1 Reales y Complejos

(1) Números reales.

(2) Errores y aproximaciones.

(3) Intervalos. Valor absoluto. Entornos.

(4) Potencias. Notación científica.

(5) Radicales. Propiedades.

(6) Sumas y restas de radicales.

(7) Racionalización.

(8) Logaritmos. Definición.

(9) Problemas con logaritmos.

(10) Propiedades de los logaritmos.

(11) Números complejos.

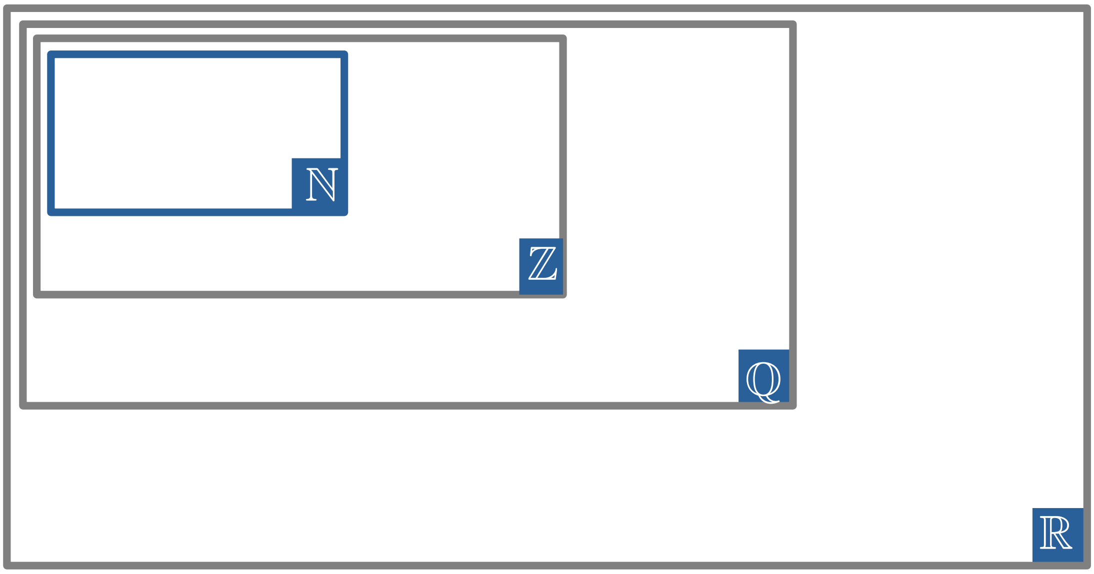
(12) Forma binómica. Suma, resta, multiplicación y división.

(13) Forma polar y trigonométrica. Transformaciones.

(14) Operaciones en forma polar. Fórmula de De Moivre.

(15) Raíces de números complejos.

1. Números reales.



Ejercicios:

1. Completa la siguiente tabla con Sí/No según los números pertenezcan o no al conjunto correspondiente:

	Natural	Entero	Racional	Irracional	Real	No real
$-1,45$	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
$\frac{-8}{2}$	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
$-\sqrt{100}$	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
$1,010010001...$	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**
$-\frac{1}{4}$	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
$3,401\hat{7}$	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
$4\sqrt{7}$	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**
$7\sqrt{-4}$	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**
$\pi - \sqrt{2}$	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**

2. Clasifica los siguientes números:

(a) $-\sqrt[3]{-2,5}$ — $\mathbb{I}, \mathbb{R}$

(c) $-3,1415$ — $\mathbb{Q}$

(e) $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ — $\mathbb{I}, \mathbb{R}$

(g) $4 - \sqrt{10}$ — $\mathbb{I}, \mathbb{R}$

(i) $\frac{-5}{7}$ — $\mathbb{Q}$

(b) $-\frac{10}{-2}$ — $\mathbb{N}$

(d) $-\sqrt[3]{-8}$ — $\mathbb{N}$

(f) $1,02333...$ — $\mathbb{Q}$

(h) $-\sqrt{2-\pi}$ — NO REAL

(j) $\frac{\pi}{2}$ — $\mathbb{I}, \mathbb{R}$

3. Realiza las siguientes operaciones con fracciones con calculadora:

(a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=$

(b) $\frac{2}{3}\cdot\frac{(-3)}{8}=$

(c) $\frac{3}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)=$

(d) $\dfrac{1-\frac{3}{4}}{3-10\cdot\frac{4}{15}}=$

(e) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-\frac{4}{3}:\frac{2}{5}=$

(f) $-\frac{10}{9}\cdot\frac{(-3)}{8}\cdot\frac{6}{25}=$

(g) $3,13+8,65-\frac{7}{9}=$

(h) $\dfrac{1+\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{4}{5}}=$

(i) $\frac{3}{4}:3-2\cdot\left(3-\frac{5}{4}+\frac{2}{3}:\frac{-4}{9}\right)=$

(j) $\dfrac{1,45-8\cdot 5,53}{1+3,45}=$

(k) $\frac{10}{3}+2\cdot\dfrac{4,76-\frac{3}{4}}{1-2,45}=$

(l) $\frac{3}{5}+\frac{11}{7}+\frac{8}{3}=$

(m) $\frac{4}{3}\cdot\left(1+7\cdot\frac{2}{3}\right)=$

(n) $-\frac{5}{2}-4+\frac{1}{3}-\frac{11}{8}+3\cdot\frac{9}{2}=$

4. Busca información sobre los números algebraicos y trascendentales.

5. Busca información sobre:

(a) Rectángulos áureos: Cómo se construyen, condición matemática que cumplen, ejemplos de uso a lo largo de la historia y en la actualidad, otras propiedades: espiral de Durero.

(b) Espiral equiangular o geométrica.

(c) Sucesión de Fibonacci.

6. Representa gráficamente los siguientes números:

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (c) $\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (d) $0,3611111....$

2. Errores y aproximaciones.

Ejercicios:

1. Determina el error absoluto y el error relativo en las siguientes aproximaciones. ¿A qué cifra se ha realizado la aproximación?

(a) $102345 \approx 100000$ (b) $3,4509 \approx 3,5$ (c) $290012 \approx 290000$

a) $E_a = 2345$
$E_r \approx 0,0229 = 2,29\%$

b) $E_a = 0,0491$
$E_r \approx 0,0142 = 1,42\%$

c) $E_a = 12$
$E_r \approx 0,000041 = 0,0041\%$

2. Determina una cota del error absoluto y el error relativo en las siguientes aproximaciones.

(a) $\pi \approx 3,1415$ (b) $\dfrac{22}{7} \approx 3$ (c) $\sqrt{3} \approx 1,732$

a) $E_a = 0,0000926\cdots < 0,0001$
$E_r < 0,000032 = 0,0032\%$

b) $E_a = 0,1428\cdots < 0,15$
$E_r < 0,05 = 5\%$

c) $E_a = 0,000051\cdots < 0,0001$
$E_r < 0,00006 = 0,006\%$

3. Unos técnicos están asfaltando una calle de 50 metros de largo pero se quedan sin material cuando les faltan 2 metros para acabar. Por otro lado, también se está asfaltando una autovía de 50 km de largo que une la ciudad con la playa más cercana. También en esta ocasión, debido a un error de previsión, se quedan sin material cuando les faltaban 20 metros para acabar. ¿Cuáles han sido los errores cometidos en ambos casos? ¿En qué caso te parece que se ha realizado una peor provisión de los materiales? ¿Por qué?

- Primer caso $\longrightarrow E_a = 2, E_r = 0,04 = 4\%$

- Segundo caso $\longrightarrow E_a = 20, E_r = 0,0004 = 0,04\%$

En el primer caso se ha hecho una peor provisión, pues aunque en términos absolutos, el error cometido fue menor (2 metros frente a 20), en términos relativos, respecto a la longitud total del material necesario, el error cometido en el primer caso fue de un 4% mientras que en el segundo caso de un 0,04%, 100 veces menos error.

3. Intervalos. Valor absoluto. Entornos.

Distintas formas de expresar un conjunto de números reales comprendido entre dos números

Ejemplos:

Con palabras	Gráficamente	Con un intervalo	Con desigualdades
Números reales entre 2 y 5 ambos incluidos.			
Números reales entre -3 y -1 sin incluir.			
Números reales entre -8 y -3 incluyendo al -8.			
Números reales entre -4 y 3 incluyendo al 3.			
Números reales mayores o iguales que 3			
Números reales mayores que -2			
Números reales menores que 2			
Números reales menores o iguales que 4			

Ejercicios:

7. Escribe los siguientes conjuntos en forma de intervalo:

(a) Posibles notas de un examen aprobado. $[5, 10]$

(b) Posibles notas de un examen suspenso. $[0, 5)$

(c) Números reales comprendidos entre -3 y 4, ambos incluidos. $[-3, 4]$

(d) Números reales mayores que 7. $(7, +\infty)$

(e) Números reales menores o iguales que -5. $(-\infty, -5)$

(f) Distancia mayor de 5 km. $(5, +\infty)$

(g) Distancia no mayor de 5 km. $(-\infty, 5]$

8. Expresa los siguientes intervalos de forma gráfica y empleando desigualdades:

A = $(-3, 4)$
$\{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 4\}$

B = $(-2, 0]$
$\{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 0\}$

C = $[1, 8]$
$\{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 8\}$

D = $[-3, 5)$
$\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 5\}$

E = $(-\infty, 3)$
$\{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$

F = $(-\infty, 3]$
$\{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\}$

G = $(2, +\infty)$
$\{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$

H = $[-4, \infty)$
$\{x \in \mathbb{R} / x \geq -4\}$

I = $(-\infty, \infty)$
NO SE PUEDE

9. Expresa las siguientes expresiones de forma gráfica y con intervalos:

(c) $-2 \leq x < 5$

[-2,5)

(c) $-1 \leq t \leq 5$

[-1,5]

(e) $-2 \leq y$

$[-2, +\infty)$

(d) $-2 < x < \infty$

$(-2, +\infty)$

(d) $x < 3$

$(-\infty, 3)$

(f) $\{x \in \mathbb{R}/2 < x < 5\}$

(2, 5)

Unión e intersección de intervalos

Ejemplos:

Gráficamente

Conjunto $A = (-6, 4)$

Conjunto $B = [-3, 8)$

Conjunto $A \cap B =$

Conjunto $A \cup B =$

Ejercicios:

10. Con los conjuntos siguientes, calcula las intersecciones de A y B, A y C, D y E, D y H, E y G. Calcula también las uniones de A y G, B y C, C y D, E y H.

A = $(-3, 4)$ B = $(-2, 0]$ C = $[1, 8]$ D = $[-3, 5)$

E = $(-\infty, 3)$ F = $(-\infty, 3]$ G = $(2, +\infty)$ H = $[-4, \infty)$ I = $(-\infty, \infty)$

$A \cap B = (-2, 0]$ $A \cap C = [1, 4)$ $D \cap E = [-3, 3)$ $D \cap H = [-3, 5)$ $E \cap G = (2, 3)$

$A \cup G = (-3, +\infty)$ $B \cup C = (-2, 8]$ $C \cup D = [-3, 8]$ $E \cup H = (-\infty, +\infty)$

Valor absoluto

Ejercicios:

11. Escribe sin valor absoluto:

(a) $|-900| =$

900

(b) $|-\sqrt{5}| =$

$\sqrt{50}$

(c) $|7-\sqrt{50}| =$

$\sqrt{50}-7$

(d) $|4-\sqrt{50}+\pi| =$

$4-\sqrt{50}+\pi$

12. Encuentra los valores de x que cumplen las siguientes condiciones:

(a) $|x| = 2$

± 2

(b) $|x| < 2$

$(-2, 2)$

(c) $|2-x| = -3$

No Sol.

(d) $|3x-6| < 9$

$(-1, 5)$

(e) $|x-4| \leq 3$

$[1, 7]$

(f) $|x-3| = 5$

$x = 8, -2$

(g) $|5-2x| = 6$

$x = \frac{-1}{2}, \frac{11}{2}$

(h) $|4-x| > 5$

$(-\infty, -1) \cup (9, +\infty)$

Entornos

Ejercicios:

13. Escribe como intervalo los siguientes entornos:

(a) $E(0,3)$ $(-3,3)$

(b) $E\left(-2,\dfrac{2}{3}\right)$ $\left(-\dfrac{8}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$

(c) $E[-1,4]$ $[-5,3]$

(d) $E\left[\dfrac{-1}{2},\dfrac{3}{5}\right]$ $\left[-\dfrac{11}{10},\dfrac{1}{10}\right]$

14. Escribe como entorno los siguientes intervalos:

(a) $(-3,5)$ $E\,(1,4)$

(b) $\left[0,\dfrac{7}{2}\right]$ $E\left[\dfrac{7}{4},\dfrac{7}{4}\right]$

(c) $\left[-4,\dfrac{3}{2}\right]$ $E\left[-\dfrac{5}{4},\dfrac{11}{4}\right]$

(d) $(-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$ $E\left(1,1+\sqrt{2}\right)$

4. Potencias. Notación científica.

Potencias de exponente entero

$1^n = 1$	$a^1 = a$	$a^0 = 1, (a \neq 0)$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$		$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$		$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
$a^{-1} = \dfrac{1}{a}, \quad (a \neq 0)$		$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, \quad (a \neq 0)$		$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{b^n}{a^n}$

Ejercicios:

15. Realiza las siguientes operaciones con fracciones y potencias:

(o) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 =$

(p) $\left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^2 =$

(q) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-55} \cdot \left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right]^{30} =$

(r) $\dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{-2}{3}\right)^3 =$

(s) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5}\right)^3 =$

(t) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{11} : \left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\right]^4 =$

(u) $\dfrac{9}{4} : \left(\dfrac{-2}{3}\right)^{-3} =$

(v) $\left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^{-2} =$

(w) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5}\right)^{-3} =$

16. Opera y simplifica:

(a) $\left(\dfrac{3^2}{6^3}\right)^{-2} =$

(b) $\dfrac{2^{-5}}{4^{-2}} \cdot \left(\dfrac{6^{-2}}{4^{-5}}\right)^{-5} =$

(c) $-3^{-2} - (-3)^{-3} =$

(d) $\dfrac{(-4x)^{-3}y^{-2}}{y^{-1}(4x)^{-1}} =$

(e) $\dfrac{-2^{-8} \cdot (-2)^5}{2^{-1}} =$

(f) $\dfrac{x^{-2} \cdot 3y^{-3}}{6xy^{-2}} =$

Notación científica

Ejercicios:

17. Escribe en notación científica y desarrollada:

(a) 752 000 000 (c) 0,0000512 (e) 0,0000007 (g) 15 000

(b) $32 \cdot 10^5$ (d) $75 \cdot 10^{-4}$ (f) $0,03 \cdot 10^6$ (h) $0,0025 \cdot 10^{-5}$

18. Calcula y expresa la solución tanto en forma científica como en forma desarrollada:

(a) $\dfrac{37\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}{2 \cdot 10^{49}}$

(b) $\dfrac{0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 00123}{0,2 \cdot 10^{-49} \cdot 10000}$

(c) $\dfrac{23 \cdot 10^{-12} \cdot 1,04 \cdot 10^{-30} : (1,04 \cdot 10^{-20})}{0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 04}$

(d) $30067 + 23,1 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^6$

(e) $-45000 \cdot 10^{23} - 3,67 \cdot 10^{26} + \dfrac{3}{4} \cdot 10^{27}$

5. Radicales. Propiedades.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejercicios:

19. Escribe en forma de radical o potencia de exponente fraccionario según venga dado:

(a) $x^{2/5}$ (b) $y^{\frac{-1}{3}}$ (c) $z^{-5/3}$ (d) $\sqrt[4]{x^3}$

(e) $\sqrt[5]{x^{-2}}$ (f) $\sqrt{x^3}$ (g) $\sqrt{z}$ (h) $h^{\frac{-2}{3}}$

20. Calcula:

(a) $4^{1/2}$ (b) $125^{1/3}$ (c) $625^{1/4}$

(d) $(-8)^{2/3}$ (e) $64^{5/6}$ (f) $-36^{3/2}$

(g) $\sqrt{\dfrac{25}{16}} =$ (h) $\sqrt[3]{\dfrac{-8}{1000}} =$ (i) $\sqrt{1+\dfrac{5}{4}} =$

21. Simplifica. Para ello expresa la raíz y el radicando de la forma más sencilla posible:

(a) $\sqrt{x^4}$ (c) $\sqrt[3]{-x^7}$ (e) $\sqrt[3]{8}$

(b) $\sqrt[5]{-64}$ (i) $\sqrt[3]{-x^6}$ (k) $\sqrt[4]{64}$

(c) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{x^3}}$ (d) $\sqrt[8]{a^{-6}}$ (f) $\sqrt[10]{\dfrac{1}{(3y)^{15}}}$

(d) $\sqrt[12]{\dfrac{b}{b^5}}$ (j) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{x^6}}$ (l) $\sqrt[6]{\dfrac{81x}{x^5y^8}}$

22. Determina al menos dos radicales equivalentes a cada uno de los siguientes:

(a) $\sqrt[3]{x^2}$ (b) $\sqrt[3]{-x}$ (c) $\sqrt{x^4}$

(d) $\sqrt{6}$ (e) $\sqrt{2x}$ $(f) - 2\sqrt[3]{4x^4}$

23. Determina, de forma razonada y sin usar la calculadora, cuál de los dos es mayor en cada caso:

(a) $\sqrt[4]{30}$ y $\sqrt[3]{10}$ (b) $\sqrt[3]{50}$ y $\sqrt[9]{132567}$ (c) 3 y $\sqrt[3]{30}$ (d) $\sqrt{90}$ y $\sqrt[3]{900}$

24. Opera y simplifica:

(a) $\left(\sqrt{2x^3}\right)^2$ $2x^3$

(b) $\left(x\cdot\sqrt{2x^3}\right)^3$ $2x^7\sqrt{2x}$

(c) $2x\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{8x^2}}\right)^2$ $\dfrac{x^2}{2\sqrt[3]{x}}$

(d) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{4x^2}{(y^2z)^2}}\right)^3$ $\dfrac{4}{y}\sqrt{\dfrac{2x}{z}}$

25. Escribe las siguientes expresiones con un sólo radical con todos los factores bajo la raíz:

(a) $x\sqrt{x}$

(g) $x\cdot x^{2/3}$

(b) $x^2\cdot\sqrt[3]{x^5}$

(h) $y^3\cdot\sqrt{y}$

(c) $2z^{2/3}\cdot\sqrt{z}$

(i) $x\cdot\sqrt[3]{2x^4}\cdot\sqrt[5]{x}$

(d) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}$

$a^2\sqrt[4]{a}$

(j) $2a^3\cdot\sqrt[3]{4a^2}\cdot\sqrt{b}$

$2a^3\sqrt[6]{2^4a^4b^3}$

(e) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$

$\sqrt{x}$

(k) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$

$\sqrt[12]{a^7}$

(f) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{3x^3}}$

$x\sqrt{3x}$

(l) $\dfrac{4z\cdot\sqrt[3]{4z}}{\sqrt[4]{32z^3}}$

$\dfrac{2^2z}{\sqrt[12]{2^7z^5}}$

26. Simplifica las siguientes expresiones dejando la solución con un sólo radical del que se extraigan todos los factores posibles. (En un futuro, deja la solución también racionalizada – ver ejercicios siguientes)

(a) $\dfrac{\sqrt{x^3y}}{\sqrt{(xy)^5}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{xy^2}}$

(b) $\dfrac{\sqrt[3]{x(yz^2)^4}}{\sqrt{x^2y^3z}}$ $\quad z^2\sqrt[6]{\dfrac{z}{x^4y}}$

(c) $\dfrac{x^2\left(\sqrt{x^3}\right)^3}{\sqrt[4]{x^9}}$ $\quad x^4\sqrt[4]{x}$

(d) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2^4}\right)^5}{\sqrt{\sqrt[4]{8}}}\cdot\sqrt{32}$ $\quad 2^8\sqrt[24]{2^{19}}$

(e) $\dfrac{\sqrt{x^3y^5}}{\sqrt[3]{xy^4}}$ $\quad xy\sqrt[6]{xy}$

(f) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{8x^3y}}\cdot\sqrt{8x^5}}{\sqrt[4]{8x^5y}}$ $\quad 2x^2\sqrt{2}$

(g) $\dfrac{(\sqrt[3]{x})^5\cdot\sqrt{x^5}}{\sqrt{\sqrt[4]{x^3}}}$ $\quad x^3\sqrt[24]{x^{19}}$

(h) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{2x^3}\cdot\sqrt[3]{16x^5}}{\sqrt{\sqrt{x^3}}}}{2x\cdot\sqrt{8x^5}}$ $\quad \dfrac{1}{x}\sqrt[12]{\dfrac{1}{2^8x}}$

6. Sumas y restas de radicales.

Ejercicios:

27. Simplifica las siguientes expresiones dejando la solución con un sólo radical del que se extraigan todos los factores posibles.

(a) $\sqrt{x^3 - x^2}$

(b) $\sqrt{4x - 8}$

(c) $\sqrt{x^3 + x^2y}$

(d) $\sqrt[3]{2x^4 - x^3}$

(e) $\dfrac{6x}{\sqrt{4x^3 - 8x^2}}$

(f) $\dfrac{-3\sqrt{20x^3 + 12x^2}}{2x}$

(g) $\dfrac{12x^2 - 6xy}{\sqrt[3]{8x^4 + 8x^3y}}$

28. Simplifica las siguientes expresiones cuando sea posible:

(a) $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - \sqrt{5} =$

$5\sqrt{5}$

(b) $-\dfrac{7}{2}\sqrt{75} - \dfrac{2}{3}\sqrt{27} - \sqrt{12}$

$-\dfrac{43}{2}\sqrt{3}$

(c) $-2x\sqrt[3]{81x} - 3\sqrt[3]{24x^4} =$

$-12x\sqrt[3]{3x}$

(d) $3\sqrt[4]{32} - \sqrt{20} =$

$6\sqrt[4]{2} - 2\sqrt{5}$

(e) $\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{2000} + 4\sqrt{2} =$

$4\sqrt{2} - 48\sqrt[3]{2}$

(f) $-2\sqrt{8} - \sqrt{18} =$

$-7\sqrt{2}$

7. Racionalización.

Ejercicios:

29. Racionaliza las siguientes expresiones simplificando la solución cuando sea posible:

(a) $\dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

(b) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{4}} = -\sqrt[3]{2}$

(d) $\dfrac{-10}{\sqrt[3]{4^2}} = \dfrac{-5\sqrt[3]{2^2}}{2}$

(e) $\dfrac{2x}{\sqrt[5]{x}} = 2\sqrt[5]{x^4}$

(f) $\dfrac{2x}{\sqrt[5]{3x^4}} = \dfrac{2\sqrt[5]{81x}}{3}$

(g) $\dfrac{3x}{\sqrt[3]{16x^5}} = \dfrac{3\sqrt[3]{4x}}{4x}$

(h) $\dfrac{2}{x\sqrt[5]{x^8}} = \dfrac{2\sqrt[5]{x^2}}{x^3}$

(i) $\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{2\sqrt{2x+1}}{2x+1}$

30. Racionaliza las siguientes expresiones simplificando la solución cuando sea posible:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}} = -1-\sqrt{2}$

(c) $\dfrac{6}{-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}+6\sqrt{2}$

(d) $\dfrac{\sqrt{x}}{-\sqrt{3x}+\sqrt{6x}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$

8. Logaritmos. Definición.

Equivalencia entre logaritmos y potencias:

$$\log_b P = n$$

$$P = b^n$$

Otras equivalencias que ya conocías:

Multiplicación y división:

$$a : b = c$$

$$a = b \cdot c$$

Suma y resta:

$$a - b = c$$

$$a = b + c$$

Potencia y raíz:

$$a^n = P$$

$$a = \sqrt[n]{P}$$

Ejemplos A: Cálculo del logaritmo.

Ejemplos B: Cálculo del argumento.

Ejemplos C: Cálculo de la base.

<u>Logaritmo neperiano</u>

Ejercicios:

31. Halla el valor de x en los siguientes casos sin calculadora:

(a) $\log_2 16 = x$

4

(b) $\log_9 1 = x$

0

(c) $\log_4 64 = x$

3

(d) $\ln e^{-4} = x$

-4

(e) $\log_2 0,25 = x$

-2

(f) $\log_3 (1/9) = x$

-2

(g) $\log 0,001 = x$

-3

(h) $\ln \frac{1}{e^3} = x$

-3

(i) $\log 0,1 = x$

-1

(j) $\log_7 49 = x$

2

(k) $\log_5 0,04 = x$

-2

(l) $\log_6 (1/216) = x$

-3

32. Halla el valor de x en los siguientes casos sin calculadora

(a) $\ln x = 3$

e^3

(b) $\log x = -2$

$10^{-2} = 0,01$

(c) $\log_2(2x-5) = 5$

15

(d) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$

4

(e) $\log_{\sqrt[4]{3}} x = 2$

$\sqrt{3}$

(f) $\log_2(x^2-3) = -3$

$\pm\frac{5}{\sqrt{8}} = \pm\frac{5\sqrt{8}}{8}$

(g) $\ln x = -2$

$e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

(h) $\log_3(x+4) = 3$

23

(i) $\log_3(2x-3)^2 - 2 = 0$

$-3, 0$

33. Halla el valor de x en los siguientes casos sin calculadora:

(f) $\log_x 1000 = 3$

$x = 10$

(g) $\log_x 64 = 2$

$x = 8$

(h) $\log_x 64 = 6$

$x = 2$

(i) $\log_x 5 = 2$

$x = \sqrt{5}$

(j) $\log_x 700 = 4$

$x = \sqrt[4]{700}$

(k) $\log_x 2 = -4$

$x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}$

(l) $\log_x 50 = -2$

$x = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

(m) $\log_{x+1} 8 = 2$

$x = \sqrt{8} - 1$

(n) $\log_{x-1} 32 = -2$

$x = \frac{\sqrt{2}}{8} + 1$

Logaritmos con la calculadora:

$$\log_b a = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log b}{\log a}$$

Ejercicios:

34. Halla el valor de x en los siguientes casos. Usa la calculadora para obtener una aproximación a las centésimas de la solución cuando ésta incluya expresiones logarítmicas::

(a) $\log_2 60 = x$

x=0,17

(b) $\log 43000 = x$

x=4,63

(c) $\log_9 60 = x$

x=0,54

(d) $\ln 5 = x$

x=1,61

(e) $5^{4-x} = 125$

$x = 1$

(f) $2^{2x-3} - 4 = 0$

$x = \frac{5}{2}$

(g) $2 \cdot 7^x = 11$

$x = \log_7 \frac{11}{2} \approx 1,14$

(h) $3^{2+x} = 172$

$x = \log_3 172 - 2 \approx -1,79$

(i) $2 \cdot (5^{x-3} + 1) = 9$

$x = 3 + \log_5 \frac{7}{2} \approx 4,28$

9. Problemas con logaritmos.

Ejemplo I.- In seismology (science that studies earthquakes) the magnitude on the Richter scale of the surface waves M that generates an earthquake is related to the energy that it releases E (in ergs) by the following formula:

$$E = 10^{11,8+1,1 \cdot M}$$

If the atomic bomb dropped on Hiroshima in 1945 released an energy amount equal to $E = 8,9 \cdot 10^{20}$ ergs, What is the equivalente magnitude on the Richter scale of the earthquake that it caused?

Ejemplo II.- Mycobacterium tuberculosis is a pathogenic aerobic bacterium, responsible for the great part of cases of tuberculosis in the world. It is known that the amount of bacteria (N) grows according to the equation:

$$N = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{t_m}}$$

Where N_0 is the initial amount (in milligrams) of bacteria, t_m the average duplication time of bacteria and t the time as measured in hours.

In a lab it has been prepared a culture of bacteria with a duplication time of 14 hours. After 2,5 hours it has been measured an amount of 28,3 mg of bacteria.

1. What was the initial amount of bacteria in this culture?
2. What will be the amount of bacteria after 5 hours?
3. How many time do we need in order to triple the initial amount of bacteria?

Ejercicios:

35. El número de personas que utiliza internet en una ciudad viene dado por la relación $N = 1,9^x$; donde x es el número de meses y N el número de personas en miles. ¿Cuándo se alcanzarán los 5000 internautas? ¿Y los 10000?

36. Una población de conejos crece según la ley $P = 50 \cdot 1,02^t$ donde t es el tiempo en días. ¿Qué población habrá pasados 60 días? ¿Con cuántos individuos se inició la población? ¿Cuántos días tendremos que esperar para que la población alcance los 500 conejos?

37. En biología y otras disciplinas se utiliza a menudo el modelo logarítmico $n = k \log A$ que relaciona el número de especies (n) que viven en una región de área A km^2; donde k es una constante que depende del tipo de región. Sabemos, que en una región, el modelo es concretamente $n = 5,6 \cdot \log A$. ¿Cuántas especies habrá en un área de 500 kilómetros cuadrados? ¿Qué área tendría que tener aproximadamente para albergar a 4000 especies?

38. La escala de pH se usa para indicar si una sustancia es ácida o alcalina (básica). Se calcula midiendo el potencial de los iones de hidrógeno contenidos en una sustancia. La fórmula para calcular el pH de una solución acuosa es definida por UC Davis como "el negativo del logaritmo de la concentración de iones de hidrógeno". Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$pH = -\log(H^+)$$

donde H+ es la concentración de iones de hidrógeno medido en moles por litro. Sabiendo que el agua destilada, tiene un pH = 7 en esta escala (neutro), determina la concentración de iones de hidrógeno del agua destilada.

Por otro lado, el jugo de limón, tiene una concentración de cationes de Hidrógeno (H+) 100.000 veces mayor que el agua pura. ¿Cuál es el pH del jugo de limón?

Finalmente, en el laboratorio se ha obtenido una disolución cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0, 0000000000666 moles por litro. ¿Cuál es su pH?

39. El carbono 14 $\left({}^{14}C\right)$ es un isótopo radiactivo que se utiliza con mucha frecuencia para calcular la edad de objetos antiguos, fósiles y restos animales. El carbono 14 decae exponencialmente a una velocidad de 0,01205% por año. La cantidad de carbono 14 que queda en un objeto después de t años puede determinarse mediante la siguiente relación:

$$^{14}C = {}^{14}C_0 \cdot e^{-0{,}0001205t},$$

donde $^{14}C_0$ es la cantidad inicial que estaba presente.

(a) Se ha encontrado un hueso que tiene 9 gramos de carbono 14, y, por sus características se estima que originalmente tendría 24. ¿Cuál es la antigüedad del hueso?

(b) ¿Qué cantidad de carbono 14 tendrá un objeto que inicialmente tiene 50 gramos después de 10.000 años?

(c) En una caja con restos hay una etiqueta que dice “restos con 24000 años de antigüedad”. ¿Cuál es la cota de error para los restos?

40. Una fábrica produce un artículo de metal. Cuanto termina de moldearlo, el objeto está muy caliente y hay que esperar a que se enfríe para manipularlo sin peligro. La expresión que determina la temperatura (en grados centígrados) del objeto cuando han pasado t segundos viene dada por:

$$T = 21 + 532e^{-0.2t}$$

(a) ¿Qué temperatura tendrá el objeto pasados 10 segundos?

(b) ¿Cuál era la temperatura del objeto en el momento en el que termina de ser fabricado?

(c) ¿Cuánto tiempo tendremos que esperar para que la temperatura del objeto sea de 30º C.

41. Una expresión matemática que permite relacionar la Magnitud de las ondas superficiales (M) con la energía liberada E (en ergios), es la obtenida por Gutemberg y Richter (1956):

$$\log E = 11,8 + 1,1M$$

A partir de esta relación, ¿qué cantidad de energía libera un terremoto de magnitud 5 (M=5)?

La bomba atómica lanzada sobre Hiroshima en 1945 liberó una energía de $E = 8,9 \cdot 10^{20}$ ergios. ¿A qué magnitud equivale esta cantidad en la escala Ritcher?

42. Para determinar el enfriamiento de los cuerpos, suele usarse la denominada ley de enfriamiento newtoniana, que viene dada por:

$$T = T_M + (T_0 - T_M)e^{rt}$$

Donde T es la temperatura pasadas t horas, T_M la temperatura ambiente, T_0 la temperatura inicial del cuerpo y r una constante que depende del cuerpo en cuestión (metal, plástico, madera, etc.) A partir de la información anterior, contesta las siguientes cuestiones:

(a) Dos policías hallan un cadáver con signos de violencia cuya temperatura corporal es de 20ºC. Sabiendo que la constante de enfriamiento de un humano con el peso del cuerpo encontrado es aproximadamente 0,52 y que la temperatura ambiente media de las ultimas horas ha sido de 17ºC, determina la hora del fallecimiento suponiendo que la temperatura del cuerpo era inicialmente de 36,5ºC.

(b) En un laboratorio, se quiere determinar la constante de enfriamiento de una nueva aleación de acero. Para ello, calientan el metal hasta alcanzar los 80ºC, luego esperan 1 hora y vuelven a tomar la temperatura, que es de 30ºC. Sabiendo que la temperatura del laboratorio es de 22ºC, determina la constante de enfriamiento del metal.

43. El flujo de intensidad I en un transistor t segundos después de apagar la radio viene dado por la siguiente ecuación:

$$I = 1.2 \cdot 2^{-0.3t} \quad amps$$

(a) ¿Cuál es la intensidad 2 segundos después de apagar la radio?

(b) ¿Cuál es la intensidad antes de apagar la radio?

(c) ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir aproximadamente desde que se apaga la radio para que la intensidad de corriente disminuya sea 0,42 amperios?

10. Propiedades de los logaritmos.

Ejemplos de aplicación de las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned} \log_a X + \log_a Y &= \log_a (XY) \\ \log_a X - \log_a Y &= \log_a \tfrac{X}{Y} \\ k \cdot \log_a X &= \log_a X^k \\ \log_a a &= 1 \\ \log_a 1 &= 0 \\ \log_a a^n &= n \end{aligned}$$

Ejercicios:

44. Usa las propiedades de los logaritmos para expandir al máximo las siguientes expresiones:

(a) $\ln e^2 Y = 2 + \ln Y$

(b) $\log_2 \dfrac{X^2}{2Y} = 2\log_2 X - 1 - \log_2 Y$

(c) $2\ln \dfrac{\sqrt{e}}{XY} = 1 - 2\ln X - 2\ln Y$

(d) $\log_a \dfrac{a}{XY} = 1 - \log_a X - \log_a Y$

(e) $\log \dfrac{X^2}{100Y} = 2\log X - 2 - \log Y$

(f) $8\log_a \sqrt{\dfrac{a^2 X}{Y^2}} = 8 + 4\log_a X - 8\log_a Y$

45. Sabiendo que $\log_5 A = 1,8$; $\log_5 B = 2,4$; $\log_2 C = 3,5$ y $\log_2 D = -1,4$; calcula el valor de las siguientes expresiones de forma exacta:

(a) $\log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{-4}{15}$

(b) $\log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = \dfrac{-11}{10}$

(c) $\log_2 \dfrac{CD}{4} = \dfrac{1}{10}$

(d) $\log_2 \dfrac{2\sqrt{C}}{D^3} = \dfrac{139}{20}$

46. Resuelve las siguientes ecuaciones con logaritmos:

(a) $\log_2(x+2) - 2 = \log_2 3x$

$x = \dfrac{2}{11}$

(b) $\ln(3x+1) - \ln(2x-3) = 0$

$x = -4$

(c) $\log(10x^2 + 3x - 6) - 2\log x = 1$

$x = 2$

(d) $\log_3(2x-5) - \log_3 7 - 2 = 0$

$x = 34$

47. Determina la relación entre las variables x, y, z sin usar logaritmos en los siguientes casos:

(a) $\ln y = x + \ln 7$

$y = 7 \cdot e^x$

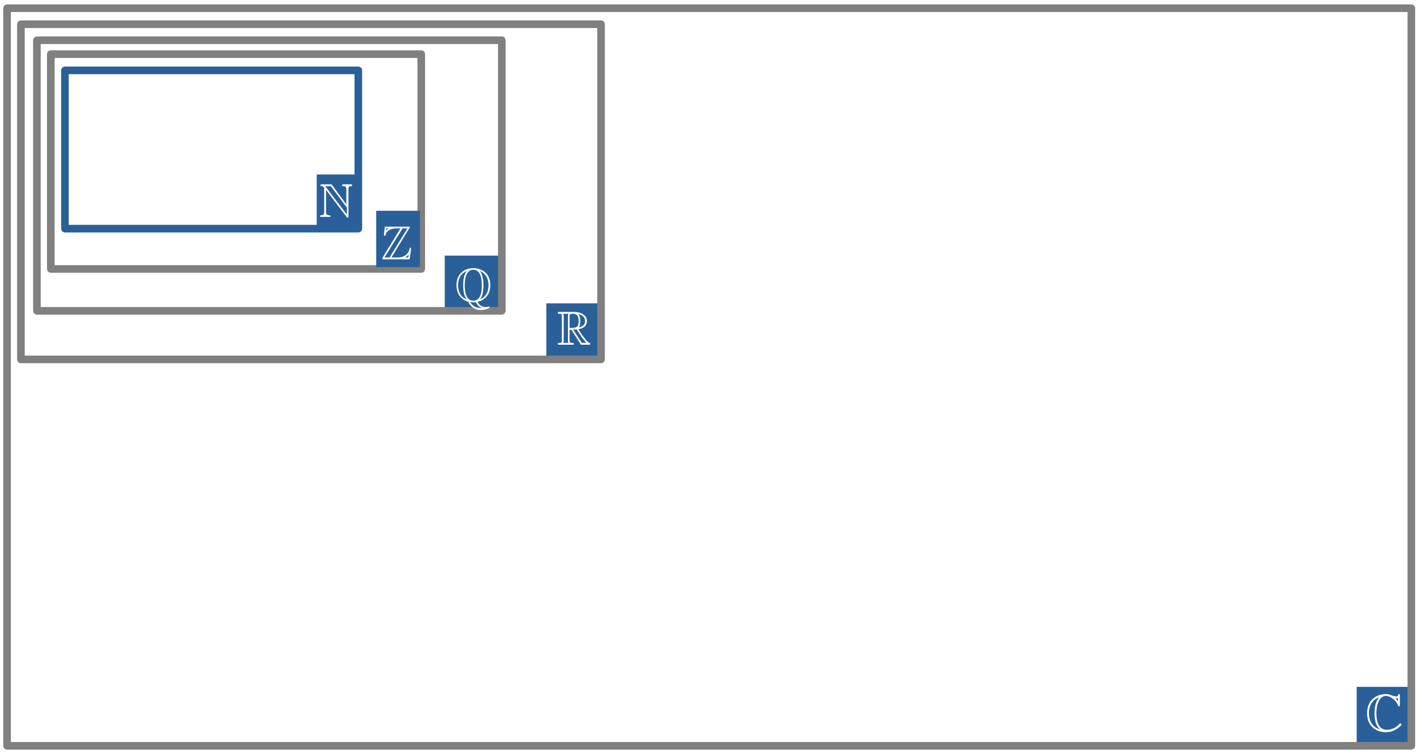
(b) $\log_2 y = 2 - \log_2 x$

$y = \dfrac{4}{x}$

(c) $\log z = 2 - \log x - \dfrac{1}{2}\log y$

$z = \dfrac{100}{x\sqrt{y}}$

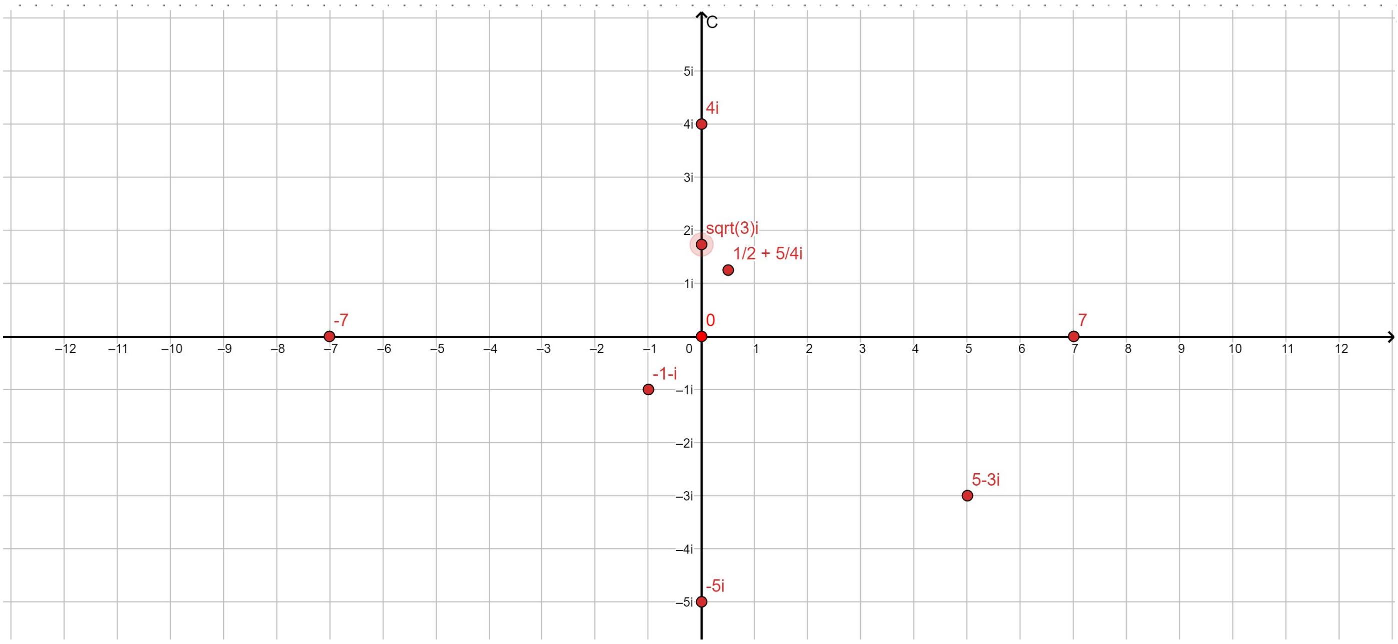
11. Números complejos.



Ejercicios:

48. Representa gráficamente los afijos de los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:

$$5-3i; \quad \frac{1}{2}+\frac{5}{4}i; \quad -5i; \quad 7; \quad \sqrt{3}i; \quad 0; \quad -1-i; \quad -7; \quad 4i$$



49. Obtén las soluciones en $\mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones y representa sus afijos:

(a) $z^2+4=0$	(b) $z^2+6z+10=0$	(c) $3z^2+27=0$	(d) $z^2-4z+5=0$
$z=2i,\ z=-2i$	$z=-3-i,\ z=-3+i$	$z=-3i,\ z=3i$	$z=2-i,\ z=2+i$

50. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de los siguientes números complejos:

$$3-5i; \quad 5+2i; \quad -1-2i; \quad -2+3i; \quad 5; \quad 0; \quad 2i; \quad -5i$$

$Op(3-5i)=-3+5i$ $\quad$ $Op(5+2i)=-5-2i$ $\quad$ $Op(-1-2i)=1+2i$

$\overline{3-5i}=3+5i$ $\quad$ $\overline{5+2i}=5-2i$ $\quad$ $\overline{-1-2i}=-1+2i$

$Op(-2+3i)=2-3i$ $\quad$ $Op(5)=-5$ $\quad$ $Op(0)=0$

$\overline{-2+3i}=-2-3i$ $\quad$ $\overline{5}=5$ $\quad$ $\overline{0}=0$

$Op(2i)=-2i$ $\quad$ $Op(-5i)=5i$

$\overline{2i}=-2i$ $\quad$ $\overline{-5i}=5i$

12. Forma binómica. Suma, resta, multiplicación y división.

Ejercicios:

51. Calcula las primeras cuatro potencias de la unidad imaginaria: i^0, i^1, i^2, i^3, i^4. ¿Qué ocurre? ¿Sabrías calcular a partir de la información anterior $i^{20}, i^{21}, i^{22}, i^{23}$? ¿Podrías calcular i^{2019}? Basándote en lo anterior, da un criterio para calcular cualquier potencia natural de la unidad imaginaria.

$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 0, \dots$

$i^{20} = 1, i^{21} = i, i^{22} = -1, i^{23} = -i, i^{24} = 0, \dots$ $\qquad i^{2019} = i^3 = -i$

52. Calcula: $\dfrac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}} = \dfrac{i^2 - 2i^3}{2 + i^1} = \dfrac{-1 - 2\,(-i)}{2 + i} = \dfrac{-1 + 2i}{2 + i} = \cdots = i$

53. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

(a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) = 18 - 18i$

(b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \dfrac{1}{2}(6 - 4i) = -9i$

(c) $(3 + 2i)(4 - 2i) = 16 + 2i$

(d) $(2 + 3i)(5 - 6i) = 28 + 3i$

(e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i) = 16 - 2i$

54. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

(a) $\dfrac{2+4i}{4-2i} = i$

(b) $\dfrac{1-4i}{3+i} = -\dfrac{1}{10} - \dfrac{13}{10}i$

(c) $\dfrac{4+4i}{-3+5i} = \dfrac{4}{17} - \dfrac{16}{17}i$

(d) $\dfrac{5+i}{-2-i} = -\dfrac{11}{5} + \dfrac{3}{5}i$

(e) $\dfrac{1+5i}{3+4i} = \dfrac{23}{25} + \dfrac{11}{25}i$

(f) $\dfrac{4-2i}{i} = -2-4i$

55. ¿Cuánto debe valer x (valor real) para que $(3-xi)^2$ sea imaginario puro?

$(3-xi)^2 = 9 - x^2 - 6xi \;\rightarrow$ Para que este nº complejo sea imaginario puro, la parte real debe valer 0, por º tanto: $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

56. Comprueba que los complejos conjugados $z_1 = 2 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}i$ son soluciones de la ecuación $z^2 - 4z + 7 = 0$. ¿Si un número complejo es solución de una ecuación de segundo grado con coeficientes reales, también lo será su conjugado siempre?

Sustituyendo las soluciones en la ecuación vemos que se cumple la igualdad...

$z_1 \longrightarrow \left(2+\sqrt{3}i\right)^2 - 4\left(2+\sqrt{3}i\right) + 7 = \cdots = 0 \;\;\rightarrow\;\;$ OK, sí es solución.

$z_2 \longrightarrow \left(2-\sqrt{3}i\right)^2 - 4\left(2-\sqrt{3}i\right) + 7 = \cdots = 0 \;\;\rightarrow\;\;$ OK, sí es solución.

13. Forma polar y trigonométrica.

Ejercicios:

57. Escribe en forma binómica y trigonométrica los siguientes números complejos:

$5_{30^{\circ}}$; $2_{135^{\circ}}$; $2_{495^{\circ}}$; $3_{240^{\circ}}$; $5_{180^{\circ}}$; $4_{90^{\circ}}$; $1_{15^{\circ}}$; $2_{120^{\circ}}$; $3_{270^{\circ}}$;

a) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}+\dfrac{5}{2}i$

b) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

c) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

d) $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

e) -5

f) $4i$

g) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i$

h) $-1-\sqrt{3}i$

i) $-3i$

58. Escribe en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos:

$1+\sqrt{3}i$; 2; $\sqrt{3}+i$; $3i$; $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; -4; $-2i$; $1+i$; $2+2\sqrt{3}i$;

a) $1+\sqrt{3}i=2_{60^{\circ}}$

b) $2=2_{0^{\circ}}$

c) $\sqrt{3}+i=2_{30^{\circ}}$

d) $3i=3_{90^{\circ}}$

e) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i=2_{45^{\circ}}$

f) $-4=4_{180^{\circ}}$

g) $-2i=2_{270^{\circ}}$

h) $1+i=\sqrt{2}_{45^{\circ}}$

i) $2+2\sqrt{3}i=4_{60^{\circ}}$

59. Escribe en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos:

$1-\sqrt{3}i$; $-2\sqrt{3}+2i$; $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; $-2-2i$; $-2-2\sqrt{3}i$;

a) $1-\sqrt{3}i=2_{300^{\circ}}=2\,(\cos 300^{\circ}+i\sin 300^{\circ})$

b) $-2\sqrt{3}+2i=4_{150^{\circ}}=4\,(\cos 150^{\circ}+i\sin 150^{\circ})$

c) $\sqrt{2}-\sqrt{2}i=2_{315^{\circ}}=2\,(\cos 315^{\circ}+i\sin 315^{\circ})$

d) $-2-2i=\sqrt{8}_{225^{\circ}}=\sqrt{8}\,(\cos 225^{\circ}+i\sin 225^{\circ})$

e) $-2-2\sqrt{3}i=4_{240^{\circ}}=4\,(\cos 240^{\circ}+i\sin 240^{\circ})$

14. Operaciones en forma polar. Fórmula de De Moivre.

Ejercicios:

60. Sean los números complejos $z_1 = 4_{60^o}$, $z_2 = 3_{210^o}$. Calcula $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_2}{z_1}$ en forma polar y pasa el resultado a forma binómica.

$$z_1 \cdot z_2 = 12_{270^\circ} = 12\left(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ\right) = -12i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150^\circ} = \frac{3}{4}\left(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{8}i$$

61. Realiza las siguientes operaciones dando el resultado en forma polar:

(a) $1_{150^o} \cdot 5_{30^o} = 1_{180^\circ}$

(b) $6_{45^o} : 3_{15^o} = 2_{30^\circ}$

(c) $2_{10^o} \cdot 1_{40^o} \cdot 3_{70^o} \quad = 6_{120^\circ}$

(d) $\left(2_{30^o}\right)^3 = 8_{90^\circ}$

(e) $\left(2_{150^o}\right)^4 = 16_{600^\circ} = 16_{240^\circ}$

(f) $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^5 = \left(2_{300^\circ}\right)^5 = 32_{1500^\circ} = 32_{60^\circ}$

(g) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^4 = \left(2_{45^\circ}\right)^4 = 16_{180^\circ}$

62. Comprueba que el siguiente número es una raíz cúbica de la unidad:

$$z = \frac{\left(\cos 45^o + i \sin 45^o\right)^2 \cdot \left(\cos 60^o + i \sin 60^o\right)^3}{\left(\cos 7,5 + i \sin 7,5\right)^4}$$

$\rightarrow$ Pasar z a polar y simplificar. Después hay que comprobar que $z^3 = 1$

15. Raíces de números complejos.

Ejercicios:

63. Halla las seis raíces sextas de 1. Represéntalas y exprésalas en forma binómica.

64. Obtén las soluciones en $\mathbb{C}$ de las siguientes ecuaciones:

(a) $z^3 + 27 = 0$.

(b) $z^4 + 1 = 0$

(c) $z^6 + 64 = 0$

65. Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Halla el resto de vértices del pentágono y la longitud de su lado.