华东师范大学数据科学与工程学院实验报告

课程名称：AI基础	年级：2022级	实践日期：2024.3.8
指导教师：杨彬	姓名：田亦海	
实践名称：Problem Solving: Search	学号：10225101529	

(查看.md获得最佳效果)

Ⅰ 实验任务

练习常见的搜索算法

Ⅱ 使用环境

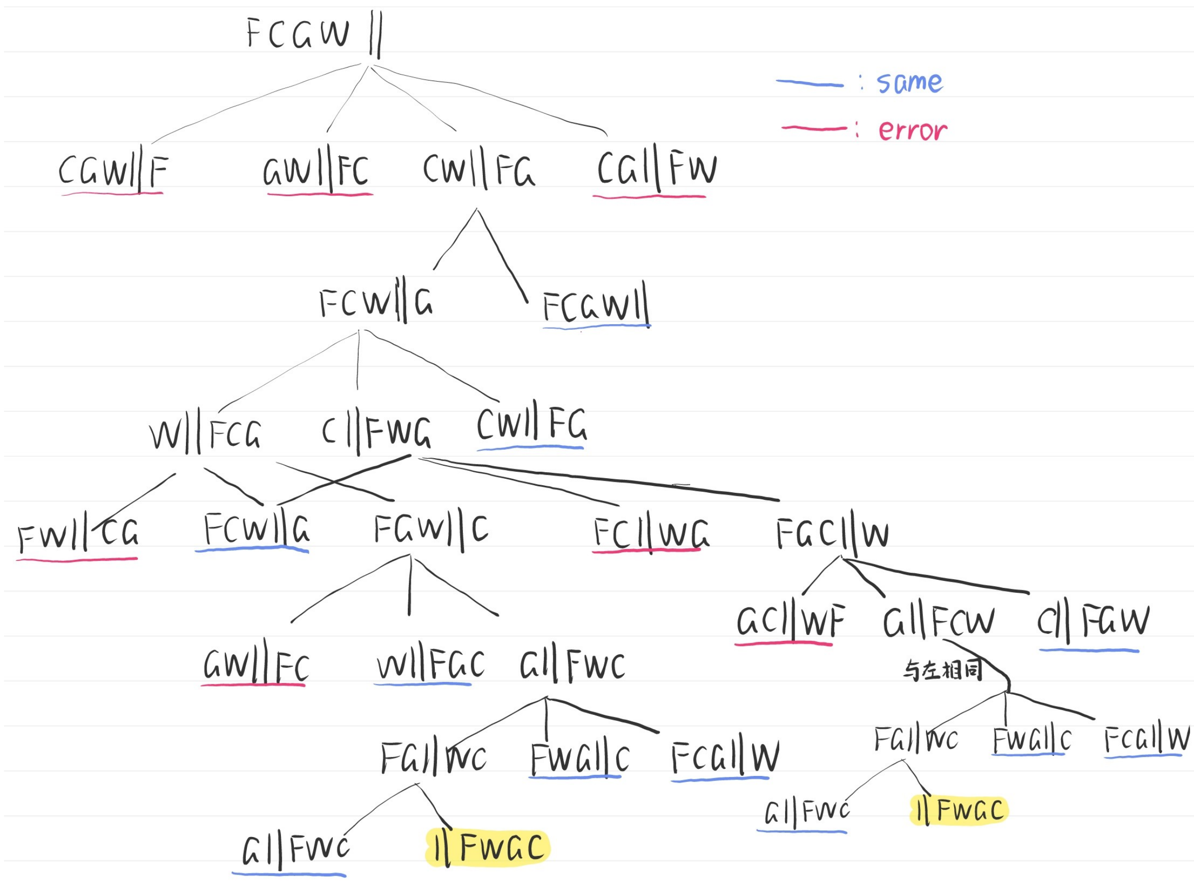
使用c++17(clion), python 3.11.5(vscode)

线下pre, 线上oj评测

Ⅲ 实验过程

0 附加题

农夫过河问题，状态转移图



FCGW ||
: same
: error
CGW||F
GW||FC
CW||FG
CG||FW
FCW||G
FCGW||
W||FCG
C||FWG
CW||FG
FW||CG
FCW||G
FGW||C
FC||WG
FGC||W
GC||WF
G||FCW
C||FGW
GW||FC
W||FGC
G||FWC
与左相同
FG||WC
FWG||C
FCG||W
FG||WC
FWG||C
FCG||W
G||FWC
||FWGC
G||FWC
||FWGC

黑塞矩阵

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sum_{c\in C_1}(2x_1 - 2x_c)$$

类似的，$\nabla f(x)^T = \left(\sum_{c\in C_1}(2x_1-2x_c), \sum_{c\in C_1}(2y_1-2y_c), \cdots, \sum_{c\in C_3}(2x_3-2x_c), \sum_{c\in C_3}(2y_3-2y_c)\right)$

$$H_{f(x)} = \begin{pmatrix} \sum_{C_1}(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{C_1}(2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{C_2}(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{C_2}(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{C_3}(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{C_3}(2) \end{pmatrix}$$

那么，$H_{f(x)}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sum_{C_1}(2)} & & & & & \\ & \frac{1}{\sum_{C_1}(2)} & & & & \\ & & \frac{1}{\sum_{C_2}(2)} & & & \\ & & & \frac{1}{\sum_{C_2}(2)} & & \\ & & & & \frac{1}{\sum_{C_3}(2)} & \\ & & & & & \frac{1}{\sum_{C_3}(2)} \end{pmatrix}$ (剩余位置为0)

我们只需要这样更新 $\vec{x}$：$\vec{x} = \vec{x} - H_{f(x)}^{-1} \cdot \nabla f(x)$

也就是 $\vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_{C_1} x_c / \sum_{C_1} \\ \sum_{C_1} y_c / \sum_{C_1} \\ \sum_{C_2} x_c / \sum_{C_2} \\ \sum_{C_2} y_c / \sum_{C_2} \\ \sum_{C_3} x_c / \sum_{C_3} \\ \sum_{C_3} y_c / \sum_{C_3} \end{pmatrix}$ 相当于求平均.

Prob1 热身

bfs

(可达性)使用队列实现，当前新访问到的点添加到队尾。

每次从队头取出一个点，尝试往其他方向更新从未访问过的点，加进队尾

直到访问至目标点。

假设V点E边，使用邻接表，时间复杂度$O(|V|+|E|)$,空间复杂度$O(|V|+|E|)$

基础Dijkstra

(单源最短路)使用一个数组维护当前所有可以访问的点的距离，

每次"固定"其中最近的点，以此更新相邻的点的距离

邻接表，时间$O(|V|^2+|E|)$，空间$O(|V|+|E|)$

堆优化Dijkstra

使用一个优先队列存储所有可以访问到的点，

每次从队头取出最近点，固定，并以此更新相邻的点的距离，再插入优先队列

邻接表，时间$O(\ (|V|+|E|)log(|E|)\ )$，空间$O(|V|+|E|)$

Prob2 八数码

DFS判断可解

时间复杂度$O(9!/2*log(9!/2))\approx 1e6$

(复杂度来源于set判重)

即遍历所有情况

BFS最短路

由于所有操作的花费均为1，所以第一次达到目标即为最短路

时间复杂度$\approx 1e6$

不过，如果使用康托展开作为哈希函数，来判重，则可以去掉set的一个log的复杂度，优化后大概是$1e5$

Dijkstra最短路

由于所有操作的花费均为1，所以与bfs路径完全相同

时间复杂度$\approx 1e6$

（来源于set和优先队列）

A*最短路

使用曼哈顿距离为启发函数很合适

实际运行时时间复杂度 小于 dij，与启发函数的优劣相关，最坏会退化为迪杰斯特拉。

如果启发函数的估计大于实际路径长度，则可能找不到最短路。

Prob3 迷宫及可视化

项目框架

其中，*3_x.py*是四种算法的代码，bfs，dfs，Dijkstra，astar

*generate.py*是一个使用简单prim算法根据参数生成迷宫的代码

puzzle.py 仅用于放置较为典型的迷宫（毕竟迷宫生成具有随机性）

tmp.py 存放临时代码

visual.py 是可视化代码，其中包括一些我封装的函数，可以根据传入的参数画图

可视化代码

(可以参看代码中的注释.)

函数**look_look(maze, vis, pre, dis, now,cnt,fontsiz,t,t_end)**

参数分别是迷宫矩阵,访问过的地区,节点的前继,所有点的最短路,当前所处位置,探索次数,字体大小,显示时间,终止时显示时间

首先根据maze使用imshow画图,并标注坐标轴(这里我将x轴调整为上方, 与迷宫序号对应)

```
def look_look(maze, vis, pre, dis, now,cnt,fontsiz,t,t_end):  #迷宫,访问过的地区,节点的前继,所有点的最短距离,当前所处
    plt.imshow(maze, cmap='Greys', interpolation='nearest',alpha=0.7)  # 使用灰度色图, 并关闭插值

    plt.xticks(range(len(maze[0])))
    plt.yticks(range(len(maze)))
    plt.gca().set_xticks([x - 0.5 for x in range(1, len(maze[0]))], minor=True)
    plt.gca().set_yticks([y - 0.5 for y in range(1, len(maze))], minor=True)
    plt.gca().xaxis.tick_top()
    plt.grid(which="minor", color="black", linestyle='-', linewidth=2)
    plt.axis('on')  # 显示坐标轴
```

然后染色起点和终点

```
        rs(0, 0, 'lightgreen')
        rs(len(maze) - 1, len(maze[0]) - 1, 'lightgreen')
```

遍历迷宫每个点根据dis和vis对其染色, 并显示距离,

使得已经确定最短路的道路显示为浅灰色,即将访问的道路为三角形橘色

```python
for i in range(len(maze)):
    for j in range(len(maze[0])):
        if type(dis[i][j])==int and dis[i][j]!=-1 :
            plt.text(j,
                     i,
                     dis[i][j],
                     fontsize=22,
                     ha='center',
                     va='center')
            if vis[i][j]==0:
                rs_3(i, j, 'orange')
        if type(dis[i][j])==list and dis[i][j]!=[-1,-1] :
            plt.text(j,
                     i,
                     str(dis[i][j][0])+','+str(dis[i][j][1]),
                     fontsize=fontsiz,
                     ha='center',
                     va='center')
            if vis[i][j]==0:
                rs_3(i, j, 'orange')
        if vis[i][j] == 1 and maze[i][j]==0:
            rs(i, j, 'silver')
```

染色agent当前位置(violet!)

```python
rs(now[0], now[1], 'violet')
```

根据前继信息,得出当前点到起点的路经,并绘图

```python
path = []
p = now
path.append((p[0], p[1]))
while 1:
    if p[0] == 0 and p[1] == 0:
        break
    p = pre[p[0]][p[1]]
    path.append((p[0], p[1]))

path_x, path_y = zip(*path)
plt.plot(path_y,
         path_x,
         marker='o',
         markersize=8,
         color='violet',
         linewidth=5)
```

显示尝试次数try,若到达终点则显示finished,根据是否达到终点决定展示时间.最后清空画板

```python
plt.text(((len(maze[0]) - 1) / 2),
            -1,
             'try:'+str(cnt),
             fontsize=16,
             ha='center',
             va='center')
if now[0] == len(maze) - 1 and now[1] == len(maze[0]) - 1:
    plt.text(((len(maze[0]) - 1) / 2),
             len(maze) - 0.2,
             'finished',
             fontsize=18,
             ha='center',
             va='center')
    plt.pause(t_end)
plt.pause(t)
plt.cla()
```

算法代码(astar为例)

import需要的库和代码文件

visual是可视化代码,generate是生成迷宫代码.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import queue
import visual
import generate
```

main调用astar进入,可以传入迷宫为参数,也可以使用函数生成的迷宫为参数

```python
if __name__ == '__main__':
    n = 10
    m = 10
    maze = [[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0],
            [0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0],
            [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0],
            [0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0],
            [1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0]]
    astar(maze, n, m,magic=False)
    #astar(generate.gnr(11,11), 11, 11,True)
```

大致算法流程:

```python
def astar(maze, n, m,magic):
    cnt=0
    fig = plt.figure(figsize=(len(maze[0]), len(maze)))
    plt.show(block=False)

    vis = [[0 for j in range(m)] for i in range(n)]
    dis = [[[-1 for k in range(2)] for j in range(m)] for i in range(n)]
    pre = [[[-1 for k in range(2)] for j in range(m)] for i in range(n)]
    q = queue.PriorityQueue()
    q.put((0 + fun(0, 0, n, m), [0, 0, 0, fun(0, 0, n, m)]))
    dis[0][0] = [0, 0 + fun(0, 0, n, m)]
    while not q.empty():
        now = q.get()
        cnt+=1
        now = now[1]
        d = now[2]
        vis[now[0]][now[1]] = 1


        for op in ops:
            new = [now[0] + op[0], now[1] + op[1]]
            if new[0] >= 0 and new[0] < n and new[1] >= 0 and new[1] < m:
                if maze[new[0]][new[1]] == 0 and (dis[new[0]][new[1]][1] > d + 1 + fun(new[0], new[1], n, m) or dis
                    q.put((d + 1 + fun(new[0], new[1], n, m),[new[0], new[1], d + 1,fun(new[0], new[1], n, m)]))
                    dis[new[0]][new[1]] = [d + 1, d + 1 + fun(new[0], new[1], n, m)]
                    vis[new[0]][new[1]] = 0
                    pre[new[0]][new[1]] = now
                if magic and maze[new[0]][new[1]] == 1 and (dis[new[0]][new[1]][1] > d + 5 + fun(new[0], new[1], n,
                    q.put((d + 5 + fun(new[0], new[1], n, m),[new[0], new[1], d + 5,fun(new[0], new[1], n, m)]))
                    dis[new[0]][new[1]] = [d + 5, d + 5 + fun(new[0], new[1], n, m)]
                    vis[new[0]][new[1]] = 0
                    pre[new[0]][new[1]] = now
        visual.look_look(maze, vis, pre, dis, now, cnt,fontsiz=16,t=0.1,t_end=10)
        if now[0] == n - 1 and now[1] == m - 1:
            return
```

声明cnt用于记录尝试次数,生成plt窗口并非阻塞显示,初始化vis dis pre数组, 声明优先队列 ,其中权值为总估计距离

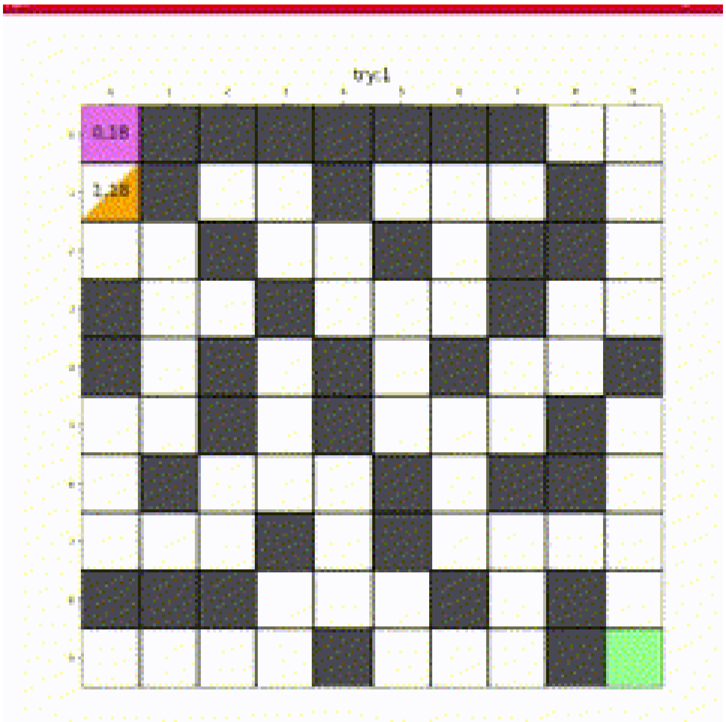
(使用曼哈顿距离为启发函数) 内容为`[x位置,y位置,当前已用距离,预估剩余距离]`,

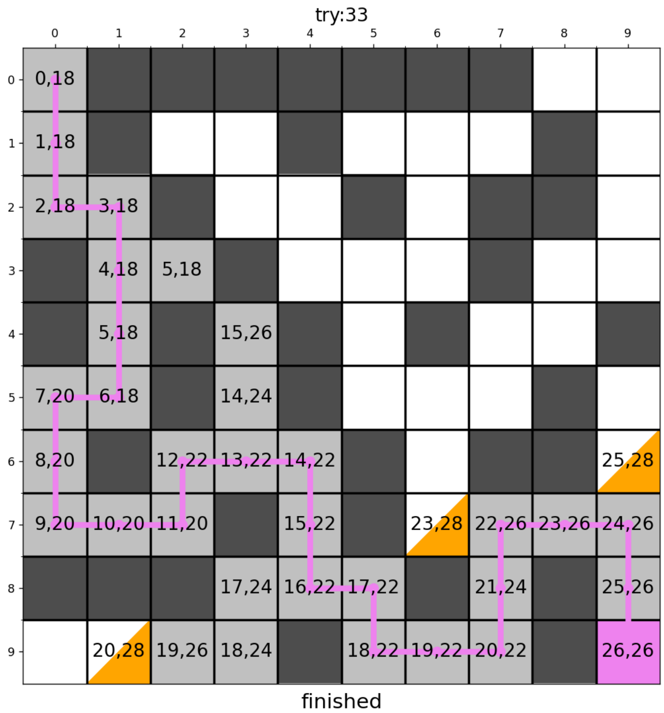
循环遍历优先队列,并向其他方向探索即可.

这里magic参数主要是是否允许打墙,每进入墙面会产生共计5的花费

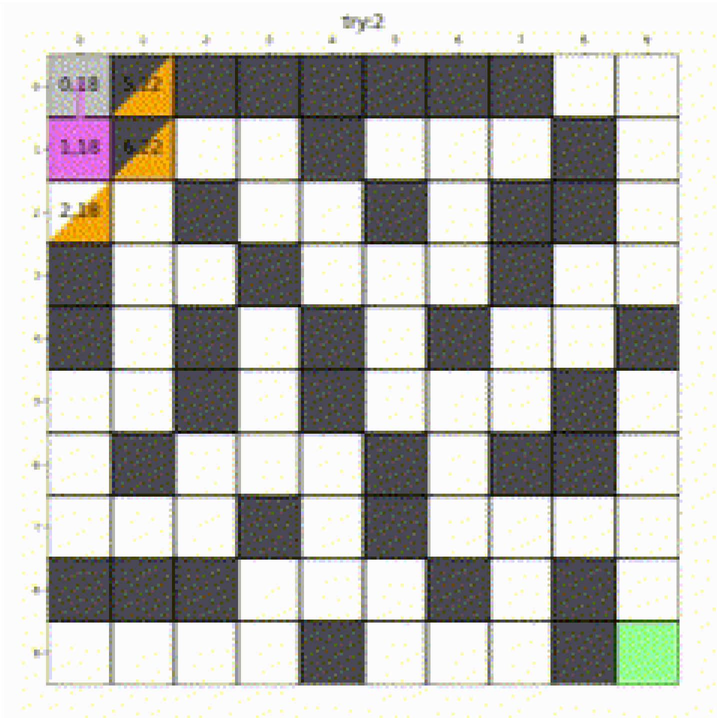
每次循环最后调用`look_look`画图,并根据是否达到终点return.

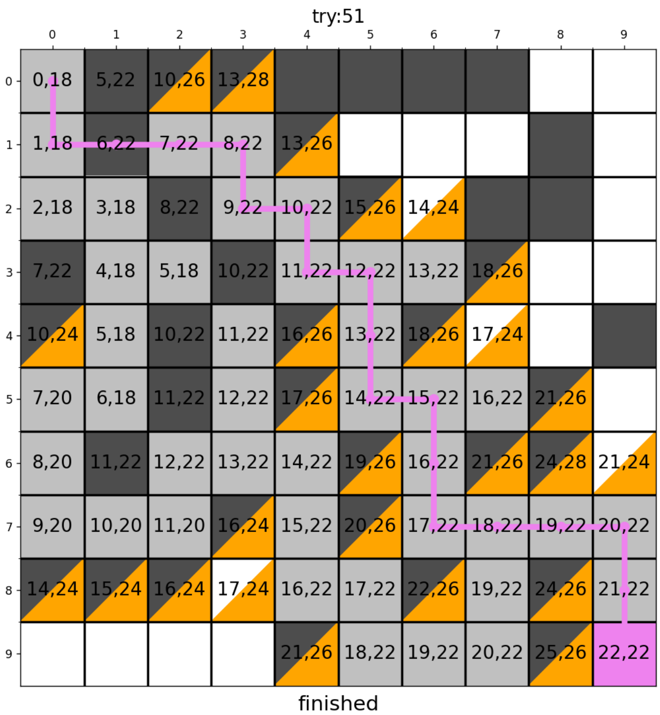
效果如图(这是一个gif图,可在md文件中查看)





如果允许穿墙,即使用`magic=True`


try:2
0,18 5,22
1,18 6,22
2,18


try:51
0,18 5,22 10,26 13,28
1,18 6,22 7,22 8,22 13,26
2,18 3,18 8,22 9,22 10,22 15,26 14,24
7,22 4,18 5,18 10,22 11,22 12,22 13,22 18,26
10,24 5,18 10,22 11,22 16,26 13,22 18,26 17,24
7,20 6,18 11,22 12,22 17,26 14,22 15,22 16,22 21,26
8,20 11,22 12,22 13,22 14,22 19,26 16,22 21,26 24,28 21,24
9,20 10,20 11,20 16,24 15,22 20,26 17,22 18,22 19,22 20,22
14,24 15,24 16,24 17,24 16,22 17,22 22,26 19,22 24,26 21,22
21,26 18,22 19,22 20,22 25,26 22,22
finished

迷宫生成

```python
# 迷宫生成Prim
import random as rd

def gnr(n,m):
    ops = [[0, 1], [1, 0], [0, -1], [-1, 0]]
    maze = [[1 for j in range(m)] for i in range(n)]
    vis = [[0 for j in range(m)] for i in range(n)]
    for i in range(0,n,2):
        for j in range(0,m,2):
            maze[i][j]=0
    ls=[]

    now=[0,m-1]
    vis[now[0]][now[1]]=1
    for op in ops:
        new=[now[0]+op[0],now[1]+op[1]]
        if new[0]>=0 and new[0]<n and new[1]>=0 and new[1]<m and maze[new[0]][new[1]]==1:
            ls.append([new[0],new[1],op[0],op[1]])

    while len(ls)!=0:
        now=ls.pop(rd.randrange(len(ls)))
        tmp=[]
        new=[now[0]+now[2],now[1]+now[3]]
        if not(new[0]>=0 and new[0]<n and new[1]>=0 and new[1]<m):
            continue
        if (maze[new[0]][new[1]]==1 or vis[new[0]][new[1]]==1):
            continue
        else:
            maze[now[0]][now[1]]=0
            now=new
            vis[now[0]][now[1]]=1
            for op in ops:
                new=[now[0]+op[0],now[1]+op[1]]
                if new[0]>=0 and new[0]<n and new[1]>=0 and new[1]<m and maze[new[0]][new[1]]==1:
                    ls.append([new[0],new[1],op[0],op[1]])
    for item in maze:
        print(item)
    return maze
```

可以生成一张比较简单的迷宫.

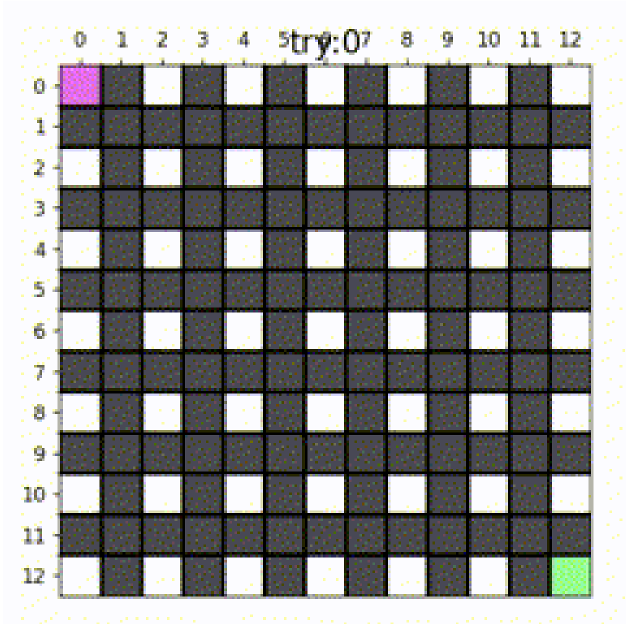
算法:

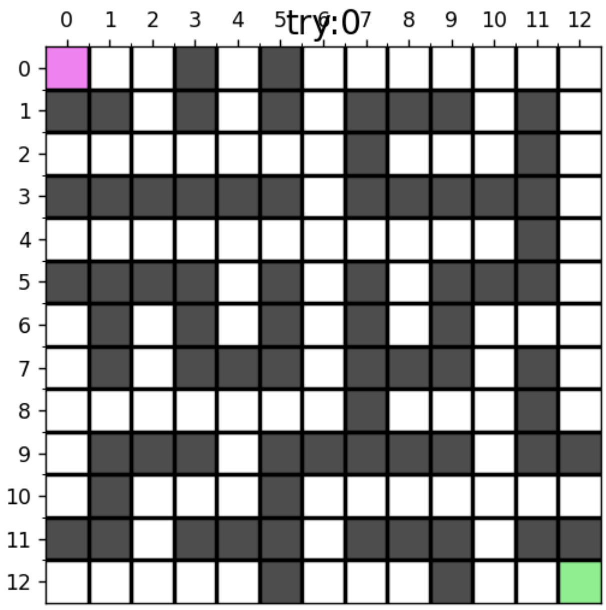
存储所有待检测墙体及方向,

随机取出一个[墙体,方向],如果顺着方向是未使用过的道路则打通墙壁,并标记道路已经使用,将道路附近的墙壁加入墙体库;

如果道路已经使用过,则不做更改.

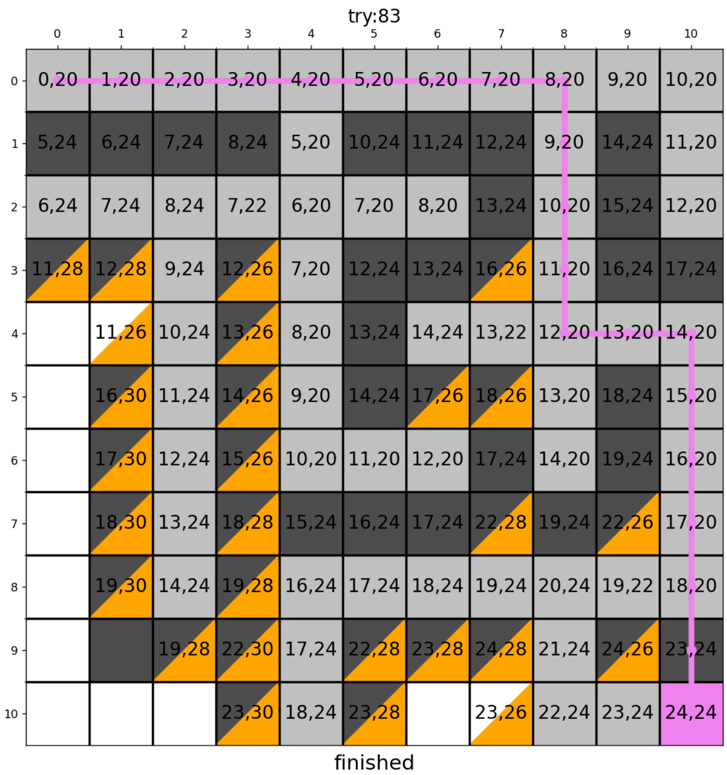
值得一提的是,同样可以调用look_look来检视生成的过程.





当然,这个只是生成迷宫最简单的算法的一种,对于墙体的利用并不是很完美.

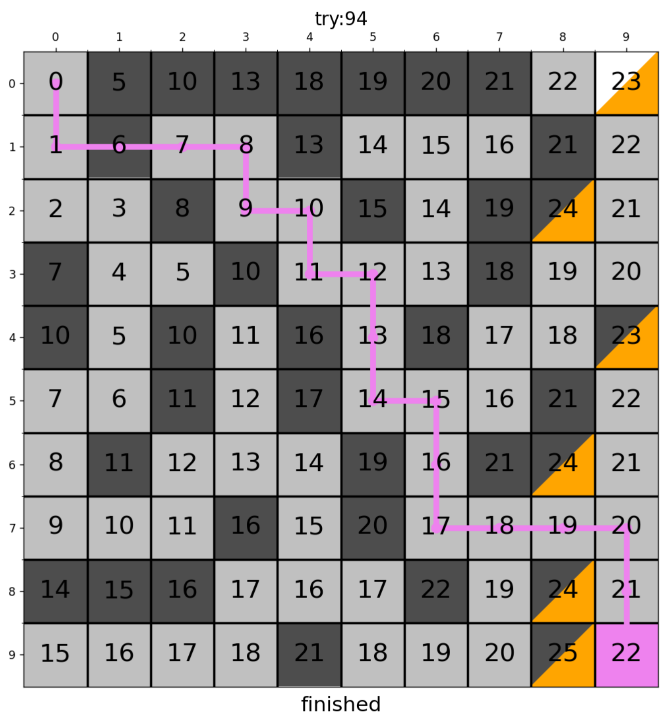
这是调用此函数作为输入的astar



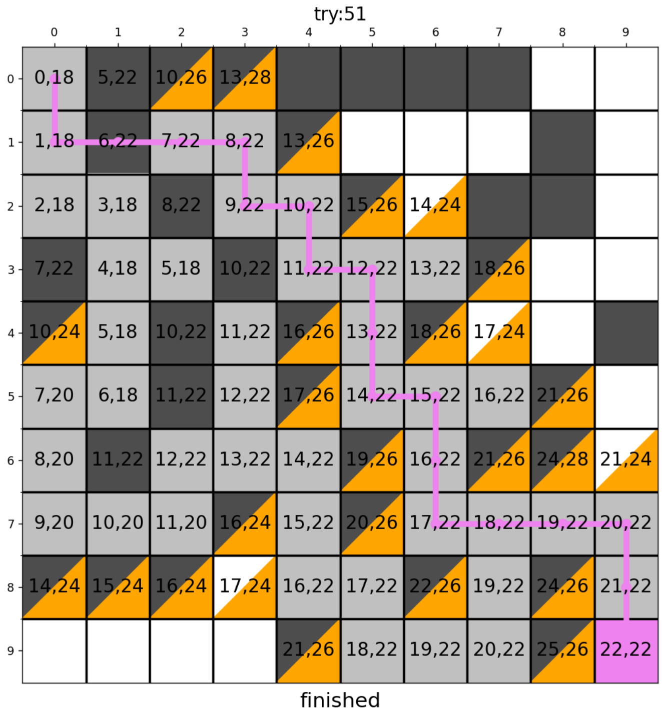
可视化可以看出什么?

① 对比同一个迷宫(可穿墙)下的dij和astar,

我们可以发现dij探索时几乎是扇形扩散的,需要探索94次



而astar是"一条粗直线",仅允许一定程度的发散.try 51次



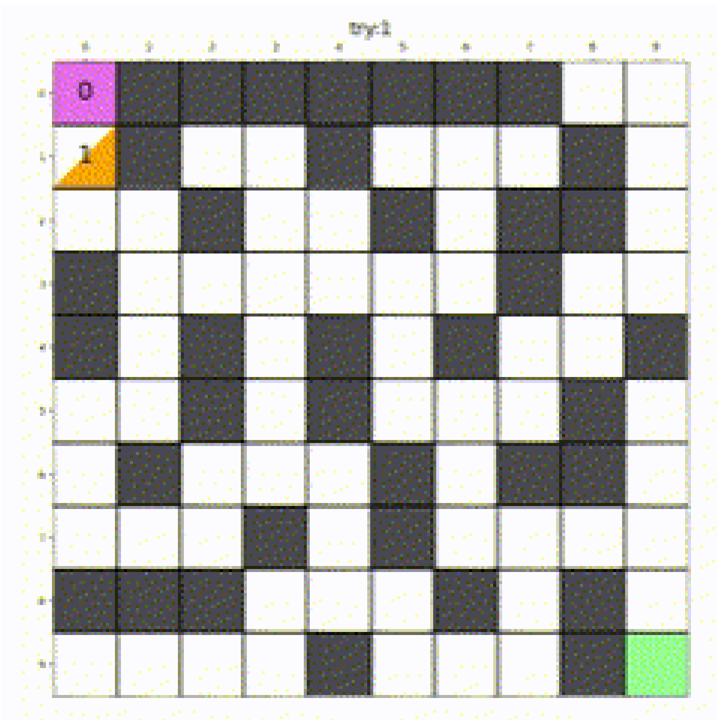
仅仅使用一个启发式函数,探索次数就变成了dij的一半.

② dfs在有环图中的低效性

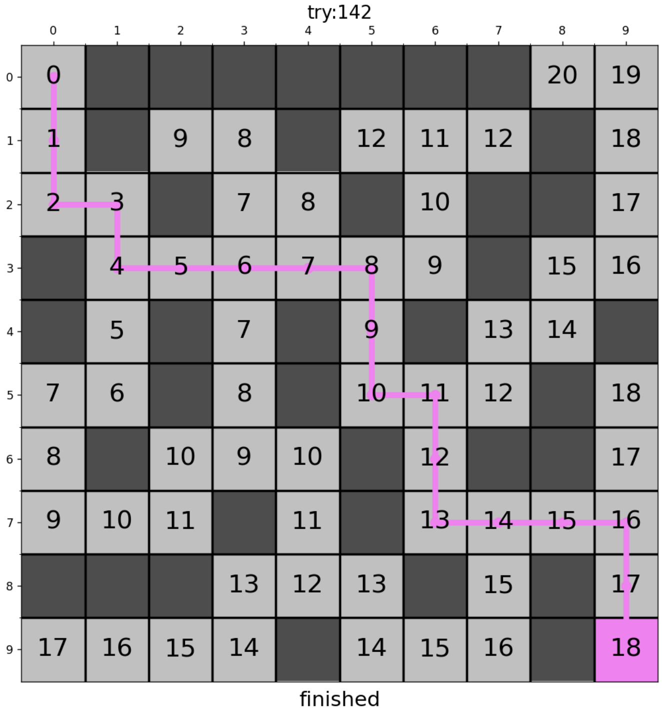
bfs dij astar都可以保证第一次访问到终点就是最短路经(不穿墙情况下),无论有无环

但dfs在有环图却无法保证,其计算得到最短路经的唯一方式只能是把所有点都全部探索完毕,且过程中还会多次探索一个点

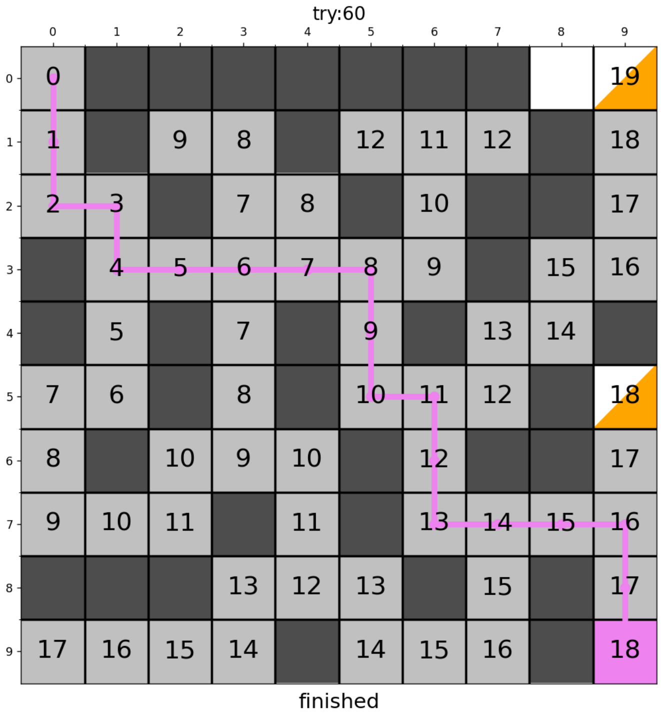
请看vcr



最终探索次数为142次



花费了bfs的两倍多(下图为bfs)



IV 总结

练习了最小化损失函数使用黑塞矩阵的计算,

熟练运用了bfs dfs dij 的 c++和python 编写, 熟练掌握了astar的使用.

掌握了一种迷宫生成算法, 编写可视化代码直观展示了算法效果,并相互比较.

良好的项目结构