

# 2

## Álgebra. Ecuaciones.

2.1. Polinomios. Suma, resta y multiplicación.

2.2. Valor numérico. Raíces de polinomios.

2.3. División de polinomios. Teorema del resto.

2.4. Factorización de polinomios I: Factor común, Ruffini, identidades notables.

2.5. Factorización de polinomios II: Ecuación de 2º grado y ecuación bicuadrada.

2.6. Factorización de polinomios. Proceso general.

2.7. Fracciones algebraicas. Simplificación.

2.8. Suma y resta de fracciones algebraicas.

2.9. Multiplicación y división. Operaciones combinadas.

2.10. Ecuaciones e inecuaciones polinómicas.

2.11. Sistemas de inecuaciones de una variable.

2.12. Ecuaciones con valor absoluto.

2.13. Ecuaciones con raíces cuadradas.

2.14. Ecuaciones con fracciones algebraicas.

2.15. Inecuaciones con fracciones algebraicas.

2.16. Ecuaciones exponenciales.

2.17. Ecuaciones logarítmicas.

## 1. Polinomios. Suma, resta y multiplicación.

### Soluciones ejercicios:

1. Determina el grado, el coeficiente principal y el término independiente de los siguientes polinomios:

(a)  $1 - 3x + 5x^8$

8; 5; 1

(b)  $\frac{3}{4}x^3 + \frac{4}{5}x + 8$

3;  $\frac{3}{4}$ ; 8

(c)  $\frac{1}{2} - \frac{t - 3t^2}{5}$

2; -3/5; 1/2

2. Sean los polinomios:  $A(x) = 3x^2 + x - 4$ ,  $B(x) = 2 - 3x^2$ ,  $C(x) = 3x$  y  $D(x) = 3x^2 + 2$ . Efectúa las operaciones indicadas a continuación:

(a)  $C(x)^2 - 3A(x) + C(x) = 12$

(c)  $B(x) \cdot (2 + 3x^2) + C(x)^2 = -9x^4 + 9x^2 + 4$

(b)  $A(x)^2 = 9x^4 + 6x^3 - 23x^2 - 8x + 16$

(d)  $D(x)^3 = 27x^6 + 54x^4 + 36x^2 + 8$

3. Qué polinomio hay que restar a  $A(x) = 4x^2 - x + 7$  para obtener  $B(x) = x^2 - 1$ .  $3x^2 - x + 8$

4. Si  $A(x) = ax^2 + 3x - 4$ ,  $B(x) = -x^2 + bx - c$  y  $C(x) = 3x^2 + 7x - 8$ , qué tienen que valer  $a, b$  y  $c$  para que  $A(x) + B(x) = C(x)$ .  $a = 4, b = 4, c = 4$

5. Traduce al lenguaje algebraico empleando una sola incógnita:

(a) El cociente entre dos números pares consecutivos.  $\frac{2x}{2x+2}$

(b) Un número menos su inverso.  $x - \frac{1}{x}$

(c) El inverso de un número más el inverso del doble de ese número.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$

(d) La suma de los inversos de dos números consecutivos.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

6. Expresa mediante un polinomio el perímetro de un rectángulo en el que la base es 3 unidades mayor que la altura. Haz lo mismo también para el área.  $P(x) = 2x + 2(x+3) = 4x + 6$ ,  $A(x) = x(x+3) = x^2 + 3x$

7. Expresa mediante un polinomio el volumen de un ortoedro de base un cuadrado de lado 5 unidades y de altura 8 unidades.  $V(x, y, z) = 200$

8. Expresa mediante un polinomio el área de una pirámide de base un cuadrado de lado 12 unidades y altura 8 unidades.  $A(x, h) = 12^2 + 4 \cdot \frac{12 \cdot 10}{2}$

9. De una cartulina cuadrada de 30 cm de lado, recortamos un cuadrado de lado  $x$  en cada esquina para construir una caja sin tapa. Escribe el volumen de la caja en función de  $x$ .  $V(x) = (30 - 2x)^2 \cdot x$

## 2. Valor numérico. Raíces de polinomios.

### Soluciones ejercicios:

10. Halla los siguientes valores numéricos:

(a)  $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$  Halla  $A(2) = 17$  (c)  $B(x) = 4x^3 - 8x^2 + 10$  Halla  $B(-2) = -54$

(b)  $E(x) = 4x^3 - 6x^2 + x - 7$  Halla  $E(-2) = -65$  (d)  $F(x) = 4x^4 - 2x^2 - 3x + 1$  Halla  $F(0) = 1$

11. Comprueba si  $x = -1$  es raíz del polinomio  $A(x) = -2x^2 + 3x + 5$ . **SI**  $A(-1) = 0$

12. Comprueba si  $x = -2$  es raíz del polinomio  $A(x) = -x^3 - 2x^2 - 3x - 6$ . **SI**  $A(-2) = 0$

13. Escribe en cada apartado un polinomio de coeficientes enteros con las raíces indicadas:

(a) 7 y -7 (b) -2 y -3 (c) 0 (doble) y -1 (d) 2 (doble) y -3 (doble)

a)  $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$

b)  $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$

c)  $x^2(x + 1) = x^3 + x^2$

d)  $(x - 2)^2(x + 3)^2$

14. Escribe en cada apartado un polinomio de coeficientes enteros con las raíces indicadas:

(a)  $x_1 = 4, x_2 = -2$  y  $x_3 = 0$  (doble) (c)  $x_1 = -\frac{1}{4}$  y  $x_2 = -1$  (triple)

(b)  $x_1 = 4, x_2 = -2, x_3 = -3$  y  $x_4 = 0$  (d)  $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -2, x_3 = -\frac{1}{3}$  y  $x_4 = 0$

a)  $x^2(x - 4)(x + 2) = x^4 - 2x^3 - 8x^2$

b)  $x(x - 4)(x + 2)(x + 3) = x^4 + x^3 - 14x^2 - 24x$

c)  $(4x + 1)(x + 1)^3 = x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 7x + 1$

d)  $x(3x - 2)(x + 2)(3x + 1) = 9x^4 + 15x^3 - 8x^2 - 4x$

### 3. División de polinomios. Teorema del resto.

#### Soluciones ejercicios:

15. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

(a)  $(3x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 + 1)$  (c)  $(2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7) : (2x^2 - 3x + 1)$

(b)  $(4x^3 - 6x^2 + 7) : (-2x^2 + 3x - 1)$  (d)  $(2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7) : (x^2 + 2x)$

a)  $C : 3x - 2 \quad R : -2x + 1$

b)  $C : -2x \quad R : -2x + 7$

c)  $C : x^2 + 2x \quad R : -2x + 7$

d)  $C : 2x^2 - 3x + 1 \quad R : -2x + 7$

16. Realiza la comprobación de la división en cada apartado del ejercicio anterior.

Hay que hacer la prueba de la división:  $D = d \cdot C + R$

17. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones usando el método de Ruffini:

(a)  $(3x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x + 1)$  (e)  $(4x^3 - 8x^2 + 10) : (x - 4)$

(b)  $(2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7) : (x - 3)$  (f)  $(4x^3 - 6x^2 + 7) : (x + 2)$

(c)  $(4x^3 - 6x^2 + x - 7) : (x + 1)$  (g)  $(4x^4 - 2x^2 - 3) : (1 - x)$

(d)  $(2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7) : (-x + 2)$  (h)  $(4x^3 + 7x + 9) : (-x - 5)$

a)  $C : 3x^2 - 5x + 6 \quad R : -7$

b)  $C : 2x^3 + 7x^2 + 16x + 48 \quad R : 151$

f)  $C : 4x^2 - 14x + 28 \quad R : -49$

c)  $C : 4x^2 - 10x + 11 \quad R : -18$

g)  $C : -4x^3 - 4x^2 - 2x - 2 \quad R : 1$

d)  $C : -2x^3 - 5x^2 - 5x - 10 \quad R : -27$

h)  $C : -4x^2 + 20x - 107 \quad R : 526$

e)  $C : 4x^2 + 8x + 32 \quad R : 138$

18. Sin efectuar la división, halla el resto al dividir los siguientes polinomios entre  $(x - 2)$ :

(a)  $C(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 7 \quad R=27$

(b)  $D(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7 \quad R=15$

19. Sin efectuar la división, halla el resto al dividir los siguientes polinomios entre  $(x + 2)$ :

(a)  $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1 \quad R= -35$

(b)  $D(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7 \quad R= -49$

20. Calcula  $m$  para que el polinomio  $P(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$  sea divisible por  $x + 1$ .  $m = -8$

21. Sabiendo que el resto de la división  $(2x^4 + kx^3 - 7x + 6) : (x - 2)$  es  $-8$ , ¿qué vale  $k$ ?  $k = 1$

22. Halla el valor de  $m$  para que el polinomio  $mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$  sea divisible por  $x + 2$ .  $m = 22$

23. Determina si existe relación de divisibilidad alguno de los polinomios  $(x - 3)$  y  $(x + 1)$ , y los siguientes:

(a)  $x^3 - 3x^2 + x - 3$  Solo con x-3 (b)  $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$  Solo con x-3 (c)  $x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 13$

Solo con x-1

24. Halla todos los divisores de la forma  $(x - a)$  con  $a \in \mathbb{Z}$  de los siguientes polinomios:

(a)  $x^3 + 2x^2 - x - 2$   $(x - 1), (x + 1), (x + 2)$  (b)  $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$   $(x + 3), (x - 2), (x + 2)$

(b)  $x^4 - 10x^2 + 9$   $(x + 1), (x - 1), (x + 3), (x - 3)$  (c)  $x^2 - 5x + 4$   $(x - 1), (x - 4)$

#### 4. Factorización de polinomios I: Factor común, Ruffini, identidades notables.

##### Soluciones ejercicios:

25. Factoriza sacando factor común:

(a)  $x^2 - x = x(x - 1)$       (b)  $2x^3 + x = x(2x^2 + 1)$       (c)  $2x^3 + x^2 + 4x = x(2x^2 + x + 4)$

26. Factoriza usando el método de Ruffini:

(a) $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 2(x + 2)(x - 1)(x + 1)$	(f) $x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$
(b) $3x^3 + 9x^2 - 12x - 36 = 3(x + 3)(x - 2)(x + 2)$	(g) $-2x^3 + x^2 + 8x - 4 = -2(x - \frac{1}{2})(x + 2)(x - 2)$
(c) $2x^4 - 20x^2 + 18 = 2(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$	(h) $-5x^3 + 3x^2 + 20x - 12 =$ $-5(x - \frac{3}{5})(x + 2)(x - 2)$
(d) $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$	
(e) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$	

27. Factoriza usando identidades notables (expresa la solución sin fracciones):

(a) $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$	(f) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$
(b) $9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5)$	(g) $2x^2 - 1 = (\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)$
(c) $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$	(h) $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$
(d) $4 - 9x^2 = (2 + 3x)(2 - 3x)$	(i) $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$
(e) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$	(j) $x^2 - 6xy + 9y^2 = (x - 3y)^2$

#### 5. Factorización de polinomios II: Ecuación de 2º grado y ecuación bicuadrada.

##### Soluciones ejercicios:

28. Factoriza, cuando sea posible, usando la ecuación de segundo grado (expresa la solución sin fracciones):

(a) $x^2 - 5x + 4 =$ $(x - 1)(x - 4)$	(d) $2x^2 + 3x + 1 = 2(x + \frac{1}{2})(x + 1)$	(g) $x^2 + 2x - 2 =$ $(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$
(b) $2x^2 - x + 3 =$ No se puede	(e) $-4x^2 - 3x + 1 = -4(x - \frac{1}{4})(x + 1)$	(h) $3x^2 - 2x + 7 =$ No se puede
(c) $3x^2 + 5 =$ No se puede	(f) $6x^2 - 5x - 21 = 6(x + \frac{3}{2})(x - \frac{7}{3})$	(i) $x^2 + 2x - 1 =$ $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

29. Factoriza y determina las raíces usando la ecuación bicuadrada:

(a) $x^4 - 5x^2 + 4 =$ $(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$	$4(x + 1)(x - 1)(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$	(e) $x^4 - 3x^2 + 2 =$ $(x + 1)(x - 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
(b) $x^4 + 4x^2 + 3 =$ $(x^2 + 1)(x^2 + 3)$	(d) $9x^4 - 10x^2 + 1 =$ $9(x - \frac{1}{3})(x + \frac{1}{3})(x + 1)(x - 1)$	(f) $x^4 - 7x^2 + 10 =$ $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$
(c) $4x^4 - 5x^2 + 1 =$		

#### 6. Factorización de polinomios. Proceso general.

##### Soluciones ejercicios:

30. Factoriza y determina las raíces de los siguientes polinomios (expresa la solución sin fracciones):

(a) $12x^5 - 36x^4 + 27x^3 = 12x^3 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$	(c) $x^3 - x + 6 = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)$
(b) $4x^2 - 8x + 3 = 4 \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{3}{2}\right)$	(d) $10x^4 - 3x^3 - 41x^2 + 12x + 4 =$ $10 \left(x + \frac{1}{5}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x - 2) (x + 2)$

(e) $3x^2 + 2x - 8 = 3 \left(x - \frac{4}{3}\right) (x + 2)$	(h) $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x + 3)(x + 4)(x - 5)$
(f) $x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = (x - 4)^2 (x + 1)$	(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 12 = \text{No se puede}$
(g) $3x^5 - 48x = 3x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$	(j) $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3 =$ $9 \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x + \frac{1}{3}\right) (x - 1)(x - 3)$

31. Completa la siguiente descomposición de polinomios:

(a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9) =$ $(x + 5)(x - 5)(x - 3)^2$	(c) $(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 4) =$ $x(x + 1)(x - 1)^2(x - 4)$
(b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40) =$ $x(x - 7)(x - 5)(x - 8)$	(d) $(3x^2 - 4x + 1)(6x^2 + 9x) =$ $18x \left(x - \frac{1}{3}\right) (x - 1) \left(x + \frac{3}{2}\right)$

32. Escribe en cada apartado un polinomio con las características indicadas:

(a) De segundo grado sin raíces.  $P(x) = x^2 + 1$

(b) De segundo grado con dos raíces dobles.  $P(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

(c) De tercer grado siendo 0 raíz doble.  $P(x) = x^2(x - 1) = x^3 - x^2$

(d) De cuarto grado sin raíces.  $P(x) = x^4 + 1$

(e) De tercer grado con una raíz simple.  $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1) = x^3 - x^2 + x - 1$

(f) De tercer grado con una raíz triple.  $P(x) = (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

## 7. Fracciones algebraicas. Simplificación.

### Soluciones ejercicios:

33. Comprueba si las siguientes fracciones algebraicas son equivalentes:

$$(a) \frac{-1}{x} \text{ y } \frac{-(x+1)}{x(x+1)}$$

SÍ

$$(c) \frac{1}{x+1} \text{ y } \frac{2x}{2x^2+2x}$$

SÍ

$$(e) \frac{x^3-x}{x^3+x^2} \text{ y } \frac{3x-3}{3x}$$

SÍ

$$(b) \frac{1}{x-1} \text{ y } \frac{x+1}{x^2-1}$$

SÍ

$$(d) \frac{x-3}{x^2-3x} \text{ y } \frac{x}{x^2}$$

SÍ

$$(f) \frac{x+4}{x^2+x-12} \text{ y } \frac{1}{x-3}$$

SÍ

34. Simplifica las siguientes fracciones:

$$(a) \frac{x^2+25-10x}{x^2-25} = \frac{1}{x+5}$$

$$(c) \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \text{ y } \frac{x-1}{x} \text{ NO}$$

$$(e) \frac{x^3+3x^2+x+3}{x^3+3x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$$(b) \frac{(x-3)^2x(x+3)}{(x-3)x^2(x+2)} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+2)}$$

$$(d) \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{1}{x+3}$$

$$(f) \frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-x^2-14x+24} = \frac{x}{x+4}$$

## 8. Suma y resta de fracciones algebraicas.

### Soluciones ejercicios:

35. Halla el m.c.m. de los siguientes polinomios:

$$(a) x^2-1 \text{ y } (x+1)^2 (x-1)$$

$$(e) x^2-9 \text{ y } x^2-6x+9 (x+3)(x-3)^2$$

$$(b) x^2+x \text{ y } x^2-x (x)(x+1)(x-1)$$

$$(f) x+4 \text{ y } x^2+x-12 (x+3)(x-3)^2$$

$$(c) x^3-x \text{ y } x^2-1 (x)(x+1)(x-1)$$

$$(g) x^2-3x+2 \text{ y } x^2-4x+3$$

$$(d) x^2+1 \text{ y } x^2 (x^2+1)$$

$$(h) (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$(h) x^2-1 \text{ y } x^2-4 (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

36. Reduce a común denominador y opera:

$$(a) \frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{x^2-3x+9}{x(x-3)}$$

$$(c) \frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x} = \frac{-x^2-x+6}{3x^2}$$

$$(e) \frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{x^2-3x+9}{x(x-3)}$$

$$(b) \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} =$$

$$(d) \frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3} =$$

$$(f) \frac{2x+1}{x+3} - \frac{x^2+5}{x^2+3x} = \frac{x^2+x-5}{x(x+3)}$$

$$\frac{4x}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{-x-9}{(x+1)(x+3)}$$

## 9. Multiplicación y división. Operaciones combinadas.

### Soluciones ejercicios:

37. Opera y simplifica cuando sea posible:

$$(a) \frac{5x-10}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x-2} = 5(x-3)$$

$$(c) \frac{x}{3} \cdot \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x^2+x}{3x-3}$$

$$(e) \frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$(b) \frac{2x+1}{2x-1} : \frac{x^2}{4x-2} = \frac{4x+2}{x^2}$$

$$(d) \frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{3x} = \frac{3x}{x^2-1}$$

$$(f) \frac{2x}{2x-3} : \frac{x+1}{2x+3} = \frac{4x^2+6x}{2x^2-x-3}$$

38. Opera y simplifica cuando sea posible:

$$(a) \left( \frac{1}{x} : \frac{1}{x+1} \right) \cdot \frac{x}{2} = \frac{x+1}{2}$$

$$(b) \left( \frac{2}{x} - \frac{2}{x+2} \right) : \frac{x-2}{x} = \frac{4}{x^2-4}$$

$$(c) \left( \frac{3}{x} - \frac{x}{3} \right) : \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \right) = 3-x$$

$$(d) \frac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x} = \frac{x^2+2x+1}{x}$$

$$(e) \left[ \left( x + \frac{1}{x} \right) : \left( x - \frac{1}{x} \right) \right] (x-1) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$(f) \frac{2}{x} \cdot \left( \frac{1}{x} : \frac{1}{x-1} \right) = \frac{2x-2}{x^2}$$

$$(g) \frac{x-2}{x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{2x^3+x+2}{x^2(x^2-1)}$$

$$(h) \frac{x+2}{2x+1} - \frac{2}{4x^2-1} + \frac{x+1}{2x} = \frac{8x^3+10x^2-5x-5}{2x(2x+1)(2x-1)}$$



## 10. Ecuaciones e inecuaciones polinómicas.

### Soluciones ejercicios:

39. Resuelve usando el método de Ruffini:

(a)  $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$

$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2$

(b)  $3x^3 + 9x^2 = 12x + 36$   $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = -3$

(c)  $2x^4 - 20x^2 + 18 = 0$

$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3, x_4 = -3$

(d)  $x^2 + 6 = 7x$   $x_1 = 1, x_2 = 6$

(e)  $2x^2 = 5x - 3$   $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$

(f)  $x^3 + 2x^2 = 9x + 18$   $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 3$

(g)  $x^3 + 3x^2 = x + 3$   $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -3$

(h)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$

(i)  $x^4 + x^3 = 7x^2 + x - 6$

$x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2$

(j)  $2x^3 + 3x^2 = 2x + 3$   $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -\frac{3}{2}$

(k)  $x^2 + 8x = 2x^3 + 4$   $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2}$

(l)  $3x^2 + 20x = 12 + 5x^3$   $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = \frac{3}{5}$

40. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas:

(a)  $1 - 2(x - 2) \geq 3 - 5x$

$\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$

(b)  $3x - 4 < -7$   $(-\infty, -1)$

(c)  $\frac{1-2x}{5} < 3 - \frac{x}{2}$   $(-\infty, 28)$

(d)  $x^2 - 5x + 4 > 0$

$(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$

(e)  $x^2 - 4x + 3 \leq 0$   $[1, 3]$

(f)  $x^2 - 8 < 2x$   $(-2, 4)$

(g)  $-x^2 - 3x > 2$   $(-2, -1)$

(h)  $x^2 \leq \frac{x-3}{2}$  Sin solución

(i)  $3x^2 + 5 < 0$  Sin solución

(j)  $\frac{2x^2+1}{3} < -x$   $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

(k)  $-4x^2 - 3x > -1$   $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$

(l)  $6x^2 \leq 5x + 21$   $\left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right]$

(m)  $\frac{1}{2}x^2 + x < 1$   $\left(-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\right)$

(n)  $3x^2 + 7 > 2x$   $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

(o)  $x^2 + 2x > 7$

$\left(-\infty, -1 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2} - 1, +\infty\right)$

(p)  $x^3 - 4x \geq 0$   $[-2, 0] \cup [2, +\infty)$

(q)  $x^3 + x^2 > 9x + 9$

$(-3, -1) \cup (3, +\infty)$

41. Resuelve usando la ecuación bicuadrada:

(a)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$   $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$

(b)  $x^4 + x^2 - 2 = 0$   $x_1 = 1, x_2 = -1$

(c)  $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$  Sin solución real

(d)  $x^4 - 10x^2 + 9 > 0$   $(-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$

(e)  $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$   $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{2}$

(f)  $9x^4 + 1 = 10x^2$   $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -\frac{1}{3}$

(g)  $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$   $x_1 = 1, x_2 = 2$

(h)  $x^8 - 17x^4 + 16 \geq 0$   $(-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$

42. Escribe en cada apartado una ecuación polinómica con las características indicadas:

(a) De segundo grado sin solución.  $x^2 + 1 = 0$

$x^2(x - 1) = 0$

(b) De segundo grado con una soluciones dobles.

$(x - 1)^2 = 0$

(d) De cuarto grado sin solución.  $x^4 + 1 = 0$

(c) De tercer grado siendo 0 una solución doble.

(e) De tercer grado con una sola solución.

$(x^2 + 1)(x - 1) = 0$

(f) De tercer grado con una solución triple.

$$|(x - 1)^3 = 0$$

---

### Soluciones ejercicios:

43. Determina dos números **naturales** consecutivos tales que su producto es 72. **8 y 9**

44. Determina tres números consecutivos tales que su producto es  $-120$ . **-6, -5, -4**

45. Determina dos números pares consecutivos tales que su suma de sus cuadrados es 52. **4 y 6**

46. Halla las dimensiones de un rectángulo cuya anchura es 3 unidades mayor que su altura y su área es de 40 metros cuadrados. **Alto: 5, Ancho: 8**

47. Halla las dimensiones de un ortoedro cuya base es un cuadrado y su altura es 3 unidades mayor que el lado de la base y su volumen es de  $1300 \text{ dm}^3$ . **Lado de la base: 10, Altura: 13**

48. Halla las dimensiones de una pirámide de base cuadrangular cuya altura es 2 unidades mayor que el lado de su base y su volumen es de  $96 \text{ dm}^3$ . **Lado de la base: 6, Altura: 8**

49. Halla dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 72 unidades. **8 y 9 o -9 y -8**

50. Halla un número tal que su cubo es 16 unidades mayor que el triple de su cuadrado. **4**

51. Halla tres números consecutivos tales que su producto coincide con 20 veces el mayor de todos ellos. **4, 5 y 6; o -5, -4 y -3**

52. Determina un número tal que la raíz cuadrada del triple del número coincide con el triple del número menos 6 unidades. **3**

53. Halla un número tal que el triple del número menos el doble de la raíz de su número siguiente es 18. **8**

54. Halla un número tal que el doble de la raíz cuadrada del número más el triple de su siguiente es 19. **4**

55. Determina todos los números tales que su cuadrado es mayor que el triple de dicho número.  **$(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$**

56. Determina todos los números tales que la diferencia entre el triple de su cuadrado y el doble de su número siguiente sea menor que 6.  **$\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$**

57. El triple de un número menos su mitad es siempre mayor que 3. ¿Qué números cumplen esta propiedad?  **$\left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$**

## 11. Sistemas de inecuaciones de una variable.

### Ejercicios:

58. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

$$\begin{array}{l|l|l} \text{(a)} \begin{cases} -5x + 3(2x - 1) < 10 \\ x - 2 \geq -5 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} -5x + 3(2x - 1) > 10 \\ x - 2 \leq -5 \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} 3x - 1 > -10 \\ 2x + 3 < 20 \end{cases} \\ \text{(b)} \begin{cases} -5x + 3(2x - 1) > 10 \\ x - 2 \geq -5 \end{cases} & \text{(d)} \begin{cases} 4(x - 2) + 7 > x - 10 \\ 20 - 2(x - 1) > 0 \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} \frac{5x}{3} - 1 < -\frac{19}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > 5 \end{cases} \end{array}$$

59. Determina todos los números que cumplan simultáneamente las dos condiciones siguientes: que su triple sea mayor que 5 y que el doble de su número siguiente sea menor o igual 15.

60. Determina todos los números que cumplan a la vez las dos condiciones siguientes: que el número menos el triple de su siguiente sea mayor que  $-4$  y que la cuarta parte del número aumentado tres unidades sea menor que 8.

## 12. Ecuaciones con valor absoluto.

### Ejercicios:

61. Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

$$\begin{array}{l|l} \text{(a)} |x^2 - 3x| = 4 & \text{(e)} x^3 + |4x| > 0 \\ \text{(b)} |2x - 3| = |x + 4| & \text{(f)} 2x - |x^2 - 1| = -2 \\ \text{(c)} |3x + 4| = 4x + 5 & \text{(g)} |3x - 1| - 7x \geq 8 \\ \text{(d)} 2 + |4x + 5| = |x| - 3x + 1 & \text{(h)} 3x - 2|1 - 2x| < 1 \end{array}$$

### 13. Ecuaciones con raíces cuadradas.

#### Soluciones ejercicios:

62. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales: **TODAS LAS SOLUCIONES SE COMPRUEBAN**

(a)  $\sqrt{2x-3} + 1 = x$   **$x=2$**

(b)  $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+7} = 4$   **$x=2$**

(c)  $\sqrt{2\sqrt{x+2}} - 4 = 0$   **$x=62$**

(d)  $x + 1 + \sqrt{2x^2 + 2x - 3} = 0$   **$x=-2$**

(e)  $\sqrt{1-4x} - 2\sqrt{3+x} = \sqrt{3+x}$   **$x=-2$**

(f)  $2x^2 - 3\sqrt{x^2-3} - 5 = 0$

**$x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = \frac{\sqrt{13}}{2}, x_4 = -\frac{\sqrt{13}}{2}$**

### 14. Ecuaciones con fracciones algebraicas.

#### Soluciones ejercicios:

63. Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas:

(a)  $\frac{6}{x} + \frac{x+1}{x-2} = 6$   **$x_1 = 3, x_2 = \frac{4}{5}$**

(b)  $\frac{2x-3}{x^2-5x} + \frac{x+4}{x} = \frac{3}{4}$   **$x_1 = -23, x_2 = 4$**

(c)  $2x^2 - \frac{3}{x^2} = -1$   **$x_1 = 1, x_2 = -1$**

(d)  $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{26}{35}$   **$x_1 = 6, x_2 = -\frac{8}{13}$**

(e)  $\sqrt{3x + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x} = 1$   **$x = 1$**

(f)  $2\sqrt{x-1} + \frac{x+4}{x} = 5$   **$x_1 = 1, x_2 = 2$**

#### Ejercicios:

64. Halla un número tal que la suma del número y su inverso coincide con la mitad del número aumentado 3 unidades. **Ec:  $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+3}{2}$ ; Sol: 1 o 2**

65. El triple de un número menos su mitad es siempre mayor que 3. ¿Qué números cumplen esta propiedad?  
**Ec:  $3x - \frac{x}{2} > 3$ ; Sol:  $\left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$**

66. Determina un número tal que el doble de su inverso más el cociente entre su siguiente y su anterior es 4.  
**Ec:  $2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x-1} = 4$ ; Sol:  $x = 2; x = \frac{1}{3}$**

67. Determina un número **natural** tal que: el número, más su inverso, más el inverso de su número siguiente, es  $\frac{17}{6}$ . **Ec:  $x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{17}{6}$ ; Sol:  $x = 2$**

68. Descompón el número 60 en dos sumandos de forma que dividiendo un sumando entre el otro se obtenga de cociente 3 y resto 8. **Ec:  $x = 3(60 - x) + 8$ ; Sol: 47 y 13**

69. Halla dos números enteros consecutivos tales que el cociente del mayor entre el menor menos el cociente entre el menor entre el mayor coincide con nueve veces el inverso de su producto.

**Ec:  $\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} = 9 \cdot \frac{1}{x(x+1)}$ ; Sol:  $x = 4$**

70. Determina un número tal que el resultado de la diferencia entre el cociente del número y su anterior, y el cociente de su número siguiente y el cuadrado del número vale  $\frac{5}{4}$ . **Ec:  $\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x^2} = \frac{5}{4}$ ; Sol:  $x = 2$**

71. Determina un número tal que el resultado de la diferencia entre el inverso del número siguiente y el cociente de el número anterior y el cuadrado del número coincide con la mitad de dicho número.

**Ec:  $\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2} = \frac{x}{2}$ ; Sol:  $x = 1$**

72. Halla dos números consecutivos sabiendo que la suma de la cuarta parte y la quinta parte del menor y la suma de la tercera parte y la séptima parte del mayor son también números consecutivos.

Ec:  $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 1 = \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{7}$ ; Sol: 20 y 21

73. El director de un supermercado ha observado que el número de clientes atendidos cada hora por un dependiente está relacionado con su experiencia. Ha estimado que ese número puede calcularse de manera aproximada con la siguiente función:  $C(d) = \frac{40d}{d+3}$ , donde d es el número de días que el dependiente lleva trabajando y C el número de clientes atendidos en una hora.

(a) ¿Cuántos clientes por hora cabe esperar que atienda un dependiente que lleva trabajando 2 días? **16 clientes**

(b) El director sabe que un dependiente empieza a ser rentable a la empresa cuando atiende a 32 clientes por hora. ¿Cuándo sucede esto? **Cuando el dependiente tiene 12 días de experiencia**

(c) ¿Qué sucede con el número de clientes atendidos por hora cuando el dependiente tiene mucha experiencia? **Se aproxima mucho a 40 clientes**

74. Halla dos números consecutivos sabiendo que la suma de la cuarta parte y la quinta parte del menor y la suma de la tercera parte y la séptima parte del mayor son también números consecutivos. **REPETIDO**

75. Descompón el número 60 en dos sumandos de forma que dividiendo un sumando entre el otro se obtenga de cociente 3 y resto 8. **REPETIDO**

## 15. Inecuaciones con fracciones algebraicas.

### Soluciones ejercicios:

76. Resuelve las siguientes inecuaciones con fracciones algebraicas:

(a) $\frac{x+1}{x-2} > 0$ $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$	(e) $\frac{x^2-4}{x+3} < 0$ $(-\infty, -3) \cup (-2, 2)$	(h) $\frac{2x-7}{x+5} > 1$ $(-\infty, -5) \cup (12, +\infty)$
(b) $\frac{2}{x-2} < 0$ $(-\infty, 2)$	(f) $\frac{21}{x^2-1} < 4$ $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (-1, 1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$	(i) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} > \frac{3}{10}$ $\left(-3, \frac{11-\sqrt{481}}{6}\right) \cup \left(0, \frac{11+\sqrt{481}}{6}\right)$
(c) $\frac{3x}{2x-4} \geq 3$ $(2, 4]$	(g) $\frac{x^2+3}{4x} > 1$ $(0, 1) \cup (3, +\infty)$	
(d) $\frac{3x+5}{x^2+1} \geq 0$ $\left[-\frac{5}{3}, +\infty\right)$		

## 16. Ecuaciones exponenciales.

### Ejercicios:

77. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

(a) $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$	(f) $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$
(b) $5^{x^2-5x+6} = 1$	(g) $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$
(c) $2^x + 2^{x+1} = 12$	(h) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$
(d) $2^{3x-1} - 4^{x+3} = 0$	(i) $9^x - 3^x = 6$
(e) $3^x + \frac{1}{3^{x+1}} = \frac{28}{9}$	(j) $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

## 17. Ecuaciones logarítmicas.

### Soluciones ejercicios:

78. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

(a) $\log x + \log 50 = 3$ $x = 20$	(f) $\ln(x-1) + \ln(x+6) = \ln(3x+2)$ $x = 2$
(b) $5 \log_2(x+3) = \log_2 32$ $x = -1$	(g) $\log(x^2+1) - \log(x^2-1) = \log \frac{13}{12}$ $x = -5, x = 5$
(c) $2 \log x = \log(10-3x)$ $x = 2$	(h) $\log(x+9) = 2 + \log x$ $x = \frac{1}{11}$
(d) $\log(5x-3) = \frac{4}{5}$ $x = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{5}}$	(i) $\log \sqrt{3x+5} + \log \sqrt{x} = 1$ $x = 5$
(e) $\frac{1}{2} \log(2x+3) = \log x$ $x = 3$	(j) $2(\log x)^2 + 7 \log x - 9 = 0$ $x = 10, x = \frac{1}{10000\sqrt{10}}$