组合积分法

ZUHE JIFENFA

● 朱永银 郭文秀 著

华中科技大学出版社

内 容 简 介

本书介绍的是积分领域中传统积分方法未曾涉及的一种新方法——组合积分法，内容包括三角函数有理式的积分、指数函数有理式的积分、双曲函数有理式的积分、一类无理函数的积分和组合积分法在其他方面的应用等5章.书后有两个附录：增补积分表和增补积分递推公式.

本书可作为大学生学习高等数学和高等学校数学教师教学的参考书.

序

数学是研究空间形式和数量关系的科学，它的产生和发展经历了由实践到理论、再指导实践的过程. 随着时代的进步和科学技术的飞速发展，数学的理论和方法越来越多地应用到生产实践和科学技术和各个方面. 可以预见，在科学技术日益更新的时代，随着信息技术的日益广泛的应用，掌握数学知识将更加重要. 数学的多样性和应用的广泛性也将日益显现.

由于数学基础的重要性，它历来是高等教育基础课的重要组成部分，我们数学教育工作者 要加倍努力工作，更好地帮助学生掌握他们需要的数学知识. 对于高等数学的基础微积分不但要在理论上进行研究，而且更重要的是在方法上进行革新. 这无疑是十分有意义的事情.

本书的作者在完成繁重的教学任务的情况下，笔耕不辍，经过十多年的潜心研究，在微积分领域创造了一种全新的积分方法——组合积分法. 对于各类复杂的有理函数式的积分，用常用的积分方法很难求出其积分，甚至解决不了其积分问题，但用组合积分法就很顺利地解决. 组合积分法的理论和方法在今后的数学理论发展中将起到一定的作用.

由于以上这些想法，我很高兴地为《组合积分法》这本书写了以上的序.

齐民友

2002 年 5 月于武汉大学珞珈山

前　言

数学是研究空间形式和数量关系的科学，数学科学包括两个主要方面．第一个方面是它抽象的方面，可以叙述为："对结构、模式以及模式和谐性的研究，探求抽象模式结构中的对称性和规则性是纯数学的核心．"研究数学的这种抽象性就是所谓的基础研究．"这些探求的目的通常在于了解抽象的概念，但是也常常对其他领域产生实践的和理论的影响"．数学科学的第二个方面是"由要对生活中，通常是由物理学、生物学和商业中，碰到的事件或系统的(数学)建模所激发的"各种应用数学解决实际问题的事例进行研究．研究数学在各领域中的应用就是所谓的数学的应用研究．"数学具有双重的性质，她既是为其精确性和内在的优美而受到敬重的独立的学科，她也是应用领域的丰富的工具资源．可以把数学描述为具有内部抽象性和外部有效性的学科．"

"这种双重性的两部分是深刻地联系在一起的．探求模式中的次序，对称性和规则性是纯数学研究的核心．这种研究的结果是非常持久的，有的时候会在发现这些结果的几十年后以一种意想不到的方式找到重要的应用．一个重要的理由就是数学结果一经证明，决不会被否证，即使它们可能会被更强的结果所取代．相比之下，其他科学是经由一个逐次逼近的过程来达到真理的"．

本书是积分领域中一种方法的研究，属于数学基础研究范畴，在传统的积分方法中，很难求解甚至不能求解的各类函数有理式的积分问题，应用本书创立的全新积分方法——组合积分法就可以得到解决．并且通过大量的研究，得到许多算式对称，结构和谐和结果简捷的优美的积分公式和积分递推公式．今天看起来这种研究是繁琐的，微不足道的，但说不定过几十年后，这些基础研究

所得出的结果会被得到“意想不到”的重用.

本书共有五章,内容包括:三角函数有理式的积分;指数函数有理式的积分;双曲函数有理式的积分;一类无理函数的积分和组合积分法在其他方面的应用.书后附有两个附录,即附录A:增补积分表;附录B:增补积分递推公式.本书可作为理工科大学生和数学教师的参考书.

武汉大学前校长、全国著名的数学家齐民友教授欣然为本书作序,给本书增色不少.本书的出版发行,得到武汉职业技术学院领导和科研处的大力支持.本书已作为武汉职业技术学院2002年科研项目,并报省教育厅高等教育处申请立项.本书能顺利出版发行,还得到华中科技大学出版社的大力支持. 在此一并表示谢意.

由于作者水平所限,疏漏之处在所难免,望读者不吝赐教.

作　者

2002年5月

作|者|简|介

朱永银，男，57岁，教授，湖北武汉市黄陂人，毕业于武汉大学数学系，中国数学会会员，湖北省数学学会高职高专数学研究会常务副理事长。研究方向为函数论，公开发表论文30余篇；主编、主审高等数学、工程数学、计算机等教材和教学参考书20余部，计1000多万字。

作者简介

郭文秀，女，56岁，副教授，湖北随州市人，毕业于武汉大学数学系，中国数学会会员，湖北省数学学会高职高专数学研究会理事。公开发表论文20余篇；主编、主审高等数学、工程数学等教材与教学参考书10余部，计500多万字。

目　录

绪　论

积分在微积分中占有极为重要的地位，它与微分比较，难度大，方法灵活. 掌握积分的基本方法（如换元法、分部积分法等）是十分必要的，但这远远不够，还必须掌握一些特殊的积分方法，以便能顺利地、快速地、准确地计算出函数的积分来. 学习一些积分方法，不应单纯地看做是在玩符号游戏. 应该看到，通过积分运算的训练，可以达到锻炼意志、启迪思维、加强运算能力培养的目的. 本书要介绍的是一种全新的积分方法——组合积分法.

华罗庚教授在他的著作《高等数学引论》一书中，举出了这样一个求不定积分的例子：

求　$T_1=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x,\quad T_2=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x.$

我们可以用代换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 分别求出 T_1 与 T_2，但还有更简单的方法，即

$$bT_1+aT_2=\int\mathrm{d}x=x+C_1,\tag{1}$$

$$\begin{aligned}-aT_1+bT_2&=\int\frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a\cos x+b\sin x)}{a\cos x+b\sin x}\\&=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2.\end{aligned}\tag{2}$$

由此立刻可以得到

$$T_1=\frac{1}{a^2+b^2}[bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|]+C,$$

$$T_2=\frac{1}{a^2+b^2}[ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|]+C'.$$

事实上，此题若用万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 分别求出 T_1,T_2 的过程

是十分繁杂的，不妨解答如下：

对于 $$T_1=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx,$$

可设 $t=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

于是 $$T_1=\int\frac{4tdt}{(1+t^2)(a-at^2+2bt)}.$$

此有理式的积分分母含有字母，求解十分不易. 用部分分式法可令

$$\frac{4t}{(1+t^2)(a-at^2+2bt)}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{Ct+D}{a-at^2+2bt},$$

去分母，比较同次幂的系数得方程组

$$\begin{cases}-Aa+C=0,\\ 2Ab-Ba+D=0,\\ Aa+2Bb+C=4,\\ Ba+D=0,\end{cases}$$

解方程组，得

$$A=\frac{2a}{a^2+b^2},\quad B=\frac{2b}{a^2+b^2},\quad C=\frac{2a^2}{a^2+b^2},\quad D=-\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

故原积分 T_1 可化为

$$\begin{aligned}T_1&=\frac{2}{a^2+b^2}\int\frac{at+b}{1+t^2}dt+\frac{2}{a^2+b^2}\int\frac{a^2t-ab}{a-at^2+2bt}dt\\&=\frac{a}{a^2+b^2}\int\frac{2tdt}{1+t^2}+\frac{2b}{a^2+b^2}\int\frac{dt}{1+t^2}-\frac{a}{a^2+b^2}\int\frac{-2at+2b}{a-at^2+2bt}dt\\&=\frac{1}{a^2+b^2}\left[a\int\frac{d(1+t^2)}{1+t^2}+2b\int\frac{dt}{1+t^2}-a\int\frac{d(a-at^2+2bt)}{a-at^2+2bt}\right]\\&=\frac{1}{a^2+b^2}[a\ln(1+t^2)+2b\arctan t-a\ln|a-at^2+2bt|]+C\\&=\frac{1}{a^2+b^2}\left[2b\arctan t-a\ln\left|\frac{a-at^2+2bt}{1+t^2}\right|\right]+C\\&=\frac{1}{a^2+b^2}\left[2b\arctan t-a\ln\left|\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2bt}{1+t^2}\right|+C\right.\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}[bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|]+C.$$

同理可求出 T_2. 与华教授给出的解法比较,这种解法不知道要复杂多少倍,而且运算程序多,极易出错.

华教授的解法为什么可以简化运算呢?在这里,他巧妙地将两个结构相似的积分组合在一起,成为一个以所求积分为变量的 T_1,T_2 的二元方程组,解此方程组,即得所求的不定积分.

在华教授这一例子的启发下,我们对能用此种方法求解的积分问题进行了多年深入的探讨和研究,将研究的心得写成了这本书,奉献给广大读者,力求使华教授的这一方法具有更加普遍的指导意义.

像华教授那样用解方程组求解问题的方法称为**组合法**,用组合法求积分的方法称为**组合积分法**. 本书主要研究的是用组合法求积分的问题.

用组合法求解积分问题的关键,是在式(2)中利用了凑微分公式

$$(-a\sin x+b\cos x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(a\cos x+b\sin x).$$

那么,什么样的函数能够这样凑微分呢?这样的函数具有怎样的性质呢? 下面来讨论这个问题.

1. 互导函数与自导函数

由导数公式可知

$$(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x,$$

$$(\mathrm{ch}\ x)'=\mathrm{sh}\ x,\quad (\mathrm{sh}\ x)'=\mathrm{ch}\ x.$$

由这样的一种互导性引出如下定义:

定义 1 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为可导函数,如果 $f'(x)=\alpha g(x)$,且 $g'(x)=\alpha f(x)$ 或 $g'(x)=-\alpha f(x)$ (α 为任意常数),那么称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为**互导函数**. 若 $f'(x)=\alpha g(x)$,且 $g'(x)=-\alpha f(x)$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为**相反互导函数**,α 为**互导系数**.

例如,双曲正弦函数 $f(x)=\mathrm{sh}\ x$ 与双曲余弦函数 $g(x)=$

ch x为互导函数，这是因为

$$f'(x)=(\text{sh }x)'=\text{ch }x=g(x),$$

且 $$g'(x)=(\text{ch }x)'=\text{sh }x=f(x).$$

显然，正弦函数 $f(x)=\sin x$ 与余弦函数 $g(x)=\cos x$ 也为互导函数. 且为相反互导函数. 这是因为

$$f'(x)=(\sin x)'=\cos x=g(x),$$

且 $$g'(x)=(\cos x)'=-\sin x=-f(x).$$

这里 $\alpha=1$.

事实上，常数函数 $y_1=a, y_2=b$ （a,b 为常数）也为互导函数，这是因为

$$y_1'=(a)'=0=0\cdot b=0\cdot y_2,$$

且 $$y_2'=(b)'=0=0\cdot a=0\cdot y_1.$$

这里 $\alpha=0$.

不难证明，sh ax 与 ch ax，sin ax 与 cos ax 也为互导函数.

指数函数 e^x 具有十分有趣的特性，它的导数就是其本身，即 $(e^x)'=e^x$. 对于一般的指数函数 $y=a^x$ （$a>0, a\neq 1$），有 $y=(a^x)'=a^x\ln a=\ln a\cdot y$. 这就是说，指数函数的导数等于函数本身去乘以一个常数，对于此类函数的自导特性，引出定义 2.

定义 2 设函数 $y=f(x)$为可导函数，如果

$$f'(x)=\omega f(x)\quad (\omega\text{ 为任意常数}),$$

那么，称函数 $y=f(x)$为**自导函数**. ω 为**自导系数**.

如果 $y=f(x)$为自导函数，则称 $y=f(-x)$为**对称自导函数**. 这是因为 $y=f(x)$与 $y=f(-x)$的图像关于 y 轴对称的缘故.

如：$y=e^{-x}$为自导函数，这是因为

$$y'=(e^{-x})'=-e^{-x}=-y.$$

同时 $y=e^{-x}$也是 $y=e^x$ 的对称自导函数.

常数函数 $y=a$ 也是自导函数，这是因为

$$y'=(a)'=0=0\cdot y.$$

这里自导系数 $\omega=0$.

同样不难验证　函数 $y=a^{-x}, y=e^{\alpha x}, y=e^{-\alpha x}, y=a^{\alpha x}, y=a^{-\alpha x}$ 等都为自导函数.

2. 互导函数与自导函数的性质

性质 1　两个非相反互导函数之和与两个相反互导函数之差为自导函数，即

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为两个非相反互导函数，那么 $f(x)+g(x)$ 为自导函数.

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为相反互导函数，那么 $f(x)-g(x)$ 是自导函数.

证　设 $h(x)=f(x)+g(x)$. 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为非相反互导函数，所以有

$$f'(x)=\alpha g(x) \quad 且 \quad g'(x)=\alpha f(x).$$

于是有
$$\begin{aligned} h'(x) &= [f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x) \\ &= \alpha[f(x)+g(x)] = \alpha h(x) \end{aligned}$$

由定义知，$h(x)$ 为自导函数，即 $f(x)+g(x)$ 为自导函数.

同样可证明性质 1 的第二部分.

推论 1　如果 $f(x), g(x)$ 为互导函数. 那么有下列凑微分式成立：

$$[g(x)\pm f(x)]dx=\frac{1}{\alpha}d[f(x)+g(x)] \quad (\alpha\neq 0), \tag{3}$$

证　因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为互导函数，所以由定义知

$$f'(x)=\alpha g(x)$$

且
$$g'(x)=\alpha f(x) \quad 或 \quad g'(x)=-\alpha f(x),$$

于是有
$$\begin{aligned} &d[f(x)+g(x)] \\ &=[f'(x)+g'(x)]dx=[\alpha g(x)\pm\alpha f(x)]dx \\ &=\alpha[g(x)\pm f(x)]dx, \end{aligned}$$

所以有
$$[g(x)\pm f(x)]dx=\frac{1}{\alpha}d[f(x)+g(x)].$$

性质 2　两个自导函数之积仍为自导函数. 即，如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都为自导函数，那么函数 $f(x)g(x)$ 也为自导函数.

证 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是自导函数. 所以由定义知,存在 ω_1,ω_2. 使得

$$f'(x)=\omega_1 f(x),\quad g'(x)=\omega_2 g(x)$$

成立. 于是设 $h(x)=f(x)g(x)$,则

$$\begin{aligned}h'(x)&=[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\\&=(\omega_1+\omega_2)f(x)g(x)=(\omega_1+\omega_2)h(x).\end{aligned}$$

由定义知 $h(x)$ 为自导函数,即 $f(x)g(x)$ 为自导函数.

推论 2 三个或三个以上自导函数的积也是自导函数.

推论 3 自导函数的 n 次幂也为自导函数. 即,如果函数 $f(x)$ 为自导函数,那么 $f^n(x)$ 也为自导函数.

性质 3 两个相反自导函数的和与这两个相反自导函数的差为互导函数. 即,如果 $f(x)$ 为自导函数,那么 $u(x)=f(x)+f(-x)$ 与 $v(x)=f(x)-f(-x)$ 为互导函数.

证 因为 $f(x)$ 为自导函数,所以有

$$f'(x)=\omega f(x),\quad f'(-x)=-\omega f(-x)$$

于是有

$$\begin{aligned}u'(x)&=f'(x)+f'(-x)=\omega f(x)-\omega f(-x)\\&=\omega[f(x)-f(-x)]=\omega v(x),\end{aligned}$$

且
$$\begin{aligned}v'(x)&=f'(x)-f'(-x)=\omega f(x)+\omega f(-x)\\&=\omega[f(x)+f(-x)]=\omega u(x),\end{aligned}$$

所以由互导函数的定义便有,函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 为互导函数,即 $f(x)+f(-x)$ 与 $f(x)-f(-x)$ 为互导函数.

推论 4 设函数 $f(x)$ 为自导函数,则有下列凑微分式:

$$[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x=\frac{1}{\omega}\mathrm{d}[f(x)+f(-x)]\quad(\omega\neq0).\qquad(4)$$

组合积分法就是利用了自导对称函数和互导函数的特性,将结构相似的积分组合在一起,从而简化了被积函数,达到简化积分运算和便于积分的目的.

3. 组合积分法的分类

组合积分法分为两大类型，即**参元组合法**与**分解组合法**.

(1) 参元组合法

在求一个积分 I 时，找出另一个与 I 结构相似的积分 J，然后将两个积分组合起来，通过解 I 与 J 的方程组求解积分的方法叫做**参元组合法**.

例 1 设函数 $f(x)$ 为自导函数，则 $f(-x)$ 为对称自导函数，求下列有理式的积分：

$$I=\int\frac{f(x)}{af(x)+bf(-x)}\mathrm{d}x.$$

解 设 $J=\int\frac{f(-x)}{af(x)+bf(-x)}\mathrm{d}x$ 则有

$aI+bJ=\int\mathrm{d}x=x$ （不计一常数之差，以下同）

$$aI-bJ=\int\frac{af(x)-bf(-x)}{af(x)+bf(-x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\omega}\int\frac{\mathrm{d}[af(x)+bf(-x)]^{*}}{af(x)+bf(-x)}$$

$$=\frac{1}{\omega}\ln|af(x)+bf(-x)|.$$

两式相加立刻可得

$$I=\frac{1}{2a}\left[x+\frac{1}{\omega}\ln|af(x)+bf(-x)|\right]+C.$$

(2) 分解组合法

将一个积分分为两个结构相似的积分 I 与 J，将 I 与 J 组合成一个方程组，解方程组即得积分 I 与 J. 最后将 I 和 J 联合成所要求的积分，这种求积分的方法叫做分解组合法.

例 2 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为相反互导函数，且 $a=1$，即 $f'(x)=g(x)$. 且 $g'(x)=-f(x)$，求下列有理式的积分：

$$I=\int\frac{a_1f(x)+b_1g(x)}{af(x)+bg(x)}\mathrm{d}x.$$

解 令 $I_1=\int\frac{f(x)\mathrm{d}x}{af(x)+bg(x)}, I_2=\int\frac{g(x)}{af(x)+bg(x)}\mathrm{d}x,$

---

* 这里用了凑微式(4).

则有
$$aI_1+bI_1=\int \mathrm{d}x=x,$$
$$\begin{aligned}-bI_1+aI_2&=\int\frac{-bf(x)+ag(x)}{af(x)+bg(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}[af(x)+bg(x)]}{af(x)+bg(x)}\\&=\ln|af(x)+bg(x)|,\end{aligned}$$
由此立刻得到
$$I_1=\frac{1}{a^2+b^2}[ax-b\ln|af(x)+bg(x)|],$$
$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}[bx+a\ln|af(x)+bg(x)|].$$
所以 $$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_1\\&=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}x+\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}\ln|af(x)+bg(x)|+C.\end{aligned}$$

以上只是简单地介绍了组合积分法的两大类型，这些方法在以后的积分过程中都要用到. 一般来说，具有自导性与互导性函数(如三角函数、指数函数、双曲函数)有理式的积分均可使用组合积分法. 这些将在以下各章陆续介绍.

第1章　三角函数有理式的积分

三角函数有理式的积分一般可用万能代换法来求.但是,有些三角函数有理式的积分,施用万能代换后得到的代数有理式的积分仍然是一个比较复杂的积分,要求出此积分相当困难,有些积分甚至无法“积”出. 本章介绍的就是用组合积分法求三角函数有理式的积分.

1.1　含有 $a\sin x+b\cos x$ 的积分

对于分母含有 $a\sin x+b\cos x$ 的三角函数有理式的积分,可考虑使用组合积分法. 为了说明问题,先从以下简单的例子谈起:

例1　求 $\int\frac{\sin x}{3\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x$.

解法1　此题若用万能代换法求,可令 $\tan\frac{x}{2}=t$,则原积分化为

$$\int\frac{4t\mathrm{d}t}{(3-3t^2+4t)(1+t^2)}.$$

要解出上述有理式的积分是很繁的,但绪论中对于此类积分的一般情形作了详细的解答,在这里就不再赘述了.用组合积分法解答如下:

令 $I=\int\frac{\sin x}{3\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x,\quad J=\int\frac{\cos x}{3\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x,$

因为
$$2I+3J=\int\mathrm{d}x=x,\tag{1}$$

$$-3I+2J=\int\frac{(2\cos x-3\sin x)\mathrm{d}x}{3\cos x+2\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}(3\cos x+2\sin x)}{3\cos x+2\sin x}$$

$$=\ln|3\cos x+2\sin x|, \tag{2}$$

所以由 $2\times(1)-3\times(2)$便有

$$I=\frac{2}{13}x-\frac{3}{13}\ln|3\cos x+2\sin x|+C.$$

解法 2 此题也可用吉米多维奇著《数学分析习题集》中的公式

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C \tag{3}$$

来解，其中

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\quad\left(x\neq k\pi-\arctan\frac{\pi}{a}\right).$$

这里可令 $a_1=1, b_1=0, a=2, b=3$，代入 A, B 式中便有 $A=\frac{2}{13}$，$B=\frac{-3}{13}$，于是有

$$\int\frac{\sin x}{3\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x=\frac{2}{13}x-\frac{3}{13}\ln|3\cos x+2\sin x|+C.$$

此种解法看起来简单，但要记住这样复杂的公式的确不是一件容易的事. 而用组合积分法解，不用记公式，只需记住这种解题思路就行了. 对于式(3)，苏联数学家 Ц·ЦДЯШКОА 等在《数学分析参考书》中用待定法来进行证明，将式(3)右边求导与被积函数比较，可求出待定系数 A, B，即为所要证明的结论. 这种证法固然简单，但要得到式(3)绝不是一件容易的事情，一定要经过多次反复演算，从大量的题目中抽出一般公式，然后才能进行证明的. 在掌握了组合积分法以后，要得到式(3)就十分容易了，直接求式(3)左边的积分即可.

令
$$I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

$$I_1=\int\frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

则有
$$bI_1+aI_2=\int \mathrm{d}x=x, \tag{4}$$
$$\begin{aligned} aI_1-bI_2 &=\int\frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x} \\ &=\ln|a\sin x+b\cos x|. \end{aligned} \tag{5}$$
$b\times(4)+a\times(5)$，得
$$I_1=\frac{b}{a^2+b^2}x+\frac{a}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|,$$
$a\times(4)-b\times(5)$，得
$$I_2=\frac{a}{a^2+b^2}x-\frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|.$$
于是有
$$\begin{aligned} I &=a_1I_2+b_1I_1 \\ &=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}x+\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|+C. \end{aligned}$$

在绪论中我们已讨论过，组合积分法分为参元组合法和分解组合法. 例 1 中的两种解法，前者为参元组合法，后者为分解组合法. 在参元组合法中，一些用万能代换不易求出的积分，用分解组合法比较容易解出. 在求某个积分时，要找出一个与所求积分结构相似的积分，我们称它为**辅助积分**. 用参元组合法解题，关键在于找出辅助积分. 寻求辅助积分应掌握以下原则：

1)辅助积分与原积分在结构上相似.

2)对一个三角函数有理式的积分，它的辅助积分仍然是一个三角函数有理式的积分. 对于指数函数有理式的积分、双曲函数有理式的积分也是如此，它们的辅助积分分别为指数函数有理式的积分和双曲函数有理式的积分.

下面再举例说明寻求辅助积分的方法.

例 2 求 $I=\int\frac{\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$.

解 显然可令 $J=\int\frac{\sin^2 x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$ 作为辅助积分，于是有
$$I+J=\int\frac{\cos^2x+\sin^2x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|, \tag{6}$$

$$-b^2I+a^2J=\int\frac{a^2\sin^2x-b^2\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int(a\sin x-b\cos x)\mathrm{d}x=-a\cos x-b\sin x. \tag{7}$$

$a^2\times(6)-(7)$，得

$$I=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|+a\sin x+b\cos x\right]+C.$$

例 3　求 $I=\int\frac{a_1^2\sin^2x+b_1^2\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$.

解　显然要用分解组合法解，即可令

$$I_1=\int\frac{\sin^2x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

由例 2 不难得到

$$I_1=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|-a\cos x-b\sin x\right],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|+a\cos x+b\sin x\right].$$

于是有　$I=a_1^2I_1+b_1^2I_2$

$$=\frac{a_1^2b^2+a^2b_1^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$

$$+(ab_1^2-aa_1^2)\cos x+(bb_1^2-ba_1^2)\sin x+C.$$

例 4　求 $I=\int\frac{\cos^3x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解　不妨设辅助函数 $J=\int\frac{\sin^3x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$，于是有

$$I+J=\int\frac{\cos^3x+\sin^3x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int(1-\sin x\cos x)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}\cos^2x,$$

$$I-J=\int\frac{(\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{[1+(\sin x+\cos x)^2]}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}(\cos x+\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{\sin x+\cos x}+(\sin x+\cos x)\right]\mathrm{d}(\cos x+\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{4}(\sin x+\cos x)^2$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{4},$$

立刻便有

$$I=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\cos^2x+\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{4}\cos x\sin x+C.$$

以上例子均是利用解关于 I,J 的二元方程组来求解的. 事实上,用三元方程组也可以求解,例 5 就是用 I_1,I_2,I_3 的三元方程组求解的.

例 5 求 $I=\int\frac{a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x.$

解 令

$$I_1=\int\frac{\sin^2x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{2\sin x\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

$$I_3=\int\frac{\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$I_1+I_3=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|,\quad(8)$$

$$a^2I_1-b^2I_3=\int(a\sin x-b\cos x)\mathrm{d}x=-a\cos x-b\sin x,\quad(9)$$

$$a^2I_1+abI_2+b^2I_3=\int(a\sin x+b\cos x)\mathrm{d}x$$
$$=-a\cos x+b\sin x. \tag{10}$$

$a^2\times(8)-(9)$，得

$$I_3=\frac{a^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$
$$+\frac{a}{a^2+b^2}\cos x+\frac{b}{a^2+b^2}\sin x,$$

$b^2\times(8)+(9)$，得

$$I_1=\frac{b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$
$$-\frac{a}{a^2+b^2}\cos x-\frac{b}{a^2+b^2}\sin x,$$

$(10)-(9)$，得

$$I_2=\frac{2}{a}(\sin x-bI_3)$$
$$=-\frac{2ab}{(a^2+b^2)^{3/2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$
$$+\frac{2a}{a^2+b^2}\sin x-\frac{2b}{a^2+b^2}\cos x.$$

于是有　　$I=a_1I_1+b_1I_2+c_1I_3$

$$=\frac{a_1b^2+c_1a^2-2abb_1}{(a^2+b^2)^{3/2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$
$$+\frac{c_1b-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2}\sin x+\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2}\cos x+C.$$

对于分母含有 $a\sin x+b\cos x+c$ 的三角函数有理式的积分，也可以考虑使用组合积分法.

例 6　求 $I=\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解 令 $J=\int\frac{\cos x}{1+\sin x+\cos x}dx$，则有

$$I+J=\int\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x+\cos x}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\right)dx$$
$$=x-\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|=x-\ln\left|\frac{1+\sin x+\cos x}{1+\cos x}\right|,$$
$$-I+J=\int\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx=\int\frac{d(1+\sin x+\cos x)}{1+\sin x+\cos x}$$
$$=\ln|1+\sin x+\cos x|.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\left[x-\ln\left|\frac{1+\sin x+\cos x}{1+\cos x}\right|-\ln|1+\sin x+\cos x|\right]+C$$
$$=\frac{1}{2}[x-2\ln|1+\sin x+\cos x|+\ln|1+\cos x|]+C$$
$$=\frac{1}{2}\left[x+\ln\frac{|1+\cos x|}{(1+\sin x+\cos x)^2}\right]+C.$$

例 7 求 $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx.$

解 令
$$I_1=\int\frac{\sin x\,dx}{a\sin x+b\cos x+c},$$
$$I_2=\int\frac{\cos x\,dx}{a\sin x+b\cos x+c},$$

$I_3=\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$ （此积分查表可求出，这里略），

则有
$$aI_1+bI_2+cI_3=\int dx=x, \tag{1}$$
$$-bI_1+aI_2=\int\frac{(a\cos x-b\sin x)dx}{a\sin x+b\cos x+c}=\int\frac{d(a\sin x+b\cos x+c)}{a\sin x+b\cos x+c}$$
$$=\ln|a\sin x+b\cos x+c|. \tag{2}$$

$a\times(1)-b\times(2)$，得

$$I_1=\frac{ax}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x+c|-\frac{ac}{a^2+b^2}I_3,$$

$b\times(1)+a\times(2)$，得

$$I_2=\frac{bx}{a^2+b^2}+\frac{a}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x+c|-\frac{bc}{a^2+b^2}I_3.$$

所以有 $I=a_1I_1+b_1I_2+c_1I_3$

$$=\frac{a_1a+b_1b}{a^2+b^2}x+\frac{b_1a-a_1b}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x+c|$$

$$+\left(c_1-\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}\right)I_3.$$

对于分母含有$(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)$的积分，也可以用组合积分法.

例8 求$I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)}\mathrm{d}x\ (a^2\neq b^2)$.

解 令$I_1=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)}$,

$$I_2=\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)},$$

则有

$$aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{b\sin x+a\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|,$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|,$$

解方程组，得

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\ \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[a\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|\right.$$

$$\left.-b\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|\right],$$

$$I_2=\frac{1}{(b^2-a^2)\sqrt{a^2+b^2}}\left[b\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|\right.$$

$$-a\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|\Bigg].$$

所以有 $\quad I=a_1I_1+b_1I_2$

$$=\frac{aa_1-bb_1}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|$$

$$+\frac{ab_1-ba_1}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|+C.$$

对于分母含有$(a\sin x+b\cos x)(c\sin x+d\cos x)$的三角函数有理式的积分，按照例 8 的方法立刻可得到

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)(c\sin x+d\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{da_1-ab_1}{(ad-bc)\sqrt{c^2+d^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{d}{c}}{2}\right|$$

$$+\frac{cb_1-ba_1}{(ad-bc)\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|+C.$$

例 9 求$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)}\mathrm{d}x \quad (a^2\neq b^2)$.

解 令$I_1=\int\frac{\sin^2 x}{(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)}\mathrm{d}x$,

$$I_2=\int\frac{\cos^2 x}{(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)}\mathrm{d}x,$$

则有

$$a^2I_1-b^2I_2=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{b\sin x+a\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}(b\sin x+a\cos x)}{b\sin x+a\cos x}$$

$$=-\ln|b\sin x+a\cos x|,$$

$$b^2I_1-a^2I_2=\int\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}$$
$$=-\ln|a\sin x+b\cos x|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^4-b^4}[b^2\ln|a\sin x+b\cos x|-a^2\ln|b\sin x+a\cos x|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^4-b^4}[a^2\ln|a\sin x+b\cos x|-b^2\ln|b\sin x+a\cos x|],$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=I_1+I_2\\&=\frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}\ln|a\sin x+b\cos x|\\&\quad-\frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}\ln|b\sin x+a\cos x|+C\\&=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\sin x+b\cos x}{b\sin x+a\cos x}\right|+C.\end{aligned}$$

含有$(a\sin x+b\cos x)$的积分还可以举出许多例子，这里不再一一列举，留给读者去思考.

习　题　1.1

1. 用参元组合法求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{3\sin x+4\cos x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{3\sin x+4\cos x}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{a\sin x-b\cos x}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(3\sin x+4\cos x)(4\sin x-3\cos x)}$.

2. 用分解组合法求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int\frac{a\sin x-b\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int\frac{\sin^2x+\sin x\cos x+\cos^2x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int\frac{a_1\sin^2x+b_1\cos^2x}{(a\sin x+b\cos x)(c\sin x+d\cos x)}\mathrm{d}x$.

3. 用微分法验证积分公式：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)}$$
$$=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\sin x+b\cos x}{b\sin x+a\cos x}\right|+C.$$

4. 求$\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$（用三种方法求解）.

1.2 含有$(a\sin x+b\cos x)^n$的积分

对于分母含有$(a\sin x+b\cos x)^n$ $(n>1)$的三角函数有理式的积分，可考虑使用组合积分法．先证明两个递推公式.

定理 1 设

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\quad\left(n>1,x\neq k\pi-\arctan\frac{b}{a}\right),$$

则 $$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left[(n-2)J_{n-1}+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}\right].\quad(1)$$

证 由

$$\begin{aligned}J_n&=\int\frac{(a\sin x+b\cos x)\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}=\int\frac{\mathrm{d}(b\sin x-a\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}\\&=\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}\\&\quad-\int(b\sin x-a\cos x)\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)^{-(n+1)}\\&=\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}-(n+1)\int\frac{(b\sin x-a\cos x)^2\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+2}}\\&=\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}-(n+1)\int\frac{(a^2+b^2)\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+2}}\\&\quad+(n+1)J_n.\end{aligned}$$

所以有

$$nJ_n=(n+1)(a^2+b^2)J_{n+2}-\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}.$$

将 $n-2$ 代替上式中的 n，得

$$(n-2)J_{n-2}=(n-1)(a^2+b^2)J_n-\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}},$$

故得递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}\right].$$

定理 2 设 $$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n},$$

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2},$$

则

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\mathrm{d}x\\&=AJ_{n-1}-\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}\\&\qquad\left(n>1,x\neq k\pi-\arctan\frac{b}{a}\right).\end{aligned}\tag{2}$$

证 用组合积分法来证明. 令

$$I_1=\int\frac{\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\mathrm{d}x,$$

则

$$aI_1+bI_2=J_{n-1},$$

$$\begin{aligned}-bI_1+aI_2&=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^n}\\&=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}.\end{aligned}$$

所以有

$$I_1=\frac{a}{a^2+b^2}J_{n-1}+\frac{b}{a^2+b^2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}},$$

$$I_2=\frac{b}{a^2+b^2}J_{n-1}-\frac{a}{a^2+b^2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}.$$

于是有

$$
\begin{aligned}
I &= a_1 I_1 + b_1 I_2 \\
&= \frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2} J_{n-1} - \frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}} \\
&= AJ_{n-1} - \frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

由上面两个递推公式立刻可得下面要用到一些积分公式. 例如,由递推公式(1)可得到

$$
J_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\,\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}+C, \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
J_3 &= \frac{1}{2(a^2+b^2)}\left[J_1+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2(a^2+b^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|\right. \\
&\qquad \left.+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\right]+C,
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
J_4 &= \frac{1}{3(a^2+b^2)}\left[2J_2+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\right] \\
&= \frac{1}{3(a^2+b^2)}\left[\frac{2}{a^2+b^2}\,\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\right]+C.
\end{aligned} \tag{5}
$$

由递推公式(2)可得到

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x \\
&= AJ_1 - B\,\frac{1}{a\sin x+b\cos x} \\
&= A\,\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right| - \frac{B}{a\sin x+b\cos x}+C.
\end{aligned}
$$

要记住递推公式(2)不是件容易的事情,实际上只需记住递推公式(2)的证题思路,直接用组合积分法求解就可以了.

例 1 求 $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

解 令
$$I_1=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2},$$
$$I_2=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2},$$

则
$$aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|,$$
$$-bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^2}=-\frac{1}{a\sin x+b\cos x},$$

于是有
$$I_1=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|+\frac{b}{a\sin x+b\cos x}\right],$$
$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|-\frac{a}{a\sin x+b\cos x}\right].$$

所以有
$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|\right]\\&\quad-\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\,\frac{1}{a\sin x+b\cos x}+C\\&=\frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|\\&\quad-\frac{B}{a\sin x+b\cos x}+C.\end{aligned}$$

为了熟悉用组合积分法求分母含有$(a\sin x+b\cos x)^2$的有理式的积分，下面再举几例.

例 2 求 $I=\int\frac{\sin^2x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x.$

解 令 $$J=\int\frac{\cos^2x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2},$$

则有 $$I+J=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x},$$

$$a^2I-b^2J=\int\frac{a^2\sin^2x-b^2\cos^2x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x-\frac{2ab}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|.$$

所以有 $$I=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{b^2}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x\right.$$

$$\left.-\frac{2ab}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|\right]+C$$

$$=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\frac{b^3\sin x-ab^2\cos x}{a\sin x+b\cos x}+(a^2-b^2)x\right.$$

$$\left.-2ab\ln|a\sin x+b\cos x|\right]+C.$$

例 3 求 $I=\int\frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x.$

解 令 $$I_1=\int\frac{\sin^2x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2},$$

$$I_2=\int\frac{2\sin x\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x,$$

$$I_3=\int\frac{\cos^2x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2},$$

则有 $$a^2I_1+abI_2+b^2I_3=\int\mathrm{d}x=x,$$

$$I_1+I_3=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x},$$

$$a^2I_1-b^2I_3=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x-\frac{2ab}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|,$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\frac{b^3\sin x-ab^2\cos x}{a\sin x+b\cos x}+(a^2-b^2)x\right.$$

$$-2ab\ln|a\sin x+b\cos x|\Big],$$

$$I_3=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\Big[\frac{a^2b\sin x-a^3\cos x}{a\sin x+b\cos x}-(a^2-b^2)x$$

$$+2ab\ln|a\sin x+b\cos x|\Big].$$

而 $$I_2=-\frac{a}{b}I_1-\frac{b}{a}I_3$$

$$=-\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}-\frac{(a^2-b^2)^2}{ab(a^2+b^2)^2}x$$

$$+\frac{2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}\ln|a\sin x+b\cos x|,$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2+c_1I_3$$

$$=\frac{b^2a_1-2abb_1+a^2c_1}{(a^2+b^2)^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}$$

$$+\frac{(a^2-b^2)(a_1ab-a^2b_1+b^2b_1-2abc_1)}{ab(a^2+b^2)^2}x$$

$$+\frac{2(abc_1-aba_1+a^2b_1-b^2b_1)}{(a^2+b^2)^2}\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$$

例4 求 $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2(b\sin x+a\cos x)}\mathrm{d}x\ (a^2\neq b^2)$.

解 令 $$I_1=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2(b\sin x+a\cos x)},$$

$$I_2=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2(b\sin x+a\cos x)},$$

则由 1.1 节例 9 有

$$aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)}$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\sin x+b\cos x}{b\sin x+a\cos x}\right|,$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x},$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\sin x+b\cos x}{b\sin x+a\cos x}\right|-\frac{b}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}\right],$$

$$I_2=\frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{b}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\sin x+b\cos x}{b\sin x+a\cos x}\right|-\frac{a}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}\right].$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{aa_1-bb_1}{(a^2-b^2)^2}\ln\left|\frac{a\sin x+b\cos x}{b\sin x+a\cos x}\right|\\&\quad+\frac{ab_1-ba_1}{a^4-b^4}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}+C.\end{aligned}$$

例 5 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2(b\sin x+a\cos x)}$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\sin^2x}{(a\sin x+b\cos x)^2(b\sin x+a\cos x)}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\cos^2x}{(a\sin x+b\cos x)^2(b\sin x+a\cos x)}\mathrm{d}x,$$

则有

$$\begin{aligned}a^2I_1-b^2I_2&=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)}\mathrm{d}x\\&=\frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|\\&\quad-\frac{2ab}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b^2I_1-a^2I_2&=\int\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x\\&=-\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a\sin x+b\cos x}.\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}I_1=\frac{1}{a^4-b^4}&\left[\frac{a^2\sqrt{a^2+b^2}}{a^2-b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|\right.\\&\left.-\frac{2a^3b}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|-\frac{b^2}{a\sin x+b\cos x}\right],\end{aligned}$$

$$I_2=\frac{1}{a^4-b^4}\left[\frac{a^2}{a\sin x+b\cos x}-\frac{b^2\sqrt{a^2+b^2}}{a^2-b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|\right.$$

$$\left.+\frac{2ab^3}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|\right].$$

于是有 $I=I_1+I_2$

$$=\frac{1}{a^4-b^4}\left[\sqrt{a^2+b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|\right.$$

$$-\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$

$$\left.+\frac{a^2-b^2}{a\sin x+b\cos x}\right]+C.$$

例 6 求 $I=\int\frac{\sin^3x}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x.$

解 令 $$J=\int\frac{\cos^3x}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x,$$

则有 $$I+J=\int\frac{1-\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{2-2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{3-(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}-\frac{1}{2}\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right|-\frac{1}{2}(\sin x-\cos x),$$

$$-I+J=\int\frac{(\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}(\sin x+\cos x),$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\sin x+\cos x}+\sin x+\cos x\right].$$

所以有

$$I=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right|+\frac{1}{\sin x+\cos x}-2\sin x\right)+C.$$

对于含有$(a\sin x+b\cos x)^3$的三角函数有理式的积分,也可以考虑使用组合积分法.

例 7 求 $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x$.

解 此积分可用递推公式(2),但要记住这个公式(2)十分困难,不妨直接用组合积分法来计算此积分. 为方便起见,不妨设

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}.$$

令

$$I_1=\int\frac{\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x,$$

则有

$$aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\,\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x},$$

$$-bI_1+aI_2=\int\frac{a\cos x-b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^3}$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{a}{a^2+b^2}\,\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}+\frac{b}{2}\,\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}\right],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{b}{a^2+b^2}\,\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}-\frac{a}{2}\,\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}\right].$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{A}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}\\&\quad-\frac{B}{2}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}+C.\end{aligned}$$

例 8 求 $I=\int\frac{\sin^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x$.

解 令 $J=\int\frac{\cos^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x$,则

$$I+J=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^3}$$

$$=\frac{1}{2(a^2+b^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\right],$$

$$a^2I-b^2J=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}(a^2+b^2)}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$

$$+\frac{2ab}{a^2+b^2}\frac{1}{a\sin x+b\cos x}.$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{2a^2-b^2}{2(a^2+b^2)^{3/2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|\right.$$

$$+\frac{b^2}{2(a^2+b^2)}\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$$

$$\left.+\frac{2ab}{a^2+b^2}\frac{1}{a\sin x+b\cos x}\right]+C.$$

对于分母含有$(a\sin x+b\cos x)^n$ $(n>1)$的三角函数有理式的积分,用组合积分法求解,还可以举出许多例子,这里不再赘述.只要掌握了这种积分方法,耐心细致地去做,一定能解决一些用通常方法解决不了的问题.

习 题 1.2

1. 用分解组合法计算下列不定积分:

(1) $\int\frac{3\sin x+2\cos x}{(2\sin x+3\cos x)^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x-b\cos x)^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{2\sin x+3\cos x}{(4\sin x-5\cos x)^3}\mathrm{d}x$;

(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(4\sin x+3\cos x)^2(3\sin x+4\cos x)}$.

2. 用参元组合法计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{\cos x}{(3\sin x+2\cos x)^2}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\frac{\cos^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int\frac{\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

1.3　含有 $a+b\sin x$ 与 $c+d\cos x$ 的积分

对于分母含有 $a+b\sin x$ 或 $c+d\cos x$ 的三角函数有理式的积分，利用组合法积分求解，效果也很不错.

1.3.1　含有 $a+b\sin x$ 的积分

例 1　求$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

解法 1　令 $I=\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，　$J=\int\frac{\sin x}{1-\sin x}\mathrm{d}x$，

则
$$I+J=\int\frac{2\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\cos x},$$

$$I-J=-\int\frac{2\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=-2\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x=-2\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$$
$$=-2\tan x+2x.$$

所以有
$$I=\frac{1}{\cos x}-\tan x+x+C.$$

解法 2
$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\cos x}-\tan x+x+C.$$

解法 3 用代换

$$\tan\frac{x}{2}=u,\quad \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2},$$

所以有
$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\,\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$$
$$=\int\frac{4u}{(1+u^2)(1+u)^2}\mathrm{d}u.$$

显然以上解法太繁，不宜采用．事实上，将原积分化为

$$\int\left(1-\frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x},$$

再对后一积分作代换

$$\tan\frac{x}{2}=u,\quad \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

则有
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\,\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}=2\int\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2}$$
$$=-\frac{2}{1+u}=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}.$$

所以有
$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=x+\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

显然用解法 2 较简单，但较复杂的情形用解法 1 较好，下面再举几例．

例 2 求$\int\frac{\sin x}{a+b\sin x}\mathrm{d}x\ (|a|>|b|)$.

解 令 $I=\int\frac{\sin x}{a+b\sin x}\mathrm{d}x,\quad J=\int\frac{\sin x}{a-b\sin x}\mathrm{d}x,$

则
$$I+J=\int\frac{2a\sin x}{a^2-b^2\sin^2x}\mathrm{d}x=\frac{-2a}{b}\int\frac{\mathrm{d}(b\cos x)}{a^2-b^2+b^2\cos^2x}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{a}{b}\arctan\frac{b\cos x}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

$$I-J=-\int\frac{2b\sin^2 x}{a^2-b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x=\frac{2}{b}\int\frac{a^2-b^2\sin^2 x-a^2}{a^2-b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{b}\int\mathrm{d}x-\frac{2a^2}{b}\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-b^2\sin^2 x}$$

$$=\frac{2}{b}x+\frac{2a^2}{b}\int\frac{1}{a^2\csc^2 x-b^2}\mathrm{d}(\cot x)$$

$$=\frac{2}{b}x+\frac{2a}{b}\int\frac{\mathrm{d}(a\cot x)}{a^2-b^2+a^2\cot^2 x}$$

$$=\frac{2}{b}x+\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ \frac{a}{b}\arctan\frac{a\cot x}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

所以有 $I=\frac{1}{b}x+\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ \frac{a}{b}\arctan\frac{a\cot x}{\sqrt{a^2-b^2}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ \frac{a}{b}\arctan\frac{b\cos x}{\sqrt{a^2-b^2}}+C.$$

例 3 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\sin x)(b+a\sin x)}\quad(b^2>a^2)$.

解 令 $J=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(a+b\sin x)(b+a\sin x)}$，则

$$aI+bJ=\int\frac{\mathrm{d}x}{b+a\sin x}=-\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right],$$

$$bI+aJ=\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}=-\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{b+a\sin x+\sqrt{b^2-a^2}\cos x}{a+b\sin x}\right|.$$

所以有 $I=\frac{1}{a^2-b^2}\left\{\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{b+a\sin x+\sqrt{b^2-a^2}\cos x}{a+b\sin x}\right|\right.$

$$\left.-\frac{2a}{\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]\right\}+C.$$

例 4 求 $I=\int\frac{a_1+b_1\sin^2 x}{a+b\sin x}\mathrm{d}x\quad(a^2<b^2)$.

解 令 $I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}$，$I_2=\int\frac{\sin^2 x}{a+b\sin x}\mathrm{d}x$，

则 $$a^2I_1-b^2I_2=\int(a-b\sin x)\mathrm{d}x=ax+b\cos x,$$

I_1 查表可求出，而

$$I_2=\frac{1}{b^2}(a^2I_1-ax-b\cos x).$$

所以有
$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=a_1I_1+\frac{b_1}{b^2}(a^2I_1-ax-b\cos x)\\&=\frac{b^2a_1+a^2b_1}{b^2}I_1-\frac{ab_1}{b^2}x-\frac{b_1}{b}\cos x.\end{aligned}$$

1.3.2 含有 $c+d\cos x$ 的积分

对于分母含有 $c+d\cos x$ 的三角函数有理式的积分，可用组合积分法求解. 先看一个简单的例子.

例 5 求 $I=\int\frac{\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解法 1 $$I=\int\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x-\int\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\,\frac{x}{2}$$

$$=x-\tan\frac{x}{2}+C.$$

解法 2 $$\begin{aligned}I&=\int\frac{\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2x}-\int\cot^2x\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{\sin x}-\int(\csc^2x-1)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{\sin x}+x+\cot x+C.\end{aligned}$$

解法 3 $$I=\int\left(1-\frac{1}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x.$$

设 $\tan\frac{x}{2}=u$，则

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2},$$

所以有 $$I=\int dx-\int\frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2}=x-\int du$$

$$=x-u+C=x-\tan\frac{x}{2}+C.$$

解法 4 令 $$J=\int\frac{dx}{1+\cos x},$$

则 $$I+J=x,$$

$$-I+J=\int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx=\int\frac{1-2\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$$

$$=-\cot x+\frac{2}{\sin x}-\cot x-x.$$

两式相减便有

$$I=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{2}{\sin x}+2\cot x\right)+C=x-\frac{1}{\sin x}+\cot x+C.$$

还有其他方法,这里从略. 以上四种方法都不难,但在比较复杂的情况下用第 4 种方法比较好,下面举例说明.

例 6 求 $I=\int\frac{a_1+b_1\cos x}{c+d\cos x}dx\quad(|c|>|d|)$.

解 设 $$I_1=\int\frac{dx}{c+d\cos x},\quad I_2=\int\frac{dx}{c-d\cos x},$$

则 $$I_1+I_2=2c\int\frac{dx}{c^2-d^2\cos^2 x}=2c\int\frac{1}{c^2\sec^2 x-d^2}\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$=2\int\frac{d\,c\tan x}{c^2-d^2+(c\tan x)^2}=\frac{2}{\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{c\tan x}{\sqrt{c^2-d^2}},$$

$$I_1-I_2=-\int\frac{2d\cos x}{c^2-d^2\cos^2 x}dx=-2\int\frac{d(d\sin x)}{c^2-d^2+d^2\sin^2 x}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{d\sin x}{\sqrt{c^2-d^2}},$$

所以有 $$I_1=\frac{1}{\sqrt{c^2-d^2}}\left(\arctan\frac{c\tan x}{\sqrt{c^2-d^2}}-\arctan\frac{d\sin x}{\sqrt{c^2-d^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{\dfrac{c\tan x-d\sin x}{\sqrt{c^2-d^2}}}{1+\dfrac{c\tan x}{\sqrt{c^2-d^2}}\dfrac{d\sin x}{\sqrt{c^2-d^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{d+c\cos x},$$

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{c^2-d^2}}\left(\arctan\frac{c\tan x}{\sqrt{c^2-d^2}}+\arctan\frac{d\sin x}{\sqrt{c^2-d^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{-d+c\cos x}.$$

上述结果与查表求得的结果一致，可见用组合积分法能顺利地求出积分表中较难的积分公式. 此公式如果用万能代换，令$\tan\frac{x}{2}=u$来求出，将是比较困难的，读者不妨一试.

由 $I_1=\frac{1}{\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{d+c\cos x}$可得

$$\int\frac{\cos x}{c+d\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{d}\int\frac{c+d\cos x-c}{c+d\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{d}x-\frac{c}{d}\int\frac{\mathrm{d}x}{c+d\cos x}$$

$$=\frac{1}{d}x-\frac{c}{d}\frac{1}{\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{c+d\cos x},$$

于是有 $$I=a_1I_1+b_1\int\frac{\cos x}{c+d\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{b_1}{d}x+\frac{da_1-cb_1}{d\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{c+d\cos x}+C.$$

例 7 求 $I=\int\frac{a_1+b_1\cos x}{(c+d\cos x)(d+c\cos x)}\mathrm{d}x \quad (|c|>|d|).$

解 令 $$I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{(c+d\cos x)(d+c\cos x)},$$

$$I_2=\int\frac{\cos x}{(c+d\cos x)(d+c\cos x)}\mathrm{d}x,$$

则 $$cI_1+dI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{d+c\cos x}=\frac{1}{\sqrt{c^2-d^2}}\mathrm{arth}\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{c+d\cos x},$$

$$dI_1+cI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{c+d\cos x}=\frac{1}{\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{d+c\cos x}.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{c^2-d^2}\left[\frac{c}{\sqrt{c^2-d^2}}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{c+d\cos x}-\frac{d}{\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{d+c\cos x}\right],$$

$$I_2=\frac{1}{d^2-c^2}\left[\frac{d}{\sqrt{c^2-d^2}}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{c+d\cos x}-\frac{c}{\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{d+c\cos x}\right].$$

于是有
$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{ca_1-db_1}{(c^2-d^2)^{3/2}}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{c+d\cos x}\\&\quad+\frac{cb_1-da_1}{(c^2-d^2)^{3/2}}\arctan\frac{\sqrt{c^2-d^2}\sin x}{d+c\cos x}+C.\end{aligned}$$

例 8 求 $I=\int\frac{\cos^2 x}{c+d\cos x}\mathrm{d}x$.

解 令 $J=\int\frac{\mathrm{d}x}{c+d\cos x}$ (J 查表可知),

则有
$$c^2J-d^2I=\int(c-d\cos x)\mathrm{d}x=cx-d\sin x,$$

所以有
$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{d^2}(c^2J-cx+d\sin x)\\&=\frac{c^2}{d^2}J-\frac{c}{d^2}x+\frac{1}{d}\sin x\ (J\text{ 查表可知}).\end{aligned}$$

以上是分母含有 $a+b\sin x$ 和 $c+d\cos x$ 的三角函数有理式的积分. 还有可以化为此类积分的三角函数有理式的积分. 下面来讨论这个问题.

1.3.3 含有 $a\sec x+b\tan x$ 的积分

对于分母含有 $a\sec x+b\tan x$ 的三角函数有理式的积分,可以化为上述三角函数有理式的积分来进行计算,例如求

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sec x+b\tan x}.$$

原积分可以化为

$$I=\int\frac{\cos x}{a+b\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\ln|a+b\sin x|+C,$$

也可以直接使用组合积分法求解.

例 9 求 $I=\int\frac{a_1\sec x+b_1\tan x}{a\sec x+b\tan x}\mathrm{d}x$.

解 原积分可以容易地化为

$$I=\int\frac{a_1+b_1\sin x}{a+b\sin x}\mathrm{d}x\quad(|a|>|b|),$$

令

$$I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x},\quad I_2=\int\frac{\sin x}{a+b\sin x}\mathrm{d}x.$$

由例 2 和查表立刻可以求出结果,即

$$I_1=-\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right],$$

$$I_2=\frac{1}{b}x+\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{a}{b}\arctan\frac{a\cot x}{\sqrt{a^2-b^2}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{a}{b}\arctan\frac{b\cos x}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

所以有

$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{b_1}{b}x+\frac{ab_1}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\cot x}{\sqrt{a^2-b^2}}\\&\quad-\frac{ab_1}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{b\cos x}{\sqrt{a^2-b^2}}\\&\quad-\frac{2a_1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]+C.\end{aligned}$$

例 10 求 $I=\int\frac{a_1\sec^2x+b_1\tan^2x}{a\sec x+b\tan x}\mathrm{d}x$.

解 令
$$I_1=\int\frac{\sec^2 x}{a\sec x+b\tan x}\mathrm{d}x,$$
$$I_2=\int\frac{\tan^2 x}{a\sec x+b\tan x}\mathrm{d}x,$$
则
$$I_1-I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sec x+b\tan x}=\frac{1}{b}\ln|a+b\sin x|,$$
$$\begin{aligned}a^2I_1-b^2I_2&=\int(a\sec x-b\tan x)\mathrm{d}x\\&=a\ln|\sec x+\tan x|+b\ln|\cos x|.\end{aligned}$$
所以有
$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln|\sec x+\tan x|+b\ln|\cos x|-b\ln|a+b\sin x|],$$
$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\left[a\ln|\sec x+\tan x|+b\ln|\cos x|-\frac{a^2}{b}\ln|a+b\sin x|\right].$$
于是有
$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{a(a_1+b_1)}{a^2-b^2}\ln|\sec x+\tan x|+\frac{b(a_1+b_1)}{a^2+b^2}\ln|\cos x|\\&\quad-\frac{b^2a_1+a^2b_1}{b(a^2-b^2)}\ln|a+b\sin x|+C.\end{aligned}$$

例 11 求 $I=\int\frac{a_1\sec x+b_1\tan x}{(a\sec x+b\tan x)(b\sec x+a\tan x)}\mathrm{d}x.$

解 令
$$I_1=\int\frac{\sec x\,\mathrm{d}x}{(a\sec x+b\tan x)(b\sec x+a\tan x)},$$
$$I_2=\int\frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{(a\sec x+b\tan x)(b\sec x+a\tan x)},$$
则
$$aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{b\sec x+a\tan x}=\frac{1}{a}\ln|b+a\sin x|,$$
$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sec x+b\tan x}=\frac{1}{b}\ln|a+b\sin x|.$$
所以有
$$\begin{aligned}I_1&=\frac{1}{a^2-b^2}[\ln|b+a\sin x|-\ln|a+b\sin x|]\\&=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{b+a\sin x}{a+b\sin x}\right|,\end{aligned}$$

$$I_2=\frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{b}{a}\ln|b+a\sin x|-\frac{a}{b}\ln|a+b\sin x|\right].$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{aa_1-bb_1}{a(a^2-b^2)}\ln|b+a\sin x|+\frac{ab_1-ba_1}{b(a^2-b^2)}\ln|a+b\sin x|+C.\end{aligned}$$

1.3.4 含有 $a\csc x+b\cot x$ 的积分

对于分母含有 $a\csc x+b\cot x$ 的积分，同样可以使用组合积分法，方法技巧与上述分母含有 $a\sec x+b\tan x$ 的积分基本相同.

例 12 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{a\csc x+b\cot x}$.

解

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{a\csc x+b\cot x}&=\int\frac{\sin x}{a+b\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{a+b\cos x}\\&=-\frac{1}{b}\ln|a+b\cos x|+C.\end{aligned}$$

例 13 求 $\displaystyle I=\int\frac{a_1\csc x+b_1\cot x}{(a\csc x+b\cot x)(b\csc x+a\cot x)}\mathrm{d}x$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\csc x\,\mathrm{d}x}{(a\csc x+b\cot x)(b\csc x+a\cot x)},$$

$$I_2=\int\frac{\cot x\,\mathrm{d}x}{(a\csc x+b\cot x)(b\csc x+a\cot x)},$$

则有

$$\begin{aligned}aI_1+bI_2&=\int\frac{\mathrm{d}x}{b\csc x+a\cot x}=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{b+a\cos x}\\&=-\frac{1}{a}\ln|b+a\cos x|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}bI_1+aI_2&=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\csc x+b\cot x}=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{a+b\cos x}\\&=-\frac{1}{b}\ln|a+b\cos x|.\end{aligned}$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}[\ln|a+b\cos x|-\ln|b+a\cos x|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{b}{a}\ln|b+a\cos x|-\frac{a}{b}\ln|a+b\cos x|\right].$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2$$
$$=\frac{ba_1-ab_1}{b(a^2-b^2)}\ln|a+b\cos x|+\frac{bb_1-aa_1}{a(a^2-b^2)}\ln|b+a\cos x|+C.$$

例 14 求 $I=\int\frac{a_1\csc^2 x+b_1\cot^2 x}{a\csc x+b\cot x}\mathrm{d}x\quad(|a|\neq|b|)$.

解 令
$$I_1=\int\frac{\csc^2 x\,\mathrm{d}x}{a\csc x+b\cot x},$$
$$I_2=\int\frac{\cot^2 x\,\mathrm{d}x}{a\csc x+b\cot x},$$

则
$$a^2I_1-b^2I_2=\int(a\csc x-b\cot x)\mathrm{d}x$$
$$=a\ln|\csc x-\cot x|-b\ln|\sin x|,$$
$$I_1-I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\csc x+b\cot x}=-\frac{1}{b}\ln|a\csc x+b\cot x|.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln|\csc x-\cot x|-b\ln|\sin x|$$
$$+b\ln|a\csc x+b\cot x|],$$
$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a^2}{b}\ln|a\csc x+b\cot x|\right.$$
$$\left.+a\ln|\csc x-\cot x|-b\ln|\sin x|\right].$$

于是有
$$I=a_1I_1+b_1I_2$$
$$=\frac{b^2a_1+a^2b_1}{b(a^2-b^2)}\ln|a\csc x+b\cot x|$$
$$+\frac{a(a_1+b_1)}{a^2-b^2}\ln|\csc x-\cot x|$$
$$+\frac{bb_1-ba_1}{a^2-b^2}\ln|\sin x|+C.$$

习 题 1.3

求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+2\sin x}$；　　　　(2) $\int \frac{\cos x}{2+3\cos x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{b+a\sin x}{a+b\sin x}\mathrm{d}x$；　　　　(4) $\int \frac{d+c\cos x}{c+d\sin x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\cot^2 x}{3\csc x+2\cot x}\mathrm{d}x$；　　　　(6) $\int \frac{b\sec x+a\tan x}{a\sec x+b\tan x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{\sec x+\tan x}{(3\sec x+2\tan x)(2\sec x+3\tan x)}\mathrm{d}x$；

(8) $\int \frac{4\csc x+5\cot x}{(2\csc x+3\cot x)(3\csc x+2\cot x)}\mathrm{d}x$.

1.4　含有 $a+b\sin x\cos x$ 的积分

对于分母含有 $a+b\sin x\cos x$ 的积分，可考虑使用组合积分法，不过里使用组合积分法难度较大. 先看一个简单的例子.

例 1　求 $I=\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x}$.

解　这里如果用万能代换，设 $\tan \frac{x}{2}=u$，则

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

原积分可变为

$$I=\int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}\,\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int \frac{2(1-u^2)\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2+2u(1-u^2)}$$

$$=\int \frac{2(1-u^2)\mathrm{d}u}{u^4-2u^3+2u^2+2u+1}.$$

以上有理函数的积分，要求出来相当困难，如果改用组合积分法将能很快地求出.

令　　　$$J=\int \frac{\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x,$$

则有　　$$I+J=\int \frac{\cos x+\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=2\int \frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{2+2\sin x\cos x}$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{3-(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sin x-\cos x}{\sqrt{3}-\sin x+\cos x}\right|,$$

$$I-J=\int\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{2+2\sin x\cos x}$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{1+(\sin x+\cos x)^2}=2\arctan(\sin x+\cos x).$$

立刻便有

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sin x-\cos x}{\sqrt{3}-\sin x+\cos x}\right|\right.$$

$$\left.+2\arctan(\sin x+\cos x)\right]+C.$$

同样不难得到

$$J=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sin x-\cos x}{\sqrt{3}-\sin x+\cos x}\right|\right.$$

$$\left.-2\arctan(\sin x+\cos x)\right]+C.$$

对于系数复杂一些情形的积分，如例 2 所述.

例 2 求 $I=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{3+\sin 2x}$.

解 令
$$J=\int\frac{\sin x}{3+\sin 2x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$I+J=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{4-(\sin x-\cos x)^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin x-\cos x}{2-\sin x+\cos x}\right|,$$

$$I-J=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{2+(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}.$$

于是便有

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin x-\cos x}{2-\sin x+\cos x}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right]+C.$$

对于一般情形的积分，如例 3 所述.

例 3 求 $I=\int\frac{3\cos x+4\sin x}{3+2\sin x\cos x}\mathrm{d}x$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{3+2\sin x\cos x},\quad I_2=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{3+2\sin x\cos x}.$$

则有
$$I_1+I_2=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin x-\cos x}{2-\sin x+\cos x}\right|,$$
$$I_1-I_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right).$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin x-\cos x}{2-\sin x+\cos x}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right],$$

$$I_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin x-\cos x}{2-\sin x+\cos x}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right].$$

于是有
$$\begin{aligned}I&=3I_1+4I_2\\&=\frac{7}{8}\ln\left|\frac{2+\sin x-\cos x}{2-\sin x+\cos x}\right|\\&\quad+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}+C.\end{aligned}$$

对于更一般情形的积分，如例 4 所述.

例 4 求 $I=\int\frac{a_1\cos x+b_1\sin x}{a+b\sin x\cos x}\mathrm{d}x\quad(b>0,2a+b>0,2a\neq b)$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a+b\sin x\cos x},\quad I_1=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{a+b\sin x\cos x}.$$

(1) 当 $2a<b$ 时，有

$$\begin{aligned}I_1+I_2&=\int\frac{\cos x+\sin x}{a+b\sin x\cos x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{2a+b-b(\sin x-\cos x)^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{b(2a+b)}}\ln\left|\frac{\sqrt{2a+b}+\sqrt{b}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{2a+b}-\sqrt{b}(\sin x-\cos x)}\right|\\&=I(x),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_1-I_2&=\int\frac{\cos x-\sin x}{a+b\sin x\cos x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{2a-b+b(\sin x+\cos x)^2}\\
&=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{b(\sin x+\cos x)^2-(b-2a)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{b(b-2a)}}\ln\left|\frac{\sqrt{b}(\sin x+\cos x)-\sqrt{b-2a}}{\sqrt{b}(\sin x+\cos x)+\sqrt{b-2a}}\right|\\
&=J(x).
\end{aligned}
$$

立刻便有
$$
I_1=\frac{1}{2}[I(x)+J(x)],
$$
$$
I_2=\frac{1}{2}[I(x)-J(x)].
$$

所以有
$$
I=a_1I_1+b_1I_2=\frac{1}{2}[(a_1+b_1)I(x)+(a_1-b_1)J(x)]+C.
$$

(2)当 $2a>b$ 时，由(1)的结论有
$$
I_1+I_2=I(x),
$$
$$
\begin{aligned}
I_1-I_2&=\int\frac{\cos x-\sin x}{a+b\sin x\cos x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{2a-b+b(\sin x+\cos x)^2}\\
&=\frac{2}{\sqrt{b(2a-b)}}\arctan\frac{\sqrt{b}(\sin x+\cos x)}{\sqrt{2a-b}}=K(x).
\end{aligned}
$$

所以有
$$
I_1=\frac{1}{2}[I(x)+K(x)],
$$
$$
I_2=\frac{1}{2}[I(x)-K(x)].
$$

于是有
$$
\begin{aligned}
I&=a_1I_1+b_1I_2\\
&=\frac{1}{2}[(a_1+b_1)I(x)+(a_1-b_1)K(x)]+C.
\end{aligned}
$$

综上所述，得如下结果：
$$
I=\begin{cases}\frac{1}{2}[(a_1+b_1)I(x)+(a_1-b_1)J(x)]+C & (2a<b),\\[2ex] \frac{1}{2}[(a_1+b_1)I(x)+(a_1-b_1)J(x)]+C & (2a>b),\end{cases}
$$

其中

$$I(x)=\frac{1}{\sqrt{b(2a+b)}}\ln\left|\frac{\sqrt{2a+b}+\sqrt{b}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{2a+b}-\sqrt{b}(\sin x-\cos x)}\right|,$$

$$J(x)=\frac{1}{\sqrt{b(b-2a)}}\ln\left|\frac{\sqrt{b}(\sin x+\cos x)-\sqrt{b-2a}}{\sqrt{b}(\sin x+\cos x)+\sqrt{b-2a}}\right|,$$

$$K(x)=\frac{1}{\sqrt{b(2a-b)}}\arctan\frac{\sqrt{b}(\sin x+\cos x)}{\sqrt{2a-b}}.$$

例 5 求 $I=\int\frac{\cos^2 x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$.

解 令
$$J=\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x,$$

则有
$$I+J=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x}=2\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin 2x}$$
$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right],$$

$$I-J=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)^2}{1+(\sin x+\cos x)^2}$$
$$=\ln|2+2\sin x\cos x|=\ln|1+\sin x\cos x|+\ln 2.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\left\{\ln|1+\sin x\cos x|-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]\right\}+C.$$

例 6 求 $I=\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$.

解 令
$$J=\int\frac{\sin^3 x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x},$$

则有

$$I-J=\int\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$$
$$=\sin x+\cos x,$$

$$I+J=\int\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{1+\sin x\cos x}=\int\frac{(\cos x+\sin x)(1-\sin x\cos x)}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{1+(\sin x-\cos x)^2}{3-(\sin x-\cos x)^2}\mathrm{d}(\sin x-\cos x)$$

$$\xlongequal{\text{令}\sin x-\cos x=t}\int\frac{1+t^2}{3-t^2}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{3-t^2}+\frac{t^2}{3-t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(\frac{4}{3-t^2}-1\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right|-t$$

$$\xlongequal{\text{回代}t=\sin x-\cos x}\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sin x-\cos x}{\sqrt{3}-\sin x+\cos x}\right|-\sin x+\cos x.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sin x-\cos x}{\sqrt{3}-\sin x+\cos x}\right|-\sin x+\cos x\right.$$

$$\left.+\sin x+\cos x\right]+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sin x-\cos x}{\sqrt{3}-\sin x+\cos x}\right|+\cos x+C.$$

分母含有 $a+b\sin x\cos x$ 的积分，是难度较大的一类积分，读者应具有一定的数学功底，才能使用组合积分法，顺利完成积分的运算.

习　题　1.4

求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2+\sin x\cos x}$；　　(2) $\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2-\sin x\cos x}$；

(3) $\int\frac{2\sin x+3\cos x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int\frac{\sin x+\cos x}{1-\sin x\cos x}\mathrm{d}x$.

1.5　其他三角函数有理式的积分(1)

除了上述类型的三角函数有理式的积分可以使用组合积分法求解外，其他一些三角函数有理式的积分也可以使用组合积分法求解，只是有更多技巧性和更大的难度罢了. 不过，只要肯做有心人，勤奋钻研，这种组合积分法的技巧是可以熟练掌握的.

1.5.1 含有 $b+a\tan x$ 的积分

对于分母含有 $b+a\tan x$ 的三角函数有理式的积分，可以使用组合积分法求解，先看一个简单的例子.

例 1 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}$.

解法 1 不妨令 $J=\int\frac{\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x$，则

$$I+J=x,$$

$$\begin{aligned}I-J&=\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}\,x=\int\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\mathrm{d}x\\&=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|.\end{aligned}$$

所以有
$$I=\frac{1}{2}\left[x+\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\right]+C. \tag{1}$$

解法 2 事实上，原积分可以化为 $I=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$，由 1.1 节的结论可得

$$I=\frac{1}{2}[x-\ln|\sin x+\cos x|]+C. \tag{2}$$

式(1)、式(2)两个结果都正确，由式(1)得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\left[x+\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\right]+C\\&=\frac{1}{2}\left[x+\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right|\right]+C\\&=\frac{1}{2}\left[x+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\ln|\sin x+\cos x|\right]+C\\&=\frac{1}{2}[x+\ln|\sin x+\cos x|]+C'\ \left(C'=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+C\right).\end{aligned}$$

式(1)与式(2)只相差一个常数.

解法 3 此题也可以用万能代换来求解.

令 $\tan x=u$，则 $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$，于是

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+u} - \frac{1-u}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{4}\ln(1+u^2) + \frac{1}{2}\arctan u + C \\
&= \frac{1}{2}\ln|1+\tan x| - \frac{1}{4}\ln(1+\tan^2 x) + \frac{1}{2}\arctan(\tan x) + C \\
&= \frac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|) + C.
\end{aligned}
$$

比较以上三种求法，还是直接使用组合积分法求解比较简单．特别是在情况比较复杂时，组合积分法的优势更明显．

例 2 求 $I=\int \frac{a_1+b_1\tan x}{b+a\tan x}\mathrm{d}x$.

解 如果此题使用代换 $\tan x=u, \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$，则

$$I=\int \frac{a_1+b_1u}{b+au}\,\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

要求出以上有理函数的积分是很困难的，但用组合积分法，就方便多了．

令 $$I_1=\int \frac{\mathrm{d}x}{b+a\tan x},\quad I_2=\int \frac{\tan x}{b+a\tan x}\mathrm{d}x,$$

则 $$bI_1+aI_2=x,$$

$$
\begin{aligned}
aI_1-bI_2 &= \int \frac{a-b\tan x}{b+a\tan x}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{a}{b}-\tan x}{1+\frac{a}{b}\tan x}\mathrm{d}x \\
&= \int \tan\left(\arctan\frac{a}{b}-x\right)\mathrm{d}x \\
&= \ln\left|\cos\left(\arctan\frac{a}{b}-x\right)\right|.
\end{aligned}
$$

于是有 $$I_1=\frac{1}{a^2+b^2}\left[bx+a\ln\left|\cos\left(\arctan\frac{a}{b}-x\right)\right|\right],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}\left[ax-b\ln\left|\cos\left(\arctan\frac{a}{b}-x\right)\right|\right].$$

所以有

$$I=a_1I_1+b_1I_2$$

$$=\frac{ba_1+ab_1}{a^2+b^2}x+\frac{aa_1-bb_1}{a^2+b^2}\ln\left|\cos\left(\arctan\frac{a}{b}-x\right)\right|+C.$$

此题也可以将原积分化为

$$I=\int\frac{a_1\cos x+b_1\sin x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

然后由 1.1 节例 1 可以立刻求出,这里从略.

例 3 求 $I=\int\frac{a_1+b_1\tan^2 x}{(b+a\tan x)^2}\mathrm{d}x.$

解 此题将原积分可以化为

$$I=\int\frac{a_1\cos^2 x+b_1\sin^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x,$$

然后由 1.2 节的例 2 可得.

令
$$I_1=\int\frac{\sin^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x,$$
$$I_2=\int\frac{\cos^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x,$$

则有
$$I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x},$$

$$a^2I_1-b^2I_2=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x-\frac{2ab}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\frac{b^3\sin x-ab^2\cos x}{a\sin x+b\cos x}+(a^2-b^2)x-2ab\ln|a\sin x+b\cos x|\right]$$

$$I_2=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\frac{a^2b\sin x-a^3\cos x}{a\sin x+b\cos x}-(a^2-b^2)x+2ab\ln|a\sin x+b\cos x|\right].$$

于是有 $I=a_1I_1+b_1I_2$

$$=\frac{b^2a_1+a^2b_1}{(a^2+b^2)^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}+\frac{(a^2-b^2)(a_1-b_1)}{(a^2+b^2)^2}x$$

$$+\frac{2ab(b_1-a_1)}{(a^2+b^2)^2}\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$$

1.5.2 含有 $a\tan x+b\cot x$ 的积分

对于分母含有 $a\tan x+b\cot x$ 的三角函数有理式的积分，应用组合积分法求解更简单.

例 4 求 $I=\int\frac{\tan x}{\tan x+\cot x}\mathrm{d}x$.

解 令
$$J=\int\frac{\cot x}{\tan x+\cot x}\mathrm{d}x,$$

则有
$$I+J=\int\mathrm{d}x=x,$$

$$I-J=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$$

$$=-\ln|\sin x+\cos x|.$$

所以有
$$I=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C.$$

对于下面比较复杂的情况，使用组合积分法效果更好.

例 5 求 $I=\int\frac{a_1\tan x+b_1\cot x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x\quad(ab>0)$.

解 令
$$I_1=\int\frac{\tan x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\cot x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x,$$

则
$$aI_1+bI_2=x,$$

$$I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin^2x+b\cos^2x}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan x\right),$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{a-b}\left[x-\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan x\right)\right],$$

$$I_2=\frac{1}{b-a}\left[x-\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan x\right)\right]$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_1\\&=\frac{a_1-b_1}{a-b}x+\frac{b_1-a_1}{\sqrt{ab}(a-b)}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan x\right)+C.\end{aligned}$$

例 6 求$\int\frac{a_1\tan^2x+b_1\cot^2x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\tan^2x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\cot^2x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x,$$

则

$$\begin{aligned}a^2I_1-b^2I_2&=\int(a\tan x-b\cot x)\mathrm{d}x\\&=-a\ln|\cos x|-b\ln|\sin x|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^2I_1+b^2I_2&=\int\frac{(a\tan x+b\cot x)^2-2ab}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x\\&=\int(a\tan x+b\cot x)\mathrm{d}x-2ab\int\frac{\mathrm{d}x}{a\tan x+b\cot x}\\&=-a\ln|\cos x|+b\ln|\sin x|\\&\quad-2ab\int\frac{\sin x\cos x}{a\sin^2x+b\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=-a\ln|\cos x|+b\ln|\sin x|\\&\quad-\frac{ab}{a-b}\ln|a\sin^2x+b\cos^2x|.\end{aligned}$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{2a^2}\left[-2a\ln|\cos x|-\frac{ab}{a-b}\ln|a\sin^2x+b\cos^2x|\right],$$

$$I_2=\frac{1}{2b^2}\left[2b\ln|\sin x|-\frac{ab}{a-b}\ln|a\sin^2x+b\cos^2x|\right].$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2$$

$$=-\frac{a_1}{a}\ln|\cos x|+\frac{b_1}{b}\ln|\sin x|$$

$$-\frac{b^2a_1+a^2b_1}{2ab(a-b)}\ln|a\sin^2x+b\cos^2x|+C.$$

例 7 求 $I=\int\frac{a_1\tan x+b_1\cot x}{(a\tan x+b\cot x)(b\tan x+a\cot x)}\mathrm{d}x$.

解 令 $I_1=\int\frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{(a\tan x+b\cot x)(b\tan x+a\cot x)}$,

$$I_2=\int\frac{\cot x\,\mathrm{d}x}{(a\tan x+b\cot x)(b\tan x+a\cot x)},$$

则 $aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{b\tan x+a\cot x}=\frac{1}{2(b-a)}\ln|b\sin^2x+a\cos^2x|$,

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\tan x+b\cot x}=\frac{1}{2(a-b)}\ln|a\sin^2x+b\cos^2x|,$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{2(b-a)}\ln|b\sin^2x+a\cos^2x|-\frac{b}{2(a-b)}\ln|a\sin^2x+b\cos^2x|\right],$$

$$I_2=\frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{b}{2(b-a)}\ln|b\sin^2x+a\cos^2x|-\frac{a}{2(a-b)}\ln|a\sin^2x+b\cos^2x|\right].$$

于是有
$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{bb_1-aa_1}{2(a-b)^2(a+b)}\ln|b\sin^2x+a\cos^2x|\\&\quad+\frac{ab_1-ba_1}{2(a-b)^2(a+b)}\ln|a\sin^2x+b\cos^2x|+C.\end{aligned}$$

1.5.3 含有 $a\sec x+b\csc x$ 的积分

对于分母含有 $a\sec x+b\csc x$ 的三角函数有理式的积分，可以巧妙地使用组合积分法求解，得到令人满意的结果.

例 8 求 $I=\int\frac{a_1\sec x+b_1\csc x}{a\sec x+b\csc x}\mathrm{d}x$.

解 令 $I_1=\int\frac{\sec x\,\mathrm{d}x}{a\sec x+b\csc x}$, $I_2=\int\frac{\csc x\,\mathrm{d}x}{a\sec x+b\csc x}$,

则
$$a_I1+bI_2=x,$$

$$-bI_1+aI_2=\int\frac{-b\sin x+a\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}$$
$$=\ln|a\sin x+b\cos x|.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{a^2+b^2}[ax-b\ln|a\sin x+b\cos x|],$$
$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}[bx+a\ln|a\sin x+b\cos x|],$$

于是有
$$I=a_1I_1+b_1I_2$$
$$=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}x+\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$$

例 9 求 $I=\int\frac{a_1\sec^2x+b_1\csc^2x}{(a\sec x+b\csc x)(b\sec x+a\csc x)}\mathrm{d}x.$

解 令
$$I_1=\int\frac{\sec^2x\,\mathrm{d}x}{(a\sec x+b\csc x)(b\sec x+a\csc x)},$$
$$I_2=\int\frac{\csc^2x\mathrm{d}x}{(a\sec x+b\csc x)(b\sec x+a\csc x)},$$

则
$$a^2I_1-b^2I_2=\int\frac{a\sec x-b\csc x}{b\sec x+a\csc x}\mathrm{d}x=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{b\sin x+a\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=-\int\frac{\mathrm{d}(b\sin x+a\cos x)}{b\sin x+a\cos x}=-\ln|b\sin x+a\cos x|,$$
$$b^2I_1-a^2I_2=\int\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}$$
$$=-\ln|a\sin x+b\cos x|.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{a^4-b^4}[b^2\ln|a\sin x+b\cos x|-a^2\ln|b\sin x+a\cos x|],$$
$$I_2=\frac{1}{a^4-b^4}[a^2\ln|a\sin x+b\cos x|-b^2\ln|b\sin x+a\cos x|].$$

于是有
$$I=a_1I_1+b_1I_2$$
$$=\frac{b^2a_1+a^2b_1}{a^4-b^4}\ln|a\sin x+b\cos x|$$

$$-\frac{a^2a_1+b^2b_1}{a^4-b^4}\ln|b\sin x+a\cos x|+C.$$

例 10 求$\int\frac{\sec^2 x}{a^2\sec^2 x+b^2\csc^2 x}\mathrm{d}x \quad (|a|\neq|b|).$

解 令
$$I=\int\frac{\sec^2 x}{a^2\sec^2 x+b^2\csc^2 x}\mathrm{d}x,$$
$$J=\int\frac{\csc^2 x}{a^2\sec^2 x+b^2\csc^2 x}\mathrm{d}x,$$

则
$$a^2I+b^2J=x,$$
$$I+J=\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{ab}\arctan\frac{a\tan x}{b}.$$

所以有
$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\left[x-\frac{b}{a}\arctan\frac{a\tan x}{b}\right]+C.$$

习 题 1.5

1. 用多种方法求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cot x}$； (2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\tan x+\cot x}$；

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sec x+\csc x}$； (4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sec^2 x+\csc^2 x}$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{b\tan x+a\cot x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x$； (2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cot x}$；

(3) $\int\frac{b\sec x+a\csc x}{a\sec x+b\csc x}\mathrm{d}x$； (4) $\int\frac{2+3\tan x}{3+2\tan x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int\frac{a\tan x+b\cot x}{a\tan x-b\cot x}\mathrm{d}x$； (6) $\int\frac{2\tan x+3\cot x}{3\tan x+2\cot x}\mathrm{d}x$.

1.6 其他三角函数有理式的积分(2)

在 1.5 节，我们对分母含有 $b+a\tan x$，$a\tan x+b\cot x$ 和 $a\sec x+b\csc x$ 的有理式的积分求解问题进行了讨论，得到了一

些重要结论. 本节将对分母含有 $b+a\sec x, b+a\csc x, a\sec x+b\tan x$ 的有理式的积分求解问题进行讨论.

1.6.1 含有 $b+a\sec x$ 的积分

例 1 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{3+2\sec x}$.

解 原积分可化为

$$I=\int\frac{\cos x}{3\cos x+2}\mathrm{d}x.$$

令

$$J=\int\frac{\cos x}{2-3\cos x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$\begin{aligned}I+J&=\int\frac{4\cos x\,\mathrm{d}x}{4-9\cos^2x}=4\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{-5+9\sin^2x}\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}(3\sin x)}{9\sin^2x-5}=\frac{2}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{3\sin x-\sqrt{5}}{3\sin x+\sqrt{5}}\right|,\\I-J&=-6\int\frac{\cos^2x\,\mathrm{d}x}{4-9\cos^2x}=-\frac{8}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{4-9\cos^2x}+\frac{2}{3}\int\mathrm{d}x\\&=-\frac{8}{3}\int\frac{1}{4\sec^2x-9}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}+\frac{2}{3}x\\&=-\frac{8}{3}\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{4\tan^2x-5}+\frac{2}{3}x\\&=\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}\,2\tan x}{4\tan^2x-5}+\frac{2}{3}x\\&=-\frac{2}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\tan x-\sqrt{5}}{2\tan x+\sqrt{5}}\right|+\frac{2}{3}x.\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{3\sin x-\sqrt{5}}{3\sin x+\sqrt{5}}\right|\right.\\&\quad\left.-\frac{2}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\tan-\sqrt{5}}{2\tan+\sqrt{5}}\right|+\frac{2}{3}x\right)+C\\&=\frac{1}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{(3\sin x-\sqrt{5})(2\tan x+\sqrt{5})}{(3\sin x+\sqrt{5})(2\tan x-\sqrt{5})}\right|+\frac{1}{3}x+C.\end{aligned}$$

对于一般情形的求积分，如例 2 所述.

例 2 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{b+a\sec x}\quad(|a|<|b|)$.

解 原积分可变为

$$I=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a+b\cos x},$$

再令

$$J=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a-b\cos x},$$

则有

$$\begin{aligned}I+J&=\int\frac{2a\cos x\,\mathrm{d}x}{a^2-b^2\cos^2x}=2a\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{a^2-b^2+b^2\sin^2x}\\&=\frac{2a}{b}\int\frac{\mathrm{d}(b\sin x)}{a^2-b^2+b^2\sin^2x}=\frac{2a}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{b\sin x}{\sqrt{a^2-b^2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I-J&=\int\frac{-2b\cos^2x}{a^2-b^2\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{2}{b}\int\frac{(a^2-b^2\cos^2x)-a^2}{a^2-b^2\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{b}\int\mathrm{d}x-\frac{2a^2}{b}\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-b^2\cos^2x}\\&=\frac{2}{b}x-\frac{2a^2}{b}\int\frac{1}{a^2\sec^2x-b^2}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}\\&=\frac{2}{b}x-\frac{2a^2}{b}\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{a^2-b^2+a^2\tan^2x}\\&=\frac{2}{b}x-\frac{2a}{b}\int\frac{\mathrm{d}a\tan x}{a^2-b^2+a^2\tan^2x}\\&=\frac{2}{b}x-\frac{2a}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan x}{\sqrt{a^2-b^2}}.\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{b}x+\frac{a}{b\sqrt{a^2-b^2}}\left[\arctan\frac{b\sin x}{\sqrt{a^2-b^2}}-\arctan\frac{a\tan x}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]+C\\&=\frac{1}{b}x+\frac{a}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{-a\cos x-b}+C.\end{aligned}$$

例 3 求 $I=\int\frac{\cos x}{b+a\sec x}\mathrm{d}x$.

解 原积分可变为

$$I=\int\frac{\cos^2 x}{a+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

再令 $$J=\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}\text{（此积分查表可知）},$$

于是有

$$a^2J-b^2I=\int(a-b\cos x)\mathrm{d}x=ax-b\sin x,$$

所以有 $$I=\frac{1}{b^2}(a^2J-ax+b\sin x)+C.$$

1.6.2 含有 $b+a\csc x$ 的积分

先讨论一个系数比较简单的例子.

例 4 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{2+3\csc x}$.

解 原积分可变为

$$I=\int\frac{\sin x}{3+2\sin x}\mathrm{d}x,$$

再令 $$J=\int\frac{\sin x}{3-2\sin x}\mathrm{d}x,$$

则有 $$\begin{aligned}I+J&=6\int\frac{\sin x}{9-4\sin^2 x}\mathrm{d}x=-6\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{5+4\cos^2 x}\\&=-3\int\frac{\mathrm{d}(2\cos x)}{5+4\cos^2 x}=-\frac{3}{\sqrt{5}}\arctan\frac{2\cos x}{\sqrt{5}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I-J&=-\int\frac{4\sin^2 x}{9-4\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int\frac{9-(9-4\sin^2 x)}{9-4\sin^2 x}\mathrm{d}x\\&=-9\int\frac{\mathrm{d}x}{9-4\sin^2 x}+\int\mathrm{d}x=-9\int\frac{1}{9\csc^2 x-4}\ \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}+x\\&=9\int\frac{\mathrm{d}(\cot x)}{9\cot^2 x+5}+x=3\int\frac{\mathrm{d}(3\cot x)}{9\cot^2 x+5}+x\\&=\frac{3}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\cot x}{\sqrt{5}}+x.\end{aligned}$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\left[-\frac{3}{\sqrt{5}}\arctan\frac{2\cos x}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\cot x}{\sqrt{5}}+x\right]+C$$

$$=\frac{3}{\sqrt{5}}\arctan\frac{\sqrt{5}\cos x}{3\sin x+2}+x+C.$$

对于一般情形的积分，如例 5 所述.

例 5 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{b+a\csc x}\quad(b^2>a^2)$.

解 原积分可变为

$$I=\int\frac{\sin x}{a+b\sin x}\mathrm{d}x,$$

再令

$$J=\int\frac{\sin x}{a-b\sin x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$I+J=\int\frac{2a\sin x}{a^2-b^2\sin^2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{b}\int\frac{2a\mathrm{d}(b\cos x)}{a^2-b^2+b^2\cos^2x}$$

$$=\frac{2a}{b}\int\frac{\mathrm{d}(b\cos x)}{(b^2-a^2)-b^2\cos^2x}\quad(a^2<b^2)$$

$$=\frac{a}{b}\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-a^2}+b\cos x}{\sqrt{b^2-a^2}-b\cos x}\right|,$$

$$I-J=-\int\frac{2b\sin^2x}{a^2-b^2\sin^2x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{b}\int\frac{a^2-a^2+b^2\sin^2x}{a^2-b^2\sin^2x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2a^2}{b}\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-b^2\sin^2x}+\frac{2}{b}\int\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2a^2}{b}\int\frac{\mathrm{d}\cot x}{b^2-a^2-a^2\cot^2x}+\frac{2}{b}x$$

$$=-\frac{2a}{b}\int\frac{\mathrm{d}(a\cot x)}{b^2-a^2-a^2\cot^2x}+\frac{2}{b}x$$

$$=-\frac{a}{b\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-a^2}+a\cot x}{\sqrt{b^2-a^2}-a\cot x}\right|+\frac{2}{b}x.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\left[-\frac{a}{b\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-a^2}+a\cot x}{\sqrt{b^2-a^2}-a\cot x}\right|+\frac{2}{b}x\right.$$

$$\left.+\frac{a}{b\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-a^2}+b\cot x}{\sqrt{b^2-a^2}-b\cot x}\right|\right]+C.$$

1.6.3 含有 $a\sec x+b\tan x$ 的积分

对于分母含有 $a\sec x+b\tan x$ 的有理式的积分，使用组合积分法极为方便，这里很容易得到下列积分公式：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sec x+b\tan x}=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a+b\sin x}=\frac{1}{b}\ln|a+b\sin x|+C.\quad (*)$$

例 6 求 $I=\int\frac{b\sec x+a\tan x}{a\sec x+b\tan x}\mathrm{d}x\quad (a^2>b^2)$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\sec x}{a\sec x+b\tan x}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\tan x}{a\sec x+b\tan x}\mathrm{d}x.$$

则有

$$aI_1+bI_2=x.$$

而

$$\begin{aligned}I_1&=\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}\\&=-\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right],\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}I_2&=\frac{1}{b}[x-aI_1]\\&=\frac{1}{b}\left\{x+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=bI_1+aI_2\\&=\frac{1}{b}\sqrt{a^2-b^2}\arctan\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]+\frac{a}{b}x+C.\end{aligned}$$

例 7 求 $I=\int\frac{b\sec^2x+a\tan^2x}{a\sec x+b\tan x}\mathrm{d}x$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\sec^2x\,\mathrm{d}x}{a\sec x+b\tan x},\quad I_2=\int\frac{\tan^2x\,\mathrm{d}x}{a\sec x+b\tan x},$$

则有 $$I_1-I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sec x+b\tan x}=\frac{1}{b}\ln|a+b\sin x|,$$

$$\begin{aligned}a^2I_1-b^2I_2&=\int(a\sec x-b\tan x)\mathrm{d}x\\&=a\ln|\sec x+\tan x|+b\ln|\cos x|.\end{aligned}$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln|\sec x+\tan x|+b\ln|\cos x|-b\ln|a+b\sin x|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln|\sec x+\tan x|+b\ln|\cos x|-\frac{a^2}{b}\ln|a+b\sin x|].$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=bI_1+aI_2\\&=\frac{ba+a^2}{a^2-b^2}\ln|\sec x+\tan x|-\frac{a^3+b^3}{b}\ln|a+b\sin x|\\&\quad+\frac{b^2+ab}{a^2-b^2}\ln|\cos x|+C.\end{aligned}$$

以上主要讨论了应用组合积分法求三角函数有理式的积分，涵盖 6 种三角函数，只是讨论了一些较简单的三角函数有理式的情形，事实上，还可以讨论更复杂的情形．只要通过对一些较复杂的三角函数有理式积分的讨论，掌握了组合积分法的思维方法，再难的三角函数有理式的积分也会顺利地求出，这里不一一赘述了．

习　题　1.6

求下列有理式的不定积分：

(1) $\int\frac{2\sec x+3\tan x}{3\sec x+2\tan x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int\frac{2\sec^2x+3\tan^2 x}{3\sec x+2\tan x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sec x+3}$；　(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sec x+1}$；

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\csc x+4}$；　(6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\csc x+1}$.

1.7 含有正弦型和余弦型函数的积分

下面来定义与三角函数有紧密联系的一类函数，即正弦型函数和余弦型函数.

定义 1 函数 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$定义为正弦型函数，记为 $\sin[x]$；而函数 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x-\sin x)$定义为余弦型函数，记为 $\cos[x]$.

$$\sin[x]=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x),$$

$$\cos[x]=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x-\sin x).$$

显然上述函数具有与三角函数的类似的性质，即

$$\sin^2[x]+\cos^2[x]=1,$$

$$\sin^2[x]-\cos^2[x]=\sin 2x.$$

同样，有正切型函数

$$\tan[x]=\frac{\sin[x]}{\cos[x]}=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}.$$

正弦型函数和余弦型函数的定义域是整个数轴，而值域为$[-1,1]$. 但函数奇偶性有区别，正弦型函数和余弦型函数为非奇非偶函数. 它们的图像为正弦型曲线.

更重要的是它们具有如下的凑微分公式. 因为

$$(\sin[x])'=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x-\sin x)=\cos[x],$$

而

$$(\cos[x])'=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin x-\cos x)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)=-\sin[x].$$

所以有

$$(\cos[x]-\sin[x])\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin[x]+\cos[x]),$$

$$(\sin[x]+\cos[x])\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin[x]-\cos[x]).$$

这样，为使用组合积分法求分母含有正弦型函数和余弦型函数的有理式的积分打下了基础．以下专题讨论这类有理式的积分问题．

1.7.1 含有 $a\sin[x]+b\cos[x]$ 的积分

例 1 求 $I=\int\frac{\cos[x]\mathrm{d}x}{2\sin[x]+3\cos[x]}$.

解 令

$$J=\int\frac{\sin[x]\mathrm{d}x}{2\sin[x]+3\cos[x]},$$

则有

$$3I+2J=\int\frac{3\cos[x]+2\sin[x]}{2\sin[x]+3\cos[x]}\mathrm{d}x=x,$$

$$2I-3J=\int\frac{2\cos[x]-3\sin[x]}{2\sin[x]+3\cos[x]}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(2\sin[x]+3\cos[x])}{2\sin[x]+3\cos[x]}$$

$$=\ln|2\sin[x]+3\cos[x]|.$$

所以有

$$I=\frac{1}{13}[3x+2\ln|2\sin[x]+3\cos[x]|]+C.$$

对于一般情形的积分，如例 2 所述．

例 2 求 $I=\int\frac{b\sin[x]+a\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\sin[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x,$$

则有

$$aI_1+bI_2=x,$$

$$aI_2-bI_1=\int\frac{a\cos[x]-b\sin[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin[x]+b\cos[x])}{a\sin[x]+b\cos[x]}$$

$$=\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2+b^2}[ax-b\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}[bx+a\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|].$$

于是有 $I=bI_1+aI_2$

$$=\frac{2ab}{a^2+b^2}x+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|+C.$$

对于更一般情形的积分，如例 3 所述.

例 3 求 $I=\int\frac{a_1\sin[x]+b_1\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x.$

解 由例 2 的结论立刻便有

$$I=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}x-\frac{ba_1-ab_1}{a^2+b^2}\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|+C.$$

例 4 求 $I=\int\frac{(2-\sqrt{3})\sin x+(2+\sqrt{3})\cos x}{(2+\sqrt{3})\sin x+(2-\sqrt{3})\cos x}\mathrm{d}x.$

解 此题可以直接使用组合积分法或使用 1.1 节的公式求解，这里使用正弦型和余弦型函数有理式的积分更方便.

原积分可变为

$$I=\int\frac{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)-\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x-\cos x)}{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)+\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x-\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{2\sin[x]-\sqrt{3}\cos[x]}{2\sin[x]+\sqrt{3}\cos[x]}\mathrm{d}x.$$

再令

$$I_1=\int\frac{\sin[x]\mathrm{d}x}{2\sin[x]+\sqrt{3}\cos[x]},\quad I_2=\int\frac{\cos[x]\mathrm{d}x}{2\sin[x]+\sqrt{3}\cos[x]}.$$

则有 $$2I_1+\sqrt{3}I_2=x,$$

$$-\sqrt{3}I_1+2I_2=\int\frac{2\cos[x]-\sqrt{3}\sin[x]}{2\sin[x]+\sqrt{3}\cos[x]}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(2\sin[x]+\sqrt{3}\cos[x])}{2\sin[x]+\sqrt{3}\cos[x]}$$
$$=\ln|2\sin[x]+\sqrt{3}\cos[x]|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{7}[2x-\sqrt{3}\ln|2\sin[x]+\sqrt{3}\cos[x]|,$$

$$I_2=\frac{1}{7}[\sqrt{3}x+2\ln|2\sin[x]+\sqrt{3}\cos[x]|.$$

于是有

$$I=2I_1-\sqrt{3}I_2$$
$$=\frac{1}{7}x-\frac{4\sqrt{3}}{7}\ln|2\sin[x]+\sqrt{3}\cos[x]|+C.$$

例 5 求 $I=\int\frac{\cos^2[x]\mathrm{d}x}{a\sin[x]+b\cos[x]}$.

解 令 $J=\int\frac{\sin^2[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x$,

则有 $I+J=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin[x]+b\cos[x]}$

$$=\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(a-b)\sin[x]+(a+b)\cos[x]},$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\ln\left[\tan\frac{x+\arctan\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}{2}\right],$$

$$b^2I-a^2J=\int(b\cos[x]-a\sin[x])\mathrm{d}x=b\sin[x]+a\cos[x].$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{a^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\ln\left(\tan\frac{x+\arctan\frac{a-b}{a+b}}{2}\right)\right.$$
$$\left.+b\sin[x]+a\cos[x]\right]+C.$$

1.7.2 含有 $a+b\sin[x]\cos[x]$ 的积分

对于分母含有 $a+b\sin[x]\cos[x]$ 的有理式的积分也可以使用组合积分法，得到与 1.4 节类似的结论，先看一个简单的例子.

例 6 求 $I=\displaystyle\int\frac{\cos[x]\mathrm{d}x}{1+\sin[x]\cos[x]}$.

解 令
$$J=\int\frac{\sin[x]\mathrm{d}x}{1+\sin[x]\cos[x]},$$
则有
$$\begin{aligned}I+J&=\int\frac{\cos[x]+\sin[x]}{1+\sin[x]\cos[x]}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin[x]-\cos[x])}{3-(\sin[x]-\cos[x])^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sin[x]-\cos[x]}{\sqrt{3}-\sin[x]+\cos[x]}\right|,\\I-J&=\int\frac{\cos[x]-\sin[x]}{1+\sin[x]\cos[x]}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin[x]+\cos[x])}{1+(\sin[x]+\cos[x])^2}\\&=2\arctan(\sin[x]+\cos[x]).\end{aligned}$$
所以有
$$\begin{aligned}I=\frac{1}{2}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sin[x]-\cos[x]}{\sqrt{3}-\sin[x]+\cos[x]}\right|\\+2\arctan(\sin[x]+\cos[x])\Bigg]+C.\end{aligned}$$

例 7 求 $I=\displaystyle\int\frac{a_1\cos[x]+b_1\sin[x]}{a+b\sin[x]\cos[x]}\mathrm{d}x\quad(b>0,2a+b>0)$.

解 令
$$I_1=\int\frac{\cos[x]\mathrm{d}x}{a+b\sin[x]\cos[x]},\quad I_2=\int\frac{\sin[x]\mathrm{d}x}{a+b\sin[x]\cos[x]},$$

(1) 当 $2a<b$ 时，有
$$\begin{aligned}I_1+I_2&=\int\frac{\cos[x]+\sin[x]}{a+\sin[x]\cos[x]}\mathrm{d}x\\&=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin[x]-\cos[x])}{2a+b-b(\sin[x]-\cos[x])^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{b(2a+b)}}\ln\left|\frac{\sqrt{2a+b}+\sqrt{b}(\sin[x]-\cos[x])}{\sqrt{2a+b}-\sqrt{b}(\sin[x]-\cos[x])}\right|\\&=I(x),\end{aligned}$$

$$I_1-I_2=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin[x]+\cos[x])}{2a-b+b(\sin[x]+\cos[x])^2}\mathrm{d}x$$
$$=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin[x]+\cos[x])}{b(\sin[x]+\cos[x])^2-(b-2a)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{b(b-2a)}}\ln\left|\frac{\sqrt{b}(\sin[x]+\cos[x])-\sqrt{b-2a}}{\sqrt{b}(\sin[x]+\cos[x])+\sqrt{b-2a}}\right|$$
$$=J(x).$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{2}[I(x)+J(x)],$$
$$I_2=\frac{1}{2}[I(x)-J(x)].$$

于是有
$$I=a_1I_1+b_1I_2$$
$$=\frac{1}{2}[(a_1+b_1)I(x)+(a_1-b_1)J(x)]+C.$$

(2) 当 $2a>b$ 时，有
$$I_1+I_2=I(x)$$
$$I_1-I_2=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin[x]+\cos[x])}{2a-b+b(\sin[x]+\cos[x])^2}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{b}}\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{b}(\sin[x]+\cos[x])}{(\sqrt{2a-b})^2+[\sqrt{b}(\sin[x]+\cos[x])]^2}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{b(2a-b)}}\arctan\frac{\sqrt{b}(\sin[x]+\cos[x])}{\sqrt{2a-b}}=K(x).$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{2}[I(x)+K(x)],$$
$$I_2=\frac{1}{2}[I(x)-K(x)].$$

于是有
$$I=a_1I_1+b_1I_2$$
$$=\frac{1}{2}[(a_1+b_1)I(x)+(a_1-b_1)K(x)]+C.$$

综上所述有
$$I=\begin{cases}\frac{1}{2}[(a_1+b_1)I(x)+(a_1-b_1)J(x)]+C & (2a<b),\\ \frac{1}{2}[(a_1+b_1)I(x)+(a_1-b_1)K(x)]+C & (2a>b),\end{cases}$$

其中 $I(x)=\frac{1}{\sqrt{b(2a+b)}}\ln\left|\frac{\sqrt{2a+b}+\sqrt{b}(\sin[x]-\cos[x])}{\sqrt{2a+b}-\sqrt{b}(\sin[x]-\cos[x])}\right|,$

$$J(x)=\frac{1}{\sqrt{b(b-2a)}}\ln\left|\frac{\sqrt{b}(\sin[x]+\cos[x])-\sqrt{b-2a}}{\sqrt{b}(\sin[x]+\cos[x])+\sqrt{b-2a}}\right|,$$

$$K(x)=\frac{2}{\sqrt{b(2a-b)}}\arctan\frac{\sqrt{b}(\sin[x]+\cos[x])}{\sqrt{2a-b}}.$$

由于分母含有正弦型和余弦型函数有理式的积分与三角函数有理式的积分相类似，故不过多地去讨论其他形式的正弦型和余弦型函数有理式的积分，以免重复.

习 题 1.7

求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\cos[x]\mathrm{d}x}{3\sin[x]+4\cos[x]}$； (2) $\int\frac{4\sin[x]+3\cos[x]}{3\sin[x]+4\cos[x]}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\cos^2[x]\mathrm{d}x}{3\sin[x]+4\cos[x]}$； (4) $\int\frac{6\sin^2[x]+5\cos^2[x]\mathrm{d}x}{3\sin[x]+4\cos[x]}\mathrm{d}x$.

1.8 含有$(a\sin[x]+b\cos[x])^n$的积分

对于分母含有$(\sin[x]+\cos[x])^n$的积分，可采用组合积分法. 先用组合积分法来证明两个重要的递推公式.

定理 1 设 a,b 为常数，n 为大于 1 的正整数，

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{[a\sin[x]+b\cos[x]]^n},$$

则有递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{[a\sin[x]+b\cos[x]]^{n-1}}\right].\quad(1)$$

证 由

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}$$

$$=\int\frac{a\sin[x]+b\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+1}}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}(b\sin[x]-a\cos[x])}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+1}}$$
$$=\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+1}}$$
$$-\int(b\sin[x]-a\cos[x])\mathrm{d}(a\sin[x]+b\cos[x])^{-(n+1)}$$
$$=\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+1}}$$
$$-(n+1)\int\frac{(b\sin[x]-a\cos[x])^2}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+1}}$$
$$-(n+1)(a^2+b^2)J_{n+2}+(n+1)J_n.$$

所以有

$$nJ_n=(n+1)(a^2+b^2)J_{n+2}-\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+1}}.$$

用 $n-2$ 代替上式中的 n，得

$$(n-2)J_{n-2}=(n-1)(a^2+b^2)J_n-\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}.$$

故得递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}\right].$$

由递推公式立刻可得

$$J_2=\frac{1}{a^2+b^2}\,\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}+C, \tag{2}$$

$$J_3=\frac{1}{2(a^2+b^2)}\left[J_1+\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2}\right], \tag{3}$$

其中 $$J_1=\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a+b}{a-b}}{2}+C\right|,$$

$$J_4=\frac{1}{3(a^2+b^2)}\left(2J_2+\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{[a\sin[x]+b\cos[x]]^3}\right). \tag{4}$$

其中 J_2 为式(2).

定理 2 设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}$,

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\quad (n>1),$$

则

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{a_1\sin[x]+b_1\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\mathrm{d}x\\&=AJ_{n-1}-\frac{B}{n-1}\frac{1}{(\sin[x]+\cos[x])^{n-1}}.\end{aligned}$$

证 令

$$I_1=\int\frac{\sin[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\mathrm{d}x,$$

则

$$aI_1+bI_2=J_{n-1},$$

$$\begin{aligned}-bI_1+aI_2&=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin[x]+b\cos[x])}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\\&=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}.\end{aligned}$$

所以有

$$I_1=\frac{a}{a^2+b^2}J_{n-1}+\frac{b}{a^2+b^2}\ \frac{1}{n-1}\ \frac{1}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}},$$

$$I_2=\frac{b}{a^2+b^2}J_{n-1}-\frac{a}{a^2+b^2}\ \frac{1}{n-1}\ \frac{1}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}.$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}J_{n-1}-\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\ \frac{1}{n-1}\ \frac{1}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}\\&=AJ_{n-1}-\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}.\end{aligned}$$

由递推公式立刻可得

$$\int\frac{a_1\sin[x]+b_1\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2}=AJ_1-\frac{B}{n-1}\ \frac{1}{a\sin[x]+b\cos[x]},$$

其中

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ba_1-ab_1}{a^2+b^2},$$

$$J_1=\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\dfrac{a+b}{a-b}}{2}\right|.$$

例 1 求 $I=\int\frac{\sin^2[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2}\mathrm{d}x.$

解 令 $$J=\int\frac{\cos^2[x]}{[a\sin[x]+b\cos[x]]^2}\mathrm{d}x,$$

则有 $$I+J=J_2 \quad (\text{由递推公式(2)可得}),$$

$$\begin{aligned}a^2I-b^2I&=\int\frac{a\sin[x]-b\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x\\&=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x-\frac{2ab}{a^2+b^2}\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|,\end{aligned}$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2+b^2}\left[b^2J_2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x-\frac{2ab}{a^2+b^2}\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|\right]+C.$$

例 2 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]+a\cos[x])}$ $(a^2\neq b^2)$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\sin^2[x]\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]+a\cos[x])},$$

$$I_2=\int\frac{\cos^2[x]\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]+a\cos[x])},$$

则有

$$\begin{aligned}a^2I_1-b^2I_2&=\int\frac{a\sin[x]-b\cos[x]}{b\sin[x]+a\cos[x]}\mathrm{d}x\\&=\frac{ab-ab}{a^2+b^2}x-\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\ln|b\sin[x]+a\cos[x]|\\&=-\ln|b\sin[x]+a\cos[x]|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b^2I_1-a^2I_2&=\int\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x\\&=\frac{ab-ab}{a^2+b^2}x-\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|\end{aligned}$$

$$=-\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{a^4-b^4}(b^2\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|$$
$$-a^2\ln|b\sin[x]+a\cos[x]|),$$

$$I_2=\frac{1}{a^4-b^4}(a^2\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|$$
$$-b^2\ln|b\sin[x]+a\cos[x]|).$$

于是有
$$I=I_1+I_2$$
$$=\frac{b^2+a^2}{a^4-b^4}\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|$$
$$-\frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}\ln|b\sin[x]+a\cos[x]|+C$$
$$=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\sin[x]+b\cos[x]}{b\sin[x]+a\cos[x]}\right|+C.$$

例 3 求 $I=\int\frac{\sin[x]\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]+a\cos[x])}$ $(a^2\neq b^2)$.

解 令
$$J=\int\frac{\cos[x]\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]+a\cos[x])},$$

则有
$$aI+bJ=\int\frac{\mathrm{d}x}{b\sin[x]+a\cos[x]}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b+a}{b-a}}{2}\right|,$$

$$bI+aJ=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin[x]+b\cos[x]}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b+a}{a-b}}{2}\right|.$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\ln\left(\tan\frac{x+\arctan\frac{b+a}{b-a}}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\ln\left(\tan\frac{x+\arctan\frac{b+a}{a-b}}{2}\right)\right]+C.$$

例 4 求 $I=\int\frac{a_1\sin[x]+b_1\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2(b\sin[x]+a\cos[x])}\mathrm{d}x$ $(a^2\neq b^2)$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\sin[x]\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2(b\sin[x]+a\cos[x])},$$

$$I_2=\int\frac{\cos[x]\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2(b\sin[x]+a\cos[x])}.$$

则有

$$aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]+a\cos[x])}$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\sin[x]+b\cos[x]}{b\sin[x]+a\cos[x]}\right|,$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2}$$

$$=-\frac{1}{a^2-b^2}\frac{b\sin[x]+a\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\sin[x]+b\cos[x]}{b\sin[x]+a\cos[x]}\right|\right.$$

$$\left.+\frac{b}{a^2-b^2}\frac{b\sin[x]+a\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\right],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{a^2-b^2}\frac{b\sin[x]+a\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\right.$$

$$\left.-\frac{b}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\sin[x]+b\cos[x]}{b\sin[x]+a\cos[x]}\right|\right).$$

于是有 $\quad I=a_1I_1+b_1I_2$

$$=\frac{aa_1-bb_1}{(a^2-b^2)^2}\ln\left|\frac{a\sin[x]+b\cos[x]}{b\sin[x]+a\cos[x]}\right|$$
$$-\frac{ab_1-ba_1}{(a^2-b^2)^2}\frac{b\sin[x]+a\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}+C.$$

由于含有 $(a\sin[x]+b\cos[x])^n$ 的有理式的积分与含有 $(a\sin x+b\cos x)^n$ 的有理式的积分相类似，所以这里不再赘述.

习 题 1.8

求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{\sin[x]\mathrm{d}x}{(3\sin[x]+2\cos[x])^2}$;

(2) $\displaystyle\int\frac{\sin[x]+2\cos[x]}{(2\sin[x]+\cos[x])^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]-a\cos[x])}$;

(4) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]+a\cos[x])^2}$.

第2章 指数函数有理式的积分

绪论中已阐述了指数函数 e^x 与 a^x 具有自导性，对称自导函数 e^x 与 e^{-x}、a^x 与 a^{-x} 的代数和具有互导性，这就为凑微分提供了条件. 这里主要用到以下的凑微分公式：

$$(e^x+e^{-x})dx=d(e^x-e^{-x}),$$

$$(e^x-e^{-x})dx=d(e^x+e^{-x}).$$

对于一般的指数函数 a^x 与 a^{-x} $(a>0,a\neq1)$ 也有类似的凑微分公式：

$$(a^x+a^{-x})dx=\frac{1}{\ln a}d(a^x-a^{-x}),$$

$$(a^x-a^{-x})dx=\frac{1}{\ln a}d(a^x+a^{-x}).$$

这为使用组合积分法提供了保证. 下面讨论如何用组合积分法求解指数函数有理式的积分问题.

2.1 含有 ae^x+be^{-x} 的积分

对于分母含有 ae^x+be^{-x} 的指数函数有理式的积分，可以考虑使用组合积分法. 先从一个简单的例子谈起.

例1 求 $\int\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$.

解 此例可用参元组合法求解，找出与该积分类似的积分组合在一起，达到简化积分运算的目的，从而计算出结果来.

令 $$I=\int\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx,\quad J=\int\frac{e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx.$$

则 $$I+J=\int dx=x,$$

$$I-J=\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{d(e^x+e^{-x})}{e^x+e^{-x}}=\ln x(e^x+e^{-x}).$$

两式相加便有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}[x+\ln(e^x+e^{-x})]+C\\&=\frac{1}{2}[\ln e^x+\ln(e^x+e^{-x})]+C\\&=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C.\end{aligned}$$

从例 1 可以看出，在求一个指数函数有理式的积分时，应先找出这个积分的**辅助积分**，再将这个辅助积分与原积分组合在一起，从而达到简化积分运算的目的. 在寻求辅助积分时，应注意以下三点：

1）辅助积分与原积分结构相似；

2）指数函数有理式的积分，其辅助积分仍然是指数函数有理式的积分；

3）在求积分时，巧妙地运用了凑微分公式

$(e^x+e^{-x})dx=d(e^x-e^{-x})$，　$(e^x-e^{-x})dx=d(e^x+e^{-x})$.

在上述用组合积分法求解积分的例子中，由于加入了辅助积分，因而称这种组合积分法为**参元组合法**. 为了使读者掌握这种方法，下面再举几例.

例 2　求 $I=\int\frac{a_1e^x+b_1e^{-x}}{ae^x+be^{-x}}dx$.

此例可考虑使用另一种组合积分法，即所谓的**分解组合法**.

解　令　$I_1=\int\frac{e^x dx}{ae^x+be^{-x}}$，　$I_2=\int\frac{e^{-x}}{ae^x+be^{-x}}dx$，

则
$$aI_1+bI_2=x,$$

$$aI_1-bI_2=\int\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}=\int\frac{d(ae^x+be^{-x})}{ae^x+be^{-x}}=\ln|ae^x+be^{-x}|.$$

两式分别相加、相减，得

$$I_1=\frac{1}{2a}[x+\ln|ae^x+be^{-x}|],$$

$$I_2=\frac{1}{2b}[x-\ln|ae^x+be^{-x}|].$$

于是有
$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{a_1b+b_1a}{2ab}x+\frac{a_1b-b_1a}{2ab}\ln|ae^x+be^{-x}|+C.\end{aligned}$$

为了后面例题求解的需要，查表求得一些较简单的积分公式如下：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{ae^x+be^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)+C\ (ab>0), \qquad (1)$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{ae^x+be^{-x}+C}=\frac{1}{\sqrt{c^2-4ab}}\ln\left|\frac{2ae^x+c-\sqrt{c^2-4ab}}{2ae^x+c+\sqrt{c^2-4ab}}\right|+C'$$
$$(c^2-4ab>0), \qquad (2)$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2e^{2x}+b^2e^{-2x}}=\frac{1}{2ab}\arctan\left(\frac{a}{b}e^{2x}\right)+C\ (ab\neq0). \qquad (3)$$

例 3 求 $I=\int\frac{a_1e^{2x}+b_1e^{-2x}}{ae^x+be^{-x}}\mathrm{d}x$.

解 令 $I_1=\int\frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{ae^x+be^{-x}}$，$I_2=\int\frac{e^{-2x}\mathrm{d}x}{ae^x+be^{-x}}$，

则
$$a^2I_1-b^2I_2=\int(ae^x-be^{-x})\mathrm{d}x=ae^x+be^{-x},$$
$$\begin{aligned}a^2I_1+b^2I_2&=\int\frac{(ae^x+be^{-x})^2-2ab}{ae^x+be^{-x}}\mathrm{d}x\\&=\int\left[(ae^x+be^{-x})-\frac{2ab}{ae^x+be^{-x}}\right]\mathrm{d}x\\&=ae^x-be^{-x}-2\sqrt{ab}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right).\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{1}{2a^2}\left[(ae^x+be^{-x})+ae^x-be^{-x}-2\sqrt{ab}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)\right]\\&=\frac{1}{2a^2}\left[2ae^x-2\sqrt{ab}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{a}e^{x}-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^{x}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\left[e^{2x}-\sqrt{\frac{b}{a}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^{x}\right)\right],$$

$$I_2=\frac{1}{2b^2}\left[-2be^{-x}-2\sqrt{ab}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^{x}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{b}\left[e^{-x}+\sqrt{\frac{a}{b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^{x}\right)\right].$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2$$

$$=\frac{a_1}{a}e^{x}-\frac{b_1}{b}e^{-x}-\left(\frac{a_1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b_1}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^{x}\right)+C$$

$$=\frac{a_1}{a}e^{x}-\frac{b_1}{b}e^{-x}-\frac{a_1b^2+b_1a^2}{\sqrt{ab}ab}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^{x}\right)+C.$$

对于分母含有 $ae^{x}+be^{-x}+C$ 的指数函数有理式的积分，也可考虑使用组合积分法.

例 4 求 $I=\int\frac{a_1e^{x}+b_1e^{-x}}{ae^{x}+be^{-x}+c}dx\ (c^2-4ab>0)$.

解 令

$$I_1=\int\frac{e^{x}dx}{ae^{x}+be^{-x}+c},$$

$$I_2=\int\frac{e^{-x}dx}{ae^{x}+be^{-x}+c},$$

$$I_3=\int\frac{dx}{ae^{x}+be^{-x}+c},$$

则

$$aI_1+bI_2+cI_3=x,$$

$$aI_1-bI_2=\int\frac{(ae^{x}-be^{-x})dx}{ae^{x}+be^{-x}+c}=\int\frac{d(ae^{x}+be^{-x}+c)}{ae^{x}+be^{-x}+c}$$

$$=\ln|ae^{x}+be^{-x}+c|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{2a}[x+\ln|ae^{x}+be^{-x}+c|-cI_3],$$

$$I_2=\frac{1}{2b}[x-\ln|ae^x+be^{-x}+c|-cI_3].$$

于是有 $$\begin{aligned} I&=a_1I_1+b_1I_2+c_1I_3\\ &=\frac{a_1b+b_1a}{2ab}x+\frac{a_1b-b_1a}{2ab}\ln|ae^x+be^{-x}+c|\\ &\quad+\frac{2abc_1-bca_1-acb_1}{2ab}I_3. \end{aligned}$$

其中 $$I_3=\frac{1}{\sqrt{c^2-4ab}}\ln\left|\frac{2ae^x+c-\sqrt{c^2-4ab}}{2ae^x+c+\sqrt{c^2-4ab}}\right|+C'.$$

例 5 求 $\displaystyle\int\frac{e^{3x}dx}{ae^x+be^{-x}}$ $(a\neq0)$.

解 令 $\displaystyle I=\int\frac{e^{3x}dx}{ae^x+be^{-x}},\quad J=\int\frac{e^{-3x}dx}{ae^x+be^{-x}},$

则 $$\begin{aligned} a^3I+b^3J&=\int(a^2e^{2x}-ab+b^2e^{-2x})dx\\ &=\frac{1}{2}a^2e^{2x}-abx-\frac{1}{2}b^2e^{-2x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3I-b^3J&=\int\frac{(ae^x-be^{-x})(a^2e^{2x}+ab+b^2e^{-2x})}{ae^x+be^{-x}}dx\\ &=\int\frac{(ae^x+be^{-x})^2-ab}{ae^x+be^{-x}}d(ae^x+be^{-x})\\ &=\int(ae^x+be^{-x})d(ae^x+be^{-x})-ab\int\frac{d(ae^x+be^{-x})}{ae^x+be^{-x}}\\ &=\frac{1}{2}(ae^x+be^{-x})^2-ab\ln|ae^x+be^{-x}|. \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} I&=\frac{1}{2a^3}[a^2e^{2x}+ab-abx-ab\ln|ae^x+be^{-x}|]+C'\\ &=\frac{1}{2a^2}[ae^{2x}+b-bx-b\ln|ae^x+be^{-x}|]+C'\\ &=\frac{1}{2a^2}[ae^{2x}-bx-b\ln|ae^x+be^{-x}|]+C\quad\left(C=\frac{b}{2a^2}+C'\right). \end{aligned}$$

例 6 求 $\displaystyle I=\int\frac{a_1e^{2x}+b_1e^{-2x}}{ae^x+be^{-x}+c}dx$ $(ab\neq0,c^2-4ab>0)$.

解 令 $\displaystyle I_1=\int\frac{e^{2x}dx}{ae^x+be^{-x}+c},\quad I_2=\int\frac{e^{-2x}dx}{ae^x+be^{-x}+c},$

则 $$a^2I_1-b^2I_2=\int\frac{[(ae^x+be^{-x}+c)-c](ae^x-be^{-x})dx}{ae^x+be^{-x}+c}$$
$$=\int\left[1-\frac{c}{ae^x+be^{-x}+c}\right]d(ae^x+be^{-x}+c)$$
$$=ae^x+be^{-x}-c\ln|ae^x+be^{-x}+c|.$$

$$a^2I_1+b^2I_2=\int\frac{(ae^x+be^{-x})^2-2ab}{ae^x+be^{-x}+c}dx$$
$$=\int\frac{[(ae^x+be^{-x}+c)-c]^2-2ab}{ae^x+be^{-x}+c}dx$$
$$=\int\frac{[(ae^x+be^{-x}+c)^2-2c(ae^x+be^{-x}+c)+c^2]-2ab}{ae^x+be^{-x}+c}dx$$
$$=\int\left[(ae^x+be^{-x}+c)-2c+\frac{c^2-2ab}{ae^x+be^{-x}+c}\right]dx$$
$$=ae^x-be^{-x}-cx$$
$$+(c^2-2ab)\frac{1}{\sqrt{c^2-4ab}}\ln\left|\frac{2ae^x+c-\sqrt{c^2-4ab}}{2ae^x+c+\sqrt{c^2-4ab}}\right|.$$

所以有 $$I_1=\frac{1}{2a^2}\left[2ae^x-cx-c\ln|ae^x+be^{-x}+c|\right.$$
$$\left.+\frac{c^2-2ab}{\sqrt{c^2-4ab}}\ln\left|\frac{2ae^x+c-\sqrt{c^2-4ab}}{2ae^x+c+\sqrt{c^2-4ab}}\right|\right],$$
$$I_2=\frac{1}{2b^2}\left[-2be^{-x}-cx+c\ln|ae^x+be^{-x}+c|\right.$$
$$\left.+\frac{c^2-2ab}{\sqrt{c^2-4ab}}\ln\left|\frac{2ae^x+c-\sqrt{c^2-4ab}}{2ae^x+c+\sqrt{c^2-4ab}}\right|\right].$$

于是有
$$I=a_1I_1+b_1I_2$$
$$=\frac{a_1}{a}e^x-\frac{b_1}{b}e^x-\frac{a^2a_1c+b^2b_1c}{2a^2b^2}x$$
$$+\frac{b^2b_1c-a^2a_1c}{2a^2b^2}\ln|ae^x+be^{-x}+c|$$
$$+\frac{a_1b^2+b_1a^2}{2a^2b^2}\frac{c^2-2ab}{\sqrt{c^2-4ab}}\ln\left|\frac{2ae^x+c-\sqrt{c^2-4ab}}{2ae^x+c+\sqrt{c^2-4ab}}\right|+C.$$

对于分母含有 a^x+a^{-x} 的普通指数函数有理式的积分，也可使

用组合积分法.

例 7 求 $I=\int\frac{b_1a^x+c_1a^{-x}}{ba^x+ca^{-x}}\mathrm{d}x\ (a>0,a\neq1)$.

解 令 $I_1=\int\frac{a^x\mathrm{d}x}{ba^x+ca^{-x}},\quad I_2=\int\frac{a^{-x}}{ba^x+ca^{-x}}\mathrm{d}x$

则 $$bI_1+cI_2=x,$$

$$bI_1-cI_2=\int\frac{ba^x-ca^{-x}}{ba^x+ca^{-x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int\frac{\mathrm{d}(ba^x+ca^{-x})}{ba^x+ca^{-x}}$$

$$=\frac{1}{\ln a}\ln|ba^x+ca^{-x}|.$$

所以有 $$I_1=\frac{1}{2b}\left[x+\frac{1}{\ln a}\ln|ba^x+ca^{-x}|\right],$$

$$I_2=\frac{1}{2c}\left[x-\frac{1}{\ln a}\ln|ba^x+ca^{-x}|\right].$$

于是有 $$I=b_1I_1+c_1I_2$$

$$=\frac{b_1c+bc_1}{2bc}x+\frac{1}{\ln a}\,\frac{b_1c-bc_1}{2bc}\ln|ba^x+ca^{-x}|+C'.$$

这里使用组合积分法成功地求出指数函数有理式的积分，充分显示出组合积分法在求指数函数有理式积分中较高的价值.

习 题 2.1

1. 用微分法验证下列等式:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}+c}=\frac{1}{\sqrt{c^2-4ab}}\ln\left|\frac{2a\mathrm{e}^x+c-\sqrt{c^2-4ab}}{2a\mathrm{e}^x+c+\sqrt{c^2-4ab}}\right|+C.$$

2. 计算下列不定积分:

(1) $\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$; (2) $\int\frac{5\mathrm{e}^x+6\mathrm{e}^{-x}}{3\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{b\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^{-x}}{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$; (4) $\int\frac{a_1\mathrm{e}^x+b_1\mathrm{e}^{-x}}{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$;

(5) $\int\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$; (6) $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+1}\mathrm{d}x$;

(7) $\int\frac{2^x}{3\times 2^x+2^{-x}}\mathrm{d}x$；　　(8) $\int\frac{ca^x+ba^{-x}}{ba^x+ca^{-x}}\mathrm{d}x$.

2.2 含有$(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n$的积分

对于分母含有$(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n$的指数函数有理式的积分，也和三角函数有理式的积分一样，可以考虑使用组合积分法求解. 先来证明两个递推公式.

定理 1 设

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}\quad(n>1,ab\neq 0),$$

证明：

$$J_n=\frac{1}{4ab(n-1)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}\right].\tag{1}$$

证 因为

$$\begin{aligned}J_n&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}=\int\frac{\mathrm{d}(a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x})}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n+1}}\\&=\frac{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n+1}}+(n+1)\int\frac{(a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x})^2}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n+2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n+1}}+(n+1)\int\frac{(a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x})^2-(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^2}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n+2}}\mathrm{d}x\\&\quad+(n+1)J_n\\&=\frac{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n+1}}-(n+1)\int\frac{4ab\mathrm{d}x}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n+2}}+(n+1)J_n.\end{aligned}$$

所以有 $$nJ_n=4ab(n+1)J_{n+2}-\frac{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n+1}}.$$

用$n-2$代替上式中的n，得

$$(n-2)J_{n-2}=4ab(n-1)J_n-\frac{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}.$$

故得递推公式为

$$J_n=\frac{1}{4ab(n-1)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}\right].$$

定理 2

设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}$，$A=\frac{ba_1+ab_1}{2ab}$，$B=\frac{ab_1-ba_1}{2ab}$，

则 $$I=\int\frac{a_1\mathrm{e}^x+b_1\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}\mathrm{d}x=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\ \frac{1}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}$$
$$(n>1，n\in\mathbf{N}，ab\neq0).\qquad(2)$$

证 令 $I_1=\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}$，$I_2=\int\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}$，

则有 $$aI_1+bI_2=J_{n-1},$$

$$aI_1-bI_2=\int\frac{(a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}=\int\frac{\mathrm{d}(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}$$
$$=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}.$$

所以立刻便有

$$I_1=\frac{1}{2a}\left[J_{n-1}-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}\right],$$

$$I_2=\frac{1}{2b}\left[J_{n-1}+\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}\right].$$

于是有 $I=a_1I_1+b_1I_2$

$$=\frac{ba_1+b_1a}{2ab}J_{n-1}+\frac{1}{n-1}\ \frac{ab_1-ba_1}{2ab}\ \frac{1}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}$$

$$=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\ \frac{1}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}.$$

由以上递推公式立刻可得要用到的一些积分公式. 例如，由递推公式(1)可得

$$J_2=\frac{1}{4ab}\frac{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}}+C,\qquad(3)$$

$$J_3=\frac{1}{8ab}\left[J_1+\frac{1}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^2}\right]$$
$$=\frac{1}{8ab}\left[\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\mathrm{e}^x\right)+\frac{1}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^2}\right]+C,\qquad(4)$$

$$J_4=\frac{1}{12ab}\left[2J_2+\frac{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^3}\right]$$

$$=\frac{1}{12ab}\left[\frac{ae^x-be^{-x}}{2ab(ae^x+be^{-x})}+\frac{ae^x-be^{-x}}{(ae^x+be^{-x})^3}\right]+C. \tag{5}$$

利用递推公式(2),立刻可以得到

$$I=\int\frac{a_1e^x+b_1e^{-x}}{(ae^x+be^{-x})^3}=AJ_2+\frac{B}{2}\frac{1}{(ae^x+be^{-x})^2}$$

$$=\frac{A}{4ab}\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}+\frac{B}{2}\frac{1}{(ae^x+be^{-x})^2}+C, \tag{6}$$

其中 $$A=\frac{ba_1+ab_1}{2ab},\ B=\frac{ab_1-ba_1}{2ab}.$$

例 1 求 $I=\int\frac{a_1e^x+b_1e^{-x}}{(ae^x+be^{-x})^2}dx\ (ab>0)$.

解法 1 用组合积分法求解. 令

$$I_1=\int\frac{e^x dx}{(ae^x+be^{-x})^2},\quad I_2=\int\frac{e^{-x}dx}{(ae^x+be^{-x})^2},$$

则 $$aI_1+bI_2=\int\frac{dx}{ae^x+be^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right),$$

$$aI_1-bI_2=\int\frac{d(ae^x+be^{-x})}{(ae^x+be^{-x})^2}=-\frac{1}{ae^x+be^{-x}}.$$

所以立刻有

$$I_1=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)-\frac{1}{ae^x+be^{-x}}\right],$$

$$I_2=\frac{1}{2b}\left[\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)+\frac{1}{ae^x+be^{-x}}\right].$$

于是有 $$I=a_1I_1+b_1I_2$$

$$=\frac{ba_1+ab_1}{2ab}\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)$$

$$+\frac{ab_1-ba_1}{2ab}\frac{1}{ae^x+be^{-x}}+C.$$

解法 2 利用递推公式(2)立刻得到

$$I=\int\frac{a_1e^x+b_1e^{-x}}{(ae^x+be^{-x})^2}dx=AJ_1+\frac{B}{2-1}\frac{1}{(ae^x+be^{-x})^{2-1}}$$

$$=A\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)+B\frac{1}{ae^x+be^{-x}}+C.$$

$$=\frac{ba_1+ab_1}{2ab}\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)+\frac{ab_1-ba_1}{2ab}\frac{1}{ae^x+be^{-x}}+C.$$

两种方法结果完全一致. 用第二种虽然简单,但要记住递推公式并非易事,而第一种方法无须记公式,掌握了解题思路就可以了. 因而用组合积分法求解此类积分问题十分方便.

例 2 求$\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{(ae^x+be^{-x})^2}dx$ $(a\neq 0)$.

解 令 $\displaystyle I=\int\frac{e^{2x}dx}{(ae^x+be^{-x})^2}$, $\quad\displaystyle J=\int\frac{e^{-2x}dx}{(ae^x+be^{-x})^2}$,

则
$$a^2I+b^2J=\int\frac{a^2e^{2x}+b^2e^{-2x}}{(ae^x+be^{-x})^2}dx=\int\frac{(ae^x+be^{-x})^2-2ab}{(ae^x+be^{-x})^2}dx$$
$$=\int\left[1-\frac{2ab}{(ae^x+be^{-x})^2}\right]dx=x-\frac{1}{2}\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}},$$
$$a^2I-b^2J=\int\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}dx=\int\frac{d(ae^x+be^{-x})}{ae^x+be^{-x}}$$
$$=\ln|ae^x+be^{-x}|.$$

所以有
$$I=\frac{1}{2a^2}\left[x-\frac{1}{2}\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}+\ln|ae^x+be^{-x}|\right]+C.$$

例 3 求$\displaystyle I=\int\frac{(a_1e^x+b_1e^{-x})dx}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})}$ $(a^2\neq b^2,ab>0)$.

解 令
$$I_1=\int\frac{e^xdx}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})},$$
$$I_2=\int\frac{e^{-x}dx}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})},$$

则
$$aI_1+bI_2=\int\frac{dx}{be^x+ae^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}e^x\right),$$
$$bI_1+aI_2=\int\frac{dx}{ae^x+be^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right).$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\ \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[a\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}e^x\right)-b\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)\right],$$

$$I_2=\frac{1}{b^2-a^2}\ \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[b\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}e^x\right)-a\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)\right],$$

于是有 $I=a_1I_1+b_1I_2$

$$=\frac{aa_1-bb_1}{\sqrt{ab}(a^2-b^2)}\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}e^x\right)$$

$$+\frac{ab_1-ba_1}{\sqrt{ab}(a^2-b^2)}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)+C.$$

例 4 求 $I=\int\frac{a_1e^{2x}+b_1e^{-2x}}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})}dx\ (a^2\neq b^2,ab\neq 0)$.

解 令 $$I_1=\int\frac{e^{2x}dx}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})},$$

$$I_2=\int\frac{e^{-2x}dx}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})},$$

则 $$a^2I_1-b^2I_2=\int\frac{ae^x-be^{-x}}{be^x+ae^{-x}}dx$$

$$=\frac{a^2-b^2}{2ab}x+\frac{a^2+b^2}{2ab}\ln|be^x+ae^{-x}|,$$

$$b^2I_1-a^2I_2=\int\frac{be^x-ae^{-x}}{ae^x+be^{-x}}dx$$

$$=-\frac{a^2-b^2}{2ab}x+\frac{a^2+b^2}{2ab}\ln|ae^x+be^{-x}|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^4-b^4}\left[\frac{a^4-b^4}{2ab}x+\frac{a^2+b^2}{2ab}(a^2\ln|be^x+ae^{-x}|-b^2\ln|ae^x+be^{-x}|)\right],$$

$$I_2=\frac{1}{a^4-b^4}\left[\frac{a^4-b^4}{2ab}x+\frac{a^2+b^2}{2ab}(b^2\ln|be^x+ae^{-x}|-a^2\ln|ae^x+be^{-x}|)\right].$$

即 $$I_1=\frac{x}{2ab}+\frac{1}{2ab(a^2-b^2)}[a^2\ln|be^x+ae^{-x}|-b^2\ln|ae^x+be^{-x}|],$$

$$I_2=\frac{x}{2ab}+\frac{1}{2ab(a^2-b^2)}[b^2\ln|be^x+ae^{-x}|-a^2\ln|ae^x+be^{-x}|].$$

于是有 $$\begin{aligned} I &= a_1 I_1 + b_1 I_2 \\ &= \frac{a_1+b_1}{2ab}x + \frac{a^2a_1+b^2b_1}{2ab(a^2-b^2)}\ln|be^x-ae^{-x}| \\ &\quad - \frac{b^2a_1+a^2b_1}{2ab(a^2-b^2)}\ln|ae^x+be^{-x}|+C. \end{aligned}$$

例 5 求 $I=\int\frac{dx}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})}$ $(a^2\neq b^2)$.

解 令 $$I_1=\int\frac{e^{2x}dx}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})},$$
$$I_2=\int\frac{e^{-2x}dx}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})},$$

由例 4 的结论知

$$I_1=\frac{x}{2ab}+\frac{1}{2ab(a^2-b^2)}[a^2\ln|be^x+ae^{-x}|-b^2\ln|ae^x+be^{-x}|],$$

$$I_2=\frac{x}{2ab}+\frac{1}{2ab(a^2-b^2)}[b^2\ln|be^x+ae^{-x}|-a^2\ln|ae^x+be^{-x}|].$$

而 $$\begin{aligned} a^2I_1+b^2I_2 &= \frac{a^2+b^2}{2ab}x+\frac{a^4+b^4}{2ab(a^2-b^2)}\ln|be^x+ae^{-x}| \\ &\quad -\frac{ab}{a^2-b^2}\ln|ae^x+be^{-x}|. \end{aligned}$$

另外又有

$$\begin{aligned} a^2I_1+b^2I_2 &= \int\frac{(ae^x+be^{-x})^2-2ab}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})}dx \\ &= \int\frac{ae^x+be^{-x}}{be^x+ae^{-x}}dx-2abI \\ &= \frac{a^2+b^2}{2ab}x+\frac{a^2-b^2}{2ab}\ln|be^x+ae^{-x}|-2abI. \end{aligned}$$

所以有 $$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2ab}\left[\frac{a^2+b^2}{2ab}x+\frac{a^2-b^2}{2ab}\ln|be^x+ae^{-x}|-(a^2I_1+b^2I_2)\right] \\ &= \frac{1}{2ab}\left[\frac{a^2+b^2}{2ab}x+\frac{a^2-b^2}{2ab}\ln|be^x+ae^{-x}|\right. \\ &\quad -\frac{a^2+b^2}{2ab}x-\frac{a^4+b^4}{2ab(a^2-b^2)}\ln|be^x+ae^{-x}| \\ &\quad \left.+\frac{ab}{a^2-b^2}\ln|ae^x+be^{-x}|\right]+C \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\ln\left|\frac{ae^x+be^{-x}}{be^x+ae^{-x}}\right|+C.$$

事实上，此题有更简单的解法. 由

$$\frac{1}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})}$$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\left[\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}-\frac{be^x-ae^{-x}}{be^x+ae^{-x}}\right],$$

于是有

$$I=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\left[\int\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}dx-\int\frac{be^x-ae^{-x}}{be^x+ae^{-x}}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\left[\int\frac{d(ae^x+be^{-x})}{ae^x+be^{-x}}-\int\frac{d(be^x+ae^{-x})}{be^x+ae^{-x}}\right]$$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}[\ln|ae^x+be^{-x}|-\ln|be^x+ae^{-x}|]+C$$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\ln\left|\frac{ae^x+be^{-x}}{be^x+ae^{-x}}\right|+C.$$

这种方法比较简单，但要将被积函数

$$\frac{1}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})}$$

拆开成两个分式决非易事，因此用第一种方法求解较好.

例 6 求 $I=\int\frac{a_1e^x+b_1e^{-x}}{(ae^x+be^{-x})^2(be^x+ae^{-x})}dx\ (a^2\neq b^2,ab\neq 0)$.

解 令

$$I_1=\int\frac{e^x dx}{(ae^x+be^{-x})^2(be^x+ae^{-x})},$$

$$I_2=\int\frac{e^{-x}dx}{(ae^x+be^{-x})^2(be^x+ae^{-x})},$$

则有

$$aI_1+bI_2=\int\frac{dx}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})}$$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\ln\left|\frac{ae^x+be^{-x}}{be^x+ae^{-x}}\right|,$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{dx}{(ae^x+be^{-x})^2}=\frac{1}{4ab}\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{2(a^2-b^2)}\ln\left|\frac{ae^x+be^{-x}}{be^x+ae^{-x}}\right|-\frac{1}{4a}\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}\right],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{b}{2(a^2-b^2)}\ln\left|\frac{ae^x+be^{-x}}{be^x+ae^{-x}}\right|-\frac{1}{4a}\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}\right],$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{aa_1+bb_1}{2(a^2-b^2)^2}\ln\left|\frac{ae^x+be^{-x}}{be^x+ae^{-x}}\right|\\&\quad-\frac{ba_1+ab_1}{4ab(a^2-b^2)}\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}+C.\end{aligned}$$

习 题 2.2

1. 用微分法验证下列积分公式：

$$\int\frac{dx}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})}=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\ln\left|\frac{ae^x+be^{-x}}{be^x+ae^{-x}}\right|+C.$$

2. 用参元组合法计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{e^x dx}{(3e^x+2e^{-x})^2}$；　(2) $\int\frac{e^{-x}dx}{(3e^x+2e^{-x})^2}$；

(3) $\int\frac{e^{-2x}dx}{(3e^x+2e^{-x})(2e^{-x}+3e^{-x})}$；　(4) $\int\frac{e^{2x}dx}{(3e^x+2e^{-x})^2}$；

3. 用分解组合法计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{2e^x+3e^{-x}}{(3e^x+2e^{-x})^2}dx$；　(2) $\int\frac{a_1e^x+b_1e^{-x}}{(ae^x-be^{-x})^2}dx$；

(3) $\int\frac{4e^x+5e^{-x}}{(2e^x+3e^{-x})(3e^x+2e^{-x})}dx$；　(4) $\int\frac{2e^{2x}+3e^{-2x}}{(3e^x+2e^{-x})^2}dx$.

2.3 含有$(pa^x+qa^{-x})^n$的积分

对于分母含有一般指数函数$(pa^x+qa^{-x})^n$ $(a>0,a\neq1)$的有理式的积分，可以考虑使用组合积分法，这里使用了凑微分式

$$(a^x+a^{-x})dx=\frac{1}{\ln a}d(a^x-a^{-x}),$$

$$(a^x-a^{-x})\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\mathrm{d}(a^x+a^{-x}).$$

先用组合积分法证明下列递推公式.

定理 1 设 n 为正整数,且 $n>1,pq\neq0$,并令

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^n}\ ,$$

则有递推公式

$$J_n=\frac{1}{4pq(n-1)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{1}{\ln a}\ \frac{pa^x-qa^{-x}}{(pa^x+qa^{-x})^{n+1}}\right].\qquad(1)$$

证 由

$$\begin{aligned}J_n&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(pa^x-qa^{-x})^n}=\frac{1}{\ln a}\int\frac{\mathrm{d}(pa^x-qa^{-x})}{(pa^x+qa^{-x})^{n+1}}\\&=\frac{1}{\ln a}\left[\frac{(pa^x-qa^{-x})}{(pa^x+qa^{-x})^{n+1}}+(n+1)\ln a\int\frac{(pa^x-qa^{-x})^2}{(pa^x+qa^{-x})^{n+2}}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\ln a}\frac{pa^x-qa^{-x}}{(pa^x+qa^{-x})^{n+1}}\\&\quad+(n+1)\int\frac{(pa^x-qa^{-x})^2-(pa^x+qa^{-x})^2}{(pa^x+qa^{-x})^{n+2}}+(n+1)J_n\\&=\frac{1}{\ln a}\ \frac{pa^x-qa^{-x}}{(pa^x+qa^{-x})^{n+1}}\\&\quad-(n+1)\int\frac{4pq\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^{n+2}}+(n+1)J_n.\end{aligned}$$

所以有

$$nJ_n=4pq(n+1)J_{n+2}-\frac{1}{\ln a}\ \frac{pa^x-qa^{-x}}{(pa^x+qa^{-x})^{n+1}}.$$

用 $n-2$ 代替上式中的 n,得

$$(n-2)J_{n-2}=4pq(n-1)J_n-\frac{1}{\ln a}\frac{pa^x-qa^{-x}}{(pa^x-qa^{-x})^{n-1}}.$$

故得递推公式

$$J_n=\frac{1}{4pq(n-1)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{1}{\ln a}\frac{pa^x-qa^{-x}}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}}\right].$$

定理 2 设 $n>1,n\in\mathbf{N},pq\neq0$,并令

$$A=\frac{qa_1+pb_1}{2pq},\quad B=\frac{pb_1-qa_1}{2pq},$$

则有递推公式

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{a_1a^x+b_1a^{-x}}{(pa^x+qa^{-x})^n}\mathrm{d}x\\&=AJ_{n-2}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}}.\end{aligned}\tag{2}$$

证 令 $I_1=\int\frac{a^x\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^n},\quad I_2=\int\frac{a^{-x}\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^n}$,

则有

$$pI_1+qI_2=J_{n-1},$$

$$\begin{aligned}pI_1-qI_2&=\int\frac{(pa^x-qa^{-x})\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^n}=\frac{1}{\ln a}\int\frac{\mathrm{d}(pa^x+qa^{-x})}{(pa^x+qa^{-x})^n}\\&=-\frac{1}{\ln a}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}}.\end{aligned}$$

所以便有

$$I_1=\frac{1}{2p}\left[J_{n-1}-\frac{1}{\ln a}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}}\right],$$

$$I_2=\frac{1}{2q}\left[J_{n-1}+\frac{1}{n-1}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}}\right].$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{qa_1+pb_1}{2pq}J_{n-1}+\frac{1}{n-1}\frac{pb_1-qa_1}{2pq}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}}\\&=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}}.\end{aligned}$$

由递推公式立刻可以得到

$$J_2=\frac{1}{4pq}\frac{1}{\ln a}\frac{pa^x-qa^{-x}}{pa^x+qa^{-x}}+C.\tag{3}$$

由普通积分法可以得

$$J_1=\frac{1}{\sqrt{pq}}\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}a^x\right)+C\quad(p,q>0),\tag{4}$$

$$J_3=\left[J_1+\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^2}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{pq}}\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}a^x\right)+\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^2}\right]+C. \quad (5)$$

例 1 求 $I=\int\frac{a_1a^x+b_1a^{-x}}{(pa^x+qa^{-x})^2}\mathrm{d}x\ (p>0,q>0)$.

解 此题用递推公式求解虽然较简单，但记住递推公式很不容易，下面用组合积分法求解.

令 $\quad I_1=\int\frac{a^x\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^2},\quad I_2=\int\frac{a^{-x}\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^2}$

则有

$$pI_1+qI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{pa^x+qa^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{pq}}\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}a^x\right),$$

$$pI_1-qI_2=\int\frac{pa^x-qa^{-x}}{(pa^x+qa^{-x})^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int\frac{\mathrm{d}(pa^x+qa^{-x})}{(pa^x+qa^{-x})^2}$$

$$=-\frac{1}{\ln a}\frac{1}{pa^x+qa^{-x}}.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{2p}\left[\frac{1}{\sqrt{pq}}\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}a^x\right)-\frac{1}{\ln a}\frac{1}{pa^x+qa^{-x}}\right]$$

$$=\frac{1}{2p}\frac{1}{\ln a}\left[\frac{1}{\sqrt{pq}}\arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}a^x\right)-\frac{1}{pa^x+qa^{-x}}\right],$$

$$I_2=\frac{1}{2q}\frac{1}{\ln a}\left[\frac{1}{\sqrt{pq}}\arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}a^x\right)+\frac{1}{pa^x+qa^{-x}}\right].$$

于是有 $\quad I=a_1I_1+b_1I_2$

$$=\frac{qa_1+b_1p}{2qp\sqrt{pq}}\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}a^x\right)$$

$$+\frac{pb_1-qa_1}{2pq\ln a}\frac{1}{pa^x+qa^{-x}}+C.$$

例 2 求 $I=\int\frac{a^{2x}\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^2}$.

解 令
$$J=\int\frac{a^{-2x}\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^2},$$
则有
$$p^2I-q^2J=\int\frac{pa^x-qa^{-x}}{pa^x+qa^{-x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\ln|pa^x+qa^{-x}|,$$
$$\begin{aligned}p^2I+q^2J&=\int\frac{p^2a^{2x}+q^2a^{-2x}}{(pa^x+qa^{-x})^2}\mathrm{d}x=\int\frac{(pa^x+qa^{-x})^2-2pq}{(pa^x+qa^{-x})^2}\mathrm{d}x\\&=\int\left[1-\frac{2pq}{(pa^x+qa^{-x})^2}\right]\mathrm{d}x\\&=x-\frac{1}{2pq}\,\frac{1}{\ln a}\,\frac{pa^x-qa^{-x}}{pa^x+qa^{-x}}.\end{aligned}$$
所以有
$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2p^2}\left[\frac{1}{\ln a}\ln|pa^x+qa^{-x}|+x-\frac{1}{2pq}\,\frac{1}{\ln a}\,\frac{pa^x-qa^{-x}}{pa^x+qa^{-x}}\right]+C\\&=\frac{1}{2p^2\ln a}\left[\ln|pa^x+qa^{-x}|+x-\frac{1}{2pq}\,\frac{pa^x-qa^{-x}}{pa^x+qa^{-x}}\right]+C.\end{aligned}$$

例 3 求 $I=\int\frac{a_1a^x+b_1a^{-x}}{(pa^x+qa^{-x})(qa^x+pa^{-x})}\mathrm{d}x\ (a^2\neq b^2,ab\neq 0)$.

解 令
$$I_1=\int\frac{a^x\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})(qa^x+pa^{-x})},$$
$$I_2=\int\frac{a^{-x}\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})(qa^x+pa^{-x})}.$$
则有
$$pI_1+qI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{qa^x+pa^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{pq}}\,\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\sqrt{\frac{q}{p}}a^x\right),$$
$$qI_1+pI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{pa^x+qa^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{pq}}\,\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}a^x\right).$$
所以有
$$I_1=\frac{1}{p^2-q^2}\,\frac{1}{\sqrt{pq}}\,\frac{1}{\ln a}\left[p\arctan\left(\sqrt{\frac{q}{p}}a^x\right)-q\arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}a^x\right)\right],$$

$$I_2=\frac{1}{q^2-p^2}\ \frac{1}{\sqrt{pq}}\ \frac{1}{\ln a}\left[q\arctan\left(\sqrt{\frac{q}{p}}a^x\right)-p\arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}a^x\right)\right].$$

于是有
$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{pa_1-qb_1}{\sqrt{pq}(p^2-q^2)}\ \frac{1}{\ln a}\arctan\left(\sqrt{\frac{q}{p}}a^x\right)\\&\quad+\frac{pb_1-qa_1}{\sqrt{pq}}\ \frac{1}{\ln a}\arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}a^x\right)+C.\end{aligned}$$

例 4 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})(qa^x+pa^{-x})}\ (p^2\neq q^2)$.

解 令
$$I_1=\int\frac{a^{2x}\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})(qa^x+pa^{-x})},$$
$$I_2=\int\frac{a^{-2x}\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})(qa^x+pa^{-x})},$$

则有
$$\begin{aligned}p^2I_1-q^2I_2&=\int\frac{pa^x-qa^{-x}}{qa^x+pa^{-x}}\mathrm{d}x\\&=\frac{p^2-q^2}{2pq}x+\frac{p^2+q^2}{2pq}\frac{1}{\ln a}\ln|qa^x+pa^{-x}|,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}q^2I_1-p^2I_2&=\int\frac{qa^x-pa^{-x}}{pa^x+qa^{-x}}\mathrm{d}x\\&=-\frac{p^2-q^2}{2pq}x+\frac{p^2+q^2}{2pq}\frac{1}{\ln a}\ln|pa^x+qa^{-x}|.\end{aligned}$$

所以有
$$\begin{aligned}I_1=\frac{1}{p^4-q^4}\Big[&\frac{p^4-q^4}{2pq}x+\frac{p^2+q^2}{2pq}\frac{1}{\ln a}(p^2\ln|qa^x+pa^{-x}|\\&-q^2\ln|pa^x+qa^{-x}|)\Big],\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}I_2=\frac{1}{p^4-q^4}\Big[&\frac{p^4-q^4}{2pq}x+\frac{p^2+q^2}{2pq}\ \frac{1}{\ln a}(q^2\ln|qa^x+pa^{-x}|\\&-p^2\ln|pa^x+qa^{-x}|)\Big].\end{aligned}$$

于是有

$$p^2I_1+q^2I_2=\int\frac{(p^2a^{2x}+q^2a^{-2x})\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})(qa^x+pa^{-x})}$$

$$=\int\frac{(pa^x+qa^{-x})^2-2pq}{(pa^x+qa^{-x})(qa^x+pa^{-x})}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{pa^x+qa^{-x}}{qa^x+pa^{-x}}\mathrm{d}x-2pqI.$$

故得

$$I=\frac{1}{2pq}\left[\int\frac{pa^x+qa^{-x}}{qa^x+pa^{-x}}\mathrm{d}x-(p^2I_1+q^2I_2)\right]$$

$$=\frac{1}{2pq}\left[\frac{p^2+q^2}{2pq}x+\frac{p^2-q^2}{2pq}\ \frac{1}{\ln a}\ln|qa^x+pa^{-x}|\right.$$

$$-\frac{p^2+q^2}{2pq}x-\frac{p^4+q^4}{2pq(p^2-q^2)}\frac{1}{\ln a}\ln|qa^x+pa^{-x}|$$

$$\left.+\frac{pq}{p^2-q^2}\ \frac{1}{\ln a}\ln|pa^x+qa^{-x}|\ \right]+C$$

$$=\frac{1}{2(p^2-q^2)}\frac{1}{\ln a}\ln\left|\frac{pa^x+qa^{-x}}{qa^x+pa^{-x}}\right|+C.$$

例 5 求 $I=\int\frac{a^x\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^2(qa^x+pa^{-x})}$.

解 令 $$J=\int\frac{a^{-x}\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^2(qa^x+pa^{-x})},$$

则有 $$pI+qJ=\int\frac{\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})(qa^x+pa^{-x})}$$

$$=\frac{1}{2(p^2-q^2)}\ \frac{1}{\ln a}\ln\left|\frac{pa^x+qa^{-x}}{qa^x+pa^{-x}}\right|$$

$$qI+pJ=\int\frac{\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^2}=\frac{1}{4pq}\frac{1}{\ln a}\frac{pa^x-qa^{-x}}{pa^x+qa^{-x}}.$$

所以有

$$I=\frac{1}{p^2-q^2}\left[\frac{p}{2(p^2-q^2)}\ \frac{1}{\ln a}\ \ln\left|\frac{pa^x+qa^{-x}}{qa^x+pa^{-x}}\right|\right.$$

$$\left.-\frac{q}{4pq}\ \frac{1}{\ln a}\ \frac{pa^x-qa^{-x}}{pa^x+qa^{-x}}\right]+C$$

$$=\frac{1}{p^2-q^2}\ \frac{1}{\ln a}\left[\frac{p}{2(p^2-q^2)}\ln\left|\frac{pa^x+qa^{-x}}{qa^x+pa^{-x}}\right|\right.$$

$$-\frac{1}{4p}\,\frac{pa^x-qa^{-x}}{pa^x+qa^{-x}}\Bigg]+C.$$

对于分母含有$(pa^x+qa^{-x})^n$的指数函数有理式的积分，还有$n>2$的情形，由于比较复杂，这里不再赘述了. 只要掌握了组合积分法的思维方法，有耐心去做，再难的积分也可求出.

习 题 2.3

1. 用微分法验证下列积分公式：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})(qa^x+pa^{-x})}=\frac{1}{2(p^2-q^2)}\,\frac{1}{\ln a}\ln\left|\frac{pa^x+qa^{-x}}{qa^x+pa^{-x}}\right|+C.$$

2. 求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{a^{-x}\mathrm{d}x}{(3a^x+2a^{-x})^2}$；　　(2) $\displaystyle\int\frac{2a^x+3a^{-x}}{(3a^x+2a^{-x})^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^x+2a^{-x})(2a^x+a^{-x})}$；(4) $\displaystyle\int\frac{a^{-x}\mathrm{d}x}{(a^x+2a^{-x})^2(2a^x+a^{-x})}$.

第 3 章　双曲函数有理式的积分

在成功地利用组合积分法解决了大量的三角函数有理式与指数函数有理式的积分之后，我们又将这种积分方法用到双曲函数有理式的积分上，同样得到令人满意的结果. 本章将专题谈谈组合积分法在双曲函数有理式积分中的应用. 先从一个简单例子谈起.

例 1　求 $I=\int\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x$.

解　不妨令
$$J=\int\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x,$$
则有
$$I+J=x,$$
$$I-J=\int\frac{\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}=-\int\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}.$$
于是便有
$$I=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)+C.$$

像例 1 那样，在求一个积分时，找出一个与之结构相似的积分，将此积分与原积分组合在一起，这样，简化了被积函数，简化了积分运算，使得求此类积分变得更方便.

3.1　含有 $a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x$ 的积分

对于分母含有 $a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x$ 的积分，可考虑使用组合积分法.

例 2　求 $\int\frac{\operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}$　$(|a|\neq|b|)$.

解　不妨令
$$I=\int\frac{\operatorname{sh} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x,\quad J=\int\frac{\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x,$$

则有
$$aI+bJ=x,$$
$$bI+aJ=\int\frac{b\text{sh }x+a\text{ch }x}{a\text{sh }x+b\text{ch }x}\text{d}x=\int\frac{\text{d}(a\text{sh }x+b\text{ch }x)}{a\text{sh }x+b\text{ch }x}$$
$$=\ln|a\text{sh }x+b\text{ch }x|.$$
所以有
$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[ax-b\ln|a\text{sh }x+b\text{ch }x|]+C.$$

例 3 求 $I=\int\frac{a_1\text{sh }x+b_1\text{ch }x}{a\text{sh }x+b\text{ch }x}\text{d}x \quad (|a|\neq|b|)$.

解 观察所求积分的结构，可将被积函数分解为两个双曲函数有理式的积分，故可令
$$I_1=\int\frac{\text{sh }x}{a\text{sh }x+b\text{ch }x}\text{d}x,\quad I_2=\int\frac{\text{ch }x}{a\text{sh }x+b\text{ch }x}\text{d}x,$$
则有
$$aI_1+bI_2=x,$$
$$bI_1+aI_2=\int\frac{\text{d}(a\text{sh }x+b\text{ch }x)}{a\text{sh }x+b\text{ch }x}=\ln|a\text{sh }x+\text{ch }x|.$$
所以有
$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}[ax-b\ln|a\text{sh }x+b\text{ch }x|],$$
$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}[-bx+a\ln|a\text{sh }x+b\text{ch }x|].$$
于是有
$$I=a_1I_1+b_1I_2=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}x+\frac{ab_1-ba_1}{a^2-b^2}\ln|a\text{sh }x+b\text{ch }x|+C.$$

以上两例再一次说明了，组合积分法分为两大类，即：参元组合法，如例 2；分解组合法，如例 3.

例 4 求 $I=\int\frac{a_1\text{sh}^2x+2b_1\text{sh }x\text{ ch }x+c_1\text{ch }x}{a\text{sh }x+b\text{ch }x}$.

解 用分解组合法求解. 不妨设
$$I_1=\int\frac{\text{sh}^2x\,\text{d}x}{a\text{sh }x+b\text{ch }x},$$

$$I_2=\int\frac{\mathrm{ch}^2 x\,\mathrm{d}x}{a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x},$$

$$I_3=\int\frac{2\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x}{a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$-I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right),$$

$$a^2I_1-b^2I_2=\int(a\mathrm{sh}\,x-b\mathrm{ch}\,x)\mathrm{d}x=a\mathrm{ch}\,x-b\mathrm{sh}\,x,$$

$$a^2I_1+abI_3+b^2I_2=\int(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)\mathrm{d}x=a\mathrm{ch}\,x+b\mathrm{sh}\,x,$$

解方程组,得

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)+a\mathrm{ch}\,x-b\mathrm{sh}\,x\right],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{2a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)+a\mathrm{ch}\,x-b\mathrm{sh}\,x\right],$$

$$I_3=\frac{1}{ab}[a\mathrm{ch}\,x+b\mathrm{sh}\,x-a^2I_1-b^2I_2]$$

$$=\frac{2a}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2-b^2}-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^{3/2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right).$$

于是有 $\quad I=a_1I_1+b_1I_3+c_1I_2$

$$=\frac{a_1a-2bb_1+c_1a}{a^2-b^2}\mathrm{ch}\,x-\frac{a_1b-2ab_1+c_1b}{a^2-b^2}\mathrm{sh}\,x$$

$$+\frac{2(c_1a^2-2abb_1+a_1b)}{(a^2-b^2)^{3/2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)+C.$$

例 5 求 $I=\int\frac{b\mathrm{sh}^2x-a\mathrm{ch}^2x}{a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x}\mathrm{d}x \quad (|a|>|b|)$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\mathrm{sh}^2x}{a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{\mathrm{ch}^2x}{a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$a^2I_1-b^2I_2=\int(a\mathrm{sh}\ x-b\mathrm{ch}\ x)\mathrm{d}x=a\mathrm{ch}\ x-b\mathrm{sh}\ x,$$

$$-I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right).$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)+a\mathrm{sh}\ x-b\mathrm{ch}\ x\right],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{2a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)+a\mathrm{ch}\ x-b\mathrm{sh}\ x\right].$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=bI_1+aI_2\\&=\frac{2b^3+2a^3}{(a^2-b^2)^{3/2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)\\&\quad+\frac{2ab}{a^2-b^2}\mathrm{ch}\ x-\frac{b^2+ab}{a^2-b^2}\mathrm{sh}\ x+C.\end{aligned}$$

对于分母含有 $a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x+c$ 的有理式的积分，也可使用组合积分法，如例 6.

例 6 求 $I=\int\frac{\mathrm{sh}\ x}{\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x+1}\mathrm{d}x.$

解 令

$$J=\int\frac{\mathrm{ch}\ x}{\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x+1}\mathrm{d}x,$$

则有

$$\begin{aligned}I+2J&=\int\left(1-\frac{1}{\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x+1}\right)\mathrm{d}x\\&=x-\frac{2}{\sqrt{2^2-1^2-1^2}}\arctan\frac{3\mathrm{e}^x+1}{\sqrt{2}}\\&=x-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3\mathrm{e}^x+1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2I+J&=\int\frac{2\mathrm{sh}\ x+\mathrm{ch}\ x}{\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x+1)}{(\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x+1)}\\&=\ln|\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x+1|.\end{aligned}$$

所以有

$$I=\frac{1}{3}\left[2\ln|\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x+1|-x+\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3\mathrm{e}^{x}+1}{\sqrt{2}}\right]+C.$$

对于一般情形的积分，如例 7 所述.

例 7 求 $I=\int\frac{c_1+a_1\operatorname{sh} x+b_1\operatorname{ch} x}{c+a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x \quad (b^2>a^2+c^2, |a|\neq|b|)$.

解 不难用普通积分法求得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{c+a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}=\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\arctan\frac{(a+b)\mathrm{e}^{x}+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}.$$

令 $$I_1=\int\frac{\operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x}{c+a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x},\quad I_2=\int\frac{\operatorname{ch} x}{c+a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$\begin{aligned}aI_1+bI_2&=\int\left(1-\frac{c}{c+a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}\right)\mathrm{d}x\\&=x-\frac{2c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\arctan\frac{(a+b)\mathrm{e}^{x}+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}},\end{aligned}$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}(c+a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)}{c+a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}=\ln|c+a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|.$$

所以有

$$\begin{aligned}I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\Big[&ax-\frac{2ac}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\arctan\frac{(a+b)\mathrm{e}^{x}+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\\&-b\ln|c+a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\Big[&a\ln|c+a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|-bx\\&+\frac{2bc}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\arctan\frac{(a+b)\mathrm{e}^{x}+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\Big].\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=c_1\int\frac{\mathrm{d}x}{c+a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}+a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{a^2c_1-b^2c_1-acc_1+bcb_1}{a^2-b^2}\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\arctan\frac{(a+b)\mathrm{e}^{x}+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\\&\quad+\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}x+\frac{b_1a-a_1b}{a^2-b^2}\ln|c+a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|+C.\end{aligned}$$

此类积分还可以化为指数函数有理式的积分，然后用指数函数有理式的积分求解，如例 8 所述.

例 8 求 $I=\int\frac{\mathrm{sh}\ x}{2\mathrm{sh}\ x+\mathrm{ch}\ x}\mathrm{d}x$.

解 将原积分变为

$$I=\int\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x,$$

然后利用指数函数有理式的积分求之. 令

$$I_1=\int\frac{\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}},\quad I_2=\int\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}},$$

则有
$$3I_1-I_2=x,$$
$$3I_1+I_2=\int\frac{3\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x})}{3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}=\ln|3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}|.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{6}(x+\ln|3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}|),$$
$$I_2=\frac{1}{2}(\ln|3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}|-x).$$

于是有
$$I=I_1-I_2=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\ln|3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}|+C.$$

此题直接用双曲函数有理式的积分方法求更简单一些，特别是系数复杂的情形更是如此.

习　题　3.1

1. 利用双曲函数有理式的积分方法求例 8 的不定积分，并将结果化为一致的原函数.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{ch}\ x}{3\mathrm{sh}\ x-2\mathrm{ch}\ x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\frac{2\mathrm{sh}\ x+3\mathrm{ch}\ x}{3\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{\mathrm{sh}^2\ x}{3\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int\frac{\mathrm{ch}\ x}{2+4\mathrm{sh}\ x+\mathrm{ch}\ x}\mathrm{d}x$.

3.2 含有$(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^n$的积分

对于分母含有$(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^n$ $(n>1)$的双曲函数有理式的积分，具有与分母含有$(a\sin x+b\cos x)^n$的三角函数有理式的积分相类似的性质. 为了方便使用组合积分法，不妨先证明如下递推公式：

定理 1 令 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^n}$ $(n>1, a^2\neq b^2)$，

则有如下递推公式：

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(b^2-a^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^{n-1}}\right].$$

证 由

$$\begin{aligned}J_n&=\int\frac{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^{n+1}}=\int\frac{\mathrm{d}(b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x)}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^{n+1}}\\
&=\frac{b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^{n+1}}\\
&\quad-\int(b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x)\mathrm{d}(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^{-(n+1)},\\
&=\frac{b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^{n+1}}+(n+1)\int\frac{(b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x)^2}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^{n+2}}\mathrm{d}x\\
&=\frac{b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^{n+1}}\\
&\quad+(n+1)\int\frac{(b\sin x+a\mathrm{ch}\,x)^2-(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^2}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^{n+2}}\mathrm{d}x\\
&\quad+(n+1)J_n,\end{aligned}$$

有

$$nJ_n=-(n+1)(a^2-b^2)J_{n+2}-\frac{b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^{n+1}}.$$

用$(n-2)$代替上式中的n，得

$$(n-2)J_{n-2}=-(n-1)(a^2-b^2)J_n-\frac{b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^{n-1}}.$$

故递推公式为

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(b^2-a^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{b\text{sh }x+a\text{ch }x}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^{n-1}}\right].\quad(1)$$

定理 2 设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^n}$,

$$A=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2},\quad B=\frac{ba_1-ab_1}{a^2-b^2},$$

则有

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{a_1\text{sh }x+b_1\text{ch }x}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^n}\mathrm{d}x\\&=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^{n-1}}\quad(n>1,a^2\neq b^2).\end{aligned}$$

证 令 $I_1=\int\frac{\text{sh }x\,\mathrm{d}x}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^n}$, $I_2=\int\frac{\text{ch }x\,\mathrm{d}x}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^n}$,

则有

$$aI_1+bI_2=J_{n-1},$$

$$\begin{aligned}bI_1+aI_2&=\int\frac{b\text{sh }x+a\text{ch }x}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^n}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a\text{sh }x+b\text{ch }x)}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^n}\\&=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^{n-1}}.\end{aligned}$$

所以有

$$I_1=\frac{a}{a^2-b^2}J_{n-1}+\frac{b}{a^2-b^2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^{n-1}},$$

$$I_2=\frac{b}{b^2-a^2}J_{n-1}+\frac{a}{b^2-a^2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^{n-1}}.$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}J_{n-1}+\frac{ba_1-ab_1}{a^2-b^2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^{n-1}}\\&=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\text{sh }x+b\text{ch }x)^{n-1}}.\end{aligned}\quad(2)$$

由以上递推公式立刻可得到要用到的一些积分公式. 例如由递推公式(1)可得到

$$J_2=\frac{1}{b^2-a^2}\frac{b\text{sh }x+a\text{ch }x}{a\text{sh }x+b\text{ch }x}+C,\quad(3)$$

$$J_3=\frac{1}{2(b^2-a^2)}\left[J_1+\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2(b^2-a^2)}\left[\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)\right.$$

$$\left.+\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^2}\right]+C, \tag{4}$$

$$J_4=\frac{1}{3(b^2-a^2)}\left[2J_2+\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{3(b^2-a^2)}\left[\frac{2}{b^2-a^2}\,\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\right.$$

$$\left.+\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^3}\right]+C. \tag{5}$$

下面再举几个利用上述公式求较复杂函数的积分例子.

例 1 求 $I=\int\frac{a_1\operatorname{sh}x+b_1\operatorname{ch}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^2}\mathrm{d}x$.

解法 1 利用组合积分法计算. 令

$$I_1=\int\frac{\operatorname{sh}x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^2},\quad I_2=\int\frac{\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^2},$$

则 $$aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right),$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}=\ln|a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)-b\ln|a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|\right],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\left[a\ln|a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|-\frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)\right].$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2$$

$$=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}\,\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)$$

$$+\frac{ba_1-ab_1}{a^2-b^2}\frac{1}{a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x}+C.$$

解法 2 利用递推公式(2)求解. 将 $n=2$ 代入式(2),得

$$I=AJ_1+\frac{B}{2-1}\frac{1}{a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x}$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{a^2-b^2}\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)$$

$$+\frac{ba_1-ab_1}{a^2-b^2}\frac{1}{a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x}+C.$$

比较上述两种解法,第二种方法显然较简单,但要记住递推公式(2)绝非易事. 而利用组合积分法求解,无须记公式. 只掌握解题思路即可. 在这里,我们提倡使用组合积分法解题.

例 2 求 $I=\int\frac{a_1\mathrm{sh}\ x+b_1\mathrm{ch}\ x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)(b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{ch}\ x)}\mathrm{d}x.$

解 令 $I_1=\int\frac{\mathrm{sh}\ x\ \mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)(b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{ch}\ x)},$

$$I_2=\int\frac{\mathrm{ch}\ x\ \mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)(\mathrm{sh}\ bx+a\mathrm{ch}\ x)},$$

则

$$aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{ch}\ x}=\frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\mathrm{e}^x\right),$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right).$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{2\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\mathrm{e}^x\right)\right.$$

$$\left.-\frac{b}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)\right]$$

$$I_2=\frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{b}{2\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\mathrm{e}^x\right)\right.$$

$$-\frac{a}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}e^x\right)\Bigg]$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= a_1 I_1 + b_1 I_2 \\ &= \frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}\ \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}e^x\right) \\ &\quad + \frac{ab_1-ba_1}{a^2-b^2}\ \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}e^x\right) + C. \end{aligned}$$

例 3 求 $I=\int\frac{dx}{(a\text{sh } x+b\text{ch } x)(b\text{sh } x+a\text{ch } x)}$.

解 令 $I_1=\int\frac{\text{sh}^2 x\, dx}{(a\text{sh } x+b\text{ch } x)(b\text{sh } x+a\text{ch } x)}$,

$$I_2=\int\frac{\text{ch}^2 x\, dx}{(a\text{sh } x+b\text{ch } x)(b\text{sh } x+a\text{ch } x)},$$

则

$$\begin{aligned} a^2I_1-b^2I_2 &= \int\frac{a\text{sh } x-b\text{ch } x}{b\text{sh } x+a\text{ch } x}dx \\ &= -\frac{2ab}{a^2-b^2}x+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\ln|b\text{sh } x+a\text{ch } x|, \\ b^2I_1-a^2I_2 &= \int\frac{b\text{sh } x-a\text{ch } x}{a\text{sh } x+b\text{ch } x}dx \\ &= \frac{2ab}{a^2-b^2}x-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\ln|a\text{sh } x+b\text{ch } x|. \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a^4-b^4}\left[-\frac{2a^3b+2ab^3}{a^2-b^2}x+\frac{a^4+a^2b^2}{a^2-b^2}\ln|b\text{sh } x+a\text{ch } x|\right. \\ &\quad \left.+\frac{a^2b^2+b^4}{a^2-b^2}\ln|a\text{sh } x+b\text{ch } x|\right], \\ I_2 &= \frac{1}{a^4-b^4}\left[-\frac{2a^3b+2ab^3}{a^2-b^2}x+\frac{b^4+a^2b^2}{a^2-b^2}\ln|b\text{sh } x+a\text{ch } x|\right. \\ &\quad \left.+\frac{a^4+a^2b^2}{a^2-b^2}\ln|a\text{sh } x+b\text{ch } x|\right]. \end{aligned}$$

于是有 $I=I_2-I_1$

$$=\frac{1}{a^4-b^4}[(a^2+b^2)\ln|a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x|$$

$$-(a^2+b^2)\ln|b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x|]+C$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x}{b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x}\right|+C.$$

例 4 求 $I=\int\frac{a_1\mathrm{sh}\,x+b_1\mathrm{ch}\,x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^2(b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x)}\mathrm{d}x.$

解 令 $J=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)(b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x)}$

（可由例 3 求出），

再令

$$I_1=\int\frac{\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^2(b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x)},$$

$$I_2=\int\frac{\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^2(b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x)},$$

则

$$aI_1+bI_2=J,$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)^2}=\frac{1}{b^2-a^2}\,\frac{b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x}{a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x}.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[aJ+\frac{b}{a^2-b^2}\,\frac{b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x}{a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x}\right],$$

$$I_2=\frac{1}{b^2-a^2}\left[bJ+\frac{a}{a^2-b^2}\,\frac{b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x}{a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x}\right].$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}J+\frac{ba_1-ab_1}{a^2-b^2}\,\frac{b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x}{a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x}.$$

例 5 求 $I=\int\frac{a_1\mathrm{sh}^2\,x+b_1\mathrm{ch}^2\,x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)(b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x)}\mathrm{d}x.$

解 令 $J=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)(b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x)}$（可由例 3 求出）

再令

$$I_1=\int\frac{\mathrm{sh}^2\,x\,\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)(b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x)},$$

$$I_2=\int\frac{\mathrm{ch}^2\,x\,\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x)(b\mathrm{sh}\,x+a\mathrm{ch}\,x)},$$

则

$$I_2-I_1=J$$

$$a^2I_1-b^2I_2=\int\frac{a\mathrm{sh}\ x-b\mathrm{ch}\ x}{b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{ch}\ x}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{2ab}{a^2-b^2}x+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\ln|b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{ch}\ x|,$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[b^2J-\frac{2ab}{a^2-b^2}x+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\ln|b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{sh}\ x|\right],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\left[a^2J-\frac{2ab}{a^2-b^2}x+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\ln|b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{sh}\ x|\right].$$

于是有 $I=a_1I_1+b_1I_2$

$$=\frac{a^2b_1+b^2a_1}{a^2-b^2}J-\frac{2ab(a_1+b_1)}{(a^2-b^2)^2}x$$
$$+\frac{(a^2+b^2)(a_1+b_1)}{(a^2-b^2)^2}\ln|b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{ch}\ x|.$$

事实上，对于分母含有$(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)(c\mathrm{sh}\ x+d\mathrm{ch}\ x)$的双曲函数有理式的积分，也同样可使用组合积分法求解.

例 6 求$\int\frac{\mathrm{ch}\ x\ \mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)(c\mathrm{sh}\ x+d\mathrm{ch}\ x)}$.

解 令 $I=\int\frac{\mathrm{sh}\ x\ \mathrm{d}\ x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)(c\mathrm{sh}\ x+d\mathrm{ch}\ x)}$,

$$J=\int\frac{\mathrm{ch}\ x\ \mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)(c\mathrm{sh}\ x+d\mathrm{ch}\ x)},$$

则 $aI+bJ=\int\frac{\mathrm{d}x}{c\mathrm{sh}\ x+d\mathrm{ch}\ x}=\frac{1}{2\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{c+d}{c-d}}\mathrm{e}^x\right)$,

$$cI+dJ=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right).$$

于是有

$$J=\frac{1}{bc-ad}\left[\frac{c}{2\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{c+d}{c-d}}\mathrm{e}^x\right)\right.$$
$$\left.-\frac{a}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)\right]+C.$$

例 7 求 $I=\int\frac{\mathrm{sh}\ x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)^3}\mathrm{d}x \quad (a^2\neq b^2)$.

解 令
$$J=\int\frac{\mathrm{ch}\ x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)^3}\mathrm{d}x,$$
则有
$$aI+bJ=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)^2}=-\frac{1}{a^2-b^2}\,\frac{b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{ch}\ x}{a\mathrm{ch}\ x+b\mathrm{ch}\ x},$$
$$bI+aJ=\int\frac{\mathrm{d}(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)^3}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)^2}.$$
所以
$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{b}{2(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)^2}-\frac{a}{a^2-b^2}\,\frac{b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{ch}\ x}{a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x}\right]+C.$$

例 7 也可用递推公式(4)求解,即将 $n=3,a_1=1,b_1=c$ 代入式(4)立刻得出以上结果.

对于分母含有$(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)^n$ 的双曲函数有理式的积分,还可以举出更多更繁的例子,为避免重复,不再一一赘述了.

习 题 3.2

求下列不定积分:

(1) $\int\frac{\mathrm{ch}\ x}{2\mathrm{sh}\ x+3\mathrm{ch}\ x}\mathrm{d}x$; (2) $\int\frac{3\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x}{2\mathrm{sh}\ x+3\mathrm{ch}\ x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x)(3\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x)}$;

(4) $\int\frac{\mathrm{ch}\ x\,\mathrm{d}x}{(2\mathrm{sh}\ x+3\mathrm{ch}\ x)^2(3\mathrm{sh}\ x+2\mathrm{ch}\ x)}$;

(5) $\int\frac{\mathrm{sh}\ x\,\mathrm{d}x}{(2\mathrm{sh}\ x+\mathrm{ch}\ x)^2}$; (6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2\mathrm{sh}\ x+\mathrm{ch}\ x)^2}$.

3.3 含有其他双曲函数有理式的积分

双曲函数除了双曲正弦、双曲余弦以外,还有双曲正切 th x、

双曲余切 cth x、双曲正割 sech x 和双曲余割 csch x. 下面来讨论此类双曲函数有理式的积分求解问题.

3.3.1 含有 $b+a\mathrm{th}\,x$ 的积分

对于分母含有 $b+a\mathrm{th}\,x$ 的有理式的积分,可考虑使用组合积分法求解. 先看一个简单的例子.

例 1 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{th}\,x}$.

解法 1 令
$$J=\int\frac{\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}\,x}\mathrm{d}x,$$
则有
$$I+J=x,$$
$$I-J=\int\frac{1-\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}\,x}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}.$$
所以立刻便有
$$I=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}+C.$$

解法 2 将原积分化为
$$I=\int\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x+\mathrm{ch}\,x}\mathrm{d}x,$$
然后用前面的结论立刻可得
$$I=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}+C.$$

从以上两种解法可知,在系数比较简单的情况下,可用解法 1 直接求解. 但当系数比较复杂时,用解法 1 就不太方便了,用解法 2 较好. 即先将原积分化成双曲正弦与双曲余弦的有理式的积分,然后用组合积分法求之.

例 2 求 $I=\int\frac{a_1+b_1\mathrm{th}\,x}{b+a\mathrm{th}\,x}\mathrm{d}x\quad(|a|\neq|b|)$.

解 原积分可变为
$$I=\int\frac{b_1\mathrm{sh}\,x+a_1\mathrm{ch}\,x}{a\mathrm{sh}\,x+b\mathrm{ch}\,x}\mathrm{d}x,$$

再令

$$I_1=\int\frac{\operatorname{sh} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$aI_1+bI_2=x,$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}=\ln|a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}[ax-b\ln|a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln|a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|-bx].$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=b_1I_1+a_1I_2\\&=\frac{ab_1-ba_1}{a^2-b^2}x+\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}\ln|a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|+C.\end{aligned}$$

例 3 求 $I=\int\frac{\operatorname{th}^2 x}{(b+a\operatorname{th} x)^2}\mathrm{d}x\quad(|a|\neq|b|)$.

解 原积分可变为

$$I=\int\frac{\operatorname{sh}^2 x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^2}\mathrm{d}x,$$

再令

$$J=\int\frac{\operatorname{ch}^2 x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^2}\mathrm{d}x,$$

则有

$$-I+J=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^2}=\frac{1}{b^2-a^2}\,\frac{b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x},$$

$$\begin{aligned}a^2I-b^2J&=\int\frac{a\operatorname{sh} x-b\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x\\&=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x-\frac{2ab}{a^2-b^2}\ln|a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|.\end{aligned}$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{b^2}{a^2-b^2}\frac{b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x\right.$$
$$\left.-\frac{2ab}{a^2-b^2}\ln|a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|\right]+C.$$

3.3.2 含有 $a+b\text{cth}\ x$ 的积分

对于分母含有 $a+b(\text{cth}\ x)$ 的积分，与 3.3.1 节的积分相类似，也可以用组合积分法求之.

例 4 求 $I=\int\frac{a_1+b_1\text{cth}\ x}{a+b\text{cth}\ x}\mathrm{d}x\quad(|a|\neq|b|)$.

解 原积分可变为

$$I=\int\frac{a_1\text{sh}\ x+b_1\text{ch}\ x}{a\text{sh}\ x+b\text{ch}\ x}\mathrm{d}x,$$

由 3.1 节例 2 得

$$I=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}x+\frac{ab_1-ba_1}{a^2-b^2}\ln|a\text{sh}\ x+b\text{ch}\ x|+C.$$

例 5 求 $I=\int\frac{\text{cth}^2x}{(a+b\text{cth}\ x)^2}\mathrm{d}x$.

解 原积分可变为

$$I=\int\frac{\text{ch}^2\ x}{(a\text{sh}\ x+b\text{ch}\ x)^2}\mathrm{d}x,$$

再令

$$J=\int\frac{\text{sh}^2\ x}{(a\text{sh}\ x+b\text{ch}\ x)^2}\mathrm{d}x,$$

则有

$$I-J=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\text{sh}\ x+b\text{ch}\ x)^2}=\frac{1}{b^2-a^2}\ \frac{b\text{sh}\ x+a\text{ch}\ x}{a\text{sh}\ x+b\text{ch}\ x},$$

$$\begin{aligned}-b^2I+a^2J&=\int\frac{a\text{sh}\ x-b\text{ch}\ x}{a\text{sh}\ x+b\text{ch}\ x}\mathrm{d}x\\&=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x-\frac{2ab}{a^2-b^2}\ln|a\text{sh}\ x+b\text{ch}\ x|.\end{aligned}$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a^2}{b^2-a^2}\ \frac{b\text{sh}\ x+a\text{ch}\ x}{a\text{sh}\ x+b\text{ch}\ x}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x\right.$$
$$\left.-\frac{2ab}{a^2-b^2}\ln|a\text{sh}\ x+b\text{ch}\ x|\right]+C.$$

3.3.3 含有 $a\text{sech } x+b\text{csch } x$ 的积分

对于分母含有 $a\text{sech } x+b\text{csch } x$ 的有理式的积分，用组合积分法求解也是很方便的.

例 6 求 $I=\int\frac{a_1\text{sech } x+b_1\text{csch } x}{a\text{sech } x+b\text{csch } x}\mathrm{d}x$.

解 原积分可变为

$$I=\int\frac{a_1\text{sh } x+b_1\text{ch } x}{a\text{sh } x+b\text{ch } x}\mathrm{d}x,$$

由 3.1 节例 2，立刻便有

$$I=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}x+\frac{ab_1-ba_1}{a^2-b^2}\ln|a\text{sh } x+b\text{ch } x|+C.$$

例 7 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\text{sech } x+b\text{csch } x)^2}$.

解 原积分可变为

$$I=\int\frac{\text{sh } x\text{ ch } x}{(a\text{sh } x+b\text{ch } x)^2}\mathrm{d}x,$$

再令

$$I_1=\int\frac{\text{sh}^2 x}{(a\text{sh } x+b\text{ch } x)^2}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{\text{ch}^2 x}{(a\text{sh } x+b\text{ch } x)^2}\mathrm{d}x,$$

则有

$$-I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\text{sh } x+b\text{ch } x)^2}=\frac{1}{b^2-a^2}\frac{b\text{sh } x+a\text{ch } x}{a\text{sh } x+b\text{ch } x}.$$

$$\begin{aligned}a^2I_1-b^2I_2&=\int\frac{a\text{sh } x-b\text{ch } x}{a\text{sh } x+b\text{ch } x}\mathrm{d}x\\&=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x-\frac{2ab}{a^2-b^2}\ln|a\text{sh } x+b\text{ch } x|.\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\Big[&\frac{b^2}{b^2-a^2}\frac{b\text{sh } x+a\text{ch } x}{a\text{sh } x+b\text{ch } x}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x\\&-\frac{2ab}{a^2-b^2}\ln|a\text{sh } x+b\text{ch } x|\Big],\end{aligned}$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a^2}{b^2-a^2}\frac{b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{ch}\ x}{a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x\right.$$

$$\left.-\frac{2ab}{a^2-b^2}\ln|a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x|\right].$$

于是有 $$a^2I_1+2abI+b^2I_2=x,$$

即 $$I=\frac{1}{2ab}[x-(a^2I_1+b^2I_2)]$$

$$=\frac{1}{2ab}\left[x-\left(-\frac{2a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}\frac{b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{ch}\ x}{a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x}+\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2-b^2)^2}x\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2ab(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\ln|a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x|\right)\right]+C$$

$$=\frac{2ab}{(a^2-b^2)^2}x+\frac{ab}{(a^2-b^2)^2}\frac{b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{ch}\ x}{a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x}$$

$$+\frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}\ln|a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x|+C.$$

3.4 双曲型函数有理式的积分

我们用指数函数 e^x 与 e^{-x}定义了双曲函数.同样地,也可以用一般的指数函数 a^x 与 a^{-x}来定义双曲型函数.

定义 1 设 $a>0$,且 $a\neq1$,将$\frac{a^x-a^{-x}}{2}$定义为双曲型正弦函数,记为 $\mathrm{sh}(x\ln a)$,并将$\frac{a^x+a^{-x}}{2}$定义为双曲型余弦函数,记为 $\mathrm{ch}(x\ln a)$,即

$$\mathrm{sh}(x\ln a)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}-\mathrm{e}^{-x\ln a}}{2},$$

$$\mathrm{ch}(x\ln a)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}+\mathrm{e}^{-x\ln a}}{2}.$$

类似地,也可以定义其他双曲型函数,这里从略.

双曲型函数具有与双曲函数一样的凑微分公式,如

$$[\mathrm{sh}(x\ln a)+\mathrm{ch}(x\ln a)]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\ln a}\mathrm{d}[\mathrm{ch}(x\ln a)+\mathrm{sh}(x\ln a)],$$

$$[\mathrm{sh}(x\ln a)-\mathrm{ch}(x\ln a)]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\ln a}\mathrm{d}[\mathrm{ch}(x\ln a)-\mathrm{sh}(x\ln a)].$$

这种凑微分公式在组合积分法中有重要作用.

另外,还有和双曲函数类似的公式,如

$$\mathrm{ch}^2(x\ln a)-\mathrm{sh}^2(x\ln a)=1.$$

3.4.1 含有 $b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)$ 的积分

对于系数较简单的情况,可以将积分化为指数函数有理式的积分.

例 1 求 $I=\int\frac{\mathrm{sh}(x\ln a)}{2\mathrm{sh}(x\ln a)+\mathrm{ch}(x\ln a)}\mathrm{d}x$.

解 原积分可化为

$$I=\int\frac{a^x+a^{-x}}{3a^x-a^{-x}}\mathrm{d}x,$$

再令 $$I_1=\int\frac{a^x}{3a^x-a^{-x}}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{a^{-x}}{3a^x-a^{-x}}\mathrm{d}x$$

则有 $$3I_1-I_2=x,$$

$$3I_1+I_2=\int\frac{3a^x+a^{-x}}{3a^x-a^{-x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int\frac{\mathrm{d}(3a^x-a^{-x})}{3a^x-a^{-x}}$$

$$=\frac{1}{\ln a}\ln|3a^x-a^{-x}|.$$

所以有 $$I_1=\frac{1}{6}\left[x+\frac{1}{\ln a}\ln|3a^x-a^{-x}|\right],$$

$$I_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\ln a}\ln|3a^x-a^{-x}|-x\right].$$

于是有 $$I=I_1+I_2=\frac{2}{3\ln a}\ln|3a^x-a^{-x}|-\frac{1}{3}x+C.$$

如果系数比较复杂,直接用组合积分法求解.

例 2 求 $I=\int\frac{b_1\mathrm{sh}(x\ln a)+c_1\mathrm{ch}(x\ln a)}{b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)}\mathrm{d}x \quad (|b|\neq|c|)$.

解 不妨令

$$I_1=\int\frac{\mathrm{sh}(x\ln a)}{b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\mathrm{ch}(x\ln a)}{b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)}\mathrm{d}x,$$

则有

$$bI_1+cI_2=x,$$

$$\begin{aligned}cI_1+bI_2&=\frac{1}{\ln a}\int\frac{\mathrm{d}[b\mathrm{sh}(x\ln x)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]}{b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)}\\&=\frac{1}{\ln a}\ln|b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)|.\end{aligned}$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{b^2-c^2}\left[bx-c\,\frac{1}{\ln a}\ln|b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)|\right],$$

$$I_2=\frac{1}{b^2-c^2}\left[b\,\frac{1}{\ln a}\ln|b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)|-cx\right].$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=b_1I_1+c_1I_2\\&=\frac{bb_1-cc_1}{b^2-c^2}x+\frac{bc_1-cb_1}{b^2-c^2}\frac{1}{\ln a}\ln|b\mathrm{sh}(x\ln a)\\&\quad+c\mathrm{ch}(x\ln a)|+C'.\end{aligned}$$

此类积分比较复杂,这里不一一赘述了.

3.4.2 含有$[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^n$ $(n>1)$的积分

首先来证明两个递推公式.

定理 1 设 b,c 为常数,$|c|\neq|b|$,n 为大于 1 的正整数,并令

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^n}$$

则有如下递推公式:

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(c^2-b^2)}\Big[(n-2)J_{n-2}$$
$$+\frac{1}{\ln a}\frac{c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}}\Big]. \tag{1}$$

证 由

$$J_n=\frac{1}{\ln a}\int\frac{\mathrm{d}[c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)]}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n+1}}$$
$$=\frac{1}{\ln a}\frac{c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n+1}}$$
$$+(n+1)\int\frac{[c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{sh}(x\ln a)]^2}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n+2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\ln a}\frac{c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n+1}}$$
$$-(n+1)\int\frac{(c^2-b^2)\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n+2}}+(n+1)J_n,$$

有
$$nJ_n=(n+1)(c^2-b^2)J_{n+2}$$
$$-\frac{1}{\ln a}\frac{c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n+1}}.$$

用 $n-2$ 代替上式中的 n,得

$$(n-2)J_{n-2}=(n-1)(c^2-b^2)J_n$$
$$-\frac{1}{\ln a}\frac{c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}}.$$

故得递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(c^2-b^2)}\Big[(n-2)J_{n-2}$$
$$+\frac{1}{\ln a}\frac{c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}}\Big].$$

定理 2 令 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^n}$,

$$A=\frac{a_1b-cb_1}{b^2-c^2},\quad B=\frac{a_1c-b_1b}{b^2-c^2},$$

则有如下递推公式:

$$I=\int\frac{a_1\mathrm{sh}(x\ln a)+b_1\mathrm{ch}(x\ln a)}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^n}\mathrm{d}x$$

$$=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}}. \qquad (2)$$

证 令
$$I_1=\int\frac{\mathrm{sh}(x\ln a)\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^n},$$
$$I_2=\int\frac{\mathrm{ch}(x\ln a)\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^n},$$

则有
$$bI_1+cI_2=J_{n-1},$$
$$cI_1+bI_2=\frac{1}{\ln a}\int\frac{\mathrm{d}[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^n}$$
$$=\frac{1}{\ln a}\left(-\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}}.$$

所以有
$$I_1=\frac{b}{b^2-c^2}J_{n-1}+\frac{c}{(b^2-c^2)\ln a}\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}},$$
$$I_2=\frac{c}{c^2-b^2}J_{n-1}-\frac{b}{(b^2-c^2)\ln a}\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}}.$$

于是有
$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{a_1b-cb_1}{b^2-c^2}J_{n-1}+\frac{a_1c-b_1b}{b^2-c^2}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}}\\&=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}}.\end{aligned}$$

由递推公式(1)立刻得到
$$J_2=\frac{1}{c^2-b^2}\frac{1}{\ln a}\frac{c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)}{b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)}+C. \qquad (3)$$

例 3 求
$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)][c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)]}.$$

解 令

$$I_1=\int\frac{\mathrm{sh}^2(x\ln a)\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)][c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)]},$$

$$I_2=\int\frac{\mathrm{ch}^2(x\ln a)\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)][c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)]},$$

则有

$$\begin{aligned}b^2I_1-c^2I_2&=\int\frac{b\mathrm{sh}(x\ln a)-c\mathrm{ch}(x\ln a)}{c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)}\mathrm{d}x\\&=\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}\ln|c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)|-\frac{2bc}{b^2-c^2}x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c^2I_1-b^2I_2&=\int\frac{c\mathrm{sh}(x\ln a)-b\mathrm{ch}(x\ln a)}{b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)}\mathrm{d}x\\&=\frac{2bc}{b^2-c^2}x-\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}\ln|a\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)|.\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}I_1=\frac{1}{b^4-c^4}\Big[&\frac{(b^2+c^2)b^2}{b^2-c^2}\ln|c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)|\\&+\frac{(b^2+c^2)c^2}{b^2-c^2}\ln|b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)|-\frac{2b^3c+2bc^3}{b^2-c^2}x\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2=\frac{1}{b^4-c^4}\Big[&\frac{(b^2+c^2)c^2}{b^2-c^2}\ln|c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)|\\&-\frac{2b^3c+2bc^3}{b^2-c^2}x+\frac{(b^2+c^2)b^2}{b^2-c^2}\ln|b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)|\Big].\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=I_2-I_1\\&=\frac{(b^2+c^2)c^2-(b^2+c^2)b^2}{(b^2-c^2)(b^4-c^4)}\ln|c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)|\\&\quad+\frac{(b^2+c^2)b^2-(b^2+c^2)c^2}{(b^2-c^2)(b^4-c^4)}\ln|b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)|+C\\&=\frac{1}{b^2-c^2}\ln\frac{b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)}{c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)}+C.\end{aligned}$$

由于双曲型函数式比较繁杂，加上用组合积分法求解的过程

与双曲函数有理式的积分方法差不多，因此这里仅举两例，不再多作阐述了.

3.5 双曲函数与反双曲函数的积分

双曲函数、反双曲函数的定义分别如表 3.1、表 3.2 所示.

表 3.1 双曲函数的定义

函数名称	记　号	定义与表达式
双曲正弦	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
双曲余弦	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
双曲正切	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
双曲余切	$\operatorname{cth} x$	$\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
双曲正割	$\operatorname{sech} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$
双曲余割	$\operatorname{csch} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$

表 3.2 反双曲函数的定义

函数名称	记　　号	对数表达式
反双曲正弦	$\operatorname{arsh} x$	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
反双曲余弦	$\operatorname{arch} x$	$\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})\quad(\lvert x\rvert\geqslant 1)$
反双曲正切	$\operatorname{arth} x$	$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\quad(\lvert x\rvert<1)$
反双曲余切	$\operatorname{arcth} x$	$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}\quad(\lvert x\rvert>1)$
反双曲正割	$\operatorname{arsech} x$	$\pm\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\quad(0<\lvert x\rvert\leqslant 1)$
反双曲余割	$\operatorname{arcsch} x$	$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\quad(x\neq 0)$

用普通的积分法很容易求得

$$\int \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{d}x=\mathrm{ch}\, x+C,\quad \int \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{d}x=\mathrm{sh}\, x+C.$$

用凑微法十分容易地求出双曲正切与双曲余切的积分，即

$$\begin{aligned}\int \mathrm{th}\, x\, \mathrm{d}x &=\int \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{dch}\, x}{\mathrm{ch}\, x}=\ln|\mathrm{ch}\, x|+C_1\\&=\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})+C\quad (C=C_1-\ln 2).\end{aligned}$$

同样有 $$\int \mathrm{cth}\, x\, \mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}\mathrm{d}x=\ln|\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}|+C.$$

双曲正割和双曲余割的积分也易求出，即

$$\int \mathrm{sech}\, x\, \mathrm{d}x =\int \frac{2\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=2\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=2\arctan \mathrm{e}^x+C.$$

同样有

$$\int \mathrm{cech} x \mathrm{d}x =\int \frac{2\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}=2\int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-1}=\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right|+C.$$

关于反双曲函数的积分要难一些，下面来逐一讨论.

例 1 求 $\int \mathrm{arsh}\, x\, \mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \mathrm{arsh}\, x\, \mathrm{d}x &=\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x\\&=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int x\mathrm{d}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\\&=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}\\&=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}+C.\end{aligned}$$

例 2 求 $\int \mathrm{arch}\, x\, \mathrm{d}x$ （反函数 $y>0$).

解
$$\begin{aligned}\int \mathrm{arch}\, x\, \mathrm{d}x &=\int \ln(x+\sqrt{x^2-1})\mathrm{d}x\\&=x\ln(x+\sqrt{x^2-1})-\int x\mathrm{d}\ln(x+\sqrt{x^2-1})\\&=x\ln(x+\sqrt{x^2-1})-\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=x\ln(x+\sqrt{x^2-1})-\sqrt{x^2-1}+C.$$

例 3 求 $\int \operatorname{arth} x\,\mathrm{d}x \quad (|x|<1)$.

解 $$\int \operatorname{arth} x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int \ln(1+x)\mathrm{d}x-\int \ln(1-x)\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[x\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)\right]+C.$$

同样可得

$$\int \operatorname{arcth} x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[x\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(x^2-1)\right]+C.$$

例 4 求 $\int \operatorname{arsech} x\,\mathrm{d}x \quad (0<|x|\leqslant 1, y>0)$.

解 $$\int \operatorname{arsech} x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int[\ln(1+\sqrt{1-x^2})-\ln(1-\sqrt{1-x^2})]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}+x+C.$$

同样可求得

$$\int \operatorname{arcsch} x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

综上所述，得到双曲函数与反双曲函数积分表（见表 3.3），以便读者查阅.

表 3.3 双曲函数与反双曲函数积分表

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$

续表

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\operatorname{th} x$	$\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$ 或 $\ln(\operatorname{ch} x)$
$\operatorname{cth} x$	$\ln(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$ 或 $\ln(\operatorname{sh} x)$
$\operatorname{sech} x$	$2\arctan \mathrm{e}^x$
$\operatorname{csch} x$	$\ln \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$
$\operatorname{arsh} x$	$x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}$
$\operatorname{arch} x$ $(y>0)$	$x\ln(x+\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}$ $(\lvert x\rvert\geqslant 1)$
$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{2}[x\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)]$ $(\lvert x\rvert<1)$
$\operatorname{arcth} x$	$\frac{1}{2}[x\ln\frac{1+x}{x-1}+\ln(x^2-1)]$ $(\lvert x\rvert>1)$
$\operatorname{arsech} x$ $(y>0)$	$\frac{1}{2}x\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}+x$ $(0<\lvert x\rvert\leqslant 1)$
$\operatorname{arcsch} x$	$\frac{1}{2}x\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-x}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

注:1. 积分结果中省去了积分常数 C.

2. $\ln\frac{1+x}{1-x}$是指 $\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$,其他类似.

第 4 章　一类无理函数的积分

一些简单的无理函数的积分，可用换元法将积分化为有理函数或三角函数的积分来求解．但是，有些比较复杂的无理函数的积分，用换元法化为有理函数或三角函数的积分后，用传统的方法求积分还是比较困难，有些甚至无法“积”出来．因此，需探求新的积分方法，即本章所要介绍的如何使用组合积分法来求这类无理函数的积分．

例 1　求$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+2\sqrt{1-x^2}}$.

解　此题如果用传统的方法求解，即如下图 4.1 所示．

$$\boxed{\text{原积分}} \xrightarrow{\text{三角代换}} \boxed{\text{三角函数的积分}} \xrightarrow{\text{万能代换}} \boxed{\text{有理式积分}}$$

图 4.1　用传统方法求积分框图

作三角变换

$$x=\sin t,\quad \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t,$$

则原积分可变为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+2\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{3\sin t+2\cos t}. \tag{1}$$

再对右边积分作万能代换，即令 $\tan\frac{t}{2}=u$，则有

$$\cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \sin t=\frac{2u}{1+u^2},\quad \mathrm{d}t=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

代入式(1)右边即得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+2\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{3\sin t+2\cos t}=\int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

$$=\int\frac{(1-u^2)\mathrm{d}u}{(3u+1-u^2)(1+u^2)}.$$

要求出上式右边有理函数的积分是相当困难的，如果采用组合积分法，将是十分方便的. 对式(1)右边积分，可令

$$I=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{3\sin t+2\cos t},\quad J=\int\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{3\sin t+2\cos t},$$

则有 $2I+3J=\int\frac{2\cos t+3\sin t}{3\sin t+2\cos t}\mathrm{d}t=t$ （不计一常数之差，以下同），

$$\tag{2}$$

$$3I-2J=\int\frac{3\cos t-2\sin t}{3\sin t+2\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(3\sin t+2\cos t)}{3\sin t+2\cos t}$$

$$=\ln|3\sin t+2\cos t|. \tag{3}$$

所以有 $$I=\frac{1}{13}(2t+3\ln|3\sin t+2\cos t|)+C.$$

又由题设 $\sin t=x$，则

$$\cos t=\sqrt{1-x^2},\quad t=\arcsin x,$$

故得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3x+2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{13}(2\arcsin x+3\ln|3x+2\sqrt{1-x^2}|)+C.$$

例 2 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$.

解 作变换 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，则原积分可变换为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{(2+t)(1+t)}.$$

对于上式右边的积分可用传统的分项法(即部分分式法)求解，虽然不麻烦，但用组合积分法更简便. 可令

$$I=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(2+t)(1+t)},\quad J=\int\frac{\mathrm{d}t}{(2+t)(1+t)}$$

则有

$$I+J=\int\frac{\mathrm{d}t}{2+t}=\ln|2+t|,$$

$$I+2J=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln|1+t|.$$

所以有 $$I=2\ln|2+t|-\ln|1+t|+C_1.$$

故得
$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\\
&=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(2+t)(1+t)}=2I\\
&=4\ln|2+t|-2\ln|1+t|+2C_1\\
&\xlongequal{\text{回代 } t=\sqrt{x}}\ln\frac{(2+\sqrt{x})^4}{(1+\sqrt{x})^2}+C\quad (C=2C_1).
\end{aligned}$$

像上面两例那样对一类无理式的积分，可考虑使用组合积分法求解. 特别对比较复杂的情形用组合积分法求解更方便. 对于这类无理函数的积分，其求法如下图 4.2 所示.

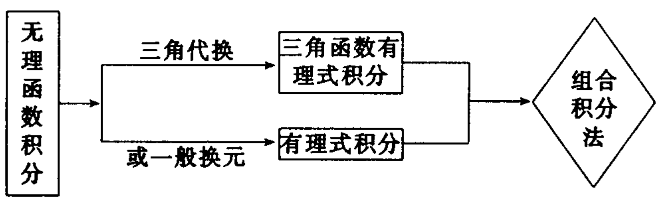

图 4.2　用组合积分法求积分框图

下面通过对一些无理函数的积分的例子的讲述，进一步地阐明如何使用组合积分法求一类无理函数的积分.

4.1　含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的无理式的积分

对于含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的无理式的积分，可作三角变换，令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$，将此无理式的积分转化为三角函数的积分，然后用组合积分法求之.

例 3　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$.

解　作三角变换，设 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}.$$

对于上式右边的积分，可令

$$I=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t},\quad J=\int\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t},$$

则有
$$I+J=\int\frac{\cos t+\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=t,$$

$$I-J=\int\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t}=\ln|\sin t+\cos t|.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}[t+\ln|\sin t+\cos t|]+C_1.$$

又由题设知 $a\sin t=x$，则

$$\sin t=\frac{x}{a},\quad \cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},\quad t=\arcsin x,$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}[t+\ln|\sin t+\cos t|]+C_1\\&=\frac{1}{2}\left[\arcsin x+\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|\right]+C_1\\&=\frac{1}{2}[\arcsin x+\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|]+C\quad\left(C=C_1-\frac{1}{2}\ln a\right).\end{aligned}$$

对于一般情形的积分，如例 4 所述.

例 4　求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b\sqrt{1-x^2}}$.

解　设 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{a\sin t+b\cos t},$$

再令
$$J=\int\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{a\sin t+b\cos t},$$
则有
$$bI+aJ=\int\frac{b\cos t+a\sin t}{a\sin t+b\cos t}\mathrm{d}t=t,$$
$$aI-bJ=\int\frac{a\cos t-b\sin t}{a\sin t+b\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin t+b\cos t)}{a\sin t+b\cos t}$$
$$=\ln|a\sin t+b\cos t|.$$
所以有
$$I=\frac{1}{a^2+b^2}[bt+a\ln|a\sin t+b\cos t|]+C.$$
又由题设知 $\sin t=x$,则
$$\cos t=\sqrt{1-x^2},\quad t=\arcsin x,$$
故得
$$I=\frac{1}{a^2+b^2}[b\arcsin x+a\ln|ax+b\sqrt{1-x^2}|]+C.$$
对于更一般情形的积分,如例 5 所述.

例 5 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$.

解 设 $x=a\sin t$,则 $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为
$$I=\int\frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{a^2\sin t+ab\cos t}=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{a\sin t+b\cos t}.$$
由例 4 的结论知
$$I=\frac{1}{a^2+b^2}\ln[bt+a\ln|a\sin t+b\cos t|]+C_1.$$
又由题设知 $x=a\sin t$,则
$$\sin t=\frac{x}{a},\quad \cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},\quad t=\arcsin\frac{x}{a},$$
故得
$$I=\frac{1}{a^2+b^2}\ln\left[b\arcsin\frac{x}{a}+a\ln\left|x+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right|\right]+C_1$$
$$=\frac{1}{a^2+b^2}\ln\left[b\arcsin\frac{x}{a}+a\ln\left|ax+b\sqrt{a^2-x^2}\right|\right]+C$$

$$\left(C=C_1-\frac{1}{a^2+b^2}\ln a\right).$$

例 6 求 $I=\int\frac{x\mathrm{d}x}{ax+b\sqrt{1-x^2}}$.

解 设 $x=\sin t$,则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\sin t\cos t\,\mathrm{d}t}{a\sin t+b\cos t}. \tag{1}$$

再令

$$I_1=\int\frac{\cos^2 t\,\mathrm{d}t}{a\sin t+b\cos t},\quad I_2=\int\frac{\sin^2 t\,\mathrm{d}t}{a\sin t+b\cos t},$$

于是便有

$$a^2I_2+2abI+b^2I_1=\int(a\sin t+b\cos t)\mathrm{d}t=b\sin t-a\cos t, \tag{2}$$

$$a^2I_2-b^2I_1=\int(a\sin t-b\cos t)\mathrm{d}t=-(b\sin t+a\cos t), \tag{3}$$

$$I_2+I_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{a\sin t+b\cos t}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left(\tan\frac{t+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right). \tag{4}$$

(2)+(3)得

$$a^2I_2+abI=-a\cos t,$$

即

$$I=-\frac{1}{b}(\cos t+aI_2).$$

又(3)+(4)×b^2,得

$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left(\tan\frac{t+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right)-b\sin t-a\cos t\right]$$

所以有

$$I=-\frac{1}{b}\cos t-\frac{a}{b}\frac{1}{a^2+b^2}$$

$$\cdot\left[\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left(\tan\frac{t+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right)-b\sin t-a\cos t\right],$$

又由题设知 $\sin t=x$,则

$$\cos t=\sqrt{1-x^2},\quad t=\arcsin x,$$

于是有

$$I=-\frac{1}{b}\sqrt{1-x^2}-\frac{a}{b(a^2+b^2)}$$

$$\cdot\left[\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left(\tan\frac{\arcsin x+\arctan\dfrac{b}{a}}{2}\right)-bx-a\sqrt{1-x^2}\right]+C.$$

例 7 求 $I=\int\frac{x}{1-x^2+x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 设 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$，原积分可化为

$$I=\int\frac{\sin t\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t+\sin t\cos t}=\int\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t.$$

再令
$$J=\int\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t,$$

则有
$$I+J=\int\frac{\sin t+\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t=t,$$

$$J-I=\int\frac{\mathrm{d}(\cos t+\sin t)}{\cos t+\sin t}=\ln|\cos t+\sin t|.$$

所以有
$$I=\frac{1}{2}(t+\ln|\cos t+\sin t|)+C.$$

又由题设知 $\sin t=x$，则

$$\cos t=\sqrt{1-x^2},\quad t=\arcsin t,$$

于是有
$$I=\frac{1}{2}[\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1-x^2})]+C.$$

例 8 求 $I=\int\frac{(1-x^2)\mathrm{d}x}{1+x\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|\neq 1).$

解 作变换 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\cos^3 t\,\mathrm{d}t}{1+\sin t\cos t}.$$

再令
$$J=\int\frac{\sin^3 t\,\mathrm{d}t}{1+\sin t\cos t},$$

则有

$$
\begin{aligned}
I+J &=\int \frac{(\cos^3 t+\sin^3 t)}{1+\sin t \cos t}\mathrm{d}t \\
&=\int \frac{(\cos t+\sin t)(1-\sin t \cos t)}{1+\sin t \cos t}\mathrm{d}t \\
&=\int \frac{(\cos t+\sin t)(2-2\sin t \cos t)}{2+2\sin t \cos t}\mathrm{d}t \\
&=\int \frac{[1+(\sin t-\cos t)^2](\cos t+\sin t)}{3-(\sin t-\cos t)^2}\mathrm{d}t \\
&=\int \frac{1+(\sin t-\cos t)^2}{3-(\sin t-\cos t)^2}\mathrm{d}(\sin t-\cos t) \\
&\xlongequal{\text{令 } u=\sin t-\cos t}\int \frac{1+u^2}{3-u^2}\mathrm{d}u \\
&=\int \frac{4-(3-u^2)}{3-u^2}\mathrm{d}u=\int \frac{4\mathrm{d}u}{3-u^2}-\int \mathrm{d}u \\
&=\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+u}{\sqrt{3}-u}\right|-u \\
&\xlongequal{\text{回代 } u=\sin t-\cos t}\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sin t-\cos t}{\sqrt{3}-\sin t+\cos t}\right| \\
&\qquad -\sin t+\cos t.
\end{aligned}
$$

$$
I-J=\int \frac{\cos^3 t-\sin^3 t}{1+\sin t \cos t}\mathrm{d}t=\int (\cos t-\sin t)\mathrm{d}t=\sin t+\cos t.
$$

所以有

$$
\begin{aligned}
I &=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sin t-\cos t}{\sqrt{3}-\sin t+\cos t}\right|\right. \\
&\qquad \left.-\sin t+\cos t+\sin t+\cos t\right)+C \\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sin t-\cos t}{\sqrt{3}-\sin t+\cos t}\right|+\cos t+C \\
&\xlongequal[\cos t=\sqrt{1-x^2}]{\text{回代 } \sin t=x}\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}-x+\sqrt{1-x^2}}\right|+\sqrt{1-x^2}+C.
\end{aligned}
$$

例 9 求 $I=\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{ax+b\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 设 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\cos^2 t}{a\sin t+b\cos t}\mathrm{d}t.$$

再令 $$J=\int\frac{\sin^2 t}{a\sin t+b\cos t}\mathrm{d}t,$$

则有

$$I+J=\int\frac{\mathrm{d}t}{a\sin t+b\cos t}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left(\tan\frac{t+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}b^2I-a^2J&=\int\frac{b^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t}{a\sin t+b\cos t}\mathrm{d}t=\int(b\cos t-a\sin t)\mathrm{d}t\\&=b\sin t+a\cos t.\end{aligned}$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left(\tan\frac{t+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right)+b\sin t+a\cos t\right]+C.$$

又由题设 $\sin t=x$,则

$$\cos t=\sqrt{1-x^2},\quad t=\arcsin x,$$

故得

$$I=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left(\tan\frac{\arcsin x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right)+bx+a\sqrt{1-x^2}\right]+C.$$

例 10 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{1-x^2}}$.

解 设 $x=\sin t$,则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1+\sin t+\cos t}.$$

再令 $$J=\int\frac{\sin t}{1+\sin t+\cos t}\mathrm{d}t,$$

则有 $$I+J+\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t+\cos t}=t,$$

即 $$I+J=t-\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t+\cos t}=t-\ln\left|1+\tan\frac{t}{2}\right|,$$

$$I-J=\int\frac{\cos t-\sin t}{1+\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(1+\sin t+\cos t)}{1+\sin t+\cos t}$$
$$=\ln|1+\sin t+\cos t|.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\left(t+\ln|1+\sin t+\cos t|-\ln\left|1+\tan\frac{t}{2}\right|\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}(t+\ln|1+\cos t|)+C$$
$$\xlongequal[\cos t=\sqrt{1-x^2}]{\text{回代 } t=\arcsin x}\frac{1}{2}[\arcsin x+\ln(1+\sqrt{1-x^2})]+C.$$

组合积分法应用很广泛，它巧妙地运用了解方程组的方法来求一类难度大的积分. 有一种观点则认为，研究积分的求法无多大意义，真正碰到了难度大的积分，查表就行了，何必费神呢?不过这里要提醒读者，我们介绍组合积分法的初衷，就是要解决在传统的积分表中查不出来的难度大的积分. 再说，掌握一种新的积分方法对于加强基础训练也是大有益处的.

习　题　4.1

求下列无理式的不定积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{1-x^2}}$；　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{9-x^2}}$；

(3) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int\frac{x}{2x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

4.2　含有$\sqrt{x^2+a^2}$的无理式的积分

对于含有无理式 $\sqrt{x^2+a^2}$的积分，可作换元，设 $x=a\operatorname{sh} t$，则

$dx=a\text{ch }t\,dt$，然后将积分转化为双曲函数有理式的积分，用组合积分法求之.

例 1 求 $I=\int\frac{dx}{2x+\sqrt{x^2+9}}$.

解 设 $x=3\text{sh }t$，则 $dx=3\text{ch }t\,dt$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{3\text{ch }t\,dt}{6\text{sh }t+\sqrt{9\text{sh}^2 t+9}}=\int\frac{\text{ch }t\,dt}{2\text{sh }t+\text{ch }t}.$$

再令
$$J=\int\frac{\text{sh }t\,dt}{2\text{sh }t+\text{ch }t},$$

则有
$$I+2J=\int\frac{\text{ch }t+2\text{sh }t}{2\text{sh }t+\text{ch }t}dt=t,$$

$$\begin{aligned}2I+J&=\int\frac{2\text{ch }t+\text{sh }t}{2\text{sh }t+\text{ch }t}dt=\int\frac{d(2\text{sh }t+\text{ch }t)}{2\text{sh }t+\text{ch }t}\\&=\ln(2\text{sh }t+\text{ch }t).\end{aligned}$$

解方程组便有

$$I=\frac{1}{3}[2\ln(2\text{sh }t+\text{ch }t)-t]+C_1. \qquad (1)$$

又由题设知 $x=3\text{sh }t$，则

$$\text{sh }t=\frac{x}{3},\quad \text{ch }t=\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{x^2+9},$$

$$t=\text{arsh }\frac{x}{3}=\ln\left[\frac{x}{3}+\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\right]=\ln(x+\sqrt{x^2+9})-\ln 3, \qquad (2)$$

将式(2)代入式(1)，便有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{3}\left[2\ln\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{x^2+9}\right)-\ln(x+\sqrt{x^2+9})-\ln 3\right]+C_1\\&=\frac{2}{3}\ln(2x+\sqrt{x^2+9})-\frac{1}{3}\ln(x+\sqrt{x^2+9})+C\\&\qquad (C=C_1-\ln 3).\end{aligned}$$

一般情形下的积分如例 2 所述，用组合积分法解非常方便.

例 2 求 $I=\int\frac{dx}{ax+b\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0$ 且 $|a|\neq|b|)$.

解 设 $x=a\operatorname{sh} t$, $\mathrm{d}x=a\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$,则原积分可变为

$$I=\int\frac{a\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{a^2\operatorname{sh} t+ab\operatorname{ch} t}=\int\frac{\operatorname{ch} t}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

再令

$$J=\int\frac{\operatorname{sh} t}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t,$$

则

$$bI+aJ=\int\frac{b\operatorname{ch} t+a\operatorname{sh} t}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t=t,$$

$$\begin{aligned}aI+bJ&=\int\frac{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t)}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}\\&=\ln(a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t).\end{aligned}$$

解方程组,得

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t)-bt]+C_1. \tag{2}$$

又因为由题设知 $x=a\operatorname{sh} t$,则

$$\operatorname{sh} t=\frac{x}{a},\quad \operatorname{ch} t=\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2},$$

$$\begin{aligned}t&=\operatorname{arsh}\frac{x}{a}=\ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right]\\&=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\ln a.\end{aligned} \tag{3}$$

将式(3)代入式(2)便有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(ax+b\sqrt{x^2+a^2})-a\ln a\\&\quad-b\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-b\ln a]+C_1,\\&=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(ax+b\sqrt{x^2+a^2})\\&\quad-b\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]+C\quad\left(C=C_1+\frac{\ln[a(a+b)]}{a^2-b^2}\right).\end{aligned}$$

例 3 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b\sqrt{x^2+1}}$ $(|a|\neq|b|)$.

解 设 $x=\operatorname{sh} t$,则 $\mathrm{d}x=\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}.$$

由例 2 的结论不难得到

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t)-bt]+C_1. \tag{1}$$

又因为由题设知 $x=\operatorname{sh} t$，则

$$\operatorname{ch} t=\sqrt{x^2+1},t=\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}), \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)便有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(ax+b\sqrt{x^2+1})-b\ln(x+\sqrt{x^2+1})]+C.$$

比较例 2 与例 3，其被积函数在形式上差不多，但结果不一样，例 3 较复杂，而例 3 则简单得多.

当 $|a|=|b|$ 时，上例也可用组合积分法求解. 例 3 可变为

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+a\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+1}}\quad(a\neq 0).$$

可设 $x=\operatorname{sh} t$，则 $\mathrm{d}x=\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I_1=\int\frac{\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t.$$

可令
$$I_2=\int\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t,$$

则有
$$I_1+I_2=\int\frac{\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t=t,$$

$$I_1-I_2=\int\frac{\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t=\int\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right).$$

于是便有
$$I=\frac{1}{a}I_1=\frac{1}{2a}\left(t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)+C.$$

又由题设知 $x=\operatorname{sh} t$，则

$$\operatorname{ch} t=\sqrt{x^2+1},\quad t=\operatorname{arsh} t=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$\mathrm{e}^{t}=x+\sqrt{x^2+1},\quad \mathrm{e}^{-2t}=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2a}\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{2(x+\sqrt{x^2+1})^2}\right]+C.$$

例 4 求 $I=\int\frac{\sqrt{x^2+1}\,dx}{ax+b\sqrt{x^2+1}}\quad(a^2>b^2)$.

解 设 $x=\operatorname{sh}t$，则 $dx=\operatorname{ch}t\,dt$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\operatorname{ch}^2t\,dt}{a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t}.$$

再令

$$J=\int\frac{\operatorname{sh}^2t\,dt}{a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t},$$

则有

$$a^2J-b^2I=\int(a\operatorname{sh}t-b\operatorname{ch}t)dt=a\operatorname{ch}t-b\operatorname{sh}t,$$

$$I-J=\int\frac{\operatorname{ch}^2t-\operatorname{sh}^2t}{a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t}dt=\int\frac{dt}{a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}e^t\right)$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{2a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}e^t\right)+a\operatorname{ch}t-b\operatorname{sh}t\right]+C.$$

又由题设

$$x=\operatorname{sh}t,\operatorname{ch}t=\sqrt{x^2+1},e^t=x+\sqrt{x^2+1},$$

于是有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}(x+\sqrt{x^2+1})\right]$$

$$+\frac{1}{a^2-b^2}(a\sqrt{x^2+1}-bx)+C.$$

例 5 求 $I=\int\frac{x\,dx}{1+x^2+x\sqrt{x^2+1}}$.

解 设 $x=\operatorname{sh}t$，则 $dx=\operatorname{ch}t\,dt$，所以原积分可变为

$$I=\int\frac{\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t\,dt}{\operatorname{ch}^2t+\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t}=\int\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t}dt.$$

再令
$$J=\int\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t,$$
则有
$$I+J=t,$$
$$I-J=\int\frac{\operatorname{sh} t-\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t=-\int\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t=-\int\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}.$$
所以有
$$I=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)+C.$$
又因为由题设知
$$x=\operatorname{sh} t,\quad \operatorname{ch} t=\sqrt{x^2+1},$$
$$\mathrm{e}^{-2t}=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2},\quad t=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$
故得
$$I=\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\frac{1}{4}\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}+C.$$

一般情形下的积分如例 6 所述.

例 6 求 $I=\int\frac{x\mathrm{d}x}{a(1+x^2)+bx\sqrt{1+x^2}}$ $(|a|\neq|b|)$.

解 设 $x=\operatorname{sh} t$,则 $\mathrm{d}x=\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为
$$I=\int\frac{\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{ch}^2 t+b\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t}=\int\frac{\operatorname{sh} t}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t.$$
再令
$$J=\int\frac{\operatorname{ch} t}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t.$$
则
$$bI+aJ=t,$$
$$\begin{aligned}aI+bJ&=\int\frac{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t)}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}\\&=\ln(a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t).\end{aligned}$$
所以有
$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t)-bt]+C.$$
又由题设知 $\operatorname{sh} t=x$,则
$$\operatorname{ch} t=\sqrt{x^2+1},\quad t=\operatorname{arsh} t=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$
所以有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(bx+a\sqrt{x^2+1})-b\ln(x+\sqrt{x^2+1})]+C.$$

更一般的情形的积分如例 7 所述.

例 7 求 $I=\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+a^2+x\sqrt{x^2+a^2}}\quad(a>0)$.

解 设 $x=a\operatorname{sh}t$,则 $\mathrm{d}x=a\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{a\operatorname{sh}t\,a\operatorname{ch}t}{a^2\operatorname{ch}^2t+a^2\operatorname{ch}t\operatorname{sh}t}\mathrm{d}t=\int\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t}\mathrm{d}t.$$

再令
$$J=\int\frac{\operatorname{ch}t}{\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t}\mathrm{d}t.$$

由例 5 的结论可知

$$I=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)+C_1.$$

又由题设知 $\operatorname{sh}t=x/a$,则,

$$\operatorname{ch}t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a},\quad t=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right),$$

$$\mathrm{e}^{-2t}=\frac{1}{\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)^2}=\frac{a^2}{(x+\sqrt{x^2+a^2})^2},$$

所以有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\left[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\ln a+\frac{1}{2}\frac{a^2}{(x+\sqrt{x^2+a^2})^2}\right]+C_1\\&=\frac{1}{2}[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]+\left[\frac{a^2}{2(x+\sqrt{x^2+a^2})^2}\right]+C\\&\qquad\left(C=C_1-\frac{1}{2}\ln a\right).\end{aligned}$$

例 8 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{x^2+1}}$.

解 设 $x=\operatorname{sh}t$,则 $\mathrm{d}x=\operatorname{ch}t\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t}{1+\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t}.$$

再令
$$J=\int\frac{\mathrm{sh}\ t\ \mathrm{d}\ t}{1+\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t},$$
则有
$$I+J=\int\frac{\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t}{1+\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t}=\ln(1+\mathrm{e}^t),$$
$$\begin{aligned}I-J&=\int\frac{\mathrm{ch}\ t-\mathrm{sh}\ t}{1+\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)}=\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^t}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\right)\mathrm{d}t\\&=\int\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t}=-\mathrm{e}^{-t}-t+\ln(1+\mathrm{e}^t).\end{aligned}$$
所以有
$$I=\frac{1}{2}[2\ln(1+\mathrm{e}^t)-\mathrm{e}^{-t}-t]+C.$$
又由题设知 $\mathrm{sh}\ t=x$，则
$$\mathrm{ch}\ t=\sqrt{x^2+1},\quad t=\mathrm{arsh}\ x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$
$$\mathrm{e}^{-t}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}},$$
故得
$$\begin{aligned}I=\frac{1}{2}[&2\ln(1+x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&-\ln(x+\sqrt{x^2+1})]+C.\end{aligned}$$

通过对上述各例的求解，将含有 $\sqrt{x^2+a^2}$ 的这类无理式的积分，用双曲换元法将无理式的积分转化为双曲函数有理式的积分，然后用组合积分法求之，得到许多不常见的结论. 这在积分理论发展上将起到一定的作用.

习　题　4.2

求下列无理式的不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{x^2+1}}$；　(2) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{x^2-16}}$；

(3) $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{3x+2\sqrt{x^2+1}}$；　(4) $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{3x+2\sqrt{x^2+4}}$；

(5) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{x^2+1}}$；　　　　(6) $\int \frac{\sqrt{x^2+16}\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{x^2+16}}$.

4.3　含有$\sqrt{x^2-a^2}$的无理式的积分

对于含有根式$\sqrt{x^2-a^2}$的无理式的积分，可采用三角换元法，令 $x=a\sec t$，则 $\mathrm{d}x=a\tan t\sec t\,\mathrm{d}t$，将无理式的积分转化为三角函数的积分. 但往往在比较复杂的情况下，比如是关于 $\sec t$ 与 $\tan t$的有理式，积分就比较困难. 这里仿 4.2 节内容，来用双曲变换，将无理式的积分转化为双曲函数的积分，然后用组合积分法求之. 举例说明如下.

例 1　求$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{x^2-1}}$.

解　如果作变换 $x=\sec t$，则 $\mathrm{d}x=\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$，则原积分可变为

$$\int \frac{\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{2\sec t+\tan t}\mathrm{d}t=\int \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos t(2+\sin t)}.$$

上积分直接使用组合积分法较困难，但如果进一步地作万能代换，结果如何呢？

对上式作变换 $\tan\frac{t}{2}=u$，则

$$\mathrm{d}u=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2},\quad \cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \sin t=\frac{2u}{1+u^2},$$

于是原积分可变为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{2u\mathrm{d}u}{(1-u^2)(1+u+u^2)}.$$

对于右边的有理式的积分，可用组合积分法或用传统的部分分式法都可以求出，但都比较麻烦. 加上回代时要进行两次代换，这就更加繁琐. 这种换元法不可取. 下面采用双曲换元法.

设 $x=\mathrm{ch}\,t$，则

$$\mathrm{d}x=\mathrm{sh}\ t\ \mathrm{d}t \quad (x\geqslant 0, t\geqslant 1),$$

于是原积分可变为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\mathrm{sh}\ t\ \mathrm{d}t}{2\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t}.$$

对于右边的积分,可令

$$I=\int\frac{\mathrm{sh}\ t}{2\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t}\mathrm{d}t,\quad J=\int\frac{\mathrm{ch}\ t}{2\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t}\mathrm{d}t,$$

则有

$$I+2J=\int\frac{\mathrm{sh}\ t+2\mathrm{ch}\ t}{2\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t}\mathrm{d}t=t,$$

$$\begin{aligned}2I+J&=\int\frac{2\mathrm{sh}\ t+\mathrm{ch}\ t}{2\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(2\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t)}{2\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t}\\&=\ln(2\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t).\end{aligned}$$

于是便有

$$I=\frac{1}{3}[2\ln(2\mathrm{ch}\ t+\mathrm{sh}\ t)-t]+C.$$

又由题设 $x=\mathrm{ch}\ t$,则

$$\mathrm{sh}\ t=\sqrt{x^2-1},\quad t=\mathrm{arch}\ x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

故得

$$I=\frac{1}{3}[2\ln(2x+\sqrt{x^2-1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})]+C.$$

从上述两种积分变换分析,显然用后一种变化较简单,由此可以看出组合积分法在求较复杂的无理式的积分时,有很多的优势,应引起读者重视.

一般情形下的积分如例 2 所述.

例 2 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b\sqrt{x^2-1}}$ $(|a|\neq|b|)$.

解 设 $x=\mathrm{ch}\ t$,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{sh}\ t\ \mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\mathrm{sh}\ t\ \mathrm{d}t}{a\mathrm{ch}\ t+b\mathrm{sh}\ t}.$$

再令

$$J=\int\frac{\mathrm{ch}\ t\ \mathrm{d}t}{a\mathrm{ch}\ t+b\mathrm{sh}\ t},$$

则有
$$bI+aJ=\int\frac{a\text{ch }t+b\text{sh }t}{a\text{ch }t+b\text{sh }t}\mathrm{d}t=t,$$
$$aI+bJ=\int\frac{a\text{sh }t+b\text{ch }t}{a\text{ch }t+b\text{sh }t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(a\text{ch }t+b\text{sh }t)}{a\text{ch }t+b\text{sh }t}$$
$$=\ln(a\text{ch }t+b\text{sh }t).$$
所以有
$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(a\text{ch }t+b\text{sh }t)-bt]+C.$$
又由题设知 $\text{ch }t=x$,则
$$\text{sh }t=\sqrt{x^2-1},\quad t=\text{arsh }t=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$
故得
$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(ax+b\sqrt{x^2-1})-b(\ln(x+\sqrt{x^2-1})]+C.$$
更一般的情形下的积分,如例 3 所述.

例 3 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b\sqrt{x^2-a^2}}\quad(|a|\neq|b|)$.

解法 1 设 $x=a\text{ch }t$,则 $\mathrm{d}x=a\text{sh }t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为
$$I=\int\frac{a\text{sh }t\,\mathrm{d}t}{a^2\text{ch }t+ab\text{sh }t}=\int\frac{\text{sh }t\,\mathrm{d}t}{a\text{ch }t+b\text{sh }t}.$$
由例 2 的结论有
$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(a\text{ch }t+b\text{sh }t)-bt]+C_1.$$
又由题设知 $x=a\text{ch }t$,则
$$\text{ch }t=\frac{x}{a},\quad \text{sh }t=\frac{\sqrt{x^2-1}}{a},\quad t=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{a}\right),$$
故得
$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\left[a\ln\left(x+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-1}\right)-b\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{a}\right)\right]+C_1$$
$$=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(ax+b\sqrt{x^2-1})-a\ln a$$

$$-b\ln(x+\sqrt{x^2-1})+b\ln a]+C_1$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(ax+b\sqrt{x^2-1})-b\ln(x+\sqrt{x^2-1})]+C$$

$$\left(C=C_1+\frac{b\ln a-a\ln a}{a^2-b^2}\right).$$

例 3 在 $|a|\neq|b|$ 时可以用上述方法求积分，如果 $|a|=|b|$ 时，则可按解法 2 处理.

解法 2 如果 $a=b$，则得到下列积分

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

设 $x=a\operatorname{ch}t$，则 $\mathrm{d}x=a\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t$，于是原积分可以变为

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{a\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{ch}t+a\operatorname{sh}t}=\frac{1}{a}\int\frac{\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t}.$$

再令
$$I_1=\int\frac{\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t},\quad I_2=\int\frac{\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t},$$

则有
$$I_1+I_2=\int\frac{\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t}{\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t}\mathrm{d}t=t,$$

$$I_1-I_2=\int\frac{\operatorname{sh}t-\operatorname{ch}t}{\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t}\mathrm{d}t=\int\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t$$

$$=-\int\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)+C_1.$$

又由题设知 $x=a\operatorname{ch}t$，则

$$\operatorname{ch}t=\frac{x}{a},\quad \operatorname{sh}t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},\quad t=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2}\right),$$

故得

$$I_1=\frac{1}{2}\left[\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-\ln a+\frac{1}{2}\,\frac{a^2}{(x+\sqrt{x^2-a^2})^2}\right]+C_1.$$

于是有

$$I=\frac{1}{2a}\left[\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+\frac{a^2}{2(x+\sqrt{x^2-a^2})^2}\right]+C$$

$$\left(C=C_1-\frac{1}{2a}\ln a\right).$$

例 4 求 $I=\int\frac{\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x}{ax+b\sqrt{x^2-1}}\quad(b^2>a^2)$.

解 设 $x=\operatorname{ch} t$，则 $\mathrm{d}x=\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\operatorname{sh}^2 t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}.$$

再令

$$J=\int\frac{\operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t},$$

则有

$$\begin{aligned}J-I&=\int\frac{\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}t}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}\\&=\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\mathrm{e}^t\right),\end{aligned}$$

$$a^2J-b^2I=\int(a\operatorname{ch} t-b\operatorname{sh} t)\mathrm{d}t=a\operatorname{sh} t-b\operatorname{ch} t.$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\left[-\frac{2a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\mathrm{e}^t\right)+a\operatorname{sh} t-b\operatorname{ch} t\right]+C.$$

又由题设知 $x=\operatorname{ch} t$，则

$$\operatorname{sh} t=\sqrt{x^2-1},\quad \mathrm{e}^t=(x+\sqrt{x^2-1}),$$

故得

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{a^2-b^2}\left[-\frac{2a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}(x+\sqrt{x^2-1})\right]\\&+\frac{1}{a^2-b^2}(a\sqrt{x^2-1}-bx)+C.\end{aligned}$$

例 5 求 $I=\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2-1+x\sqrt{x^2-1}}$.

解 设 $x=\operatorname{ch} t$，则 $\mathrm{d}x=\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}^2 t+\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t}=\int\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t.$$

再令
$$J=\int\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t,$$
则有
$$I+J=t,$$
$$I-J=\int\frac{\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t=\int\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}.$$
所以有
$$I=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)+C.$$
又由题设知
$$\operatorname{ch} t=x,\quad t=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\quad \mathrm{e}^{-2t}=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^2},$$
故得
$$I=\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})-\frac{1}{4}\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}+C.$$
一般情形下的积分，如例 6 所述.

例 6 求 $I=\int\frac{x\mathrm{d}x}{a(x^2-1)+bx\sqrt{x^2-1}}$.

解 设 $x=\operatorname{ch} t$，则 $\mathrm{d}x=\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t$，于是原积分可变为
$$I=\int\frac{\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{sh}^2 t+b\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t}=\int\frac{\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}.$$
再令
$$J=\int\frac{\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t},$$
则有
$$bI+aJ=t,$$
$$aI+bJ=\int\frac{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t)}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}$$
$$=\ln(a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t).$$
所以有
$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t)-bt]+C.$$
又由题设知 $\operatorname{ch} t=x$，则
$$\operatorname{sh} t=\sqrt{x^2-1},\quad t=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$
故得

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(bx+a\sqrt{x^2-1})-b\ln(x+\sqrt{x^2-1})]+C.$$

例 7 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{x^2-1}}$.

解 设 $x=\mathrm{ch}\,t$,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t}{1+\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t},$$

再令

$$J=\int\frac{\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t}{1+\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t},$$

则有

$$I+J=\int\frac{\mathrm{sh}\,t+\mathrm{ch}\,t}{1+\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}=\ln(1+\mathrm{e}^t),$$

$$\begin{aligned}I-J&=\int\frac{\mathrm{sh}\,t-\mathrm{ch}\,t}{1+\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t}\mathrm{d}t=\int\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t\\&=\int\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}-\frac{1}{\mathrm{e}^t}\right)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-t}+t-\ln(1+\mathrm{e}^t).\end{aligned}$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t}+t)+C.$$

又由题设知 $\mathrm{ch}\,t=x$,则

$$\mathrm{e}^{-t}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}},\quad t=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

故得

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right]+C.$$

到现在为止,我们已对含有二次根式的无理式的积分用组合积分法求解问题进行了讨论,得到了一些重要的积分公式,可以用它来指导今后求类似的无理式的积分.

习 题 4.3

求下列无理式的不定积分:

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{3x+5\sqrt{x^2-1}}$; (2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{3x+5\sqrt{x^2-4}}$;

(3) $\int\frac{x\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{x^2-1}}$; (4) $\int\frac{x\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{x^2-9}}$;

(5) $\int\frac{\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{x^2-1}}$; (6) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{x^2-9}}$.

4.4 含有$\sqrt[n]{x}$的无理式的积分

对于被积函数含有 $\sqrt[n]{x}$ 的无理式的积分，也可以用组合积分法求解. 其程序为，先通过根式换元法将无理式的积分转化为有理式的积分，然后用组合积分法求之.

例 1 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}$.

解 设 $x=t^2$，则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)}.$$

再令
$$J=\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)},$$

则有
$$I+2J=2\int\frac{\mathrm{d}t}{2+t}=2\ln|2+t|,$$

$$I+4J=2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=2\ln|1+t|.$$

所以有
$$I=4\ln|2+t|-2\ln|1+t|+C.$$

又由题设知 $\sqrt{x}=t$，故得

$$I=\ln(2+\sqrt{x})^4-\ln(1+\sqrt{x})^2+C=\ln\frac{(2+\sqrt{x})^4}{(1+\sqrt{x})^2}+C.$$

例 2 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt{x})(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}$.

解 设 $x=t^2$，则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是原积分变为

$$I=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)(3+t)}.$$

再令
$$I_1=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)(3+t)},$$
$$I_2=\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)(3+t)},$$
$$I_3=\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)(3+t)},$$
则有
$$I_2+3I_1+2I_3=\int\frac{\mathrm{d}t}{3+t}=\ln(3+t),$$
$$I_2+4I_1+3I_3=\int\frac{\mathrm{d}t}{2+t}=\ln(2+t),$$
$$I_2+5I_1+6I_3=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln(1+t).$$
解方程组,得
$$I_1=2\ln(2+t)-\frac{1}{2}\ln(1+t)-\frac{3}{2}\ln(3+t)+C_1.$$
所以有
$$I=2I_1=4\ln(2+t)-\ln(1+t)-3\ln(3+t)+C\quad(C=2C_1).$$
由题设知 $\sqrt{x}=t$,故得
$$\begin{aligned}I&=4\ln(2+\sqrt{x})-\ln(1+\sqrt{x})-3\ln(3+\sqrt{x})+C\\&=\ln\frac{(2+\sqrt{x})^4}{(1+\sqrt{x})(3+\sqrt{x})^3}+C.\end{aligned}$$
关于例 1 的一般情形,讨论如例 3 所述.

例 3 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+\sqrt{x})(b+\sqrt{x})}\quad(a\neq b)$.

解 设 $x=t^2$,则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,于是原积分可变为
$$I=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(a+t)(b+t)}.$$
再令
$$I_1=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(a+t)(b+t)},\quad I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{(a+t)(b+t)},$$
则有
$$I_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{b+t}=\ln|b+t|,$$
$$I_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{a+t}=\ln|a+t|.$$

所以有 $$I_1=\frac{1}{a-b}(a\ln|a+t|-b\ln|b+t|)+C_1.$$

故得

$$I=2I_2=\frac{2}{a-b}(a\ln|a+t|-b\ln|b+t|)+C\quad(C=2C_1).$$

由题设知 $t=\sqrt{x}$，所以有

$$I=\frac{2}{a-b}(a\ln|a+\sqrt{x}|-b\ln|b+\sqrt{x}|)+C.$$

对于更一般情形的积分，如例 4 所述.

例 4 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\sqrt{x})(b+a\sqrt{x})}\quad(a^2\neq b^2).$

解 设 $x=t^2$，则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\sqrt{x})(b+a\sqrt{x})}=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{(a+bt)(b+at)}.$$

再令 $$I_1=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(a+bt)(b+at)},\quad I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{(a+bt)(b+at)},$$

则有 $$aI_2+bI_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{b+at}=\frac{1}{a}\ln|b+at|,$$

$$bI_2+aI_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{a+bt}=\frac{1}{b}\ln|a+bt|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{b}\ln|a+bt|-\frac{b}{a}\ln|b+at|\right]+C_1.$$

由题设知 $\sqrt{x}=t$，故得

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{b}\ln|a+b\sqrt{x}|-\frac{b}{a}\ln|b+a\sqrt{x}|\right]+C_1.$$

即

$$\begin{aligned}I&=2I_1\\&=\frac{2}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{b}\ln|a+b\sqrt{x}|-\frac{b}{a}\ln|b+a\sqrt{x}|\right]+C\\&\qquad\qquad(C=2C_1).\end{aligned}$$

例 5 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{6+\sqrt{x}-x}$.

解 设 $x=t^2$,则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{6+\sqrt{x}-x}=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{(2+t)(3-t)}.$$

令
$$I_1=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(2+t)(3-t)},\quad I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{(2+t)(3-t)},$$

则有
$$2I_2+I_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{3-t}=-\ln|3-t|,$$

$$3I_2-I_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{2+t}=\ln|2+t|.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{5}[-3\ln|3-t|-2\ln|2+t|]+C_1.$$

又由题设知 $\sqrt{x}=t$,故得

$$I=2I_1=-\frac{2}{5}[3\ln|3-\sqrt{x}|+2\ln|2+\sqrt{x}|]+C$$
$$(C=2C_1).$$

例 6 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})(2+\sqrt[3]{x})}$.

解 设 $x=t^3$,则 $\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})(2+\sqrt[3]{x})}=3\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)}.$$

令
$$I_1=\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)},\quad I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)},$$

则有
$$I_2-I_1=\int\frac{1-t}{2+t}\mathrm{d}t=\int\frac{3-(2+t)}{2+t}\mathrm{d}t$$
$$=3\int\frac{\mathrm{d}t}{2+t}-\int\mathrm{d}t=3\ln|2+t|-t,$$

$$4I_2-I_1=\int\frac{2-t}{1+t}\mathrm{d}t=\int\frac{3-(1+t)}{1+t}\mathrm{d}t$$
$$=3\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}-\int\mathrm{d}t=3\ln(1+t)-t.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{3}[3\ln|1+t|-t-12\ln|2+t|+4t]+C_1$$
$$=\frac{1}{3}[3\ln|1+t|-12\ln|2+t|+3t]+C_1$$
$$=\ln|1+t|-4\ln|2+t|+t+C_1.$$

由题设知 $\sqrt[3]{x}=t$，于是有

$$I_1=\ln|1+\sqrt[3]{x}|-4\ln|2+\sqrt[3]{x}|+\sqrt[3]{x}+C_1.$$

即

$$I=3I_1=3\ln|1+\sqrt[3]{x}|-12\ln|2+\sqrt[3]{x}|+3\sqrt[3]{x}+C \quad (C=3C_1).$$

由例 6 可以看出，开方次数越高，无理式的积分越复杂，因此只就较简单的情形介绍一下，给读者一种思考问题的方法. 对于积分问题只要有耐心，再难的问题一般都可以解决.

习　题　4.4

求下列无理式的不定积分：

(1) $\int\frac{dx}{(2+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}$;　　(2) $\int\frac{dx}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$;

(3) $\int\frac{dx}{(3+2\sqrt{x})(2+3\sqrt{x})}$;　　(4) $\int\frac{dx}{6+5\sqrt{x}+x}$;

(5) $\int\frac{dx}{(3+\sqrt[3]{x})(2+\sqrt[3]{x})}$;　　(6) $\int\frac{dx}{(3+\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})}$.

4.5　含有$\sqrt{ax+b}$的无理式的积分

与含有 $\sqrt[n]{x}$ 的无理式的积分相似，对于含有 $\sqrt{ax+b}$的无理式的积分，也是先作变换，令 $\sqrt{ax+b}=t$，则 $ax+b=t^2$，$x=\frac{1}{a}(t^2-$

b)，$\mathrm{d}x=\frac{2}{a}t\mathrm{d}t$，再代入原积分式得到关于 t 的有理函数的积分，然后用组合积分法求之.

例 1 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+2)}$.

解 设 $\sqrt{x+1}=t$，则 $x=t^2-1$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+2)}=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}.$$

由 4.4 节例 1 的结论，有

$$\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}=4\ln|t+2|-2\ln|1+t|+C,$$

由题设便有
$$t=\sqrt{x+1}$$
故得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+2)}=\ln\frac{(2+\sqrt{x+1})^4}{(1+\sqrt{x+1})^2}+C.$$

对于一般情形的积分，如例 2 所述

例 2 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{ax+b}+m)(\sqrt{ax+b}+n)}\quad(m\neq n)$.

解 设 $\sqrt{ax+b}=t$，则 $x=\frac{1}{a}(t^2-b)$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{a}t\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\frac{2}{a}t\mathrm{d}t}{(t+m)(t+n)}=\frac{2}{a}\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t+m)(t+n)}.$$

再令
$$I_1=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t+m)(t+n)},\quad I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+m)(t+n)},$$

则有
$$I_1+mI_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{t+n}=\ln|t+n|,$$
$$I_1+nI_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{t+m}=\ln|t+m|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{n-m}(n\ln|t+n|-m\ln|t+m|)+C_1.$$

由题设知 $\sqrt{ax+b}=t$，则

$$I_1=\frac{1}{n-m}(n\ln|\sqrt{ax+b}+n|-m\ln|\sqrt{ax+b}+m|)+C_1.$$

故得

$$I=\frac{2}{a}I_1=\frac{2}{a(n-m)}(n\ln|\sqrt{ax+b}+n|$$

$$-m\ln|\sqrt{ax+b}+m|)+C\quad\left(C=\frac{2}{a}C_1\right).$$

例 3 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}t}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+1}+3)}$.

解 可设 $\sqrt{x+1}=t$，则 $x=t^2-1$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)(t+3)}.$$

由 4.4 节例 2 的结论，有

$$I=\ln\frac{(t+2)^4}{(t+1)(t+3)^3}+C,$$

由题设便有

$$I=\ln\frac{(\sqrt{x+1}+2)^4}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+3)^3}+C.$$

例 4 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2\sqrt{x+3}}$.

解 设 $\sqrt{x+3}=t$，则 $x=t^2-3$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2+2t-3}=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t+3)(t-1)}.$$

再令 $$I_1=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t+3)(t-1)},\quad I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+3)(t-1)},$$

则有 $$I_1+3I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}=\ln|t-1|,$$

$$I_1-I_2=\int\frac{dt}{t+3}=\ln|t+3|.$$

所以有 $$I_1=\frac{1}{4}(\ln|t-1|+3\ln|t+3|)+C_1.$$

由题设知 $\sqrt{x+3}=t$,故得

$$I_1=\frac{1}{4}(\ln|\sqrt{x+3}-1|+3\ln|\sqrt{x+3}+3|)+C_1.$$

而 $I=2I_1$,所以有

$$I=\frac{1}{2}[\ln|\sqrt{x+3}-1|+3\ln(\sqrt{x+3}+3)]+C\quad(C=2C_1).$$

例 5 求 $I=\int\frac{dx}{(3+\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})^2}$.

解 设 $\sqrt{x+1}=t$,则 $x=t^2-1$,$dx=2tdt$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{2tdt}{(3+t)(2+t)^2}.$$

再令 $$I_1=\int\frac{tdt}{(3+t)(2+t)^2},$$

$$I_2=\int\frac{t^2dt}{(3+t)(2+t)^2},$$

$$I_3=\int\frac{dt}{(3+t)(2+t)^2}.$$

则有 $$3I_3+I_1=\int\frac{dt}{(2+t)^2}=-\frac{1}{2+t},\tag{1}$$

$$I_2+4I_1+4I_3=\int\frac{dt}{3+t}=\ln|3+t|,\tag{2}$$

$$I_2+5I_1+6I_3=\int\frac{dt}{2+t}=\ln|2+t|.\tag{3}$$

解方程组,可得

$$I_1=3\ln\left|\frac{2+t}{3+t}\right|+\frac{2}{2+t}+C_1.$$

又由 $I=2I_1$,得

$$I=6\ln\left|\frac{2+t}{3+t}\right|+\frac{4}{2+t}+C\quad(C=2C_1).$$

由题设知 $\sqrt{x+1}=t$，故得

$$I=\ln\left(\frac{2+\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x+1}}\right)^6+\frac{4}{2+\sqrt{x+1}}+C.$$

例 6 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt{x-1})(x+\sqrt{x-1})}$.

解 设 $\sqrt{x-1}=t$，则 $x=1+t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t+t^2)}.$$

可令

$$I_1=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t+t^2)},$$

$$I_2=\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t+t^2)},$$

$$I_3=\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t+t^2)}.$$

则有

$$I_3+I_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}},$$

$$I_3+I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln|1+t|,$$

$$I_3+3I_1+2I_2=\int\frac{1+2t}{1+t+t^2}\mathrm{d}t=\ln|1+t+t^2|.$$

解方程组，得

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{1}{2}\left[\ln|1+t+t^2|-2\ln|1+t|+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]+C_1\\&=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+t+t^2}{(1+t)^2}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]+C_1.\end{aligned}$$

又由 $I=2I_1$ 得

$$I=\ln\left|\frac{1+t+t^2}{(1+t)^2}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\quad(C=2C_1).$$

由题设可知 $\sqrt{x-1}=t$，故得

$$I=\ln\left|\frac{1+\sqrt{x-1}+x-1}{(1+\sqrt{x-1})^2}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\ln\frac{|x+\sqrt{x-1}|}{(1+\sqrt{x-1})^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

例 7 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+2\sqrt{x-1}+x)(x+\sqrt{x-1})}$.

解 设 $\sqrt{x-1}=t$,则 $x=1+t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{(2+2t+t^2)(1+t+t^2)}.$$

可令

$$I_1=\int\frac{t^3\mathrm{d}t}{(2+2t+t^2)(1+t+t^2)},\quad I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{(2+2t+t^2)(1+t+t^2)},$$

$$I_3=\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(2+2t+t^2)(1+t+t^2)},\quad I_4=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(2+2t+t^2)(1+t+t^2)},$$

则有下列方程组

$$I_1+2I_3+I_2+2I_4=\int\frac{(1+t)\mathrm{d}t}{2+2t+t^2}=\frac{1}{2}\ln|2+2t+t^2|,$$

$$I_3+I_2+I_4=\int\frac{\mathrm{d}t}{2+2t+t^2}=\arctan(1+t),$$

$$2I_1+5I_3+2I_2+6I_4=\int\frac{1+2t}{1+t+t^2}\mathrm{d}t=\ln|1+t+t^2|,$$

$$I_3+2I_2+2I_4=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}.$$

设 $$b_1=\frac{1}{2}\ln|2+2t+t^2|,\quad b_2=\arctan(1+t),$$

$$b_3=\ln|1+t+t^2|,\quad b_4=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}},$$

于是用行初等变换解上线性方程组,得

$$\widetilde{A}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&2&2&b_1\\0&1&1&1&b_2\\2&2&5&6&b_3\\0&2&1&2&b_4\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&2&2&b_1\\0&1&1&1&b_2\\0&0&1&2&b_3-2b_1\\0&2&1&2&b_4\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 2 & 2 & b_1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3-2b_1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & b_4-2b_2\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 2 & 2 & b_1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3-2b_1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & b_3-2b_1+b_4-2b_2\end{array}\right],$$

所以有

$$\begin{aligned}I_4&=\frac{1}{2}(b_3-2b_1+b_4-2b_2)\\&=\frac{1}{2}\Big[\ln|1+t+t^2|-2\arctan(1+t)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\\&\quad-\ln|2+2t+t^2|\Big]+C_1\\&=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+t+t^2}{2+2t+t^2}\right|-2\arctan(1+t)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]+C_1.\end{aligned}$$

由题设可知 $\sqrt{x-1}=t$，故得

$$I_4=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x+\sqrt{x-1}}{1+x+2\sqrt{x-1}}\right|-2\arctan(1+\sqrt{x-1})\right.$$
$$\left.+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}\right]+C_1.$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=2I_4\\&=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x-1}}{1+x+\sqrt{x-1}}\right|-2\arctan(1+\sqrt{x-1})\\&\quad+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}+C\quad(C=2C_1).\end{aligned}$$

从上例可以看出，对于较复杂的无理式的积分用组合积分法求解，并不简单，此题用分项法求解更加困难. 对于组合积分法作为一种新的积分方法，如果读者能熟练掌握，求积分时就多了一种

选择.

习　题　4.5

求下列无理式的不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}$；

(2) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+2)}$；

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+x)}$；

(4) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2-\sqrt{x+1})(3+\sqrt{x+1})}$.

第5章　组合积分法在其他方面的应用

利用组合积分法可以求出较复杂的三角函数有理式、指数函数有理式和双曲函数有理式的积分，并得到了许多重要的积分公式. 本章要介绍的是组合积分法在其他方面的一些应用.

5.1　求导积分法

对于某些函数乘积的积分，可考虑使用分部积分法求解. 但对于某些比较复杂的函数的乘积的积分，用分部积分法来求就比较麻烦，而用将要介绍的求积分的新方法——求导积分法，可以很迅速，准确地求出这些积分，达到事半功倍的效果.

5.1.1　含有 e^x 与三角函数乘积的积分

被积函数中含有指数函数 e^x 与三角函数 $\sin x$, $\cos x$ 乘积的积分，在传统的数学中，用分部积分法求之. 一般来说，如果系数比较简单，用分部积分法是可行的，但如果系数比较复杂，使用分部积分法就繁琐了. 求导积分法将很好地解决这一问题. 先看一个简单的例子.

例1　求 $\int e^x\cos x\,dx$.

解　令　$I=\int e^x\cos x\,dx$,　$J=\int e^x\sin x\,dx$,

因为

$$(e^x\cos x)'=e^x\cos x-e^x\sin x,$$

$$(e^x\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x,$$

两边积分，得含有积分的方程组(不计一常数之差，以下同)

$$I-J=e^x\cos x,$$

$$I+J=\mathrm{e}^{x}\sin x,$$

两式相加便有

$$I=\int \mathrm{e}^{x}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}(\cos x+\sin x)+C.$$

像例 1 这样先求导、后积分的方法称为**求导积分法**. 这种积分法的关键在于先设所求积分为 I,并找出与之对应的(结构相似)辅助积分 J,对两积分的被积函数分别求导,然后对两式分别积分后,代入题设即得到一个关于 I 与 J 的方程组,解之即得所求积分.

事实上,这个例子用分部积分法求也不难,但对于系数比较复杂的积分,应用分部积分法就不那么容易了,而使用求导积分法就会简单得多.

例 2 求 $I=\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$ (a,b 为常数).

解 令 $$J=\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,$$

因为 $$(\mathrm{e}^{ax}\cos bx)'=a\mathrm{e}^{ax}\cos bx-b\mathrm{e}^{ax}\sin bx,$$
$$(\mathrm{e}^{ax}\sin bx)'=a\mathrm{e}^{ax}\sin bx+b\mathrm{e}^{ax}\cos bx,$$

两边积分,得

$$aI-bJ=\mathrm{e}^{ax}\cos bx,$$
$$aJ+bI=\mathrm{e}^{ax}\sin bx.$$

于是有 $$I=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C.$$

同时不难得到

$$J=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C.$$

例 3 求 $I=\int x\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$ (a,b 为常数).

解 令 $$J=\int x\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,$$

因为

$$(x\mathrm{e}^{ax}\cos bx)'=\mathrm{e}^{ax}\cos bx+ax\mathrm{e}^{ax}\cos bx-bx\mathrm{e}^{ax}\sin bx,$$

$$(xe^{ax}\cos bx)'=e^{ax}\sin bx+axe^{ax}\sin bx+bxe^{ax}\cos bx,$$

两边积分，得

$$aI-bJ=xe^{ax}\cos bx-\int e^{ax}\cos bx\,dx,$$

$$aJ+bI=xe^{ax}\sin bx-\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

于是，由例 2 的结论便有

$$I=\frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$$
$$-\frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\cos bx+2ab\sin bx]+C.$$

同样有

$$J=\frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$$
$$-\frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\sin bx-2ab\cos bx]+C.$$

由例 2、例 3 引出如下重要递推公式.

定理 1 设 a,b 为常数，n 为非负整数，且

$$I_n=\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx,\quad J_n=\int x^n e^{ax}\sin bx\,dx,$$

则有递推公式

$$I_n=\frac{x^n e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)-\frac{n}{a^2+b^2}(aI_{n-1}+bJ_{n-1}),$$

$$J_n=\frac{x^n e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+\frac{n}{a^2+b^2}(bJ_{n-1}-aI_{n-1}).$$

证 因为

$$(x^n e^{ax}\cos bx)'=nx^{n-1}e^{ax}\cos bx+ax^n e^{ax}\cos bx-bx^n e^{ax}\sin bx,$$

$$(x^n e^{ax}\sin bx)'=nx^{n-1}e^{ax}\sin bx+ax^n e^{ax}\sin bx+bx^n e^{ax}\cos bx,$$

两边积分，得

$$aI_n-bJ_n=x^n e^{ax}\cos bx-nI_{n-1},$$

$$aJ_n+bI_n=x^n\sin bx-nJ_{n-1}.$$

于是有

$$I_n=\frac{x^n e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)-\frac{n}{a^2+b^2}(aI_{n-1}+bJ_{n-1}),$$

$$J_n=\frac{x^n e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+\frac{n}{a^2+b^2}(bI_{n-1}-aJ_{n-1}).$$

例 4 已知 $I=\int e^x\cos^2 x\,dx, J=\int e^x\sin^2 x\,dx$，求 I,J.

解 由例 2 的结论便有

$$I+J=\int e^x dx=e^x,$$

$$I-J=\int e^x(\cos^2 x-\sin^2 x)dx=\int e^x\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{5}e^x(\cos 2x+2\sin 2x).$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\left[e^x+\frac{1}{5}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)\right]+C$$

$$=\frac{e^x}{10}(5+\cos 2x+2\sin 2x)+C.$$

例 5 求 $I=\int e^{ax}(a_1\cos bx+a_2\sin bx)dx$.

解 设 $I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx$,
由例 2 的结论有

$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+a_2I_2\\&=\frac{a_1e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)\\&\quad+\frac{a_2e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C\\&=\frac{a_1b+a_2a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx+\frac{a_1a-a_2b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx+C.\end{aligned}$$

5.1.2 含有 a^x 与三角函数乘积的积分

对于一般指数函数 a^x $(a>0,a\neq1)$与三角函数 $\cos x$ $\sin x$ 乘积的积分也可以使用求导积分法来求解，而且比用分部积分法来求解方便得多.

例 6 求$\int a^x \cos x\,\mathrm{d}x$.

解 令 $I=\int a^x \cos x\,\mathrm{d}x$, $J=\int a^x \sin x\,\mathrm{d}x$,

因为 $(a^x \cos x)'=a^x \ln a \cos x-a^x \sin x$,

$(a^x \sin x)'=a^x \ln a \sin x+a^x \cos x$,

两边积分,得 $\ln aI-J=a^x \cos x$,

$\ln aJ+I=a^x \sin x$.

于是有 $I=\dfrac{a^x}{1+\ln^2 a}(\ln a \cos x+\sin x)+C$.

同样有 $J=\dfrac{ax}{1+\ln^2 a}(\ln a \sin x-\cos x)+C$.

当系数比较复杂时,使用此方法更为简便.

例 7 求 $I=\int a^{mx} \cos nx\,\mathrm{d}x$, $J=\int a^{mx} \sin nx\,\mathrm{d}x$.

解 因为

$$(a^{mx} \cos nx)'=ma^{mx} \ln a \cos nx-na^{mx} \sin nx,$$

$$(a^{mx} \sin nx)'=ma^{mx} \ln a \sin nx+na^{mx} \cos nx,$$

两边积分,得 $m\ln aI-nJ=a^{mx} \cos nx$,

$m\ln aJ+nI=a^{mx} \sin nx$.

于是有

$$I=\frac{a^{mx}}{m^2\ln^2 a+n^2}(m\ln a \cos nx+n\sin nx)+C,$$

$$I=\frac{a^{mx}}{m^2\ln^2 a+n^2}(m\ln a \sin nx-n\cos nx)+C.$$

例 8 求$\int xa^x \cos x\,\mathrm{d}x$.

解 令 $I=\int xa^x \cos x\,\mathrm{d}x$, $J=\int xa^x \sin x\,\mathrm{d}x$,

因为

$$(xa^x \cos x)'=a^x \cos x+\ln ax\, a^x \cos x-xa^x \sin x,$$

$$(xa^x \sin x)'=a^x \sin x+\ln ax\, a^x \sin x+xa^x \cos x,$$

两边积分，并由例 6 的结论，得

$$\ln aI-J=xa^x\cos x-\int a^x\cos x\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln aJ+I=xa^x\sin x-\int a^x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

于是有

$$I=\frac{xa^x}{\ln^2a+1}(\ln a\cos x+\sin x)$$
$$-\frac{a^x}{(\ln^2a+1)^2}[(\ln^2a-1)\cos x+2\ln a\sin x]+C.$$

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时有

$$\int x\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(x\cos x+x\sin x-\sin x)+C.$$

定理 2 设 n 为非负整数，a,b 为常数，并令

$$I_n=\int x^na^x\cos x\,\mathrm{d}x,\quad J_n=\int x^na^x\sin x\,\mathrm{d}x,$$

则有递推公式

$$I_n=\frac{x^na^x}{\ln^2a+1}(\ln a\cos x+\sin x)-\frac{n}{\ln^2a+1}(\ln aI_{n-1}-J_{n-1}),$$

$$J_n=\frac{x^na^x}{\ln^2a+1}(\ln a\sin x-\cos x)+\frac{n}{\ln^2a+1}(I_{n-1}-\ln aJ_{n-1}).$$

证 因为

$$(x^na^x\cos x)'=nx^{n-1}a^x\cos x+\ln a\,x^na^x\cos x-x^na^x\sin x,$$
$$(x^na^x\sin x)'=nx^{n-1}a^x\sin x+\ln a\,x^na^x\sin x+x^na^x\cos x,$$

两边积分，得

$$\ln a\,I_n-J_n=x^na^x\cos x-nI_{n-1},$$
$$\ln a\,J_n+I_n=x^na^x\sin x-nJ_{n-1}.$$

于是便有

$$I_n=\frac{x^na^x}{\ln^2a+1}(\ln a\cos x+\sin x)-\frac{n}{\ln^2a+1}(\ln a\,I_{n-1}+J_{n-1}),$$

$$J_n=\frac{x^na^x}{\ln^2a+1}(\ln a\sin x-\cos x)+\frac{n}{\ln^2a+1}(I_{n-1}-\ln a\,J_{n-1}).$$

5.1.3 双曲函数与指数函数、三角函数乘积的积分

对于含有双曲函数 sh x,ch x 与指数函数 e^x,三角函数 sin x,cos x 乘积的积分,传统数学很少涉足.这里,我们应用求导积分法来求解这类积分,收到了很好的效果,这对于加强积分训练,提高解题能力是大有裨益的.

先介绍双曲函数与三角函数乘积的积分.

例 9 求$\int \mathrm{ch}\, x \cos x \, \mathrm{d}x$.

解 令
$$I=\int \mathrm{ch}\, x \cos x \, \mathrm{d}x,$$
$$J=\int \mathrm{sh}\, x \sin x \, \mathrm{d}x,$$

因为
$$(\mathrm{ch}\, x \sin x)'=\mathrm{sh}\, x \sin x+\mathrm{ch}\, x \cos x,$$
$$(\mathrm{sh}\, x \cos x)'=\mathrm{ch}\, x \cos x-\mathrm{sh}\, x \sin x,$$

两边积分,得
$$I+J=\mathrm{ch}\, x \sin x,$$
$$I-J=\mathrm{sh}\, x \cos x.$$

于是便有
$$I=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, x \sin x+\mathrm{sh}\, x \cos x)+C.$$

还可求出
$$J=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, x \sin x-\mathrm{sh}\, x \cos x)+C.$$

值得注意的是:双曲函数与三角函数乘积的积分比较复杂,下面就找辅助积分问题专门说明:

1) 找辅助积分时应注意,辅助积分是以双曲函数与三角函数乘积为被积函数,且两个函数分别为原积分两个函数的余函数.如果原积分的被积函数为 ch x cos x,则辅助积分的被积函数为 sh x sin x;如果原积分的被积函数为 ch x sin x,则辅助积分的被积函数为sh x cos x;

2) 在求导时不能直接对被积函数求导,如例 9 是分别对

$\text{ch}\,x\sin x$和$\text{sh}\,x\cos x$求导.

例 10 求$\int \text{sh}\,x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解 令
$$I=\int \text{sh}\,x\cos x\,\mathrm{d}x,$$
$$J=\int \text{ch}\,x\sin x\,\mathrm{d}x,$$
因为
$$(\text{sh}\,x\sin x)'=\text{ch}\,x\sin x+\text{sh}\,x\cos x,$$
$$(\text{ch}\,x\cos x)'=\text{sh}\,x\cos x-\text{ch}\,x\sin x,$$
两边积分,得
$$J+I=\text{sh}\,x\sin x,$$
$$I-J=\text{ch}\,x\cos x.$$
于是有
$$I=\frac{1}{2}(\text{sh}\,x\sin x+\text{ch}\,x\cos x)+C.$$
还可求出
$$J=\frac{1}{2}(\text{sh}\,x\sin x-\text{ch}\,x\cos x)+C.$$
对于系数比较复杂的情形也可以用求导积分法求解.

例 11 求$I=\int \text{sh}\,ax\cos bx\,\mathrm{d}x$.

解 令
$$J=\int \text{ch}\,ax\sin bx\,\mathrm{d}x,$$
因为
$$(\text{sh}\,ax\sin bx)'=a\text{ch}\,ax\sin bx+b\text{sh}\,ax\cos bx,$$
$$(\text{ch}\,ax\cos bx)'=a\text{sh}\,ax\cos bx-b\text{ch}\,ax\sin bx,$$
两边积分,得
$$aJ+bI=\text{sh}\,ax\sin bx,$$
$$aI-bJ=\text{ch}\,ax\cos bx.$$
于是有
$$I=\frac{1}{a^2+b^2}(a\text{ch}\,ax\cos bx+b\text{sh}\,ax\sin bx)+C.$$
$$J=\frac{1}{a^2+b^2}(a\text{sh}\,ax\sin bx-b\text{ch}\,ax\cos bx)+C.$$

例 12 求$I=\int x\text{ch}\,x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解 令 $$J=\int x\text{sh } x\sin x\,dx,$$

因为

$$(x\text{ch } x\sin x)'=\text{ch } x\sin x+x\text{sh } x\sin x+x\text{ch } x\cos x,$$

$$(x\text{sh } x\cos x)'=\text{sh } x\cos x+x\text{ch } x\cos x-x\text{sh } x\sin x,$$

两边积分，得

$$J+I=x\text{ch } x\sin x-\int\text{ch } x\sin x\,dx,$$

$$I-J=x\text{sh } x\cos x-\int\text{sh } x\cos x\,dx.$$

于是由例 10 的结论，有

$$I=\frac{x}{2}(\text{ch } x\sin x+\text{sh } x\cos x)-\text{sh } x\sin x+C.$$

例 13 求 $I=\int\text{ch}^2x\cos x\,dx$.

解 令 $$J=\int\text{sh}^2 x\cos x\,dx,$$

因为 $$I-J=\int\cos x\,dx=\sin x, \tag{1}$$

$$I+J=\int\text{ch } 2x\cos x\,dx. \tag{2}$$

对于积分$\int\text{ch } 2x\cos x\,dx$，可设

$$I_1=\int\text{ch } 2x\cos x\,dx,\quad I_2=\int\text{sh } 2x\sin x\,dx,$$

则有 $$(\text{ch } 2x\sin x)'=2\text{sh } 2x\sin x+\text{ch } 2x\cos x,$$

$$(\text{sh } 2x\cos x)'=2\text{ch } 2x\cos x-\text{sh } 2x\sin x,$$

两边积分，得

$$2I_2+I_1=\text{ch } 2x\sin x,$$

$$2I_1-I_2=\text{sh } 2x\cos x.$$

于是有 $$I_1=\frac{1}{5}(\text{ch } 2x\sin 2x+2\text{sh } 2x\cos x). \tag{3}$$

将式(3)代入式(2)，得

$$I+J=\frac{1}{5}(\operatorname{ch} 2x \sin x+2\operatorname{sh} 2x \cos x). \tag{4}$$

由式(1)和式(4),得

$$I=\frac{1}{10}(\operatorname{ch} 2x \sin x+2\operatorname{sh} 2x \cos x)+\frac{1}{2}\sin x+C.$$

再来讨论被积函数为指数函数 e^x 与双曲函数 $\operatorname{sh} x$,$\operatorname{ch} x$ 乘积的情形.

例 14 求$\int e^x \operatorname{ch} x\, dx$.

解法 1 令 $\quad I=\int e^x \operatorname{ch} x\, dx,\quad J=\int e^x \operatorname{sh} x\, dx,$

因为 $\quad I+J=\int e^x(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x},$

$$I-J=\int e^x(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)dx=\int dx=x,$$

所以有 $\quad I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+x\right)+C=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}x+C.$

解法 2 直接求积分.

$$\int e^x \operatorname{ch} x\, dx=\int e^x\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx=\frac{1}{2}\int(e^{2x}+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+x\right)+C=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{x}{2}+C.$$

上述两种方法繁简程度差不多,但如果系数比较复杂,可采用求导积分法比较简单.

例 15 求 $I=\int e^{ax}\operatorname{ch} bx\, dx\quad (|a|\neq|b|)$.

解 令 $\quad J=\int e^{ax}\operatorname{sh} bx\, dx,$

因为 $\quad (e^{ax}\operatorname{ch} bx)'=ae^{ax}\operatorname{ch} bx+be^{ax}\operatorname{sh} bx,$

$$(e^{ax}\operatorname{sh} bx)'=ae^{ax}\operatorname{sh} bx+be^{ax}\operatorname{ch} bx,$$

两边积分,得 $\quad aI+bJ=e^{ax}\operatorname{ch} bx,$

$$aJ+bI=e^{ax}\operatorname{sh} bx.$$

于是有 $\quad I=\frac{e^{ax}}{a^2-b^2}(a\operatorname{ch} bx-b\operatorname{sh} bx)+C.$

同样有 $$J=\frac{e^{ax}}{a^2-b^2}(a\text{sh }bx-b\text{ch }bx)+C.$$

对于被积函数为幂函数 x^n，指数函数 e^x 与双曲函数 ch x，sh x乘积的积分，也可以用求导积分法，如例 16.

例 16 求$\int xe^{ax}\text{ch }bx\mathrm{d}x \quad (|a|\neq|b|)$.

解 令 $I=\int xe^{ax}\text{ch }bx\,\mathrm{d}x$，$J=\int xe^{ax}\text{sh }bx\,\mathrm{d}x$，

因为

$$(xe^{ax}\text{ch }bx)'=e^{ax}\text{ch }bx+axe^{ax}\text{ch }bx+bxe^{ax}\text{sh }bx,$$

$$(xe^{ax}\text{sh }bx)'=e^{ax}\text{sh }bx+axe^{ax}\text{sh }bx+bxe^{ax}\text{ch }bx.$$

两边积分，得

$$aI+bJ=xe^{ax}\text{ch }bx-\int e^{ax}\text{ch }bx\,\mathrm{d}x,$$

$$aJ+bI=xe^{ax}\text{sh }bx-\int e^{ax}\text{sh }bx\,\mathrm{d}x.$$

由例 15 的结论，解方程组得

$$I=\frac{xe^{ax}}{a^2-b^2}(a\text{ch }bx-b\text{sh }bx)$$
$$-\frac{e^{ax}}{(a^2-b^2)^2}[(a^2+b^2)\text{ch }bx-2ab\text{sh }bx]+C.$$

由例 16 可引出如下递推公式.

定理 3 设 n 为非负整数，$|a|\neq|b|$，且令

$$I_n=\int x^ne^{ax}\text{ch }bx\,\mathrm{d}x,\quad J_n=\int x^ne^{ax}\text{sh }bx\,\mathrm{d}x,$$

则有递推公式

$$I_n=\frac{x^ne^{ax}}{a^2-b^2}(a\text{ch }bx-b\text{sh }bx)-\frac{n}{a^2-b^2}(aI_{n-1}-bJ_{n-1}),$$

$$J_n=\frac{x^ne^{ax}}{a^2-b^2}(a\text{sh }bx-b\text{ch }bx)-\frac{n}{a^2-b^2}(aJ_{n-1}-bI_{n-1}).$$

证 因为

$$(x^ne^{ax}\text{ch }bx)'=nx^{n-1}e^{ax}\text{ch }bx+ax^ne^{ax}\text{ch }bx+bx^ne^{ax}\text{sh }bx,$$

$$(x^n e^{ax}\operatorname{sh} bx)'=nx^{n-1}e^{ax}\operatorname{sh} bx+ax^n e^{ax}\operatorname{sh} bx+bx^n e^{ax}\operatorname{ch} bx,$$

两边积分，得

$$aI_n+bJ_n=x^n e^{ax}\operatorname{ch} bx-nI_{n-1},$$

$$aJ_n+bI_n=x^n e^{ax}\operatorname{sh} bx-nJ_{n-1}.$$

于是有

$$I_n=\frac{x^n e^{ax}}{a^2-b^2}(a\operatorname{ch} bx-b\operatorname{sh} bx)-\frac{n}{a^2-b^2}(aI_{n-1}-bJ_{n-1}),$$

$$J_n=\frac{x^n e^{ax}}{a^2-b^2}(a\operatorname{sh} bx-b\operatorname{ch} bx)-\frac{n}{a^2-b^2}(aJ_{n-1}-bI_{n-1}).$$

例 17 求$\int e^x\operatorname{ch}^2 x\,dx$.

解 令 $I=\int e^x\operatorname{ch}^2 x\,dx,\quad J=\int e^x\operatorname{sh}^2 x\,dx,$

则有

$$I-J=\int e^x dx=e^x,$$

$$I+J=\int e^x\operatorname{ch}2x dx=\frac{1}{6}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{-x}.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\left(e^x+\frac{1}{6}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{-x}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{12}e^{3x}-\frac{1}{4}e^{-x}+C.$$

应用求导积分法可以求许多被积函数为乘积形式的积分，这里不再一一列举了.

习　题　5.1

求下列不定积分：

(1) $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$;　　(2) $\int e^{\lambda t}\cos \omega t\,dt$;

(3) $\int x^2 e^{2x}\sin 3x\,dx$;　　(4) $\int xe^x\sin x\,dx$;

(5) $\int \operatorname{sh} ax\cos \omega x\,dx$;　　(6) $\int \operatorname{ch} 3x\cos 4x\,dx$;

(7) $\int x\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$;　　　　(8) $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x$.

5.2 有理函数的积分

组合积分法在求三角函数有理式、双曲函数有理式、指数函数有理式等积分中有很重要的应用. 后研究发现，一类无理式、三角函数与指数函数乘积、三角函数与双曲函数乘积的积分也可用组合积分法求解. 经过多年的实践探索，又发现一般有理函数的积分也可用组合积分法求解. 这样，组合积分法在求积分中应用就十分广泛了. 这种十分重要的积分方法，应该引起数学界同仁的重视与关注. 本节要介绍的是组合积分法在求有理式积分中的应用.

例 1 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-1)}$.

解 此题可用分部积分法求解，但也可用组合积分法求解.

令 $$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)},\quad J=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)},$$

于是有

$$I+J=\int\frac{(x+1)\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)}=\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1}=\ln|x-1|,$$

$$J-I=\int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)}=\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|.$$

两式相减便有

$$I=\frac{1}{2}[\ln|x-1|-\ln|x+1|]+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

对于比较复杂的情形，用组合积分法求解效果十分明显.

例 2 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(3x+1)(4x-5)}$.

解 令

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(3x+1)(4x+5)},\quad J=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(3x+1)(4x-5)},$$

于是有 $$3J+I=\int\frac{(3x+1)\mathrm{d}x}{(3x+1)(4x-5)}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{4}\mathrm{d}(4x-5)}{4x-5}=\frac{1}{4}\ln|4x-5|, \tag{1}$$

$$4J-5I=\int\frac{(4x-5)\mathrm{d}x}{(3x+1)(4x-5)}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(3x+1)}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln|3x+1|. \tag{2}$$

$4\times(1)-3\times(2)$，得

$$I=\frac{1}{19}[\ln|4x-5|-\ln|3x+1|]+C=\frac{1}{19}\ln\left|\frac{4x-5}{3x+1}\right|+C.$$

用组合积分法求有理式的积分，其关键也在于找出辅助积分.找辅助积分的方法，要根据分母两因子的具体情况而定，多做题，多练习，方能熟能生巧，运用自如.

例 3 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)(mx+n)}$.

解 令 $$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)(mx+n)},$$

$$J=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(ax+b)(mx+n)},$$

于是有

$$aJ+bI=\int\frac{(ax+b)\mathrm{d}x}{(ax+b)(mx+n)}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{m}\mathrm{d}(mx+n)}{(mx+n)}=\frac{1}{m}\ln|mx+n|, \tag{1}$$

$$mJ+nI=\int\frac{(mx+n)\mathrm{d}x}{(ax+b)(mx+n)}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)}{(ax+b)}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|. \tag{2}$$

$m\times(1)-a\times(2)$，得

$$I=\frac{1}{mb-na}[\ln|mx+n|-\ln|ax+b|]+C$$

$$=\frac{1}{mb-na}\ln\left|\frac{mx+n}{ax+b}\right|+C.$$

例 4 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}$.

解 令
$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)},$$

$$J=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)},$$

于是有

$$I+J=\int\frac{(1+x^2)\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}=\int\frac{\mathrm{d}(1+x)}{1+x}=\ln|1+x|,$$

$$J-I=\int\frac{(x^2-1)\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}=\int\frac{x-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\arctan x.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\left[\ln|1+x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\arctan x\right]+C.$$

例 5 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)(m+nx^2)}\quad(a>0,b>0,m>0,n>0)$.

解 令
$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)(m+nx^2)},$$

$$J=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(a+bx)(m+nx^2)},$$

$$mI+nJ=\int\frac{(m+nx^2)}{(a+bx)(m+nx^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\frac{1}{b}\mathrm{d}(ax+b)}{a+bx}=\frac{1}{b}\ln|a+bx|,\tag{1}$$

$$b^2J-a^2I=\int\frac{(b^2x^2-a^2)\mathrm{d}x}{(a+bx)(m+bx^2)}=\int\frac{(a+bx)(bx-a)\mathrm{d}x}{(a+bx)(m+nx^2)}$$

$$=\int\frac{(bx-a)\mathrm{d}x}{m+nx^2}=\int\frac{bx\mathrm{d}x}{m+nx^2}-\int\frac{a\mathrm{d}x}{m+nx^2}$$

$$=\frac{b}{2n}\int\frac{\mathrm{d}(m+nx^2)}{m+nx^2}-\int\frac{a\sqrt{\frac{m}{n}}\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{n}{m}}x\right)}{m\left[1+\left(\sqrt{\frac{n}{m}}x\right)^2\right]}$$

$$=\frac{b}{2n}\ln|m+nx^2|-\frac{a\sqrt{\frac{m}{n}}}{m}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{n}{m}}x\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{n}{m}}x\right)^2}$$

$$=\frac{b}{2n}\ln|m+nx^2|-\frac{a}{\sqrt{mn}}\arctan\sqrt{\frac{n}{m}}x. \tag{2}$$

$(1)\times b^2-(2)\times n$，得

$$I(b^2m+a^2n)=b\ln|a+bx|-\frac{b}{2}\ln|m+nx^2|$$
$$+\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\arctan\sqrt{\frac{n}{m}}x,$$

所以有 $$I=\frac{1}{b^2m+a^2n}\left[b\ln|a+bx|-\frac{b}{2}\ln(m+nx^2)\right.$$
$$\left.+\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\arctan\sqrt{\frac{n}{m}}x\right]+C.$$

例 6 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)(m+nx^2)}$ $(a,b,m,n>0)$.

解 令 $$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)(m+nx^2)},$$
$$J=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(a+bx^2)(m+nx^2)}.$$

于是便有

$$aI+bJ=\int\frac{(a+bx^2)\mathrm{d}x}{(a+bx^2)(m+nx^2)}$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{m+nx^2}=\sqrt{\frac{1}{nm}}\arctan\sqrt{\frac{n}{m}}x,$$
$$mI+nJ=\int\frac{(m+nx^2)\mathrm{d}x}{(a+bx^2)(m+nx^2)}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{b}{a}}x.$$

所以有

$$I=\frac{1}{na-mb}\left[\sqrt{\frac{n}{m}}\arctan\sqrt{\frac{n}{m}}x-\sqrt{\frac{b}{a}}\arctan\sqrt{\frac{b}{a}}x\right]+C.$$

例 7 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^3)}$.

解 令
$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^3)},$$
$$J=\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{x(1+x^3)}=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^3},$$

于是有
$$I+J=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|,$$

而
$$J=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x^3}{1+x^3}=\frac{1}{3}\ln|1+x^3|,$$

所以有
$$I=\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C.$$

从以上几例可以看出,找辅助积分要依分母因子的情形而定,一般来说,分母两个因子均为一次式,则令辅助积分的分子为一次幂函数;如果分母的因子有一个为二次式,则令辅助积分的分子为二次幂函数,分母与所求积分分母相同.以上积分是对于分母能分解因式为两个因子相乘的情形,如果是三个因子相乘也可以用组合积分法解,如例 8.

例 8 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

解 令
$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$
$$I_1=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$
$$I_2=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$

则有
$$2I+3I_1+I_2=\int\frac{(x^2+3x+2)\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3}=\ln|x+3|, \tag{1}$$

$$3I+4I_1+I_2=\int\frac{(x^2+4x+3)\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(x+2)}{x+2}=\ln|x+2|, \tag{2}$$

$$6I+5I_1+I_2=\int\frac{(x^2+5x+6)\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|, \tag{3}$$

解方程组，得

$$I=\frac{1}{2}\ln\frac{|(x+1)(x+3)|}{(x+2)^2}+C.$$

特别地，对于比较复杂的情形，用此法解极为方便.

例 9 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+m)(x+n)(x+l)}$.

解 令

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+m)(x+n)(x+l)},$$

$$I_1=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+m)(x+n)(x+l)},$$

$$I_2=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x+m)(x+n)(x+l)},$$

则有

$$mnI+(m+n)I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{d}(x+l)}{x+l}=\ln|x+l|, \tag{1}$$

$$mlI+(m+l)I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{d}(x+n)}{x+n}=\ln|x+n|, \tag{2}$$

$$nlI+(n+l)I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{d}(x+m)}{x+m}=\ln|x+m|, \tag{3}$$

解方程组，得

$$I=\frac{1}{(m-n)(n-l)(m-l)}[(m-m)\ln|x+l|$$

$$-(m-l)\ln|x+n|+(n-l)\ln|x+m|]+C.$$

例 10 求$\int\frac{3x^2+5x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\mathrm{d}x$.

解 令
$$I=\int\frac{3x^2+5x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\mathrm{d}x,$$
$$I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$
$$I_2=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$
$$I_3=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$
则有
$$2I_1+3I_2+I_3=\int\frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3}=\ln|x+3|,$$
$$3I_1+4I_2+I_3=\int\frac{\mathrm{d}(x+2)}{x+2}=\ln|x+2|,$$
$$6I_1+5I_2+I_3=\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|.$$
解方程组,得
$$I_1=\frac{1}{2}\ln\frac{|(x+1)(x+3)|}{(x+2)^2},$$
$$I_2=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+2)^4}{|x+1||x+3|^3},$$
$$I_3=\frac{1}{2}\ln\frac{|x+3|^9|x+1|}{(x+2)^2}.$$
所以有
$$\begin{aligned}I&=3I_3+5I_2+I_1\\&=\frac{3}{2}\ln\frac{|x+3|^9|x+1|}{(x+2)^2}+\frac{5}{2}\ln\frac{(x+2)^4}{(x+1)|x+3|^3}\\&\quad+\frac{1}{2}\ln\frac{|x+1||x+3|}{(x+2)^2}+C\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{|x+3|^{13}|x+2|^{12}}{|x+1|}+C.\end{aligned}$$
如果有理式分母含有二次三项式的因子,也可考虑使用组合积分法求解.

例 11 求$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(x^2+2x+2)}$.

解 令 $$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(x^2+2x+2)},$$
$$I_1=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2x+2)},$$
$$I_2=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2x+2)},$$

于是便有 $$2I+2I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|, \tag{1}$$
$$I+I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1), \tag{2}$$
$$\begin{aligned}I_2-I&=\int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2-4}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x-\int\frac{4\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}-4\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}\right]\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2\arctan(x+1).\end{aligned} \tag{3}$$

解方程组，得
$$I=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C.$$

虽然用上述方法求此积分并不简单，但用如下普通方法也不方便.

令 $$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2},$$
即 $$1=A(x^2+2x+2)+(x+1)(Bx+C).$$
令 $x=-1$，得 $1=A\Rightarrow A=1$. 比较二次项系数，得
$$A+B=0\Rightarrow 1+B=0\Rightarrow B=-1.$$
比较常数项，得
$$2A+C=1\Rightarrow C=-1.$$
所以 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2x+2)}=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C.$$

对于比较复杂的情况，还是用组合积分法要方便得多，如例 12.

例 12 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x^2+bx+l)}$ $(b^2-4l<0)$.

解 令
$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x^2+bx+l)},$$
$$I_1=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+a)(x^2+bx+l)},$$
$$I_2=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x+a)(x^2+bx+l)},$$

于是便有

$$aI+I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+bx+l}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4l-b^2}{4}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4l-b^2}}\arctan\frac{2\left(x+\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{4l-b^2}},$$
$$lI+bI_1+I_2=\int\frac{1}{x+a}=\ln|x+a|,$$
$$I_2-a^2I=\int\frac{(x-a)\mathrm{d}x}{x^2+bx+l}=\frac{1}{2}\int\frac{2x+b-b-2a}{x^2+bx+l}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int\frac{2x+b}{x^2+bx+l}-(b+2a)\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+bx+l}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+bx+l)-\frac{b+2a}{2}\frac{2}{\sqrt{4l-b^2}}\arctan\frac{2\left(x+\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{4l-b^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+bx+l)-\frac{b+2a}{\sqrt{4l-b^2}}\arctan\frac{2\left(x+\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{4l-b^2}}.$$

解得
$$I=\frac{1}{l+a^2-ab}\left[\ln|x+a|-\frac{1}{2}\ln(x^2+bx+l)\right.$$
$$\left.+\frac{2a-b}{\sqrt{4l-b^2}}\arctan\frac{2x+b}{\sqrt{4l-b^2}}\right]+C.$$

用组合积分法求一般有理式的积分，是一次很有意义的尝试，为组合积分法在积分中的普遍应用打下了基础. 我们相信，随着研究的深入，组合积分法的应用会越来越广泛.

5.3 用组合法求拉普拉斯逆变换

求拉普拉斯逆变换是工程数学教学中的难点，教师难教，学生难学. 这一节介绍一种求拉普拉斯逆变换的新方法——**组合求逆法**. 这种方法就是在求某个逆变换时，找出一个与之结构相似的**辅助逆变换**，利用已学过的拉普拉斯逆变换的线性性质

$$L^{-1}[aF_1(P)\pm bF_2(P)]$$
$$=aL^{-1}[F_1(P)]\pm bL^{-1}[F_2(P)]=af_1(t)\pm bf_2(t),$$

将原逆变换与辅助逆变换组合起来，从而简化了逆变换的结构式，能很顺利地求出拉普拉斯逆变换. 下面先看一个简单的例子.

例 1 已知 $F(P)=\dfrac{P+9}{P^2-5P+6}$，求 $f(t)=L^{-1}[F(P)]$.

解 令
$$f_1(t)=L^{-1}\left[\frac{P}{P^2-5P+6}\right],$$
$$f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P^2-5P+6}\right],$$

于是有

$$f_1(t)-2f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{P-2}{(P-2)(P-3)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{P-3}\right]=e^{3t},$$

$$f_1(t)-3f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{P-3}{(P-2)(P-3)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{P-2}\right]=e^{2t},$$

所以有 $f_1(t)=3e^{3t}-2e^{2t}$， $f_2(t)=e^{3t}-e^{2t}$.

故原拉氏逆变换为

$$f(t)=f_1(t)+9f_2(t)=3e^{3t}-2e^{2t}+9e^{3t}-9e^{2t}$$
$$=12e^{3t}-11e^{2t}.$$

从例 1 可以看出，用组合求逆法求拉氏逆变换，无须用部分分

式法将像函数 $F(P)$ 分解为几个分式，然后查逆变换表再分别求之．在一定程度上．这种求逆变换的方法具有较多的优越性，特别是对于比较复杂的情形更是如此．下面再举几个复杂的例子．

例 2 求 $F(P)=\dfrac{1}{(P+5)(P^2+4)}$ 的逆变换．

解法 1 令 $f(t)=L^{-1}\left[\dfrac{1}{(P+5)(P^2+4)}\right]$,

$$g(t)=L^{-1}\left[\frac{P^2}{(P+5)(P^2+4)}\right],$$

由线性性质，便有

$$g(t)+4f(t)=L^{-1}\left[\frac{P^2+4}{(P+5)(P^2+4)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{P+5}\right]=e^{-5t},$$

$$\begin{aligned}g(t)-25f(t)&=L^{-1}\left[\frac{P^2-25}{(P+5)(P^2+4)}\right]=L^{-1}\left[\frac{P-5}{P^2+4}\right]\\&=L^{-1}\left[\frac{P}{P^2+4}\right]-\frac{5}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{P^2+4}\right]\\&=\cos 2t-\frac{5}{2}\sin 2t.\end{aligned}$$

所以
$$f(t)=\frac{1}{29}\left(e^{-5t}-\cos 2t+\frac{5}{2}\sin 2t\right)$$

即为所求的拉氏逆变换．

解法 2 用传统的方法．设

$$\frac{1}{(P+5)(P^2+4)}=\frac{A}{P+5}+\frac{BP+C}{P^2+4},$$

去分母，有

$$1=A(P^2+4)+(P+5)(BP+C).$$

令 $P=-5$，得 $A=\frac{1}{29}$．比较 P^2 项系数，得

$$A+B=0\Rightarrow B=-\frac{1}{29},$$

比较常数项，得

$$4A+5C=0\Rightarrow C=\frac{1}{5}\left(1-\frac{4}{29}\right)=\frac{5}{29}.$$

所以有 $$\frac{1}{(P+5)(P^2+4)}=\frac{1}{29}\left(\frac{1}{P+5}+\frac{-P+5}{P^2+4}\right).$$

故有

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(P+5)(P^2+4)}\right]=\frac{1}{29}L^{-1}\left[\frac{1}{P+5}+\frac{-P+5}{P^3+4}\right]$$

$$=\frac{1}{29}L^{-1}\left[\frac{1}{P+5}-\frac{P}{P^2+4}+\frac{5}{2}\ \frac{2}{P^2+4}\right]$$

$$=\frac{1}{29}\left(e^{-5t}-\cos 2t+\frac{5}{2}\sin 2t\right).$$

比较上述两种解法，不难看出，用组合求逆法求逆变换比用传统的方法求逆变换要简便顺利得多. 特别是对例 3 的情形，更显示出组合求逆法的优势.

例 3 求 $$F_1(P)=\frac{P^2}{(P+2)(P^2+2P+2)}$$

和 $$F_2(P)=\frac{1}{(P+2)(P^2+2P+2)}$$

的逆变换.

解 令 $$f_1(t)=L^{-1}\left[\frac{P^2}{(P+2)(P^2+2P+2)}\right],$$

$$f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(P+2)(P^2+2P+2)}\right],$$

$$f_3(t)=L^{-1}\left[\frac{P}{(P+2)(P^2+2P+2)}\right].$$

由线性性质不难得到

$$f_1(t)+2f_2(t)+2f_3(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P+2}\right]=e^{-2t},$$

$$f_1(t)-4f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{P^2-4}{(P+2)(P^2+2P+2)}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{P-2}{P^2+2P+2}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{P+1}{(P+1)^2+1}-\frac{3}{(P+1)^2+1}\right]$$

$$=e^{-t}\cos t-3e^{-t}\sin t,$$

$$f_3(t)+2f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P^2+2P+2}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{(P+1)^2+1}\right]$$

$$=e^{-t}\sin t,$$

解得
$$f_2(t)=\frac{1}{2}(e^{-2t}-e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t),$$

$$f_1(t)=e^{-2t}-e^{-t}(\cos t+\sin t),$$

即

$$L^{-1}\left[\frac{P^2}{(P+2)(P^2+2P+2)}\right]=e^{-2t}-e^{-t}(\cos t+\sin t),$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(P+2)(P^2+2P+2)}\right]=\frac{1}{2}(e^{-2t}-e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t).$$

例 3 如果用传统方法求，复杂的程度可想而知，而用组合求逆法求逆变换，可以一箭双雕，两个逆变换一次完成，大大地简化了运算.

为了进一步地熟练掌握这种方法，不妨再举几例，请读者注意用组合求逆法时应掌握找辅助逆变换的技巧.

例 4 求 $F(P)=\dfrac{P+3}{P^3+4P^2+4P}$ 的逆变换.

解 令
$$f_1(t)=L^{-1}\left[\frac{P}{P^3+4P^2+4P}\right],$$

$$f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P^3+4P^2+4P}\right],$$

$$f_3(t)=L^{-1}\left[\frac{P^2}{P^3+4P^2+4P}\right],$$

由线性性质可得

$$f_3(t)+4f_1(t)+4f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P}\right]=1,$$

$$f_3(t)+2f_1(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P+2}\right]=e^{-2t},$$

$$f_1(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(P+2)^2}\right]=te^{-2t},$$

解得
$$f_3(t)=e^{-2t}-2f_1(t)=e^{-2t}-2te^{-2t},$$

$$f_2(t)=\frac{1}{4}[1-f_3(t)-4f_1(t)]$$
$$=\frac{1}{4}[1-e^{-2t}+2te^{-2t}-4te^{-2t}]$$
$$=\frac{1}{4}(1-e^{-2t}-2te^{-2t}).$$

所以有 $f(t)=f_1(t)+3f_2(t)=te^{-2t}+\frac{3}{4}(1-e^{-2t}-2e^{-2t}t)$

$$=\frac{1}{4}(3-3e^{-2t}-2te^{-2t}).$$

例 5 求 $F(P)=\frac{4P+6}{(P+1)(P+2)(P+3)}$.

解 令 $f_1(t)=L^{-1}\left[\frac{P^2}{(P+1)(P+2)(P+3)}\right]$,

$$f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{P}{(P+1)(P+2)(P+3)}\right],$$
$$f_3(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(P+1)(P+2)(P+3)}\right],$$

由线性性质不难得到

$$f_1(t)+3f_2(t)+2f_3(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P+3}\right]=e^{-3t},$$
$$f_1(t)+4f_2(t)+3f_3(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P+2}\right]=e^{-2t},$$
$$f_1(t)+5f_2(t)+6f_3(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P+1}\right]=e^{-t},$$

解方程组,得

$$f_3(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t}),$$
$$f_2(t)=\frac{1}{2}(4e^{-2t}-3e^{-3t}-e^{-t}).$$

所以 $f(t)=4f_2(t)+6f_3(t)$

$$=8e^{-2t}-6e^{-3t}-2e^{-t}+3e^{-t}-6e^{-2t}+3e^{-3t}$$
$$=e^{-t}+2e^{-2t}-3e^{-3t},$$

即为所求的拉氏逆变换.

从以上几个例子可以看出，在找辅助逆变换时应该注意，如果分母为 P 的 n 次多项式，则可设分子分别为 $1, P, P^2, \cdots, P^{n-1}$，而分母不变，分别求出逆变换，得到一个含有象原函数的方程组，解这个方程组就可以求出所求的逆变换.

利用组合求逆法，尽管有时还比较麻烦，但作为一种新的求逆变换的方法介绍给读者，对于加强这方面的训练是大有益处的.

习 题 5.3

求下列拉普拉斯逆变换：

(1) $F(P)=\dfrac{P}{(P+3)(P+5)}$;

(2) $F(P)=\dfrac{1}{P(P+1)(P+2)}$;

(3) $F(P)=\dfrac{4}{P^2+6P^2+9P}$;

(4) $F(P)=\dfrac{P^2+1}{P(P-1)^2}$;

(5) $F(P)=\dfrac{5P+3}{(P-1)(P^2+2P+5)}$;

(6) $F(P)=\dfrac{150}{(P^2+2P+5)(P^2-4P+8)}$.

5.4 用组合积分法求定积分

既然能够用组合积分法求不定积分，那么，用组合积分法求定积分应该不难，在求出一个原函数后，待入定积分的上、下限，由牛顿-莱布尼茨公式立刻得到定积分的值，本节要介绍的用组合积分法求定积分并非这种情况，而是在组合过程中得到含有定积分的方程组，通过解定积分的方法组而得出结果. 先看下面的例子.

例 1 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$.

解法 1 令 $$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x,$$

则有 $$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2},$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos x+\sin x}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x+\sin x}=0$$

(不难证明 $I=J$).

于是便有 $$I=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\pi}{4}.$$

解法 2 令 $$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x,$$

则 $$\begin{aligned}I+J&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2 x}{\cos 2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\Big[\ln|\sec 2x+\tan 2x|+2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

$$I-J=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big[\ln|\cos 2x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

于是有 $$I=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\pi}{4}.$$

解法 3 令 $$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x,$$

则 $$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos 2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big[\ln|\sec 2x+\tan 2x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=0,$$

$$\begin{aligned}I-J&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\tan 2x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\Big[2x-\ln|\cos 2x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

所以 $$I=\frac{\pi}{4}.$$

解法 4 因为

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x,$$

所以可令
$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x,$$

则
$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2},$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\mathrm{d}x=0.$$

于是有
$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}.$$

注意，这里将原积分变为$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x$，其中被积函数在 $x=\frac{\pi}{2}$处不连续，但$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}=0$，所以 $x=\frac{\pi}{2}$为第一类间断点. 根据积分的存在定理，函数$\frac{1}{1+\tan x}$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上可积，故这种积分变形是可行的.

解法 5 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{\cot x+1}\mathrm{d}x$，步骤同解法 4，这里从略.

解法 6 复数解法. 令
$$I=\int\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x,\quad J=\int\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x,$$

由
$$\begin{aligned}I+\mathrm{i}J&=\int\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\cos x+\mathrm{i}\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x\ \text{（代入欧拉公式）}\\&=\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})+\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}\\&=\frac{1}{\mathrm{i}}\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})+\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}\\&=\frac{1-\mathrm{i}}{2}\ln|1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{i}(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})|\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}[x+\ln|\cos x+\sin x|]$$

$$+\frac{i}{2}[x+\ln|\cos x+\sin x|],$$

所以有 $$I=\frac{1}{2}[x+\ln|\cos x+\sin x|]+C.$$

于是

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big[x+\ln|\cos x+\sin x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

解法 6 较复杂，但作为一种思考方法介绍给读者，可以开拓思想，启迪思维. 在解题遇到困难时，可多一种方法选择.

从以上解法可以看出，用组合积分法求解定积分的关键在于找到与被积函数的结构相似、而积分区间与所求积分区间相同的辅助积分，将辅助积分与原积分组合起来，可以简化积分式，从而简化运算，得到一个方程组，解方程组即得所求定积分. 但由于解题思路与用组合积分法求解不定积分相似，故这时不多作赘述，只是通过上例的一题多解，给读者一个将不定积分转化为定积分的方法. 为了加深理解，下面再举一例.

例 2 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$.

解 此题如果用万能代换来解，积分无法“积”出，不妨作如下尝试.

设 $\tan\frac{x}{2}=u$，则

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2},$$

于是原积分可变为

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}\,\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$=2\int_0^1 \frac{1-u^2}{u^4-2u^3+2u^2+2u+1}\mathrm{d}u.$$

此式很繁，要对它积分相当困难，如果改用组合积分法，就十分方便了.

令
$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$\begin{aligned} I+J &=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{3-(\sin x-\cos x)^2} \\ &=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3}-(\sin x-\cos x)}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\ln\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right|\right] \\ &=\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, \end{aligned}$$

$$I-J=0 \quad (\text{不难证得 } I=J).$$

于是
$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

用组合积分法求定积分也是十分方便的，用它可以很顺利地求出用传统积分法不容易求出或求不出来的一些定积分. 可见掌握这种积分方法是很重要的，希望引起读者的关注.

习 题 5.4

计算下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$； (2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$.

附录 A 增补积分表

说明:(1) 积分表右边省略了积分常数 C;(2) $\ln f(x)$是指 $\ln|f(x)|$.

1. 含有 $a\sin x+b\cos x$ 的有理式的积分

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}$	$\dfrac{b}{a^2+b^2}x+\dfrac{a}{a^2+b^2}\ln(a\sin x+b\cos x)$
$\dfrac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}$	$\dfrac{a}{a^2+b^2}x-\dfrac{b}{a^2+b^2}\ln(a\sin x+b\cos x)$
$\dfrac{\sin^2 x}{a\sin x+b\cos x}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left(\tan\dfrac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right)-a\cos x-b\sin x\right]$
$\dfrac{\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left(\tan\dfrac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right)+a\cos x+b\sin x\right]$
$\dfrac{\sin x}{a\sin x+b\cos x+c}$	$\dfrac{a}{a^2+b^2}x-\dfrac{b}{a^2+b^2}\ln(a\sin x+b\cos x+c)-\dfrac{bc}{a^2+b^2}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c}$ (后一积分查表可求出)
$\dfrac{\cos x}{a\sin x+b\cos x+c}$	$\dfrac{b}{a^2+b^2}x+\dfrac{a}{a^2+b^2}\ln(a\sin x+b\cos x+c)-\dfrac{bc}{a^2+b^2}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c}$ (后一积分查表可求出)

续表

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{1}{(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)}$ $(\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\ln\dfrac{a\sin x+b\cos x}{b\sin x+a\cos x}$
$\dfrac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\dfrac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}$
$\dfrac{\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left(\tan\dfrac{x+\arctan\dfrac{b}{a}}{2}\right)+\dfrac{b}{a\sin x+b\cos x}\right]$
$\dfrac{\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left(\tan\dfrac{x+\arctan\dfrac{b}{a}}{2}\right)-\dfrac{a}{a\sin x+b\cos x}\right]$
$\dfrac{\sin^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$	$\dfrac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\dfrac{b^3\sin x-ab^2\cos x}{a\sin x+b\cos x}+(a^2-b^2)x-2ab\ln(a\sin x+b\cos x)\right]$
$\dfrac{\cos^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$	$\dfrac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\dfrac{a^2b\sin x-a^3\cos x}{a\sin x+b\cos x}-(a^2-b^2)x+2ab\ln(a\sin x+b\cos x)\right]$

2. 含有 $a+b\sin x$，$a+b\cos x$，$a+b\sin x\cos x$ 的积分

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{\sin x}{a+b\sin x}\ (\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{b}x+\dfrac{a}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}(a-b)\cos x}{a^2-b^2+ab\cos^2 x}$
$\dfrac{\cos x}{a+b\cos x}\ (\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{b}x+\dfrac{a}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{a+b\cos x}$
$\dfrac{\sin^2 x}{a+b\sin x}\ (a^2<b^2)$	$\dfrac{1}{b^2}\left(a^2\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}-ax-b\cos x\right)$ $\left(\text{积分}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}\text{查表可求}\right)$
$\dfrac{\cos^2 x}{a+b\cos x}\ (\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{b^2}\left(a^2\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}-ax+b\sin x\right)$ $\left(\text{积分}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}\text{查表可求}\right)$
$\dfrac{\sin x}{a+b\sin x\cos x}$ $(b>0,2a+b>0,2a\neq b)$	$\begin{cases}\dfrac{1}{2}[I(x)-J(x)] & (2a<b)\\ \dfrac{1}{2}[I(x)-k(x)] & (2a>b)\end{cases}$
$\dfrac{\cos x}{a+b\sin x\cos x}$ $(b>0,2a+b>0,2a\neq b)$	$\begin{cases}\dfrac{1}{2}[I(x)+J(x)] & (2a<b)\\ \dfrac{1}{2}[I(x)+k(x)] & (2a>b)\end{cases}$
	$I(x)=\dfrac{1}{\sqrt{b(2a+b)}}\ln\dfrac{\sqrt{2a+b}+\sqrt{b}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{2a-b}-\sqrt{b}(\sin x-\cos x)}$
	$J(x)=\dfrac{1}{\sqrt{b(b-2a)}}\ln\dfrac{\sqrt{b}(\sin x+\cos x)-\sqrt{b-2a}}{\sqrt{b}(\sin x+\cos x)+\sqrt{b-2a}}$
	$K(x)=\dfrac{2}{\sqrt{b(2a-b)}}\arctan\dfrac{\sqrt{b}(\sin x+\cos x)}{\sqrt{2a-b}}$

3. 含有其他三角函数的有理式的积分

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{1}{b+a\tan x}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left\{bx+a\ln\left[\cos\left(\arctan\dfrac{a}{b}-x\right)\right]\right\}$
$\dfrac{\tan x}{b+a\tan x}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left\{ax-b\ln\left[\cos\left(\arctan\dfrac{a}{b}-x\right)\right]\right\}$
$\dfrac{1}{a\sec x+b\tan x}$	$\dfrac{1}{b}\ln(a+b\sin x)$
$\dfrac{\tan x}{a\sec x+b\tan x}\ (\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{b}x+\dfrac{a}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}(a-b)\cos x}{a^2-b^2+ab\cos^2 x}$
$\dfrac{\sec^2 x}{a\sec x+b\tan x)}(\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}[a\ln(\sec x+\tan x)+b\ln\cos x$ $-b\ln(a+b\sin x)]$
$\dfrac{\tan^2 x}{a\sec x+b\tan x)}(\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\Big[a\ln(\sec x+\tan x)+b\ln\cos x$ $-\dfrac{a^2}{b}\ln(a+b\sin x)\Big]$
$\dfrac{1}{a\csc x+b\cot x}$	$-\dfrac{1}{b}\ln(a+b\cos x)$
$\dfrac{\cot x}{a\csc x+b\cot x}\ (\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{b}x+\dfrac{a}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{a+b\cos x}$
$\dfrac{\tan x}{a\tan x+b\cot x}(a>0,b>0)$	$\dfrac{1}{a-b}\left[x-\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\tan x\right)\right]$
$\dfrac{\cot x}{a\tan x+b\cot x}(a>0,b>0)$	$\dfrac{1}{b-a}\left[x-\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\tan x\right)\right]$
$\dfrac{\tan^2 x}{a\tan x+b\cot x}$	$\dfrac{1}{2a^2}\left[-2a\ln(\cos x)-\dfrac{ab}{a-b}\ln(a\sin^2 x+b\cos^2 x)\right]$
$\dfrac{\cot^2 x}{a\tan x+b\cot x}$	$\dfrac{1}{2b^2}\left[2b\ln(\sin x)-\dfrac{ab}{a-b}\ln(a\sin^2 x+b\cos^2 x)\right]$

续表

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{\sec x}{a\sec x+b\csc x}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}[ax-b\ln(a\sin x+b\cos x)]$
$\dfrac{\csc x}{a\sec x+b\csc x}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}[bx+a\ln(a\sin x+b\cos x)]$
$\dfrac{\sec^2 x}{a\sec x+b\csc x}(\vert a\vert\neq\vert b\vert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(x-\dfrac{b}{a}\arctan\dfrac{a\tan x}{b}\right)$
$\dfrac{\csc^2 x}{a\sec x+b\csc x}(\vert a\vert\neq\vert b\vert)$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left(x-\dfrac{a}{b}\arctan\dfrac{a\tan x}{b}\right)$

4. 含有指数函数的有理式的积分

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{e^x}{ae^x+be^{-x}}$	$\dfrac{1}{2a}[x+\ln(ae^x+be^{-x})]$
$\dfrac{e^{-x}}{ae^x+be^{-x}}$	$\dfrac{1}{2b}[x-\ln(ae^x+be^{-x})]$
$\dfrac{e^{2x}}{ae^x+be^{-x}}$	$\dfrac{1}{a}\left[e^x-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}e^x\right)\right]$
$\dfrac{e^{-2x}}{ae^x+be^{-x}}$	$-\dfrac{1}{b}\left[e^{-x}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}e^x\right)\right]$
$\dfrac{e^x}{(ae^x+be^{-x})^2}(ab>0)$	$\dfrac{1}{2a}\left[\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}e^x\right)-\dfrac{1}{ae^x+be^{-x}}\right]$
$\dfrac{e^{-x}}{(ae^x+be^{-x})^2}(ab>0)$	$\dfrac{1}{2b}\left[\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}e^x\right)+\dfrac{1}{ae^x+be^{-x}}\right]$
$\dfrac{e^{2x}}{(ae^x+be^{-x})^2}$	$\dfrac{1}{2a^2}\left[x-\dfrac{1}{2}\dfrac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}+\ln(ae^x+be^{-x})\right]$
$\dfrac{e^{-2x}}{(ae^x+be^{-x})^2}$	$\dfrac{1}{2b^2}\left[x-\dfrac{1}{2}\dfrac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}-\ln(ae^x+be^{-x})\right]$

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{1}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})}$ $(\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{2(a^2-b^2)}\ln\dfrac{ae^x+be^{-x}}{be^x+ae^{-x}}$
$\dfrac{1}{(ae^x+be^{-x})^2}$	$\dfrac{1}{4ab}\dfrac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}$
$\dfrac{a^x}{ba^x+ca^{-x}}$	$\dfrac{1}{2b}\left[x+\dfrac{1}{\ln a}\ln(ba^x+ca^{-x})\right]$
$\dfrac{a^{-x}}{ba^x+ca^{-x}}$	$\dfrac{1}{2c}\left[x-\dfrac{1}{\ln a}\ln(ba^x+ca^{-x})\right]$
$\dfrac{a^x}{(ba^x+ca^{-x})^2}$ $(bc>0)$	$\dfrac{1}{2b}\dfrac{1}{\ln a}\left[\dfrac{1}{\sqrt{bc}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{b}{c}}a^x\right)-\dfrac{1}{ba^x+ca^{-x}}\right]$
$\dfrac{a^{-x}}{(ba^x+ca^{-x})^2}$ $(bc>0)$	$\dfrac{1}{2c}\dfrac{1}{\ln a}\left[\dfrac{1}{\sqrt{bc}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{b}{c}}a^x\right)+\dfrac{1}{ba^x+ca^{-x}}\right]$
$\dfrac{1}{(ba^x+ca^{-x})(ca^x+ba^{-x})}$	$\dfrac{1}{2(b^2-c^2)}\dfrac{1}{\ln a}\ln\dfrac{ba^x+ca^{-x}}{ca^x+ba^{-x}}$

5. 含有双曲函数的有理式的积分

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{\operatorname{sh} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}$ $(\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}[ax-b\ln(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)]$
$\dfrac{\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}$ $(\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}[-bx+a\ln(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)]$
$\dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}$ $(\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\left[\dfrac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}e^x\right)+a\operatorname{sh} x-b\operatorname{ch} x\right]$

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{\mathrm{ch}^2 x}{a\mathrm{sh}\, x+b\mathrm{ch}\, x}\ (\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\left[\dfrac{2a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)+a\mathrm{sh}\, x-b\mathrm{ch}\, x\right]$
$\dfrac{\mathrm{sh}\, x}{(a\mathrm{sh}\, x+b\mathrm{ch}\, x)^2}\ (\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\left[\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)-b\ln(a\mathrm{sh}\, x+b\mathrm{ch}\, x)\right]$
$\dfrac{\mathrm{ch}\, x}{(a\mathrm{sh}\, x+b\mathrm{ch}\, x)^2}\ (\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\left[\dfrac{-2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)+a\ln(a\mathrm{sh}\, x+b\mathrm{ch}\, x)\right]$
$\dfrac{1}{(a\mathrm{sh}\, x+b\mathrm{ch}\, x)^2}\ (\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\,\dfrac{b\mathrm{sh}\, x+a\mathrm{ch}\, x}{a\mathrm{sh}\, x+b\mathrm{ch}\, x}$
$\dfrac{1}{(a\mathrm{sh}\, x+b\mathrm{ch}\, x)(b\mathrm{sh}\, x+a\mathrm{ch}\, x)}\ (\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\ln\dfrac{a\mathrm{sh}\, x+b\mathrm{ch}\, x}{b\mathrm{sh}\, x+a\mathrm{ch}\, x}$
$\dfrac{1}{b+a\mathrm{th}\, x}\ (\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}[a\ln(a\mathrm{sh}\, x+b\mathrm{ch}\, x)-bx]$
$\dfrac{\mathrm{th}\, x}{b+a\mathrm{th}\, x}\ (\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}[ax+b\ln(a\mathrm{sh}\, x+b\mathrm{ch}\, x)]$
$\dfrac{1}{a\mathrm{sh}\, x+b\mathrm{ch}\, x}\ (\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)$
$\dfrac{1}{a+b\mathrm{sh}\, x+c\mathrm{ch}\, x}\ (c^2>a^2+b^2)$	$\dfrac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\arctan\dfrac{(b+c)\mathrm{e}^x+a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}$

附录B 增补积分递推公式

公式1 设

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\quad\left(n>1,x\neq k\pi-\arctan\frac{b}{a}\right),$$

则有递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}\right].$$

公式2 设

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\quad\left(n>1,x\neq k\pi-\arctan\frac{b}{a}\right),$$

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\mathrm{d}x=AJ_{n-1}-\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}.$$

公式3 设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}$ $(n>1,ab\neq 0)$，则有递推公式

$$J_n=\frac{1}{4ab(n-1)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}\right].$$

公式4 设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}$ $(n>1,ab\neq 0)$，

且

$$A=\frac{ba_1+ab_1}{2ab},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{2ab},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1\mathrm{e}^x+b_1\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}\mathrm{d}x=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}.$$

公式5 设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(ba^x+ca^{-x})^n}$ $(n>1,bc\neq 0)$，则有递推公式

$$J_n=\frac{1}{4bc(n-1)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{1}{\ln a}\frac{ba^x-ca^{-x}}{(ba^x+ca^{-x})^{n-1}}\right].$$

公式 6 设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(ba^x+ca^{-x})^n}$ $(n>1,bc\neq0)$，

且
$$A=\frac{ba_1-cb_1}{2bc},\quad B=\frac{bb_1-ca_1}{2bc},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1a^x+b_1a^{-x}}{(ba^x+ca^{-x})^n}\mathrm{d}x=AJ_{n-2}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(ba^x+ca^{-x})^{n-1}}.$$

公式 7 设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)^n}$ $(n>1,a^2\neq b^2)$，

则有递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(b^2-a^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{b\mathrm{sh}\ x+a\mathrm{ch}\ x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)^{n-1}}\right].$$

公式 8 设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)^n}$ $(n>1,a^2\neq b^2)$，

$$A=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2},\quad B=\frac{ba_1-ab_1}{a^2-b^2},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1\mathrm{sh}\ x+b_1\mathrm{ch}\ x}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)^n}\mathrm{d}x=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\mathrm{sh}\ x+b\mathrm{ch}\ x)^{n-1}}.$$

公式 9 设

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^n}\quad(n>1,|b|\neq|c|),$$

则有递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(c^2-b^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{1}{\ln a}\frac{c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}}\right].$$

公式 10 设

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^n}\quad(n>1,|b|\neq|c|),$$

$$A=\frac{a_1b-cb_1}{b^2-c^2},\quad B=\frac{a_1c-b_1b}{b^2-c^2},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1\mathrm{sh}(x\ln a)+b_1\mathrm{ch}(x\ln a)}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^n}\mathrm{d}x$$

$$=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{[b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}}.$$

公式 11 设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\quad(n>1)$，

则有递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}\right].$$

公式 12 设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\ (n>1)$，

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1\sin[x]+b_1\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\mathrm{d}x$$

$$=AJ_{n-1}-\frac{B}{n-1}\ \frac{1}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}.$$

公式 13 设 a,b 为常数，n 为非负整数，且

$$I_n=\int x^n\mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x,\quad J_n=\int x^n\mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,$$

则有递推公式

$$I_n=\frac{x^n\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)-\frac{n}{a^2+b^2}(aI_{n-1}+bJ_{n-1}),$$

$$J_n=\frac{x^n\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+\frac{n}{a^2+b^2}(bJ_{n-1}-aI_{n-1}).$$

公式 14 设 a 为常数，n 为非负整数，且

$$I_n=\int x^na^x\cos x\,\mathrm{d}x,\quad J_n=\int x^na^x\sin x\,\mathrm{d}x,$$

则有递推公式

$$I_n=\frac{x^na^x}{\ln^2a+1}(\ln a\cos x+\sin x)-\frac{n}{\ln^2a+1}(\ln aI_{n-1}+J_{n-1}),$$

$$J_n=\frac{x^na^x}{\ln^2a+1}(\ln a\sin x-\cos x)+\frac{n}{\ln^2a+1}(I_{n-1}-\ln aJ_{n-1}).$$

公式 15 设 n 为非负整数，$|a|\neq|b|$，且

$$I_n=\int x^n e^{ax}\operatorname{ch} bx\,dx,\quad J_n=\int x^n e^{ax}\operatorname{sh} bx\,dx,$$

则有递推公式

$$I_n=\frac{x^n e^{ax}}{a^2-b^2}(a\operatorname{ch} bx-b\operatorname{sh} bx)-\frac{n}{a^2-b^2}(aI_{n-1}-bJ_{n-1}),$$

$$J_n=\frac{x^n e^{ax}}{a^2-b^2}(a\operatorname{sh} bx-b\operatorname{ch} bx)-\frac{n}{a^2-b^2}(aJ_{n-1}-bI_{n-1}).$$

主要参考文献

1 华罗庚．高等数学引论．北京：科学出版社，1963.

2 《现代数学手册》编纂委员会．现代数学手册：精典数学卷．武汉：华中科技大学出版社，2000.

3 [俄]Б. П. 吉米多维奇．数学分析习题集．北京：人民教育出版社，1959.

4 朱永银，郭文秀．一种积分方法——组合积分法．数学通报，1992(6)：32～35

5 《数学手册》编写组．数学手册．北京：人民教育出版社，1979.