UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

CAIO FERNANDO DIAS
FELIPE DE GODOI CORREA
MATHEUS REIS DE LIMA

TÍTULO: PROVA DO PROBLEMA COBERTURA DE VÉRTICES POR CONJUNTO INDEPENDENTE

ALFENAS/MG

2024

CAIO FERNANDO DIAS
FELIPE DE GODOI CORREA
MATHEUS REIS DE LIMA

TÍTULO: PROVA DO PROBLEMA COBERTURA DE VÉRTICES POR CONJUNTO INDEPENDENTE

Trabalho apresentado à disciplina Algoritmos e Estruturas de Dados 3, do curso de Ciência da Computação, da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Ciências exatas.

ALFENAS/MG

2024

1. Cobertura de Vértices

Um grafo de cobertura de vértices possui uma relação entre seus vértices e seu conjunto de arestas, onde o objetivo é selecionar um subconjunto de vértices de modo que cada aresta do grafo seja incidente a pelo menos um vértice selecionado.

A figura 1 representa o grafo, onde a cobertura de vértices é um conjunto de vértices que foi escolhido, indicados pelos círculos azuis. O objetivo é que esses vértices cubram o gráfico no sentido de que cada aresta em todo o grafo atinja pelo menos um dos vértices preenchidos de azul. Então, é possível verificar que para cada aresta, um dos seus pontos finais é um vértice preenchido de azul. Logo, é notório dizer que esses quatro vértices pintados são uma cobertura de vértices deste grafo onde há uma cobertura de vértices de tamanho quatro, como mostra a figura abaixo:

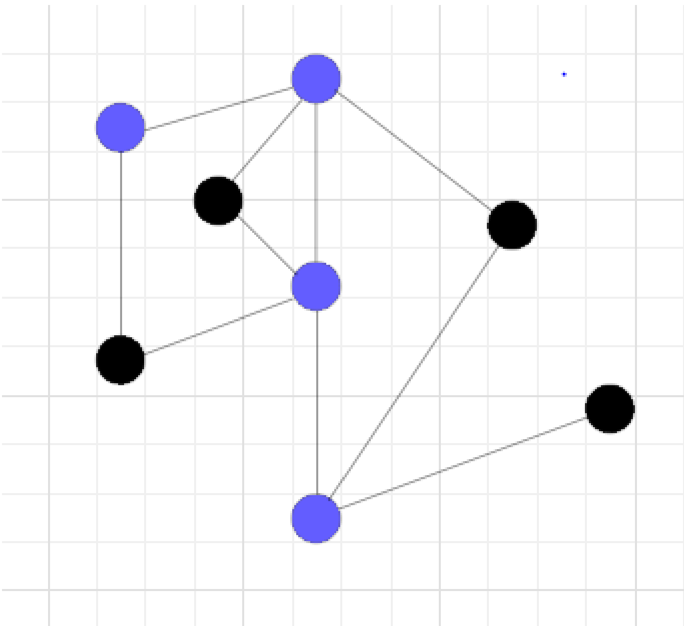

Figura 1: Grafo ilustrativo para explicar o conceito de cobertura de vértices.

2. Prova problema NP-Completo

Para provar que o problema da Cobertura de Vértices é NP-Completo, é necessário seguir dois passos. O primeiro é encontrar um algoritmo determinista para verificar se uma solução proposta é válida em tempo polinomial e, posteriormente, provar que a Cobertura de Vértices está em NP-Completo, reduzindo um problema NP-Completo já existente para o problema desejado, e essa redução deve estar em tempo polinomial da mesma forma.

2.1 Demonstração de que o problema está na classe NP.

O algoritmo a seguir possui o objetivo de verificar uma solução em tempo polinomial, o qual expõe que o problema da Cobertura de Vértices pertence à NP.

```
AlgVerifica(G, S, k) {
// sendo G um grafo não direcionado, S o conjunto solução e k o tamanho da cobertura de vértices. //
    if (S <=k)
        for each e € E // e é uma aresta do conjunto E de arestas do grafo.
            remover aresta de aresta de G.
        for each v E V {// v é um vértice do conjunto V de vértices do grafo.
            if (grau(v] # 0)
                return "Não existe cobertura de tamanho menor ou igual a k"
        }
    return TRUE;
    } else {
        return FALSE
    }
```

Mediante esse algoritmo é possível provar o primeiro passo: há um algoritmo determinista para verificar a solução em tempo polinomial.

2.2 Prova de que a Cobertura de Vértices está em NP-Completo.

O problema do Conjunto Independente será reduzido ao da Cobertura de Vértices, para mostrar que o segundo é NP-Completo.

Um Conjunto Independente de um grafo G é um conjunto S de vértices tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em S. Logo, se a e b são vértices quaisquer de um conjunto independente, não há aresta entre a e b.

O grafo a seguir expõe a prova:

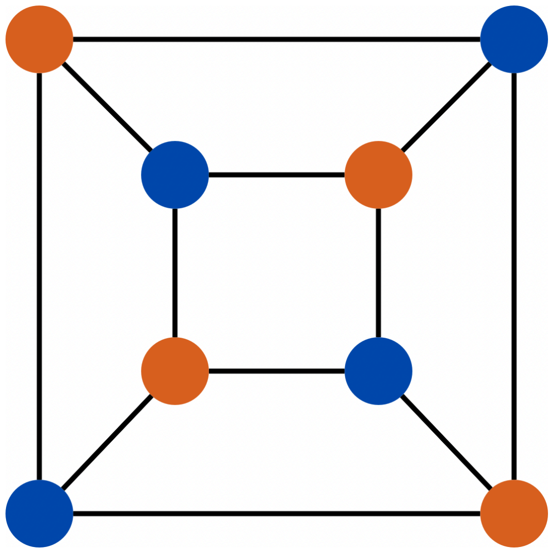

Figura 2: Grafo ilustrativo para expor um conjunto independente.

No grafo G acima, o conjunto independente está representado pelos vértices de cor laranja. Considere k como sendo a quantidade de vértices que pertencem ao conjunto solução, logo k = 4.

É possível observar que o problema do Conjunto Independente e da Cobertura de Vértices são complementares. Ou seja, o conjunto solução da Cobertura de Vértices se dá pelos vértices que não estão contidos no conjunto solução do problema do Conjunto Independente.

Se o grafo for analisado novamente, porém considerando os vértices na cor azul, nota-se que esse conjunto é exatamente a Cobertura de Vértices para esse mesmo grafo. Se considerar um grafo G' idêntico ao grafo acima, k' = |V| - k, sendo |V| a quantidade de vértices do grafo e k a quantidade de vértices presentes no conjunto solução do Conjunto Independente no grafo G.

Observe o diagrama de Karp a seguir:

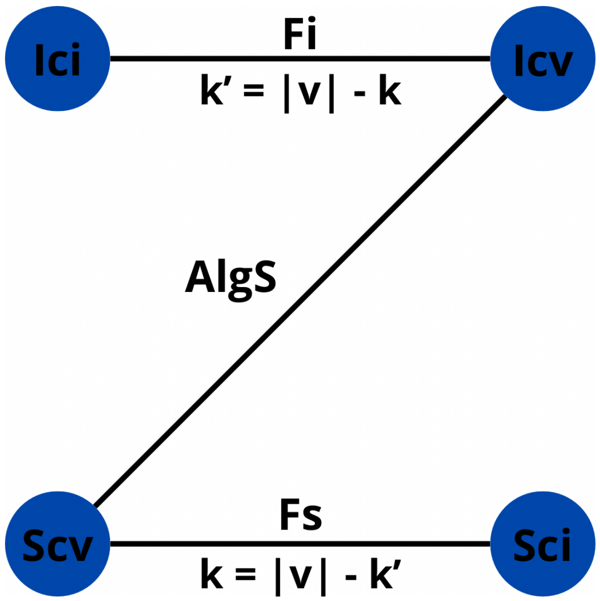

Figura 3: Diagrama de Karp

Como Ici[G,k] é o conjunto de instâncias do conjunto independente, deve existir uma função Fi que reduz as instâncias de Conjunto Independente em tempo polinomial para instâncias específicas do Conjunto de Vértices, que será chamada de Icv[G, k’].

A função Fi funciona da seguinte forma: Dado um grafo G, caso exista um Conjunto Independente de tamanho k, a função irá criar um grafo G' igual a G cuja Cobertura de Vértices seja de tamanho k'= V - k.

O algoritmo AlgS irá solucionar a instância de Icv[G, k'] e fornecerá os vértices que são solução para o problema da Cobertura de Vértices, há possibilidade de expor uma resposta TRUE ou FALSE, ou até mesmo o valor de k'. Como o limite assintótico inferior do problema do Conjunto Independente é Ω(NP-Completo) e Icv é uma derivação de Ici, o algoritmo Algs não pode ter um limite inferior a Ω(NP-Completo).

Se existe uma solução para o problema da Cobertura de Vértices, uma função Fs deve transformar a solução do problema da Cobertura de Vértices Scv em solução de Conjunto Independente Sci em tempo polinomial. A função encontrará os vértices ou solução do Conjunto Independente da seguinte forma: k=|V| - k', onde k são os vértices do Conjunto Independente e k' são os vértices da Cobertura de Vértices, ou seja, ao subtrair do número de vértices |V| do grafo, o k' da Cobertura de Vértices será obtido o número k do conjunto independente.

Por fim, foi desenvolvido que o limite assintótico inferior de AlgS para solucionar a instância Icv é Ω(NP-Completo), então a solução Scv é Ω(NP-Completo), e como a solução do Conjunto Independente Sci é derivada de Scv, seu limite inferior é o mesmo.

Dessa forma está provado que o problema é NP-Completo.

Referências

https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/independent.html

https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/v-cover.html

https://www.youtube.com/watch?v=RaUN2PTNRTM