Números reales y complejos

Ficha de repaso

1) [*] Clasifica los siguientes números según pertenezcan a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$:

$(a)\ \sqrt[3]{-8};\ (b)\ 0,12333\ldots;\ (c)\ \sqrt[5]{\sqrt{1024}};\ (d)\ \pi;\ (e)\ 16^{\frac{1}{5}};\ (f)\ 0,1010010001\ldots$

2) [**] Representa los siguientes números en la recta real:

$(a)\ \dfrac{7}{3};\ (b)\ \sqrt{13};\ (c)\ \sqrt{2}$

3) [*] Sea $A = E(2,3)$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / |x-6| < 4\}$, escribe A y B como intervalos. Calcula $A \cup B$ y $A \cap B$.

4) [*] Expresa en forma de intervalo los valores de x que cumplen las siguientes condiciones:

(a) $|x| < 6$

(b) $|x| \geq 4$

(c) $|x-5| \leq 5$

(d) $|2x+5| < 11$

5) [*] El radio de la Tierra es de 6378,1 km. Si tomamos como radio aproximado 6378 km, ¿qué error absoluto y relativo cometemos? Calcula también el volumen de la Tierra utilizando ambos radios y halla nuevamente los errores absoluto y relativo. ¿Varían estos errores respecto a los cometidos al aproximar el radio?

Indicación: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

6) [***] Simplifica extrayendo factores fuera si es posible:

(a) $\dfrac{2x^{-\frac{7}{3}}}{\sqrt{2x}} =$

(b) $\sqrt[3]{9ab^2} \cdot \sqrt[6]{18a^3b^2} =$

(c) $\dfrac{\left(8x^2\sqrt{a^3}\right)^2}{42a^{-2}\sqrt{x}} =$

(d) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{12}}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}\right) : \left(a\sqrt[4]{a^{-2}}\right) =$

7) [**] Opera y simplifica: (a) $-\sqrt[3]{16x} - \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2000x} =$ (b) $-\sqrt[6]{128x^4} - \dfrac{3}{2}\sqrt[6]{4000000x^4} =$

8) [**] Racionaliza simplificando al máximo la solución:

(a) $\dfrac{2}{3-\sqrt{3}}$

(b) $\dfrac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{\sqrt{32x^{11}}}} =$

9) [*] Encuentra el valor de x en cada caso. Simplifica y racionaliza la solución si es necesario (no uses aproximaciones):

(a) $\log_6 1296 = x$

(b) $\log_x \frac{1}{81} = 3$

(c) $\log_{\frac{2}{3}} x = -2$

(d) $\log_x 2000 = -3$

(e) $\log_x \left(\frac{1}{16}\right) = 3$

(f) $3^{2x} = 81$

10) [*] Calcula utilizando la definición de logaritmo y las propiedades:

(a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$

(b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$

(c) $\ln e^{-\frac{1}{4}} + \ln \sqrt[4]{e^3} - \ln 1$

(d) $\ln \sqrt[4]{\frac{1}{e^3}}$

11) [**] Sean a, A y B números positivos tales que $\log_a A = 3$ y $\log_a B = -2$, calcula $\log_a \frac{A}{a^3 \cdot \sqrt{B}} =$

12) [**] Sabiendo que $\log_b A = \frac{1}{2}$ y que $\log_b B = \frac{-1}{3}$, calcula $\log_b \left(A^3 \cdot \sqrt{\frac{1}{B}}\right) =$

13) [*] Usa las propiedades de los logaritmos para hallar el valor de:

$$\log_2 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

14) [**] Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

(a) $2\log x = 2 + \log\left(\frac{x}{10}\right)$

(b) $\log(11 - x^2) = 2\log(5 - x) - \log 2$

(c) $\ln(x+1) = \ln(x+19) - \ln(x-1)$

(d) $2\ln(x+1) = \ln x + \ln(x+3)$

15) [***] Uno de los modelos m ás simples para el estudio de poblaciones viene dado por la ecuación $P = P_0 \cdot e^{kt}$ donde P es la población (en millones de habitantes), P_0 es la población inicial, k una constante de proporcionalidad y t el tiempo en años. Trata de responder a las siguientes cuestiones:

(a) Después de 5 años de estudio, se sabe que un determinado país sigue este modelo de población con constante $k = 0,2$ y que su población actual es de 34 millones de habitantes. ¿Qué población tenía hace 5 años?

(b) Se sabe que un país vecino del anterior se ajusta al mismo modelo de población. Si su población inicial es de 10 millones de habitantes, ¿cuántos años pasarán hasta que alcance los 30 millones de habitantes?

16) [*] Realiza las siguientes operaciones con números complejos:

(a) $\left(\frac{3}{2} - i\right) - \left(2 + \frac{2}{5}i\right)$

(b) $(-1 - i)(2 + 2i)$

(c) $i^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)$

(d) $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}i\right)^2$

(e) $\frac{1+i}{1-i}$

(f) $\frac{3\sqrt{3}}{2-i}$

17) [*] Sean los números complejos $z = 2 - i$ y $w = -3 - 2i$, halla $2z^2 - 3\overline{w}z$, su módulo, su argumento y represéntalo en el plano complejo.

Indicación: $\overline{w}$ representa el conjugado de w.

18) [**] Efectúa: $\frac{(3-2i)^2 - (1+i)(2-i)}{-3+i}$

19) [*] Calcula: $\frac{i^{1347}}{1 + i^{27}}$

20) [**] Halla el valor que debe tener x para que el resultado de $\frac{1+3xi}{3-4i}$ sea:

(a) Un número real.

(b) Un número imaginario puro.

21) [**] Expresa en forma polar $\sqrt{3} + i$, $-3i$ y $z = -2 + 2\sqrt{3}\, i$. Calcula z^4.

22) [**] Escribe $z = -1 + \sqrt{3}\, i$ en forma polar y trigonométrica. Calcula z^4.

23) [**] Sean los números complejos $z = 6_{120^0}$ y $w = 3_{330^0}$. Calcula w^3 y zw en forma polar.

Calcula también $\frac{z}{w}$ y escribe la solución en forma polar y binómica.

24) [*] Resuelve en $\mathbb{C}$ las ecuaciones:

(a) $x^2 - 3x + 7 = 3 - 3x$

(b) $x^2 - 4x + 6 = 0$

(c) $2x^2 + 6x + 5 = 0$

(d) $x^2 - 8x + 20 = 0$