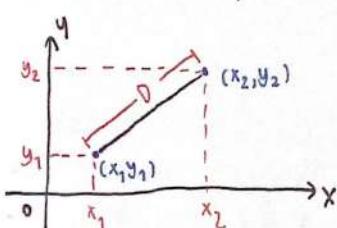
$$\text{ex. } \sin 1^\circ = \cos 89^\circ$$

$$\sec 35^\circ = \cosec 55^\circ$$

$$\tan 20^\circ = \cot 70^\circ$$

5) กฎ cosines, กฎ sines

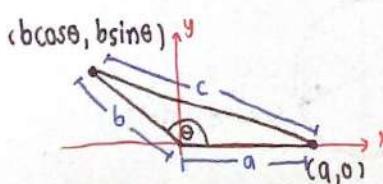
รูปของกราฟนั่งๆ



$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ พื้นที่รากสี่เหลี่ยม}$$

$$D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

► กฎ cosine ($\theta \Rightarrow$ 鋸) ตรีทั้มด้านก้นๆ)



$$\begin{aligned} c^2 &= (b \cos \theta - a)^2 + (b \sin \theta - 0)^2 \\ &= b^2 \cos^2 \theta - 2ab \cos \theta + a^2 + b^2 \sin^2 \theta \\ &= b^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta - 2ab \cos \theta + a^2 \\ &= b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$

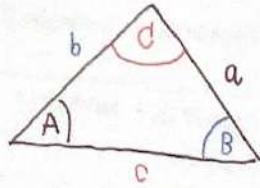
กฎ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

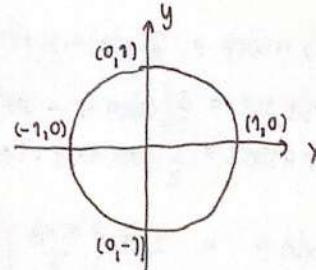
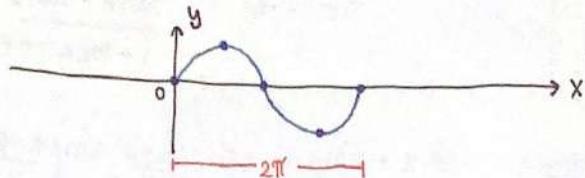
▶ กฏ sine



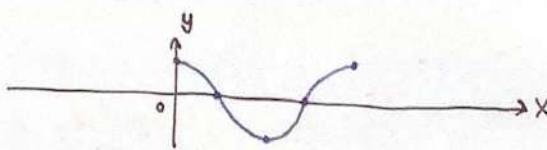
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

6) กราฟของฟังก์ชันตรีโกณ, แนวคิดของฟังก์ชันคือ-

▶ ฟังก์ชัน $y = \sin x$



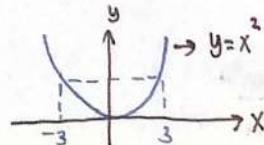
▶ ฟังก์ชัน $y = \cos x$



$$y = \sin x \rightarrow \text{พีวี} = 2\pi$$

$$y = \sin(2x) \rightarrow \text{พีวี} = \pi$$

▶ ฟังก์ชัน $y = \tan x$



▶ ฟังก์ชันคู่ $\rightarrow y = x^2, y = x^4, y = \cos x$

- สymmetry about the y-axis

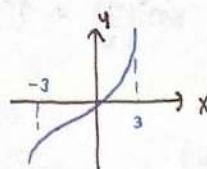
- $f(x) = f(-x)$

- $\cos(-x) = \cos(x)$ - **

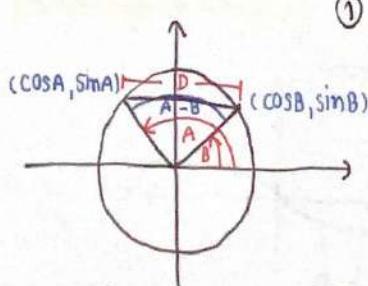
▶ ฟังก์ชันคี่ $\rightarrow y = x, y = x^3, y = \sin x$

- $f(-x) = -f(x)$

- $\sin(-x) = -\sin(x)$ - **



71. สูตรคำนวณต่างๆ



$$\textcircled{1} \quad \text{ถ้า } D^2 \rightarrow D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$D^2 = (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2$$

$$D^2 = \cos^2 A - 2\cos A \cos B + \cos^2 B + \sin^2 A - 2\sin A \sin B + \sin^2 B$$

$$D^2 = 2 - 2\cos A \cos B - 2\sin A \sin B$$

$$\textcircled{2} \quad \text{ถ้า } D^2 \text{ หา cosine : } D^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos(A-B)$$

$$= 2 - 2\cos(A-B)$$

$$2 - 2\cos(A-B) = 2 - 2\cos A \cos B - 2\sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\begin{aligned}\sin(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B - ① \\ \cos(A+B) &= \cos(A-(-B)) \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B - ② \\ \sin(A-B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B - ③ \\ \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B - ④\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}①+② : \sin A \cos B &= \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)] \\ ③+④ : \cos A \cos B &= \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \\ ④-③ : \sin A \sin B &= \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \quad \cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(A+B) &= \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} \\ \text{in } \cos A \cos B &= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} \\ &= \frac{\tan A + \tan B}{1 + \tan A \tan B} \\ \tan(A-B) &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}\end{aligned}$$

$$\sin(2A) = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A \quad \text{if } \cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

$$\sin(3A) = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\cos(3A) = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$\tan(2A) = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\tan(3A) = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

$$\text{if } \cos(2A) = 1 - \sin^2 A$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\text{if } \cos(2A) = 2 \cos^2 A - 1$$

$$\cos(2A) = 1 -$$

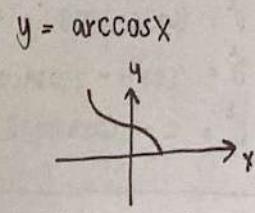
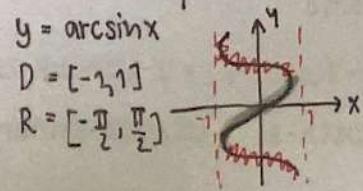
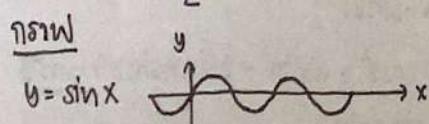
$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos \theta}{2}, \quad \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{2}, \quad \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

8) អង់គ្គនឹងការសម្រេច (arc)

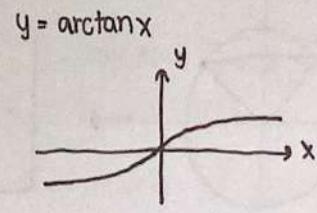
$$y = \sin x \rightarrow x = \sin y \equiv \begin{cases} y = \arcsin x \\ y = \sin^{-1} x \end{cases}$$

$$\text{Ex. } \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ$$

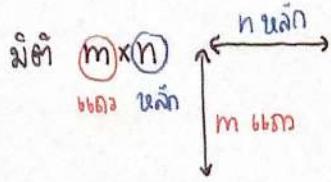


$$\begin{aligned}D &= [-1, 1] \\ R &= [0, \pi]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}D &= \mathbb{R} \\ R &= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

8. เมทริกซ์



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

มิติ矩阵 $m \times n$ ตัว

$$= [a_{ij}]_{m \times n}$$

- เมทริกซ์ จัตุรัส = มิติจำนวนเท่ากัน = จำนวนนแลก ex. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$
- เมทริกซ์เอกลักษณ์ (I มิติ $n \times n$)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• เมทริกซ์ศูนย์ (O) สุมชิกทุกตัว = 0

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1) การเพิ่มลบเมทริกซ์

- มิติเดียวกัน
- สลักไขว้ใน ตน. เดียวกันฟีค่าเพิ่มลบ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{โดย } A = B$$

$a = 1, c = 3$
 $b = 2, d = 4$

2) การบวก & ลบ เมทริกซ์

- มิติเดียวกัน
- ห้ามมาหากับตัวในตัวเดียวกัน

$$\text{ex. } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

สูตร

$$\blacktriangleright \text{ สมการ สลับที่การบวกได้ } A+B = B+A$$

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a \pm p & b \pm q \\ c \pm r & d \pm s \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright (A+B)+C = A+(B+C)$$

$$\blacktriangleright \text{ เอกลักษณ์การบวก คือ } O$$

$$\blacktriangleright \text{ Inverse } (-A) \text{ ให้ลบเข้า สุมชิกทุกตัว}$$

3) การคูณเมทริกซ์

$$3.1) \text{ คูณกันตัวต่อตัว ex. } y \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ya & yb \\ yc & yd \end{bmatrix} = yA \rightarrow \text{สูตร } c = \text{ตัวคูณตัว}$$

$$\blacktriangleright C(A+B) = CA + CB$$

$$\blacktriangleright C=0, CA = O$$

3.2) คูณกันเดียวกัน เมทริกซ์ ($A \times B$)

- หลัก $A = \text{ແຄວ } B \rightarrow \text{Matrix ใน } N \rightarrow \text{หาได้ผ่านไป}$

- คูณกันแบบ แต่ง \times หลัก

$$A_{m_1 \times n_1} \times B_{m_2 \times n_2} : n_1 = m_2 \text{ จึงจะคูณได้ ex. } A_{2 \times 2} \times B_{2 \times 3} = (A \times B)_{2 \times 3}$$

$$\text{ex. } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad A \times B = \begin{bmatrix} (3 \times 1) + (2 \times 0) & (3 \times 2) + (2 \times 1) & (3 \times (-1)) + (2 \times 3) \\ (2 \times 1) + (1 \times 0) & (2 \times 2) + (1 \times 1) & (2 \times (-1)) + (1 \times 3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

สมบัติ

~~~~

▶ คูณสองตัวแลก A × B ≠ B × A

▶ มีเอกลักษณ์  $A_{m \times n} \rightarrow AI_n = A$

$$AI_m = A$$

▶ เมทริกซ์ใดๆ ก็ได้ 0 จึงได้ 0 (รูปสีฟ้า)

$$\text{แทนด้วย } A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times p}, C = [c_{ij}]_{p \times q}$$

▶ 律칙ของกลุ่ม  $ABC = (AB)C = A(BC)$

▶  $(AB)d = d(A)(B) = (dA)B = A(dB)$

$$\blacktriangleright (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA + AB + BA + BB$$

4) เมทริกซ์สับเปลี่ยน (Transpose)  $A^t$  ไม่เท่ากัน

"เปลี่ยนเดา → 逆, 逆 → 逆"  $\rightarrow$  逆 ≠ 逆 (ไม่เปลี่ยน)

$$\text{ex. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_{m \times n} \rightarrow A^t_{n \times m}$$

สมบัติ

▶  $(A^t)^t = A$

▶  $(AB)^t = B^t A^t$  \*\*\*\*

▶  $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$

▶  $(cA)^t = CA^t$  Inverse กรณีคูณ \*\*

▶  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

5) Minor, Cofactor (ถูกตัดหัวแล้ว)

① Minor = det ที่เกิดจาก matrix ตัด i 逆 j ของ A

$$\text{ex. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$M_{ij}(A) = M_{12}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ ตัดเดา } 1 \quad \text{ตัดเดา } 2$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \oplus$$
$$= 4(9) - (7)(6) = -6$$

② Cofactor =  $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}(A)$

$$\text{ex. } C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12}(A) = (-1)(-6) = 6$$

\* Det(A), det A, |A| (คูณลง - คูณขึ้น) \*

$$2 \text{ มิติ : } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb$$

$$3 \text{ มิติ : } \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

สมบัติ

▶  $\det A = 0$  "เมทริกซ์เสียหาย"

\* ลูกปืนส่องฤทธิ์ inverse ได้

▶ ถ้าสูงชี้ยกทุกตัวในเดา / 逆 ก็  $\det A = 0$

\* \* \* สลับสูงชี้ 2 เดา / 逆 ก็

$$\det_{\text{ใหม่}} = -\det_{\text{เดิม}}$$

▶ ถ้าสูงชี้ 2 เดา / 逆 ก็

$$\det_{\text{เดิม}} = 0$$

▶ ถ้าหักค่าเดา x เดา / 逆 ก็

$$\det_{\text{ใหม่}} = k \det_{\text{เดิม}}$$

\* \* \*  $\det(A^t) = \det(A)$

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

$\det(kA) = k^n \det(A)$

$\det(A^m) = (\det(A))^m$

## เพิ่มเติบ

ถ้าหาค่าคงที่  $x$  กับ  $m$  ตาม/หลักได้ แล้ว/นั่งนี้ แล้ว - กับ เกณฑ์ชื่อนักอ่าน  $\rightarrow \det$  เท่าเดิม

$$\det(A) = \det(B) \quad |A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad |B| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

### 6) เมธอดิกซ์พัง (ต่อจาก)

$\boxed{\text{adj}(A)}$   $\rightarrow$  transpose  $A^t$   
 $\rightarrow$  Cofactor  $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}(A)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^t$$

### 7) Inverse ( $A^{-1}$ ) $\rightarrow$ ไม่เป็น เมธอดิกซ์ เอกซาน มาก่อน จึงจะหาได้

- $\boxed{AA^{-1} = I}$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)}$$

กรณี มatic 2x2 หตุณ  $\ominus$   
 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow = \begin{bmatrix} d-b \\ -c \end{bmatrix}$   
หตุณ  $\ominus$  สลับที่ หตุณ  $\ominus$

## สมบูรณ์

►  $AB = AC$  จะได้  $A^{-1}AB = A^{-1}AC \rightarrow B = C$

►  $(A^{-1})^{-1} = A$

►  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

►  $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

►  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  \*\* สลับที่

### 8) Row operation (การดำเนินการตาม列)

ex.  $\left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{5R_1} \left[ \begin{array}{cc} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_{12}} \left[ \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 5 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[ \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{array} \right]$

9. เวกเตอร์ (ขนาด + ทิศทาง) " เวกเตอร์ 0 ตัวถูกกับทุกๆ เวกเตอร์ "

1) การบวกลบ (เข้าหาออกจากนั้น)

$$\begin{array}{c} \text{• } \vec{u} + \vec{v} \\ \text{• } \vec{u} - \vec{v} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} |\vec{u}| \pm |\vec{v}| = \left| \begin{array}{l} a \pm c \\ b \pm d \end{array} \right| \end{array} \right.$$

\* ถ้าเกิด  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$  แล้ว  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

2) การคูณ เวกเตอร์ด้วย สเกลาร์ (ขยายขนาดของเวกเตอร์)

$$\begin{array}{c} \vec{u} \quad k\vec{u} \\ \text{---} \quad / -3\vec{u} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} k|\vec{u}| = \left| \begin{array}{l} ka \\ kb \end{array} \right| \end{array} \right.$$

- สมบัติ  $\rightarrow$  ลับที่  
 $\rightarrow$  เพิ่มน้อยลง  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{p} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{p})$   
 $\rightarrow$  เอกลักษณ์การบวก  $\vec{u} + 0 = 0 + \vec{u} = \vec{u}$   
 $\rightarrow$  Inverse  $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$   
 $\rightarrow a(b\vec{u}) = (ab)(\vec{u})$   
 $\rightarrow (a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$   
 $\rightarrow a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

3) เวกเตอร์พิกัด直角

$$\begin{array}{l} \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} = \left| \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right| \\ \vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} = \left| \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array} \right| \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} = \left| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right| \\ \vec{v} = \end{array} \right.$$

4) ขนาดของเวกเตอร์  $|\vec{u}|$

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{หรือ} \quad |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{มี 3 มิติ}$$

5) สัรองเวกเตอร์ ทางจุด 2 มิติ

$$\vec{u} = \vec{AB} = \left| \begin{array}{l} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{array} \right| \quad \text{มี 3 มิติ} \quad \left| \begin{array}{l} \text{ปลาย - ต้น} \\ \vec{AB} = \left| \begin{array}{l} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{array} \right| \end{array} \right.$$

6) ความชันของเวกเตอร์

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b}{a}$$

7) เวกเตอร์ 1 ชนิด  $\Rightarrow$  เวกเตอร์ที่มีขนาด 1 ชนิด

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\text{เวกเตอร์ } u}{\text{ขนาด } u}$$

8) เวกเตอร์ที่บานานกัน

$\vdash 2 \text{ สมมติ } \rightarrow a:b = c:d \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ ความซึ้งเท่ากัน}$

$\vdash 3 \text{ สมมติ } \rightarrow a:b:c = d:e:f \text{ อัตราส่วนเท่ากัน.}$

9) การคำนวณ การเวกเตอร์ \*

- การคูณเชิงลึกแล้ว  $\rightarrow$  ผลลัพธ์ = จำนวนจริง  $R$

ที่ 1  $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

ที่ 2  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta \Rightarrow \text{สำคัญมากมาก!}$

สมบูรณ์  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \theta = 90^\circ \rightarrow \text{ตั้งฉากกัน} - *$

สมบูรณ์  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \rightarrow \theta = 0^\circ \rightarrow \text{ขนานกัน} - *$

สำคัญ  $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}||\vec{u}| = |\vec{u}|^2 - *$

$0 \cdot \vec{u} = 0$

สมบูรณ์พิเศษ 
$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}\vec{u} + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\vec{v} + |\vec{v}|^2 \\ |\vec{u} - \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\vec{v} + |\vec{v}|^2 \\ (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) &= |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{คลาสอับ} \\ \text{น้อยมาก} \end{array} \right\}$$

- ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross X) สามเหลี่ยมวิชาร์

ที่ 1  $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2\vec{i} + c_1a_2\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} - b_2c_1\vec{i} - (a_1c_2 - a_2c_1)\vec{j} - (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta \rightarrow \text{พ.น. } \square$

พ.น.ค.เท่ากันนั้น

สมบูรณ์  $\vec{u} \parallel \vec{v} \rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0 \text{ หมายความ } \sin 0^\circ = 0$

สมบูรณ์  $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| =$

$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

$\vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$

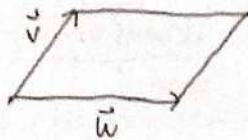
$\vec{u} \times \vec{u} = 0$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

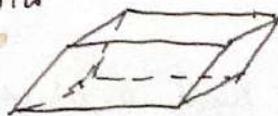
### 10) การนับพื้นที่ ปริมาตร

- พท.  $\square$  ลักษณะ  $\Rightarrow |P \times V| = |P||V| \sin\theta$



- ปริมาตร  $\square$  ลักษณะหนาหัวตัน

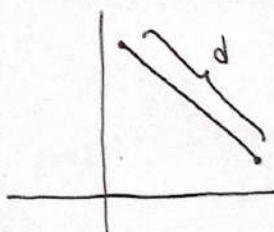
$$\Rightarrow |P \cdot (h \times v)|$$



### 10. เรขาคณิตวิเคราะห์ & ภาคตัดกรวย

#### 1) เรขาคณิตวิเคราะห์

- ระยะ ระหว่างจุดสองจุด  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  มาจาก พิกัด直角坐标系



$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

\* กอร์ด์ จุดบนแกน ex.  $(-3, 5), (-1, 5)$  ไม่ต้องใช้พิกัด直角坐标系

- จุดเด่นของเส้นสองเส้น

$$\begin{aligned} &\bullet B(x_2, y_2) \\ &\bullet P = ? \rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow (x, y) \\ &\bullet A(x_1, y_1) \end{aligned}$$

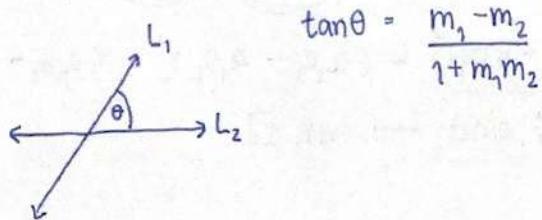
- ความชัน ( $m$ )

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$L_1 \parallel L_2 \rightarrow m_1 = m_2$$

$$L_1 \perp L_2 \rightarrow m_1 m_2 = -1 \quad \text{--**}$$

. กราฟที่มีรูปหัวใจใน 2 มิติ



$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

- สมการเส้นตรง

$$\bullet y = mx + c \quad \text{จุดตัดแกน } y$$

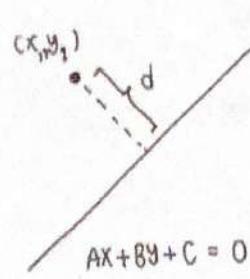
$$\bullet Ax + By + C = 0 \rightarrow m = -\frac{A}{B}$$

► แนวตัด截面  $x \rightarrow y=0$ , และ  $y \rightarrow x=0$

▶ กรณีที่สมการเส้นตรง  $y - y_1 = m(x - x_1)$

\* ถ้า  $m$ ,  $(x_1, y_1)$  กำหนดโดยจุด จะได้ดังนี้

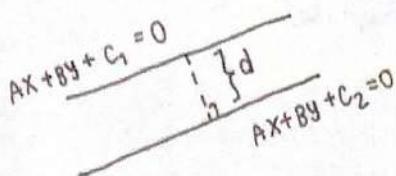
⑤ ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด



$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

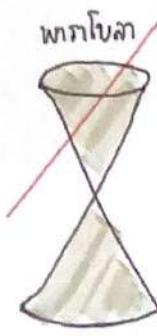
$$Ax + By + C = 0$$

⑥ ระยะห่างระหว่างเส้นตรง 2 เส้นที่ขนานกัน



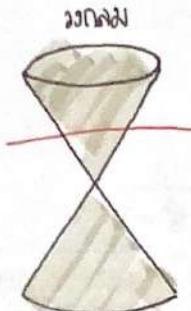
$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2) ภาคตัดกรวย



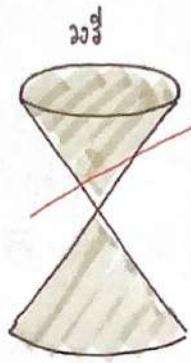
$$x^2, y$$

$$x, y^2$$



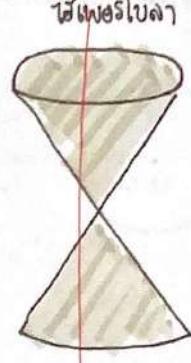
$$x^2 + y^2$$

(สป. บาน)



$$Ax^2 + By^2$$

(สป. ไม่บาน)



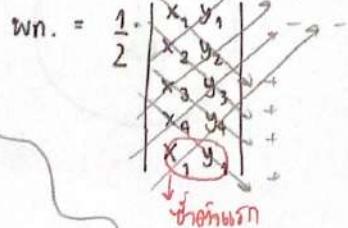
$$x^2, y^2$$

(สป. บาน)

พื้นที่ผิว : พก. รูปสามเหลี่ยม

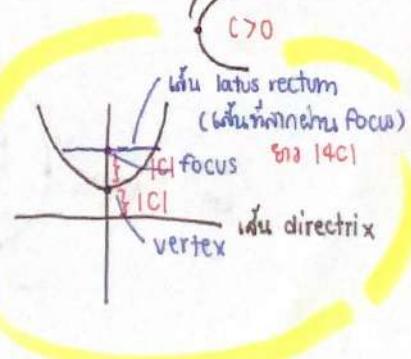
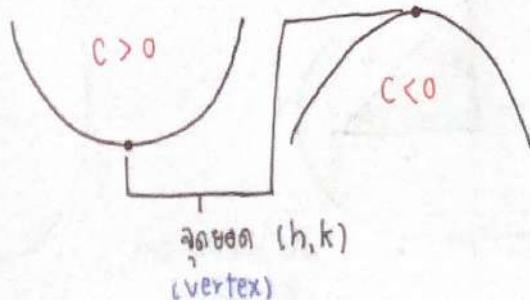
$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$(x_3, y_3) \quad (x_4, y_4)$$



① พาราโบลา

- สมการ :  $y = Ax^2 + Bx + C$  หรือ  $x = Ay^2 + By + C \rightarrow$  กีบี  $C < 0 \rightarrow (h, k)$   
 $(x-h)^2 = 4c(y-k)$  หรือ  $(y-k)^2 = 4c(x-h)$   $C > 0 \rightarrow$

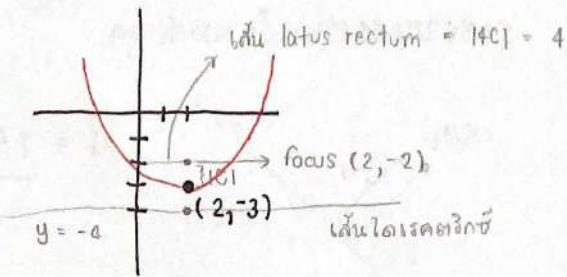


$$\text{Ex. } x^2 - 4y - 4x - 8 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4y + 8 + 4 \quad \left[ \frac{\text{ตอกลาก}}{2} \right]^2 = \left[ \frac{-4}{2} \right]^2 = 4$$

$$(x-2)^2 = 4(y+3)$$

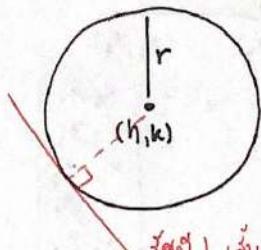
$$\therefore (h, k) = (2, -3) \quad C = 1$$



## (2) ພາກສິນ

$$\text{ສົມກັບ: } x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \rightarrow \text{ກຳໄປ}$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



$$\text{ຈຸດສູນຍົກລາງ: } (h, k) = \left( -\frac{A}{2}, -\frac{B}{2} \right)$$

$$\text{ຮັດສີ: } r = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$

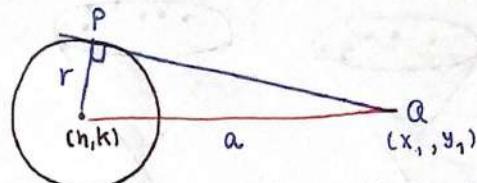
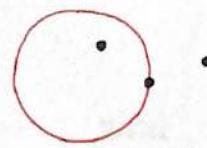
ຮັດສີ  $\perp$  ເນັ້ນຄົວຜົນໄສສົມ

\* ຕັ້ງແທນ  $(x_1, y_1)$  ຂອງໄສນການ ແລ້ວໄດ້  $0 \rightarrow$  ດັ່ງກໍ່ເລັບພາກສິນ

$< 0 \rightarrow$  ດັ່ງໃນພາກສິນ

$> 0 \rightarrow$  ດັ່ງນອດພາກສິນ

• ຄວາມຍາວເລື່ອງຜົນວາກລຸນ



$$\begin{aligned} a^2 &= r^2 + (\bar{PQ})^2 \rightarrow \bar{PQ} = \sqrt{a^2 - r^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2} \end{aligned}$$

ຮະບອບນ້ຳຮະນ້າງຈຸດ.

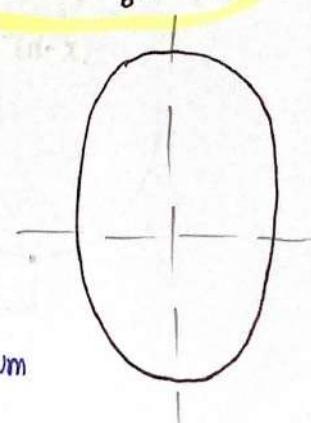
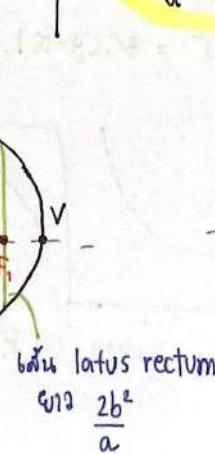
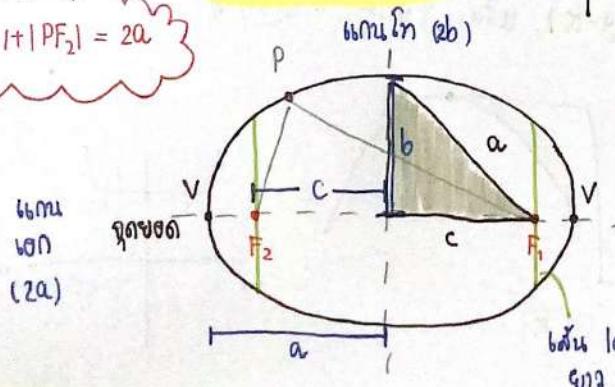
(3) ຂອງ \* ຄວາມເຫັນສູນຍົກລາງ  $e = \frac{c}{a}$  ໂດຍ  $0 < e < 1 \rightarrow$  ຈຶ່ງໄກ້  $0 < a < c$  ຖ້າ  $e > 1 \rightarrow$

$$\text{ສົມກັບ: } Ax^2 + By^2 + CX + DY + E = 0 ; A \neq B$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 ; a > b \text{ ເສັນອົບ}$$

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$



ex.  $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$

$$25x^2 - 50x + 9y^2 + 36y = 164$$

$$25(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = 164 + 25 + 36$$

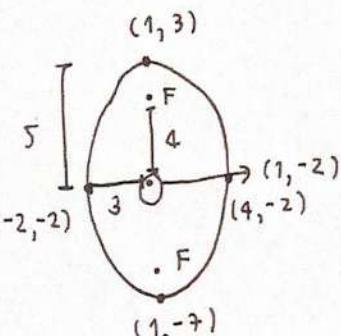
$$25(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 225$$

$$(\div 225); \quad \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{5^2} = 1 \rightarrow \text{มุ่งหน้า}$$

$$a = 5, b = 3, c = 4$$

$$(h, k) = (1, -2)$$

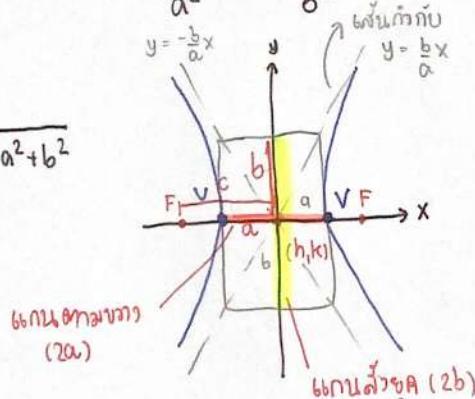


#### (4) ไฮเพอเรียบล่า

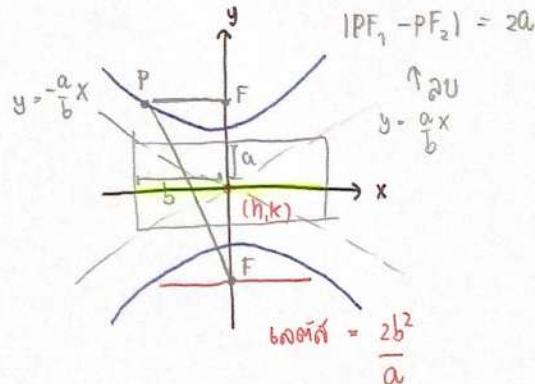
สมการ :  $Ax^2 - by^2 + cx + dy + e = 0$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



## 11. จำนวนเชิงซ้อน

$$i = \sqrt{-1}$$

- $z = a + bi$

$\swarrow$  จินตภาพ  $\searrow$  จริงภาพ  $\text{Im}$   
 $\text{Re}$

- $i^n$  ( $i, -1, -i, 1$ )

$$i = \sqrt{1}, i^2 = -1, i^3 = -\sqrt{-1}, i^4 = 1$$

- การบวกและการลบ

กรณี  $-b+ci$ , จินตภาพ  $-c$  จันตภาพ

ex.  $z_1 = 4+5i, z_2 = -3+3i$

$$z_1 + z_2 = 1+8i$$

$$z_1 - z_2 = 7+2i$$

$$z_1 z_2 = (4+5i)(-3+3i) = -12 + 12i - 15i - 15 = -27 - 3i$$

- กรณี Conjugate. ( $\bar{z}$ ) [โครงสร้างของ复数]

$$z = a+bi \rightarrow \bar{z} = a-bi$$

สมบูรณ์  $\bar{\bar{z}} = z$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

\*\*\*

ถ้า  $f(x) = 0$  ที่  $z$ , เป็นคำศัพด์ว่า  $\bar{z}$ , เป็นคำศัพด์ว่า   
 (ที่ส่วนหัวนี้ ยังไม่ทราบว่า  $f$  คือฟังก์ชันใด ก็ตามที่  $f(z) = 0$  ทั้งหมด)

ex.  $f(x) = (x-2)(x-1)$ ,  $x = 2, 1$

$f(x) = \sim \sim$  คำนวณ  $1+5i$  ให้ครบ.

จะได้  $1-5i$   $\sim \sim \rightarrow$  คำนวณ

$$z + \bar{z} = 2\text{Re} = 2a$$

$$z - \bar{z} = 2\text{Im} = 2bi$$

- ค่าส่วนบุญของจำนวนเชิงซ้อน. (ต่อไปนี้)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2$$

สมบูรณ์  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$$|z| = |\bar{z}| = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

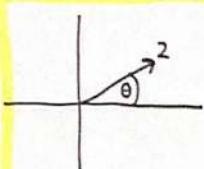
$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

- Inverse សម្រាប់

$$z \cdot z^{-1} = 1 \text{ ដូច្នេះ } z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

- សមិទ្ធមន្តរ (Polar form)

$$a+bi \rightarrow x+yi$$



$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$   
 $x = r\cos\theta$   
 $y = r\sin\theta$

$\left. \begin{array}{l} z = x+yi = r\cos\theta + i\sin\theta \\ = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ = r\operatorname{cis}\theta \end{array} \right\}$

$$\text{Ex. } z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\begin{aligned} x+yi &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= 1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= 1(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) \\ &= 1(\operatorname{cis} 30^\circ) \end{aligned}$$

- សមត្ថភាពសម្រាប់

$$\text{ពីរក្នុង } z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \text{ និង } z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$$

$$- z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$- \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$- z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} \operatorname{cis}(-\theta_2)$$

$$- \overline{z_1} = r_1 \operatorname{cis}(-\theta_1)$$

- សំណើនឹង

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{360^\circ k}{n}\right) \quad \boxed{1 \leq k \leq n-1}$$

$$\text{Ex. } z = 8\operatorname{cis} 270^\circ$$

$$\text{នៅ } z^{\frac{1}{3}} \rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} \operatorname{cis}\left(\frac{270^\circ}{3} + \frac{360^\circ k}{3}\right)$$

$$= 2 \operatorname{cis}(90 + 120k)$$

$$k \in \{0, 1, 2\} \quad \text{នៅ } 1^\circ \quad 2\operatorname{cis}(90 + 120(0)) = 2\operatorname{cis} 90^\circ$$

$$2\operatorname{cis}(90 + 120(1)) = 2\operatorname{cis} 210^\circ$$

$$2\operatorname{cis}(90 + 120(2)) = 2\operatorname{cis} 330^\circ$$

• សមត្ថភាពសម្រាប់ (សម្រាប់គ្រប់)

$$z^n = r^n [\operatorname{cis} n\theta]$$

$$\text{Ex. } z = 2\operatorname{cis} 60^\circ$$

$$\begin{aligned} z^4 &= 2^4 \operatorname{cis}(4 \cdot 60^\circ) \\ &= 16 \operatorname{cis}(240^\circ) \end{aligned}$$

## 12. ลำดับอนุกรม "ต่อตัวเรื่อง"

### ① ลำดับเลขคณิต

$$\text{สั้น}: a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{อนุกรม}: S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \quad \text{หรือ} \quad S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

### ② ลำดับเรขาคณิต "ต่อตัวเดาตัว"

$$\begin{array}{l} \text{ลำดับ} \quad a_n = a_1 r^{n-1} \\ \text{อนุกรม} \quad S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots \\ \dots = r \end{array} \right.$$

### \* ลำดับเรขาคณิตบวก

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}; \quad (|r| < 1) \quad \text{ตีคั่งลง}\}$$

### ③ อนุกรมต่อตัวบวก

$$\sum \frac{1}{n(n+d)} = \frac{1}{d} \sum \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+d} \right]$$

$$* \sum_{i=1}^n |x_i - b| \rightarrow \text{มัธยฐาน} \quad b = \text{med}$$

### ④ limit

ลู่เข้า  $\rightarrow$  หาตัวเลขได้  $\rightarrow$  ตัวสูตรก็ย

ลู่ออก  $\rightarrow$  หาจุดไปได้

กำลังไฟ  $\rightarrow$  เลขบวก.

กำลังบวก  $>$  ฟาก  $\rightarrow \infty$  มากไปกว่า

กำลังลบ  $<$  ฟาก  $\rightarrow 0$

### ⑤ ตอกเบี้ยบทัน เกาะค่าเงินทางการ

#### • ตอกเบี้ยบทัน

- เริ่มต้นฝากเงิน  $P$  บาท ให้อัตราดอกเบี้ย  $1\%$  ต่อปี โดยคิดตลอดปี แบบทุกเดือน ใช้  $1$  ครั้ง

$$\text{เมื่อสิ้นปี } n \rightarrow \text{เงินรวม } P(1+r)^n; \quad r = \frac{j}{100}$$

$$\text{ex. } P = 10,000, \text{ อัตรา } 5\% \cdot \text{ต่อปี} \rightarrow \text{เงินรวม } 3 \text{ ปี}$$

$$P(1+r)^n = 10,000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3$$

$$\geq 10000 \left(\frac{105}{100}\right)^3 \rightarrow \frac{10000 \cdot 105^3}{10000000} = 11,576.25$$

$$1+2+3+\dots+i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots+i^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

- អង់រំន P ហូល ចែក i% ពេល k គីឡូតិ៍ គោរពនៃវត្ថុ: k គីឡូតិ៍ មេន្តរាល n ឆ្នាំ

$$\text{សេវាល} = P \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn} ; r = \frac{i}{100}$$

$$k = 4$$

ex. P 22500 បាហ នៅ 12% ពេល 2 ឆ្នាំ ផ្សាយ 2 ឆ្នាំ ដែលអាមេរិក? តើគោរពនៃវត្ថុនេះនៅក្នុង

$$P \left(1 + \frac{12}{100}\right)^{4(2)} = P (1 + 0.03)^8 = 22500 (1 + 0.03)^8$$

⑥ ស្ថិតិ ប៉ុងបី និងស្ថិតិ អនុគមន៍

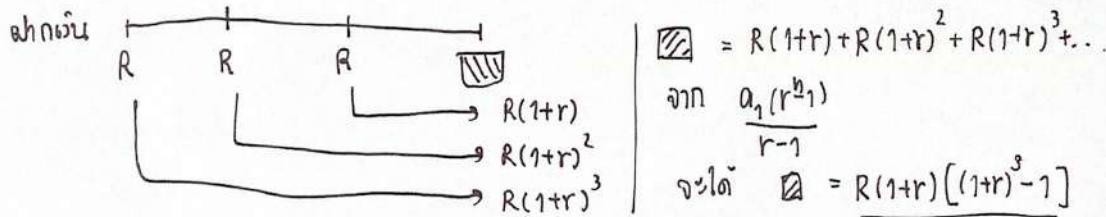
$$S = P \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$$

ex. តើរៀបមនតក 592,097.91 បាហ នៅ 10 ឆ្នាំ ដែលគារបិទាន 4% ពេល 10 ឆ្នាំ (ក្របាន) P = ?

$$P (1.04)^{10} = 592,097.91$$

$$P = 592,097.91 (1.04)^{-10}$$

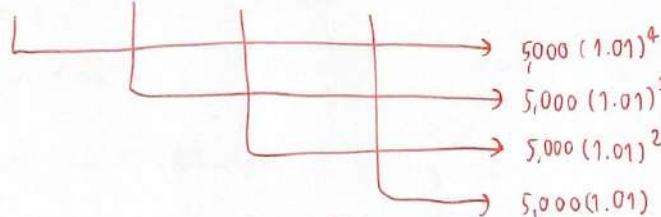
⑦ គោរព R (តាមរយៈរៀបការក្នុងរាល, ពិនិត្យក្នុងរាល, ខែតុលានឹង / ស៊ុលាភ)



ex. ជាបី 5000 បាហ ក្នុងរាល នៅ 12% / ឆ្នាំ ជាបី 4 ពេល រាល រាល

$$\frac{12\%}{12 \times 100} = 1\% / 10 \text{ ឆ្នាំ}.$$

$$\therefore 1 + r = 1 + 0.01 = 1.01$$



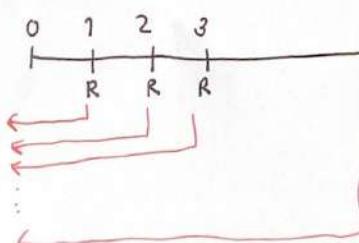
$$\text{សេវាល} = \frac{5,000 (1.01) [(1.01)^4 - 1]}{1.01 - 1}$$

ex. ម៉ឺន printer 450,000 បាហ ចាន់ 20%. ក្នុងរាល 10 ពេល ក្នុងរាល បរិច្ឆេទ 6%. រាល រាល

R: រាល រាល

រាល 360,000 បាហ

$$\begin{aligned} &R/(1.005) \\ &R/(1.005)^2 \\ &R/(1.005)^3 \\ &\vdots \\ &R/(1.005)^{10} \end{aligned}$$



$$360,000 = \frac{R}{1.005^{10}} + \frac{R}{1.005^9} + \dots + \frac{R}{1.005}$$

$$r = 1.005, n = 10$$

$$S_n = \frac{R}{1.005^{10}} \left( (1.005)^{10} - 1 \right) = 360,000$$

$$R = 36997.406$$

③ តំបន់សរុបអារីមិត្ត

- តំបន់សរុប  $\frac{1}{a_n} \rightarrow b_n = \frac{1}{a_n}$

Ex. ឱ្យ  $a_n$  ជូនតំបន់សរុប  $a_2 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{1}{4}, a_3 + a_5 = ?$

$$a_2 = \frac{3}{2} \rightarrow b_2 = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{4} \rightarrow b_4 = 4 = \frac{12}{3}$$

$$\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{12}{3} & \frac{17}{3} & \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \\ \hline \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} b_2 + 2d = b_4 \\ \frac{2}{3} + 2d = \frac{12}{3} \\ d = \frac{5}{3} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} a_3 = \frac{3}{7} \\ a_5 = \frac{3}{17} \end{array} \right\} \frac{3}{7} + \frac{3}{17} = \frac{72}{119}$$

### 13. การนับและความน่าจะเป็น

#### 1) การนับ

- กฎการซ้ำ - คนละกรดี
- กฎการคูณ ~ ต่อเนื่องกัน  $\boxed{\text{step 1} \times \text{step 2}}$

#### 2) ความน่าจะเป็น

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

เบื้องต้นที่ก็ได้

เบื้องต้นที่บ่นคร.

#### 1 การจัดนัม $C_{n,r}$ \*\*\*\*

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

เมื่อ  $n$  ชิ้น เลือก  $r$  ชิ้น "ชิบไม่ซ้ำเดิมการตัว"

$$\hookrightarrow AB = BA$$

ex. 从 A B C D เลือก 2 ตัว

$$\text{จะได้} \quad \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \quad * 1! = 1 = 0!$$

\* หรือ จะบวก

#### 2 การเรียง $P_{n,r}$ \*\*\*\*

เมื่อ  $n$  ชิ้น นำมารีียง  $r$  ชิ้น "สุดท้ายต่างกัน  $AB \neq BA$ "

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ex. สำหรับตัวอย่างที่ 5 ใน เลือก 2 ใน โดยนิรภัยใน 2 วิธีนั้น

$$P_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$$

#### 3 All - $n(E')$ = $n(E)$ เวลาเจอกันซึ่งกันและกัน

#### 4 เรียงของตัว - เรียงของในล้วนๆ และมีของซ้ำกัน $\rightarrow$ ต้องหารหักหักที่ๆ แฟช (!)

ex. เรียง  
จ.ได.

|   |   |                   |   |
|---|---|-------------------|---|
| 1 | 1 | 0                 | 0 |
|   |   | 4!                |   |
|   |   | $\frac{4!}{2!2!}$ |   |

#### 5 การวางแผน $\rightarrow$ มีรวมกัน $n$ ตัวในหนึ่งเดียว \*

ex บลล. เบส ทีม แบบ กด เรียงกันไปเรื่อยๆ ทีม บลล. เบส ทีม นี้ เช่นเดียวกัน (ติดกัน)

$$3! \times 3! = 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36 \text{ วิธี}$$

## ๖ การเทสก

↳ ใช้เกณฑ์ของอย่างในไม่ต้องกัน

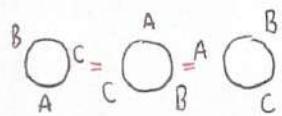
ex. บลลช. แบบ ที่น แบบ ก ก ก ในข้อศ. แบบนี้กันนั่นต้องกัน

$$\begin{array}{c} \text{ปีน } \wedge \text{ เบล } \wedge \text{ ก ก ก } \quad \text{ บลลช. } \text{ แบบ} \\ \wedge \wedge \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \\ \text{ จะได้ } \quad 3! \times 4 \times 3 = 72 \text{ วิธี} \end{array}$$

ex. A A B C D E F ต้องการให้ A ไม่ต้องกัน

$$\begin{array}{c} \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E \wedge F \wedge \quad A \quad A \rightarrow \text{ห้าม } 2 \text{ ตัว} \\ \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge \quad 6 \times 5 \\ \text{ จะได้ } \quad \frac{5! \times 6 \times 5}{2!} = \end{array}$$

## ๗ การเรียงแบบวงกลม



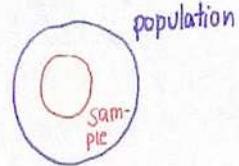
- จะ fix 1 ค่าแล้วอ เพื่อนำมากรนนุ [ต้อง fix เลือกตัว 1 ตัว]

เลือกตัว vs วงกลม

$$\begin{array}{ll} 4 \text{ ตัว } & 4! \\ n \text{ ตัว } & n! \end{array} \quad \begin{array}{l} 3! \\ (n-1)! \end{array}$$

## 14. สัดส่วน

- ประชากร  $\rightarrow$  กลุ่มที่สนใจทั้งหมด
- ตัวอย่าง  $\rightarrow$  กลุ่มส่วนหนึ่งในประชากร



- \* ทราบแล้ว  $\rightarrow$  ค่าที่ได้จากการสำรวจ
- \* คำศัพท์  $\rightarrow$  ค่าที่ได้จากการสำรวจ

① ฐานนิยม  $\rightarrow$  ฝีมือของตัวเดียวเท่านั้น

$$AAAB \rightarrow A, AABB \rightarrow \text{ไม่มีฐานนิยม}$$

② ความถี่

- ความถี่สัมพัทธิ์ = ส่วนของ ความถี่ ซึ่ง ผลรวมความถี่ทั้งหมด



③ การวิเคราะห์ และ นำเสนอข้อมูลเชิงปริมาณ

- เป็นช่วง ( $a-b$ )

$$\cdot \text{ความกว้างช่วงต่างๆ} = \frac{\text{ต่ำสุด} - \text{ต่ำสุดต้น}}{\text{ช.ต.ตั้งแต่ทศวรรษ}}$$

$$\cdot \text{ช่วงล่าง (L)} \quad \left. \begin{array}{c} 5-10 \\ n-16 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{c} L \\ n-16 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{c} 4.5 & 10.5 \\ 10.5 & 16.5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{c} \text{ช่วงกลาง} \\ = \end{array} \right\} \quad \frac{\text{ช.ล.} + \text{ช.บ.}}{2}$$

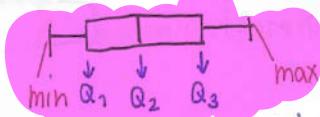
- ช่วงบน (U)

- แผนภูมิ盒型

|   |   |   |        |
|---|---|---|--------|
| 1 | 6 | 7 | 16, 17 |
| 2 | 1 | 2 | 21, 22 |
| 3 | 3 | 4 | 33, 34 |

- แผนภูมิ盒型  $\star$  กติกาเบบ  $\rightarrow$  กติกา , กติกาฯ  $\rightarrow$  กติกา

"แบบนี้" "แบบนี้"



- \* ค่านอกเกณฑ์  $\rightarrow$  ค่าที่น้อย/มากเกินไป

$$Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1), Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1)$$

- ค่านอกเกณฑ์: ต่ำกว่า  $Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1)$  และ มากกว่า  $Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1)$

\*\*\*

$$Q_3 - Q_1 \rightarrow \text{หิสัมภានที่ดีที่สุด}$$

④ คำว่าทางสถิติ

- คำศัพท์

$$-\text{ค่าเฉลี่ย} \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}; \text{ ต่อไปนี้}$$

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}; \text{ ปริมาณ.}$$

$$\text{ค่าเฉลี่ยคือผลรวมของ} \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_Nx_N}{w_1 + w_2 + \dots + w_N}$$

$$\text{มีชื่อว่า } \bar{x} \text{ (เมื่อมาก \rightarrow มีมาก) อยู่กึ่งกลาง } \text{ ท.น.} = \frac{n+1}{2}$$

- จานปีชน 3 คือความถี่สูงสุด หรือค่าเฉลี่ยเท่ากับ

#### ค่าวัตถุการกระจาบ

- การวัดการกระแทกผิวบาร์น์ (ไม่มีติดลบ)

1) พิล็อก  $X_{\text{Max}} - X_{\text{Min}}$

2) พิล็อก ควอไทเกล  $Q_3 - Q_1$

3) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ( $SD$ ) \* ค่าคาดหมาย = ค่าเฉลี่ย

$$\text{ประชาน} \quad b = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

$$\text{ห้ามยก} \quad S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n-1} - \bar{x}^2(n)}$$

$$4) \text{ ความแปรปรวน} = (\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน})^2$$

- การกราฟภายนอกห้อง

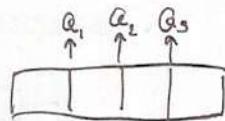
1) สีสี กรณีผืน

$$\text{ปร.หกคร} = \frac{b}{\mu}$$

$$\text{ห้ามยก} = \frac{s}{\bar{x}}$$

#### ค่าวัตถุค่าแนวร่องรอยข้อมูล

$$-\text{ค่าอย่าง} Q_i = \frac{i(n+1)}{4} \rightarrow \text{ต.น.} \rightarrow \text{หาก} \text{ ห.น.} \text{ ไม่หารด้วย} 4$$



$$-\text{เปอร์เซ็นไทเกล} \quad P_i = \frac{i(n+1)}{100}$$

$$\text{ex. } P_{86} = \frac{86(40)}{100} = 34.4$$

$$X_{34} = 52, X_{35} = 53$$

$$\text{หา} \bar{x} \text{ } X_{34.4} = X_{34} + 0.4(X_{35} - X_{34}) = 52.4$$

## ตัวแปรสุ่มและ การแจกแจงความน่าจะเป็น

ex. โยนเหรียญ 3 ครั้ง

$$1) \text{ ปริมาณตัวอย่าง } = S = \{ HHH, HHT, HTT, THH, THT, TTT, TTH, HTT \} \rightarrow n(S) = 8$$

2) ให้  $E_0, E_1, E_2, E_3$  แทน event ที่เกิดขึ้น 0, 1, 2, 3 ครั้งตามลำดับ

$$\text{จงหา } P(E_0), P(E_1), P(E_2), P(E_3)$$

- ตัวแปรสุ่ม คือ  $f$  จาก  $S$  ของกราฟ  $\rightarrow \mathbb{R}$

ไม่ต้องเนื่อง ex. จำนวนก้าวโลกไปได้ พลังงานตั้งแต่หลักๆ

ต่อไปนี้ ex. ส่วนสูง

- การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

ข้อที่ 15. เก็บผลสำรวจความคิดเห็นของนักเรียน ม.6 ห้องหนึ่ง จำนวน 100 คน เป็นดังตารางด้านล่าง

| เกรด       | ความถี่ |
|------------|---------|
| 1          | 15      |
| 2          | 20      |
| 3          | 35      |
| 4          | 30      |
| $\sum 100$ |         |

ถ้าสุ่มนักเรียน 1 คนจากห้องนี้ และให้ตัวแปรสุ่ม  $X$  คือ เก็บคะแนนนักเรียนที่สุ่มได้ งวดความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ก็คือ  $X$   
เมื่อ  $x = \{1, 2, 3, 4\}$  (เพิ่ม !! ลงมาต่ำๆ)

$$X=1 (\text{เกรด } 1), X=3 (\text{เกรด } 3)$$

$$P(X=1) = 15/100 = 0.15$$

ค่าคาดคะเน (ค่าเฉลี่ย)  $\mu_x$

$$\mu_x = \sum x_i (P(x_i))$$

ล้วนเป็นแบบมาตรฐาน

$$\sigma_x = \sqrt{\sum (x_i - \mu_x)^2 P(x_i)}$$

- การแจกแจงเชิงรูปไม่ต่อเนื่อง  $\rightarrow$  แนะนำค่ามัธยฐานเดียวกับ  $P(X=x_i) = \frac{1}{n}; i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

- การแจกแจงทวีน้ำ  $\ast \ast \ast$

จ. ค. ห. ร.  
 $X \sim B(n, p)$

$$1) P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}; \quad \text{Prop ต้องรวมได้ } 1$$

$$2) \mu_x = np$$

$$3) \sigma_x = \sqrt{np(1-p)}$$

ex. นับช่องน้ำ ล้วนไปร่วมกัน 20% แล้ว น้ำกันช่อง 4 ถูก  $n = 4, p = 0.2, 1-p = 0.8$

- โอกาสที่จะถูกน้ำ 3 ถูก

$$P(X=3) = \binom{4}{3} 0.2^3 0.8^1 = 4(0.2)(0.2)(0.2)(0.8) = 0.0256 = 2.56\%$$



၁၅. ဧကລຄ္ခလာန

1) ລົມືຕ

- นาค้าໄດ້ເສົ່າ  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
  - ຕ່ອງເນື່ອງ  $\rightarrow f(a)$  ນັກໃດໆ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ນັກໃດໆ ,  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
  - ມສ ດຳນວນຕໍ່

- $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z}$   $\rightarrow 0$
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z}$   $\rightarrow \infty$
- $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2}$   $\rightarrow 0$
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2}$   $\rightarrow \infty$
- $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^3}$   $\rightarrow 0$
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^3}$   $\rightarrow \infty$

2) ගර්ඩ්ප : ග්‍රැන් අන් අන්

- ถ้า  $x \rightarrow x+h$  จะได้  $f(x) \rightarrow f(x+h)$
  - ถ้า  $x \rightarrow x+h$  ( $\Delta x$ )  $\rightarrow$   $\frac{f(x+h) - f(x)}{x+h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
  - ถ้า  $x \rightarrow x+h$  ( $\Delta x$ )  $\rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

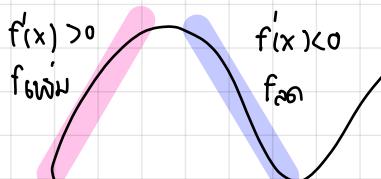
२५३

dif မှုဗ် → မြဲး + လုံး

dif หรือ → ลบ - บวก

$$\text{dif } \frac{dU}{dx} \rightarrow \frac{dU^2}{dx} = nU^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\text{dif } f \circ g \rightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x)$$



3) ຈຳຈັກກາຕ , ດ່າວັນສຸກນົມພັກ໌, ດ່າວັນສຸກນົມພັກ໌, ດ່າວັນສຸກນົມບູນ, ດ່າວັນສຸກນົມບູນ.

① ឧបសម្ព័ន្ត នៅក្នុង diff

$$f'(x) = (x-a)(x-b) \rightarrow \text{.roots} = a, b \quad \leftarrow \begin{matrix} & 1 \\ a & b \end{matrix} \rightarrow$$

(2) ค่าต่ำสุดกับสูงสุด, ค่าสูงสุดกับสูงสุด  $\rightarrow$  วิธีลักษณะ

ความชัน = 0

ค่าสุดขั้นสูงสุดหรือพังก์ชัน

ตัวอย่าง กำหนดให้  $f$  เป็นฟังก์ชันพีนีของบนจำนวนจริง โดยที่  $f'(x) = (x^2 - 16)(3x - 9)(x + 2)$

$$x = -4, -2, 3, 4$$

1. จงหาจุดต่ำสุดทั้งหมดของพังก์ชัน  $f$

$$x = -4, 3$$

2. จงระบุช่วงที่ทางเดินที่  $f$  เป็นพังก์ชันเพิ่ม 3. จงระบุช่วงที่ทางเดินที่  $f$  เป็นพังก์ชันลด

$$x = -2, 4$$

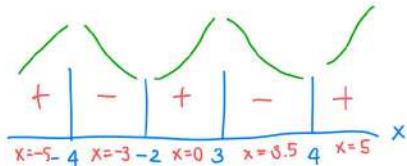
4. พังก์ชัน  $f$  มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ใดบ้างหรือไม่ 5. พังก์ชัน  $f$  มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ใดบ้างหรือไม่

$$f'(x) = 0 \quad \text{เมื่อ } f'(x) \text{ หาต่อไม่ได้}$$

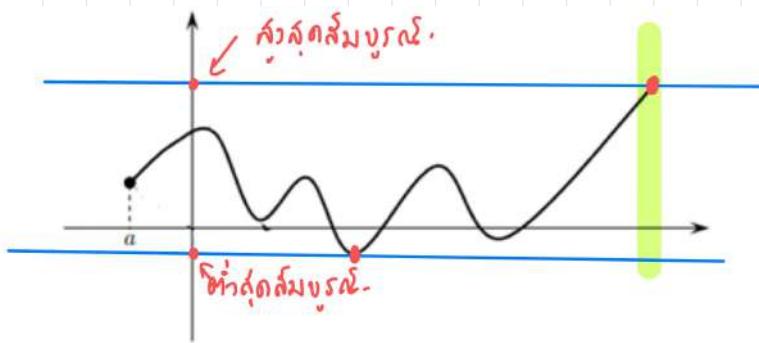
$$(x-4)(x+4)(3x-9)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = -4, -2, 3, 4$$

2.



(3) ค่าต่ำสุดกับสูงสุด, ค่าสูงสุดกับสูงสุด.  $\rightarrow$  วิธีการแก้ปัญหา.



ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 12x - 4 \quad \text{บนช่วงปิด } [-1, 2]$$

$$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 30x + 12$$

$$f'(x) = 0$$

$$12x^3 + 6x^2 - 30x + 12 = 0$$

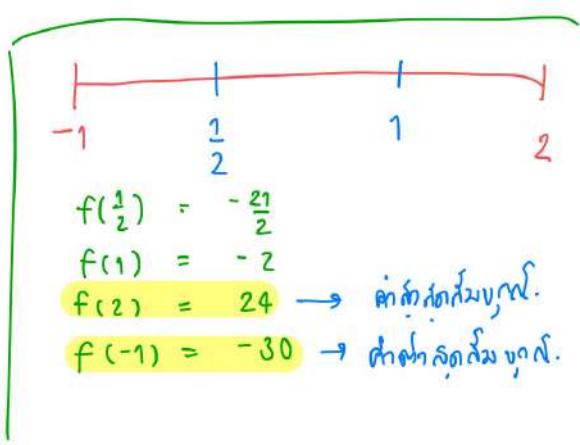
$$6(2x^3 + x^2 - 5x + 2) = 0$$

$$6(x-1)(2x^2 + 3x - 2) = 0$$

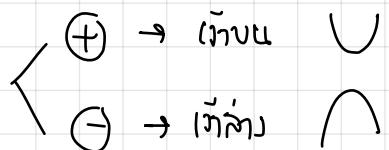
$$6(x-1)(2x-1)(x+2) = 0$$

$$x = 1, \frac{1}{2}, -2$$

$$1 \left[ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -5 & 2 \\ & 2 & 3 & -2 \\ & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right]$$



(4) จุดเปลี่ยนเก้า  $\rightarrow$  diff คันดับ 2

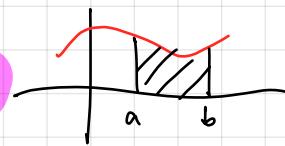


๓) ลิมิตของ  $\int (F)$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

- บันทึกว่าจำเก็งเป็น

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$



- ยก.

