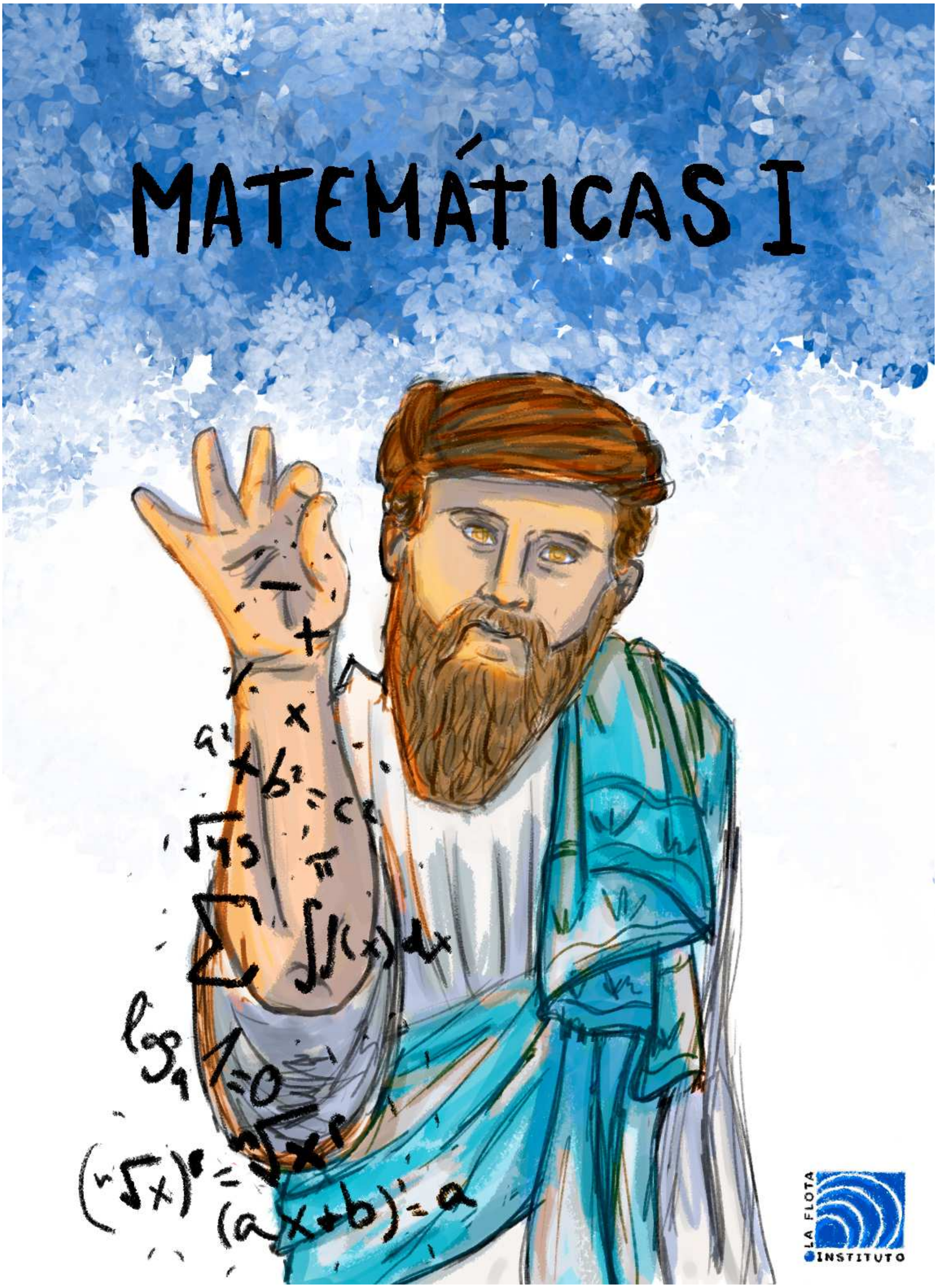
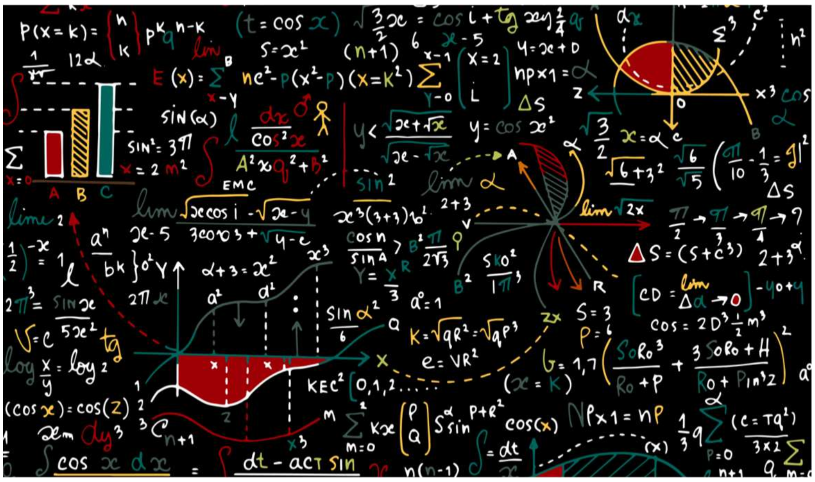


Diseño de la portada: Adriana Delegido

Índice general

Bloque I:

NÚMEROS
Y
ÁLGEBRA



MATEM – I

TEMA 1

NÚMEROS REALES

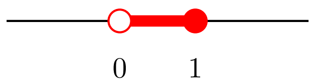
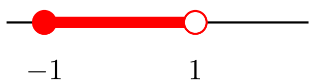
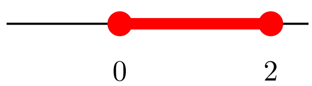
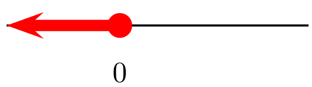
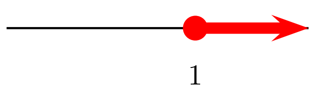
Índice

CONSEGUIR la suficiente habilidad para manejarnos con soltura con los números y las expresiones algebraicas es clave para el desarrollo de las matemáticas en Bachillerato. Los dos primeros temas, que aquí iniciamos, revisan los conceptos ya estudiados durante la ESO, desde un punto de vista eminentemente práctico.

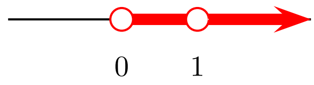
1 Intervalos

Los intervalos son una forma sencilla de referirnos a trozos, finitos o infinitos, de la recta real.

EJEMPLO 1.1

$(-1,2)$	$\{x/ \quad -1 < x < 2\}$	
$(0,1]$	$\{x/ \quad 0 < x \leq 1\}$	
$[-1,1)$	$\{x/ \quad -1 \leq x < 1\}$	
$[0,2]$	$\{x/ \quad 0 \leq x \leq 2\}$	
$(-\infty,2)$	$\{x/ \quad x < 2\}$	
$(-\infty,0]$	$\{x/ \quad x \leq 0\}$	
$(-1,\infty)$	$\{x/ \quad x > -1\}$	
$[1,\infty)$	$\{x/ \quad x \geq 1\}$	

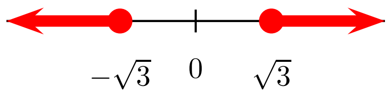
A partir de estos intervalos simples podemos también referirnos a trozos inconexos de la recta real, utilizando los símbolos matemáticos $\cup$ (unión) y $-$ (sustraer, quitar); ***los números positivos excepto el número 1***, por ejemplo, se podría expresar así:

Intervalo	Desigualdad	Gráfica
$\boxed{(0,\infty)-\{1\}} = \boxed{(0,1)\cup(1,\infty)}$	$\{x/\quad x>0, x\neq 1\}$	

O ***los números cuyo cuadrado es mayor o igual que 3***: sabiendo que

$$x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}$$

,

$\{x/\quad x\leq -\sqrt{3}, x\geq \sqrt{3}\}$	$(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},\infty)$	

2 Valor absoluto

Definición 1.

$$\boxed{|x| = \begin{cases} -x & si \quad x\leq 0 \\ x & si \quad x>0 \end{cases}}$$

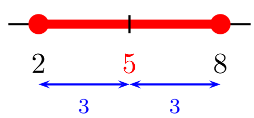
EJEMPLO 1.2

- $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|0| = 0$, $|-2{,}3| = 2{,}3$
- $|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$, pues $\sqrt{2}>1$

EJEMPLO 1.3

¿Para qué valores de x se cumplen las siguientes igualdades o desigualdades?

- $|x| = 3 \iff \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$
- $\left|\dfrac{x^2-1}{2}\right| = 4 \iff \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{2} = 4 \iff x^2 = 9 \iff x=\pm 3 \\ \dfrac{x^2-1}{2} = -4 \iff x^2 = -7 \quad \text{(no sol.)} \end{cases}$
- $|x|<3 \iff -3<x<3 \iff x\in(-3,3)$
- $|x|\geq 3 \iff x\leq -3 \quad \text{o} \quad x\geq 3 \iff x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$
- $|x-{\color{red}5}| \leq {\color{blue}3} \iff -3\leq x-5\leq 3 \iff -3+5\leq x-5+5\leq 3+5 \iff$

  $\iff 2\leq x\leq 8 \iff x\in[2,8]$ (entorno cerrado de centro ${\color{red}5}$ y radio ${\color{blue}3}$) 

3 Radicales

Definición 2.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n}$$

EJEMPLO 1.4

- $\sqrt[3]{8} = 2 \iff 8 = 2^3$
- $\sqrt{9} = 3 \iff 9 = 3^2 \quad (\sqrt{\ } = \sqrt[2]{\ })$
- $\sqrt[5]{-1} = -1 \iff -1 = (-1)^5$
- $\sqrt[n]{5} = \sqrt[n]{5} \iff 5 = \left(\sqrt[n]{5}\right)^n$
- $\nexists\ \sqrt[4]{-16}, \quad \sqrt[3]{4}$ es el número cuyo cubo es $4\ldots$

3.1 Forma exponencial de un radical

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

EJEMPLO 1.5

- $\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$
- $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

3.2 Propiedades

- $\sqrt[n\cancel{p}]{a^{m\cancel{p}}} = \sqrt[n]{a^m}$ (simplificación-equivalencia de radicales)

EJEMPLO 1.6

- $\sqrt[4]{x^6} = \sqrt{x^3}$
- $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$
- $\sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = \sqrt[1]{2^3} = 2^3 = 8$

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$ (potencia de un radical)

Ejemplo 1.7

- $\left(\sqrt[20]{x^4}\right)^5 = \sqrt[20]{(x^4)^5} = \cancel{\sqrt[20]{x^{20}}} = x$

- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ (radical de un radical)

Ejemplo 1.8

- $\sqrt[5]{\sqrt{x}} = \sqrt[10]{x}$
- $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^8}} = \sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$
- $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^8}}} = \sqrt[8]{x^8} = x$

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ (producto de radicales con el mismo índice)

Ejemplo 1.9

- $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2} = x$
- $\underbrace{\sqrt[n]{x} \cdots \sqrt[n]{x}}_{n} = \sqrt[n]{x^n} = x$
- $\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^6} = x^2$

Utilizando la propiedad en sentido contrario al enunciado podremos, si el exponente del radicando es mayor que el del índice, sacar factores del radical:

Ejemplo 1.10

- $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$
- $\sqrt{32x^2y} = \sqrt{2^5x^2y} = \sqrt{2^4 \cdot 2x^2y} = 2^2x\sqrt{2y} = 4x\sqrt{2y}$
- $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$

- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ (división de radicales con el mismo índice)

Ejemplo 1.11

- $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$ (o también $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2\cancel{\sqrt[3]{2}}}{\cancel{\sqrt[3]{2}}} = 2$)
- Sacamos factores del radical: $\sqrt{\dfrac{1}{4x}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{4x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{4x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\, x^2$

Observación 1. *Si lo que nos interesa es, por el contrario, introducir factores en el radical, no tenemos más que elevar al índice los factores que están fuera:*

Ejemplo 1.12

- $\dfrac{\sqrt{x^3}}{x} = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2}} = \sqrt{x}$
- $\dfrac{2}{x}\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3 x}{2x^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^2}{x^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{x^2}}$

3 3 Suma de radicales

Sólo podremos sumar (o restar, claro) aquellos que sean semejantes, es decir, con mismo índice y radicando.

Ejemplo 1.13

- $\sqrt[5]{2} + 3\sqrt[5]{2} = 4\sqrt[5]{2}$
- $3\sqrt[n]{x} + 10\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x} = 12\sqrt[n]{x}$
- $a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} - c\sqrt[n]{x} = (a+b-c)\sqrt[n]{x}$

En ocasiones, sacando factores del radical, conseguimos radicales semejantes para poder sumarlos:

Ejemplo 1.14

- $\sqrt{5}-\sqrt{80}=\sqrt{5}-\sqrt{16\cdot 5}=\sqrt{5}-4\sqrt{5}=-3\sqrt{5}$
- $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}=\sqrt{2\cdot 5^2a}-\sqrt{2\cdot 3^2a}=5\sqrt{2a}-3\sqrt{2a}=2\sqrt{2a}$
- $\sqrt{3}+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{5},\ \sqrt[3]{4}-\sqrt{4}\dots$ son expresiones radicales que no se pueden sumar.

Ejemplo 1.15

- $(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2=5-6=-1$
- $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2-\left[3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2\right]=$

  $=3+2\sqrt{6}+2-\left[3-2\sqrt{6}+2\right]=5+2\sqrt{6}-\left[5-2\sqrt{6}\right]=4\sqrt{6}$

3.4 Racionalización de denominadores

Es el proceso por el cual una fracción con un radical en el denominador se transforma en otra equivalente sin radicales en el denominador. Recordémoslo con ejemplos:

Ejemplo 1.16

- $\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}=\dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=2\sqrt{2}$
- $\dfrac{x}{\sqrt[5]{x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt[5]{x^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}}=\dfrac{x\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}}=\dfrac{\cancel{x}\sqrt[5]{x^3}}{\cancel{x}}=\sqrt[5]{x^3}$
- $\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}\cdot\dfrac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{2(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}=\dfrac{2(3-\sqrt{7})}{3^2-(\sqrt{7})^2}=\dfrac{2(3-\sqrt{7})}{9-7}=$

  $=\dfrac{\cancel{2}(3-\sqrt{7})}{\cancel{2}}=3-\sqrt{7}$

4 Logaritmos

Definición 3. *Si* $a > 0,\ a \neq 1,$

$$\boxed{\log_a x = y \iff x = a^y}$$

Ejemplo 1.17

- $\log_3 9 = 2 \iff 3^2 = 9$
- $\log_2 \dfrac{1}{8} = -3 \iff 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$
- $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \iff 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

4.1 Dos logaritmos especiales

Definición 4. *Llamamos:*

- *Logaritmo decimal:* $\boxed{\log x = \log_{10} x}$
- *Logaritmo neperiano:* $\boxed{\ln x = \log_e x}$,

cuya base $e \approx 2{,}71828182846\ldots$ *es un número irracional.*

Ejemplo 1.18

- $\log 10000 = 4$
- $\log 0{,}001 = -3$
- $\ln e = 1$

4.2 Propiedades de los logaritmos

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$
- $\log_a(x^{\alpha}) = \alpha \log_a x$
- $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{\log_a x}{n}$
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (cambio de base)
- $\nexists \log_a A,\ A \leq 0$

Ejemplo 1.19

- $\log 10 = 1$
- $\ln 1 = 0$
- $\log 2 + \log 50 = \log(2 \cdot 50) = \log 100 = 2$
- $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 \frac{8}{4} = \log_2 2 = 1$ (también $\log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$)
- $\log(x^5) = 5 \log x$
- $\log_5 \dfrac{1}{25} = \log_5 1 - \log_5 25 = 0 - 2 = -2$
- $\ln \sqrt[3]{e} = \dfrac{\ln e}{3} = \dfrac{1}{3}$
- $\dfrac{\log x}{\log 2} = \log_2 x$
- $\nexists \log(-2),\ \nexists \ln 0$

¿Encuentras otras formas de calcular o simplificar estos ejercicios?

5 Ejercicios propuestos

1. Expresa en forma de intervalo o semirrecta los siguientes conjuntos y represéntalos:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} / \ -2 \leq x < 3\}$ $\quad\rightarrow A = [-2, 3)$

   b) $B = \{x \in \mathbb{R} / \ x \geq 3\}$ $\quad\rightarrow B = [3, \infty)$

   c) $C = \{x \in \mathbb{R} / \ -1 \leq x \leq 4\}$ $\quad\rightarrow C = [-1, 4]$

2. Dados los conjuntos del apartado anterior, calcula: $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cup C$, $B \cap C$. $\rightarrow A \cup B = [-2, \infty)$, $A \cup C = [-2, 4]$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = [-1, 3)$, $B \cup C = (-1, \infty)$, $B \cap C = [3, 4]$

3. Escribe en forma de conjunto (desigualdad) los siguientes intervalos y represéntalos:

   a) $[3, 7)$ b) $(-\infty, -2)$ c) $(-3, 4)$ d) $[1, \infty)$

   $\rightarrow$ a) $\{3 \leq x < 7\}$, b) $\{x < -2\}$, c) $\{-3 < x < 4\}$, d) $\{x \geq 1\}$

4. Representa gráficamente y expresa en forma de intervalo el conjunto de números reales x que cumplen: $\rightarrow$ a) $(-2, 8)$, b) $(-\infty, -2] \cup [8, \infty)$, c) $[3, 5]$, d) $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

   a) $|x - 3| < 5$ b) $|x - 3| \geq 5$ c) $|x - 4| \leq 1$ d) $|2x - 3| > 5$

5. Utilizando las propiedades de las potencias o de los radicales y sin utilizar la calculadora, calcula: $\rightarrow$ a) 343, b) $\frac{1}{243}$, c) $\frac{1}{2}$, d) 64

   a) $49^{\frac{3}{2}}$ b) $9^{\frac{-5}{2}}$ c) $4^{-0,5}$ d) $16^{1,5}$

6. Calcula las siguientes potencias: $\rightarrow$ a) $33 - 12\sqrt{6}$, b) $43 + 30\sqrt{2}$

   a) $(2\sqrt{6} - 3)^2$ b) $(5 + 3\sqrt{2})^2$

7. Efectúa las siguientes operaciones:

   a) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ $\quad\rightarrow -1$

   b) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + \sqrt{3})$ $\quad\rightarrow 1 - \sqrt{6}$

   c) $(3\sqrt{5} - \sqrt{2})(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5})$ $\quad\rightarrow -40 + 17\sqrt{10}$

8. Efectúa las siguientes sumas:

   a) $\sqrt{8} - 3\sqrt{50} + 5\sqrt{98} + \sqrt{200}$ $\quad\rightarrow 32\sqrt{2}$

   b) $\sqrt{27} + \sqrt{12} - 3\sqrt{75} - 4\sqrt{3}$ $\quad\rightarrow -14\sqrt{3}$

   c) $2\sqrt{50} - 3\sqrt{40} - 5\sqrt{90} - 4\sqrt{128} - \sqrt{160}$ $\quad\rightarrow -22\sqrt{2} - 25\sqrt{10}$

   d) $\dfrac{\sqrt{50}}{5} - \dfrac{\sqrt{18}}{3} + \dfrac{\sqrt{72}}{4}$ $\quad\rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2}$

   e) $\sqrt{50} - \dfrac{\sqrt{18}}{3} + \dfrac{\sqrt{32}}{5} - \sqrt{72} + \sqrt{2}$ $\quad\rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{5}$

9. Racionaliza: $\rightarrow$ a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, b) $\frac{\sqrt{10}}{5}$, c) $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$, d) $\frac{\sqrt[5]{25}}{5}$, e) $\sqrt[5]{27}$, f) $\sqrt[4]{2}$, g) $\sqrt[6]{a^4b^3}$, h) $3\sqrt{a}$

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{5^3}}$ e) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{3^2}}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2^3}}$ g) $\dfrac{ab}{\sqrt[6]{a^2b^3}}$ h) $\dfrac{3a}{\sqrt{a}}$

10. Racionaliza: → a) $\sqrt{2}-1$, b) $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, c) $2\sqrt{6}-5$, d) $\sqrt{10}+\sqrt{5}$

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{5}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}$

11. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica lo que puedas: → a) $x^2\sqrt{x}$, b) a, c) $a^{-\frac{7}{4}}$, d) 1

a) $\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^{-2}}}$ b) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{6}{4}}}{a^{\frac{-1}{2}}\cdot a^{\frac{5}{3}}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$ d) $16^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[6]{4}}}$

12. Efectúa las siguientes operaciones: → a) $\frac{15+\sqrt{3}}{22}$, b) $\frac{4-13\sqrt{2}}{14}$

a) $\dfrac{1}{5+\sqrt{3}}+\dfrac{2}{5-\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{7}{4+\sqrt{2}}-\dfrac{6}{4-\sqrt{2}}$

13. Racionaliza, calcula y simplifica. → a) $\sqrt{5}$, b) -4

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

14. Aplicando la definición, calcula: → a) 3, b) $\frac{1}{2}$, c) -1, d) -2, e) -4, f) -6

a) $\log_4 64$ b) $\log_{25} 5$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ d) $\log 0{,}01$ e) $\log 0{,}0001$ f) $\log 10^{-6}$

15. Calcula x: → a) 5, b) $\frac{\log_8 45}{2}$, c) $\pm 288\sqrt{3}$, d) ± 2, e) 4, f) $\log_5 200$, g) 2, h) $\frac{e^3}{3}$, i) 2, j) 9000, k) ± 2, l) $\frac{15}{2}$

a) $3x^3 = 375$ b) $8^{2x} = 45$ c) $12^5 = x^2$
d) $x^6 = 64$ e) $3^{2x} = 6561$ f) $\log_5 200 = x$
g) $\log_x 1024 = 10$ h) $\ln 3x = 3$ i) $5^{2x} = 625$
j) $3+\log(x+1000) = 7$ k) $2^{x^2+1} = 32$ l) $4\log_2(2x+1) = 16$

16. Calcula, sin utilizar la calculadora: → a) -2, b) $\frac{2}{3}$, c) $-\frac{1}{2}$, d) $-\frac{1}{2}$, e) $-\frac{1}{2}$, f) $\frac{1}{3}$

a) $\log_4 \dfrac{1}{16}$ b) $\log_5 \sqrt[3]{25}$ c) $\log \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ d) $\log_4 \dfrac{1}{2}$ e) $\log_9 \dfrac{1}{3}$ f) $\log_{0{,}001} 0{,}1$

17. Encuentra la relación entre $\log 2$ y $\ln 2$. → $\log 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10}$ o $\ln 2 = \frac{\log 2}{\log e}$

18. Calcula S utilizando las propiedades de los logaritmos: → a) $\frac{x^2}{y^4}$, b) $(x+2)^5$, c) e^2x^5, d) $\frac{8x}{9}$

a) $\log S = 2\log x - 4\log y$ b) $\ln S = 5\ln(x+2)$
c) $\ln S = 5\ln x + 2$ d) $\log S = 3\log 2 - 2\log 3 + \log x$

19. Calcula: → a) $-\frac{7}{3}$, b) $\frac{9}{2}$

- $\log_x \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}\log_x x^2 + \log_x \sqrt[4]{x^2} - \log_x \sqrt{x^5}$
- $\log_x (2x)^3 + \log_x \frac{\sqrt{x}}{4} - \log_x \frac{2}{x}$

20. Utiliza las propiedades de los logaritmos para obtener el resultado de: → a) 1, b) 3

- $3\log_{90} 15 - 2\log_{90} 10 + 2\log_{90} 12 - 3\log_{90} 3 - \log_{90} 2$
- $2\log_6 30 - \log_6 2 - 2\log_6 5 + 2\log_6 6 - \log_6 3$

21. Calcula el valor de x que cumple: → 30

$$2\log_x 5 + 3\log_x 2 + 4\log_x 3 - 2\log_x 6 - \log_x 15 = 1$$

MATEM – I

TEMA 2

ÁLGEBRA

Índice

DANDO por sentado los conocimientos previos sobre operaciones con polinomios y fracciones algebraicas, resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ambos (lineales y no lineales), en este tema tenemos como objetivo practicar este tipo de ejercicios, con mayor carga de dificultad en algunos casos, para adquirir la fluidez y seguridad necesarias en el cálculo algebraico del bachillerato.

1 Polinomios y fracciones algebraicas

1.1 Factorización de polinomios

Dado un polinomio $P(x)$, el procedimiento completo suele ser el siguiente, y procura hacerlo en el orden dado:

I) Sacar factor común

EJEMPLO 2.20

$3x^4 - 6x^2 = \boxed{3x^2(x^2 - 2)}$

II) Utilizar el producto notable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

EJEMPLO 2.21

- $4x^2 - 9 = \boxed{(2x-3)(2x+3)}$
- $x^3 - x = x(x^2-1) = \boxed{x(x+1)(x-1)}$

III) Si $P(x) = ax^2 + bx + c$, calcular sus raíces $(p,\, q)$ con la fórmula cuadrática y utilizarlas según la expresión $P(x) = a(x-p)(x-q)$

EJEMPLO 2.22

$6x^2 + 7x - 3 = 6(x - \frac{1}{3})(x - \frac{-3}{2}) = 3(x - \frac{1}{3})2(x + \frac{3}{2}) = \boxed{(3x-1)(2x+3)}$

Raíces de $6x^2 + 7x - 3$:

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 121 \to x = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{-7 \pm 11}{12} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ \frac{-3}{2} \end{cases}$$

IV) Si no puedes aplicar ninguna de los anteriores, busca la división (exacta) por Ruffini para factorizar de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{r|ll}
 & \boxed{\quad P(x) \quad} & \\
(x-a) & & \\
a & & \\
\hline
 & \boxed{\quad C(x) \quad} & \multicolumn{1}{|l}{0}
\end{array}
\qquad\qquad
\boxed{P(x) = (x-a)\cdot C(x)}
$$

Recuerda que a siempre se encuentra entre los divisores del término independiente de $P(x)$, y que el proceso se puede reiterar, al menos, hasta que $C(x)$ sea cuadrático, en el que podemos utilizar algún método anterior.

Ejemplo 2.23

$$x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2 = x^2(x^4 - 15x^2 - 42x - 40) = \boxed{x^2(x+2)(x-5)(x^2+3x+4)}$$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -15 & -42 & -40 \\
(x+2) & & & & & \\
-2 & & -2 & 4 & 22 & 40 \\
\hline
 & 1 & -2 & -11 & -20 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
(x-5) & & & & & \\
5 & & 5 & 15 & 20 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 4 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}
$$

x^2+3x+4 no se puede factorizar, pues $\Delta = 3^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = -7$

Observación 2. *Si recuerdas el desarrollo del cuadrado de un binomio, aprovéchalo:*

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Ejemplo 2.24

- $2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) = \boxed{2(x-3)^2}$
- $x^4 + 4x^2 + 4 = \boxed{(x^2+2)^2}$
- $4x^3 - 12x^2 + 9x = x(4x^2 - 12x + 9) = \boxed{x(2x-3)^2}$

1.2 Fracciones algebraicas

1.2.1 Simplificación

Factoriza y elimina factores coincidentes en numerador y denominador. Si los factores son opuestos, los puedes eliminar y poner -1 en su lugar.

Ejemplo 2.25

- $\dfrac{9-x^2}{x^2-3x} = \dfrac{(3+x)\overset{-1}{\cancel{(3-x)}}}{x\cancel{(x-3)}} = \boxed{-\dfrac{3+x}{x}}$
- $\dfrac{x^3-x^2-12x}{x^3-16x} = \dfrac{x(x^2-x-12)}{x(x^2-16)} = \dfrac{\cancel{x}(x+3)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x}(x+4)\cancel{(x-4)}} = \boxed{\dfrac{x+3}{x+4}}$

  Raíces de $x^2 - x - 12$: $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-12) = 49 \Longrightarrow x = \dfrac{1\pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$

1.2.2 Operaciones

Para resolver productos y divisiones, recuerda, copia primero los factores en el lugar adecuado y simplifica (no te lances a multiplicar polinomios en primer lugar).

Ejemplo 2.26

$$\frac{x^2-1}{x} : \left(\frac{x-1}{x^2}\cdot\frac{x+3}{2}\right) = \frac{x^2-1}{x} : \frac{(x-1)(x+3)}{x^2\cdot 2} = \frac{(x^2-1)x^2\cdot 2}{x(x-1)(x+3)} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)\cancel{x}\cdot x\cdot 2}{\cancel{x}\cancel{(x-1)}(x+3)} = \boxed{\frac{2x(x+1)}{x+3}}$$

O sea, que **multiplicar o dividir fracciones algebraicas** consiste en **simplificar**. Para sumar o restar, pasa a común denominador:

Ejemplo 2.27

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{1+2x^2-2x-(x^2+x)}{(x+1)(x-1)}=\boxed{\frac{x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)}}$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2-1=(x+1)(x-1) \\ x+1 \\ x-1 \end{array}\right\} \quad \text{m.c.m.} = (x+1)(x-1)$$

Un ejemplo, por último, con operaciones combinadas:

Ejemplo 2.28

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right):\frac{3}{x^2}=\left(\frac{1(x+3)}{x(x+3)}-\frac{1x}{(x+3)x}\right):\frac{3}{x^2}=\frac{3}{x(x+3)}:\frac{3}{x^2}=$$

$$=\frac{\cancel{3}\,\cancel{x^2}^{\,x}}{\cancel{3}\,\cancel{x}\,(x+3)}=\boxed{\frac{x}{x+3}}$$

2 Ecuaciones

Un aspecto a tener en cuenta, si tratamos de resolver una ecuación de la forma $F(x)=0$, es el de si podemos factorizar $F(x)$:

$$F_1(x)\cdot F_2(x)\cdots F_n(x)=0 \Longrightarrow \begin{cases} F_1(x)=0 \\ F_2(x)=0 \\ \vdots \\ F_n(x)=0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.29

- $(x-2)\cdot(e^x-1)\cdot\ln x=0 \Longrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Longrightarrow \boxed{x=2} \\ e^x-1=0 \Longrightarrow e^x=1 \Longrightarrow \boxed{x=0} \\ \ln x=0 \Longrightarrow \boxed{x=1} \end{cases}$
- $x^4=5x^2 \Longrightarrow x^4-5x^2=0 \Longrightarrow x^2(x^2-5)=0 \Longrightarrow \begin{cases} x^2=0 \Longrightarrow \boxed{x=0} \\ x^2-5=0 \Longrightarrow x^2=5 \Longrightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{5}} \end{cases}$

2.1 Polinómicas de grado mayor que 2

Además de las bicuadradas, que ya conoces, y las del tipo $x^n = a$ que resuelves despejando x según n sea par o impar, habrá que factorizarlas para resolverlas.

Ejemplo 2.30

- $x^2 + 4 = 0 \Longrightarrow x^2 = -4$ $\boxed{\text{(no sol.)}}$
- $x^4 - 81 = 0 \Longrightarrow x^4 = 81 \Longrightarrow x = \pm\sqrt[4]{81} = \boxed{\pm 3}$
- $x^3 + 8 = 0 \Longrightarrow x^3 = -8 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{-8} = \boxed{-2}$

Ejemplo 2.31

$$2x^3 - 3x^2 - 9x = -10 \Longrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0 \Longrightarrow (x-1)(2x^2 - x - 10) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 1} \\ 2x^2 - x - 10 = 0 \end{cases}$$

$(x-1)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -9 & 10 \\ 1 & & 2 & -1 & -10 \\ \hline & 2 & -1 & -10 & \boxed{0} \end{array}$$

Raíces de $2x^2 - x - 10$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 81$$

$$x = \frac{1 \pm 9}{4} = \begin{cases} \frac{10}{4} = \boxed{\frac{5}{2}} \\ \boxed{-2} \end{cases}$$

Observación 3. *Podíamos haber continuado utilizando Ruffini (con $x - 2$ en el divisor) y factorizar completamente el polinomio, resultando la ecuación $(x-1)(x+2)(2x-5)$, que da las soluciones indicadas.*

2.2 Irracionales (radicales)

Método: aislar el término que contiene el radical y elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación. Habrá, finalmente, que comprobar las soluciones, pues a veces al elevar al cuadrado las ecuaciones posteriores añaden soluciones a la original.

EJEMPLO 2.32

$$3x + \sqrt{6x+10} = 35$$
$$\sqrt{6x+10} = 35 - 3x$$
$$\left(\sqrt{6x+10}\right)^2 = (35-3x)^2$$
$$6x + 10 = 1225 - 210x + 9x^2$$
$$\frac{0}{9} = \frac{9x^2 - 216x + 1215}{9}$$
$$0 = x^2 - 24x + 135$$

$\Longrightarrow$

$$\Delta = (-24)^2 - 4\cdot 1\cdot 135 = 36 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x = \frac{24 \pm 6}{2} = \begin{cases} \cancel{15} \\ \boxed{9} \end{cases}$$

COMPROBACIÓN:

$$3\cdot 15 + \sqrt{6\cdot 15 + 10} = 45 + 10 = 55 \quad \text{(No)}$$
$$3\cdot 9 + \sqrt{6\cdot 9 + 10} = 27 + 8 = 35 \quad \text{(Sí)}$$

2.3 Con valor absoluto

Una incógnita está dentro de un valor absoluto. Empieza aislando el valor absoluto,

EJEMPLO 2.33

$$2|4x+2| = 36 \Longrightarrow |4x+2| = 18 \Longrightarrow \begin{cases} 4x+2 = 18 \Longrightarrow \boxed{x=4} \\ 4x+2 = -18 \Longrightarrow \boxed{x=-5} \end{cases}$$

2.4 Exponenciales

Son ecuaciones en las que la incógnita está en el exponente. En general, los logaritmos nos servirán para despejar exponentes en ecuaciones simples:

$$\boxed{a^x = b} \Longrightarrow \log_a(a^x) = \log_a b \Longrightarrow \boxed{x = \log_a b}$$

EJEMPLO 2.34

- $10^{x+2} = 0{,}1 \Longrightarrow \log 10^{x+2} = \log 0{,}1 \Longrightarrow x + 2 = -1 \Longrightarrow \boxed{x=-3}$
- $2^x = 7 \Longrightarrow \log_2(2^x) = \log_2 7 \Longrightarrow \boxed{x = \log_2 7}$
- $e^{x-3} = 1 \Longrightarrow \ln(e^{x-3}) = \ln 1 \Longrightarrow x - 3 = 0 \Longrightarrow \boxed{x=3}$
- $3^{1-x^2} = \frac{1}{27} \Longrightarrow \log_3(3^{1-x^2}) = \log_3 \frac{1}{27} \Longrightarrow 1 - x^2 = -3 \Longrightarrow 4 = x^2 \Longrightarrow \boxed{x=\pm 2}$

Si la ecuación es más compleja, trata de: a) factorizarla, dejando previamente 0 a un lado de la ecuación; b) cambiar de variable.

Ejemplo 2.35

- $xe^{2x} = 2x \implies xe^{2x} - 2x = 0 \implies x\left(e^{2x} - 2\right) = 0 \implies$

$$\implies \begin{cases} x = \boxed{0} \\ e^{2x} - 2 = 0 \implies e^{2x} = 2 \implies \ln e^{2x} = \ln 2 \implies 2x = \ln 2 \implies \boxed{x = \dfrac{\ln 2}{2}} \end{cases}$$

- $2^x + 2^{x+1} = 12$ (Trata de que x esté siempre dentro de exactamente la misma expresión e iguala a otra variable)

$$2^x + 2^x \cdot 2 = 12 \xRightarrow{\boxed{2^x = y}} y + 2y = 12 \implies 3y = 12 \implies y = 4$$

Finalmente deshacemos el cambio para hallar la variable original:

$$2^x = y \implies 2^x = 4 \implies \boxed{x = 2}$$

2.5 Logarítmicas

Si es simple, utiliza la definición. Comprueba siempre si puedes ponerla en la forma $F_1(x) \cdots F_n(x) = 0$. También puedes tratar de poner todo dentro de un solo logaritmo a ambos lados de la ecuación para eliminar logaritmos después. **Comprueba** en la **ecuación inicial** si la solución obtenida hace los **argumentos de los logaritmos positivos**.

Ejemplo 2.36

- $\log x = 4 \implies \boxed{x = 10^4 = 10000}$ (correcta, $10^4 > 0$)
- $\ln x = 4 \implies \boxed{x = e^4}$ (corecta, $e^4 > 0$)
- $\log_3(x-2) = -1 \overset{def.}{\implies} x - 2 = 3^{-1} \implies x - 2 = \frac{1}{3} \implies$

  $\implies x = \frac{1}{3} + 2 = \boxed{\dfrac{7}{3}}$ (correcta, $\frac{7}{3} - 2 > 0$)
- $2x \ln x = 4 \ln x \implies 2x \ln x - 4 \ln x = 0 \implies \ln x(2x-4) = 0 \implies \begin{cases} \ln x = 0 \implies \boxed{x = e^0 = 1} \\ 2x - 4 = 0 \implies \boxed{x = 2} \end{cases}$

  (ambas válidas)
- $2 \log x - \log(10 - 3x) = 0 \implies \log x^2 - \log(10 - 3x) = 0 \implies \log x^2 = \log(10 - 3x) \implies$

  $\implies x^2 = 10 - 3x \implies x^2 + 3x - 10 = 0 \implies x = \begin{cases} \boxed{x = 2} \\ x = -5 \quad \text{(No)} \end{cases}$

3 Sistemas de ecuaciones

Trataremos en esta sección de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Pretendemos, por cualquiera de los métodos conocidos (sustitución, igualación y reducción), llegar a una ecuación con una incógnita que resolveremos como hemos visto en la anterior sección, para finalmente calcular la otra al sustituir la incógnita que acabamos de calcular.

EJEMPLO 2.37

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 9 \\ \sqrt{x+y}+y & = & x \end{array}\right\} \Longrightarrow [\text{ec1}] \quad 2x-9=y \Longrightarrow [\text{ec2}] \quad \sqrt{x+2x-9}+2x-9=x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{3x-9}\,\right)^2 = (9-x)^2 \Longrightarrow 3x-9=81-18x+x^2 \Longrightarrow 0=x^2-21x+90$$

Raíces: $\Delta = (-21)^2 - 4\cdot 1\cdot 90 = 441-360=81 \Longrightarrow x = \dfrac{21\pm 9}{2} = \begin{cases} 6 \\ 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=6 \Longrightarrow y = 2\cdot 6 - 9 = 3 \quad (\text{Sí}) \\ x=15 \Longrightarrow y = 2\cdot 15 - 9 = 21 \quad (\text{No}) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{Sol.: \{(6{,}3)\}}$$

EJEMPLO 2.38

$$\left.\begin{array}{rcl} y & = & x+2 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y} & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow [\text{ec1}] \; y = x+2 \Longrightarrow [\text{ec2}] \; \frac{1\cdot y}{x\cdot y} - \frac{x\cdot x}{y\cdot x} = \frac{0\cdot xy}{xy} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y-x^2=0 \Longrightarrow y=x^2 \Longrightarrow [\text{ec1}] \; x^2 = x+2 \Longrightarrow x^2-x-2=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9 \Longrightarrow x = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \Longrightarrow [\text{ec1}] \; y = 2+2 = 4 \\ x=-1 \Longrightarrow [\text{ec1}] \; y = -1+2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{Sol.: \{(2{,}4),\ (-1{,}1)\}}$$

EJEMPLO 2.39

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\log x - \log y & = & 5 \\ \log(x\cdot y) & = & 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow (+) \begin{array}{rcrcl} 2\log x & - & \cancel{\log y} & = & 5 \\ \log x & + & \cancel{\log y} & = & 4 \\ \hline 3\log x & & & = & 9 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \log x = 3 \Longrightarrow x = 10^3 = 1000 \; (\text{Sí})$$

$$[\text{ec1}] \; 2\log 1000 - \log y = 5 \Longrightarrow 2\cdot 3 - \log y = 5 \Longrightarrow 1 = \log y \Longrightarrow y = 10^1 = 10 \; (\text{Sí})$$

$$\boxed{Sol.: \{(1000{,}10)\}}$$

EJEMPLO 2.40

$$\left.\begin{array}{rcl} \log(x+y)-\log(x-y) & = & \log 5 \\ 2^x & = & 4\cdot 2^y \end{array}\right\} \Longrightarrow [\text{ec1}]\ \log\frac{x+y}{x-y}=\log 5 \Longrightarrow \frac{x+y}{x-y}=5 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x+y=5x-5y \Longrightarrow \frac{0}{2}=\frac{4x-6y}{2} \Longrightarrow 2x-3y=0:$$

$[\text{ec2}]$ $2^x=2^2\cdot 2^y \Longrightarrow 2^x=2^{2+y} \Longrightarrow x=2+y$

$[\text{ec1 final}]$ $2(2+y)-3y=0 \Longrightarrow 4+2y-3y=0 \Longrightarrow 4-y=0 \Longrightarrow 4=y$

$[\text{ec1 final}]$ $2x-3\cdot 4=0 \Longrightarrow 2x-12=0 \Longrightarrow x=6$ (Sí)

$\boxed{Sol.:\{(6{,}4)\}}$

4 Método de Gauss para sistemas lineales

En este curso sólo lo estudiaremos para sistemas 3×3 (3 ecuaciones con 3 incógnitas). Se generalizará el curso que viene a sistemas de cualquier dimensión.

EJEMPLO 2.41

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & & & - & z & = & 9 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 13 \end{array}\right\} \text{es un sistema } 3\times 3$$

4.1 Matriz asociada a un sistema

Está formada por los coeficientes y términos independientes del sistema dispuestos ordenadamente en filas (correspondientes a cada ecuación) y columnas (correspondientes a cada incógnita, la última la de los términos independientes).

EJEMPLO 2.42

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & -2 & 13 \end{array}\right) \text{ es la matriz asociada al sistema del ejemplo anterior.}$$

4.2 Sistemas escalonados

Si el sistema aparece de forma que en la ecuación siguiente se elimina al menos una incógnita de la anterior, el sistema está escalonado.

Ejemplo 2.43

El sistema correspondiente a la siguiente matriz esá escalonado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 5 \\ & - & 2y & + & 3z & = & 5 \\ & & & - & 2z & = & -6 \end{array}\right\}$$

La importancia de estos sistemas estriba en la facilidad para resolverlos: empezando desde la ecuación con una sola incógnita,

$$\left.\begin{array}{l} \text{[ec3]: } -2z = -6 \Longrightarrow \boxed{z=3} \\ \text{[ec2]: } -2y+3z=5 \Longrightarrow -2y+3\cdot 3=5 \Longrightarrow -2y+9=5 \Longrightarrow \boxed{y=2} \\ \text{[ec1]: } x+2y=5 \Longrightarrow x+2\cdot 2=5 \Longrightarrow x+4=5 \Longrightarrow \boxed{x=1} \end{array}\right\} \quad \boxed{Sol.:\{(1,2,3)\}}$$

4.3 Operaciones con filas que mantienen la equivalencia

Es evidente que en cualquier sistema puedes:

I) **intercambiar dos ecuaciones** (dos filas de la matriz asociada)

II) **sustituir una ecuación** (parte izquierda y derecha, respectivamente) **por un múltiplo suyo no nulo** (multiplicar una fila de la matriz asociada por un número)

III) **Sustituir una ecuación** (parte izquierda y derecha, respectivamente) **por la suma de ella y cualquier otra** (sustituir una fila por la suma de ella y cualquier otra). Esto es lo que conoces por método de reducción

y la solución no cambia (el sistema resultante es equivalente).

4.4 Método de Gauss

Aplicando estas operaciones de manera adecuada, siempre podremos llegar a un sistema escalonado, del que es fácil extraer la solución. Este proceso se conoce como **Método de Gauss**. Veámoslo con un ejemplo:

EJEMPLO 2.44

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & & & - & z & = & 9 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 13 \end{array}\right\} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & -2 & 13 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 4F_3-7F_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right).$$ De esta última matriz,

[ec3]: $\boxed{z = -5}$

[ec2]: $4y - 3z = 3 \Longrightarrow 4y - 3\cdot(-5) = 3 \Longrightarrow 4y + 15 = 3 \Longrightarrow \boxed{y = -3}$

[ec1]: $x + 2y = 5 \Longrightarrow x - 2y + z = 3 \Longrightarrow x - 2\cdot(-3) + (-5) = 3 \Longrightarrow$
$x + 6 - 5 = 3 \Longrightarrow \boxed{x = 2}$

$\boxed{Sol.: \{(2,-3,-5)\}}$

Para hacerlo más rápido, se suelen aplicar las operaciones II) y III) a la vez. Por ejemplo, al indicar $F_2 - 2F_1$ señalamos que hemos multiplicado primero la F_1 por -2 y después hemos sustituido F_2 por la suma de F_2 y $-2F_1$.

También aligera el proceso el hacer sobre la misma matriz el primer cero de F_3 con $F_3 - 3F_1$ (eliminar la x de la tercera ecuación).

Como acabas de ver, el método consiste en hacer ceros bajo el primer término (no nulo) de la primera columna. Después, sin utilizar la primera fila, hacemos un cero más en la tercera fila de los que hay en la segunda (si hubiera más ecuaciones, seguiríamos este proceso; ya lo verás en próximo curso).

4.5 Clasificación de sistemas

Una vez escalonado el sistema puede ocurrir que la última ecuación, al hacer un cero más desde la izquierda, sea:

a) Como en los ejemplos anteriores, $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{\neq 0} & k \end{array}\right)$, $k \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ Tiene una **única solución**, es un **Sistema Compatible Determinado** (**SCD**).

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \boxed{\neq 0} \end{array}\right) \Longrightarrow$ **No tiene solución**, es un **Sistema Incompatible** (**SI**).

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Tiene **infinitas soluciones**, es un **Sistema Compatible Indeterminado** (**SCI**).

Ejemplo 2.45

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & 2z & = & 4 \\ 4x & + & y & - & z & = & 7 \\ x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right\} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} F_3 \\ \\ F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ F_2-4F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -15 & 15 & 7 \\ 0 & -10 & 10 & 4 \end{array}\right)_{15F_3-10F_2} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -15 & 15 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right) \Longrightarrow \textbf{SI} \text{ (sin solución)}$$

Ejemplo 2.46

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & 2z & = & 4 \\ 4x & + & y & - & z & = & 7 \\ x & + & 4y & - & 4z & = & -2 \end{array}\right\} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & -4 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} F_3 \\ \\ F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -4 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ F_2-4F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & -15 & 15 & 15 \\ 0 & -10 & 10 & 10 \end{array}\right)_{15F_3-10F_2} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & -15 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \textbf{SCI} \ (\infty \text{ soluciones})$$

Podemos también describir estas soluciones:

[ec3]: $0 = 0$ (z puede ser cualquier número, p. e., $\boxed{z = \alpha}$)

[ec2]: $\dfrac{-15y + 15z}{15} = \dfrac{15}{15} \Longrightarrow -y + z = 1 \Longrightarrow -y + \alpha = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{\alpha - 1 = y}$

[ec1]: $x + 4y - 4z = -2 \Longrightarrow x + 4(\alpha - 1) - 4\alpha = -2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x + \cancel{4\alpha} - 4 - \cancel{4\alpha} = -2 \Longrightarrow \boxed{x = 2}$

$\boxed{\text{Sol.: } \{(2, \alpha - 1, \alpha)\}}$

Las infinitas soluciones se pueden conseguir dándole cualquier valor real a α. Son soluciones, por ejemplo,

$\ldots \boxed{\alpha = -1 \Longrightarrow (2, -2, -1)} \ldots \boxed{\alpha = 0 \Longrightarrow (2, -1, 0)} \ldots \boxed{\alpha = 1 \Longrightarrow (2, 0, 1)} \ldots$

4.6 Resolución de problemas

Para resolver un problema que requiere el planteamiento de un sistema de ecuaciones es conveniente seguir los siguientes pasos:

I) Definición precisa de las incógnitas.

II) Planteamiento de las ecuaciones.

III) Resolución del sistema: por Gauss o por otros métodos.

IV) Análisis crítico de las solución encontrada: ¿es coherente con el enunciado?

EJEMPLO 2.47

Una empresa fabrica tres tipos de productos; para ello utiliza las máquinas que llamaremos A, B y C. Cada unidad del primer producto necesita 1 hora de tiempo de la máquina A, 2 de la B y 5 de la C; cada unidad del segundo producto requiere, respectivamente, 3, 1 y 2 horas; y cada unidad del tercero precisa 1, $\frac{1}{2}$ y 1 hora de cada máquina. Además, durante una semana la máquina A funciona durante 300 horas, la B 195 horas y la C 440 horas. Si se aprovecha todo el tiempo de funcionamiento de las máquinas, ¿cuántas unidades de cada producto se fabrican semanalmente?

Solución: En este tipo de problema es conveniente organizar los datos con una tabla:

Máquinas \ Productos	1º	2º	3º	Total horas
A	1	3	1	300
B	2	1	$\frac{1}{2}$	195
C	5	2	1	440
Unidades semanales	x	y	z	

Está claro que hemos llamado x, y, z al número de unidades de cada producto que se fabricarán semanalmente.

Las ecuaciones salen ahora fácilmente si calculamos el número total de horas por semana trabajadas por cada máquina. En efecto:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Horas trabajadas en A:} & 1x+3y+1z=300 \\ \text{Horas trabajadas en B:} & 2x+1y+\frac{1}{2}z=195 \\ \text{Horas trabajadas en C:} & 5x+2y+1z=440 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+z=300 \\ 4x+2y+z=390 \\ 5x+2y+z=440 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 300 \\ 4 & 2 & 1 & 390 \\ 5 & 2 & 1 & 440 \end{array}\right)_{\substack{F_2-4F_1 \\ F_3-5F_1}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 300 \\ 0 & -10 & -3 & -810 \\ 0 & -13 & -4 & -1060 \end{array}\right)_{10F_3-13F_2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 300 \\ 0 & -10 & -3 & -810 \\ 0 & 0 & -1 & -70 \end{array}\right)$$

[ec3]: $-z=-70 \Longrightarrow \boxed{z=70}$

[ec2]: $-10y-3z=-810 \Longrightarrow -10y-3\cdot 70=-810 \Longrightarrow \boxed{y=60}$

[ec1]: $x+3y+z=300 \Longrightarrow x+3\cdot 60+70=300 \Longrightarrow \boxed{x=50}$

Se fabricarán: 50 unidades del primer producto, 60 del segundo y 70 del tercero.

□

5 Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas. Estudiamos sólo las inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita.

5.1 Inecuaciones lineales

Se resuelven despejaando, igual que las euaciones, sólo que teniendo en cuenta que si en algún momento tenemos que multiplicar o dividir la inecuación por un número negativo, hay que cambiar el sentido de la desigualdad (p. e., $-1 < 3 \xRightarrow{\cdot(-2)} -1\cdot(-2) > 3\cdot(-2) \implies 2 > -6$)

Esa excepción se puede evitar si, antes de despejar la incógnita, la cambiamos al otro lado en caso de ser negativa.

EJEMPLO 2.48

$$\begin{aligned} \frac{1-3x}{2} &< -1 \\ \cancel{2}\cdot\frac{1-3x}{\cancel{2}} &< -1\cdot 2 \\ 1-3x &< -2 \\ \frac{-3x}{-3} &< \frac{-3}{-3} \\ x &> 1 \end{aligned}$$

o también

$$\begin{aligned} \frac{1-3x}{2} &< -1 \\ \cancel{2}\cdot\frac{1-3x}{\cancel{2}} &< -1\cdot 2 \\ 1-3x &< -2 \\ -3x &< -3 \\ 3 &< 3x \\ \frac{3}{3} &< \frac{3x}{3} \\ 1 &< x \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Sol: } (1,\infty)}$

5.2 Inecuaciones cuadráticas

Reduciendo primero la inecuación a una de las formas $ax^2 + bx + c \ \boxed{<, \leq, >, \geq}\ 0$, se trata entonces de estudiar el signo de la expresión $ax^2 + bx + c$. Para ello resolvemos antes la igualdad, que nos da los x para los que la función se anula (puede cambiar de signo).

EJEMPLO 2.49

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Raíces: $\Delta = 9, \quad x = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

	$(-\infty,1)$	1	$(1,4)$	4	$(4,\infty)$
x^2-5x+4	+	0	−	0	+
		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	

$0 \in (-\infty,1) \implies 0^2 - 5\cdot 0 + 4 = 4 > 0\ (+)$
$2 \in (1,4) \implies 2^2 - 5\cdot 2 + 4 = -2 < 0\ (-)$
$5 \in (4,\infty) \implies 5^2 - 5\cdot 5 + 4 = 4 > 0\ (+)$

$\boxed{\text{Sol: } [1,4]}$

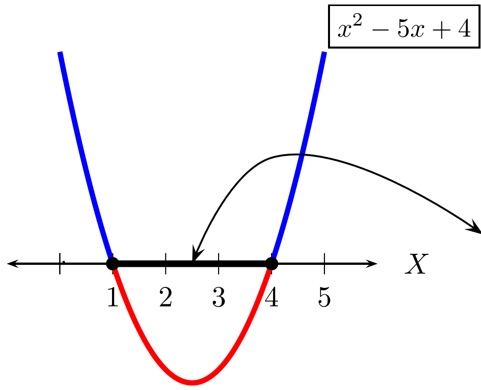
Conocido un simple esbozo de la gráfica de la función cuadrática –parabólica– respectiva (teniendo al otro lado de la inecuación 0), hay una forma más rápida de resolverla. Para el ejemplo anterior, con sólo saber los cortes –si los hay– con el eje OX (las raíces de la expresión cuadrática) y si las ramas de la parábola se dirigen hacia arriba o hacia abajo (según el signo del coeficiente principal) la solución es:

EJEMPLO 2.50

$x^2 - 5x + 4 \leq 0$

Raíces de $x^2 - 5x + 4$: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 \Longrightarrow x = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

Coeficiente principal: $a = 1$ $(> 0) \Longrightarrow$ las ramas van hacia arriba.



Desigualdad de tipo $\leq$: las x que buscamos deben tener la gráfica 'por debajo de' o 'sobre' el eje X

$\boxed{\text{Sol: } [1, 4]}$

5.3 Inecuaciones racionales

Son aquellas que se pueden reducir a la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\boxed{<, \leq, >, \geq}$ 0, P y Q polinomios. Para estudiar el signo de la expresión, habrá que calcular las raíces de numerador y denominador, que es donde la expresión racional puede cambiar de signo.

EJEMPLO 2.51

$$\frac{x}{x-2} > 0$$

$$\frac{x}{x-2} = 0$$

$\boxed{x = 0}$ | $x - 2 = 0$ $\boxed{x = 2}$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$\dfrac{x}{x-2}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
	$\uparrow$				$\uparrow$

$-1 \in (-\infty, 0) \Longrightarrow \dfrac{-1}{-1-2} = \dfrac{1}{3} > 0$ $(+)$

$1 \in (0, 2) \Longrightarrow \dfrac{1}{1-2} = -1 < 0$ $(-)$

$3 \in (0, \infty) \Longrightarrow \dfrac{3}{3-2} = 3 > 0$ $(+)$

$\boxed{\text{Sol: } (-\infty, 0) \cup (2, \infty)}$

Ejemplo 2.52

$$\frac{1-x}{x^2-4} < 0$$
$$\frac{1-x}{x^2-4} = 0$$

$1 - x = 0$, $\boxed{1 = x}$ | $x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 4$, $\boxed{x = \pm 2}$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,\infty)$
$\frac{1-x}{x^2-4}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
			$\uparrow$				$\uparrow$

$$-3 \in (-\infty,-2) \Longrightarrow \frac{1-(-3)}{(-3)^2-4} = \frac{4}{5} > 0\ (+)$$
$$0 \in (-2,1) \Longrightarrow \frac{1-0}{0^2-4} = -\frac{1}{4} < 0\ (-)$$
$$1{,}5 \in (1,2) \Longrightarrow \frac{1-1{,}5}{(1{,}5)^2-4} = \frac{-}{-} > 0\ (+)$$
$$3 \in (2,\infty) \Longrightarrow \frac{1-3}{3^2-4} = -\frac{2}{5} < 0\ (-)$$

$$\boxed{\text{Sol: } (-2,1) \cup (2,\infty)}$$

6 Ejercicios propuestos

1. Factoriza los siguientes polinomios:

   a) $2x^3 - 2x^2 - 2x + 2$ b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ c) $-3x^3 - 6x^2 - 6x - 3$

   d) $x^4 - 25x^2 + 144$ e) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ f) $8x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 3x$

   g) $6x^2 + 7x + 2$ h) $x^3 - 2x^2 + x$

   → a) $2(x-1)^2(x+1)$, b) $(x-2)(x+2)(x+3)$, c) $-3(x+1)(x^2+x+1)$, d) $(x-4)(x-3)(x+3)(x+4)$, e) $(x-1)^2(x+2)^2$, f) $x(x-1)(2x+3)(4x-1)$, g) $(2x+1)(3x+2)$, h) $x(x-1)^2$

2. Opera, simplificando el resultado: → a) $\dfrac{x(3x+1)}{(x-1)^2(x+1)}$, b) $\frac{2}{x}$, c) $x(x-2)$, d) $\dfrac{1}{x}$, e) $\dfrac{4}{5(x+1)}$, f) 1

   a) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2x}{x^2-2x+1} - \dfrac{1}{x^2-1}$ b) $\dfrac{1}{x^2+x} - \dfrac{1}{x^2-x} + \dfrac{2x}{x^2-1}$

   c) $\dfrac{x}{x-3} \cdot \dfrac{x^2-4}{x+3} \cdot \dfrac{x^2-9}{x+2}$ d) $\left(\dfrac{2x}{x^2-4} - \dfrac{1}{x+2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)$

   e) $\dfrac{24x-12}{5x^2-5} : \dfrac{6x-3}{x-1}$ f) $\left(\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right) : \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x}{1+x}\right)$

3. Resuelve: → a) $\frac{3}{2}$, b) $\frac{23}{3}$; 3, c) 8, d) $\frac{4}{5}$, e) 1; $-\frac{1}{2}$, f) $\frac{1}{2}$; -1

   a) $\dfrac{x+4}{x-4} - \dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{24}{x^2-16}$ b) $15 - \dfrac{8}{5-x} = \dfrac{12}{9-x} + 9$

   c) $\dfrac{5}{x^2-x-6} = \dfrac{3}{x^2-4} + \dfrac{3}{2x^2-10x+12}$ d) $\dfrac{x+1}{3x-6} - \dfrac{x-1}{2x+4} = \dfrac{10-x^2}{6x^2-24}$

   e) $\left(1 - \dfrac{2}{3-x}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2x} + 1\right) = 0$ f) $(x^2-4)(x+1) = (x+7)(x^2-1)$

4. Resuelve: → a) 51, b) 81, c) 7, d) 8, e) 9, f) 5

   a) $\sqrt{x-2} = 7$ b) $\sqrt{x} - 2 = 7$ c) $\sqrt{x+2} - x = -4$

   d) $x - \sqrt{x+1} = 5$ e) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 5$ f) $\sqrt{7-x} - \sqrt{5-x} = \sqrt{2}$

5. Resuelve: → a) 0; 9; -9, b) $\pm\sqrt{3}$, c) ± 1, d) ± 2, e) $\frac{18}{25}$

   a) $x^4 - 81x^2 = 0$ b) $x^2(x^2+1) = 12$

   c) $x^4 - 1 = 0$ d) $(x-4)^2 = 20 - 8x$

   e) $\dfrac{3}{4}x - \left(2x + \dfrac{3}{5}\right) = x - \dfrac{7}{10} - \left(2 - \dfrac{2}{3}x\right)$

6. Resuelve: → a) 1; -1; -2; $\frac{3}{2}$, b) 1; $\frac{3}{2}$, c) 2, d) -2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$, e) 2; -2; -3

   a) $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$ b) $2x^3 - 7x^2 + 8x = 3$ c) $x^3 = x^2 + 4$

   d) $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = 0$ e) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

7. Resuelve: → a) 4,41, b) -6, c) $\pm\sqrt{2}$, d) $-1{,}15$, e) 2; -4

   a) $2e^{x-4} = 3$ b) $25 \cdot 5^{x+1} = \dfrac{1}{125}$ c) $\sqrt{3^{3x^2-2}} = 9$

   d) $7 \cdot 6^{x+2} = 32$ e) $2^{(x^2)} \cdot 2^{2x} - 256 = 0$

8. Resuelve: → a) 1, b) 3, c) 5, d) 8, e) 2; 1, f) $\frac{1}{3}$; 0, g) −2; 1

   a) $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=7$
   b) $3^{x-1}+3^x+3^{x+1}=117$
   c) $2^{x+3}+2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=480$
   d) $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}=240$
   e) $5^{2x}-30\cdot 5^x+125=0$
   f) $8^{2x}-3\cdot 8^x+2=0$
   g) $3^{2x+2}-28\cdot 3^x+3=0$

9. Resuelve: → a) 2; 0, b) −2, c) 2, d) −2, e) 1; $\frac{1}{2}$

   a) $4^x-5\cdot 2^x+4=0$
   b) $5^x+5^{x+1}+5^{x+2}=\dfrac{31}{25}$
   c) $4^x+2^{2x-1}-24=0$
   d) $3^{x+3}+9^{x+2}-4=0$
   e) $4^{2x}-6\cdot 4^x+8=0$

10. Resuelve: → a) 3, b) 300, c) 2, d) 12

   a) $\log(2x-5)=0$
   b) $\log x-\log 3=2$
   c) $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2$
   d) $2\log_7 x-\log_7(x+6)=3\log_7 2$

11. Resuelve: → a) 124, b) 8, c) 2, d) 6, e) 6, f) 20; 80

   a) $\log 4-2\log 5+\log(x+1)-\frac{1}{3}\log 8=1$
   b) $\log x^3-\log\frac{7x+8}{2}=\log 2x$
   c) $3\ln(x-1)-\ln(x^2-1)=-\ln 3$
   d) $2\log x=\log(4x+12)$
   e) $\log x^3=\log 6+2\log x$
   f) $2\log x-\log(x-16)=2$

12. Resuelve: → a) $\{(3,2),(3,-2)\}$, b) $\{(3,15),(-3,15)\}$, c) $\{(3,-13),(-3,-13)\}$, d) $\{(19,4),(19,-4)\}$, e) $\{(4,2),(-20,-46)\}$, f) $\{(3,2)\}$, g) $\{(81,121)\}$, h) $\{(25,1)\}$, i) $\{(5,3)\}$ j) $\left\{\left(\frac{10}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$

   a) $\left.\begin{aligned} 3x-y^2 &= 5 \\ 2x-y^2 &= 2 \end{aligned}\right\}$
   b) $\left.\begin{aligned} y-x^2 &= 6 \\ x^2 &= 2y-21 \end{aligned}\right\}$
   c) $\left.\begin{aligned} y+x^2 &= -4 \\ 3x^2+2y &= 1 \end{aligned}\right\}$
   d) $\left.\begin{aligned} x-3 &= y^2 \\ y^2 &= 2x-22 \end{aligned}\right\}$
   e) $\left.\begin{aligned} 2x-y &= 6 \\ x^2-3xy+y^2-5y+14 &= 0 \end{aligned}\right\}$
   f) $\left.\begin{aligned} 3^{x+y} &= 243 \\ 4x-y &= 10 \end{aligned}\right\}$
   g) $\left.\begin{aligned} \sqrt{y}+\sqrt{x} &= 20 \\ 3x-y &= 122 \end{aligned}\right\}$
   h) $\left.\begin{aligned} 2^{\sqrt{x}}\cdot 2^y &= 64 \\ x-10y &= 15 \end{aligned}\right\}$
   i) $\left.\begin{aligned} 2^x &= 4\cdot 2^y \\ x+3y &= 14 \end{aligned}\right\}$
   j) $\left.\begin{aligned} x^2-y^2 &= 11 \\ \log x-\log y &= 1 \end{aligned}\right\}$

13. El producto de dos números enteros es 750. ¿Cuáles son los números si uno de ellos es 5 unidades mayor que el otro? → $\{(25,30),(-30,-25)\}$

14. La suma de los cuadrados de tres números es 241. ¿Cuáles son los números si el segundo es 5 unidades mayor que el primero, y el tercero es el triple de primero? → $\{(4,9,12),(\frac{-54}{11},\frac{1}{11},\frac{-162}{11})\}$

15. Calcula las dimensiones de un solar rectangular de superficie 1200 m^2 y de diagonal 50 m. → $\{(40,30)\}$

16. Halla las dimensiones de un campo rectangular sabiendo que si aumenta la longitud en 10 m y la anchura 5 m, el área aumenta en 2100 m^2, mientras que si se disminuyen en 20 m y 8 m, respectivamente, disminuye el área en 3440 m^2. $\rightarrow \{(250, 80)\}$

17. Resuelve: $\rightarrow$ a) $(4, 2, 1)$, b) $(2, , 0, 1)$, c) $(0, 0, 0)$, d) $(6 + 3\alpha, 2 + 5\alpha, \alpha)$, e) $(\frac{-8\alpha}{7}, \frac{3\alpha}{7}, \alpha)$, f) SI, g) $(7, 1, 5)$, h) $(0, 0, 0)$, i) $(3, 4)$

a) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & 5z & = & 11 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & y & - & z & = & 7 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 1 & = & 1 + 5z \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & z & = & 10 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 14 \\ x & - & y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 5y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 8y & & & = & 0 \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & -2 \\ 3x & - & 4y & + & 5z & = & 3 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & z & = & -1 \\ x & + & 5y & + & 3z & = & 27 \\ -3x & + & 7y & + & 5z & = & 11 \end{array}\right\}$ h) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & y & & & = & 0 \\ 6x & + & 3y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 2 \\ x & + & y & = & 7 \\ -2x & + & 2y & = & 2 \\ 3x & - & 2y & = & 1 \end{array}\right\}$

18. Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A, B y C. Los precios de entrada a cada una de las salas son 2, 3 y 4 € respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 625 € y el número total de espectadores que acudieron fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubiesen asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 600 €. Calcula el número de espectadores que acudió a cada sala. $\rightarrow$ A: 50, B:75, C: 75

19. Los 24 alumnos de una clase tienen 15, 16 y 17 años de edad. Si la media aritmética de sus edades es 16.25 años y el número de estudiantes de 16 años es igual al número de estudiantes de 15 años más el número de estudiantes de 17 años, ¿cuántos alumnos hay de cada edad? $\rightarrow$ 3 de 15 años, 12 de 16 y 9 de 17

20. Juan acertó cuatro números en la bonoloto, uno de los cuales era el 19. Como buen aficionado a las matemáticas propuso a su hermana que si averiguaba los tres números restantes, que había acertado, le regalaba el premio. Para ello le dijo: La suma del primero y del segundo es 3 unidades menor que el tercero; el doble del primero más el tercero es igual al triple del segundo más 8; y la suma de los tres números es 73. ¿Cuáles son los tres números que acertó? $\rightarrow$ 15, 20 y 38

21. Un campesino tiene bueyes que comen la misma cantidad de pienso todos los días. Si vendiese 15, el pienso duraría tres días más y si comprase 25, el pienso duraría tres días menos. Halla el número de bueyes que tiene y los días que los puede alimentar. $\rightarrow$ 75 bueyes y 12 días

22. Un número N de tres dígitos es igual a 28 veces la suma de sus dígitos. Si restamos este número al número obtenido escribiendo los dígitos en orden inverso, resulta 198. El dígito de las unidades es igual a la suma de los otros dos. Con estos datos determina N. $\rightarrow$ 224

23. La edad de una madre es en al actualidad el triple que la de su hijo. La suma de las edades del padre, la madre y el hijo es de 80 años y dentro de 5 años, la suma de las edades de la madre y del hijo será 5 años más que la del padre. ¿Cuántos años tienen cada uno de ellos en la actualidad?
$\rightarrow$ Madre: 30, padre: 40, hijo: 10

24. En un centro escolar el presupuesto para mobiliario es cinco veces la suma del de libros más el de material de oficina. El presupuesto para libros es el triple del de material de oficina, y la suma de lo presupuestado para mobiliario y material de oficina es siete veces lo presupuestado para libros. ¿Se puede saber lo presupuestado para cada uno de estos conceptos?
$\rightarrow$ No, es un SCI

25. La suma de las edades de padre, madre e hijo de una familia es 100 años. Se sabe que la edad de la madre más la del hijo es la del padre y que la del padre es 5/2 de la diferencia entre la de la madre y el hijo. Encontrar las edades de cada uno de ellos.
$\rightarrow$ Madre: 35, padre: 50, hijo: 15

26. Resuelve: $\rightarrow$ a) $(-\infty, \frac{3}{2}]$, b) $(\frac{5}{2}, \infty)$

a) $3(2x-5)-4(x-2) \leq 2-4x$

b) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x-1}{6} > 1-\dfrac{2x-5}{2}$

27. Resuelve: $\rightarrow$ a) $(-\infty,-4] \cup [3,\infty)$, b) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, c) $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$, d) 3, e) $\left(-\frac{15}{4},2\right)$, f) $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right] \cup [1,\infty)$

a) $x^2+x-12 \geq 0$

b) $4x^2-1<0$

c) $6-x^2<2$

d) $(x-2)^2+5 \leq 2x$

e) $\dfrac{3x-6}{4} < \dfrac{4x-2x^2}{10}$

f) $(x-2)^2+(x+4)(x-2)+3x \geq -1$

28. Resuelve: $\rightarrow$ a) $(-2,0)\cup(2,\infty)$, b) $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, c) $(-\infty,-2)\cup(-1,1)$, d) $(-\infty,1)\cup(2,3)\cup(4,\infty)$, e) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{5},\infty\right)$, f) $(-\infty,2)$

a) $x^3-4x>0$

b) $x^4-1 \geq 0$

c) $\dfrac{x^2-1}{x+2}<0$

d) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6}>0$

e) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \geq 0$

f) $\dfrac{x^2}{x-2} \leq 2$

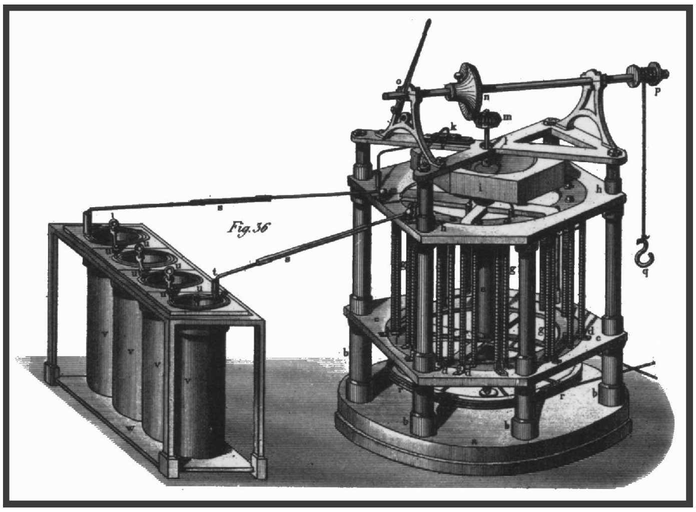
29. Resuelve: $\rightarrow$ a) $(-\infty,2]$, b) $(-4,-1)$

a) $\left.\begin{array}{rcr} 2x+3(x-1) & < & 12 \\ 3x+2 & \leq & x+6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{rcr} -3 & < & 2x+5 \\ 3 & > & 2x+5 \end{array}\right\}$

Bloque II:

TRIGONOMETRÍA Y NÚMEROS COMPLEJOS



MATEM – I

TEMA 3

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Índice

1 Introducción

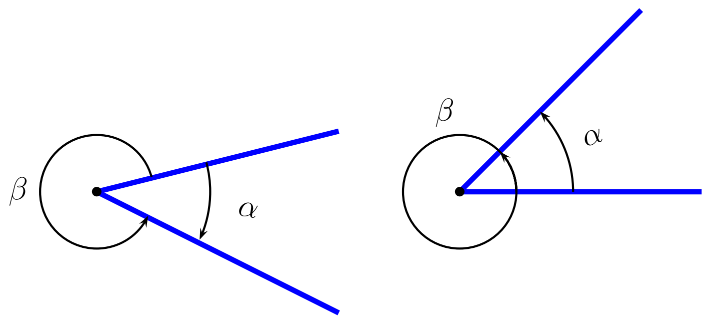
La palabra *trigonometría*, etimológicamente, significa *medida de triángulos.*[†] Designaba a la parte de las matemáticas que resolvía triángulos (dados suficientes elementos de un triángulo —lados, ángulos— calcular los restantes). Actualmente ampliamos su significado al estudio de los ángulos y sus aplicaciones.

2 Ángulos

Definición 5. *Sean dos semirrectas con origen común y superpuestas. Al giro producido al desplazarse una de ellas a partir de la otra se le llama* ***ángulo****.*

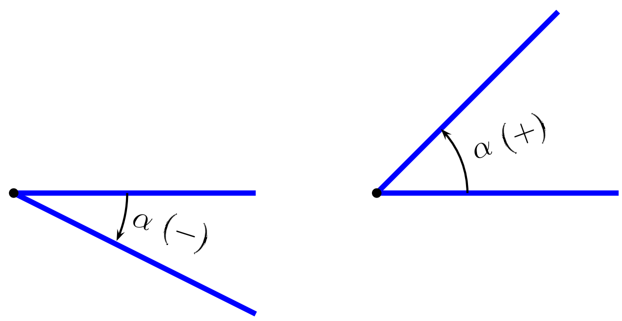
Definición 6. *Dos ángulos son* coincidentes *si, al efectuar el giro desde una misma posición inicial, vuelven a coincidir las semirrectas que lo definen.*

α y β son coincidentes en las dos siguientes parejas de ángulos:



2.1 Orientación de ángulos

Como acabamos de ver, los giros están orientados (según su sentido de giro), y por lo tanto también los ángulos; la orientación de un ángulo se distingue por su signo: *un ángulo es positivo si el giro que lo define es de sentido contrario al de las agujas del reloj*, y negativo en caso contrario. Se indica, gráficamente, con una flecha; cuando no la hay, se supondrá que es el positivo.



[†]Del griego $\tau\rho\iota\gamma\omega\nu\omega\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$, palabra compuesta de $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omega\nu$ (triángulo) y $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho o\nu$ (medida). $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omega\nu$, a su vez, compuesta de $\tau\rho\epsilon\tilde{\iota}\varsigma$, $\tau\rho\acute{\iota}\alpha$ (tres) y $\gamma\omega\nu\iota\alpha$ (ángulo)

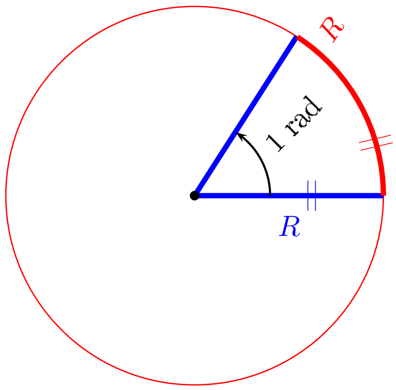
2.2 Medida de ángulos

2.2.1 Grados sexagesimales

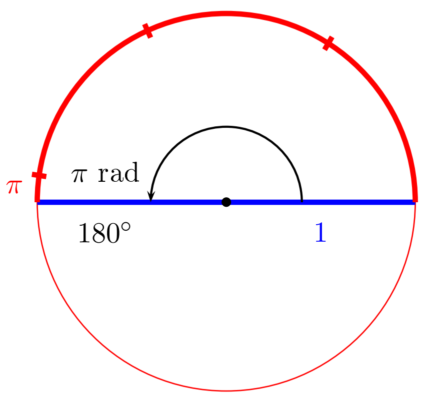
Es la medida más conocida, herencia de los babilonios; utilizaban un sistema de numeración sexagesimal (sesenta cifras distintas) y es por ello que, al dividir el horizonte para sus observaciones astronómicas en tres partes distintas —izquierda, central y derecha—, lógicamente, subdividían cada una en otras sesenta (grados). Así, un ángulo llano tiene 180°, uno recto 90° y una vuelta completa 360°. Mantenemos también esta forma de medir para el tiempo.

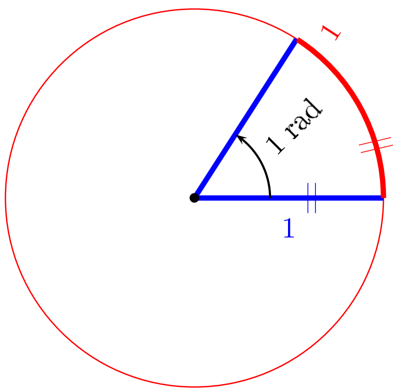
2.2.2 Radianes

Definición 7. *Inscribiendo un ángulo en una circunferencia, decimos que mide 1* ***radián*** *si la longitud del arco que delimita coincide con el radio.*



Si la circunferencia tiene radio 1, entonces la cantidad de radianes y de longitud de arco correspondiente coinciden. Para encontrar la relación entre grados y radianes, inscribamos un ángulo de 360° (una vuelta) en una circunferencia de radio 1: el arco que describe mide $2{\cdot}\pi{\cdot}1 = 2\pi$; si el ángulo es de 180° (media vuelta), el arco correspondiente mide π, que corresponde con π radianes.





La gráfica de la izquierda ya nos da una equivalencia que permitirá, con una simple regla de tres directa, pasar de una a otra medida.

Radianes	——	*Grados*
π	——	180
x	——	y

Lo que nos lleva a que $\boxed{1 \text{ rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}}$ †

Ejemplo 3.53

Para que la equivalencia sea una cantidad entera o fraccionaria de grados, los radianes deben estar expresados en función de π:

$$2\pi \text{ rad.} = \frac{2\pi \cdot 180}{\pi} = 360^{\circ}$$
$$\pi \text{ rad.} = \frac{\pi \cdot 180}{\pi} = 180^{\circ}$$
$$\frac{\pi}{2} \text{ rad.} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 180}{\pi} = \frac{90\pi}{\pi} = 90^{\circ}$$
$$\vdots$$

Ejemplo 3.54

$$30^{\circ} = \frac{30 \cdot \pi}{180} \text{ rad.} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$
$$45^{\circ} = \frac{45 \cdot \pi}{180} \text{ rad.} = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$
$$\vdots$$

En la práctica, la mayoría de los ángulos no requieren de muchas cuentas, basta con hacer las mismas partes o múltiplos en π que en 180°:

- $60^{\circ} = \dfrac{180^{\circ}}{3} = \dfrac{\pi}{3}$
- $120^{\circ} = 2 \cdot 60^{\circ} = 2 \cdot \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$
- $\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{3 \cdot 180^{\circ}}{4} = 135^{\circ}$

Como se ve en los anteriores ejemplos, cuando no especificamos las unidades de un ángulo, éstas serán radianes.

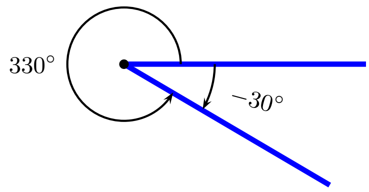
2.3 Reducción de ángulos a la primera vuelta positiva

Como veremos más tarde, las razones trigonométricas de ángulos coincidentes son iguales, por lo que nos será útil saber encontrar este coincidente. En esto consiste la reducción de ángulos a la primera vuelta positiva.

† $1 \text{ rad.} = \dfrac{180^{\circ}}{\pi} \approx 57^{\circ}17'45''$

Ejemplo 3.55

Reducir a la primera vuelta $-30°$:



En general, cualquier ángulo de la primera vuelta negativa se reduce a la primera vuelta positiva sumándole 360°: $-30° + 360° = 330°$

Ejemplo 3.56

Si el ángulo es positivo y «se pasa de vueltas», no tenemos más que calcular lo que sobra de las vueltas que da: haciendo la división entera entre 360°. Para pasar a la primera vuelta positiva 765°,

$$\begin{array}{r|l} 765 & 360 \\ \cline{2-2} 045 & 2 \end{array}$$

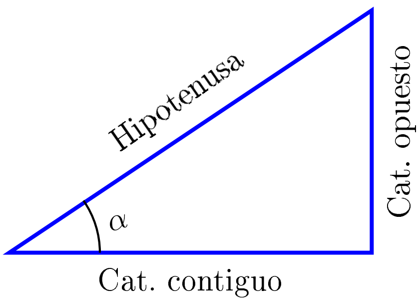
Por tanto, $765° \equiv 45°$

3 Razones trigonométricas

3.1 Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Cualquier ángulo agudo (positivo) define un triángulo rectángulo, sin más que trazando una perpendicular a la semirrecta origen. Del curso pasado conocemos las razones trigonométricas de un ángulo en un triángulo rectángulo, razones que permanecen constantes para todos los triángulos que podamos construir:

3.1.1 Definiciones



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{Cat. opuesto}}{\text{Hipotenusa}}; \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Cat. contiguo}}{\text{Hipotenusa}}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Cat. opuesto}}{\text{Cat. contiguo}}$$

También, lógicamente, son constantes las llamadas razones recíprocas:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cat. opuesto}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}; \qquad \sec\alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cat. contiguo}} = \frac{1}{\cos\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{Cat. contiguo}}{\text{Cat. opuesto}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

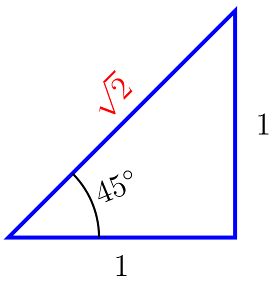
Es fácil comprobar que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

3.1.2 Propiedades

- Al ser la hipotenusa mayor que los dos catetos,
$$0 < \operatorname{sen}\alpha < 1 \qquad y \qquad 0 < \cos\alpha < 1$$
- Aplicando el teorema de pitágoras (a, b los catetos, h la hipotenusa), resulta $a^2 + b^2 = h^2$; dividiendo por h^2, tenemos la igualdad $\dfrac{a^2}{h^2} + \dfrac{b^2}{h^2} = \dfrac{h^2}{h^2}$ de la que resulta la conocida fórmula
$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$
- Dividiendo en la anterior igualdad por $\cos^2\alpha$ y por $\operatorname{sen}^2\alpha$, respectivamente, tendremos otras dos expresiones que utilizaremos:
  - $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \iff \boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$
  - $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \iff \boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}}$

3.1.3 Razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°

Razones trigonométricas de 45°: El triángulo rectángulo que contiene un ángulo de 45° debe ser isósceles. Por comodidad, puesto que las razones no varían para triángulos semejantes, elijamos un triángulo rectángulo cuyos catetos (iguales) midan 1: por el Teorema de pitágoras la hipotenusa debe medir: $h^2 = 1^2 + 1^2 \iff h^2 = 2 \iff h = \sqrt{2}$ [†]



Aplicando la definición hecha de las razones trigonométricas,

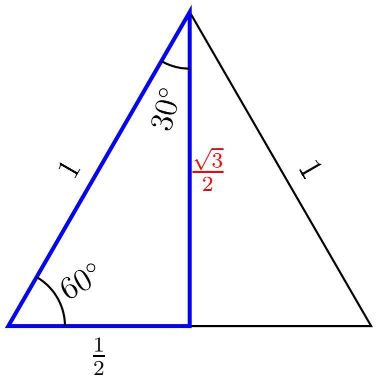
$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}};\ ^{\dagger\dagger} \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}};\ ^{\dagger\dagger} \qquad \operatorname{tg} 45° = \frac{1}{1} = 1.$$

[†] Desechamos la solución negativa $-\sqrt{2}$, absurda por tratarse de una longitud.

[††] También es usual expresarlo en la forma $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

Razones trigonométricas de 30° y 60°: El triángulo rectángulo que contiene los ángulos 30° y 60° es la mitad de un triángulo equilátero.[†] Igual que antes, por comodidad, vamos a suponer que es el de lado 1; la altura (el cateto todavía desconocido) medirá, por el Teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a^2 = 1^2 \Longleftrightarrow \frac{1}{4} + a^2 = 1 \Longleftrightarrow a^2 = 1 - \frac{1}{4} \Longleftrightarrow a^2 = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow a = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Aplicando las definiciones,

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}; \qquad \cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \operatorname{tg} 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.^{\dagger\dagger}$$

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}; \qquad \operatorname{tg} 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

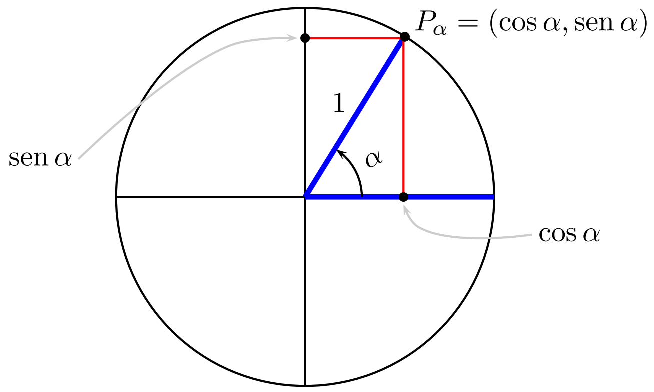
3.2 Razones trigonométricas de cualquier ángulo

3.2.1 Definiciones

Necesitamos ampliar el concepto de razón trigonométrica utilizado hasta ahora, para así poder utilizarlas en cualquier ángulo (Debe tenerse en cuenta que un triángulo rectángulo no contiene ángulos que no estén estrictamente comprendidos entre 0° y 90°). Para ello, **inscribiremos** cualquier ángulo sobre el que trabajemos **en una circunferencia** que, para mayor comodidad, sea **de radio** 1. Quiere esto decir que haremos coincidir el origen común de las semirrectas con el centro de la circunferencia, que estará en el origen de un sistema coordenadas en el plano y que la **posición inicial** de las dos semirrectas superpuestas será la **horizontal hacia la derecha**.

[†]Los tres ángulos son iguales y suman 180°, luego deben ser de 60°

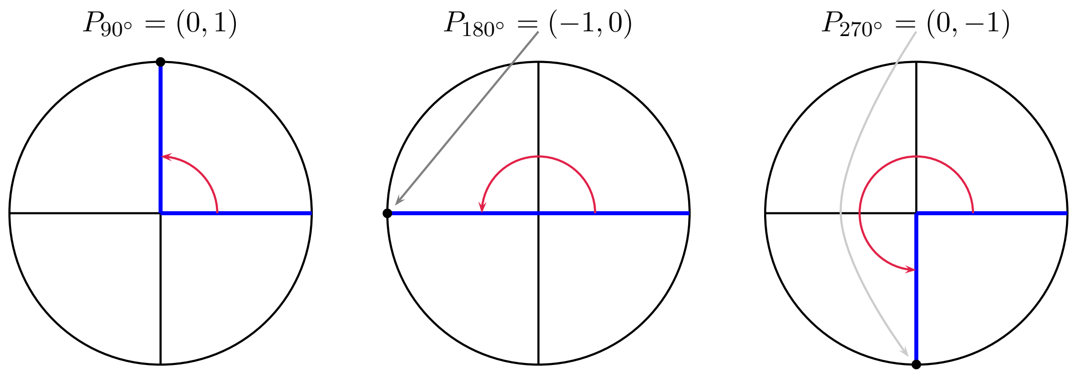
[††]Análogamente a la segunda nota de la página anterior, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Una vez construido el ángulo, la semirrecta girada corta a la circunferencia de radio 1 en un punto P_α. **Sus coordenadas (las proyecciones sobre los ejes) son, en su orden, el coseno y el seno del ángulo**. Si el ángulo se sitúa en el primer cuadrante, es evidente que esta definición coincide con la vista en los triángulos; pero, además, nos permite encontrar las razones de cualquier ángulo.

Pincha aquí para ejecutar una animación con la definición de las razones trigonométricas en la circunferencia unidad.

EJEMPLO 3.57



$\begin{cases} \operatorname{sen} 90^\circ = 1 \\ \cos 90^\circ = 0 \\ \nexists \operatorname{tg} 90^\circ \end{cases}$ $\begin{cases} \operatorname{sen} 180^\circ = 0 \\ \cos 180^\circ = -1 \\ \operatorname{tg} 180^\circ = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \operatorname{sen} 270^\circ = -1 \\ \cos 270^\circ = 0 \\ \nexists \operatorname{tg} 270^\circ \end{cases}$

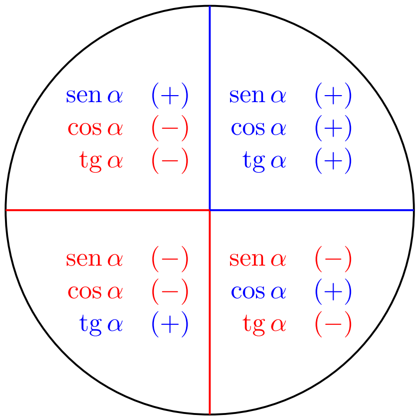
Observación 4. *Las razones trigonométricas de ángulos coincidentes son iguales (el punto que define sobre la circunferencia es el mismo). Será suficiente controlar las de los ángulos de la primera vuelta, pues cualquiera que no sea de ella lo podemos reducir.*

EJEMPLO 3.58

$\operatorname{sen} 630^\circ = \operatorname{sen} 270^\circ = -1; \qquad \operatorname{tg}(-300^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}; \qquad \cos 360^\circ = \cos 0^\circ = 1$

3.2.2 Signo de las razones trigonométricas

Según el punto P_α que el ángulo define sobre la circunferencia esté en uno u otro cuadrante, así será el signo de sus razones:



3.2.3 Propiedades

- Como las coordenadas de los puntos de la circunferencia están entre -1 y 1, ambos incluidos, entonces

$$-1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1 \qquad y \qquad -1 \le \cos\alpha \le 1$$

- Se mantienen las demás identidades ciertas para los triángulos, razonando análogamente con el Teorema de Pitágoras:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}; \qquad \boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}} \qquad \boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}}$$

EJEMPLO 3.59

Calcula las razones trigonométricas de un ángulo α, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{7}$

Solución: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \iff \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \iff \frac{9}{49} + \cos^2\alpha = 1 \iff$

$$\iff \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{49} \iff \cos^2\alpha = \frac{40}{49} \iff \cos\alpha = -\sqrt{\frac{40}{49}} \iff \boxed{\cos\alpha = -\frac{\sqrt{40}}{7}}$$

(**Elegimos la solución negativa puesto que el coseno en el segundo cuadrante lo es**).

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{7}}{-\frac{\sqrt{40}}{7}} = -\frac{3\cdot 7}{7\sqrt{40}} = \boxed{-\frac{3}{\sqrt{40}}}$$

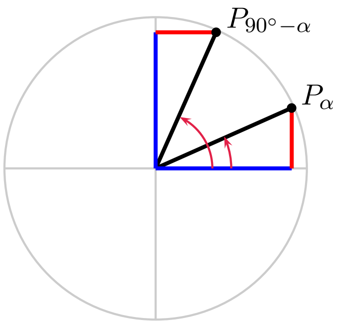
□

4 Relación entre las razones en diferentes cuadrantes

Todos los valores que recorren las razones trigonométricas, independientemente del signo, se pueden obtener en un cuadrante. Encontrar una razón de la primera vuelta es encontrar la del primer cuadrante con la que está relacionada, y añadirle el signo oportuno. Así, **podremos encontrar las razones de cualquier ángulo a partir de sólo las del primer cuadrante**.

4.1 Ángulos complementarios

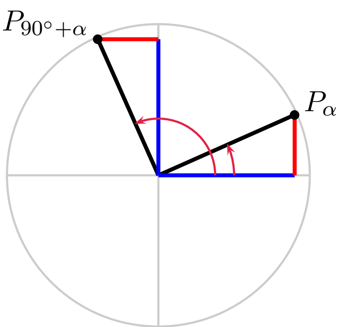
Aquellos que suman 90° ($\frac{\pi}{2}$ rad.) El complementario de $\boxed{\alpha}$ es $\boxed{90^\circ - \alpha}$ $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.



$$\begin{cases} \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \end{cases}$$

4.2 Ángulos que difieren en 90°

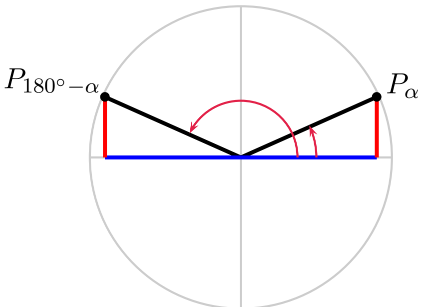
Aquellos cuya resta es 90° ($\frac{\pi}{2}$ rad.) El que difiere 90° con $\boxed{\alpha}$ es $\boxed{90^\circ + \alpha}$ $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$.



$$\begin{cases} \operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha \\ \cos(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \end{cases}$$

4.3 Ángulos suplementarios

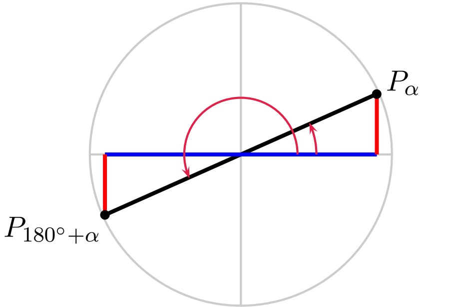
Aquellos cuya suma es 180° (π rad.) El suplementario de $\boxed{\alpha}$ es $\boxed{180^\circ - \alpha}$ $(\pi - \alpha)$.



$$\begin{cases} \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

4 4 Ángulos que difieren en 180°

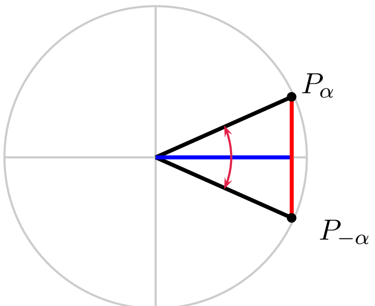
Aquellos cuya resta es 180° ($\frac{3\pi}{2}$ rad.) El que difiere en 180° de $\boxed{\alpha}$ es $\boxed{180^\circ + \alpha}$ $(\pi + \alpha)$.



$$\begin{cases} \operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

4 5 Ángulos opuestos (o que suman 360°)

El opuesto de $\boxed{\alpha}$ es $\boxed{-\alpha}$.



$$\begin{cases} \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

Observación 5. *No es aconsejable memorizar las fórmulas de cambio. Es más sencillo dibujar o imaginar, cuando se sea capaz, el ángulo en la circunferencia al estilo de lo que acabamos de hacer, pero para el ejemplo concreto.*

EJEMPLO 3.60

- $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$
- $\operatorname{sen} 225^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\operatorname{tg} 510^\circ = \operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
- $\cos 330^\circ = \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

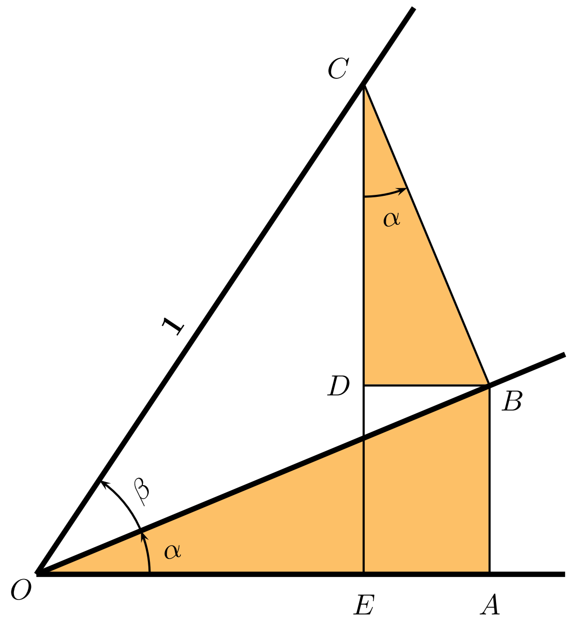
5 Más identidades trigonométricas

Conocemos con exactitud, hasta ahora, sólo las razones trigonométricas de unos pocos ángulos ($0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$ y los relacionados con ellos en los demás cuadrantes). Conoceremos muchas más estudiando el comportamiento de dichas razones respecto a la suma, resta, doble y mitad de ángulos cuyas razones sepamos:

5.1 Razones de la suma

5.1.1 $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$

En la siguiente figura, dibujamos dos ángulos (α y β) a continuación uno del otro; así, el ángulo suma es el giro producido por las dos semirrectas extremas. Escogemos un punto C tal que $OC = 1$. los triángulos OAB y CDB (en fondo naranja) son semejantes, pues los lados de uno son perpendiculares a los del otro; entonces, sus ángulos son iguales: en concreto, el ángulo α que se ha señalado.



En el triángulo OEC, $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \dfrac{EC}{1} = EC = ED + DC = AB + DC$.

En el triángulo CDB, $\cos\alpha = \dfrac{DC}{BC} \Longrightarrow DC = BC \cdot \cos\alpha$.

En el triángulo OAB, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{AB}{OB} \Longrightarrow AB = OB \cdot \operatorname{sen}\alpha$.

Sustituyendo: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = OB \cdot \operatorname{sen}\alpha + BC \cdot \cos\alpha$.

Como, en el triángulo OBC, $\cos\beta = \dfrac{OB}{1} = OB$, $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{BC}{1} = BC$, entonces,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \boxed{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}$$

Pincha aquí si quieres ir a una presentación, paso a paso, de la anterior demostración. Descárgala y ábrela con Adobe Acrobat Reader, para verla en modo presentación.

Ejemplo 3.61

$$\operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

5.1.2 $\boxed{\cos(\alpha+\beta)}$

Por la fórmula de los ángulos que difieren en 90°,

$$\cos(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(90^\circ + \alpha + \beta) = \operatorname{sen}[(90^\circ+\alpha)+\beta] =$$

$$= \operatorname{sen}(90^\circ+\alpha)\cdot\cos\beta + \cos(90^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha\cdot\cos\beta + (-\operatorname{sen}\alpha)\cdot\operatorname{sen}\beta =$$

$$= \boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

5.1.3 $\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta};$$

Dividiendo todos los términos por $\cos\alpha\cdot\cos\beta$,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \boxed{\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}$$

5.2 Razones de la diferencia

5.2.1 $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}[\alpha+(-\beta)] = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta) =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot(-\operatorname{sen}\beta) = \boxed{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

Ejemplo 3.62

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

5.2.2 $\boxed{\cos(\alpha-\beta)}$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos[\alpha+(-\beta)] = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot(-\operatorname{sen}\beta) = \boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

5.2.3 $\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}=$$

Dividiendo todos los términos por $\cos\alpha\cdot\cos\beta$,

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\boxed{\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}$$

5.3 Razones del ángulo doble y mitad

5.3.1 $\boxed{\operatorname{sen}(2\alpha)}$

$$\operatorname{sen}(2\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha=\boxed{2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}$$

5.3.2 $\boxed{\cos(2\alpha)}$

$$\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha=\boxed{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

5.3.3 $\boxed{\operatorname{tg}(2\alpha)}$

$$\operatorname{tg}(2\alpha)=\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\boxed{\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Unas expresiones que, más adelante (sobre todo para el cálculo de integrales), resultan útiles, se deducen de aquí:

$$\left.\begin{array}{rcr}\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha&=&1\\ \cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha&=&\cos 2\alpha\end{array}\right\};$$

sumando y restando en ambas, obtenemos las respectivas dos siguientes igualdades, en las que despejamos:

$$2\cdot\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha;\qquad 2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha=1-\cos 2\alpha$$

$$\boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}};\qquad\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

De aquí podríamos deducir también las razones del ángulo mitad (cambiando α por $\frac{\alpha}{2}$ y despejando):

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}};\qquad\boxed{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}};\qquad\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

El signo que deberemos elegir será el correspondiente al cuadrante en el que caiga $\dfrac{\alpha}{2}$

6 Manejando expresiones trigonométricas

Utilizando las identidades que acabamos de estudiar, podremos simplificar expresiones y demostrar igualdades trigonométricas. Para esto último, en general, tendremos que partir de cada una de ellas y simplificarlas para llegar a la misma expresión.

EJEMPLO 3.63

$$(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)^2=$$

$$=\operatorname{sen}^2\alpha+\cancel{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}+\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha-\cancel{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}+\cos^2\alpha=$$

$$=\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1+1=2$$

EJEMPLO 3.64

Demuestra que $\dfrac{1}{\sec^2 a}=\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 a+\cos^4 a$

Solución: Empezamos por el lado más complejo:

- $\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 a+\cos^4 a=\cos^2 a\cdot(\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a)=\cos^2 a\cdot 1=\cos^2 a$
- $\dfrac{1}{\sec^2 a}=\dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 a}}=\cos^2 a$

$\square$

EJEMPLO 3.65

Demuestra que $\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}\cdot\cos 2x=1+\operatorname{sen}2x$

Solución: Empezamos por el lado más complejo:

- $\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}\cdot\cos 2x=\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)=$

  $=\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cancel{\cos x-\operatorname{sen}x}}\cdot(\cos x+\operatorname{sen}x)\cancel{(\cos x-\operatorname{sen}x)}=(\cos x+\operatorname{sen}x)^2=$

  $=\cos^2 x+2\cdot\cos x\cdot\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^2 x=1+2\cos x\operatorname{sen}x$
- $1+\operatorname{sen}2x=1+2\cos x\operatorname{sen}x$

$\square$

7 Ecuaciones trigonométricas

Así se les llama a las ecuaciones con alguna incógnita dentro de una razón trigonométrica. Puede ser una ecuación simple, de resolución inmediata:

EJEMPLO 3.66

Resuelve $\cos x = \frac{1}{2}$

Solución: Conocemos dos ángulos en la primera vuelta cuyo coseno es $\frac{1}{2}$, uno en cada cuadrante en que el coseno es positivo: $60°$ y -60. Además, para escribir todas las soluciones, debemos tener en cuenta todas las posibles vueltas a partir de estos ángulos; la forma más económica de expresar todas las soluciones es:

$$x = \begin{cases} 60° + k \cdot 360° \\ -60° + k \cdot 360° \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{(k entero)}.$$

□

Si no reconocemos el ángulo utilizamos la calculadora, dando una aproximación, con la inversa de la razón que intervenga:

EJEMPLO 3.67

Resuelve $\operatorname{tg} x = -2$

Solución: La calculadora nos da la solución $x_1 = -63'435°$ (en el cuarto cuadrante). Sabemos que también hay otra solución en el segundo, que se obtiene prolongando el ángulo, es decir, sumándole $180°$: $x_2 = -63'435° + 180° = 116'565°$; la solución completa, por tanto, será:

$$x = \begin{cases} -63'435° + k \cdot 360° \\ 116'565° + k \cdot 360° \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

□

Se puede complicar un poco más como en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.68

Resuelve $\operatorname{sen} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:

$$2x = \begin{cases} 240° + k \cdot 360° \\ -60° + k \cdot 360° \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Despejando la incógnita,

$$x = \begin{cases} \dfrac{240° + k \cdot 360°}{2} \\ \dfrac{-60° + k \cdot 360°}{2} \end{cases} = \begin{cases} 120° + k \cdot 180° \\ -30° + k \cdot 180° \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

□

En general, las ecuaciones no tienen por qué poder ser resueltas tan inmediatamente; pueden aparecer varias razones trigonométricas, distintos ángulos... En cualquier caso, el proceso consistirá en simplificar la ecuación inicial para llegar a alguna como las anteriores:

Ejemplo 3.69

Resuelve $\cos 2x = \operatorname{sen} x$

Solución:

I) Aplicar las identidades trigonométricas conocidas para tener sólo una incógnita dentro de las razones: $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$

II) Aplicarlas de nuevo para conseguir que solo aparezca una razón trigonométrica:
$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \Longleftrightarrow 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$

III) Hacer un cambio de variable (*razón trogonométrica*$=t$) para resolver una ecuación no trigonométrica:
$\operatorname{sen} x = t \Longrightarrow 1 - 2t^2 = t \Longleftrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0$ (ecuación polinómica de 2° grado).

IV) Resolver la ecuación no trigonométrica:
$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Longrightarrow t = \tfrac{1}{2}, \quad t = -1$$

V) Con los valores obtenidos para t, deshacemos el cambio y resolvemos la ecuación simple que quede:

- $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

- $\operatorname{sen} x = -1 \Longrightarrow x = 270^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\square$

8 Ejercicios propuestos

1. Expresa en grados o radianes, según corresponda: $\rightarrow 135°, 240°, 270°, 108°, 30°, 150°, 300°, 600°, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{9}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{7\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}$

   $\frac{3\pi}{4} =$ $\quad \frac{4\pi}{3} =$ $\quad \frac{3\pi}{2} =$ $\quad \frac{3\pi}{5} =$ $\quad \frac{\pi}{6} =$ $\quad \frac{5\pi}{6} =$ $\quad \frac{5\pi}{3} =$ $\quad \frac{10\pi}{3} =$

   $135° =$ $\quad 315° =$ $\quad 240° =$ $\quad 120° =$ $\quad 60° =$ $\quad 260° =$ $\quad 45° =$

   $90° =$ $\quad 180° =$ $\quad 70° =$ $\quad 230° =$

2. Reduce a la primera vuelta: $\rightarrow 280°, 315°, 355°, 40°, 240°, 0°, 160°, 70°, 220°$

   $1360° =$ $\quad -45° =$ $\quad 715° =$ $\quad 400° =$ $\quad -120° =$

   $3600° =$ $\quad -200° =$ $\quad 430° =$ $\quad -500° =$

3. ¿Puede ocurrir que $2\cos\alpha = 3$? $\rightarrow$ No

4. ¿Puede ser $\operatorname{tg}\alpha = -7$?¿Existe la tangente de todos los ángulos? $\rightarrow$ Sí ($\alpha \approx -81{,}87°$), No ($\nexists \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$)

5. Calcula exactamente seno y coseno de: $\rightarrow \frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

   $\frac{13\pi}{6}$ $\quad 750°$ $\quad 1920°$ $\quad -300°$ $\quad \frac{5\pi}{3}$ $\quad 120°$ $\quad \frac{4\pi}{3}$ $\quad 315°$ $\quad -210°$ $\quad 135°$

6. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Calcula las restantes razones. $\rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$

7. $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Calcula las restantes razones. $\rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

8. $\sec\alpha = 2$, $\alpha \in IV$. Calcula las restantes razones. $\rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$

9. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-1}{3}$, $\alpha \in III$, calcula: $\rightarrow$ a) $-\frac{\sqrt{8}}{3}$, b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, c) $-\frac{1}{3}$, d) $\frac{\sqrt{8}}{3}$, e) $-\frac{\sqrt{8}}{3}$, f) $\frac{\sqrt{8}}{3}$, g) $\frac{1}{3}$

   a) $\cos\alpha$
   b) $\operatorname{tg}\alpha$
   c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
   d) $\cos(\pi + \alpha)$
   e) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
   f) $\cos(\pi - \alpha)$
   g) $\operatorname{sen}(-\alpha)$

10. $\cos x = \frac{3}{4}$, $x \in I$. Calcula: $\rightarrow$ a) $\frac{3}{4}$, b) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$, c) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$, d) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$, e) $-\frac{3}{4}$

    a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
    b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
    c) $\operatorname{sen}(\pi + x)$
    d) $\operatorname{tg}(-x)$
    e) $\cos(\pi - x)$

11. Calcula $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en los siguientes casos: $\rightarrow$ a) $\frac{1}{5}$; $\frac{\sqrt{24}}{5}$, b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $-\frac{\sqrt{5}}{5}$, c) $-\frac{\sqrt{8}}{3}$; $-\frac{1}{3}$, d) $-\frac{\sqrt{14}}{4}$; $\frac{\sqrt{2}}{4}$

    a) $x \in I$, $\operatorname{sen}(\pi - x) = \frac{1}{5}$
    b) $x \in II$, $\operatorname{tg}(\pi + x) = -2$
    c) $x \in III$, $\cos(-x) = \frac{-1}{3}$
    d) $x \in IV$, $\operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2} - x) = 2\sqrt{2}$

12. Sin usar la calculadora, calcula seno y coseno de:

a) 105° b) $67^\circ\,30'$ c) 285° d) 165°

$\rightarrow$ a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; , b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, c) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, d) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

13. Si $\cos\alpha = a$ y $\operatorname{sen}\alpha = b$, calcula: $\rightarrow$ a) b, b) $-3a$, c) a

a) $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(\pi-\alpha) - \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) + \operatorname{sen}(\pi+\alpha) + \cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$

b) $\cos\alpha + \cos(\pi-\alpha) - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha) + \cos(\pi+\alpha) + \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$

c) $\cos\alpha + \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}-\alpha) - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha) + \cos(-\alpha) - \cos(\pi-\alpha)$

14. Comprueba que si A, B y C son los ángulos de un triángulo, entonces

a) $\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen} C = 0$

b) $\cos(A+B) + \cos C = 0$

c) $\operatorname{tg}(A+B) + \operatorname{tg} C = 0$

d) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$

15. Demuestra que $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$ $\rightarrow$Pista: $3x = 2x + x$.

16. Demuestra las igualdades:

a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$

b) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}$

c) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$

d) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \cos\alpha$

e) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}$

f) $\sec^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$

17. Demuestra las siguientes identidades:

a) $\sec\alpha - \cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\alpha$

b) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha$

c) $\cos^2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$

d) $\dfrac{\cos(x-y) - cos(x+y)}{\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)} = \operatorname{tg} y$

e) $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$

f) $\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

18. Demuestra las siguientes identidades:

a) $\dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}$

b) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$

c) $\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} = \sec\alpha$

d) $\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\alpha$

e) $\dfrac{3\operatorname{sen} x\cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x}{4\operatorname{sen} x\cos^2 x - \operatorname{sen} x} = 1$

19. Simplifica las expresiones:

a) $\dfrac{\cos^2 x}{1-\operatorname{sen} x}$

b) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \cos x)^2$

20. Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\rightarrow \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$

b) $\operatorname{sen}(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\rightarrow \frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24} + k\pi$

c) $\operatorname{sen} x = \cos x$ $\rightarrow 45^\circ,\ 225^\circ + k \cdot 360^\circ$

d) $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$ $\rightarrow 0^\circ,\ 180^\circ + k \cdot 360^\circ$

e) $\operatorname{sen}^2 x - 1 = 2\cos^2 x$ $\rightarrow 90^\circ + k \cdot 180^\circ$

f) $\operatorname{sen} 2x = \cos x$ $\rightarrow 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ,\ 270^\circ + k \cdot 360^\circ$

g) $\cos 2x + 6\cos^2 x = 1$ $\rightarrow 60^\circ,\ 120^\circ,\ 240^\circ,\ 300^\circ + k \cdot 360^\circ$

h) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$ $\rightarrow 45^\circ + k \cdot 180^\circ$

i) $\cos^2 x - \cos x = 0$ $\rightarrow 0^\circ,\ 90^\circ,\ 270^\circ + k \cdot 360^\circ$

j) $\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0$ $\rightarrow 120^\circ,\ 240^\circ + k \cdot 360^\circ$

k) $-3\operatorname{sen} x + \cos^2 x = 3$ $\rightarrow 270^\circ + k \cdot 360^\circ$

l) $\operatorname{sen} x - 2\cos 2x = -\frac{1}{2}$ $\rightarrow 30^\circ,\ 150^\circ,\ 228{,}6^\circ,\ 311{,}4^\circ + k \cdot 360^\circ$

m) $4\cos 2x + 3\cos x = 1$ $\rightarrow 51{,}32^\circ,\ 180^\circ,\ 308{,}68^\circ + k \cdot 360^\circ$

n) $8\operatorname{sen} x = 2 + \frac{4}{\operatorname{cosec} x}, \quad x \in [0, 360^\circ)$ $\rightarrow 30^\circ,\ 150^\circ$

ñ) $\cos x(\cos x + 5) = 2 + \operatorname{sen}^2 x,\ x \in [0, 2\pi)$ $\rightarrow \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

o) $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x, \quad x \in [0, 360^\circ)$ $\rightarrow 0^\circ,\ 180^\circ$

p) $\sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x = 1$ $\rightarrow 0^\circ,\ 120^\circ + k \cdot 360^\circ$

q) $2\cos x + \operatorname{sen} x = 1$ $\rightarrow 90^\circ,\ 323^\circ\ 7'\ 48'' + k \cdot 360^\circ$

r) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6} - x) + \cos(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{1}{2}$ $\rightarrow \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

s) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) - \cos(x + \frac{2\pi}{3}) = 0$ $\rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

MATEM – I

TEMA 4

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Índice

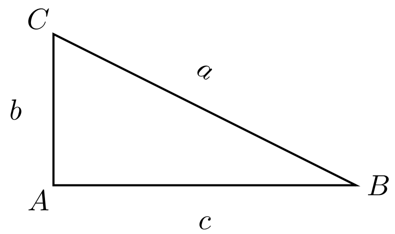
1 Introducción

La resolución de triángulos es una de las herramientas matemáticas más amplia y diversamente aplicadas: desde las antiguas mediciones topográficas (cálculo de alturas y distancias, sobre todo a lugares inaccesibles) hasta los modernos sistemas de posicionamiento y localización (radar, GPS...). Como ya disponemos de la base teórica (los ángulos y sus razones trigonométricas), podemos acometer su estudio:

2 Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo significa calcular todos sus elementos: sus tres ángulos (A, B y C) y sus tres lados (a, b y c, los opuestos a sus respectivas mayúsculas); podemos utilizar tres herramientas conocidas para ello:

- La suma de los ángulos de un triángulo es 180°; en particular, como un ángulo es recto (en los triángulos rectángulos), los otros dos suman 90°.
- El teorema de Pitágoras, que relaciona sus tres lados (los dos catetos y la hipotenusa).
- Las definiciones de las razones trigonométricas.



EJEMPLO 4.70

Sabiendo que $a = 12$ y $b = 6$, resuelve el triángulo.

Solución:

$$12^2 = 6^2 + c^2 \iff 144 = 36 + c^2 \iff c^2 = 108 \iff \boxed{c = \sqrt{108}}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \implies \boxed{B = 30^\circ}$$

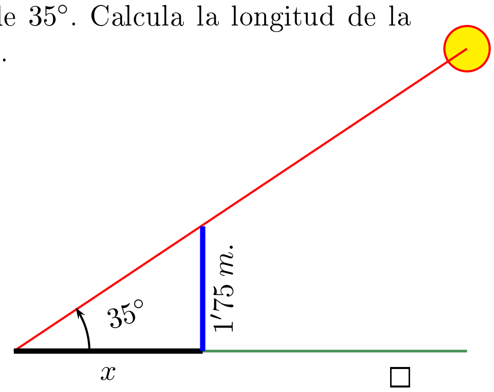
$$\boxed{C =} 90^\circ - 30^\circ = \boxed{60^\circ}$$

□

EJEMPLO 4.71

El ángulo de elevación del sol sobre la horizontal es de 35°. Calcula la longitud de la sombra que proyectará una persona de $1'75$ m. de estatura.

Solución:

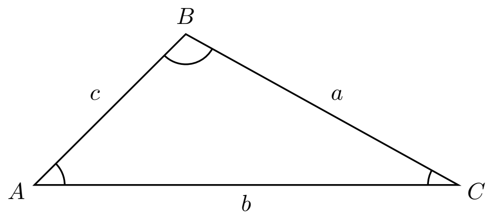


$$\text{tg}\,35^\circ = \frac{1'75}{x} \Longrightarrow x = \frac{1'75}{\text{tg}\,35^\circ} \approx 2'5\,m.$$

□

3 Resolución de cualquier triángulo

De manera análoga a la notación utilizada en los triángulos rectángulos, vamos a nombrar con a, b y c a los lados y con A, B y C, respectivamente, a los ángulos opuestos a dichos lados:



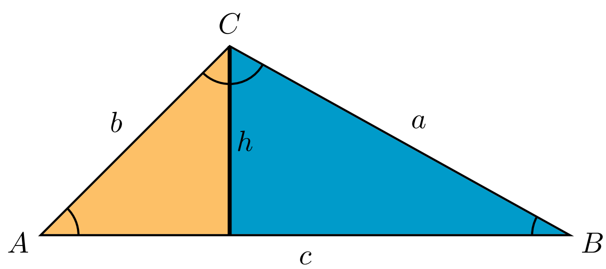
3.1 El teorema del seno

Teorema 1 (Teorema del seno). *En cualquier triángulo se cumple la relación:*

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C}}$$

Demostración:

Trazando la altura h que pasa por el vértice del ángulo C, conseguimos dos triángulos rectángulos. En el naranja:



$$\text{sen}\,A = \frac{h}{b} \Longrightarrow h = b \cdot \text{sen}\,A$$

En el triángulo azul:

$$\text{sen}\,B = \frac{h}{a} \Longrightarrow h = a \cdot \text{sen}\,B$$

Igualando, $a \cdot \text{sen}\,B = b \cdot \text{sen}\,A \Longrightarrow \dfrac{a}{\text{sen}\,A} = \dfrac{b}{\text{sen}\,B}$.

Trazando las alturas por los otros dos vértices, obtenemos las otras dos igualdades del enunciado.

□

Pincha aquí si quieres ir a una presentación, paso a paso, de la anterior demostración.Descárgala y ábrela con Adobe Acrobat Reader, para verla en modo presentación.

Observación 6. *El teorema viene a decir, en otras palabras, hay proporcionalidad directa entre los lados de cualquier triángulo y los senos de sus ángulos opuestos.*

Ejemplo 4.72

Resuelve el triángulo $b = 7,\ c = 5,\ B = 30°$

Solución: Utilizando la igualdad con b y c,

$$\frac{7}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{5}{\operatorname{sen} C} \Longrightarrow \operatorname{sen} C = \frac{5 \cdot \operatorname{sen} 30°}{7} = \frac{5 \cdot \frac{1}{2}}{7} = \frac{5}{14} \Longrightarrow \boxed{C = \operatorname{arc\,sen} \frac{5}{14} \approx 20'925°}$$

[La solución del segundo cuadrante (159,075°) es imposible, pues ya tendríamos dos ángulos (con $B = 30°$) cuya suma supera 180°].

$$\boxed{A \approx 180° - 20'925° - 30° = 129'075°}$$

$$\frac{7}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{a}{\operatorname{sen} 129'075°} \Longrightarrow \boxed{a} = \frac{7 \cdot \operatorname{sen} 129'075°}{\operatorname{sen} 30°} \boxed{\approx 10'87}$$

□

Observación 7. *Puedes comprobar que si los datos de que disponemos son un ángulo y los dos lados contiguos a él, o los tres lados y ningún ángulo, entonces el teorema del seno es inútil (cualquier igualdad contiene dos incógnitas). Necesitaremos el teorema del coseno:*

3.2 El teorema del coseno

Teorema 2 (Teorema del coseno). *En cualquier triángulo se cumple la igualdad:*

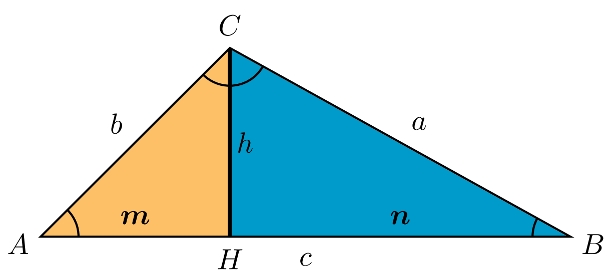
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A}$$

y las análogas para los otros dos lados:

$$\boxed{\begin{array}{l} b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \end{array}}$$

Demostración:

Trazando la altura h que pasa por el vértice del ángulo C (con las otras dos alturas, las otras dos igualdades), conseguimos dos triángulos rectángulos. En el azul, utilizando el Teorema de Pitágoras, y sabiendo que $m + n = c \Longrightarrow n = c - m$:



$$a^2 = n^2 + h^2$$
$$a^2 = (c - m)^2 + h^2$$
$$a^2 = c^2 - 2 \cdot c \cdot m + m^2 + h^2$$

En el triángulo naranja, $m^2 + h^2 = b^2$; sustituyendo, $a^2 = c^2 - 2 \cdot c \cdot m + b^2$.

Finalmente, dado que $\cos A = \dfrac{m}{b} \Longrightarrow m = b \cdot \cos A$, podemos sustituir y quedaría

$$a^2 = c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos A + b^2$$

□

Pincha aquí si quieres ir a una presentación, paso a paso, de la anterior demostración. Descárgala y ábrela con Adobe Acrobat Reader, para verla en modo presentación.

Observación 8. *El Teorema de Pitágoras es un caso particular del Teorema del coseno: si $A = 90°$, a es la hipotenusa de un triángulo rectángulo y sucede:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 90° = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot 0 = b^2 + c^2$$

Ejemplo 4.73

Dos de los lados del triángulo miden 3 cm y 5 cm, respectivamente, y forman un ángulo de 40°. Calcula el otro lado.

Solución: Si llamamos a los lados b y c, el ángulo tiene que ser $A = 40°$. Aplicando el Teorema del coseno,

$$a^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 40° \approx 11'02 \Longrightarrow a \approx \sqrt{11'02} \approx 3'32$$

□

Ejemplo 4.74

Los lados de un triángulo miden $a = 3$ cm, $b = 5$ cm y $c = 6$ cm. Calcula el ángulo A.

Solución: Aplicando el Teorema del coseno,

$$3^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos A \Longrightarrow 9 = 61 - 60 \cos A \Longrightarrow \cos A = \frac{9-61}{-60} = \frac{52}{60} \approx 0'867 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A = \arccos 0'867 \approx 29'93°$$

□

Observación 9. *Antes de abordar la resolución de un triángulo, tenemos que comprobar que los datos son coherentes; en concreto, ha de verificarse:*

- *La suma de los tres ángulos es* 180°
- *La suma de dos lados cualesquiera ha de ser mayor que el tercero*
- *Se enfrentan, respectivamente, ángulos y lados mayores, intermedios y menores*

Observación 10. *Estas cuestiones de coherencia han de tenerse en cuenta cuando hayan varias varias opciones (por ejemplo, si* $\cos x = \frac{-1}{2}$ *tenemos dos posibles ángulos:* 120° *y* 240°*. El segundo es imposible en un triángulo).*

En los ejercicios propuestos comprobaremos la gran cantidad de aplicaciones prácticas posibles de la resolución de triángulos.

4 Ejercicios propuestos

1. Calcula los ángulos y lados que faltan:

$\to$ a) $c = 10{,}93;\ A = 59{,}3;\ B = 50{,}7$, b) $b = 23{,}63;\ c = 18{,}38;\ C = 50$, c) $c = 10{,}64;\ A = 18{,}74^\circ;\ C = 121{,}25^\circ$, d) $A = 46{,}56^\circ;\ B = 57{,}9^\circ;\ C = 75{,}5^\circ$, e) $\nexists$, f) $\nexists$, g) $b = 12{,}24;\ c = 13{,}66;\ B = 60^\circ$, h) $b = 1;\ A = 30^\circ;\ C = 120^\circ$

   a) $a = 10,\ b = 9,\ C = 70$ b) $a = 12,\ A = 30^\circ,\ B = 100^\circ$
   c) $a = 4,\ b = 8,\ B = 40^\circ$ d) $a = 6,\ b = 7,\ c = 8$
   e) $a = 8,\ b = 12,\ c = 20$ f) $b = 10,\ c = 6,\ C = 45^\circ$
   g) $a = 10,\ A = 45^\circ,\ C = 75^\circ$ h) $a = 1,\ c = \sqrt{3},\ B = 30^\circ$

2. Halla la altura y el área de un triángulo equilátero de $2,5$ m de lado. $\to 2,2$ m; $2,75\ \text{m}^2$

3. En un triángulo isósceles el lado correspondiente al ángulo desigual mide $7,4$ m y uno de los ángulos iguales mide 63°. Halla la altura y el área. $\to h = 7,26$ m; $S = 26,86\ \text{m}^2$

4. Halla el área de un triángulo isósceles sabiendo que su base mide 4 cm y el ángulo opuesto 45°. $\to$ 9,66 cm^2

5. El perímetro de un rombo es de 28 cm y sus ángulos agudos miden 40°. ¿Cuánto miden sus diagonales? $\to$ 4,79 cm; 13,16 cm

6. Calcula los ángulos de un rombo cuyo perímetro es 10 m y su diagonal mayor 4 m. $\to 73{,}74^\circ$; $106{,}26^\circ$

7. Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 6 cm. $\to 126^\circ\ 52'\ 12''$; $53^\circ\ 7'\ 48''$

8. Calcula el área del decágono regular de 8 cm de lado. $\to \dfrac{160}{\text{tg}\ 18}\ \text{cm}^2$

9. Obtén el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de diámetro. $\to$ 534,97 cm^2

10. Halla el área de un octógono regular que está inscrito en una circunferencia de 20 m de radio. $\to$ 1131,44 m^2

11. Calcula el área de un pentágono regular de 30 m de perímetro. $\to$ 61,94 m^2

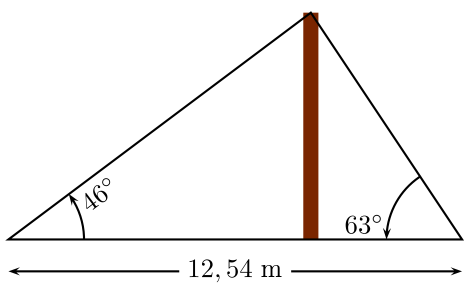
12. Desde un punto distante 25 cm del centro de una circunferencia de radio 10 cm, se trazan las dos tangentes a ella. Determina el ángulo que forman esas tangentes. $\to 47{,}16^\circ$

13. Desde un punto A del suelo se observa el punto más alto de una torre, bajo un ángulo de 31°. Se avanza 40 m en dirección a la torre, se mira y se la ve, ahora, bajo un ángulo 58°. Halla la altura de la torre y la distancia de A a su pie. $\to h = 38{,}4$ m; $d = 64$ m

14. Un poste estaba sujeto con un cable tensado de acero de $12,3$ m de longitud y formando un ángulo de 60° con el suelo. El cable se ha roto pero se puede aprovechar si el anclaje al suelo se mueve $1,2$ m hacia la base del poste. ¿Cuáles son las longitudes de los dos trozos del cable roto? Haz un dibujo. $\to$ 11,746 m; $0,554$ m

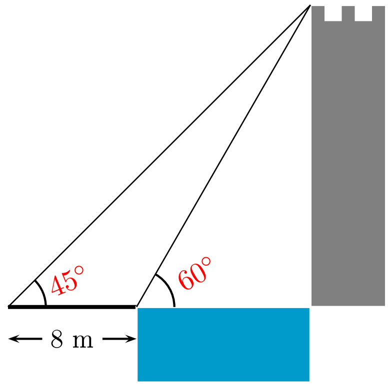
15. Un poste está sujeto con dos cables como se muestra en el dibujo. Calcula la altura del poste y las longitudes de los cables.

$\to$ Poste: 8,5 m; cables: 9,5403 m; 11,817 m



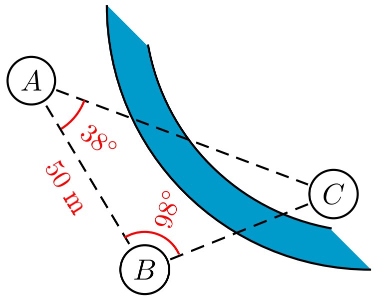
16. Halla la altura de la torre y la anchura del río a su pie, suponiendo que el punto más alto cae verticalmente sobre la orilla.

→ Torre: 18,93 m; río: 10,93 m



17. Calcula la distancia entre los puntos A y C de la figura:

→ $AC = 71{,}28$ m

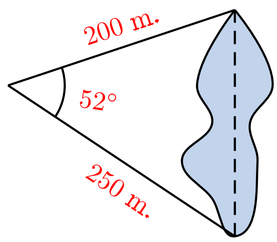


18. Una avioneta en vuelo horizontal se acerca a un poblado P a 150 km/h. El ángulo que forman la línea de vuelo y P en un momento dado es de 26° y, 6 segundos más tarde, de 58°. ¿Cuál es la altura del vuelo? → 175,39 m

19. En un observatorio astronómico, comprueban que su distancia a un satélite A es de 580 km y a otro B es de 420 km. El ángulo que forman las señales recibidas es de 37°. ¿A qué distancia se encuentran entre sí ambos satélites? → 351,72 m

20. ¿Qué longitud tiene el estanque?

→ 202,32 m

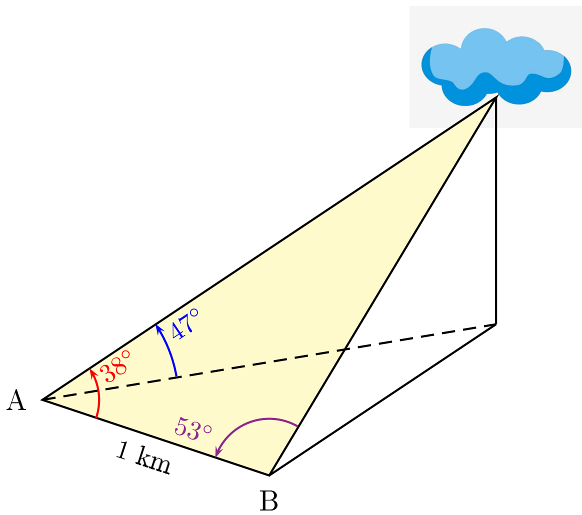


21. Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m hacia el árbol, bajo un ángulo de 60°.

→ $5\sqrt{3}$ m

22. Para medir la altura de una nube se han hecho dos observaciones simultáneas desde los puntos A y B, que distan entre si 1 km, y que están situados los dos al nivel del mar. La inclinación de la visual desde A a la nube, respecto de la horizontal, es de 47°. Los ángulos que forman las visuales desde A y desde B con la recta AB son, respectivamente, 38° y 53°, tal como se indica en la figura. Calcula la altura de la nube respecto del nivel del mar.

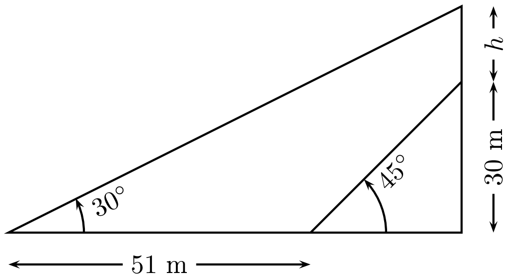
→ 0,57 km



23. Dos exploradores se han perdido y deciden seguir caminos distintos para conseguir ayuda. Para saber dónde está el otro en cada momento mantienen el rumbo fijo y sus trayectorias forman un ángulo de 54°. Si uno camina a 5 km/h y el otro lo hace a 4 km/h, ¿a qué distancia se encuentran al cabo de 2 horas? ¿Y después de 6 horas? → 2 h.: 8,36 km; 6 h.: 25,08 km

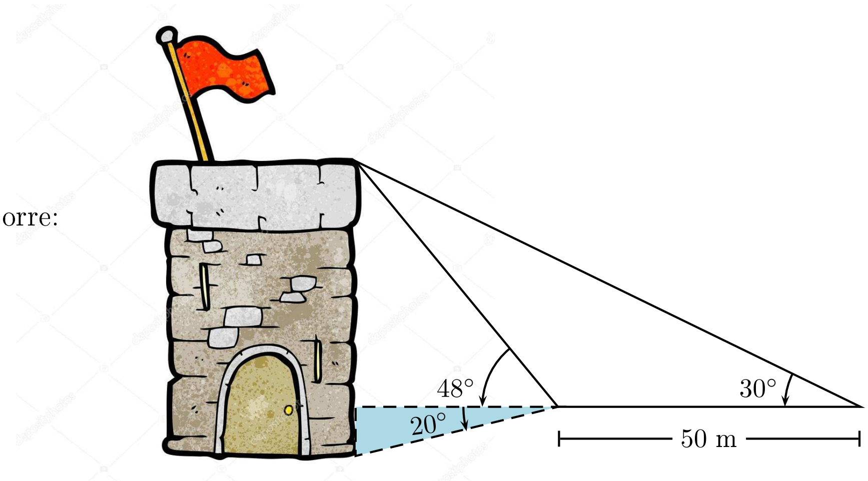
24. En la figura adjunta h representa la altura de una antena sobre un edificio de 30 metros de altura. Calcula la altura h de la antena.

→ 16,76 m



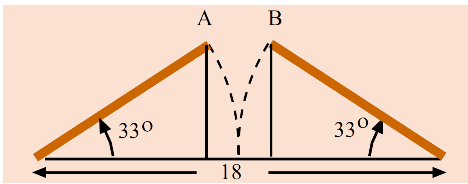
25. Halla la altura de la torre:

→ 79,84 m



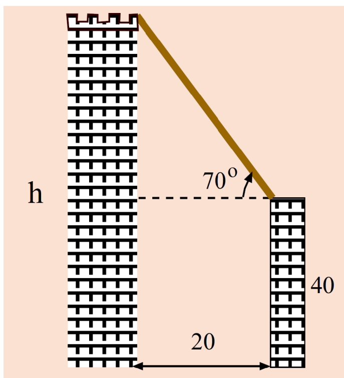
26. Dos puente levadizos tienen la misma longitud y elevación de 33°. ¿Cuál es la distancia de A a B?

→ 2,9 m

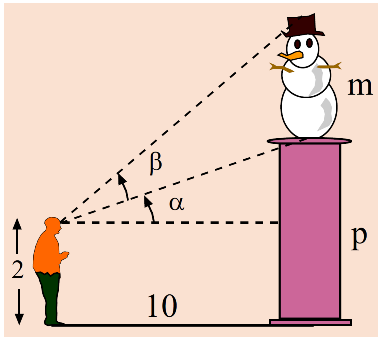


27. Desde lo alto de una torre se puede ver el tope de otra mas alta, con un ángulo de elevación de 70°. Si estás a 40 m de altura y las torres están separadas 20 m, ¿qué longitud tiene la escalera que conecta los topes de ambas torres? ¿Qué altura tiene la torre más alta?

→ Escalera: 58,5 m; torre alta: 94,95 m

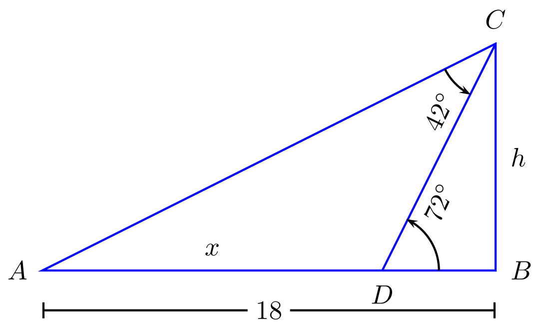


28. Una persona de 2 m está parada a 10 m de un pedestal de altura p. Desde la altura de su mirada, los ángulos de elevación hacia los puntos más altos de ambos son, respectivamente, $\alpha = 10°$ y $\beta = 15°$. Calcula la altura de pedestal y estatua.



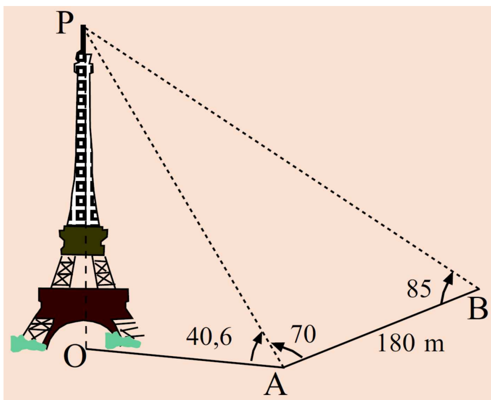
$\rightarrow$ $p = 3{,}76$ m; $m = 2{,}9$ m

29. Calcula x y h.



$\rightarrow$ $h = 6\sqrt{3}$; $x = 14{,}6$

30. Para calcular la altura de la torre Eiffel sin llegar hasta su base, un ingeniero mide los ángulos tal como se indica en la figura. ¿Cuál es su altura?



$\rightarrow$ 276,1 m

MATEM – I

TEMA 5

NÚMEROS COMPLEJOS

Índice

1 Introducción

Hasta ahora, nos hemos conformado con decir que, por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ 'no tiene solución'. Eso también ocurría en el siglo XVI, hasta que durante su segunda mitad algunos matemáticos inconformistas decidieron que era útil pensar en una solución de esa ecuación, aunque no tuviera un sentido evidente, ya que, como veremos, con ella se podían resolver todas las ecuaciones de segundo grado. Fue un poco más tarde cuando Descartes bautizó a estas soluciones con raíces cuadradas de discriminantes negativos como 'números imaginarios'.

Los números complejos ($\mathbb{C}$), incorporando a los reales los números imaginarios, son ampliamente utilizados en campos muy diversos, desde la electricidad (corriente alterna) hasta la mecánica cuántica.

La clasificación de los números queda, entonces, según se muestra en el siguiente esquema:

$$
\mathbb{C}\text{ Complejos}\begin{cases}
\mathbb{R}\text{ Reales}\begin{cases}
\mathbb{Q}\text{ Racionales }\left(\frac{a}{b}\right)\begin{cases}
\mathbb{Z}\text{ Enteros}\begin{cases}
\mathbb{N}\text{ Naturales}\begin{cases} 1\\ \text{Primos} \to 2,3,5...\\ \text{Compuestos}\to 4,6,8,9...\end{cases}\\
0\\
\text{Enteros negativos}\to -1,-2,-3...
\end{cases}\\
\text{Fraccionarios}\begin{cases}\text{Exactos}\to \frac{1}{2}=0{,}5,\ \frac{15}{4}=3{,}75...\\ \text{Periódicos}\to \frac{1}{3}=0.\overline{3},\ \frac{61}{495}=0{,}1\overline{23}...\end{cases}
\end{cases}\\
\mathbb{I}\text{ Irracionales }\left(\cancel{\frac{a}{b}}\right)\to 1{,}1010010001...,\ \pi,\ e,\ \sqrt{2}...
\end{cases}\\
\text{Imaginarios }(a+bi,\ b\neq 0)\to i,\ -3i,\ 3-2i...
\end{cases}
$$

2 El número i

Definición 8. *Llamamos i al número tal que $i^2 = -1$*

Es decir, que $i = \sqrt{-1}$, solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$

2.1 Potencias de i

Sólo hay cuatro potencias distintas de i:

$$
\begin{aligned}
&\vdots\\
i &= i\\
i^2 &= -1\\
i^3 &= i^2\cdot i = -1\cdot i = -i\\
i^4 &= i^2\cdot i^2 = -1\cdot -1 = 1\\
i^5 &= i^4\cdot i = 1\cdot i = i\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Si seguimos, cualquier potencia será una de estas cuatro: $\{i, -1, -i, 1\}$

EJEMPLO 5.75

a) $i^{47} = i^{4\cdot 11+3} = i^{4\cdot 11} \cdot i^3 = i^3 = -i$

b) $i^{34} = i^{4\cdot 8+2} = i^{4\cdot 8} \cdot i^2 = i^2 = -1$

c) $i^{64} = i^{4\cdot 16} = 1$

d) $i^{81} = i^{4\cdot 20+1} = i^{4\cdot 20} \cdot i = i$

e) $i^{-2} = \dfrac{1}{i^2} = \dfrac{1}{-1} = -1$

f) $i^{-3} = \dfrac{1}{i^3} = \dfrac{1}{-i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{1} = i$

Podemos, además, expresar las soluciones de las siguientes ecuaciones en función de i:

EJEMPLO 5.76

- $x^2 + 9 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-9} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{9}\sqrt{-1} \Longrightarrow x = \pm 3i$
- $x^2 + 16 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-16} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{16}\sqrt{-1} \Longrightarrow x = \pm 4i$
- $x^2 + 5 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-5} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{5}\sqrt{-1} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{5}\, i$

O las de cualquier ecuación de segundo grado:

EJEMPLO 5.77

- $x^2+8x+25 = 0 \Longrightarrow \Delta = 8^2-4\cdot 1\cdot 25 = -36 \Longrightarrow x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$
- $2x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 \Longrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{-7}}{4} = \dfrac{3}{4} \pm \dfrac{\sqrt{7}}{4}\, i$

EJEMPLO 5.78

Comprueba que $-4 + 3i$ verifica la ecuación $x^2 + 8x + 25 = 0$.

Solución:

$$(-4+3i)^2 + 8(-4+3i) + 25 = (-4)^2 + 2\cdot(-4)\cdot(3i) + (3i)^2 - 32 + 24i + 25 =$$

$$= 16 - \cancel{24i} + 9i^2 - 32 + \cancel{24i} + 25 = 9 + 9\cdot(-1) = 9 - 9 = 0$$

□

3 Forma binómica

A estos nuevos números de la forma

$$z = a + bi$$

los llamamos números complejos en **forma binómica**. Decimos que a es la parte real de z y b la parte imaginaria de z,

$$Re(z) = a$$
$$Im(z) = b$$

Ejemplo 5.79

a) $\boxed{z = 3 - i}$

$Re(z) = 3$
$Im(z) = -1$

b) $\boxed{z = 2i}$

$Re(z) = 0$
$Im(z) = 2$

c) $\boxed{z = -5}$

$Re(z) = -5$
$Im(z) = 0$

d) $\boxed{z = \dfrac{3i - 2}{2}}$

$Re(z) = -1$
$Im(z) = \frac{3}{2}$

3.1 Operaciones con complejos en forma binómica

Las que salen de pensar el número imaginario i como un radical. Veámoslas con ejemplos:

Ejemplo 5.80

- $(5 + i) + (1 - 3i) = 6 - 2i$
- $z = -2 + 2i$, $w = 1 - i$;

  $$2z - 3w = 2(-2 + 2i) - 3(1 - i) = -4 + 4i - 3 + 3i = -7 + 7i$$

Ejemplo 5.81

- $(5 + i)(1 - 3i) = 5 - 15i + i - 3i^2 = 5 - 14i - 3 \cdot (-1) = 8 - 14i$
- $z = -2 + 2i$; $z^2 = (-2 + 2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = -8i$
- $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}\, i^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$

Un caso especial es la división, para la que recurriremos a los 'trucos' ya utilizados para la racionalización de denominadores:

Ejemplo 5.82

- $\dfrac{2-i}{3+i}=\dfrac{2-i}{3+i}\cdot\dfrac{3-i}{3-i}=\dfrac{6-2i-3i+i^2}{9-i^2}=\dfrac{5-5i}{10}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\,i$
- $\dfrac{5-3i}{i}=\dfrac{5-3i}{i}\cdot\dfrac{i}{i}=\dfrac{5i-3i^2}{i^2}=\dfrac{3+5i}{-1}=-3-5i$

Ejemplo 5.83

Dados los complejos $2-mi$ y $3-ni$, hallar m y n para que su producto sea $8+4i$.

Solución:

$$(2-mi)(3-ni)=6-2ni-3mi+mni^2=6-mn+(-2n-3m)i=8+4i\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\left.\begin{array}{rcl}6-mn&=&8\\-2n-3m&=&4\end{array}\right\}\Longrightarrow[ec2]\ n=\frac{4+3m}{-2}\Longrightarrow[ec1]\ 6-m\cdot\frac{4+3m}{-2}=8\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow(-2)\cdot\left(6-\frac{4m+3m^2}{-2}\right)=(8)\cdot(-2)\Longrightarrow-12-4m-3m^2=-16\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 3m^2+4m-4=0\Longrightarrow\Delta=4^2-4\cdot3\cdot(-4)=64\Longrightarrow m=\frac{-4\pm8}{6}=\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{3}\\-2\end{array}\right.\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}m=\frac{2}{3}\Longrightarrow n=\dfrac{4+3\cdot\frac{2}{3}}{-2}=-3\\[2ex] m=-2\Longrightarrow n=\dfrac{4+3\cdot(-2)}{-2}=1\end{array}\right.$$

Es decir, $(2-\frac{2}{3}\,i)(3+3i)=(2+2i)(3-i)=8+4i$ □

Ejemplo 5.84

¿Cuánto ha de valer m para que el complejo $z=(m-2i)(2+4i)$ sea un número real? ¿E imaginario puro? ¿De qué números se trata?

Solución:

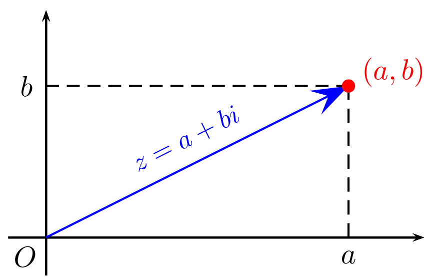
$$(m-2i)(2+4i)=2m+4mi-4i-8i^2=2m+8+(4m-4)\,i$$

- z real: $4m-4=0\Longrightarrow m=1\Longrightarrow z=10$
- z imaginario puro: $2m+8=0\Longrightarrow m=-4\Longrightarrow z=-20i$

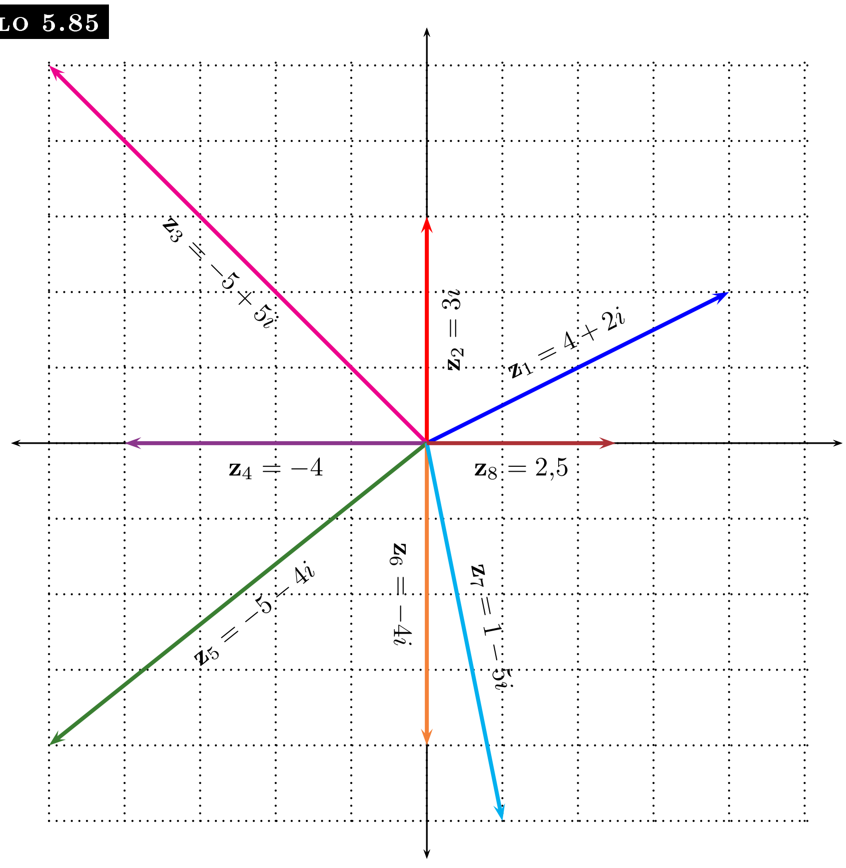
□

3.2 Interpretación gráfica

Cada complejo $z = a + bi$ se puede representar mediante un vector con origen en $O(0,0)$ y extremo en (a,b) (afijo de z).



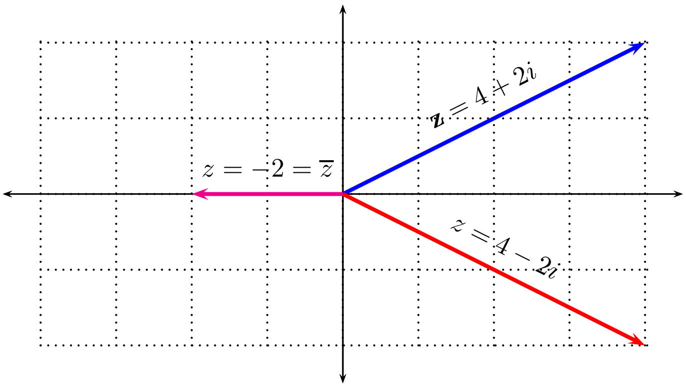
Ejemplo 5.85



Podemos decir, entonces, que los números reales son aquellos complejos cuya representación vectorial es horizontal, o cuyo afijo tiene la segunda coordenada nula (cae en el eje X). Es curioso observar que, pensando desde el punto de vista complejo, todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución; si no encontrábamos las soluciones de muchas de ellas era porque nos empeñábamos en seguir mirando en el lugar equivocado (en la recta, en vez de ampliar nuestra mirada al plano). Es más, se puede demostrar que cualquier ecuación polinómica de grado mayor o igual que 1, incluso con coeficientes complejos, tiene al menos una solución compleja (Teorema fundamental del Álgebra).

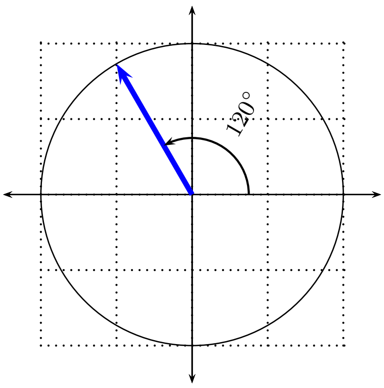
Definición 9. *Llamamos conjugado de $z = a + bi$ al número $\overline{z} = a - bi$; desde el punto de vista gráfico, es su simétrico respecto al eje horizontal.*

EJEMPLO 5.86



Es fácil comprobar que $\overline{\overline{z}} = z$, que un número real y su conjugado coinciden y que la suma y el producto de dos conjugados es real.

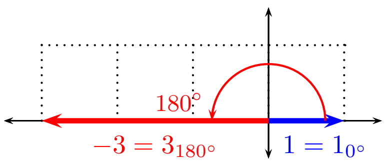
4 Forma polar



Un vector (y por tanto un número complejo) queda completamente identificado por su **longitud** (**módulo**) y el **ángulo de giro desde el semieje horizontal positivo** (**argumento**). Por ejemplo, el número complejo z con módulo $|z| = m = 2$ y argumento $\text{Arg}(z) = \alpha = 120°$, es decir, $\boxed{z = 2_{120°}}$ se representa como en la izquierda. Veremos que, para determinadas operaciones con complejos, esta forma nos facilita los cáculos y la comprensión visual de éstos.

Observación 11.

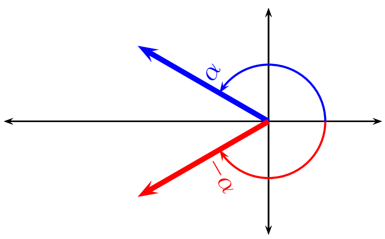
En forma polar, no necesitamos el signo negativo para expresar un número complejo, aunque éste sea un real negativo. Basta con identificarlo con su módulo y un ángulo positivo de la primera vuelta. Así, por ejemplo,



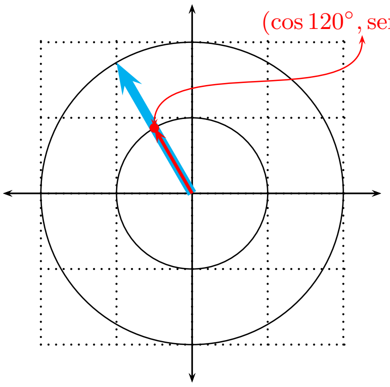
Observación 12. $-3 = 3_{180°}, \quad 1 = 1_{0°}$

Si $z = m_\alpha$, entonces su conjugado (simétrico respecto al eje X) es

$$\bar{z} = m_{-\alpha}$$



5 Paso de forma polar a binómica



Bien mirado, cualquier vector, y por tanto cualquier número complejo, se puede entender como un múltiplo de un vector de módulo 1 (unitario, es decir, con extremo en la circunferencia de radio 1). El complejo antes mencionado, por ejemplo, es

$$2_{120^\circ} = 2 \cdot 1_{120^\circ} = 2 \cdot (\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) =$$

$$= 2 \cdot (-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + \sqrt{3}\, i$$

En general, entonces, cualquier complejo en **forma polar** es

$$z = \boxed{m_\alpha} = m \cdot (\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot i) = \boxed{m\cos\alpha + i \cdot m \operatorname{sen}\alpha}$$

en forma binómica.

Observación 13. *Para evitar confusiones, mayormente al utilizar expresiones trigonométricas, se suele escribir i como primer factor de la parte imaginaria: $3 + \operatorname{sen}\pi \cdot i$ se confunde fácilmente con $3 + \operatorname{sen}(\pi i)$; mejor, por esta razón, escribirlo como $3 + i \operatorname{sen}\pi$*

Definición 10. *A la expresión $z = m \cdot (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ se le llama **forma trigonométrica** de z, y desde el punto de vista gráfico expresa z como múltiplo (m) de un complejo unitario $(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$*

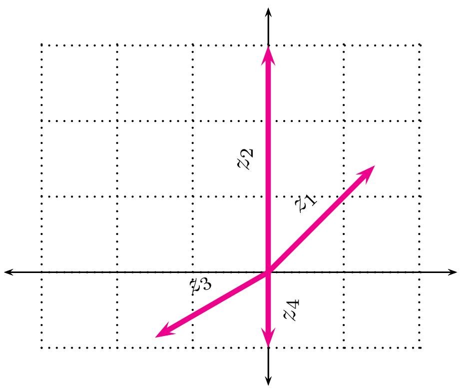
Ejemplo 5.87

- $z_1 = 2_{\frac{\pi}{4}} = 2\,(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) =$

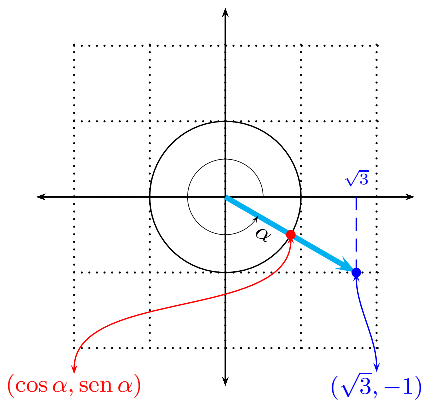
  $= 2\,(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$
- $z_2 = 3_{\frac{\pi}{2}} = 3\,(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}) = 3\,(0 + 1i) = 3i$
- $z_3 = \sqrt{3}_{210^\circ} = \sqrt{3}\,(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) =$

  $= \sqrt{3}\,(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2}\, i) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$
- $z_4 = 1_{270^\circ} = 1\,(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) =$

  $= 1\,(0 - 1i) = -i$



6 Paso de forma binómica a polar



Por el contrario, si queremos saber la expresión de, por ejemplo, $z = \sqrt{3} - i$ en forma polar, se extrae de la gráfica:

- $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$ (Pitágoras)
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{2\cos\alpha} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \alpha = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{-1}{\sqrt{3}} = 330°$

(elegimos 330° en el cuadrante IV, con seno negativo y coseno positivo)

Por tanto, $z = 2_{330°}$

En general, entonces, cualquier complejo en forma binómica es

$$z = \boxed{a + bi = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)_{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}}$$

en forma polar, teniendo en cuenta los signos de a y b a la hora elegir el cuadrante adecuado para el ángulo. Para el cálculo del módulo podemos descartar el signo de a y b, ya que los elevamos al cuadrado.

EJEMPLO 5.88

- $1 + \sqrt{3}\,i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\ \alpha = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{3}}{1}\begin{smallmatrix}+\\+\end{smallmatrix} = \dfrac{\pi}{3} \end{array} \right\} = 2_{\frac{\pi}{3}}$
- $-2 + 3\,i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\ \alpha = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{3}{-2}\begin{smallmatrix}+\\-\end{smallmatrix} \approx 123{,}7° \end{array} \right\} \approx \sqrt{13}_{\,123{,}7°}$
- $-1 - i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{-1}{-1}\begin{smallmatrix}-\\-\end{smallmatrix} = 225° \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{\,225°}$
- $-i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \\ \alpha = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{-1}{0}\begin{smallmatrix}-\\ \end{smallmatrix} = 270° \end{array} \right\} = 1_{270°}$
- $2 - \sqrt{2}\,i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6} \\ \alpha = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\begin{smallmatrix}-\\+\end{smallmatrix} = 315° \end{array} \right\} = \sqrt{6}_{\,315°}$

7 Operaciones con complejos en forma polar

La suma y la resta se hacen pasando previamente a forma binómica. Producto, división, potencia y raíz de un complejo se hacen fácilmente en forma polar:

7.1 Producto

$\boxed{m_\alpha \cdot n_\beta} = m \cdot (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \cdot n \cdot (\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) = m \cdot n \cdot (\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + i\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + i^2 \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) = m \cdot n \cdot (\cos\alpha\cos\beta + i\,[\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta] - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) = m \cdot n \cdot (\cos[\alpha+\beta] + i\operatorname{sen}[\alpha+\beta]) = \boxed{(m \cdot n)_{\alpha+\beta}}$

En definitiva, sólo tenemos que multiplicar los módulos y sumar los ángulos.

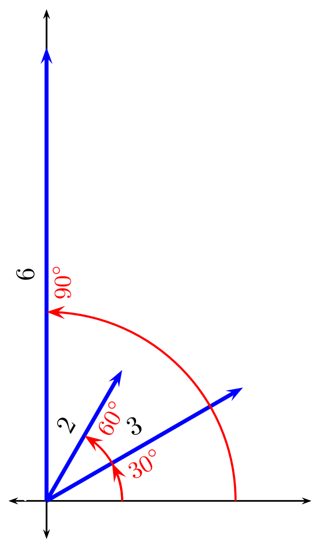
Ejemplo 5.89

$5_{0^\circ} \cdot 3_{180^\circ} = 15_{180^\circ}, \quad 2_{180^\circ} \cdot 10_{180^\circ} = 20_{360^\circ} = 20_{0^\circ}$

Es el producto de enteros ya conocido: $5 \cdot (-3) = -15, \quad -2 \cdot (-10) = 20$

Ejemplo 5.90

$3_{30^\circ} \cdot 2_{60^\circ} = 6_{90^\circ} \quad \longrightarrow$



7.2 División

$$\frac{m_\alpha}{n_\beta} = c_\gamma \text{ tal que } c_\gamma \cdot n_\beta = m_\alpha \Longrightarrow (c \cdot n)_{\gamma+\beta} = m_\alpha \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} c \cdot n & = & m \\ \gamma + \beta & = & \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} c & = & \dfrac{m}{n} \\ \gamma & = & \alpha - \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{m_\alpha}{n_\beta} = \boxed{\left(\frac{m}{n}\right)_{\alpha-\beta}}$$

De forma análoga al producto, sólo hay que dividir los módulos y restar los ángulos.

Ejemplo 5.91

$$\frac{6_{180^\circ}}{2_{0^\circ}} = 3_{180^\circ}, \qquad \frac{12_{180^\circ}}{3_{180^\circ}} = 4_{0^\circ}$$

Es la división de enteros ya conocida: $\dfrac{-6}{2} = -3, \quad \dfrac{-12}{-3} = 4$

7.3 Potencia. Fórmula de Moivre

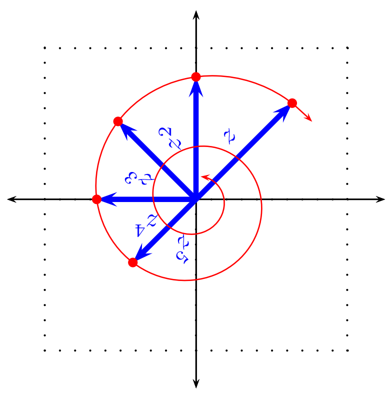
$$\boxed{[m_\alpha]^n} = \underbrace{[m_\alpha]\cdots[m_\alpha]}_{n} = \underbrace{[m\cdots m]}_{n}\ \underbrace{(\alpha+\cdots+\alpha)}_{n} = \boxed{[m^n]_{n\alpha}}$$

Es decir, elevamos el módulo al exponente y multiplicamos éste por el ángulo

Ejemplo 5.92

- $z = [0{,}9]_{45^\circ}$
- $z^2 = [0{,}9^2]_{2\cdot 45^\circ} = 0{,}81_{90^\circ}$
- $z^3 = [0{,}9^3]_{3\cdot 45^\circ} = 0{,}729_{135^\circ}$
- $z^4 = [0{,}9^4]_{4\cdot 45^\circ} = 0{,}6561_{180^\circ}$
- $z^5 = [0{,}9^5]_{5\cdot 45^\circ} = 0{,}59049_{225^\circ}$

Observa que los afijos de las potencias de z se sitúan en una espiral centrada en el origen



Una aplicación directa del resultado anterior es la conocida como **Fórmula de Moivre**, si tenemos en cuenta la versión trigonométrica de un complejo unitario:

si $z = 1_\alpha = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$,

$$\left.\begin{array}{l} z^n = [1^n]_{n\alpha} = 1_{n\alpha} = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha \\ z^n = (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n = \cos n\alpha + i\operatorname{sen} n\alpha}$$

7.4 Raíz

Definición 11. *Llamamos raíz n–ésima de un complejo m_α a cualquier otro complejo cuya potencia n–ésima sea igual que m_α*

Observación 14. *El símbolo $\sqrt[n]{\ }$ para complejos representa **todas** las raíces distintas, a diferencia de como se aplica para números reales, que es sólo la raíz positiva si hay más de un número (caso n par) que cumpla la condición de raíz.*

Observación 15. *Tengamos en cuenta que $m_\alpha = m_{\alpha + k\cdot 360^\circ}$, $k \in \mathbb{Z}$*

EJEMPLO 5.93

Calcula las raíces cúbicas del complejo $z = 8_{90^\circ}$.

Solución:

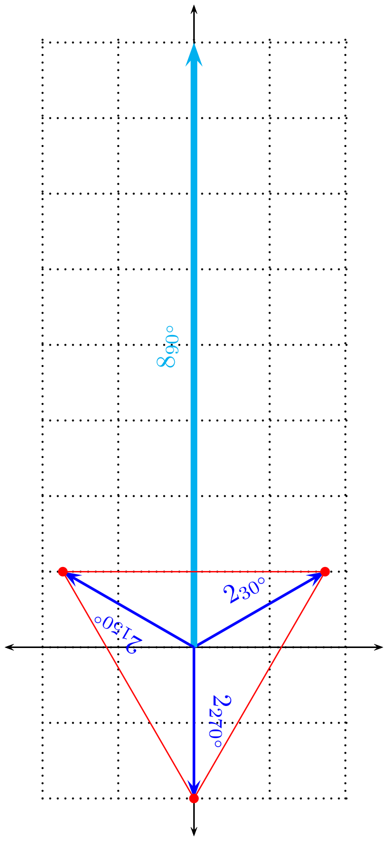
$z = 8_{90^\circ} = 8_{90^\circ + k\cdot 360^\circ}$.

$\sqrt[3]{8_{90^\circ}} = \sqrt[3]{8_{90^\circ+k\cdot 360^\circ}} = r_\beta \Longrightarrow (r_\beta)^3 = 8_{90^\circ+k\cdot 360^\circ} \Longrightarrow [r^3]_{3\beta} = 8_{90^\circ+k\cdot 360^\circ} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r^3 & = & 8 \\ 3\beta & = & 90^\circ + k\cdot 360^\circ \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r & = & \sqrt[3]{8} = 2 \\ \beta & = & \dfrac{90^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} = 30^\circ + k\cdot 120^\circ \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = \left\{ \begin{array}{l} 2_{30^\circ+0\cdot 120^\circ} = 2_{30^\circ} \\ 2_{30^\circ+1\cdot 120^\circ} = 2_{150^\circ} \\ 2_{30^\circ+2\cdot 120^\circ} = 2_{270^\circ} \end{array} \right.$$

La siguiente raíz sería $2_{30^\circ+3\cdot 120^\circ} = 2_{30^\circ+360^\circ} = 2_{30^\circ}$, que ya está dada.



Los afijos de las tres soluciones son los vértices de un triángulo equilátero. No hay ninguna raíz real (ninguna está sobre el eje X)

□

Observación 16. *Efectivamente, si comprobamos las soluciones,*

$$\begin{cases} (2_{30^\circ})^3 = (2^3)_{3\cdot 30^\circ} = 8_{90^\circ} \\ (2_{150^\circ})^3 = (2^3)_{3\cdot 150^\circ} = 8_{450^\circ} = 8_{90^\circ+360^\circ} = 8_{90^\circ} \\ (2_{270^\circ})^3 = (2^3)_{3\cdot 270^\circ} = 8_{810^\circ} = 8_{90^\circ+2\cdot 360^\circ} = 8_{90^\circ} \end{cases}$$

Generalizando el proceso,

$$\sqrt[n]{m_{(\alpha+k\cdot 360^\circ)}} = r_\beta \Longrightarrow (r_\beta)^n = m_{(\alpha+k\cdot 360^\circ)} \Longrightarrow [r^n]_{n\beta} = m_{(\alpha+k\cdot 360^\circ)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} r^n & = & m \\ n\beta & = & \alpha + k\cdot 360^\circ \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} r & = & \sqrt[n]{m} \\ \beta & = & \dfrac{\alpha + k\cdot 360^\circ}{n} \end{array} \right\}$$

Los distintos ángulos β que podemos obtener vienen dados para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. A partir de $k = n$ los ángulos coinciden con alguno de los anteriores.

Cada complejo tiene, entonces, exactamente n raíces n–ésimas distintas:

$$\begin{cases} \left[\sqrt[n]{m}\right]_{\frac{\alpha}{n}+0\cdot\frac{360^\circ}{n}} = \left[\sqrt[n]{m}\right]_{\frac{\alpha}{n}} \\ \left[\sqrt[n]{m}\right]_{\frac{\alpha}{n}+1\cdot\frac{360^\circ}{n}} = \left[\sqrt[n]{m}\right]_{\frac{\alpha}{n}+\frac{360^\circ}{n}} \\ \qquad\qquad\qquad \left[\sqrt[n]{m}\right]_{\frac{\alpha}{n}+2\cdot\frac{360^\circ}{n}} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad \left[\sqrt[n]{m}\right]_{\frac{\alpha}{n}+(n-1)\cdot\frac{360^\circ}{n}} \end{cases}$$

La siguiente, correspondiente a

$$\left[\sqrt[n]{m}\right]_{\frac{\alpha}{n}+\cancel{n}\cdot\frac{360^\circ}{\cancel{n}}} = \left[\sqrt[n]{m}\right]_{\frac{\alpha}{n}+360^\circ} = \left[\sqrt[n]{m}\right]_{\frac{\alpha}{n}}$$

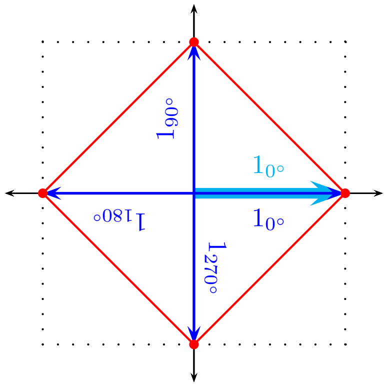
ya es repetida.

EJEMPLO 5.94

Calcula las raíces cuartas de $z = 1$. Es decir, resuelve en $\mathbb{C}$ la ecuación $x^4 - 1 = 0$

Solución: $x^4 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt[4]{1} = \boxed{\sqrt[4]{1_{0^\circ}}}$.

$$\sqrt[4]{1_{0^\circ}} = \left\{ \begin{array}{rcl} r & = & \sqrt[4]{1} = 1 \\ \beta & = & \dfrac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{4} = 0^\circ + k\cdot 90^\circ \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1_{0^\circ+0\cdot 90^\circ} = 1_{0^\circ} = 1 \\ 1_{0^\circ+1\cdot 90^\circ} = 1_{90^\circ} = i \\ 1_{0^\circ+2\cdot 90^\circ} = 1_{180^\circ} = -1 \\ 1_{0^\circ+3\cdot 90^\circ} = 1_{270^\circ} = -i \end{array} \right.$$



Los afijos de las cuatro soluciones son los vértices de un cuadrado. Tiene dos raíces reales, 1 y -1, y otras dos imaginarias puras, i y $-i$

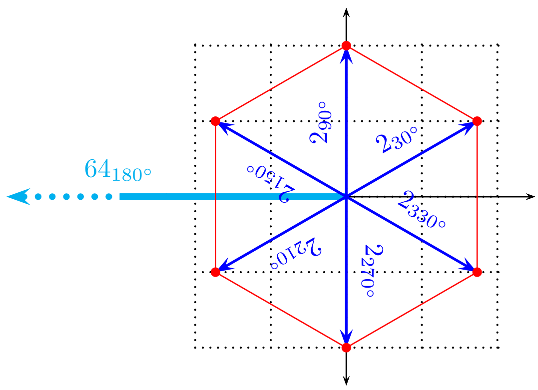
□

EJEMPLO 5.95

Resuelve en $\mathbb{C}$ la ecuación $x^6 + 64 = 0$.

Solución: $x^6 + 64 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt[6]{-64} = \boxed{\sqrt[6]{64_{180^\circ}}}$.

$$\sqrt[6]{64_{180^\circ}} = \left\{ \begin{array}{rcl} r & = & \sqrt[6]{64} = 2 \\ \beta & = & \dfrac{180^\circ + k\cdot 360^\circ}{6} = 30^\circ + k\cdot 60^\circ \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2_{30^\circ+0\cdot 60^\circ} = 2_{30^\circ} \\ 2_{30^\circ+1\cdot 60^\circ} = 2_{90^\circ} = 2i \\ 2_{30^\circ+2\cdot 60^\circ} = 2_{150^\circ} \\ 2_{30^\circ+3\cdot 60^\circ} = 2_{210^\circ} \\ 2_{30^\circ+4\cdot 60^\circ} = 2_{270^\circ} = -2i \\ 2_{30^\circ+5\cdot 60^\circ} = 2_{330^\circ} \end{array} \right.$$



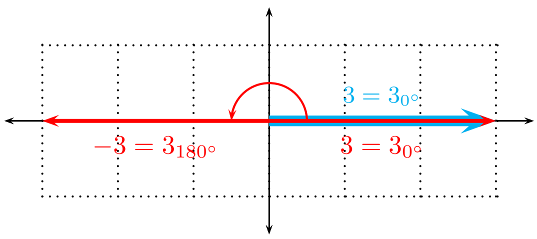
Los afijos de las seis soluciones son los vértices de un hexágono regular. No tiene raíces reales. Tiene dos raíces imaginarias puras, $2i$ y $-2i$

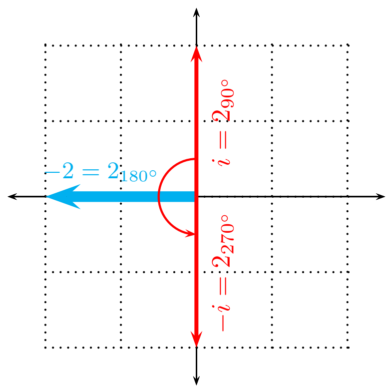
□

Ejemplo 5.96

Veamos, en particular, las raíces cuadradas:

- $\sqrt{9}=\sqrt{9_{0^\circ}}=\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{9}=3 \\ \beta=\dfrac{0^\circ+k360^\circ}{2}=0^\circ+k\cdot 180^\circ \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 3_{0^\circ+0\cdot 180^\circ}=3_{0^\circ}=3 \\ 3_{0^\circ+1\cdot 180^\circ}=3_{180^\circ}=-3 \end{array}\right.$
- $\sqrt{-4}=\sqrt{4_{180^\circ}}=\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{4}=2 \\ \beta=\dfrac{180^\circ+k360^\circ}{2}=90^\circ+k\cdot 180^\circ \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2_{90^\circ+0\cdot 180^\circ}=2_{90^\circ}=2i \\ 2_{90^\circ+1\cdot 180^\circ}=2_{270^\circ}=-2i \end{array}\right.$





8 Anexo: La identidad más hermosa del mundo

Es imposible resistir la tentación de adelantar, ahora que conocemos todos los números que en ella aparecen, una relación que enunció Euler allá por el siglo XVIII en la que intervienen de una forma sencilla las constantes más importantes de las matemáticas. Es un caso particular de la Fórmula de Euler:

$$e^{ix}=\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x$$

cuya explicación requiere herramientas matemáticas de cursos superiores. Si hacemos $x=\pi$, resulta

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi \Longrightarrow e^{i\pi}=-1+\cancel{i\cdot 0}\Longrightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0}$$

9 Ejercicios propuestos

1. Obtén todas las soluciones, reales y complejas, de la ecuación:

   a) $2 - x(2+x) = 12$ $\rightarrow -1 \pm 3i$

   b) $80 = 16x(1+x) + x^3(x-4)$ $\rightarrow -2;\ 2;\ 2 \pm 4i$

   c) $x^2(x^2+10) - 3x(x^2+2) = 20$ $\rightarrow -1;\ 2;\ 1 \pm 3i$

2. Calcula $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100}$ $\rightarrow 1$

3. Obtén un polinomio de grado dos cuyas raíces sean:

   a) $z = 2 - 4i$ y $\overline{z}$ $\rightarrow x^2 - 4x + 20$

   b) $z = 3 + 2i$ y $\overline{z}$ $\rightarrow x^2 - 6x + 13$

4. Determina una ecuación con coeficientes reales cuyas soluciones en $\mathbb{C}$ sean -3, $2+i$ y $2-i$. $\rightarrow x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$

5. Dada la ecuación $2x^2 + 34 = 4x$, obtén sus soluciones y responde:

   a) ¿Cuál es el resultado de sumar sus soluciones? $\rightarrow 2$

   b) ¿Cuál es el resultado de multiplicar sus soluciones? $\rightarrow 17$

6. Encuentra los valores de a para que $Re\left(\dfrac{1+ai}{a+i}\right) = 1$. $\rightarrow 1$

7. Determina qué numero real a sitúa el afijo del complejo $z = (2+i)(a-i)$ en la bisectriz del primer y tercer cuadrante. ¿Cuáles son su módulo y su argumento? $\rightarrow a = -3,\ z = 5\sqrt{2}_{225^\circ}$

8. Calcula a para que $\dfrac{a+2i}{5+12i}$ sea imaginario puro. $\rightarrow a = -\frac{24}{5}$

9. Encuentra los números complejos que cumplen:

   a) $\dfrac{z-3}{2z-i} = 1 - i$ $\rightarrow -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

   b) $\dfrac{z}{2i} - \dfrac{z+1}{2i-4} = 3$ $\rightarrow 3 + \frac{11}{2}i$

10. Encuentra los números complejos z y w que cumplen: $\left.\begin{array}{rcr}(2-i)z + 4w & = & 5-2i \\ (1+i)z + iw & = & 2i\end{array}\right\}$ $\rightarrow z = i;\ w = 1 - i$

11. Comprueba que dos soluciones de la ecuación $x^3 = \dfrac{x+1}{x-1}$ son el número de oro $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y el número complejo i.

12. Determina los números reales b y c sabiendo que una raíz del polinomio

$$P(z) = 2z^3 + bz^2 - 4z + c$$

es $1 - i$. $\rightarrow b = 0;\ c = 8$

13. Demostrar la siguiente igualdad, obtenida de manera fortuita por el insigne filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716):

$$\sqrt{1+\sqrt{3}\,i} + \sqrt{1-\sqrt{3}\,i} = \sqrt{6}$$

14. Calcula $\left(\dfrac{2-2i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{12}$, expresando el resultado en forma binómica. $\rightarrow -64$

15. Obtén el número complejo z que cumple $(1-4i)z = -8-19i$ y exprésalo en forma polar. $\rightarrow 4-3i$

16. Dados los números complejos $z = -2+2\sqrt{3}\,i$, $w = -\sqrt{3}-i$,

    a) Escríbelos en forma polar.

    b) Calcula $\dfrac{z^4}{w^3}$ y expresa el resultado en forma binómica. $\rightarrow -16\sqrt{3}-16i$

17. Si $z = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ y $w = 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$,

    a) Escribe en forma binómica el resultado de $z^3 + z : w$ $\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{23}{3}\,i$

    b) Expresa en forma polar $\bar{z} \cdot \bar{w}$ $\rightarrow 6_{270°}$

18. Justifica que $(1+i)^8$ es un número real positivo.

19. Si $z = 12(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ y $w = 3(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$, calcula:

    a) $z \cdot w$ $\rightarrow 36_{40°}$

    b) $z : w$ $\rightarrow 4_{20°}$

    c) z^3 $\rightarrow 1728_{90°}$

20. Escribe en forma polar el complejo $z = -12+5i$ y represéntalo. $\rightarrow 13_{157,38°}$

21. Escribe en forma binómica $z = 4_{150°}$ y represéntalo $\rightarrow -2\sqrt{3}+2i$

22. Sean $z = 1+i$, $w = \sqrt{3}-i$. Calcula el resultado de $\dfrac{(z\cdot\overline{w})^6}{(\overline{z}\cdot w)^4}$ $\rightarrow 8_{30°}$

23. Dados los números complejos $z_1 = -1+\sqrt{3}\,i$, $z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$ y $z_3 = -\overline{z_2}$,

    a) Escribe estos tres números en forma polar. $\rightarrow 2_{120°}$, $1_{60°}$ y $1_{120°}$

    b) Escribe en forma binómica el resultado de ${z_1}^4 \cdot (z_2 \cdot z_3)^3$ $\rightarrow 8-8\sqrt{3}\,i$

24. Calcula las tres raíces cúbicas de -64. Comprueba que los afijos son los vértices de un triángulo equilátero. $\rightarrow 2-2\sqrt{3}\,i;\ 2+2\sqrt{3}\,i;\ -4$

25. Resuelve la ecuación $z^4 + 625 = 0$. $\rightarrow 5_{45°};\ 5_{135°};\ 5_{225°};\ 5_{315°}$

26. Resuelve la ecuación $4\sqrt{2}\,i + z^3 = 4\sqrt{2}$ $\rightarrow 2_{345°};\ 2_{105°};\ 2_{225°}$

27. Expresa en forma polar las soluciones de la ecuación:

    a) $\sqrt{2}z^3 - 64 = 64i$ $\rightarrow 4_{15°};\ 4_{135°};\ 4_{255°}$

    b) $(1-\sqrt{3}\,i)z^4 + 2 = 0$ $\rightarrow 1_{60°};\ 1_{150°};\ 1_{240°};\ 1_{330°}$

    c) $(2-3i)z^3 - 16i = 24$ $\rightarrow 2_{30°};\ 2_{150°};\ -2i$

28. El número $w = 3 - 2i$ es una raíz cuarta del número complejo z.

    a) Escribe en forma binómica las restantes raíces cuartas de z. $\rightarrow 2+3i;\ -3+2i;\ -2-3i$

    b) Escribe z en forma binómica. $\rightarrow -119-120i$

    c) Representa las raíces cuartas de z. ¿Qué figura se obtiene al unir los afijos de las raíces cuartas de z?

29. Dado el número complejo $w = 3\sqrt{2}_{135^\circ}$,

    a) Expresa w en forma binómica. $\rightarrow -3+3i$

    b) Calcula w^4 $\rightarrow -324$

    c) ¿es w una solución de la ecuación $z^4 = 324_{180^\circ}$? Justifícalo.

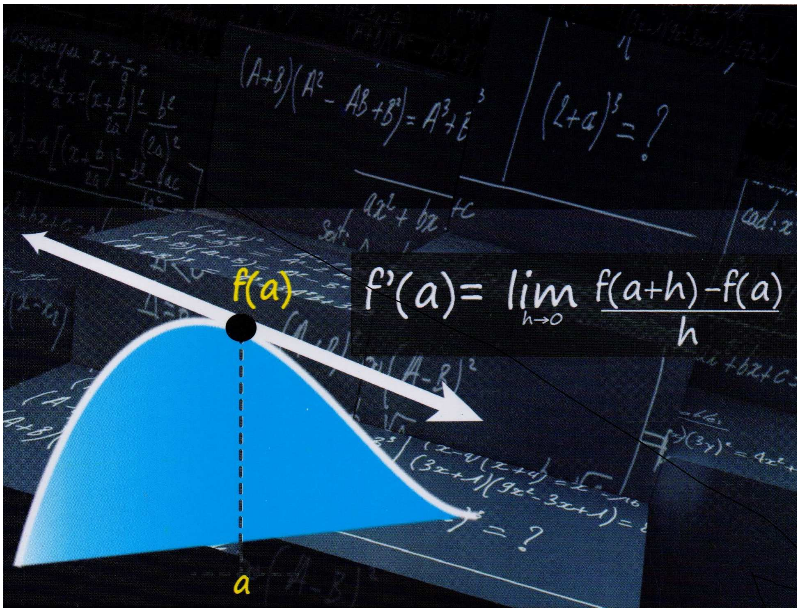
    d) Obtén la forma binómica de las soluciones de la ecuación $z^4 = 324_{180^\circ}$ $\rightarrow 3+3i;\ 3-3i;\ -3+3i;\ -3-3i$

30. Calcula el valor del cociente $z = \dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i}$ y representa los afijos de sus raíces cúbicas. $\rightarrow z = -1;\ \sqrt[3]{-1} = \{1_{180^\circ}, 1_{300^\circ}, 1_{60^\circ}\}$

31. Encuentra dos números reales para los que $(a+bi)^2 = i$ $\rightarrow a = b = \frac{\sqrt{2}}{2};\ a = b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bloque III:

ANÁLISIS



MATEM – I

TEMA 6

FUNCIONES ELEMENTALES

Índice

1 Introducción

EL concepto de función como un objeto matemático independiente no apareció hasta los inicios del cálculo en el siglo XVII. René Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz establecieron la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables. Leibniz en particular acuñó los términos «función», «variable», «constante» y «parámetro». La notación $f(x)$ fue utilizada por primera vez por A.C. Clairaut, y por Leonhard Euler en 1736.

El primero en construir una función fue Galileo (1564 – 1642). Desde lo alto de la torre inclinada de Pisa tiró dos bolas, una de hierro y otra de madera y comprobó que a pesar de la diferencia de peso, ambas llegaban al suelo a la vez, había descubierto la ley de caída de los cuerpos. Continuando su estudio y empleando un curioso artilugio, comprobó que el espacio recorrido depende del cuadrado del tiempo, escribiendo la primera función de la historia:

$$s(t) = k \cdot t^2$$

Donde s representa la distancia recorrida, t el tiempo y k es una constante que hoy sabemos que es $k = \frac{1}{2} \cdot g$, la mitad de la aceleración de la gravedad ($k \approx 5$).

2 Terminología y representación gráfica

En matemáticas se suelen utilizar las **variables** x (**independiente**) e y (**dependiente** de x) para darles un significado puramente numérico y quitarles cualquier connotación física, económica, social, etc. para la que se pudiera aplicar. Así la función que enunció Galileo se expresaría

$$y = 5x^2 \quad \text{o también} \quad f(x) = 5x^2$$

o, de forma más completa,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & 5x^2 \end{array}$$

En donde se especifica que se puede aplicar a cualquier número real (su **dominio**) para obtener otro número real. Si no se especifica, el dominio será el más amplio posible. Otros ejemplos:

$g(x) = \sqrt{x}$	$h(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$	$i(x) = \ln(x-3)$
$\begin{array}{ccc} [0,\infty) & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \sqrt{x} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}-\{-1\} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \frac{x^2-4}{x+1} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} (3,\infty) & \xrightarrow{i} & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \ln(x-3) \end{array}$

Sirvan también como ejemplo el cálculo de las siguientes **imágenes**, únicas para cada valor de x:

a) $g(4) = 2$ b) $g(5) = \sqrt{5}$ c) $i(4) = 0$ d) $h(0) = -4$

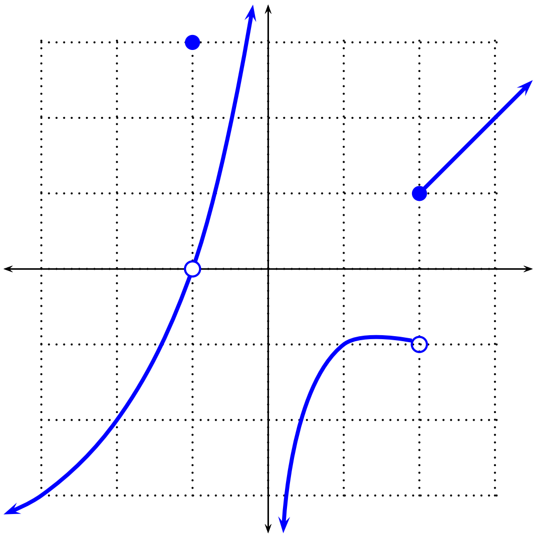
e) $h(-4) = -4$ f) $\nexists\ h(-1)$ g) $i(3+e) = 1$ h) $\nexists\ i(0)$

Al conjunto de todas las imágenes de una función se le llama **Recorrido**.

Los puntos cuyas coordenadas son un valor de x y su imagen, $(x, f(x))$, forman la **gráfica** de la función.

EJEMPLO 6.97

Sea la función f cuya gráfica es la siguiente:



De la gráfica podemos extraer, por ejemplo, las imágenes:

a) $f(-3) = -3$ b) $f(-2) = -2$

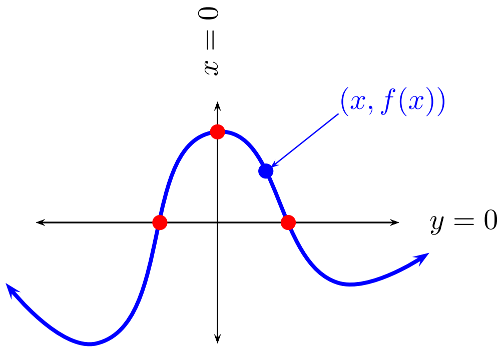
c) $f(-1) = 3$ d) $\nexists\ f(0)$

e) $f(1) = -1$ f) $f(2) = 1$

g) $f(3) = 2$ h) $f(1{,}5) \approx -0{,}9$

Su dominio es $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, y su recorrido $Rec\,(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

2 1 Cortes con los ejes



En la gráfica de $y = f(x)$ siempre destacan los puntos de cortes con los ejes. A partir de su expresión algebraica, podemos calcularlos de la siguiente forma:

- **Corte con el eje** X: $y = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$. Si $x_1, \dots, x_n$ son las soluciones de esa ecuación, $(x_1, 0), \dots, (x_n, 0)$ son los cortes de y con X
- **Corte con el eje** Y: $x = 0 \Longrightarrow (0, f(0))$ es el corte de y con Y

EJEMPLO 6.98

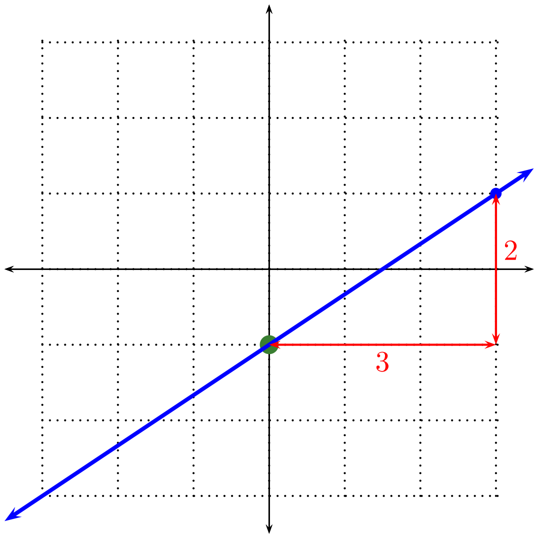
Para $y = (x^2 - 1)e^x$, los cortes con los ejes son:

- **Corte con** X: $y = 0 \Longrightarrow (x^2 - 1)e^x = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{c|c} x^2 - 1 = 0 & e^x = 0 \\ x = \pm 1 & \text{(no sol.)} \end{array} \right| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{(-1, 0)} \\ \boxed{(1, 0)} \end{array} \right.$
- **Corte con** Y: $x = 0 \Longrightarrow (0, f(0)) = \boxed{(0, -1)} \longleftarrow [f(0) = (0^2 - 1)e^0 = -1 \cdot 1 = -1]$

3 Gráficas de algunas funciones elementales

Si, por el contrario, lo que queremos es dibujar la gráfica, el método dependerá del tipo de función. En cursos anteriores estudiamos algunos casos sencillos:

Ejemplo 6.99



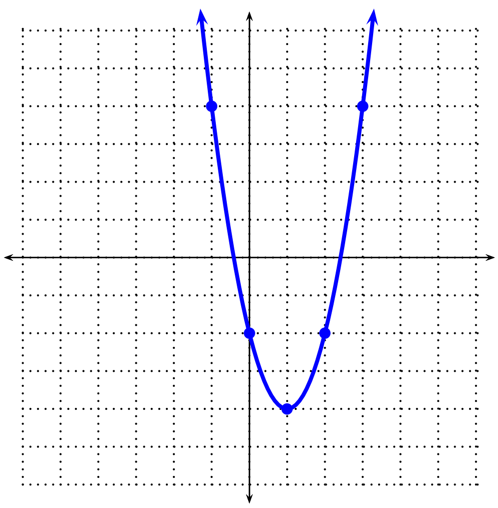
Para representar $\boxed{y = \dfrac{2x-3}{3}}$ (lineal), tenemos varias formas:

1. Construir una tabla con dos puntos (mínimo) y dibujar la recta que los contiene. $\longrightarrow$

x	y
0	-1
3	1

2. Llegar a la expresión $y = mx + n$ e interpretar gráficamente m (pendiente) y n (ordenada en el origen). $y = \frac{2}{3}x - 1 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = -1 \end{cases}$

Ejemplo 6.100

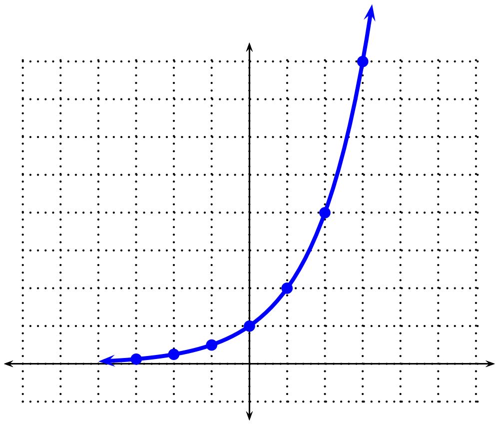


Para representar $\boxed{y = 2x^2 - 4x - 2}$ (cuadrática o parabólica), debemos primero calcular la abcisa del vértice y luego construir una tabla a su alrededor:

$$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = 1$$

x	y
-1	4
0	-2
$\rightarrow$ 1	-4
2	-2
3	4

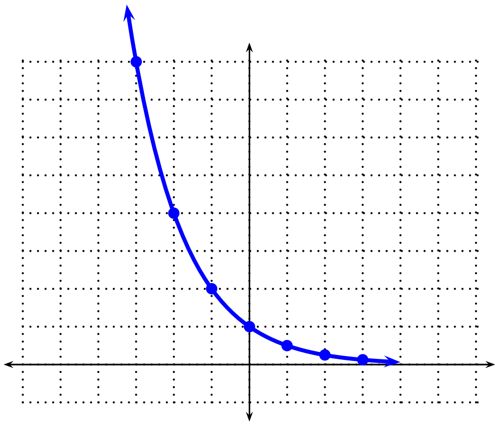
EJEMPLO 6.101



Para representar $\boxed{y = 2^x}$ (exponencial, base > 1), construimos una tabla alrededor de la abcisa 0:

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

EJEMPLO 6.102



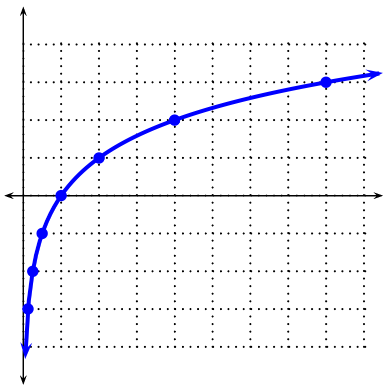
Para representar $\boxed{y = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$ (exponencial, $0 <$ base < 1), construimos una tabla alrededor de la abcisa 0:

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

EJEMPLO 6.103

Para representar $\boxed{y = \log_2 x}$ (logarítmica, base > 1), construimos una tabla a partir de la abcisa 0: (mejor elegimos abcisas cuyas imágenes sean exactas)

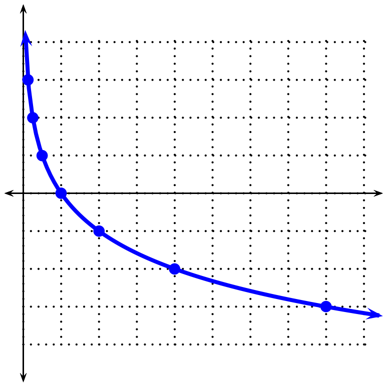
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



Ejemplo 6.104

Para representar $\boxed{y = \log_{\frac{1}{2}} x}$ (logarítmica, $0 <$ base < 1), construimos una tabla a partir de la abcisa 0: (mejor elegimos abcisas cuyas imágenes sean exactas)

x	y
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3

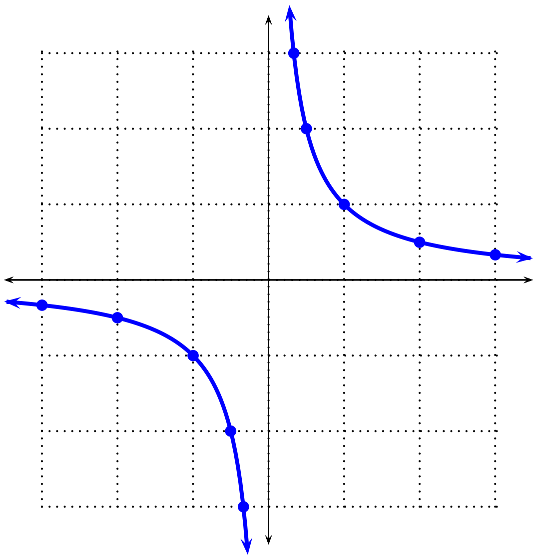


Ejemplo 6.105

Para representar $\boxed{y = \dfrac{1}{x}}$, construimos una tabla alrededor de la abcisa 0:

x	y
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{1}{3}$	-3

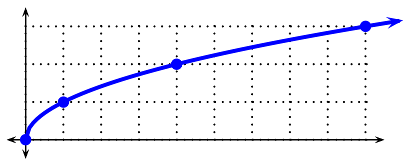
x	y
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$



Ejemplo 6.106

Para representar $\boxed{y=\sqrt{x}}$, construimos una tabla a partir de la abcisa 0:

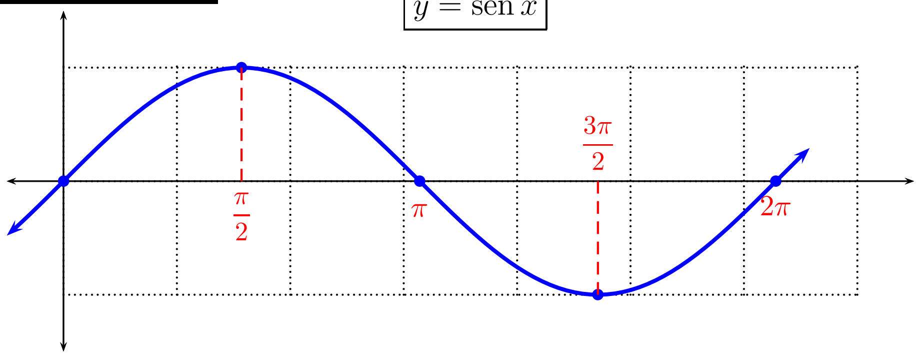
x	y
0	0
1	1
4	2
9	3



Las funciones trigonométricas son más complejas (e interesantes), pero eligiendo las abcisas adecuadas (siempre en radianes, con múltiplos o divisores de π) se representan también elaborando una tabla (la que nos da la circunferencia goniométrica, ya vista).

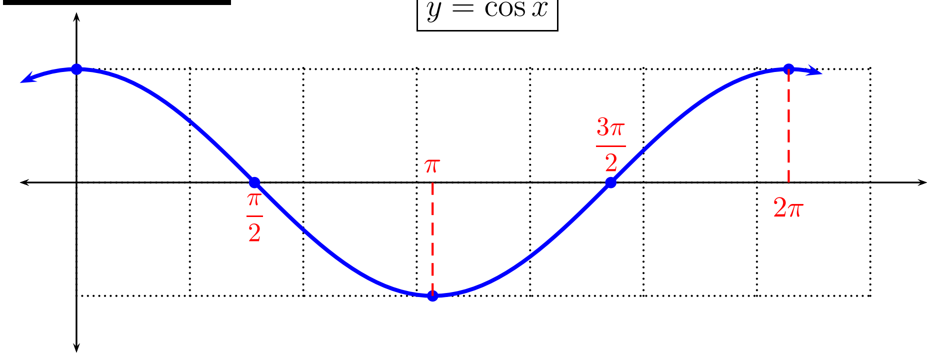
Ejemplo 6.107

$\boxed{y=\operatorname{sen} x}$

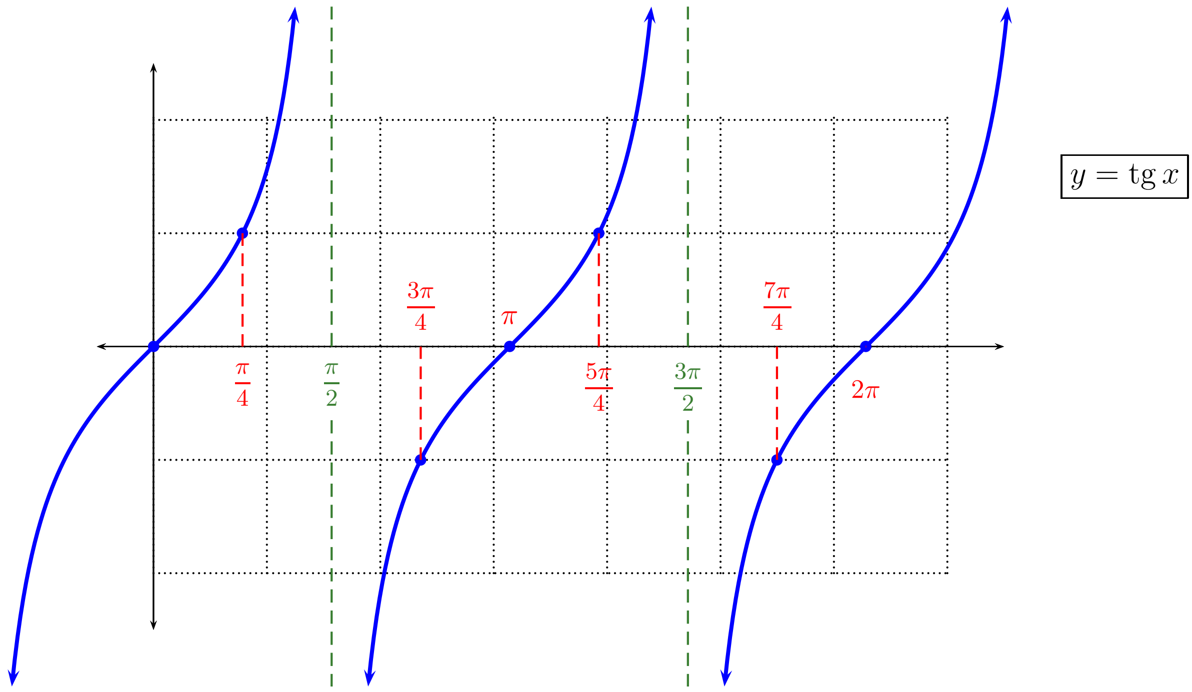


Ejemplo 6.108

$\boxed{y=\cos x}$



EJEMPLO 6.109



Las funciones trigonométricas son periódicas (se pueden construir con un solo trozo de gráfica añadiéndolo continuamente a izquierda y derecha).

Pincha aquí si quieres ir a una animación con la construcción de las tres anteriores gráficas a partir de la circunferencia de unidad.

4 Algunas transformaciones elementales

4.1 Traslaciones verticales y horizontales

Sea la función $y = f(x)$. Las siguientes funciones no cambian la forma de la función, sólo la trasladan:

- $\boxed{y = f(x) + k}$ traslada f k unidades **verticalmente**, hacia arriba o hacia abajo según el signo de k.
- $\boxed{y = f(x + k)}$ traslada f k unidades **horizontalmente**, hacia la izquierda o hacia la derecha según el signo de k.

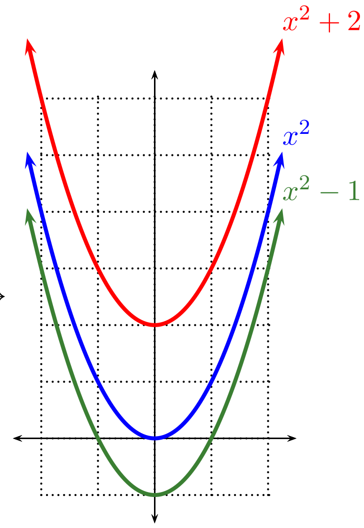
EJEMPLO 6.110

x	x^2
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

x	x^2+2
-2	6
-1	4
0	2
1	4
2	6

x	x^2-1
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

$\longrightarrow$



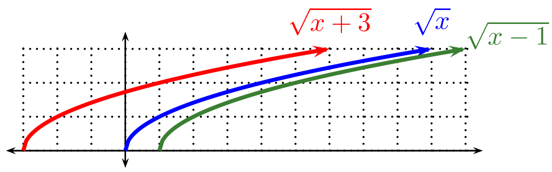
EJEMPLO 6.111

x	$\sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
9	3

x	$\sqrt{x+3}$
-3	0
-2	1
1	2
6	3

x	$\sqrt{x-1}$
1	0
2	1
5	2
10	3

$\longrightarrow$



4.2 Simetría respecto al eje de abcisas

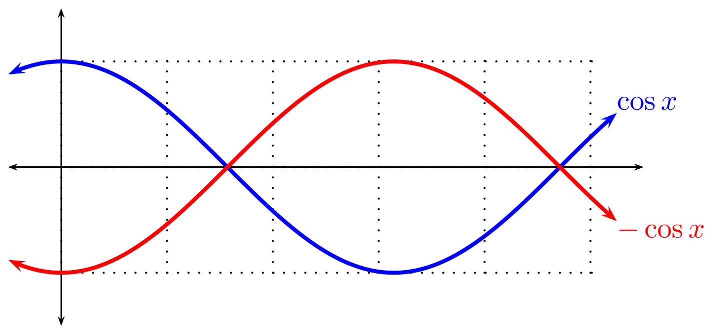
La función $y = -f(x)$ es la simétrica de $y = f(x)$ respecto al eje X.

EJEMPLO 6.112

x	$\cos x$
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\vdots$	$\vdots$

x	$-\cos x$
0	-1
$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	0
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	1
$\vdots$	$\vdots$

$\longrightarrow$



5 Operaciones con funciones

La gran mayoría de las funciones con las que vamos a trabajar se obtienen sumando, restando, multiplicando, dividiendo o 'enlazando' (componiendo) alguna de las elementales anteriores.

EJEMPLO 6.113

Sean f y g dos funciones tales que $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$.

Las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ y $f \circ g$ se definen así:

1. $[f + g](x) = f(x) + g(x) = x^2 + (x + 1) = x^2 + x + 1$
2. $[f - g](x) = f(x) - g(x) = x^2 - (x + 1) = x^2 - x - 1$
3. $[f \cdot g](x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot (x + 1) = x^3 + x^2$
4. $[\dfrac{f}{g}](x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2}{x + 1}$
5. $[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$

Para entender cómo funciona la composición, pensemos las funciones como si se aplicaran a una caja que se puede llenar con lo que quieras: que la función f se defina como

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 2}$$

quiere decir que

$$f(\square) = \frac{\square^2 + \square}{\square + 2}$$

haya lo que haya en el paréntesis de f. Así, por ejemplo,

a) $f\left(\boxed{-1}\right) = \dfrac{\boxed{-1}^2 + \boxed{-1}}{\boxed{-1} + 2} = \dfrac{1 - 1}{-1 + 2} = \dfrac{0}{1} = 0$

b) $f\left(\boxed{a}\right) = \dfrac{\boxed{a}^2 + \boxed{a}}{\boxed{a} + 2}$

c) $f\left(\boxed{a + 2}\right) = \dfrac{\boxed{a + 2}^2 + \boxed{a + 2}}{\boxed{a + 2} + 2} = \dfrac{a^2 + 4a + 4 + a + 2}{a + 2 + 2} = \dfrac{a^2 + 5a + 6}{a + 4}$

d) $f\left(\boxed{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{\boxed{\sqrt{x}}^2 + \boxed{\sqrt{x}}}{\boxed{\sqrt{x}} + 2} = \dfrac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 2}$

Ejemplo 6.114

Sean $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = x^2 - 3$

1. $[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(x^2 - 3) = \operatorname{sen}(x^2 - 3)$
2. $[g \circ f](x) = g(f(x)) = g(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}^2 x - 3$
3. $[g \circ f \circ g](x) = g(f(g(x))) = g(f(x^2 - 3)) = g(\operatorname{sen}(x^2 - 3)) = \operatorname{sen}^2(x^2 - 3) - 3$

Observación 17. *La composición de funciones no es conmutativa, como se puede deducir de los dos primeros apartados del ejemplo anterior.*

Vemos, en este último ejemplo, el proceso:

$$\boxed{x} \xrightarrow{\ \square^2 - 3\ } \boxed{x^2 - 3} \xrightarrow{\ \operatorname{sen}\square\ } \boxed{\operatorname{sen}(x^2 - 3)} \xrightarrow{\ \square^2 - 3\ } \operatorname{sen}^2(x^2 - 3) - 3$$

Ejemplo 6.115

Las siguientes funciones se pueden expresar mediante operaciones con otras dos o más funciones:

1. $f(x) = (x+1)\sqrt{x} \longrightarrow f = g \cdot h$, siendo $g(x) = x + 1$ y $h(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} \longrightarrow f = \dfrac{g}{h}$, siendo $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x + 1$
3. $f(x) = \sqrt{x+1} \longrightarrow f = g \circ h$, siendo $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x + 1$
4. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x^2 \longrightarrow f = g \circ h \circ g$, siendo $g(x) = x^2$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$
5. $f(x) = e^{\frac{3x}{x+1}} \longrightarrow f = g \circ \left(\dfrac{h}{i}\right)$, siendo $g(x) = e^x$, $h(x) = 3x$ i $i(x) = x + 1$
6. $f(x) = \cos^2(\sqrt{2x+1}) \longrightarrow f = g \circ h \circ i \circ j$, siendo $g(x) = x^2$, $h(x) = \cos x$, $i(x) = \sqrt{x}$ y $j(x) = 2x + 1$

6 Función inversa

Pensemos, por ejemplo, en la función $y = x^2$. La función que 'deshace' los cambios que hace f es $y = \sqrt{x}$, ya que

$$\boxed{3} \xrightarrow{\ \square^2\ } \boxed{9} \xrightarrow{\ \sqrt{\square}\ } 3$$

$$\boxed{x} \xrightarrow{\ \square^2\ } \boxed{x^2} \xrightarrow{\ \sqrt{\square}\ } \sqrt{x^2} = x$$

Así, en términos coloquiales, la función inversa de f es aquella que deshace los cambios que produce f, y se denota con f^{-1}

Definición 12. f^{-1} *es la función inversa de* f *si* $f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x))$

Es suficiente con comprobar una de las dos igualdades anteriores.

Ejemplo 6.116

1. Si $f(x) = 2x \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$, porque $f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x}{2}) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$
2. Si $f(x) = e^x \Longrightarrow f^{-1}(x) = \ln x$, porque $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(e^x) = \ln e^x = x$
3. Si $f(x) = \operatorname{tg} x \Longrightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,tg} x$,
   porque $f(f^{-1}(x)) = f(\operatorname{arc\,tg} x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x$
4. Si $f(x) = \sqrt{x-2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2$,
   porque $f(f^{-1}(x)) = f(x^2+2) = \sqrt{x^2+2-2} = \sqrt{x^2} = x$

El cálculo de la función inversa consiste, simplemente, en despejar la variable independiente en función de la dependiente:

Ejemplo 6.117

Sea $\boxed{y = x^2 - 2} \Longrightarrow x^2 = y + 2 \Longrightarrow x = \sqrt{y+2}$, lo que nos dice que la inversa de y es 'la función que suma dos y luego hace la raíz cuadrada'. Reescribiéndola para mantener la variable independiente original (x), $\boxed{y^{-1} = \sqrt{x+2}}$

Comprobación: $y(y^{-1}(x)) = y(\sqrt{x+2}\,) = (\sqrt{x+2}\,)^2 - 2 = x + 2 - 2 = x$

Ejemplo 6.118

Sea $\boxed{y = \dfrac{2x+3}{5-x}} \Longrightarrow 2x + 3 = 5y - xy \Longrightarrow xy + 2x = 5y - 3 \Longrightarrow x(y+2) = 5y - 3 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow x = \frac{5y-3}{y+2} \Longrightarrow \boxed{y^{-1} = \frac{5x-3}{x+2}}$$

Comprobación: $y(y^{-1}(x)) = y\left(\dfrac{5x-3}{x+2}\right) = \dfrac{2 \cdot \dfrac{5x-3}{x+2} + 3}{5 - \dfrac{5x-3}{x+2}} = \dfrac{\dfrac{10x-6}{x+2} + 3}{5 - \dfrac{5x-3}{x+2}} =$

$$= \frac{\dfrac{10x-6+3x+6}{x+2}}{\dfrac{5x+10-5x+3}{x+2}} = \frac{\dfrac{13x}{\cancel{x+2}}}{\dfrac{13}{\cancel{x+2}}} = \frac{\cancel{13}x}{\cancel{13}} = x$$

7 Funciones definidas a trozos

Se les llama así a aquellas funciones que tienen distinta expresión algebraica en varios intervalos (trozos) o puntos de su dominio. La gráfica, por tanto, habrá que construirla (independientemente) trozo a trozo.

EJEMPLO 6.119

$$f(x) = \begin{cases} \log x & \text{si } 0 < x < 2 \\ 3 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) $\nexists\ f(0)$

b) $f(1) = \log 1 = 0 \longleftarrow (0 < 1 < 2)$

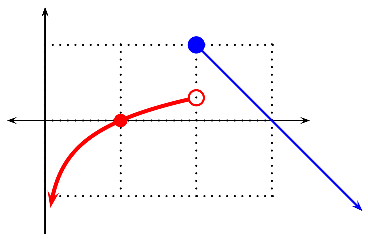
c) $f(2) = 3 - 2 = 1 \longleftarrow \longleftarrow (2 \geq 2)$

d) $f(3) = 3 - 3 = 0 \longleftarrow (3 \geq 2)$

x	$\log x$
$\circ$ 0	$\nexists$
1	0
$\circ$ 2	0,3

x	$3-x$
$\bullet$ 2	1
3	0
$\vdots$	$\vdots$

$\longrightarrow$



EJEMPLO 6.120

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) $|-3| = -(-3) = 3 \longleftarrow (-3 \leq 0)$

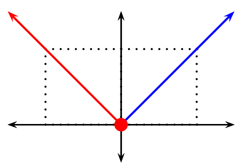
b) $|0| = -0 = 0 \longleftarrow (0 \leq 0)$

c) $|1| = 1 \longleftarrow (1 > 0)$

x	$-x$
$\vdots$	$\vdots$
-1	1
$\bullet$ 0	0

x	x
$\circ$ 0	0
1	1
$\vdots$	$\vdots$

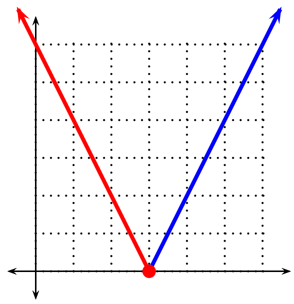
$\longrightarrow$



Observación 18. *En general,* $|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & si\ \ f(x) \leq 0 \\ f(x) & si\ \ f(x) > 0 \end{cases}$

Ejemplo 6.121

$$|2x-6| = \begin{cases} -2x+6 & \text{si} \quad 2x-6 \leq 0 \\ 2x-6 & \text{si} \quad 2x-6 > 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x+6 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ 2x-6 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$



Ejemplo 6.122

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{a}{\operatorname{tg} x} & \text{si} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) $g(-1) = \dfrac{a}{-1} = -a \longleftarrow (-1 < 0)$

b) $g(0) = 0 \longleftarrow (0 = 0)$

c) $g(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{a}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \dfrac{a}{1} = a \longleftarrow (0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2})$

d) $\nexists \ g(3)$ (no definida en $3 > \frac{\pi}{2}$)

Ejemplo 6.123

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) $h(-1) = \dfrac{1}{-1} = -1 \longleftarrow (-1 < 0)$

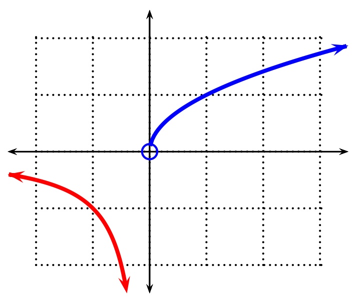
b) $h(0) = \dfrac{1}{0} = \nexists \longleftarrow (0 \leq 0)$

c) $h(0{,}01) = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1 \longleftarrow (0{,}01 > 0)$

x	$\frac{1}{x}$
$\vdots$	$\vdots$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$\bullet\ 0$	$\nexists$

x	$\sqrt{x}$
$\circ\ 0$	0
1	1
2	$1{,}41$
$\vdots$	$\vdots$

$\longrightarrow$



EJEMPLO 6.124

$$i(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ -x+6 & \text{si } 2 \leq x < 7 \\ 3 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

a) $i(0) = 2^0 = 1$ b) $i(2) = -2+6 = 4$

c) $i(3) = -3+6 = 3$ d) $i(7) = 3$

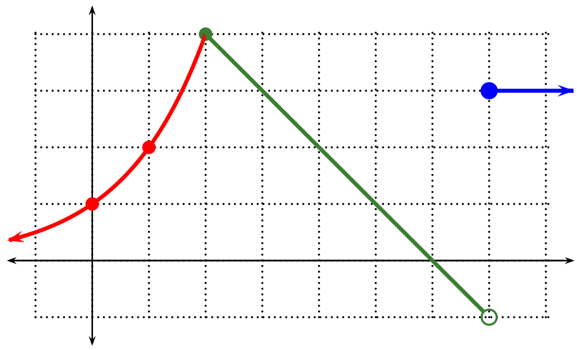
e) $i(8) = 3$

x	2^x
$\vdots$	$\vdots$
0	1
1	2
$\circ\ 2$	4

x	$-x+6$
$\bullet\ 2$	4
$\circ\ 7$	-1

x	3
$\bullet\ 7$	3
8	3
$\vdots$	$\vdots$

$\longrightarrow$



8 Cálculo de dominios

Se reduce a resolver las ecuaciones o inecuaciones que resultan de las condiciones de existencia de una imagen, y dependen del tipo de función.

EJEMPLO 6.125

$$f(x) = \frac{x}{x^2-3x+2} \Longrightarrow D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2-3x+2 \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R} - \{1,2\}}$$

$$x^2-3x+2 = 0 \Longrightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

EJEMPLO 6.126

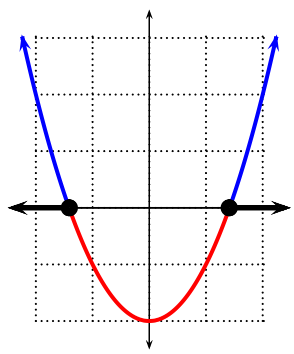
$$f(x) = \sqrt{x^2-2} \Longrightarrow D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2-2 \geq 0\} = \boxed{(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)}$$

$$x^2-2 \geq 0 \longrightarrow \begin{cases} + \\ 0 \end{cases}$$

$$x^2-2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$a = 1 > 0 \Longrightarrow$ Las ramas de la parábola van hacia arriba.

$\longrightarrow$



Ejemplo 6.127

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x}} \Longrightarrow D(f)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \frac{x^2-5x+4}{x}\geq 0\}=\boxed{(0,1]\cup[4,\infty)}$$

$$\frac{x^2-5x+4}{x}\geq 0 \longrightarrow \begin{cases} + \\ 0 \end{cases}$$

$$x^2-5x+4=0 \Longrightarrow x=\begin{cases} \boxed{1} \\ \boxed{4} \end{cases}$$

$$x=\boxed{0}$$

$\longrightarrow$

		0		1		4	
$\frac{x^2-5x+4}{x}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
			$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$	$\uparrow$

Ejemplo 6.128

$$f(x)=\ln\frac{x^2}{x+3} \Longrightarrow D(f)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \frac{x^2}{x+3}>0\}=\boxed{(-3,0)\cup(0.\infty)}$$

$$\frac{x^2}{x+3}>0\longrightarrow +$$

$$x^2=0\Longrightarrow x=\boxed{0}$$

$$x+3=0\Longrightarrow x=\boxed{-3}$$

$\longrightarrow$

		-3		0	
$\frac{x^2}{x+3}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$+$
			$\uparrow$		$\uparrow$

Si la función está definida a trozos, habrá que calcular separadamente el dominio de cada trozo (restringido al intervalo en el que está definido).

Ejemplo 6.129

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{si}\ \ x\leq 1 \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{si}\ \ 1<x<2 \\ \log(x-2) & \text{si}\ \ x\geq 2 \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad D(f)=\boxed{\mathbb{R}-\{-1,2\}}$$

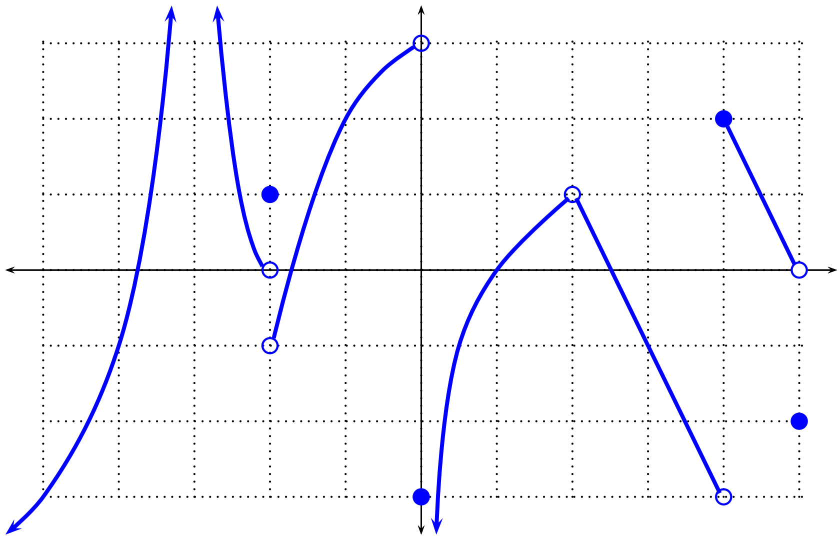
$$x\leq 1\longrightarrow x+1=0\Longrightarrow x=-1\in(-\infty,1]\Longrightarrow\boxed{-1\notin D(f)}$$

$$1<x<2\longrightarrow x-1=0\Longrightarrow x=1\notin(1,2)\Longrightarrow 1\in D(f)$$

$$x\geq 2\longrightarrow x-2>0\Longrightarrow x>2\Longrightarrow\boxed{2\notin D(f)}$$

9 Ejercicios propuestos

1. Dada la gráfica de f, encuentra las imágenes de todos los enteros entre -5 y 5. ¿Cuál es su dominio?



2. Calcula los puntos de corte con los ejes y representa las siguientes funciones.

   $\rightarrow$ a) $(4,0)$; $(0,-4)$, b) $(0,0)$; $(4,0)$, c) $(\pm 2,0)$; $(0,-4)$, d) $(\pm 3,0)$; $(0,9)$

   a) $y = x - 4$ b) $y = x^2 - 4x$ c) $y = x^2 - 4$ d) $y = -x^2 + 9$

3. Calcula los puntos de corte entre las siguientes funciones. $\rightarrow$ a) $(4,0)$; $(1,-3)$, b) $(-\sqrt{5},1)$; $(\sqrt{5},1)$

   a) $y = x - 4$ e $y = x^2 - 4x$ b) $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 + 6$

4. Sabiendo que $f(x)$ es una función lineal, y conocidos los datos de la siguiente tabla, ¿Qué valor toma f(0)? ¿Y f(3)?

x	$f(x)$
1	6
5	4

   $\rightarrow f(0) = \frac{13}{2}$; $f(3) = 5$

5. Apoyándote en la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$, esboza la de las siguientes funciones.

   a) $y = \dfrac{1}{x} + 3$ b) $y = 2 - \dfrac{1}{x}$ c) $y = \dfrac{1}{x-2}$

6. Representa las siguientes funciones a partir de la gráficas de $y = 2^x$ e $y = (\frac{1}{2})^x$

   a) $y = 2^x - 1$ b) $y = 2^x + 2$ c) $y = 2^{x-2}$
   d) $y = 2^{x+1}$ e) $y = (\frac{1}{2})^x + 1$ f) $y = (\frac{1}{2})^{x-1}$

7. Representa:

   a) $y = \log_2 x - 2$ b) $y = \log_2(x-2)$ c) $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$ d) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

8. Calcula el dominio y representa las siguientes funciones:

   a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \sqrt{x-3}$ c) $y = \sqrt{x} - 3$
   d) $y = \sqrt{x+1}$ e) $y = -\sqrt{x+1}$

9. Expresa como funciones definidas a trozos.

   a) $y = |x+2|$ b) $y = |x-2|$ c) $y = |x^2-1|$

   d) $y = |x^2+2|$ e) $y = |x+2|+2$ f) $y = 2|x-1|$

10. Representa las funciones del ejercicio anterior.

11. Dadas las siguientes funciones calcula su dominio y represéntalas.

   a) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x<0 \\ -x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x<-1 \\ x^2-4 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x+2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

   c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x<0 \\ x^2-4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x>2 \end{cases}$ d) $i(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x>1 \end{cases}$

12. Calcula el dominio de las siguientes funciones: $\rightarrow$ a) $\mathbb{R}$, b) $\mathbb{R}-\{-1\}$, c) $\mathbb{R}-\{-3,1\}$, d) $\mathbb{R}$, e) $(-\infty,3] \cup (5,\infty)$, f) $(-\infty,5)$

   a) $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{x^2-4}{x+1}$ c) $y = \dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$

   d) $y = x^2-1$ e) $y = \sqrt{\dfrac{3-x}{5-x}}$ f) $y = \log(5-x)$

13. Dadas las funciones $f(x) = x^2-x-2$, $g(x) = \sqrt{2x-4}$, $h(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ y $t(x) = 1-x^2$, calcula las siguientes funciones y determina su dominio:

   a) $[f-t](x)$ $\rightarrow 2x^2-x-3;\ D=\mathbb{R}$ b) $[h+t](x)$ $\rightarrow \frac{x^4-5x^2+3}{4-x^2};\ D=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$

   c) $\left[\dfrac{f}{g}\right](x)$ $\rightarrow \frac{x^2-x-2}{\sqrt{2x-4}};\ D=(2,\infty)$ d) $[h \cdot t](x)$ $\rightarrow \frac{1-x^2}{x^2-4};\ D=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$

   e) $[f \cdot h](x)$ $\rightarrow \frac{x^2-x-2}{x^2-4};\ D=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$ f) $\left[\dfrac{f}{t}\right](x)$ $\rightarrow \frac{x^2-x-2}{1-x^2};\ D=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

   g) $\left[\dfrac{h}{f}\right](x)$ $\rightarrow \frac{1}{(x^2-4)(x^2-x-2)};\ D=\mathbb{R}-\{-1,\pm 2\}$ h) $[g \cdot g](x)$ $\rightarrow (\sqrt{2x-4})^2;\ D=[2,\infty)$

14. Considera las funciones $f(x) = 1-x^2$, $g(x) = \sqrt{4-2x}$ y $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$; calcula: $\rightarrow$ a) $2x^2-x^4$, b) $\frac{1}{\sqrt{-2x}}$, c) $\sqrt{2x^2+2}$

   a) $[f \circ f](x)$ b) $[h \circ g](x)$ c) $[g \circ f](x)$

15. Expresa estas funciones como resultado de operar con otras más sencillas:

   a) $y = \operatorname{sen}\left(\ln(x^2-3)\right)$ b) $y = \dfrac{\operatorname{tg}(\sqrt{x})}{x}$

   c) $y = e^{\operatorname{sen}^2 x}$ d) $y = e^{\operatorname{sen} x^2}$

16. Calcula la función inversa de las siguientes funciones y compruébalo.

$\rightarrow$ a) $\frac{x+1}{2}$, b) $\frac{3x+1}{2}$, c) $\frac{3-x}{3x-2}$, d) x^2-2

a) $f(x)=2x-1$ b) $g(x)=\dfrac{2x-1}{3}$ c) $h(x)=\dfrac{2x+3}{3x+1}$ d) $i(x)=\sqrt{x+2}$

17. Asocia cada gráfica con su expresión algebraica.

$a13$, $b5$, $c8$, $d21$, $e9$, $f7$, $g10$, $h18$, $i11$, $j12$, $k6$, $l14$, $m15$, $n19$, 2, $o16$, $p1$, $q20$, $r17$, $s3$, $t4$

a) $y=2-x^2$ b) $y=\dfrac{1}{x}-1$ c) $y=2^x-1$ d) $y=-\operatorname{tg}x$

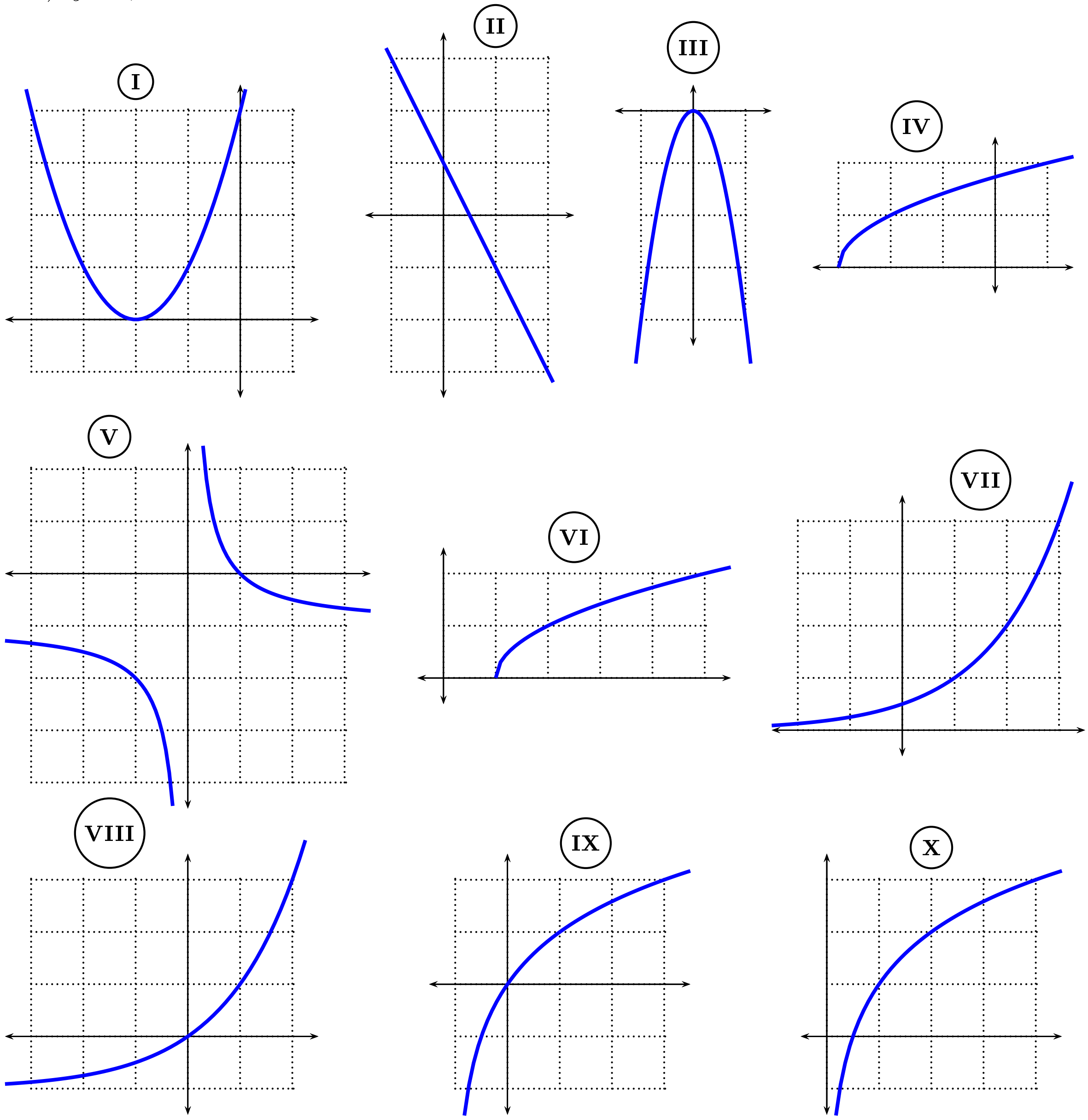
e) $y=\log_2(x+1)$ f) $y=2^{x-1}$ g) $y=1+\log_2 x$ h) $y=1+\cos x$

i) $y=\dfrac{-1}{x-2}+1$ j) $y=x^2-2$ k) $y=\sqrt{x-1}$ l) $y=-0{,}25x^2$

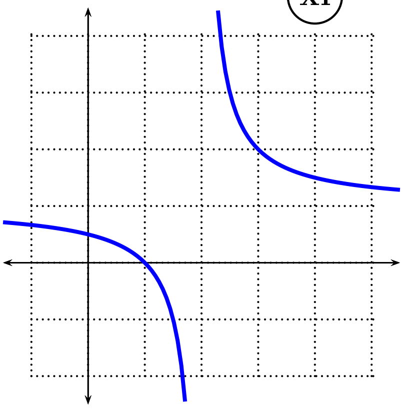
m) $y=\dfrac{-1}{x+1}$ n) $y=\ln x$ ñ) $y=-2x+1$ o) $y=-\sqrt{-x}$

p) $y=(x+2)^2$ q) $y=\operatorname{sen}(x+\pi)$ r) $y=-\sqrt{x+1}$ s) $y=-4x^2$

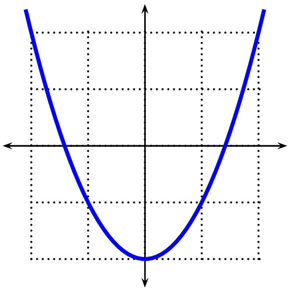
t) $y=\sqrt{x+3}$



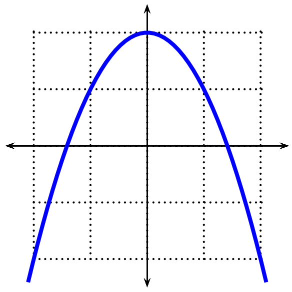
XI



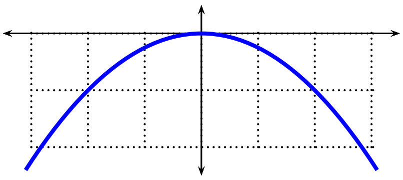
XII



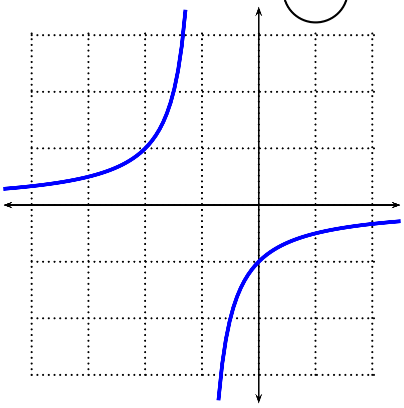
XIII



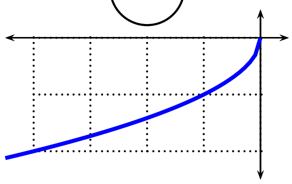
XIV



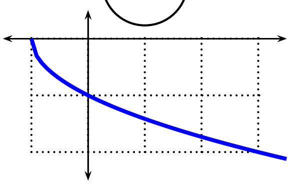
XV



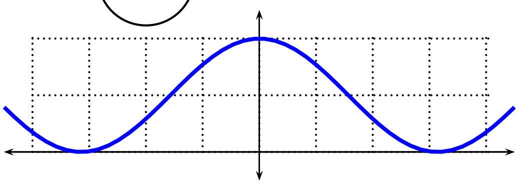
XVI



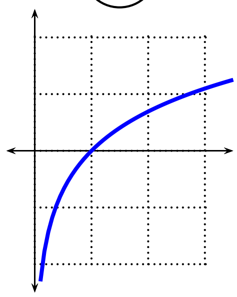
XVII



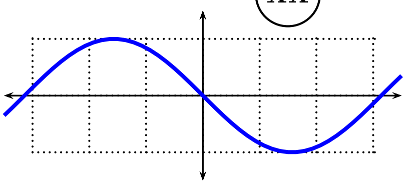
XVIII



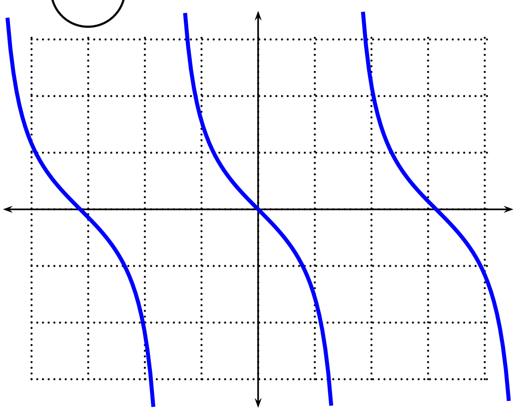
XIX



XX



XXI



MATEM – I

TEMA 7

LÍMITES DE FUNCIONES

Índice

1 Introducción

Aunque la idea (intuitiva) de límite ya se conoce desde tiempos de los griegos, no fue hasta comienzos del siglo XX cuando se introdujo la notación que hoy utilizamos. Trataremos de responder a cómo se comportan las imágenes de una función en el entorno de un punto o cuando se aleja hacia la derecha o izquierda, lo que nos permitirá decidir sobre conceptos bastante intuitivos como el de *continuidad* o *asíntotas* de una función.

Los límites, también, son la base sobre la que se asienta el concepto de *derivada* e *integral*, que forman el corpus principal del *Análisis matemático*.

2 Límites en un punto

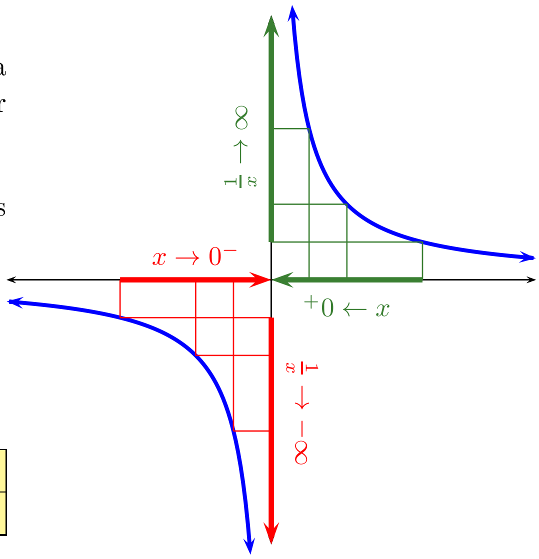
Ya hemos observado que hay funciones que tienen un comportamiento especial en determinadas abcisas. Por ejemplo, en los alrededores de $x = 0$, la función $f(x) = \frac{1}{x}$:

1. No tiene imagen en $x = 0$ ($f(0) = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$)
2. Las imágenes 'se disparan' hacia abajo o hacia arriba, según 'vayamos a parar' a $x = 0$ por la izquierda o por la derecha.

Este hecho se puede comprobar con respectivas tablas de imágenes:

x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$\to$	0^-
$\frac{1}{x}$	-10	-100	-1000	$\to$	$-\infty$

0^+	$\leftarrow$	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	x
∞	$\leftarrow$	1000	100	10	$\frac{1}{x}$

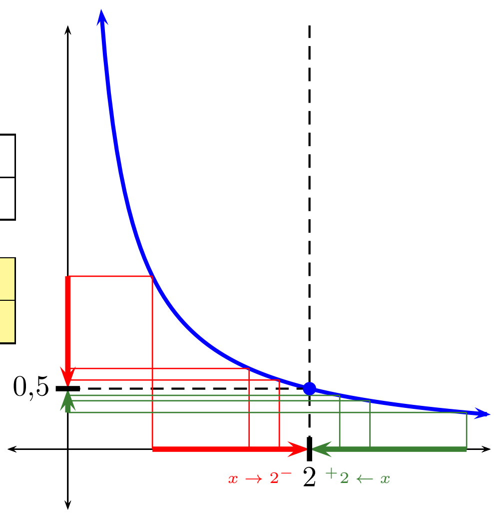


Aunque, por regla general, las funciones con las que vamos a trabajar tienen un comportamiento **continuo** en todas o casi todas sus abcisas: si, por ejemplo, queremos estudiar la anterior función en un entorno de $x = 2$,

1. $f(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$
2. Las imágenes 'van a parar' a la altura $f(2) = 0{,}5$ cuando x tiende a 2, tanto por la izquierda como por la derecha.

x	$1{,}9$	$1{,}99$	$1{,}999$	$\to$	2^-
$\frac{1}{x}$	$0{,}52631578947$	$0{,}50251256281$	$0{,}50025012506$	$\to$	$0{,}5$

2^+	$\leftarrow$	$2{,}001$	$2{,}01$	$2{,}1$	x
$0{,}5$	$\leftarrow$	$0{,}49975012493$	$0{,}49751243781$	$0{,}47619047619$	$\frac{1}{x}$



Observación 19. *El número al que tienden las imágenes no varía si cambio la sucesión de abcisas (no hay más que interpretarlo gráficamente). Por ejemplo,*

x	1,95	1,995	1,9995	$\rightarrow$	2	$\leftarrow$	2,002	2,02	2,2	x
$\frac{1}{x}$	0,51282051282	0,50125313283	0,50012503125	$\rightarrow$	0,5	$\leftarrow$	$0.\overline{499500}$	$0.\overline{495}$	$0.\overline{45}$	$\frac{1}{x}$

Observación 20. *La sucesión no depende de sus primeros términos; sólo interesan los infinitos últimos, que son los que deciden su tendencia.*

La noción de límite se usa, precisamente, para expresar cómo se comportan las funciones en los alrededores de una determinada abcisa. Para los anteriores ejemplos utilizaremos las siguientes notaciones:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x} = 0{,}5} \qquad \boxed{\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x} = 0{,}5}$$

que se leen así:

- El límite, cuando x tiende a 0 por la izquierda, de la función $\dfrac{1}{x}$ es $-\infty$.
- Los demás, análogamente.

Pincha aquí para abrir Desmos con la anterior gráfica. Puedes desplazarte sobre ella para ver hacia dónde van las imágenes, y así obtener el límite. También puedes reescribir cualquier otra función.

Definición 13. *Sea* $L = \begin{cases} L \in \mathbb{R} \\ \infty \\ -\infty \end{cases}$*, a_n cualquier sucesión de números menores que a (izquierda) o mayores que a (derecha) que tienden a a.*

(Límite por la izquierda): $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \iff$

x	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	$\rightarrow$	a^-
$f(x)$	$f(a_1)$	$f(a_2)$	$f(a_3)$	$\cdots$	$\rightarrow$	L

(Límite por la derecha): $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \iff$

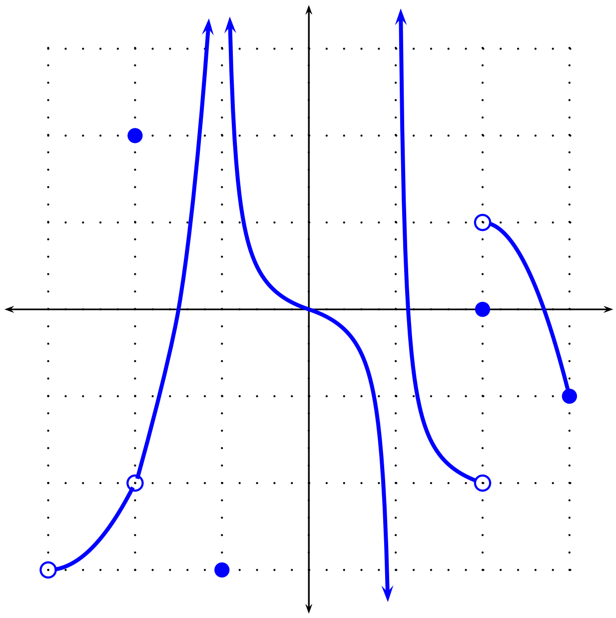
a^+	$\leftarrow$	$\cdots$	a_3	a_2	a_1	x
L	$\leftarrow$	$\cdots$	$f(a_3)$	$f(a_2)$	$f(a_1)$	$f(x)$

Definición 14. $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = L} \iff \boxed{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)}$

EJEMPLO 7.130

$\nexists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$, porque $\overbrace{\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}}^{-\infty} \neq \overbrace{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}}^{\infty}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$, porque $\overbrace{\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}}^{\frac{1}{2}} = \overbrace{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}}^{\frac{1}{2}}$.

EJEMPLO 7.131



▪ $f(-3) = \nexists$ ▪ $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \nexists$ ▪ $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -3$	▪ $f(-2) = 2$ ▪ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -2$ ▪ $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -2$ ▪ $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -2$	▪ $f(-1) = -3$ ▪ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \infty$ ▪ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty$ ▪ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \infty$	▪ $f(0) = 0$ ▪ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ ▪ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ ▪ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
▪ $f(1) = \nexists$ ▪ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ ▪ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty$ ▪ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \nexists$	▪ $f(2) = 0$ ▪ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -2$ ▪ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$ ▪ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \nexists$	▪ $f(3) = -1$ ▪ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -1$ ▪ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \nexists$	

Conviene, antes de continuar, resaltar:

Observación 21.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *es independiente de* $f(a)$. *En su definición sólo intervienen las abcisas y sus imágenes en sus alrededores, sin incluir* $x = a$.
- *Las funciones con las que estudiaremos se obtienen combinando, mediante suma, resta, producto, división y composición, las funciones elementales descritas en el tema anterior. Todas son* ***continuas en su dominio****, lo que implica que, si existe* $f(a)$*, y* $f(x)$ *no cambia de definición en un entorno de* $x = a$*, entonces* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

- *Debido a la anterior observación, los límites que* ***no son inmediatos*** *lo son en aquellos puntos que,* ***o no están en el dominio*** *de f,* ***o son de ruptura*** *(f cambia de definición, como ocurre en las funciones definidas a trozos).*

EJEMPLO 7.132

Calcula o haz una estimación, mediante una tabla, de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\ln x}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3-2x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^3-2x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^3-2x^2}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{1^2} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{0^2} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = \infty$

x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$\to$	0	$\leftarrow$	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$
$\frac{1}{x^2}$	100	10000	1000000	$\to$	∞	$\leftarrow$	1000000	10000	100

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\ln x}{x-1} = \dfrac{2\ln 1}{1-1} = \dfrac{2\cdot 0}{0} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = 2$

x	$0{,}9$	$0{,}99$	$0{,}999$	$\to$	1	$\leftarrow$	$1{,}001$	$1{,}01$	$1{,}1$
$\frac{2\ln x}{x-1}$	2,10721031	2,01006717	2,00100067	$\to$	2	$\leftarrow$	1,99900067	1,99006617	1,90620356

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3-2x^2} = \dfrac{1}{0^3-2\cdot 0^2} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = -\infty$

x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$\to$	0	$\leftarrow$	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$
$\frac{1}{x^3-2x^2}$	$-47{,}6$	$-4975{,}1$	$-499750{,}1$	$\to$	$-\infty$	$\leftarrow$	$-500250{,}1$	$-5025{,}1$	$-52{,}6$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^3-2x^2} = \dfrac{1}{2^3-2\cdot 2^2} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = \nexists$

x	$1{,}9$	$1{,}99$	$1{,}999$	$\to$	0	$\leftarrow$	$2{,}001$	$2{,}01$	$2{,}1$
$\frac{1}{x^3-2x^2}$	$-2{,}77$	$-25{,}25$	$-250{,}25$	$\to$	$\nexists$	$\leftarrow$	$249{,}75$	$24{,}75$	$2{,}27$

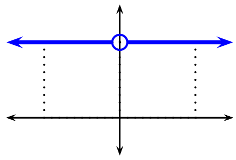
f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^3-2x^2} = \dfrac{1}{1^3-2\cdot 1^2} = \dfrac{1}{1-2} = -1$

□

EJEMPLO 7.133

Sea $f(x) = \dfrac{x}{x}$

- $\nexists f(0) = \left[\frac{0}{0}\right]$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1 \qquad \left(\dfrac{x}{x} = 1 \text{ si } x \neq 0\right)$



EJEMPLO 7.134

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si } \ x \neq -2 \\ 0 & \text{si } \ x = -2 \end{cases}$

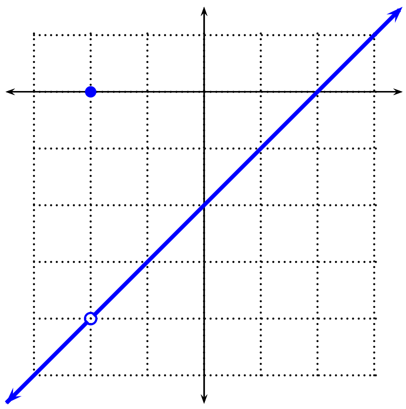
- $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \left[\dfrac{(-2)^2-4}{-2+2} = \dfrac{0}{0}\right] = -4$

x	$-2{,}1$	$-2{,}01$	$-2{,}001$	$\to$	-2	$\leftarrow$	$-1{,}999$	$-1{,}99$	$-1{,}9$
$\frac{x^2-4}{x+2}$	$-4{,}1$	$-4{,}01$	$-4{,}001$	$\to$	-4	$\leftarrow$	$-3{,}999$	$-3{,}99$	$-3{,}9$

Otra forma:

- $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}} = \lim\limits_{x\to -2} (x-2) = -2-2 = -4$

$\left(\text{si } x \neq -2 \Longrightarrow \dfrac{x^2-4}{x+2} = x-2\right)$



EJEMPLO 7.135

Sea $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x + 1 & \text{si } \; x \leq \frac{\pi}{2} \\ \log(x - \frac{\pi}{2}) & \text{si } \; x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Calcula:

a) $f(\frac{\pi}{2})$ b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+1} f(x)$

Solución:

a) $f(\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \operatorname{sen} 0 + 1 = 0 + 1 = 1$

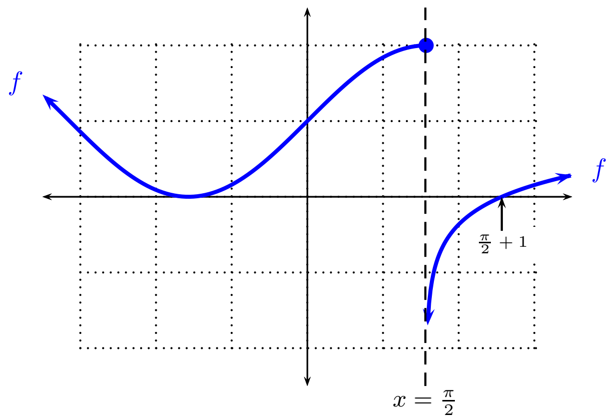
c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \nexists$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + 1 = 1 + 1 = 2; \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \log(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = [\log 0] = -\infty$$

$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57079632679 \longrightarrow$

x	$\frac{\pi}{2}^+$	$\leftarrow$	1,570797	1,5708	1,58
$\log(x - \frac{\pi}{2})$	$-\infty$	$\leftarrow$	$-6{,}17185$	$-5{,}434955$	$-2{,}036039$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+1} f(x) = \log(\frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{2}) = \log 1 = 0$



$\square$

3 Límites en infinito

De manera análoga a como hicimos en el apartado anterior,

Definición 15. *Sea* $L = \begin{cases} L \in \mathbb{R} \\ \infty \\ -\infty \end{cases}$ *,* a_n *cualquier sucesión de números que tienda a* ∞ *o a* $-\infty$*.*

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \iff$

x	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	$\to$	∞
$f(x)$	$f(a_1)$	$f(a_2)$	$f(a_3)$	$\cdots$	$\to$	L

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \iff$

$-\infty$	$\leftarrow$	$\cdots$	a_3	a_2	a_1	x
L	$\leftarrow$	$\cdots$	$f(a_3)$	$f(a_2)$	$f(a_1)$	$f(x)$

EJEMPLO 7.136

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

x	10	100	1000	$\to$	∞
$\frac{1}{x}$	0,1	0,01	0,001	$\to$	0

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x} = 1$

$-\infty$	$\leftarrow$	-1000	-100	-10	x
1	$\leftarrow$	0,999	0,99	0,9	$\frac{x+1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty$

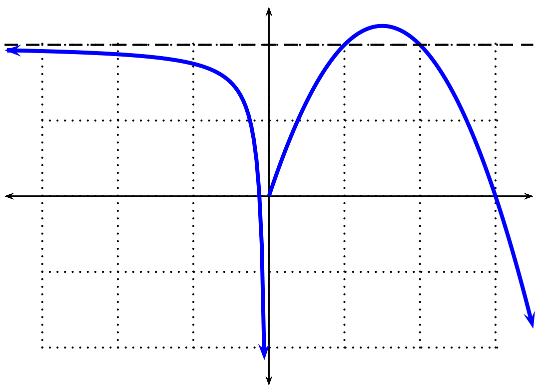
x	10	100	1000	$\to$	∞
$\frac{x^2+1}{x}$	10,1	100,01	1000,001	$\to$	∞

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$

$-\infty$	$\leftarrow$	-1000	-100	-10	x
$-\infty$	$\leftarrow$	$-1000{,}001$	$-100{,}01$	$-10{,}1$	$\frac{x^2+1}{x}$

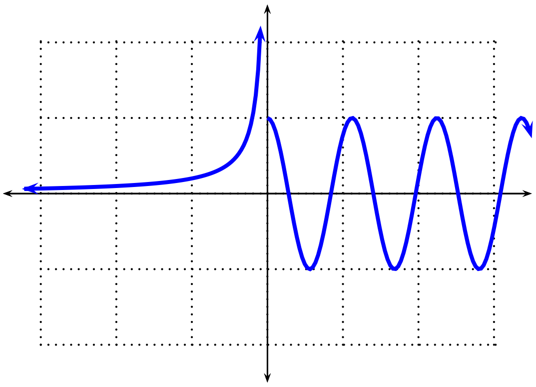
Gráficamente, estos límites nos informan de a qué altura tiende $f(x)$ cuando se aleja hacia la derecha ($x \to \infty$) o hacia la izquierda ($x \to -\infty$).

EJEMPLO 7.137



- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

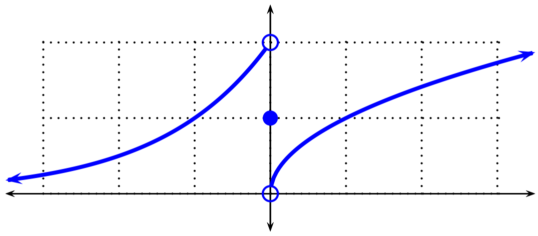
EJEMPLO 7.138



- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \nexists$

EJEMPLO 7.139

Sea $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$



- $f(0) = 1$
- $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 2^{x+1} = 2^{0+1} = 2$
- $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$
- $\lim_{x\to0} f(x) = \nexists$ (no coinciden los laterales)
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \left[\sqrt{\infty}\right] = \infty$

x	100	10000	1000000	$\to$	∞
$\sqrt{x}$	10	100	1000	$\to$	∞

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2^{x+1} = \left[2^{-\infty+1}\right] = 0$

$-\infty$	$\leftarrow$	-1000	-100	-10	x
0	$\leftarrow$	$1{,}866527 \cdot 10^{-301}$	$1{,}5777218 \cdot 10^{-30}$	0,001953125	2^{x+1}

- $\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} 2^{x+1} = 2^{-1+1} = 2^0 = 1$

4 Expresiones determinadas e indeterminadas

Hasta ahora, cuando hemos tenido que calcular un límite en una abcisa que no tiene imagen, sin disponer de la gráfica, el único recurso ha sido construir una tabla. Este procedimiento presenta dificultades:

- Es lento, tanto más cuanto más compleja es la expresión algebraica que manejamos.
- Es inútil en los casos en los que el límite es irracional, o engañoso si la sucesión de imágenes converge o diverge muy lentamente.

Ejemplo 7.140

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1-x^2}{x}} = ???$$

x	10	100	1000	$\to$	∞
$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1-x^2}{x}}$	$0,38923547$	$0,36974800$	$0,36806367$	$\to$	???

Veremos, cuando aprendamos a calcular este tipo de límites, que es exactamente el irracional $\frac{1}{e} = 0,36787944\ldots$

Lo primero que tenemos que hacer para calcular un límite es **sustituir la variable de la función por el número o $\pm\infty$ al que tiende**. Nos dará una expresión que puede ser:

4 1 Determinaciones

Dan lugar a un sólo límite, independientemente de donde provenga esa expresión. Casi todas, excepto unas cuantas que se especifican en el apartado 4 2, son determinadas.

Ejemplo 7.141

Como $\dfrac{k}{\infty} = 0,\ \infty^k = \infty\ (k>0)$,

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2} = \frac{3}{\infty^2} = \frac{3}{\infty} = 0$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$

Ello implicará aprender una cierta 'álgebra de ceros e infinitos' para expresiones determinadas, es decir, expresiones que no dan lugar a un número real, pero para las que sí podemos deducir el límite.

Dicho *álgebra de ceros e infinitos* es bastante intuitivo. Siempre que haya alguna duda, podemos recurrir a una sucesión con su forma, la más sencilla posible, que nos la aclare. Sólo hay que cambiar 0 o $\pm\infty$ por una sucesión que tienda a él. Todos los resultados son 0 o $\pm\infty$.

EJEMPLO 7.142

- $\boxed{\dfrac{3}{\infty}=0} \Leftarrow \left(\frac{3}{10};\ \frac{3}{100};\ \frac{3}{1000};\ \frac{3}{10000}\dots\right)=(0{,}3,\ 0{,}03;\ 0{,}003;\ 0{,}0003\dots)\longrightarrow 0$
- $\boxed{2^{\infty}=\infty} \Leftarrow (2^1;\ 2^2;\ 2^3;\ 2^4\dots)=(2,\ 4;\ 8;\ 16\dots)\longrightarrow \infty$
- $\boxed{(\frac{1}{2})^{\infty}=0} \Leftarrow ((\frac{1}{2})^1;\ (\frac{1}{2})^2;\ (\frac{1}{2})^3;\ (\frac{1}{2})^4\dots)=(0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125;\ 0{,}0625\dots)\longrightarrow 0$
- $\boxed{\log(\infty)=\infty} \Leftarrow (\log 1;\ \log 10;\ \log 100;\ \log 1000\dots)=(0;\ 1;\ 2;\ 3\dots)\longrightarrow \infty$
- $\boxed{\infty^{\infty}=\infty} \Leftarrow (1^1;\ 2^2;\ 3^3;\ 4^4\dots)=(1;\ 4;\ 27;\ 256\dots)\longrightarrow \infty$

OPERACIONES CON CERO E INFINITO

SUMAS ($k \geq 0$)		PRODUCTOS ($k > 0$)	
$\infty + k = \infty$	$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\infty \cdot k = \infty$
$\infty - k = \infty$		$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$	$\infty \cdot (-k) = -\infty$
$-\infty + k = -\infty$		$-\infty \cdot \infty = -\infty$	$-\infty \cdot k = -\infty$
$-\infty - k = -\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$	$-\infty \cdot (-\infty) = \infty$	$-\infty \cdot (-k) = \infty$

COCIENTES ($k > 0$)			POTENCIAS ($k > 0$)	
$\frac{\pm k}{\pm\infty} = 0$	$\frac{k}{0^+} = \infty$	$\frac{\infty}{0^+} = \infty$	$\infty^k = \infty$	$0 < k < 1 \Rightarrow \begin{cases} k^{\infty} = 0 \\ k^{-\infty} = \frac{1}{k^{\infty}} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{cases}$
$\frac{0^{\pm}}{\pm\infty} = 0$	$\frac{k}{0^-} = -\infty$	$\frac{\infty}{0^-} = -\infty$	$\infty^{-k} = \frac{1}{\infty^k} = \frac{1}{\infty} = 0$	
	$\frac{-k}{0^+} = -\infty$	$\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$	$\infty^{\infty} = \infty$	$k > 1 \Rightarrow \begin{cases} k^{\infty} = \infty \\ k^{-\infty} = \frac{1}{k^{\infty}} = \infty = 0 \end{cases}$
	$\frac{-k}{0^-} = \infty$	$\frac{-\infty}{0^-} = \infty$	$\infty^{-\infty} = \frac{1}{\infty^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$	

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS			LOGARITMOS ($k > 0$)
$\nexists\ \operatorname{sen} \pm\infty$	$\nexists\ \cos \pm\infty$	$\nexists\ \operatorname{tg} \pm\infty$	$0 < k < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_k (0^+) = \infty \\ \log_k \infty = -\infty \end{cases}$
			$k > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_k (0^+) = -\infty \\ \log_k \infty = \infty \end{cases}$

4.1.1 Determinaciones con denominador 0

Un caso especial son los límites de la forma $\boxed{\dfrac{k}{0}, \ \dfrac{\pm\infty}{0} \ (k \neq 0)}$. Concurren dos condiciones especiales:

- 0 es el único número al que se accede por la izquierda con números negativos y por la derecha con positivos. A cualquier otro valor real accedemos, finalmente, con números del mismo signo.
- El cociente, conforme vamos a parar a cero, se hace tan grande como queramos (pero puede ser en positivo o en negativo, por el apartado anterior).

EJEMPLO 7.143

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x}{(x-1)^2} = \dfrac{3}{(1-1)^2} = \dfrac{3}{0^+} = \infty$

  El denominador, al ser un cuadrado, es 0^+. A modo de ilustración,

x	0,9	0,99	0,999	$\rightarrow$	1	$\leftarrow$	1,001	1,01	1,1
$\frac{3x}{(x-1)^2}$	270	29700	2997000	$\rightarrow$	∞	$\leftarrow$	3003000	30300	330

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = \dfrac{0-1}{0^2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{-2-1}{-2+2} = \left[\dfrac{-3}{0}\right] = \nexists$

  No podemos decidir el signo de 0 en el denominador, pues depende de qué lateral elijamos:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x-1}{x+2} = \frac{-3}{0^-} = \infty, \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{x-1}{x+2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

  Sólo por ilustrarlo,

x	−2,1	−2,01	−2,001	$\rightarrow$	−2	$\leftarrow$	−1,999	−1,99	−1,9
$\frac{x-1}{x+2}$	31	301	3001	$\rightarrow$	$\nexists$	$\leftarrow$	−2999	−299	−29

Observación 22.

- *Cualquier límite que lleve a la expresión* $\dfrac{k, \pm\infty}{0}$ *requiere al estudio de los límites laterales, a no ser que tengamos claro que ambos coinciden, como ocurre en el primer ejemplo anterior.*
- *Como regla práctica, para saber el signo del* 0 *en el denominador, suele ser suficiente con elegir un número una décima mas a la izquierda o a la derecha de aquél al que tiende el límite. Por ejemplo,*

$$\lim_{x\to -1} \frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{-1}{0}\right] = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{-1}{0^-} = \infty \end{array} \right\} = \nexists \quad \begin{array}{l} (-1{,}1)^2 - 1 = 0{,}21 \ (0^+) \\ \\ (-0{,}9)^2 - 1 = -0{,}19 \ (0^-) \end{array}$$

Observación 23. *El resultado de éstos límites sólo puede ser*

$$\frac{k, \pm\infty}{0} = \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ -\infty \\ \nexists \ \textit{(Porque no coinciden los laterales, que tienen que ser } \infty \textit{ o } -\infty\textit{)} \end{array} \right.$$

4.2 Indeterminaciones

El límite puede ser distinto según la función que dé lugar a esa expresión (las indeterminaciones, claro está, no aparecen en el cuadro de operaciones determinadas). Las que nos podemos encontrar son:

$$\boxed{\infty-\infty} \quad \boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}} \quad \boxed{\frac{0}{0}} \quad \boxed{0\cdot(\pm\infty)} \quad \boxed{1^{(\pm\infty)}} \quad \boxed{0^0} \quad \boxed{\infty^0}$$

Ejemplo 7.144

La expresión $\infty-\infty$ es indeterminada, pues representa a dos sucesiones con distinto límite:

- $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x)=\infty^2-\infty=[\infty-\infty]=\infty$

x	10	100	1000	$\to$	∞
x^2-x	90	9900	999000	$\to$	∞

- $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x^2)=\infty^2-\infty^2=[\infty-\infty]=0$

x	10	100	1000	$\to$	∞
x^2-x^2	0	0	0	$\to$	0

Veremos en el siguiente apartado cómo resolver algunas indeterminaciones.

5 Cálculo del límite de algunas funciones

5.1 Límites en menos infinito

En ambas tablas, la sucesión de imágenes es la misma:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L \iff$

$-\infty$	$\leftarrow$	-1000	-100	-10	x
L	$\leftarrow$	$f(-1000)$	$f(-100)$	$f(-10)$	$f(x)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)=L \iff$

x	10	100	1000	$\to$	∞
$f(-x)$	$f(-10)$	$f(-100)$	$f(-1000)$	$\to$	L

Por tanto, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)}$

Esto nos permitirá estudiar sólo las reglas de cálculo de límites para cuando $x\to\infty$

Ejemplo 7.145

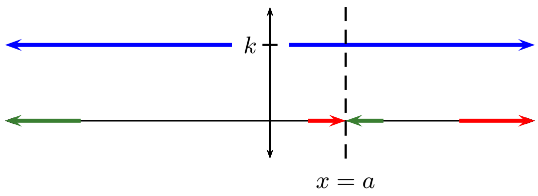
$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-(-x)}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+x}=\sqrt{1+\infty}=\overbrace{\sqrt{\infty}}^{\infty^{\frac{1}{2}}}=\infty$$

5.2 Límites de funciones polinómicas

$$f(x) = P(x) = px^n + \dots \quad (n \geq 0)$$

5.2.1 Constantes

$$\boxed{\lim_{x \to a, \pm\infty} k = k}$$



x	$a-0{,}1$	$a-0{,}01$	$a-0{,}1$	$\rightarrow$	a	$\leftarrow$	$a+0{,}001$	$a+0{,}01$	$a+0{,}1$
k	k	k	k	$\rightarrow$	k	$\leftarrow$	k	k	k

$-\infty$	$\leftarrow$	-1000	-100	-10	x
k	$\leftarrow$	k	k	k	k

x	10	100	1000	$\rightarrow$	∞
k	k	k	k	$\rightarrow$	k

Ejemplo 7.146

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \pi = \pi; \qquad \lim_{x \to \infty} e = e; \qquad \lim_{x \to -\infty} -7 = -7.$$

5.2.2 De grado mayor o igual que 1

En un punto

Sea $P(x) = px^n + \dots$, grado de $P = n \geq 1$. Como $Dom(P) = \mathbb{R}$,

$$\boxed{\lim_{x \to a} P(x) = P(a)}$$

Ejemplo 7.147

$$\lim_{x \to -3} (2 - 2x + x^2) = 2 - 2 \cdot (-3) + (-3)^2 = 17$$

En infinito

Si intentamos por los procedimientos habituales calcular, por ejemplo

$$\lim_{x \to \infty} (-2x^3 - 5x^2 - 20x + 1) = -2\infty^3 + 5\infty^2 + 20\infty - 1 = -\infty + \infty + \infty - 1 = [\infty - \infty]$$

llegamos a una indeterminación. Habrá que apoyarse en las características especiales de los polinomios para resolverla:

$$\lim_{x\to\infty}(-2x^3+5x^2+20x-1)=\lim_{x\to\infty}-2x^3\cdot\frac{-2x^3+5x^2+20x+1}{-2x^3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}-2x^3\left(\frac{-2x^3}{-2x^3}+\frac{5x^2}{-2x^3}+\frac{20x}{-2x^3}+\frac{1}{-2x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}-2x^3\left(1+\frac{5}{-2x}+\frac{20}{-2x^2}+\frac{1}{-2x^3}\right)=$$

$$=-2\infty^3\cdot\left(1+\frac{5}{-\infty}+\frac{20}{-\infty}+\frac{1}{-\infty}\right)=-2\infty^3\cdot(1-0-0+0)=-2\infty^3=\lim_{x\to\infty}-2x^3.$$

Generalizando este proceso para cualquier polinomio, se concluye que el límite, cuando $x\to\pm\infty$, de cualquier polinomio es el mismo que el de su término principal:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}px^n+\cdots=\lim_{x\to\pm\infty}px^n}$$

.

EJEMPLO 7.148

- $\lim_{x\to\infty}(-2x^3-5x^2-20x+1)=\lim_{x\to\infty}-2x^3=-2\infty^3=-2\infty=-\infty$
- $\lim_{x\to\infty}(-2x^2+3x^3-4x+2)=\lim_{x\to\infty}3x^3=3\infty^3=3\infty=\infty$
- $\lim_{x\to-\infty}(5x^3-x^2+x)=\lim_{x\to-\infty}5x^3=\lim_{x\to\infty}5(-x)^3=\lim_{x\to\infty}-5x^3=-5\infty^3=-5\infty=-\infty$

Podemos acortar el cálculo todavía más, observando que todos los límites de este tipo son ∞ o $-\infty$; cuál de ellos dependerá del signo del coeficiente principal:

Sea $P(x)=px^n+\ldots\quad(n>0)$.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}P(x)=\begin{cases}\infty\ (p>0)\\-\infty\ (p<0)\end{cases}}$$

EJEMPLO 7.149

- $\lim_{x\to\infty}(3x-2x^2)=-\infty\qquad(p=-2<0)$
- $\lim_{x\to-\infty}(2x^4-3x+2)=\lim_{x\to\infty}\left[2(-x)^4-3(-x)+2\right]=\lim_{x\to\infty}\left[2x^4+3x+2\right]=\infty\qquad(p=2>0)$

No es casualidad que se haya especificado en el anterior resultado la condición $n>0$: el resultado también es cierto para exponentes fraccionarios (es decir, 'pseudo–polinomios', con x dentro de radicales):

EJEMPLO 7.150

$$\lim_{x\to\infty}(-3\sqrt{x}+2x)=\lim_{x\to\infty}2x\left(\frac{-3\sqrt{x}}{2x}+\frac{2x}{2x}\right)=\lim_{x\to\infty}2x\left(\frac{-3}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2}}+1\right)=\lim_{x\to\infty}2x\left(\frac{-3}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}+1\right)=$$

$$=2\infty\left(\tfrac{-3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{\infty}}+1\right)=2\infty\cancelto{1}{\left(\tfrac{-3}{2}\sqrt{0}+1\right)}=2\infty=\lim_{x\to\infty}2x$$

Como los grados de x son, respectivamente, $\frac{1}{2}$ y 1, el término principal es $2x$.

Así que, a partir de ahora,

Ejemplo 7.151

- $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x} - x + 2) = \lim\limits_{x \to \infty} (x^{\frac{1}{2}} - x + 2) = \lim\limits_{x \to \infty} (-x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to \infty} (-2x\sqrt{x} + 5x + 1) = \lim\limits_{x \to \infty} (-2\sqrt{x^3} + 5x + 1) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(-2x^{\frac{3}{2}} + x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} -2x^{\frac{3}{2}} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{2x+2}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{2x}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\sqrt{x}\right) =$

  $= \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \sqrt{2}\right)\sqrt{x} = -\infty \qquad (1 - \sqrt{2} < 0)$

Un caso excepcional es cuando coinciden los coeficientes principales dentro de los radicales,

Ejemplo 7.152

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2}\right)$$

en el que se pierde el término principal de la expresión. Veremos cómo resolverlo (utilizando el conjugado) más adelante, en los límites de funciones con radicales.

5.3 Límites de cocientes de polinomios

Si $P(x) = px^n + \dots; \quad Q(x) = qx^m + \dots$ son polinomios,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

En un punto

Como siempre, empezamos intentando calcular la imagen de a: $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}}$. Puede ocurrir:

- $Q(a) \neq 0$ (ese es el límite).

Ejemplo 7.153

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2 - 1} = \frac{-3+3}{(-3)^2 - 1} = \frac{0}{8} = 0; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x+2}{3-2x} = \frac{0+2}{3 - 2 \cdot 0} = \frac{2}{3}.$$

- $Q(a) = 0$. Puede, a su vez, ocurrir:
  - $P(a) \neq 0 \longrightarrow \left[\frac{k}{0}\right]$, $k \neq 0$ (el límite depende de los laterales).

Ejemplo 7.154

$\circ$ $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-1}=\left[\frac{-3}{0}\right]=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{-3}{0^+}=-\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{-3}{0^-}=\infty\end{array}\right\}=\nexists$

$(-1{,}1)^2-1=0{,}21\ (0^+)$

$(-0{,}9)^2-1=-0{,}19\ (0^-)$

$\circ$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{1}{0^+}=\infty$

- $P(a)=0\longrightarrow\left[\dfrac{0}{0}\right]$ (indeterminación)

  a es una raíz de P y $Q\Longrightarrow P(x)=(x-a)(\dots),\ Q(x)=(x-a)(\dots)$ y podremos simplificar la fracción, iterando el proceso hasta que desaparezca la indeterminación.

Ejemplo 7.155

$\circ$ $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-3}=\frac{0}{-1}=0$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -4 & 4\\ 2 & & 2 & -4\\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0}\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 6\\ 2 & & 2 & -6\\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0}\end{array}$$

$\circ$ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{3-3x}{(x-1)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{-3\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to 1}\frac{-3}{x-1}=\left[\frac{-3}{0}\right]=$

$\displaystyle=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{-3}{x-1}=\frac{-3}{0^-}=\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{-3}{x-1}=\frac{-3}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}=\nexists$

$\circ$ $\displaystyle\lim_{x\to -5}\frac{2x^3+26x^2+110x+150}{x^3+7x^2-5x-75}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -5}\frac{2x^2+16x+30}{x^2+2x-15}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$\displaystyle=\lim_{x\to -5}\frac{2x+6}{x-3}=\frac{-4}{-8}=\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 26 & 110 & 150\\ -5 & & -10 & -80 & -150\\ \hline & 2 & 16 & 30 & \boxed{0}\\ -5 & & -10 & -30 & \\ \hline & 2 & 6 & \boxed{0} & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 7 & -5 & -75\\ -5 & & -5 & -10 & 75\\ \hline & 1 & 2 & -15 & \boxed{0}\\ -5 & & -5 & 15 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

En infinito

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{px^n}{qx^m}=\begin{cases} n>m \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{p}{q}\cdot x^{n-m}=\begin{cases}-\infty \text{ si } \frac{p}{q}<0\\ \infty \text{ si } \frac{p}{q}>0\end{cases}\\ n=m \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\\ n<m \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{p}{qx^{m-n}}=\frac{p}{\pm\infty}=0\end{cases}$$

Ejemplo 7.156

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x^3}{2x^2-x+1}=-\infty \quad (\frac{-3}{2}<0)$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x}{1-3x^2}=\dfrac{5}{-3}=-\dfrac{5}{3}$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x}{x^2}=0$

Al igual que ocurre con los polinomios, muchos límites en infinito con radicales se pueden resolver teniendo en cuenta su grado fraccionario:

Ejemplo 7.157

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x+1}{\sqrt{1+4x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{4x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{2x}=\dfrac{-2}{2}=-1$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{1+3x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{3x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{1}}{\sqrt{3}\,x^{\frac{3}{2}}}=0$

5.4 Límites de funciones con radicales

La única novedad es la utilización del conjugado (de un binomio con un radical) cuando no sirve alguno de los métodos anteriores.

En un punto

EJEMPLO 7.158

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x^2-4}\right)=0-0=0$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-2}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{1-2}{\sqrt{1-1}}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

EJEMPLO 7.159

$$\lim_{x\to 6}\frac{2-\sqrt{x-2}}{x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 6}\frac{2-\sqrt{x-2}}{x-6}\cdot\frac{2+\sqrt{x-2}}{2+\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 6}\frac{2^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{(x-6)\left(2+\sqrt{x-2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{4-(x-2)}{(x-6)\left(2+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{\cancelto{-1}{6-x}}{\cancel{(x-6)}\left(2+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{-1}{2+\sqrt{x-2}}=$$

$$=\frac{-1}{2+\sqrt{6-2}}=-\frac{1}{4}$$

En infinito

EJEMPLO 7.160

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2-x+2}{\sqrt{2x^3}+x}=\left[\dfrac{-\infty}{\infty},\ \dfrac{\text{grado }2}{\text{grado }1{,}5}\right]=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2-x+2}{\sqrt{2x^4+1}+x}=\left[\dfrac{-\infty}{\infty},\ \dfrac{\text{grado }2}{\text{grado }2}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2}{\sqrt{2x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2}{\sqrt{2}x^2}=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{2x^3}+x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty},\ \dfrac{\text{grado }1}{\text{grado }1{,}5}\right]=0$

En el siguiente ejemplo no podemos cambiar los polinomios por sus términos principales, ya que se anulan, y no sería ese, por tanto, el término principal de la expresión completa. Utilizamos, de nuevo, el conjugado:

Ejemplo 7.161

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3-3x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3-3x}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-3x}}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-3x}}=$

  $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-3x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty},\ \dfrac{\text{grado }1}{\text{grado }1{,}5}\right]=0$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3-3x^2}\right)=[\infty-\infty]=$

  $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3-3x^2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-3x^2}}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-3x^2}}=$

  $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-3x^2}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty},\ \dfrac{\text{grado }2}{\text{grado }1{,}5}\right]=\infty$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+1}}=$

  $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x-1}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+1}}=\left[\dfrac{-\infty}{\infty},\ \dfrac{\text{grado }1}{\text{grado }1}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=$

  $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{x+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{2x}=-1$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-2x}-\sqrt{3x^2+1}\right)=[\infty-\infty]=$

  $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-2x}-\sqrt{3x^2+1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3x^2-2x}+\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{3x^2-2x}+\sqrt{3x^2+1}}=$

  $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x-1}{\sqrt{3x^2-2x}+\sqrt{3x^2+1}}=\left[\dfrac{-\infty}{\infty},\ \dfrac{\text{grado }1}{\text{grado }1}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{3x^2}+\sqrt{3x^2}}=$

  $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{3}x+\sqrt{3}x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{2\sqrt{3}x}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

5.5 Límites de funciones potenciales–exponenciales

Son funciones de la forma $f(x) = g(x)^{h(x)}$, es decir, funciones en forma de potencia en las que tanto la base como el exponente son variables, a diferencia de las potenciales $\big(f(x) = g(x)^k,\ k \neq 0\big)$ y las exponenciales $\big(f(x) = k^{h(x)},\ k > 0,\ k \neq 1\big)$.

Ejemplo 7.162

- $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2x+1}{3x+4}\right)^{\frac{3-x}{x-2}} = \left(\dfrac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$
- $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{2x}{3x-1}\right)^{\frac{3-x}{x-2}} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{0^+}} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{2x}{3x-1}\right)^{\frac{3-x}{x-2}} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{0^-}} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{-\infty} = \infty$
- $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-x+2}\right)^{\frac{3-x}{2x}} = 1^{-\frac{1}{2}} = 1$
- $\lim\limits_{x\to \infty}(3x+2)^{\frac{3-x}{2x}} = \infty^{-\frac{1}{2}} = 0$

Algunas de ellas nos llevan a la indeterminación $[1^\infty]$; para resolverla, necesitamos la definición generalizada del número e:

Si $\lim\limits_{x\to a,\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, entonces

$$\boxed{\lim_{x\to a,\pm\infty}\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = e}$$

Ejemplo 7.163

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^3}{2x^2+x-3}}\right)^{\frac{x^3}{2x^2+x-3}} = e$$

La resolución consiste en, a través de un proceso algebraico, conseguir que la función inicial pase a contener la expresión dada en la definición. Como es análogo para cualquier función potencial–exponencial, lo vamos a hacer de forma general y luego aplicamos su resultado:

$$\lim_{x\to a,\pm\infty} g(x)^{h(x)} = [1^\infty] = \lim_{x\to a,\pm\infty}(1+g(x)-1)^{h(x)} = \lim_{x\to a,\pm\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{g(x)-1}}\right)^{h(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a,\pm\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{g(x)-1}}\right)^{\frac{1}{g(x)-1}\cdot[g(x)-1]h(x)} = \lim_{x\to a,\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{g(x)-1}}\right)^{\frac{1}{g(x)-1}}\right]^{[g(x)-1]h(x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to a,\pm\infty} h(x)[g(x)-1]}$$

Observación 24. *¡CUIDADO! Éste proceso sólo es aplicable a límites de la forma* $[1^\infty]$.

Para ello, quizá sería conveniente calcular separadamente el límite:

$$\boxed{\lim_{x\to a,\pm\infty} g(x)^{h(x)} = [1^{\infty}] = e^{k}, \quad \text{siendo } k = \lim_{x\to a,\pm\infty} h(x)[g(x)-1]}$$

Ejemplo 7.164

- $\displaystyle \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left[1^{\pm\infty}\right] = e^{k} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$

  $\displaystyle k = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left[\frac{2x+1}{x+2}-1\right] = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left[\frac{x-1}{x+2}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$

- $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1-x^2}{x}} = \left[1^{-\infty}\right] = e^{k} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

  $\displaystyle k = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x}\left[\frac{x+1}{x}-1\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x}\left[\frac{1}{x}\right]\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^2} = \frac{-1}{1} = -1$

- $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{2x+1}\right)^{3x^2} = [1^{\infty}] = e^{k} = e^{-\infty} = 0$

  $\displaystyle k = \lim_{x\to\infty} 3x^2\left[\frac{2x-2}{2x+1}-1\right] = \lim_{x\to\infty} 3x^2\left[\frac{-3}{2x+1}\right]\lim_{x\to\infty}\frac{-9x^2}{2x+1} = -\infty$

- $\displaystyle \lim_{x\to 3^+}(x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} = [1^{\infty}] = e^{k} = e^{\infty} = \infty$

  $\displaystyle k = \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{(x-3)^2}[x-2-1] = \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{(x-3)^2}[x-3] = \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^+} = \infty$

6 Definición formal de límite

La definición de límite de una función expuesta es intuitiva pero poco rigurosa, pues habría que probar que las imágenes de todas las sucesiones posibles convergen al mismo límite. Para los curiosos, aquí está la definición formal:

Definición 16. *Sean $a, L \in \mathbb{R}$, f una función;*

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall\epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ /\ si\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon}$$

(Para cualquier intervalo que prefijemos, por muy pequeño que sea, alrededor de L, siempre podremos encontrar otro intervalo alrededor de a de manera que sus imágenes quedan dentro del primero prefijado)

Con una idea parecida se definen los límites infinitos y en el infinito.

7 Ejercicios propuestos

1. Utiliza una tabla para averiguar los siguientes límites: → a) $\frac{1}{6}$, b) $\nexists$, c) -3, d) 1, e) 2, f) -2.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \boxed{}$

x	2,9	2,99	2,999	→	3	←	3,001	3,01	3,1
$\frac{x-3}{x^2-9}$				→		←			

b) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2+4x+4} = \boxed{}$

x				→		←			
$\frac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$				→		←			

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(-3x)}{x} = \boxed{}$

x				→		←			
$\frac{\operatorname{sen}(-3x)}{x}$				→		←			

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \boxed{}$

x				→		←			
$\frac{\ln x}{x-1}$				→		←			

e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-3x}\right) = \boxed{}$

x				→	
$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-3x}$				→	

f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-3x}\right) = \boxed{}$

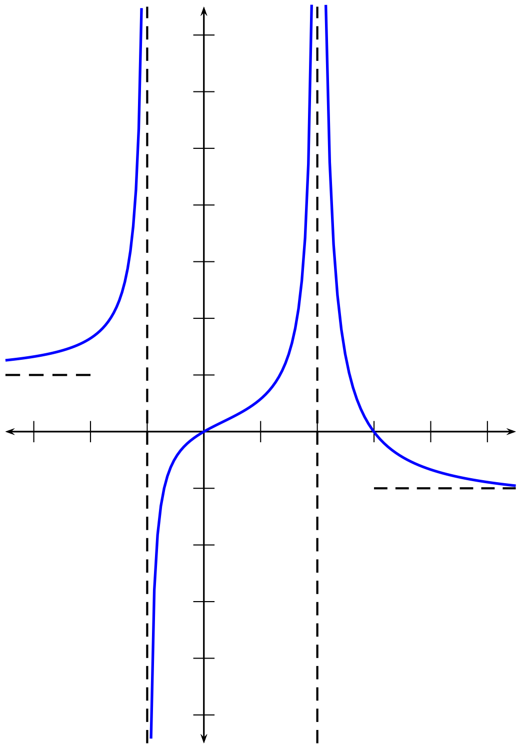
	←				x
	←				$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-3x}$

2. Representa la función y encuentra el límite (si existe) cuando x tiende a 2. → a) $\nexists$, b) 4.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le 2 \\ 6-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 8-x^2 & \text{si } x < 2 \\ x+2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

3. A la vista de la gráfica de $y = f(x)$, contesta:



a) $f(0) = \square$

b) $f(2) = \square$

c) $f(3) = \square$

d) $f(-1) = \square$

e) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \square$

f) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \square$

g) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \square$

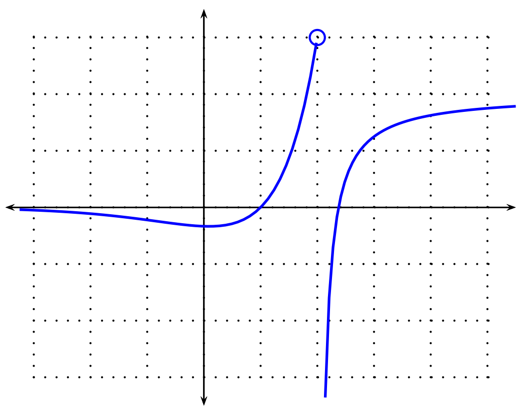
h) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \square$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \square$

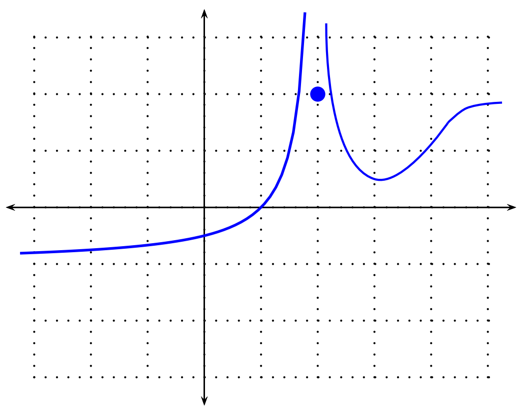
4. Para cualquiera de las siguientes gráficas, encuentra:

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

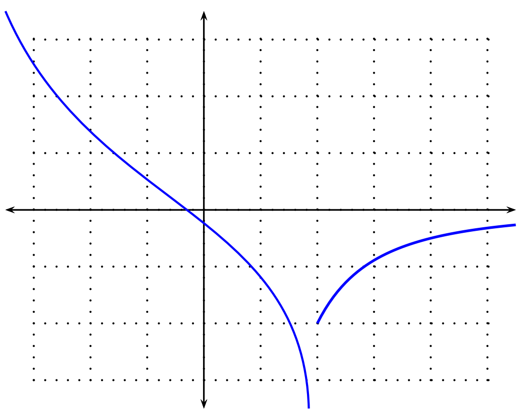
A



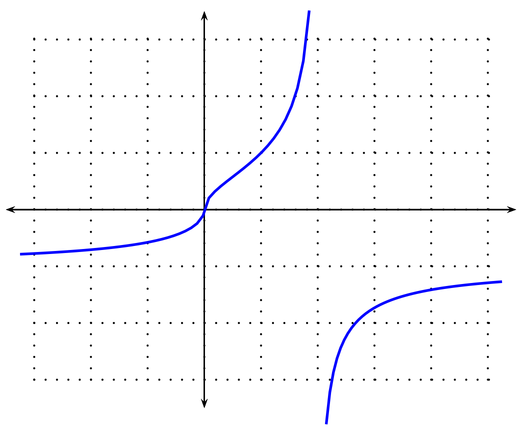
B



C



D



5. Dibuja la gráfica de una función, lo más sencilla y continua posible, que satisfaga las condiciones:

   a) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $f(2) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

   b) $f(0) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$.

   c) $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

   d) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $f(\frac{3}{2}) = 0$, $f(3) = 0$

6. Esboza una gráfica, lo más sencilla posible, que cumpla:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = \infty; \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -4; \quad f(0) = 1; \quad \lim_{x\to 2} f(x) = 0; \quad f(2) = -1; \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 2.$$

7. Rodea con un círculo la respuesta correcta. $\lim_{x\to 0} \sqrt{-x^2}$

   a) sólo existe por la izquierda.

   b) $= 0$

   c) Es indeterminado

   d) $\nexists$

8. Calcula el límite cuando x tiende a 2.

   $\to$ a) 4, b) $\nexists$, c) $4(izq)$, d) $\nexists$.

   a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 5x & \text{si } x = 2 \end{cases}$

   b) $g(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

   c) $h(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x > 4 \\ x+2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$

   d) $i(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

9. Calcula para $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t < -2 \\ \dfrac{t+6}{t^2-t} & \text{si } -1 < t < 2 \\ 3t-2 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

   a) $f(\frac{-3}{2})$

   b) $f(2)$

   c) $f(\frac{3}{2})$

   d) $\lim_{t\to-2^-} f(t)$

   e) $\lim_{t\to-1^+} f(t)$

   f) $\lim_{t\to 1} f(t)$

   g) $\lim_{t\to 2} f(t)$

   h) $\lim_{t\to 0} f(t)$

10. Calcula:

   $\to$ a) ∞, b) $-\infty$, c) ∞, d) $-\infty$, e) $-\infty$, f) ∞, g) ∞, h) $-\infty$, i) $-\infty$, j) $-\infty$, k) ∞, l) ∞, m) ∞, n) $-\infty$, ñ) ∞, o) ∞, p) 0, q) 0.

   a) $\lim_{x\to\infty} (x+7)$

   b) $\lim_{x\to-\infty} (x+7)$

   c) $\lim_{x\to\infty} (2x-5)$

   d) $\lim_{x\to-\infty} (2x-5)$

   e) $\lim_{x\to\infty} (-3x+1)$

   f) $\lim_{x\to-\infty} (-3x+1)$

   g) $\lim_{x\to\infty} \left(x^3+5x+6\right)$

   h) $\lim_{x\to-\infty} \left(x^3+5x+6\right)$

   i) $\lim_{x\to\infty} \left(-3x^2+x-3\right)$

   j) $\lim_{x\to-\infty} \left(-3x^2+x-3\right)$

   k) $\lim_{x\to\infty} (x+1)^4$

   l) $\lim_{x\to-\infty} (x+1)^4$

   m) $\lim_{x\to\infty} (x-2)(x^2+4)$

   n) $\lim_{x\to-\infty} (x-2)(x^2+4)$

   ñ) $\lim_{x\to\infty} \left(5x+\dfrac{1}{2}\right)^2$

   o) $\lim_{x\to-\infty} \left(5x+\dfrac{1}{2}\right)^2$

   p) $\lim_{x\to\infty} \left(5x+\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

   q) $\lim_{x\to-\infty} \left(5x+\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

11. Calcula: $\rightarrow$ a) ∞, b) $\nexists$, c) $\nexists$, d) ∞, e) $\nexists$, f) ∞.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3+x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^3+x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{3-5x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3-5x^3}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{3-2x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3-2x}$

12. Calcula: $\rightarrow$ a) $\nexists$, b) 0, c) $\nexists$, d) ∞, e) 0, f) ∞, g) ∞, h) ∞, i) $-\infty$, j) ∞, k) $\frac{5}{3}$, l) $\frac{5}{3}$.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(3-x)^{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)^{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}(3-x)^{2-x}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)^{2-x}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-2x+3\right)^{1-x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x+3\right)^{1-x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x+5}{x^2-5x+3}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-2x+5}{x^2-5x+3}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^3+x-2}{x^2-5x+3}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^3+x-2}{x^2-5x+3}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-4x+7}{3x^3+x^2-1}$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-4x+7}{3x^3+x^2-1}$

13. Calcula: $\rightarrow$ a) 0, b) 0, c) 0, d) $-\frac{1}{2}$, e) -3, f) $-\infty$, g) ∞, h) $-\infty$, i) $\frac{2}{5}$, j) e^{15}, k) e^{-15}, l) 1, m) 1, n) 0, ñ) ∞.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+3}{x^4-2x+5}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+3}{-2x^3+x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{-5x^3+2x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)(x^2+x-2)}{(3-2x)(x^2+5)}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x^4}{x^4-3x^3}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-\dfrac{3x^2}{x-3}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-\dfrac{3x^2}{x-3}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x^2+3}-\dfrac{x^2+5}{x-1}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5}{5x^3+7x-3}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{3x+5}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{3x+5}$ l) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{2x}}}{\sqrt{x-\sqrt{2x}}}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+\sqrt{2x^2}}}{\sqrt{x^2-\sqrt{2x^2}}}$ n) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^{-x}$ ñ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^{-x}$

14. Calcula: $\rightarrow$ a) ∞, b) $e^{\frac{9}{2}}$, c) 1, d) $e^{-\frac{3}{2}}$, e) ∞, f) $\frac{1}{2}$.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^x}{4^x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)^{3x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x}\right)^{x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)$

15. Calcula: $\rightarrow$ a) 10, b) 2, c) $\frac{-1}{9}$, d) $\nexists$.

a) $\lim\limits_{x\to5}(x^2-4x+5)$ b) $\lim\limits_{x\to7}\sqrt{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-3}{x^2+2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x(x-3)}{x^2-4x}$

16. Calcula: $\rightarrow$ a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{6}$, c) 0, d) $\frac{3}{4}$.

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-7x^2+12x}$

17. Calcula: → a) -2, b) $\nexists$, c) $\frac{1}{3}$, d) $\nexists$, e) $\nexists$.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}}$ c) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{\dfrac{x-4}{x^2+x-20}}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{5}{x-3} - \dfrac{4}{x^2-8x+15}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{4}{x^2-8x+15} - \dfrac{7}{x-1}\right)$

18. Calcula: → a) $\nexists$, b) -6, c) $\frac{1}{3}$, d) $\frac{-1}{6}$, e) $\frac{-4}{3}$, f) 2.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{6}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-8x+12}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{2-\sqrt{2x-2}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5-7x^3+2x^2}{3x^4+6x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1-\sqrt{x-4}}{x^2-7x+10}$ e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{x-4}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^4-x^3-x^2+x}$

19. Calcula: → a) $\frac{-1}{2}$, b) 0, c) $e^{\frac{3}{7}}$, d) $\nexists$, e) e^2.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(1-\sqrt{3-x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^{\frac{3}{x-1}}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{2x-3}{4x+2}\right)^{\frac{5}{x-4}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^{\frac{2}{x}}$

20. Rodea con un círculo la respuesta correcta. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

a) $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ b) $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}$

c) $\nexists\ f(1),\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}$ d) $\nexists\ f(1),\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

21. Encuentra el valor del parámetro k para que el siguiente límite exista (y sea finito). ¿Cuál será el valor del límite? → $k=-1$; 9.

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2+kx-20}{x-5}$$

22. Calcula los límites e imágenes para la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{3x+6}{x^2+x-2} & \text{si } -2 \le x < 1 \\ \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ j) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ k) $f(1)$ l) $f(-1)$

m) $f(7)$ n) $f(-2)$ ñ) $f(0)$ o) $f(1000)$

23. Encuentra, si es posible, el valor o valores de k para que existan: → a) $\nexists\ k$, b) 0, c) $\frac{-1}{3}$, d) $k<0$; $-\frac{5}{2}$.

$$f(x) = \frac{kx^3+4x-3}{x^2-4x+3}$$

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -3$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$ c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \in \mathbb{R}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$

¿Cuál sería el valor del límite del apartado c)?

24. Un tanque contiene 5000 litros de agua pura. Se le bombea una disolución de agua salada, con 30 gramos de sal por litro, a razón de 25 litros/min. La concentración de sal tras t minutos (en gramos/litro) será (razónalo):

$$C(t) = \frac{30t}{200+t}$$

¿Qué ocurre con la concentración si estamos bombeando indefinidamente?

25. La recaudación obtenida por la proyección en cines de un blockbuster se estima que viene dada, aproximadamente, por la función $T(t) = \dfrac{120t^2}{t^2+4}$, donde T se mide en millones de dólares y t en meses trascurridos desde su estreno. → a) 24; 60; ≈ 83.

    a) ¿Cuál será la recaudación obtenida tras el primer mes?¿Y el segundo?¿Y el tercero?

    b) ¿Cuánto se espera recaudar si se exhibe indefinidamente?

26. Calcula: → a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{3}$, c) 27, d) $3a^2$, e) $5a^4$, f) $\sqrt[4]{e}$, g) $e^{\frac{1}{2a}}$, h) 0, i) 0, j) e^{2a^2}.

    a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2+2x-8}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2-ax}{x^2+ax-2a^2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$

    d) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^5-a^5}{x-a}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+2}{4}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

    g) $\displaystyle\lim_{x\to a} \left(\frac{x+a}{2a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x-5}-\sqrt{x+5}$ i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x-a}-\sqrt{x+a}$

    j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{ax}$

MATEM – I

TEMA 8

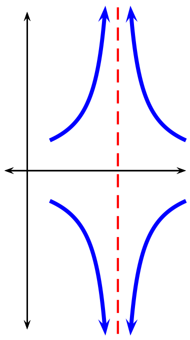
ASÍNTOTAS. CONTINUIDAD

Índice

1 Asíntotas

Desde el punto de vista gráfico (e informal), las asíntotas de f son rectas con las cuales la función 'se confunde' cuando se aleja en cualquier dirección del plano. Según dicha dirección, las podemos clasificar en:

1.1 Verticales



$\boxed{x = a}$ es una asíntota vertical de f si se verifica una de estas cuatro condiciones:

$$\boxed{\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty}$$

Observación 25. *Lógicamente, si buscamos un límite en $x = a$ que sea $\pm\infty$ para f no definida a trozos, lo debemos buscar fuera de su dominio.*

Ejemplo 8.165

Calcula las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Solución: $Dom(f) = \mathbb{R} \Longrightarrow f$ no tiene A. V. □

Ejemplo 8.166

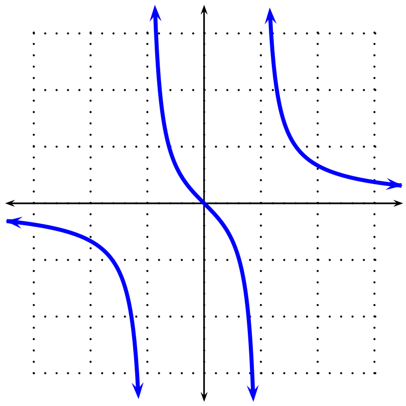
Calcula las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

Solución:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

- $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{1}{0}\right] = \left\{ \begin{array}{l} \bullet \displaystyle \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \bullet \displaystyle \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{x = 1}$ A. V.
- $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{-1}{0}\right] = \left\{ \begin{array}{l} \bullet \displaystyle \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \bullet \displaystyle \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = \infty \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{x = -1}$ A. V.

□

Gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1} \longrightarrow$ 

Observación 26. *Si f está definida a trozos, tendremos que ampliar la búsqueda a los puntos de ruptura.*

EJEMPLO 8.167

Calcula las asíntotas verticales de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x^2-x} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

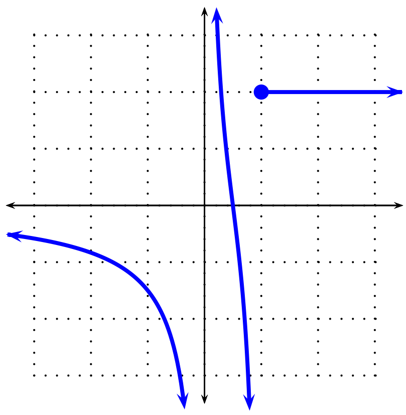
Solución:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

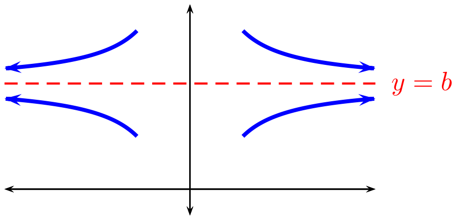
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-1}{x^2-x} = \left[\dfrac{-1}{0}\right] = \left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x-1}{x^2-x} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x-1}{x^2-x} = \dfrac{-1}{0^-} = \infty \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{x=0} \text{ A. V.}$

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-1}{x^2-x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2 = 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{x=1} \text{ A. V.}$

$\square$

Gráfica de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x^2-x} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \longrightarrow$ 

1 2 Horizontales



$\boxed{y = b}$ es una asíntota horizontal de f si se verifica una de estas dos condiciones:

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b}$$

EJEMPLO 8.168

Calcula las asíntotas horizontales de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Solución:

- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \Longrightarrow \boxed{y = 0}$ A. H.
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$ (La misma asíntota hacia la izquierda).

□

Observación 27. *Las* ***funciones racionales*** *(cociente de polinomios), si tienen una asíntota horizontal, lo es hacia derecha e izquierda (si el límite cuando $x \to \infty$ es un número real, no cambia si lo calculamos cuando $x \to -\infty$). En adelante, sólo será necesario calcular las A. H. para $x \to \infty$. Lo mismo ocurrirá con las asíntotas oblicuas.*

EJEMPLO 8.169

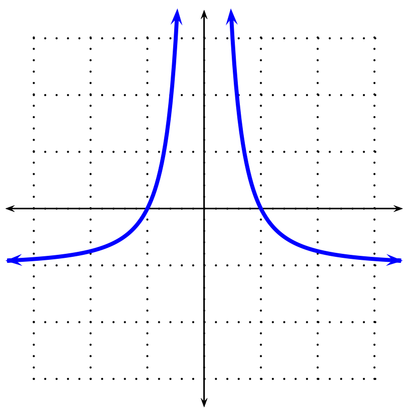
Calcula las asíntotas horizontales de $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$

Solución:

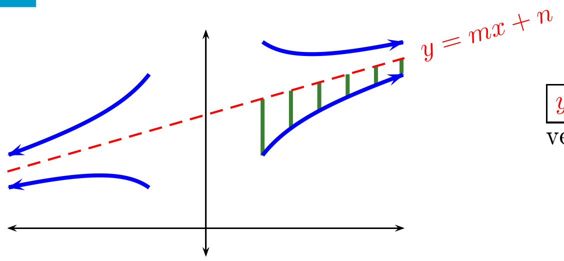
- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1 - x^2}{x^2} = -1 \Longrightarrow \boxed{y = -1}$ A. H. (La misma hacia ambos lados) .

□

Gráfica de $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2} \longrightarrow$



1.3 Oblicuas



$\boxed{y = mx + n}$ es una asíntota oblicua de f si se verifica una de estas dos condiciones:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0}$$

Veamos cómo calcular m y n:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx - n] = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} x \left[\frac{f(x) - mx}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = [\infty \cdot \square] = n$$

La única conclusión posible es que $\lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

Resumiendo: si existen (son números reales) los límites

$$\boxed{\left.\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] \end{cases}\right\} \Longrightarrow \boxed{y = mx + n} \text{ es asíntota oblicua de } f}$$

Ejemplo 8.170

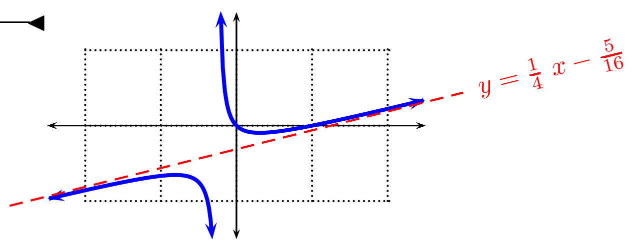
Calcula las asíntotas oblicuas de $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{4x + 1}$

Solución:

$$\left.\begin{cases} \bullet\ m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2-x}{4x+1}}{x} = \dfrac{x^2 - x}{4x^2 + x} = \dfrac{1}{4} \\ \bullet\ n = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^2 - x}{4x + 1} - \dfrac{1}{4}x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 - 4x - 4x^2 - x}{4(4x + 1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-5x}{16x + 4} = \dfrac{-5}{16} \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}\, x - \frac{5}{16}}$ A. O. (La misma hacia ambos lados). □

Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{4x + 1} \longrightarrow$



Observación 28.

- *Asíntotas de* ***cocientes de polinomios:***
  - *A. V.: $x = a$ raíces del denominador que tengan mayor multiplicidad que en el numerador.*
  - *A. H.: Grado numerador $\leq$ grado denominador (la misma hacia ambos lados).*
  - *A. O.: Grado numerador $=$ grado denominador $+ 1$ (la misma hacia ambos lados)*

- *Las asíntotas horizontales son oblicuas con pendiente* 0.
- *Si una función tiene una asíntota horizontal u oblicua hacia la derecha (izquierda), entonces no puede tener otra horizontal u oblicua hacia ese lado.*
- *Si f no es cociente de polinomios o está definida a trozos, puede tener dos asíntotas horizontales u oblicuas distintas, o tenerla sólo hacia un lado.*

EJEMPLO 8.171

Calcula las asíntotas de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

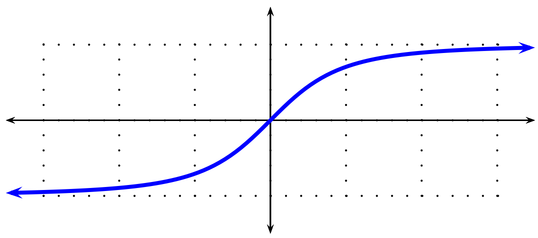
Solución:

- VERTICALES: $Dom(f) = \mathbb{R} \Longrightarrow$ No tiene
- HORIZONTALES:
  - $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = 1$
  - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x} = -1$

  $\boxed{y=1}$ e $\boxed{y=-1}$ A. H. (hacia la derecha e izquierda, respectivamente)
- OBLICUAS: No tiene (ya tiene horizontales a ambos lados)

□

Gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \longrightarrow$



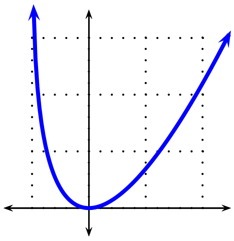
EJEMPLO 8.172

Calcula las asíntotas de $f(x) = x\ln(x+1)$

Solución:

- VERTICALES: $Dom(f) = (-1,\infty) \Longrightarrow$ Sólo puede tener en $x=-1$ por la derecha (en los demás puntos fuera del dominio no tenemos imágenes a su alrededor para poder calcular sus límites).
  - $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} x\ln(x+1) = -1\cdot\ln(0^+) = -1\cdot(-\infty) = \infty \Longrightarrow \boxed{x=-1}$ A. V.
- HORIZONTALES: (sólo puede tener hacia la derecha)
  - $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\ln(x+1) = \infty\cdot\ln(\infty) = \infty\cdot\infty = \infty \Longrightarrow$ No tiene
- OBLICUAS: (sólo puede tener hacia la derecha)
  - $\displaystyle m = \lim_{x\to\infty} \frac{x\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \ln(x+1) = \ln(\infty) = \infty \Longrightarrow$ No tiene

□

Gráfica de $f(x) = x\ln(x+1) \longrightarrow$ 

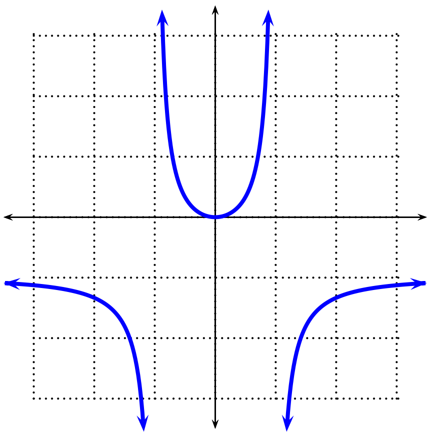
EJEMPLO 8.173

Calcula las asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$

Solución:

- VERTICALES: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
  - $$\lim_{x\to -1} \frac{x^2}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2}{1-x^2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2}{1-x^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{x=-1} \text{ A. V.}$$
  - $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{1-x^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{1-x^2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{x=1} \text{ A. V.}$$
- HORIZONTALES:
  - $$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{-1} = -1 \Longrightarrow \boxed{y=-1} \text{ A. H. (hacia ambos lados)}$$
- OBLICUAS: No tiene (ya tiene horizontales a ambos lados)

□

Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2} \longrightarrow$ 

EJEMPLO 8.174

Calcula las asíntotas de $f(x) = \dfrac{-x^3}{x^2-4}$

Solución:

- VERTICALES: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

  - $\displaystyle \lim_{x\to -2} \frac{-x^3}{x^2-4} = \left[\frac{-1}{0}\right] = \left\{ \begin{array}{l} \bullet \displaystyle \lim_{x\to -2^-} \frac{-x^3}{x^2-4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \bullet \displaystyle \lim_{x\to -2^+} \frac{-x^3}{x^2-4} = \frac{-1}{0^-} = \infty \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{x=-2}$

  - $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{-x^3}{x^2-4} = \left[\frac{-1}{0}\right] = \left\{ \begin{array}{l} \bullet \displaystyle \lim_{x\to 2^-} \frac{-x^3}{x^2-4} = \frac{-1}{0^-} = \infty \\ \bullet \displaystyle \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^3}{x^2-4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{x=2}$

- HORIZONTALES:

  - $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3}{x^2-4} = -\infty \Longrightarrow$ No tiene (hacia ambos lados)

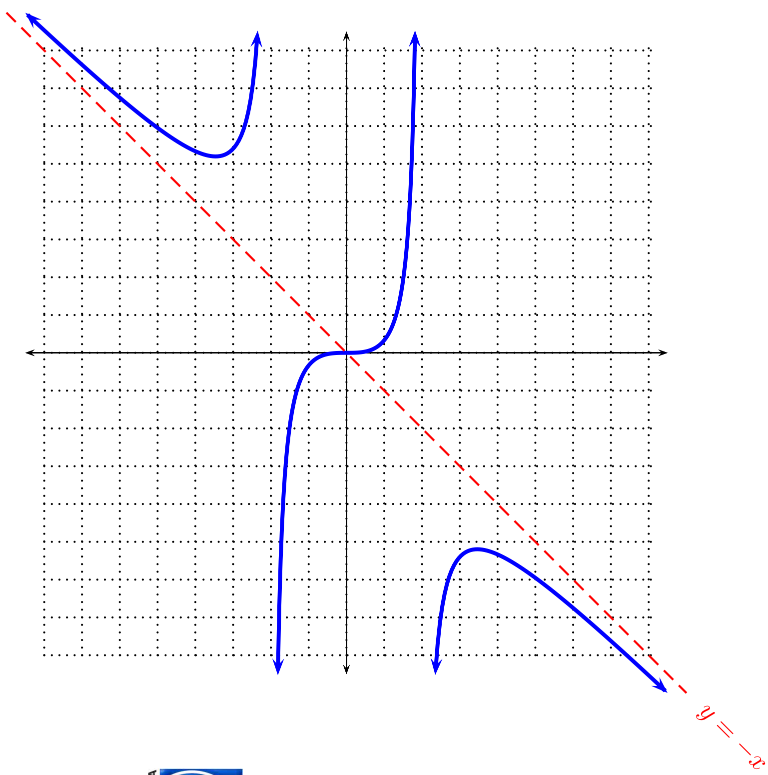
- OBLICUAS:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ m = \displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3}{x^3-4x} = -1 \\ \bullet\ n = \displaystyle \lim_{x\to\infty} \left[\frac{-x^3}{x^2-4} - (-x)\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{-x^3}{x^2-4} + x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{x^2-4} = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \boxed{y=-x}$ (hacia ambos lados)

□

Gráfica de $f(x) = \dfrac{-x^3}{x^2-4} \longrightarrow$

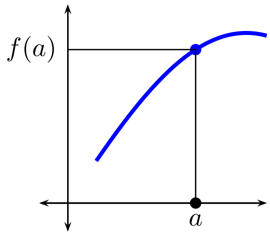


2 Continuidad

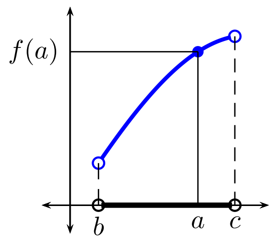
Ya hemos introducido en ejemplos del tema anterior el concepto de continuidad:

Definición 17. *$f(x)$ es **continua** en $x=a$* $\Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet \ \exists\ f(a) \ \ (\in \mathbb{R}) \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \end{cases}$

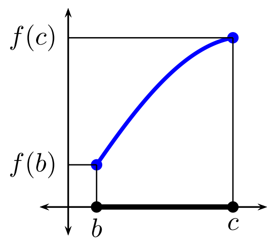
*En caso contrario, $f(x)$ se dice **discontinua** en $x=a$*



Definición 18. *$f(x)$ es continua en $(b,c) \Longleftrightarrow$ Es continua en todo $a \in (b,c)$*

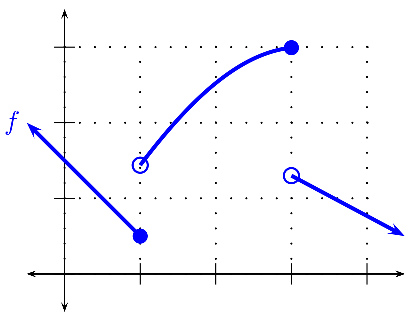


Definición 19. *$f(x)$ es continua en $[b,c]$* $\Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet \ \textit{Es continua en } (b,c) \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b) \ \in \ \mathbb{R} \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c) \ \in \ \mathbb{R} \end{cases}$



- Análogamente, se define la continuidad en $(b,c]$ y $[b,c)$.
- b, c pueden ser $\pm\infty$.
- f continua quiere decir f continua en $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 8.175



- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- f continua en $\mathbb{R} - \{1,3\}$
- f continua en $(-\infty, 1]$
- f continua en $(1,3]$
- f continua en $(3,\infty)$

Los anteriores intervalos son los máximos para los que f es continua. Por ejemplo, f no es continua en $[1,3]$, porque $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq f(1)$

Como ya se ha visto en el tema anterior, las funciones **no definidas a trozos** que se construyen mediante suma, resta, producto, división o composición de las elementales son **continuas en su dominio**. Los ejercicios de estudio de la continuidad, por tanto, se aplican en su mayoría a funciones definidas a trozos.

Ejemplo 8.176

- $f(x) = \dfrac{x}{x^2-2} \Longrightarrow f$ es continua en $\mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}$
- $g(x) = \sqrt[4]{6-2x} \Longrightarrow g$ es continua en $(-\infty, 3]$
- $h(x)$ polinomio $\Longrightarrow h$ es continua en $\mathbb{R}$
- $i(x) = \ln(9-x^2) \Longrightarrow i$ es continua en $(-3,3)$
- $j(x) = \dfrac{\log(x+1)}{x} \Longrightarrow j$ es continua en $(-1,\infty) - \{0\}$

Comprueba los resultados anteriores: introduce las funciones en www.desmos.com/calculator y verás su gráfica.

Ejemplo 8.177

¿Es continua la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{x-2}{1+e^{\frac{1}{x-2}}} & \text{si } x \neq 2 \end{cases}$?

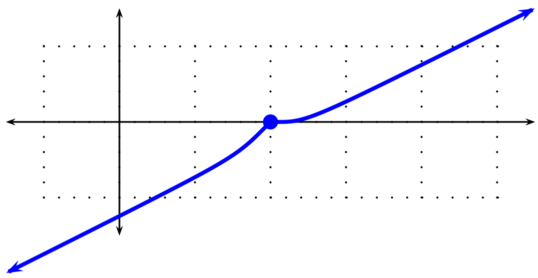
Solución:

$Dom(f) = \mathbb{R} \Longrightarrow f$ sólo puede ser discontinua en $x = 2$ (punto de ruptura)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(2) = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{0}{1+e^{\frac{1}{0^-}}} = \dfrac{0}{1+e^{-\infty}} = \dfrac{0}{1+0} = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{0}{1+e^{\frac{1}{0^+}}} = \dfrac{0}{1+e^{\infty}} = \dfrac{0}{1+\infty} = \dfrac{0}{\infty} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{f \text{ es continua}}$$

□

Gráfica de $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{x-2}{1+e^{\frac{1}{x-2}}} & \text{si } x \neq 2 \end{cases} \longrightarrow$



EJEMPLO 8.178

¿Es continua la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = -1$ y en $x = 2$

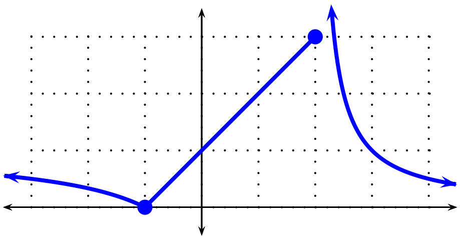
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(-1) = -1+1 = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \frac{-1+1}{-1-1} = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -1+1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{f \text{ es continua en } x = -1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(2) = 2+1 = 3 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2+1 = 3 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{f \text{ es discontinua en } x = 2}$$

□

Gráfica de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases} \longrightarrow$



EJEMPLO 8.179

Calcula el valor de m para que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ m & \text{si } x = 0 \\ 3x-2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea continua.

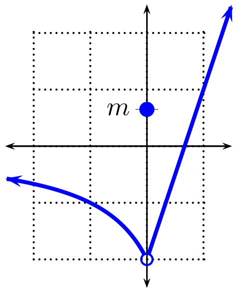
Solución:

$Dom(f) = \mathbb{R} \Longrightarrow f$ sólo puede ser discontinua en $x = 0$ (punto de ruptura)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(0) = m \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \frac{2}{0-1} = -2 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3 \cdot 0 - 2 = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{m = -2}$$

□

Gráfica de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ m & \text{si } x = 0 \\ 3x-2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \longrightarrow$



EJEMPLO 8.180

Calcula $k > 0$ para que $f(x) = \begin{cases} \sqrt{kx} & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{2x^2-16x}{x-8} & \text{si } x > 8 \end{cases}$ sea continua en $[0, \infty]$

Solución: Como podemos calcular la imagen de cualquier número $[0, \infty]$, incluido

$f(8) = \sqrt{8k} \in \mathbb{R}$, entonces

$Dom(f) = [0, \infty] \Longrightarrow$ sólo puede ser discontinua en el punto de ruptura $x = 8$.

- $f(8) = \sqrt{8k}$
- $\lim\limits_{x\to 8^-} f(x) = \sqrt{8k}$
- $\lim\limits_{x\to 8^+} f(x) = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 8^+} \dfrac{2x\cancel{(x-8)}}{\cancel{x-8}} = 16$

$\Longrightarrow \sqrt{8k} = 16 \Longrightarrow \boxed{k = 32}$

□

EJEMPLO 8.181

Calcula los valores de a y b para que $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x < 1 \\ 2a-x & \text{si } 1 \le x < 3 \\ b & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ sea continua.

Solución:

$Dom(f) = \mathbb{R} \Longrightarrow f$ sólo puede ser discontinua en $x = 1$ o $x = 3$ (puntos de ruptura)

- $f(1) = 2a-1$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1+a$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2a-1$

$\Longrightarrow 2a-1 = 1+a \Longrightarrow \boxed{a = 2}$

- $f(3) = b$
- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2a-3$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = b$

$\Longrightarrow \boxed{b =}\ 2a-3 = 2\cdot 2-3 = \boxed{1}$

□

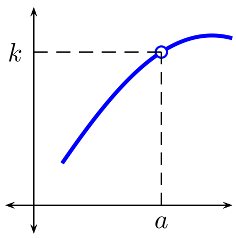
2 1 Tipos de discontinuidad

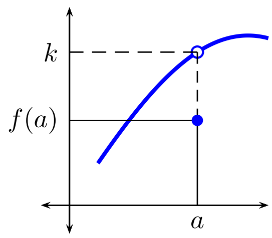
Supuesto que falla alguna de las condiciones de continuidad, podemos especificar el tipo de discontinuidad según sea:

2 1 1 Evitable

f presenta una discontinuidad evitable en $x = a$ si $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = k \in \mathbb{R}}$

Para ello, claro, tiene que ocurrir una de estas dos: $\begin{cases} \nexists\ f(a) \\ \exists\ f(a) \neq k \end{cases}$





EJEMPLO 8.182

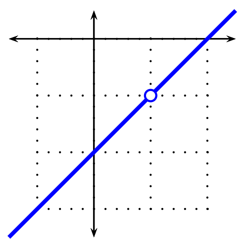
Estudia la continuidad de $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ en $x = 1$

Solución:

- $f(1) = \dfrac{0}{0} = \nexists$
- $\lim_{x \to 1} f(x) = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} (x - 2) = -1$

$\Longrightarrow$ $\boxed{f \text{ presenta una discontinuidad evitable en } x = 1}$

	1	−3	2
1		1	−2
	1	−2	$\boxed{0}$



□

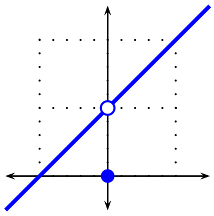
EJEMPLO 8.183

Estudia la continuidad de $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

Solución:

- $g(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} = 1$

$\Longrightarrow$ $\boxed{g \text{ presenta una discontinuidad evitable en } x = 0}$



□

Observación 29. *El nombre de **evitable** se debe a que, con un simple cambio en la imagen del punto de discontinuidad, ésta se 'evita'. En los ejemplos anteriores, redefiniendo $f(1) = -1$ o $g(0) = 1$.*

EJEMPLO 8.184

Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 2^{-x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 2 \\ \frac{x^2-2}{8} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 0$ y en $x = 2$

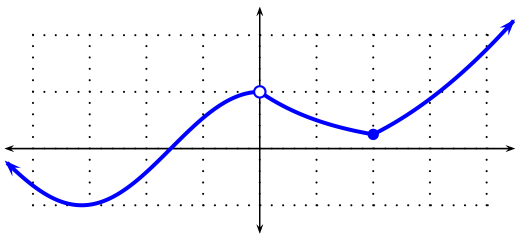
Solución:

- $f(0) = \nexists$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \cos x = \cos 0 = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2^{-x} = 2^{-0} = 1$

$\Longrightarrow$ $\boxed{f \text{ presenta una discontinuidad evitable en } x = 0}$

- $f(2) = \frac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2^{-x} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-2}{8} = \dfrac{2^2-2}{8} = \frac{1}{4}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{f \text{ es continua en } x = 2}$

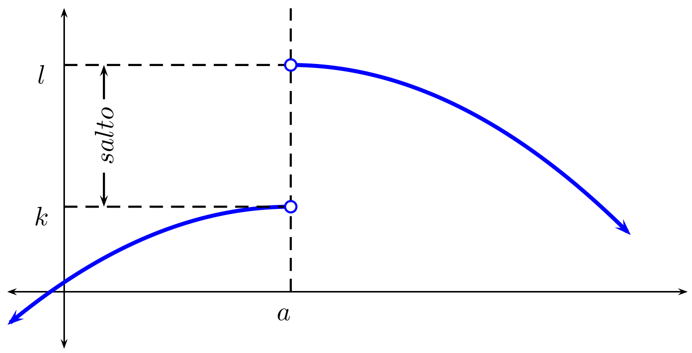


□

2 1 2 Inevitable

f presenta una discontinuidad inevitable en $x = a$ si $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) \notin \mathbb{R}}$

de salto finito: Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = k \neq l = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $k,\ l \in \mathbb{R}$. El salto será $|k-l|$.



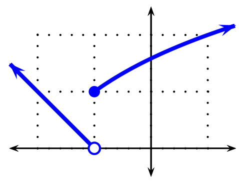
EJEMPLO 8.185

Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} -1-x & \text{si } x < -1 \\ \log_2(x+3) & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en $x = -1$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(-1) = \log_2(-1+3) = \log_2 2 = 1 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -1-(-1) = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \log_2(-1+3) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

f presenta una discontinuidad inevitable de salto $|0-1| = |-1| = \boxed{1}$ en $x = -1$



□

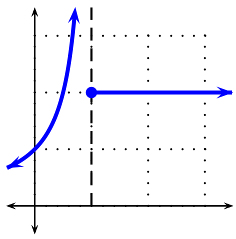
asintótica: Si alguno de los límites laterales es infinito.

Ejemplo 8.186

Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(1) = 2 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{-1}{0^-} = \infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\text{f presenta una discontinuidad inevitable asintótica en } x = 1}$$



□

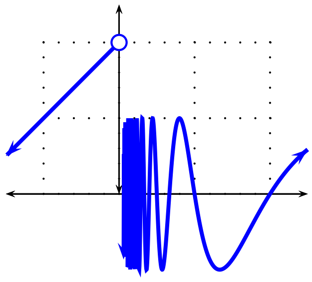
esencial: Si alguno de los límites laterales no existe.

Ejemplo 8.187

Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 0 \\ \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(0) = \frac{1}{0} = \nexists \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 + 2 = 2 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{0^+} = \operatorname{sen}\infty = \nexists \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\text{f presenta una discontinuidad inevitable esencial en } x = 0}$$



□

f puede presentar en $x = a$ uno de los siguientes tipos de discontinuidad:

- Evitable: $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$
- Inevitable: $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$
  - De salto finito: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = k \neq l = \lim\limits_{x \to a^+} f(x),\ k,\ l \in \mathbb{R}$
  - Asintótica: Algún $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$
  - Esencial: Algún $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = \nexists$

Ejemplo 8.188

Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Solución: f puede ser **discontinua sólo** en los **puntos de ruptura** y en los que están **fuera de su dominio** (no tienen imagen).

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

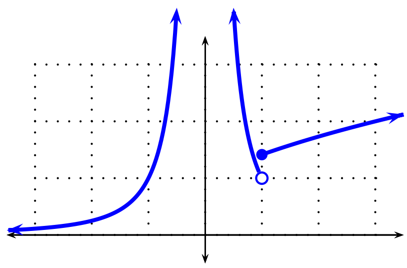
- Continuidad en $x = 0$:
  - $f(0) = \frac{1}{0} = \nexists$
  - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = \infty$

  $\Longrightarrow$ $\boxed{f \text{ presenta una discontinuidad asintótica en } x = 0}$

- Continuidad en el punto de ruptura: $x = 1$
  - $f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
  - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{1^2} = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

  $\Longrightarrow$ $\boxed{f \text{ presenta una discontinuidad inevitable de salto } \sqrt{2} - 1 \text{ en } x = 1}$

$\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{0, 1\}}$



□

3 Ejercicios propuestos

1. Calcula las asíntotas y haz una representación aproximada f.

   a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ $\rightarrow x = 3;\ y = 2$

   b) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+3}$ $\rightarrow x = -3;\ y = 2x - 6$

   c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{x^2 + 2x}$ $\rightarrow x = -2;\ y = 2$

   d) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2x + x^2}$ $\rightarrow x = 1;\ y = 0$

   e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ $\rightarrow x = -2;\ x = 2;\ y = x$

   f) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$ $\rightarrow y = 0$

   g) $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - 2x}$ $\rightarrow x = 1;\ y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

   h) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ $\rightarrow x = -1;\ x = 1;\ y = 1$

   i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ $\rightarrow x = 0;\ y = 1$

   j) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ $\rightarrow x = -1;\ y = x - 1$

   k) $f(x) = \dfrac{8}{4 - x^2}$ $\rightarrow x = -2;\ x = 2;\ y = 0$

   l) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}$ $\rightarrow x = 0;\ y = x - 2$

2. Calcula las asíntotas de f.

   a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 1}$ $\rightarrow y = -1$ (izq.); $y = 1$ (der.)

   b) $f(x) = \dfrac{\log(x+3)}{x - 1}$ $\rightarrow x = -3^+;\ x = 1;$ $y = 0$ (der.)

   c) $f(x) = \dfrac{x+3}{\log(x-1)}$ $\rightarrow x = 2$

   d) $f(x) = e^{\frac{x-3}{x-2}}$ $\rightarrow x = 2^-;\ y = e$

   e) $f(x) = e^{\frac{x-3}{x^2-2}}$ $\rightarrow x = -\sqrt{2}^+;\ x = \sqrt{2}^-;\ y = 1$

3. halla el valor de los parámetros para que las funciones sean continuas.

   a) $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2 - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ $\rightarrow a = 2$

   b) $f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$ $\rightarrow a = -9,\ b = -7$

   c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - (a+3)x + 3a}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ $\rightarrow a = 2$

4. Demuestra que $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + ax + 2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 5x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua, $\forall a \in \mathbb{R}$.

5. La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 1}$ no está definida para $x = 1$ ni para $x = -1$.
   ¿Qué valores hay que adjudicar a $f(1)$ y $f(-1)$ para que sea continua en $\mathbb{R}$? $\rightarrow f(1) = -2,\ f(-1) = -4$

6. Estudia la continuidad de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ en $x = 1$. $\rightarrow$ Disc. de salto 4 en $x = 1$

7. Halla el valor de a para que las funciones sean continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\rightarrow a = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 4 \\ \sqrt{x^2 + a^2} & \text{si } x < 4 \end{cases}$ $\rightarrow a = \pm 3$

c) $f(x) = \begin{cases} (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) & \text{si } x \leq 2 \\ \log(a+x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\rightarrow a = 8$

8. ¿Existe algún valor de a que haga que $f(x)$ continua en $\mathbb{R}$? Justifícalo. $\rightarrow$ No, en $x = \frac{\pi}{6}$ disc. inevitable de salto $\frac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < \frac{\pi}{6} \\ a & \text{si } x = \frac{\pi}{6} \\ \cos(3x) & \text{si } x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

9. Determina a y b para que f sea continua en $\mathbb{R}$. $\rightarrow a = 1,\ b = -1$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{a}{x} + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

10. Determina a para que f sea continua en $\mathbb{R}$. $\rightarrow a = 0,\ a = -2$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x < 1 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

11. Determina a y b para que f sea continua en $\mathbb{R}$. $\rightarrow a = \frac{1}{3},\ b = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ bx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

12. Estudia la continuidad de f: $\rightarrow$ a) Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$; $x = 2$ disc. evitable, b) Continua en $\mathbb{R}$, c) Continua en $\mathbb{R} - \{1\}$; $x = 1$ disc. evitable, d) Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$; $x = 0$ disc. de salto 2

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

13. Dí para qué valores de x es continua la función $f(x)$. Clasifica las discontinuidades que tenga.

a) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < -2 \\ -4 & \text{si } x = -2 \\ \dfrac{1}{2-x} & \text{si } x > -2 \end{cases}$ → Continua en $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$; $x = -2$ disc. evitable; $x = 2$ disc. asintótica

b) $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen}^2 x & \text{si } x < \pi \\ 1 & \text{si } x = \pi \\ \cos^2 x & \text{si } x > \pi \end{cases}$ → Continua en $\mathbb{R}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$ → Continua en $\mathbb{R} - \{1\}$; $x = -1$ disc. de salto $\frac{3}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$ → Continua en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; $x = -1$ disc. evitable; $x = 1$ disc. asintótica

e) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ → Continua en $\mathbb{R}$

f) $f(x) = \begin{cases} \log(x-1) & \text{si } x > 2 \\ (1-x)^2 - x^2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$ → Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$; $x = 2$ disc. de salto 3

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + 6x + 9} & \text{si } x \neq -3 \\ 0 & \text{si } x = -3 \end{cases}$ → Continua en $\mathbb{R} - \{-3\}$; $x = -3$ disc. asintótica

MATEM – I

TEMA 9

DERIVADAS

Índice

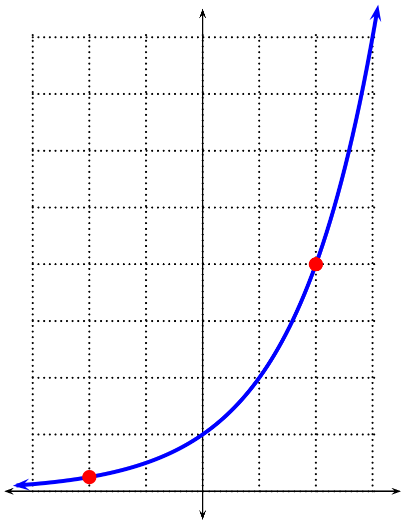
1 Introducción

No fue hasta el siglo XVII, a pesar de que ya se había planteado desde la Grecia clásica, cuando Newton y Leibnitz resolvieron, desde diferentes contextos y sin ahorrarnos una jugosa y agria disputa, adjudicándose cada uno su autoría, el problema del cálculo de la recta tangente a una curva en un punto, y por ende la medida del crecimiento instantáneo de dicha curva, dando inicio al Cálculo diferencial e integral. En siglos posteriores se formalizó y simplificó el estudio, incorporando el cálculo de límites, tal como nosotros lo vamos a estudiar.

La importancia del concepto de derivada es tal que la ciencia y la tecnología modernas serían, sencillamente, imposibles sin él. Su construcción fue clave para el inicio de la revolución científica que vivió la Europa del siglo XVII, que supuso una ruptura con las formas de pensar, estudiar y vincularse con la naturaleza que dominaron casi absolutamente en Europa de la 'edad oscura' entre los siglos V y XV. Los nuevos métodos enfatizaron la experiencia empírica y la descripción matemática de nuestra relación con la realidad.

2 Derivada de una función en un punto

Dada una función $f(x)$, ya sabemos cómo calcular su valor $f(a)$ en $x = a$. Considera su gráfica desde un punto de vista dinámico, es decir, desplazándose a lo largo de la curva que describe f, de izquierda a derecha. ¿Podríamos también responder a la pregunta de cómo varía (cuál es su *velocidad*) en una abcisa, y hacerlo además con exactitud, adjudicándole un número? A ésto responde el concepto de derivada.



A la izquierda tienes la gráfica de $f(x) = 2^x$.

Parece claro que, por ejemplo, en el punto $(-2, 0'25)$ f varía más lentamente (pasa con menos velocidad) que en el punto $(2, 4)$.

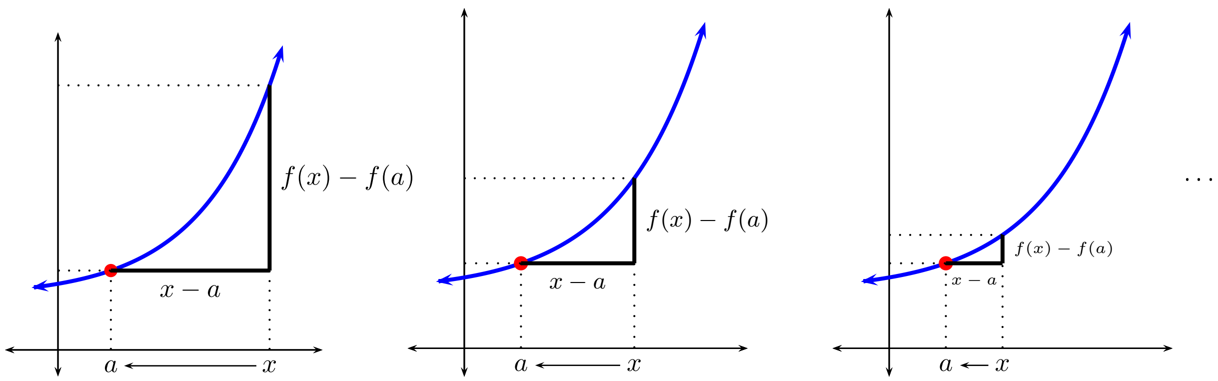
Lo verás con mayor claridad en la siguiente animación en Desmos, en la que incluso se aprecia que la velocidad, a su vez, crece de izquierda a derecha (el punto se mueve con aceleración positiva).

2.1 Definición

En el intervalo $[a, x]$, la variación media de la función $f(x)$ es $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (velocidad media): la variación de f dividida por la variación de x. Si queremos saber cuál es la variación en exactamente $x = a$ (variación puntual o velocidad instantánea), el intervalo en cuestión es $[a, a] = a$; no es posible calcular el cociente directamente, pues sería $\dfrac{f(a) - f(a)}{a - a} = \dfrac{0}{0}$, pero sí lo podemos interpretar como un límite $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, lo que nos lleva al concepto de derivada:

Definición 20. *Llamamos derivada de $f(x)$ en $x = a$ al número real que denotamos por*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Ejemplo 9.189

- Si $f(x)=x^2$,

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

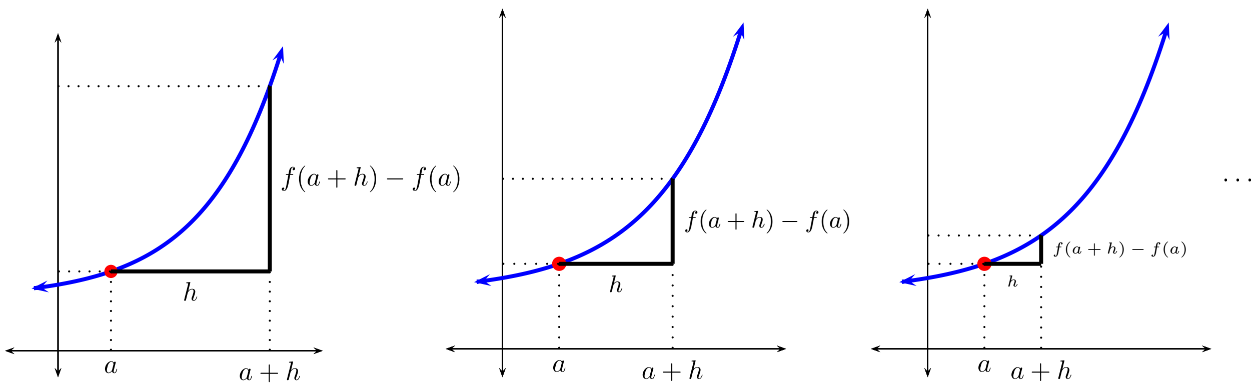
- Si $f(x)=\sqrt{x}$,

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{4}$$

Una alternativa equivalente se consigue si cambiamos la variable $x=a+h$:

Definición 21. $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$



EJEMPLO 9.190

- Si $f(x) = x^2$,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cancel{h}+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

- Si $f(x) = \sqrt{x}$,

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{4}$$

Observación 30. *En otras disciplinas científicas se suele utilizar otra notación (debida a Leibnitz) para la derivada, que especifica la variable sobre la que se deriva (útil para cuando trabajemos con funciones con varias variables, o para distinguir la variable de los parámetros). Es ésta:*

$$y' \equiv \frac{dy}{dx}, \qquad o \qquad f' \equiv \frac{df}{dx}$$

EJEMPLO 9.191

Si $y = kx^3$,

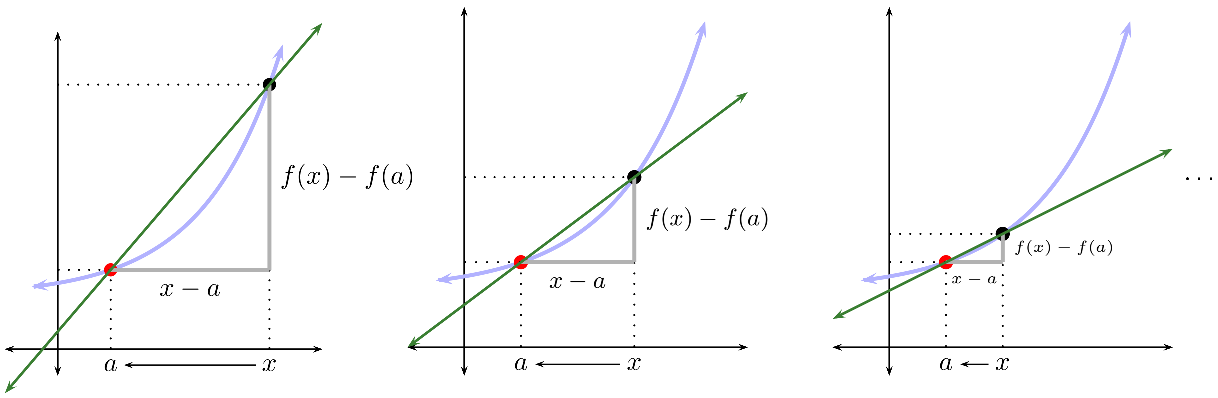
$$\frac{dy}{dx}(-2) = \lim_{x\to -2} \frac{kx^3 - k(-2)^3}{x-(-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{kx^3+8k}{x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -2} kx^2 - 2kx + 4k =$$

$$= k(-2)^2 - 2k(-2) + 4k = 4k + 4k + 4k = 12k$$

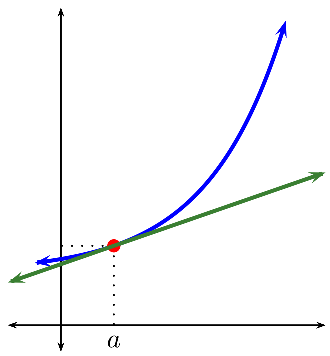
$$\begin{array}{r|rrrr} & k & 0 & 0 & 8k \\ -2 & & -2k & 4k & -8k \\ \hline & k & -2k & 4k & \boxed{0} \end{array}$$

2.2 Interpretación geométrica

En la definición de derivada, la función sobre la que se calcula el límite tiene una interpretación geométrica evidente: es la pendiente de la recta secante a f que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$. Si hacemos que $x \to a$,



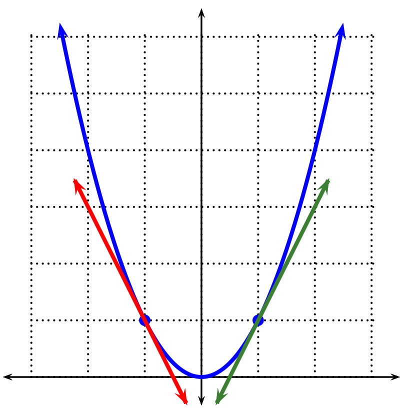
Es claro que, cuando $x = a$, todas esas secantes van a parar a la tangente a f en $x = a$. Así,



$$\boxed{f'(a) \text{ es la pendiente de la recta tangente a } f \text{ en } x = a}$$

En la siguiente animación en Desmos puedes recrear el proceso con ejemplos concretos.

EJEMPLO 9.192



Las pendientes de las rectas tangentes a $f(x)$ en $x = -1$ y en $x = 1$ son, respectivamente, -2 y 2. Por tanto,

$$f'(-1) = -2, \qquad f'(1) = 2$$

La recta tangente a f en $x = 0$ es el eje de abcisas (horizontal). Por tanto,

$$f'(0) = 0$$

3 Función derivada

El proceso del cálculo de la derivada a partir de su definición es lento. Además, no podemos abordar el proceso contrario, que será fundamental para la aplicación de las derivadas: ¿en qué punto de f la derivada es 0? (los máximos y mínimos relativos de la función estarán entre ellos). Necesitamos, pues, aplicar la derivada a un punto genérico, es decir, calcular la función que adjudica a cada x su derivada para f, no especificando ninguna abcisa en concreto.

Ejemplo 9.193

Si $f(x) = x^2$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h) = \boxed{2x}$$

Como consecuencia, por ejemplo, $f'(5) = 2\cdot 5 = 10$

Ejemplo 9.194

Si $f(x) = \sqrt{x}$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Como consecuencia, por ejemplo, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Ejemplo 9.195

Si $f(x) = x^2 - 3x + 1$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) + 1 - (x^2 - 3x + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 1 - x^2 + 3x - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}} - 3\cancel{h}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x + h - 3) = \boxed{2x - 3}$$

Como consecuencia, por ejemplo, $f'(-2) = 2(-2) - 3 = -9$

Si utilizamos la otra definición (en casos como los siguientes será necesario) la generalización será con a.

Ejemplo 9.196

Si $f(x)=x^4$,

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to a}(x^3+ax^2+a^2x+a^3)=a^3+aa^2+a^2a+a^3=4a^3$$

$$f'(x)=\boxed{4x^3}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -a^4 \\ a & & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ \hline & 1 & a & a^2 & a^3 & \boxed{0} \end{array}$$

Ejemplo 9.197

Si $f(x)=x^3+2x^2$,

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^3+2x^2-(a^3+2a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3+2x^2-a^3-2a^2}{x-a}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to a}(x^2+(a+2)x+a^2+2a)=a^2+(a+2)a+a^2+2a=a^2+a^2+2a+a^2+2a=3a^2+4a$$

$$f'(x)=\boxed{3x^2+4x}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 0 & -a^3-2a^2 \\ a & & a & a^2+2a & a^3+2a^2 \\ \hline & 1 & a+2 & a^2+2a & \boxed{0} \end{array}$$

Ejemplo 9.198

Si $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$

$$f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)=$$

$$=a^{n-1}+a\cdot a^{n-2}+a^2\cdot a^{n-3}+\cdots+a^{n-2}\cdot a+a^{n-1}=\overbrace{a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}}^{n}=\boxed{n\cdot a^{n-1}}$$

$$f'(x)=\boxed{nx^{n-1}}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a^n \\ a & & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} & a^n \\ \hline & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} & \boxed{0} \end{array}$$

EJEMPLO 9.199

Si $f(x) = \ln x$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \ln \left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \ln\left[1^{\infty}\right] = \ln e^{k} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{1}{x}}$$

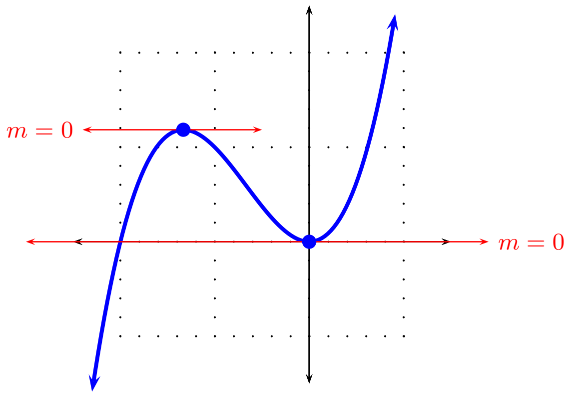
$$k = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x+h}{x} - 1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{h}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

EJEMPLO 9.200

¿En qué abcisas tiene tangente horizontal la función $f(x) = x^3 + 2x^2$?

Solución:
Que la tangente sea horizontal quiere decir que la pendiente (derivada) en una abcisa es 0. Como hemos visto que $f'(x) = 3x^2 + 4x$, la respuesta son las soluciones de la ecuación

$$3x^2 + 4x = 0 \Longleftrightarrow x(3x+4) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{-4}{3} \end{array} \right.$$



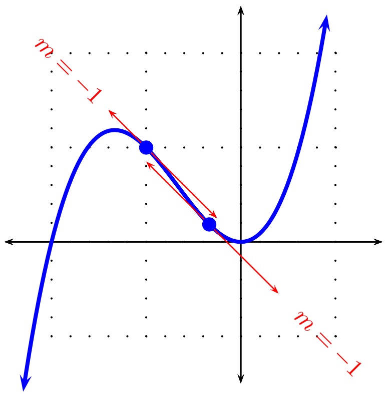
□

EJEMPLO 9.201

¿En qué abcisas tangente a la función $f(x) = x^3 + 2x^2$ es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes?

Solución:
Que la tangente y la bisectriz sean paralelas quiere decir que las pendientes son iguales. La pendiente de la tangente es $f'(x) = 3x^2 + 4x$, y la pendiente de la bisectriz $(y = -x)$ es $m = -1$. Por tanto,

$$3x^2 + 4x = -1 \iff 3x^2 + 4x + 1 = 0 \implies \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = -1 \end{cases}$$



□

3.1 Derivadas sucesivas

A la función derivada se le llama también derivada primera. Si ésta vuelva a derivarse obtenemos la derivada segunda, y podemos hablar sucesivamente de la derivada tercera, cuarta. . . y en general la derivada n–ésima. Se representan así:

$$y'' = y^{(2)} = f^{(2)}(x) = f''(x), \quad y''' = y^{(3)} = f^{(3)}(x) = f'''(x), \quad \ldots \quad y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

Veremos algún ejemplo cuando aprendamos a calcularlas más rápidamente.

4 Cálculo de derivadas

El proceso de cálculo de derivadas aún se puede acelerar bastante. Las funciones que estudiamos se forman operando con las funciones elementales, así que si somos capaces de:

- Saber cómo actúa la derivación sobre la suma, resta, producto, división y composición de funciones y
- Encontrar la derivada de las funciones elementales,

entonces podremos derivar cualquier función simplemente memorizando y aplicando esas reglas. Se destacan a continuación:

4.1 Reglas de derivación

Sean f, g funciones, $k, a \in \mathbb{R}$ constantes.

REGLAS DE DERIVACIÓN				
DERIVADAS ELEMENTALES		ARITMÉTICA DE LAS DERIVADAS		
$y = k$	$y' = 0$	$y = f \pm g$	$y' = f' \pm g'$	
$y = x^k$	$y' = kx^{k-1}$	$y = f \cdot g$	$y' = f' \cdot g + f \cdot g'$	
$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$	$y = k \cdot f$	$y' = k \cdot f'$	
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \frac{f}{k}$	$y' = \frac{f'}{k}$	
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \frac{f}{g}$	$y' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = g(f)$	$y' = g'(f) \cdot f'$	(Regla de la cadena)
$y = e^x$	$y' = e^x$			
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$			
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$			
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$			
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$			
$y = \operatorname{arc\,sen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$			
$y = \operatorname{arc\,cos} x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$			
$y = \operatorname{arc\,tg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$			

No tenemos tiempo —y en algunos casos, ciencia— para demostrar estas reglas; baste el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 9.202

Demuestra que si $y = f \cdot g$ entonces $y' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Solución: $y'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[f\cdot g](x+h) - [f\cdot g](x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]\cdot g(x+h) + f(x)\cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad \square$$

EJEMPLO 9.203

1. $y = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad y' = 0$
2. $y = 4x^3 \quad \Longrightarrow \quad y' = 4\cdot 3x^2 = 12x^2$
3. $y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 6 \quad \Longrightarrow \quad y' = 6x^2 - 10x + 4$
4. Derivadas sucesivas del polinomio $y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 6$:

   $y' = 4x^3 - 9x^2 + 10x - 7$
   $y'' = 12x^2 - 18x + 10$
   $y''' = 24x - 18 \qquad\qquad y^{(n)} = 0, \forall n \geq 5$
   $y^{iv} = 24$
   $y^{v} = 0$

5. $y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{7} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{12}{4}x^3 - \frac{2}{2}x = 3x^3 - x$

EJEMPLO 9.204

1. $y = 2x^5 - 3x^2 + 4\sqrt{x} - \dfrac{3}{x} \quad \Longrightarrow \quad y' = 10x^4 - 6x + 4\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 3\cdot\dfrac{-1}{x^2} = 10x^4 - 6x + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^2}$
2. $y = 7 + 3e^x - 2\cdot 5^x + 4\ln x - 3\log_2 x$

   $y' = 3e^x - 2\cdot 5^x\cdot\ln 5 + 4\cdot\dfrac{1}{x} - 3\cdot\dfrac{1}{x\ln 2} = 3e^x - 2\ln 5\cdot 5^x + \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{x\ln 2}$
3. $y = \operatorname{sen} x - 2\cos x + 5\operatorname{tg} x$

   $y' = \cos x - 2\cdot(-\operatorname{sen} x) + 5\cdot(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \cos x + 2\operatorname{sen} x + 5\operatorname{tg}^2 x + 5$
4. $y = \operatorname{arc\,sen} x - \arccos x \quad \Longrightarrow \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $y = 3 + x - \operatorname{arc\,tg} x \quad \Longrightarrow \quad y' = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2-1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

EJEMPLO 9.205

1. $y = x^{\frac{3}{2}} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
2. $y = \sqrt[5]{x^4} \Rightarrow y = x^{\frac{4}{5}} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{4}{5}x^{\frac{-1}{5}} = \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{5}}} = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}$
3. $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{2+\frac{1}{3}} = x^{\frac{7}{3}} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} = \dfrac{7x\sqrt[3]{x}}{3}$
4. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x\cdot\sqrt[4]{x}} \Rightarrow y = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x\cdot x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{3}{2}-1-\frac{1}{4}} = x^{\frac{-7}{12}}$

   $$y' = \frac{-7}{12}x^{\frac{-7}{12}-1} = \frac{-7}{12}x^{\frac{-19}{12}} = \frac{-7}{12}\cdot\frac{1}{x^{\frac{19}{12}}} = \frac{-7}{12}\cdot\frac{1}{\sqrt[12]{x^{19}}} = \frac{-7}{12x\sqrt[12]{x^7}}$$

EJEMPLO 9.206

1. $y = (2x-1)\ln x \quad \Longrightarrow \quad y' = 2\ln x + (2x-1)\cdot\dfrac{1}{x} = 2\ln x + \dfrac{2x-1}{x} = \dfrac{2x\ln x + 2x - 1}{x}$
2. $y = x^2\log x \quad \Longrightarrow \quad y' = 2x\log x + x^2\cdot\dfrac{1}{x\ln 10} = 2x\log x + \dfrac{x}{\ln 10} = \dfrac{2\ln 10\; x\log x + x}{\ln 10}$
3. $y = (x^2-3x)\cdot\sqrt{x}$

   $$y' = (2x-3)\cdot\sqrt{x} + (x^2-3x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = (2x-3)\cdot\sqrt{x} + \frac{x^2-3x}{2\sqrt{x}} =$$
   $$= \frac{(2x-3)\cdot\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x} + x^2 - 3x}{2\sqrt{x}} = \frac{(2x-3)\cdot 2x + x^2 - 3x}{2\sqrt{x}} =$$
   $$= \frac{4x^2 - 6x + x^2 - 3x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 9x}{2\sqrt{x}}$$
4. $y = (x^2-5x)e^x$

   $$y' = (2x-5)e^x + (x^2-5x)e^x = e^x(2x-5+x^2-5x) = (x^2-3x-5)e^x$$
5. $y = (1+\operatorname{tg} x)\cos x$

   $$y' = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\cos x + (1+\operatorname{tg} x)(-\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\cos x} - \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x\cos x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$
6. $y = (1-x^2)\arccos x$

   $$y' = -2x\cdot\arccos x + (1-x^2)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -2x\arccos x - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} =$$
   $$= -2x\arccos x - \frac{\cancel{(1-x^2)}\sqrt{1-x^2}}{\cancel{1-x^2}} = -2x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

Ejemplo 9.207

1. $y = \dfrac{x}{2x+1} \quad \Longrightarrow \quad y' = \dfrac{1\cdot(2x+1) - x\cdot 2}{(2x+1)^2} = \dfrac{2x+1-2x}{(2x+1)^2} = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$

2. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$$y' = \frac{2x\cdot(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

3. $y = \dfrac{3}{5x^3-x} \quad \Longrightarrow \quad y' = \dfrac{\cancel{0\cdot(5x^3-x)} - 3\cdot(15x-1)}{(5x^3-x)^2} = \dfrac{-45x+3}{(5x^3-x)^2}$

4. $y = \dfrac{3x^2-4x+2}{3x^2+2x-5} \quad \Longrightarrow \quad y' = \dfrac{(6x-4)(3x^2+2x-5) - (3x^2-4x+2)(6x+2)}{(3x^2+2x-5)^2} =$

$$= \frac{\cancel{18x^3} + \cancel{12x^2} - 30x \cancel{-12x^2} \cancel{-8x} + 20 \cancel{-18x^3} - 6x^2 + 24x^2 + \cancel{8x} - 12x - 4}{(3x^2+2x-5)^2} = \frac{18x^2-42x+16}{(3x^2+2x-5)^2}$$

Ejemplo 9.208

1. $y = \dfrac{1-x}{e^x} \quad \Longrightarrow \quad y' = \dfrac{-1\cdot e^x - (1-x)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x(-1-1+x)}{(e^x)^2} = \dfrac{x-2}{e^x}$

2. $y = \dfrac{\ln x}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad y' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{x - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{x(1-2\ln x)}{x^4} = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

3. $y = \dfrac{3x+2}{\ln x}$

$$y' = \frac{3\cdot\ln x - (3x+2)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{3\cdot\ln x - \dfrac{3x+2}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\dfrac{3x\ln x - 3x - 2}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{3x\ln x - 3x - 2}{x(\ln x)^2}$$

4. $y = \cot x \;\Rightarrow\; y = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$y' = \frac{-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} x - \cos x\cdot\cos x}{(\operatorname{sen} x)^2} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

5. $y = \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} \quad \Longrightarrow \quad y' = \dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2) - \operatorname{arc\,tg} x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-2x\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^2}$

Ejemplos de derivadas de funciones compuestas: Regla de la cadena.

La composición de funciones actúa, en lenguaje ordinario, 'metiendo' unas funciones dentro de otras, como las matriuskas rusas. La regla de la cadena dice que se empieza derivando la que contiene a todas (dejando en su interior la función siguiente) y se va multiplicando por la derivada de la siguiente (dejando en su interior la función que la sigue) ... y así hasta derivar la última función que interviene. Por ejemplo, con dos y tres funciones sería:

$$y = g(f) \implies y' = g'(f) \cdot f'$$
$$y = h[g(f)] \implies y' = h'[g(f)] \cdot g'(f) \cdot f'$$

Ejemplo 9.209

1. $y = \sqrt{x^2+1} \implies y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $y = \ln(4x-1) \implies y' = \dfrac{1}{4x-1} \cdot 4 = \dfrac{4}{4x-1}$
3. $y = (3x^2-2x+5)^4 \implies y' = 4(3x^2-2x+5)^3 \cdot (6x-2) = (3x^2-2x+5)^3 \cdot (24x-8)$
4. $y = e^{\sqrt{x}} \implies y' = e^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
5. $y = \cos(1-x^2) \implies y' = -\operatorname{sen}(1-x^2) \cdot (-2x) = 2x\operatorname{sen}(1-x^2)$
6. $y = \operatorname{arc\,sen}(1-x)$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \cdot (-1) = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}} = \frac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

7. $y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{\cancel{2}x}{(1+x^2-1)\cdot\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} =$$
$$= \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}} \cdot \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

8. $y = \sqrt{\ln(x^2-4x)^6}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2-4x)^6}} \cdot \frac{1}{(x^2-4x)^6} \cdot 6(x^2-4x)^5 \cdot (2x-4) =$$
$$= \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cancel{(x^2-4x)^5} \cdot (2x-4)}{\cancel{2}\sqrt{\ln(x^2-4x)^6} \cdot (x^2-4x)^{\cancel{6}}} = \frac{6x-12}{(x^2-4x)\sqrt{\ln(x^2-4x)^6}}$$

Ejemplo 9.210

1. $y=\sqrt[3]{(3x+1)^2} \Rightarrow y=(3x+1)^{\frac{2}{3}}$

   $y' = \frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}-1}\cdot 3 = 2(3x+1)^{\frac{-1}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3x+1}}$

2. $y=e^{\frac{1}{x}} \quad \Longrightarrow \quad y'=e^{\frac{1}{x}}\cdot \frac{-1}{x^2} = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

3. $y=(x^2-1)e^{x^2} \quad \Longrightarrow \quad y'=2x\cdot e^{x^2}+(x^2-1)\cdot e^{x^2}2x = 2xe^{x^2}(\cancel{1}+x^2\cancel{-1}) = 2x^3e^{x^2}$

4. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$

   $y' = \dfrac{-1}{\left(\sqrt{2-x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2-x^2}}\cdot(-2x) = \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}(2-x^2)\sqrt{2-x^2}} = \dfrac{x}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}$

5. $y=[\ln(x^5)]^5 \quad \Longrightarrow \quad y'=5[\ln(x^5)]^4\cdot\dfrac{1}{x^5}\cdot 5x^4 = \dfrac{25\cancel{x^4}[\ln(x^5)]^4}{x^{\cancel{5}}} = \dfrac{25[\ln(x^5)]^4}{x}$

Ejemplo 9.211

1. $y=\ln(tgx) \quad \Longrightarrow \quad y'=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\dfrac{1}{\cos^x} = \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}}\cdot\cos^{\cancel{2}} x} = \dfrac{1\cdot 2}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x\cdot 2} = \dfrac{2}{\operatorname{sen}(2x)}$

2. $y=x^2\operatorname{sen}^2(x^2)$

   $y' = 2x\cdot\operatorname{sen}^2(x^2)+x^2\cdot 2\operatorname{sen}(x^2)\cos(x^2)2x = 2x\operatorname{sen}(x^2)\cdot[\operatorname{sen}(x^2)+2x^2\cos(x^2)]$

3. $y=\ln\sqrt{x^2-4x} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\ln(x^2-4x)$

   $y' = \frac{1}{2}\dfrac{1}{x^2-4x}\cdot(2x-4) = \dfrac{\cancel{2}x-\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}(x^2-4x)} = \dfrac{x-2}{x^2-4x}$

4. $y=\ln\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\ln\dfrac{2x-1}{2x+1} = \frac{1}{2}\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right]$

   $y' = \frac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2x-1}\cdot 2-\dfrac{1}{2x+1}\cdot 2\right] = \frac{1}{2}\cdot 2\left[\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1}\right] = \dfrac{2x+1-(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} =$

   $= \dfrac{2}{4x^2-1}$

EJEMPLO 9.212

1. $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot(1+x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot(1+x)^2}$$

2. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}\left[\ln(1-\operatorname{sen} x)-\ln(1+\operatorname{sen} x)\right]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\cdot(-\cos x) - \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\cdot\cos x\right] = \frac{-\cos x}{2}\left[\frac{1}{1-\operatorname{sen} x}+\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\right] =$$

$$= \frac{-\cos x}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{sen} x+1-\operatorname{sen} x}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)} = \frac{-\cos x}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x} = \frac{-1}{\cos x}$$

3. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right)$

$$y' = \frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}-1}}\cdot\left(e^x + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{e^{2x}-1}}\cdot e^{2x}\cdot\cancel{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}-1}}\cdot e^x\left(1+\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\right) = \frac{e^x}{\cancel{\sqrt{e^{2x}-1}+e^x}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{e^{2x}-1}+e^x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

4.2 Derivación logarítmica

Es necesaria para poder derivar las funciones potenciales–exponenciales. Es un método, consistente en tomar logaritmos neperianos en ambos lados de la ecuación que define la función ($y = f(x)$), y tras ello derivar y despejar y'. Ha de tenerse en cuenta, al derivar, que la variable sobre la que derivamos es x, y habrá que aplicar la regla de la cadena al derivar funciones compuestas con y.

EJEMPLO 9.213

Deriva la función $y = x^x$

Solución:

$\ln y = \ln x^x$	$\dfrac{1}{y}\cdot y' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}$	
$\ln y = x\cdot\ln x$	$\dfrac{y'}{y} = \ln x + 1$	$y' = x^x\cdot[\ln x+1]$
$\dfrac{d(\ln y)}{dx} = \dfrac{d(x\cdot\ln x)}{dx}$	$y' = y\cdot[\ln x + 1]$	

□

Ejemplo 9.214

Deriva la función $y = x^{\ln x}$

Solución:

$$
\begin{array}{l|l|l}
\ln y = \ln x^{\ln x} & \dfrac{d(\ln y)}{dx} = \dfrac{d((\ln x)^2)}{dx} & \\
\ln y = \ln x \cdot \ln x & \dfrac{1}{y} \cdot y' = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} & y' = \dfrac{2x^{\ln x} \ln x}{x} \\
\ln y = (\ln x)^2 & \dfrac{y'}{y} = \dfrac{2 \ln x}{x} &
\end{array}
$$

□

Ejemplo 9.215

Deriva la función $y = \operatorname{sen}^x x$

Solución:

$$
\begin{array}{l|l|l}
\ln y = \ln \operatorname{sen}^x x & \dfrac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln \operatorname{sen} x + x \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cos x & \\
\ln y = x \cdot \ln \operatorname{sen} x & \dfrac{y'}{y} = [\ln \operatorname{sen} x + x \operatorname{ctg} x] & y' = \operatorname{sen}^x x \cdot [\ln \operatorname{sen} x + x \operatorname{ctg} x] \\
\dfrac{d(\ln y)}{dx} = \dfrac{d(x \cdot \ln \operatorname{sen} x)}{dx} & y' = y \cdot [\ln \operatorname{sen} x + x \operatorname{ctg} x] &
\end{array}
$$

□

Ejemplo 9.216

¿En qué abcisas la tangente a la función $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2}$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

Solución: Las pendientes de rectas paralelas son iguales; en este caso, la de la tangente

$$f'(x) = \textit{pendiente de la bisectriz} = 1 \text{ (la bisectriz del primer cuadrante es } y = x).$$

$$
f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x^2+2}} \cdot \cancel{4}^{2} x = \boxed{\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2}} = 1} \Longrightarrow
\left|\begin{array}{ll}
(2x)^2 & = \left(\sqrt{2x^2+2}\right)^2 \\
4x^2 & = 2x^2 + 2 \\
2x^2 & = 2 \\
x^2 & = 1
\end{array}\right| \Longrightarrow
$$

$$
\Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x=1} \\ x = -1 \text{ (No)} \end{cases}
$$

□

Ejemplo 9.217

¿En qué abcisa está el vértice de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$?

Solución: El vértice de una parábola es un punto de tangente horizontal; por tanto, su pendiente (derivada) debe ser 0:

$$f'(x) = 2ax + b \Longrightarrow 2ax + b = 0 \Longrightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

□

5 Derivabilidad

5.1 Derivadas laterales

Por su definición como límite, distinguiremos:

Definición 22. *Derivadas por la izquierda y por la derecha de $f(x)$ en $x = a$:*

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad y \qquad f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad y \qquad f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Definición 23. *Decimos que f es derivable en $x = a$ si tiene derivada (es un número real) en esa abcisa. Es claro, por tanto, que ocurrirá si $f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a) \in \mathbb{R}$*

Ejemplo 9.218

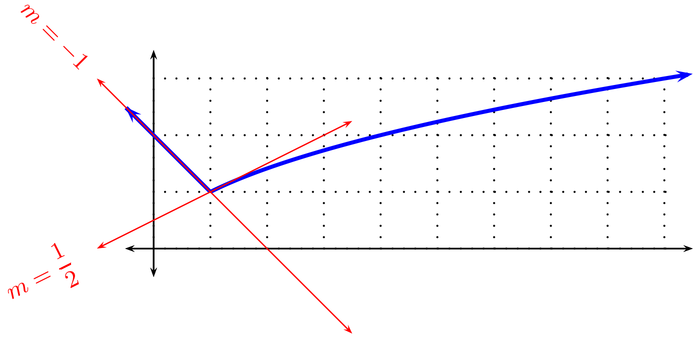
Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es derivable en $x = 1$

Solución:

$$f'(1) = \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2-x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\cancelto{-1}{1-x}}{\cancel{x-1}} = -1 \\[2ex] \bullet\ f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1} = \\[2ex] = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right\} = \nexists \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f \text{ no es derivable en } x = 1$$

Desde el punto de vista gráfico, esto quiere decir que la pendiente de las rectas tangentes, si nos acercamos tanto por la derecha como por la izquierda, no coincide; como consecuencia, en $x = a$ la función tiene un 'pico' (punto anguloso).



□

Hay una forma más rápida de estudiar la derivabilidad de las funciones definidas a trozos, utilizando el cálculo de derivadas, pero con la condición de continuidad.

5.2 Relación entre continuidad y derivabilidad

Una función que es continua en un punto no tiene por qué ser tambien derivable en ese punto (véase el ejemplo anterior).

Sin embargo, el recíproco sí que es cierto:

Teorema 3. *f derivable en $x = a \Longrightarrow f$ continua en $x = a$*

Solución:

$$f \text{ derivable en } x = a \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to a} [f(x)-f(a)] = 0$$

(si no, sería un límite de la forma $\left[\dfrac{\neq 0}{0}\right]$, que no da lugar a un número real). Por tanto,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ (f \text{ continua en } a)$$

□

Como consecuencia, $\boxed{\text{si } f \text{ no es continua en } x = a \Longrightarrow f \text{ no es derivable en } x = a}$

Observación 31. *Si quisiéramos calcular la derivada de una función que no es continua en $x = a$, nos encontraríamos que al calcular la derivada*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\neq}{0}$$

que no puede ser un número real. (Al no ser continua en $x = a$, el numerador no puede ser 0)

5.3 Derivadas de funciones definidas a trozos

La derivada de una función en la abcisa del **interior** un trozo se puede derivar sin problemas utilizando el **cálculo de derivadas**. Es en el **punto de ruptura**, **supuesta la continuidad**, al acercarnos desde cada lado con diferentes definiciones, donde pueden no coincidir las derivadas laterales, e impedir la derivabilidad. En cualquier caso, podemos afirmar (y generalizar a cualquier número de trozos) que, **si f es continua** en $x = a$,

$$f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x < a \\ v(x) & \text{si } x \geq a \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{si } x < a \\ v'(x) & \text{si } x > a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{f'_-(a) =} \lim\limits_{x\to a^-} u'(x) = \boxed{u'(a)} \\ \boxed{f'_+(a) =} \lim\limits_{x\to a^+} u'(x) = \boxed{v'(a)} \end{cases}$$

Obsérvese que no podemos escribir la igualdad en $f'(x)$ en primera instancia, hasta que no comprobemos si coinciden las derivadas laterales. Debemos insistir en que, previamente, habría que comprobar la continuidad.

$$f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{si } x < a \\ v'(x) & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

EJEMPLO 9.219

Deriva la función $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

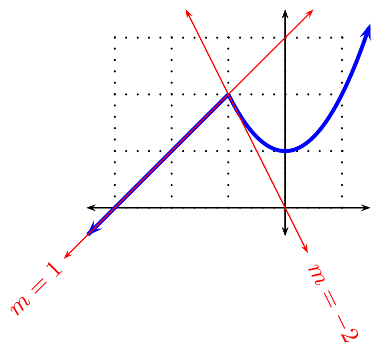
Solución:

En principio, $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } x > -1 \end{cases}$; veamos si podemos añadir la igualdad:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet\ f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = (-1)^2 + 1 = 2 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -1+3 = 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet\ f'_-(-1) = 1 \\ \bullet\ f'_+(-1) = 2(-1) = -2 \end{array} \right\} \Longrightarrow f \text{ no es derivable en } x = -1$$

No podemos, por tanto, añadir la igualdad a $f'(x)$.



□

EJEMPLO 9.220

Deriva la función $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } x\leq 1\\ x^2-4x+3 & \text{si } x>1\end{cases}$

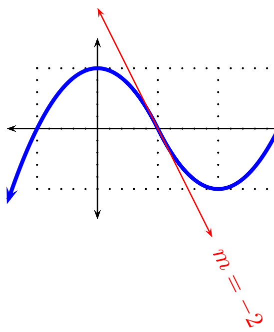
Solución:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } x<1\\ 2x-4 & \text{si } x>1\end{cases}$$; veamos si podemos añadir la igualdad:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1-1^1=0\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1^2-4\cdot 1+3=0\end{array}\right\}\Longrightarrow f \text{ continua en } x=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f'_-(1)=-2\cdot 1=-2\\ \bullet\ f'_+(1)=2\cdot 1-4=-2\end{array}\right\}\Longrightarrow f \text{ es derivable en } x=-1$$

Podemos añadir la igualdad: $f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } x\leq 1\\ 2x-4 & \text{si } x>1\end{cases}$



$\square$

EJEMPLO 9.221

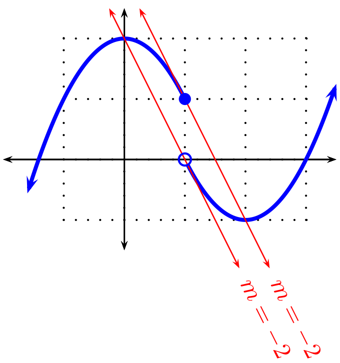
Deriva la función $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución:

$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$; veamos si podemos añadir la igualdad:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 - 1^1 = 1 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ no es continua y, por tanto no es derivable en } x = 1$$

No podemos añadir la igualdad a f'



□

EJEMPLO 9.222

Calcula p y q para que la función $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq \frac{\pi}{2} \\ px + q & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ sea derivable.

Solución:

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \\ p & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(\frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = p \cdot \dfrac{\pi}{2} + q \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f \text{ continua en } x = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{p \cdot \pi}{2} + q = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow q = -\dfrac{p \cdot \pi}{2} \end{array}$$

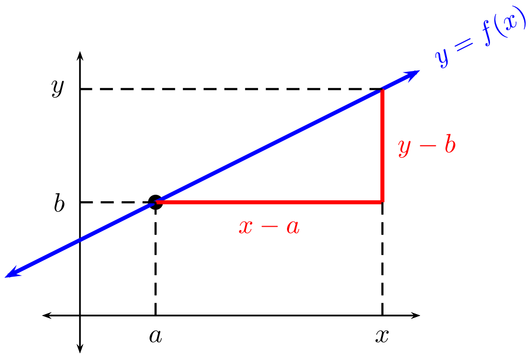
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f'_-(\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = -1 \\ \bullet\ f'_+(\frac{\pi}{2}) = p \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ es derivable en } x = 1 \Longleftrightarrow \boxed{p = -1}$$

Entonces, $\boxed{q =} - \dfrac{(-1) \cdot \pi}{2} = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

□

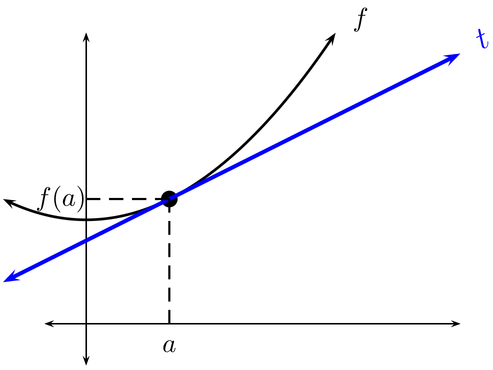
6 Cálculo de las rectas tangente y normal

La ecuación de una recta se encuentra si se conoce un punto (a, b) por el que pasa y su pendiente m:



$$\frac{y - b}{x - a} = m \Longrightarrow y = b + m(x - a)$$

Si la recta en cuestión es la **tangente** a la gráfica de f en $x = a$, entonces podemos especificar:

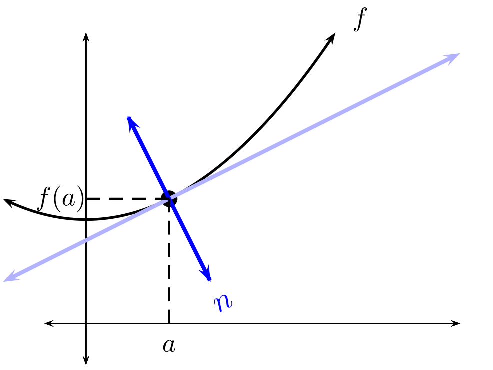


- $b = f(a)$
- $m = f'(a)$

Con lo que nos queda la ecuación:

$$\boxed{t: \ y = f(a) + f'(a)(x-a)}$$

Si la recta en cuestión es la **normal** (perpendicular) a la gráfica de f en $x = a$, sólo hay que, como se ve en geometría, cambiar la pendiente para hacerla perpendicular a t: $m = \dfrac{-1}{f'(a)}$



- $b = f(a)$
- $m = \frac{-1}{f'(a)}$

Con lo que nos queda la ecuación:

$$\boxed{n: \ y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)}$$

Ejemplo 9.223

Calcula las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ en $x = -1$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(-1) = (-1)^2 = 1 \\ \bullet\ f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(-1) = 2\cdot(-1) = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t: \ y = 1 + (-2)(x-(-1)) \\ n: \ y = 1 - \frac{1}{-2}(x-(-1)) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t: \ \boxed{y = 1 - 2(x+1)} \\ n: \ \boxed{y = 1 + \dfrac{1}{2}(x+1)} \end{array}\right.$$

□

7 Ejercicios propuestos

1. Utilizando la definición como límite, calcula las siguientes derivadas:

   a) $f'(3)$, siendo $f(x) = x^2 - x$ $\rightarrow 5$

   b) $f'(1)$, siendo $f(x) = \dfrac{2}{x}$ $\rightarrow -2$

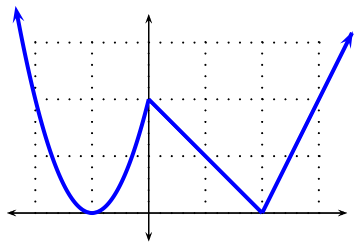
   c) $f'(1)$, siendo $f(x) = (2x+1)^2$ $\rightarrow 12$

   d) $f'(x)$, siendo $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ $\rightarrow \frac{-3}{(x-2)^2}$

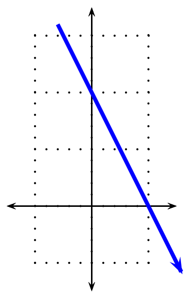
   e) $f'(x)$, siendo $f(x) = \sqrt{2x-3}$ $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$

   f) $f'(x)$, siendo $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ $\rightarrow \frac{1}{(x+1)^2}$

2. Observando la gráfica de la función $f(x)$, ¿cuáles son los valores de $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(3)$?¿Hay puntos en los que no es derivable?



3. La siguiente es la gráfica de $f'(x)$; ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal? ¿Dónde dirías que es creciente o decreciente?



4. Deriva y simplifica al máximo:

   a) $y = 3$ $\rightarrow 0$

   b) $y = a^5$ $\rightarrow 0$

   c) $y = ax + b$ $\rightarrow a$

   d) $y = x(x-1)$ $\rightarrow 2x - 1$

   e) $y = (x+1)(x-1)$ $\rightarrow 2x$

   f) $y = x^3 - x^2 + 4x - 5$ $\rightarrow 3x^2 - 2x + 4$

   g) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\rightarrow 3ax^2 + 2bx + c$

   h) $y = (x+1)(x^2 - x + 3)$ $\rightarrow 3x^2 + 2$

   i) $y = x(x-1)^2$ $\rightarrow 3x^2 - 4x + 1$

   j) $y = a(x-1)^2$ $\rightarrow 2a(x-1)$

   k) $y = a(a-1)^2$ $\rightarrow 0$

   l) $y = \dfrac{1}{x^2}$ $\rightarrow \frac{-2}{x^3}$

   m) $y = -\dfrac{1}{x+1}$ $\rightarrow \frac{1}{(x+1)^2}$

   n) $y = \dfrac{x+1}{x}$ $\rightarrow \frac{-1}{x^2}$

   ñ) $y = \dfrac{x^2-3}{x^3+x}$ $\rightarrow \frac{-x^4+10x^2+3}{(x^3+x)^2}$

   o) $y = \dfrac{x(x+1)(x-1)}{3x^2-3}$ $\rightarrow \frac{1}{3}$

   p) $y = \sqrt{3x-2}$ $\rightarrow \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

   q) $y = \sqrt{x^2+1}$ $\rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

   r) $y = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ $\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)^3}}$

   s) $y = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\rightarrow \frac{-1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

   t) $y = e^{4x}$ $\rightarrow 4e^{4x}$

   u) $y = 5^{2x}$ $\rightarrow 2\ln 5 \cdot 5^{2x}$

   v) $y = e^{3-x^2}$ $\rightarrow -2xe^{3-x^2}$

   w) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

   x) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\rightarrow \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

   y) $y = a^{x^2+x+1}$ $\rightarrow (2x+1)a^{x^2+x+1}\ln a$

   z) $y = \ln(x^2+1)$ $\rightarrow \frac{2x}{x^2+1}$

5. Deriva y simplifica al máximo:

a) $y = \ln\left(ax^3 - bx^2 + c\right)$ $\rightarrow \frac{3ax^2 - 2bx}{ax^3 - bx^2 + c}$

b) $y = \ln^5(3x)$ $\rightarrow \frac{5\ln^4 3x}{x}$

c) $y = x^5 \ln x$ $\rightarrow x^4(5\ln + 1)$

d) $y = x^2 \ln(2-x)$ $\rightarrow x\left(2\ln(2-x) - \frac{x}{2-x}\right)$

e) $y = \frac{\ln x}{x}$ $\rightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}$

f) $y = \log_3(1+x^2)$ $\rightarrow \frac{2x}{(1+x^2)\ln 3}$

g) $y = \log_a(3x^2+5)$ $\rightarrow \frac{6x}{(3x^2+5)\ln a}$

h) $y = x\ln x - x$ $\rightarrow \ln x$

i) $y = \ln\sqrt{1+x^2}$ $\rightarrow \frac{x}{1+x^2}$

j) $y = \ln\frac{x^2+1}{x^2-1}$ $\rightarrow \frac{-4x}{x^4-1}$

k) $y = \operatorname{sen} 2x$ $\rightarrow 2\cos 2x$

l) $y = \cos(2x+1)$ $\rightarrow -2\operatorname{sen}(2x+1)$

m) $y = \operatorname{tg}(x^2 - 2x + 1)$ $\rightarrow \frac{2x-2}{\cos^2(x^2-2x+1)}$

n) $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$ $\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

ñ) $y = \cos\frac{x}{a}$ $\rightarrow -\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{a}}{a}$

o) $y = \sqrt{\operatorname{sen} 3x}$ $\rightarrow \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\operatorname{sen} 3x}}$

p) $y = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}$ $\rightarrow \frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}$

q) $y = x\cos x$ $\rightarrow \cos x - x\operatorname{sen} x$

r) $y = \ln\cos x$ $\rightarrow -\operatorname{tg} x$

s) $y = \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x$ $\rightarrow \cos x\cos 2x - 2\operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x$

t) $y = e^x \operatorname{tg} x$ $\rightarrow e^x(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1)$

u) $y = \operatorname{arc\,sen} 2x$ $\rightarrow \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

v) $y = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}$ $\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

w) $y = \operatorname{arc\,cos}(x^2+1)$ $\rightarrow \frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}$

x) $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}$ $\rightarrow \frac{1}{1+x^2}$

y) $y = \left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^2$ $\rightarrow \frac{-4(1-\operatorname{sen} x)\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^3}$

z) $y = \ln\operatorname{tg} x$ $\rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}$

6. Deriva y simplifica al máximo:

a) $y = \sqrt[3]{2+5x^2}$ $\rightarrow \frac{10x}{3\sqrt[3]{(2+5x^2)^2}}$

b) $y = \cos^2 x^2$ $\rightarrow -2x\operatorname{sen} 2x^2$

c) $y = x^2 e^{(x^3)}$ $\rightarrow xe^{(x^3)}(2+3x^3)$

d) $y = -\ln\cos x$ $\rightarrow \operatorname{tg} x$

e) $y = \ln\ln x$ $\rightarrow \frac{1}{x\ln x}$

f) $y = \sqrt[5]{x^2}\sqrt{x}$ $\rightarrow \frac{9}{10\sqrt[10]{x}}$

g) $y = \operatorname{arc\,tg} e^x$ $\rightarrow \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

h) $y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}$ $\rightarrow \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

i) $y = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x^2}$ $\rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

j) $y = \ln\sqrt{\operatorname{sen} x}$ $\rightarrow \frac{\operatorname{ctg} x}{2}$

k) $y = \operatorname{arc\,tg}(2x+1)$ $\rightarrow \frac{-2}{1+(2x+1)^2}$

l) $y = \ln\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}}$ $\rightarrow \frac{1}{\cos 2x}$

m) $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ $\rightarrow \frac{-2x}{1+x^4}$

n) $y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $\rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

ñ) $y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ $\rightarrow \frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}$

o) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

p) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x)$ $\rightarrow 2\cos 2x\cos(\operatorname{sen} 2x)$

q) $y = \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{1+x^2}$ $\rightarrow \frac{-2}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}$

r) $y = \log\left(\frac{\log x}{x}\right)$ $\rightarrow \frac{1 - \ln 10\log x}{x\log x\ln^2 10}$

s) $y = x^2\cos 3x$ $\rightarrow 2x\cos 3x - 3x^2\operatorname{sen} 3x$

t) $y = \sqrt{\ln\operatorname{sen} 2x}$ $\rightarrow \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sqrt{\ln\operatorname{sen} 2x}}$

u) $y = xe^x\operatorname{sen} x$ $\rightarrow e^x(x\cos x + (x+1)\operatorname{sen} x)$

v) $y = x^{x+1}$ $\rightarrow x^{x+1}\left[\ln x + \frac{x+1}{x}\right]$

w) $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $\rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]$

x) $y = \sqrt[x]{x}$ $\rightarrow \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}[1-\ln x]$

y) $y = (\ln x)^{\ln x}$ $\rightarrow \frac{(\ln x)^{\ln x}[\ln(\ln x)+1]}{x}$

z) $y = x^{(e^x)}$ $\rightarrow x^{(e^x)}\left[e^x\ln x + \frac{e^x}{x}\right]$

7. Dadas la funciones $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$ y $g(x) = e^{2x}$ halla, en cada caso, sus primeras, segunda, tercera y cuarta derivadas. ¿Cuáles serán las derivadas n-ésimas?

8. Halla la derivada de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - 1 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

9. Halla los puntos en los que la pendiente de la tangente a las siguientes funciones es 2:

$\rightarrow$ a) $x = 2$ b) $x = -1;\ -3$ c) $x = -2$ d) $x = \frac{3}{4}$.

a) $y = x^2 - 2x$ b) $y = \dfrac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$ d) $y = \ln(4x - 1)$

10. ¿En qué punto de $y = \ln x$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1)$?

$\rightarrow x = e - 1$

11. Prueba que existe un punto de la curva $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x-1}{x+1}$ en el que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. ¿Cuáles son sus coordenadas? $\rightarrow \left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$

12. Dada $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, halla a y b para que la tangente a f en $x = -2$ sea $y = 2x - 3$.

$\rightarrow a = 26,\ b = 13$

13. Dada $f(x) = ax^3 + bx$, calcula a y b para que f pase por el punto $(1, 3)$ y en ese punto la tangente se a paralela a la recta $y = 4x + 1$. $\rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2}$

14. Calcula a y b para que la curva $y = x^3 + ax + 1$ y la recta $y = 4x + b$ sean tangentes en el punto de abscisa 2. $\rightarrow a = -8,\ b = -15$

15. La función $f(x) = \dfrac{ax^2 + 1}{a + x}$ tiene derivada nula en $x = 1$. Calcula a. $a = \frac{1}{2}$

16. Averigua si la función $f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ es continua y derivable en $x = 2$. $\rightarrow$ Sí

17. Halla, en cada caso, los valores de m y n para que las siguientes funciones sean derivables en $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$ a) $m = 8,\ n = 3$ b) $m = 1,\ n = 2$ c) $m = 3,\ n = -1$ d) $m = 2,\ n = 1$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 2 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} mx^2 + nx - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2nx - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \leq 0 \\ mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$ d) $i(x) = \begin{cases} mx^2 + 3x & \text{si } x < -2 \\ x^2 - nx - 4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

18. Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones:

$\rightarrow$ a) Cont. en $\mathbb{R}$, Der. en $\mathbb{R} - \{2\}$,
b) Cont. en $\mathbb{R}$, Der. en $\mathbb{R} - \{3\}$,
c) Cont. y Der. en $\mathbb{R}$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} e^x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

19. Dada $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a su gráfica en $x = -2$.

$\rightarrow t:\ y = \frac{x}{4} + \frac{3}{4};\quad n:\ y = -4x - \frac{31}{4}$

20. Halla la ecuación de la tangente y normal a la curva en las abcisas indicadas.

a) $y = x^2 + 2x - 1$ en $x = 1$. $\rightarrow t:\ y = 4x - 2$

b) $y = \dfrac{x}{1+x}$ en $x = 2$. $\rightarrow t:\ y = \frac{x+4}{9}$

c) $y = xe^x$ en $x = 1$. $\rightarrow t:\ y = 2ex - e$

d) $y = x^2 + 4 + e^x$ en $x = 0$. $\rightarrow t:\ y = x + 5$

e) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en $x = 1$. $\rightarrow t:\ y = \frac{3-x}{4}$

21. Halla la tangente y la normal a la curva $y = x^x$ en el punto de ordenada 1. $\rightarrow t:\ y = x;\ n:\ y = 2 - x$

MATEM – I

TEMA 10

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

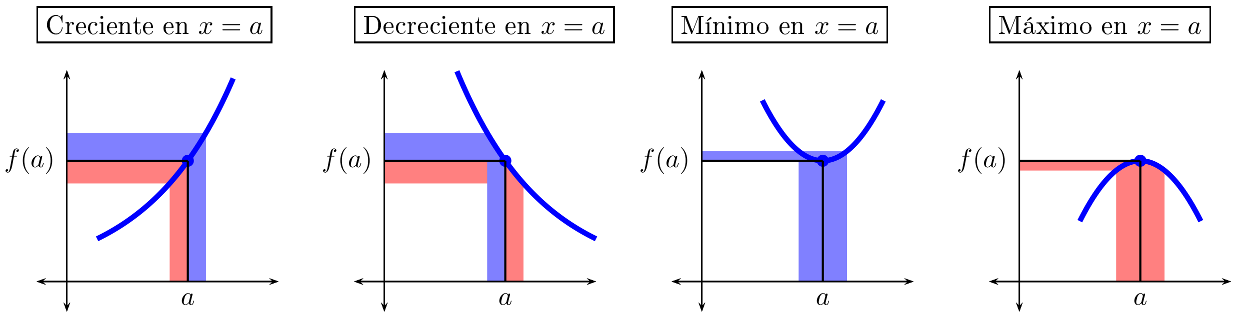
Índice

Dos son las aplicaciones más inmediatas de las derivadas desde el punto de vista matemático: Optimización (cálculo del máximo y el mínimo) y Representación gráfica de funciones. Estas aplicaciones, a su vez, tienen multitud de consecuencias en muchas otras disciplinas, científicas y no científicas.

1 Monotonía y extremos relativos

Definición 24.

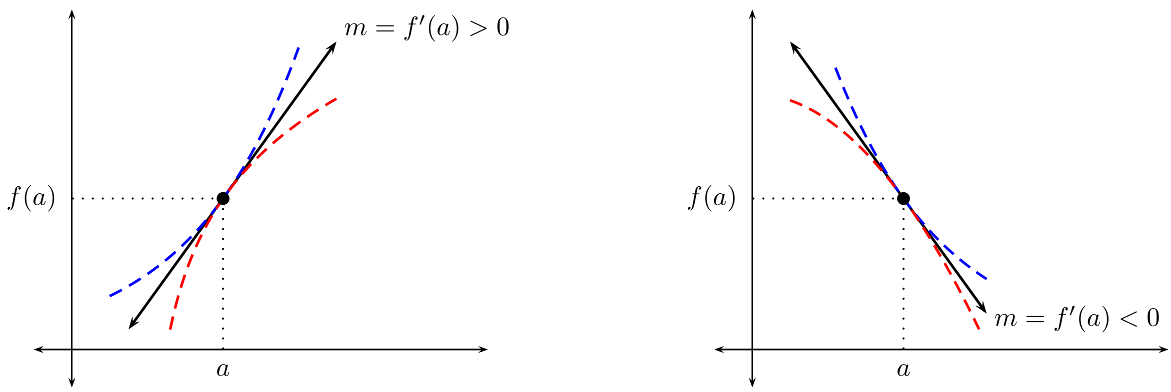
- *f es creciente en $x = a$ si, en algún entorno de a, las imágenes a la izquierda de quedan por debajo de la de a y las de la derecha por encima.*
- *f es creciente en $x = a$ si, en algún entorno de a, las imágenes a la izquierda de quedan por encima de la de a y las de la derecha por debajo.*
- *f tiene un mínimo relativo en $x = a$ si, en algún entorno de a, la función es decreciente en los puntos de su izquierda y creciente en los de su derecha. (Todas las imágenes quedan por encima de la de a)*
- *f tiene un máximo relativo en $x = a$ si, en algún entorno de a, la función es creciente en los puntos de su izquierda y decreciente en los de su derecha. (Todas las imágenes quedan por debajo de la de a)*



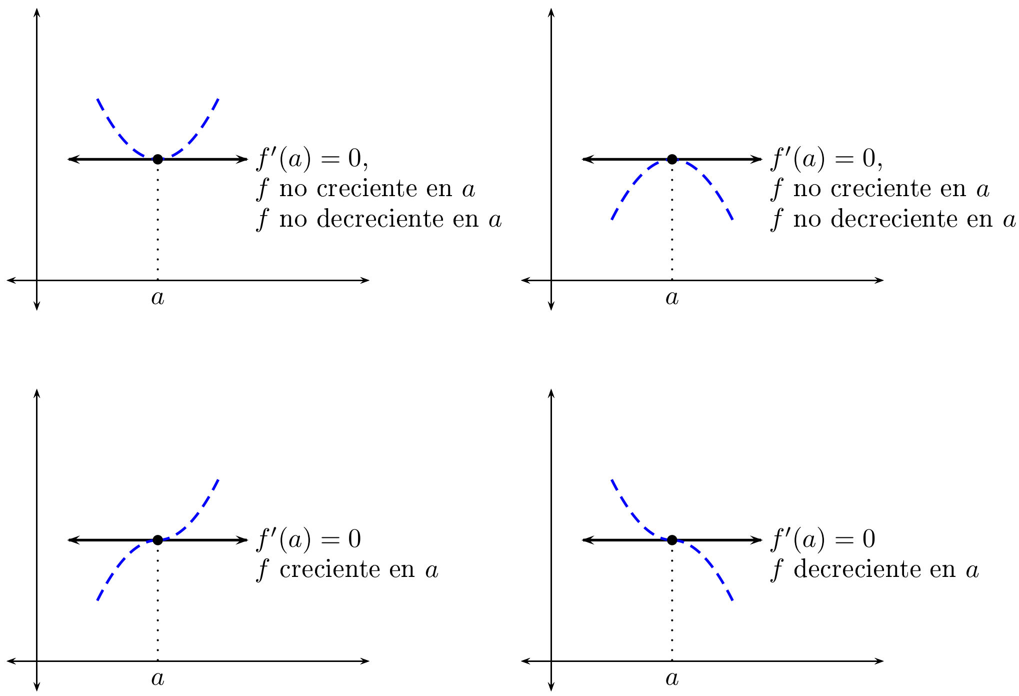
Desde el punto de vista gráfico, las siguientes proposiciones son inmediatas:

$$\boxed{\text{Si } f'(a) > 0 \Longrightarrow f \text{ es creciente en } x = a}$$

$$\boxed{\text{Si } f'(a) < 0 \Longrightarrow f \text{ es decreciente en } x = a}$$



Sin embargo, si $\boxed{f'(a) = 0}$ (derivada horizontal) no podemos extraer ninguna conclusión en cuanto a su monotonía. Puede ocurrir cualquier posibilidad:



Para caracterizar los extremos relativos, por tanto, es necesario añadir otra condición a la de derivada nula: que antes de $x = a$ sea decreciente y después creciente (Mínimo) o antes creciente y después decreciente (Máximo). Si no cambia de monotonía en un entorno de $x = a$, ésta se mantiene también en a.

De una manera esquemática, estudiando el signo de la derivada, ocurrirá:

		a	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	MÍN	$\nearrow$

		a	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	MÁX	$\searrow$

		a	
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

		a	
f'	$-$	0	$-$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Observación 32. *Antes de empezar el estudio del signo, habrá que calcular el dominio, pues en determinados casos el dominio de la derivada amplía el de la función de la que deriva. Téngase en cuenta que, por ejemplo, para* $y = \ln x \longrightarrow D(y) = (0, \infty)$, $y' = \dfrac{1}{x} \longrightarrow D(y') = \mathbb{R} - \{0\}$. *No podemos decir que* y *es, por ejemplo, decreciente en* $x = -1$ *porque no tiene imagen; sin embargo, aplicando el cálculo de derivadas, es* $y'(-1) = \frac{1}{-1} = -1$ *(absurdo).*

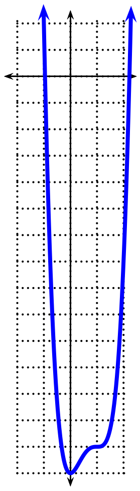
Ejemplo 10.224

Calcula la monotonía y extremos relativos de $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 15$

Solución:

$D(y) = \mathbb{R}$; Signo de $y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x$:

$$12x^3 - 24x^2 + 12x = 0 \Longrightarrow 12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ 12x = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0} \\ \bullet\ x^2 - 2x + 1 = 0 \Longrightarrow (x-1)^2 = 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow x - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 1} \end{cases}$$



		0		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$\searrow$	MÍN	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Es decir, $\boxed{\begin{cases} f \text{ decreciente en } (-\infty, 0) \\ f \text{ creciente en } (0, \infty) \\ \text{MÍN} = (0, f(0)) = (0, -15) \end{cases}}$

□

Ejemplo 10.225

Calcula la monotonía y extremos relativos de $y = \dfrac{2x}{x-1}$

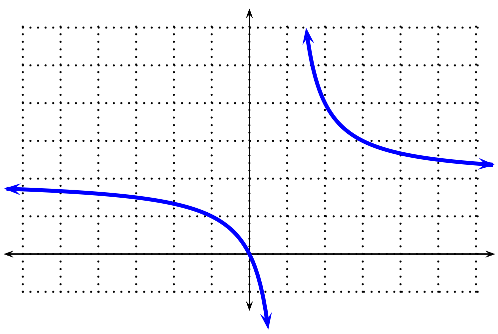
Solución:

$D(y) = \mathbb{R} - \{1\}$; Signo de $y' = \dfrac{2(x-1) - 2x \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x - 2 - 2x}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$:

$$\begin{cases} -2 = 0 \text{ (No)} \\ (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} \end{cases} \longrightarrow$$

		1	
y'	$-$	$\nexists$	$-$
y	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

$\boxed{f \text{ decreciente en } \mathbb{R} - \{1\}}$



□

Ejemplo 10.226

Calcula la monotonía y extremos relativos de $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

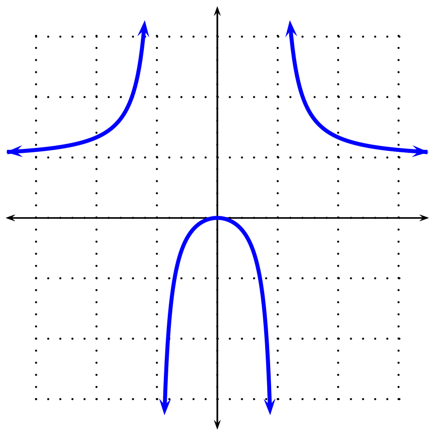
Solución:

$D(y) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; Signo de $y' = \dfrac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$:

$$\begin{cases} -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \\ (x^2-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1} \end{cases} \longrightarrow$$

		-1		0		1	
y'	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
y	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	MÁX	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

$$\boxed{\begin{cases} f \text{ creciente en } (-\infty, 0) - \{-1\} \\ f \text{ decreciente en } (0, \infty) - \{1\} \\ \text{MÁX} = (0, f(0)) = (0, 0) \end{cases}}$$



$\square$

Ejemplo 10.227

Calcula la monotonía y extremos relativos de $y = \dfrac{\ln x}{x}$

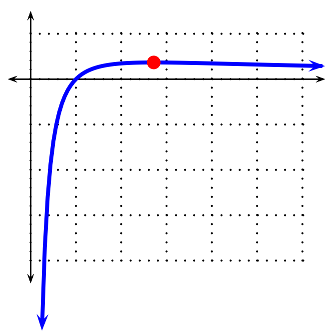
Solución:

$D(y) = (0, \infty)$; Signo de $y' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$:

$$\begin{cases} 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \boxed{x = e} \\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (No, } 0 \notin \text{D(y))} \end{cases} \longrightarrow$$

	0		e	
y'	$\nexists$	$+$	0	$-$
y	$\nexists$	$\nearrow$	MÁX	$\searrow$

$$\boxed{\begin{cases} f \text{ creciente en } (0, e) \\ f \text{ decreciente en } (e, \infty) \\ \text{MÁX } (e, f(e)) = (e, \frac{1}{e}) \end{cases}}$$



$\square$

Ejemplo 10.228

Calcula a y b para que la función $f(x) = x^3 - ax^2 + b$ tenga un extremo relativo en el punto $(2,4)$

Solución:

Aunque parece que nos dan sólo una condición, en realidad son dos:

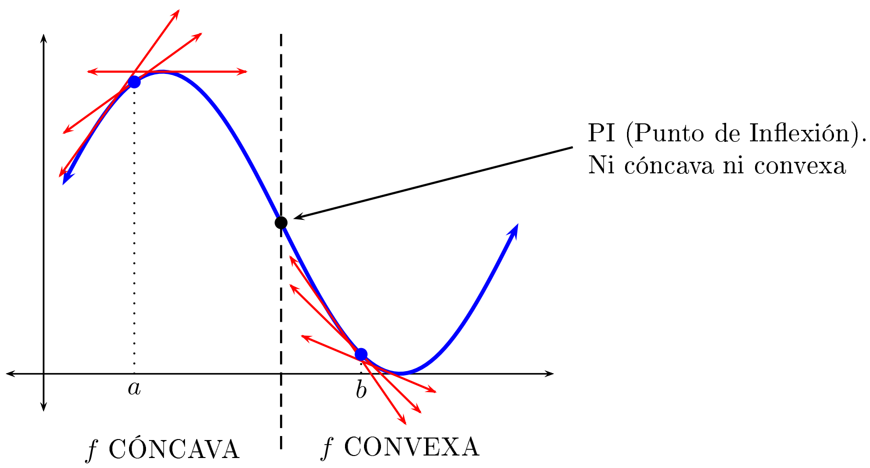
- f pasa por $(2,4) \Longrightarrow f(2) = 4 \Longrightarrow (2)^3 - a(2)^2 + b = 4 \Longrightarrow 8 - 4a + b = 4 \Longrightarrow b = 4a - 4$
- f tiene en $x = 2$ un extremo relativo (tangente horizontal)$\Longrightarrow f'(2) = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = 3x^2 - 2ax \\ f'(2) = 3(2)^2 - 2a(2) = 12 - 4a = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 3} \Longrightarrow \boxed{b =} \; 4(3) - 4 = \boxed{8} \end{cases}$$

□

2 Curvatura y puntos de inflexión

La curvatura de una función en un punto puede ser de dos tipos: **cóncava** (si la gráfica en un entorno del punto queda por debajo de la recta tangente) o **convexa** (si, por el contrario, queda por encima). El problema es que la anterior definición no está consensuada, y se encuentra muy a menudo en la literatura matemática esta definición intercambiada. En cualquiera de ellas, un **punto de inflexión** es un punto de cambio de curvatura (en el que la función no es ni cóncava ni convexa). Según la que seguiremos, entonces,



De una forma totalmente análoga a f' con la monotonía y extremos, es f'' la que nos informa de la curvatura y los puntos de inflexión:

$$\boxed{\text{Si } f''(a) < 0 \ (-) \Longrightarrow f \text{ es cóncava en } x = a \longrightarrow \frown \quad \text{(Triste)}}$$

$$\boxed{\text{Si } f''(a) > 0 \ (+) \Longrightarrow f \text{ es convexa en } x = a \longrightarrow \smile \quad \text{(Contento)}}$$

En efecto (ver gráfica anterior),

- Si $f''(a) = (f')'(a) < 0 \Longrightarrow f'$ es decreciente en $x = a$;
  es decir, al pasar por a las pendientes van de más a menos (situación cóncava).

- Si $f''(b) = (f')'(b) > 0 \Longrightarrow f'$ es creciente en $x = b$;
  es decir, al pasar por a las pendientes van de menos a más (situación convexa).

Igual que pasaba con la primera derivada, no podemos asegurar nada sobre la curvatura en $x = a$ si $f''(a) = 0$: puede que en sea cóncava, convexa o tenga un punto de inflexión. Tendremos que estudiar cómo es el signo en un entorno de a para decidir qué tipo de curvatura tiene.

		a	
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	PI	$\smile$

		a	
f''	$+$	0	$-$
f	$\smile$	PI	$\frown$

		a	
f''	$+$	0	$+$
f	$\smile$	$\smile$	$\smile$

		a	
f''	$-$	0	$-$
f	$\frown$	$\frown$	$\frown$

EJEMPLO 10.229

Estudia la curvatura y puntos de inflexión de $y = x^4 - 6x^2$

Solución:

$D(y) = \mathbb{R}$;

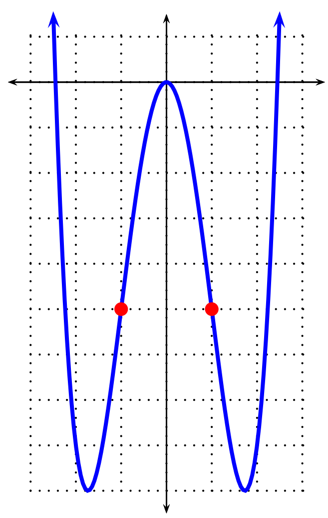
$y' = 4x^3 - 12x$

Signo de $y'' = 12x^2 - 12$:

$12x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1 \longrightarrow$

		-1		1	
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\smile$	PI	$\frown$	PI	$\smile$

$$\boxed{\begin{cases} f \text{ convexa en } (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ f \text{ cóncava en } (-1, 1) \\ \text{PI } (-1, f(-1)) = (-1, -5) \\ \text{PI } (1, f(1)) = (1, -5) \end{cases}}$$



$\square$

Ejemplo 10.230

Estudia la curvatura y puntos de inflexión de $y = \dfrac{x}{x^2-4}$

Solución:

$D(y) = \mathbb{R} - \{\pm 2\};$

$$y' = \frac{1\cdot(x^2-4) - x\cdot(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

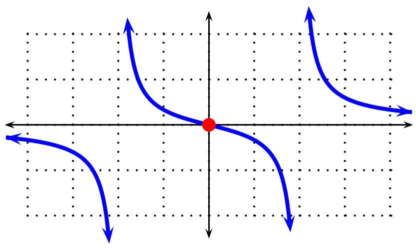
$$\text{Signo de } y'' = \frac{-2x\cdot(x^2-4)^2 - (-x^2-4)\cdot 2(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{(x^2-4)}[-2x(x^2-4) - 4x(-x^2-4)]}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x^3+8x+16x+4x^3}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}:$$

$$\begin{cases} 2x^3+24x=0 \Rightarrow 2x(x^2+12)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ x^2+12=0 \text{ (No)} \end{cases} \\ (x^2-4)^3=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2} \end{cases}$$

		-2		0		2	
y''	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
y	$\frown$	$\nexists$	$\smile$	PI	$\frown$	$\nexists$	$\smile$

$$\begin{cases} f \text{ cóncava en } (-\infty,-2)\cup(0,2) \\ f \text{ convexa en } (-2,0)\cup(2,\infty) \\ \text{PI } (0,f(0)) = (0,0) \end{cases}$$



$\square$

Ejemplo 10.231

Estudia la curvatura y puntos de inflexión de $y = xe^x$

Solución:

$D(y) = \mathbb{R}$;

$y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$

Signo de $y'' = e^x \cdot 1 + e^x \cdot (1+x) = e^x(1+1+x) = e^x(2+x)$:

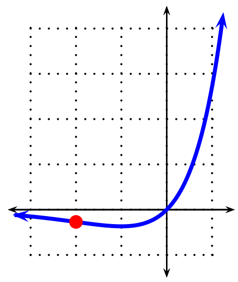
$$e^x(2+x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} e^x = 0 \text{ (No)} \\ 2+x=0 \Rightarrow \boxed{x=-2} \end{cases}$$

		-2	
y''	$-$	0	$+$
y	$\frown$	PI	$\smile$

$y''(-3) = e^{-3}(2-3) = -e^{-3} = -\frac{1}{e^3} < 0$

$y''(0) = e^0(2+0) = 2 > 0$

$$\boxed{\begin{cases} f \text{ cóncava en } (-\infty, -2) \\ f \text{ convexa en } (-2, \infty) \\ \text{PI } (-2, f(-2)) = (-2, -\frac{2}{e^2}) \end{cases}}$$



$\square$

EJEMPLO 10.232

Calcula la curvatura y puntos de inflexión de $y = \dfrac{\ln x}{x}$

Solución:

$D(y) = (0, \infty);$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\text{Signo de } y'' = \frac{-\frac{1}{\cancel{x}}\cdot x^{\cancel{2}} - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4} =$$

$$= \frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4} = \frac{\cancel{x}(-1-2+2\ln x)}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-3+2\ln x}{x^3}:$$

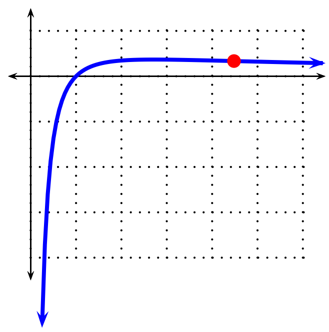
$$\begin{cases} -3+2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x = e^{\frac{3}{2}}} \\ x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (No)} \end{cases}$$

	0		$e^{\frac{3}{2}}$	
y''	$\nexists$	$-$	0	$+$
y	$\nexists$	$\frown$	PI	$\smile$

$$y''(1) = \frac{-3+2\ln 1}{1^3} = \frac{-3+2\cdot 0}{1} = -3 < 0$$

$$y''(e^2) = \frac{-3+2\ln e^2}{(e^2)^3} = \frac{-3+2\cdot 2}{e^6} = \frac{1}{e^6} > 0$$

$$\boxed{\begin{cases} f \text{ cóncava en } (0, e^{\frac{3}{2}}) \\ f \text{ convexa en } (e^{\frac{3}{2}}, \infty) \\ \text{PI } (e^{\frac{3}{2}}, f(e^{\frac{3}{2}})) = (e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}) \end{cases}}$$



□

21 Otra caracterización de los extremos relativos

Podemos también aprovechar la segunda derivada para caracterizar los extremos relativos:

- Un máximo es un punto de la gráfica con tangente horizontal y curvatura cóncava. Entonces,

$$\left.\begin{array}{l} f'(a)=0 \\ f''(a)<0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un máximo en } x=a$$

- Un mínimo es un punto de la gráfica con tangente horizontal y curvatura convexa. Entonces,

$$\left.\begin{array}{l} f'(a)=0 \\ f''(a)>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un mínimo en } x=a$$

EJEMPLO 10.233

Calcula los extremos relativos de $y = x^3 - 3x^2 + 4$

Solución:

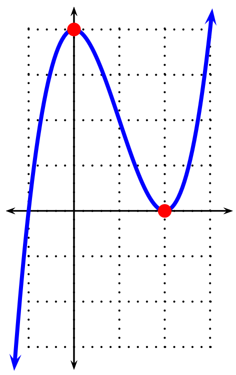
$D(y) = \mathbb{R}$;

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2} \end{array}\right.$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$\left.\begin{array}{l} y'(0)=0 \\ y''(0) = 6(0)-6 = -6 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{tiene un máximo en} \\ x=0\end{array}} \qquad \text{MÁX } (0, f(0)) = \boxed{(0,4)}$$

$$\left.\begin{array}{l} y'(2)=0 \\ y''(2) = 6(2)-6 = 6 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{tiene un mínimo en} \\ x=2\end{array}} \qquad \text{MÍN } (2, f(2)) = \boxed{(2,0)}$$



□

EJEMPLO 10.234

Calcula una función polinómica de tercer grado que tenga un extremo en el punto $P(0,4)$ y un punto de inflexión en $Q(2,0)$

Solución:

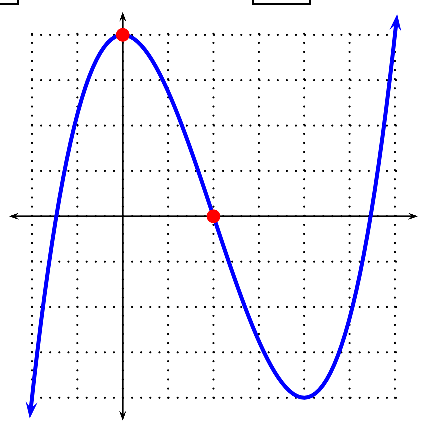
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (polinómica de tercer grado).

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

- $P(0,4)$ extremo de $f \Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ f(0) = 4 \Longrightarrow a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 4 \Longrightarrow \boxed{d = 4} \\ \bullet\ f'(0) = 0 \Longrightarrow 3a(0)^2 + 2b(0) + c = 0 \Longrightarrow \boxed{c = 0} \end{cases}$
- $Q(2,0)$ PI de $f \Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ f(2) = 0 \Longrightarrow a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = 4 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0 \Longrightarrow 8a + 4b + 2(0) + 4 = 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow 8a + 4b = -4 \\ \bullet\ f''(2) = 0 \Longrightarrow 6a(2) + 2b = 0 \Longrightarrow 12a + 2b = 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow 6a + b = 0 \Longrightarrow b = -6a \end{cases}$

$8a + 4(-6a) = -4 \Longrightarrow -16a = -4 \Longrightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}} \Longrightarrow \boxed{b =} - 6(\frac{1}{4}) = \boxed{-\frac{3}{2}}$

Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{3x^2}{2} + 4 \longrightarrow$



□

3 Problemas de optimización

Encontrar el máximo o mínimo de una función, y en qué valores de sus variables se alcanzan, nos suele conducir a la mejor solución, es decir, a la solución óptima. Ya hemos visto como, dada una función, encontrar dichos valores; en este apartado trataremos de aplicarlos a diferentes contextos.

En general, el proceso que seguiremos es como en el del siguiente ejemplo:

EJEMPLO 10.235

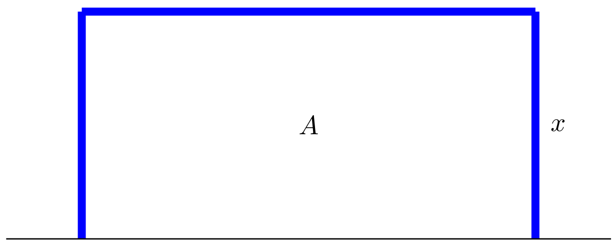
Se dispone de una barra de hierro de 10 metros para construir una portería, de manera que la portería tenga la máxima superficie interior posible.

a) ¿Qué longitud deben tener los postes y el larguero?

b) ¿Qué superficie máxima interior tiene la portería?

Solución:

1. Hacer una gráfica, si es posible, e identificar las variables que intervienen:



2. Identificar el tipo de optimización (máximo o mínimo), la función a la que se refiere y la relación (si hay más de una) que hay entre las variables:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{MÁX } A = x \cdot y \\ \\ \text{s.a. } 2x + y = 10 \end{array}}$$

- Es el área A la que hay que hacer máxima.
- los postes y el larguero se hacen a partir de una barra de 10 m.

3. Redefinir la función con una sola variable, utilizando la ecuación de ligadura:

$$y = 10 - 2x \Longrightarrow \boxed{A =}\ x(10 - 2x) = \boxed{10x - 2x^2}$$

4. Encontrar el valor de la variable para la cual se alcanza el óptimo (en este caso, el máximo). Como la función es sencilla, vamos a utilizar el criterio de la segunda derivada:

$$\boxed{\begin{array}{l} \blacksquare\ A' = 10 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 2{,}5 \\ \\ \blacksquare\ A''(x) = -4 \Longrightarrow A''(2{,}5) = -4 \end{array}} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'(2{,}5) = 0 \\ \\ A''(2{,}5) = -4 < 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} A \text{ tiene un máximo} \\ \text{en } x = 2{,}5 \end{array}}$$

5. Contrastar la(s) solución(es) obtenida(s) y responder.

   a) Longitudes: $\boxed{x = 2{,}5 \text{ cm}} \Longrightarrow \boxed{y =}\ 10 - 2(2{,}5) = \boxed{5 \text{ cm}}$

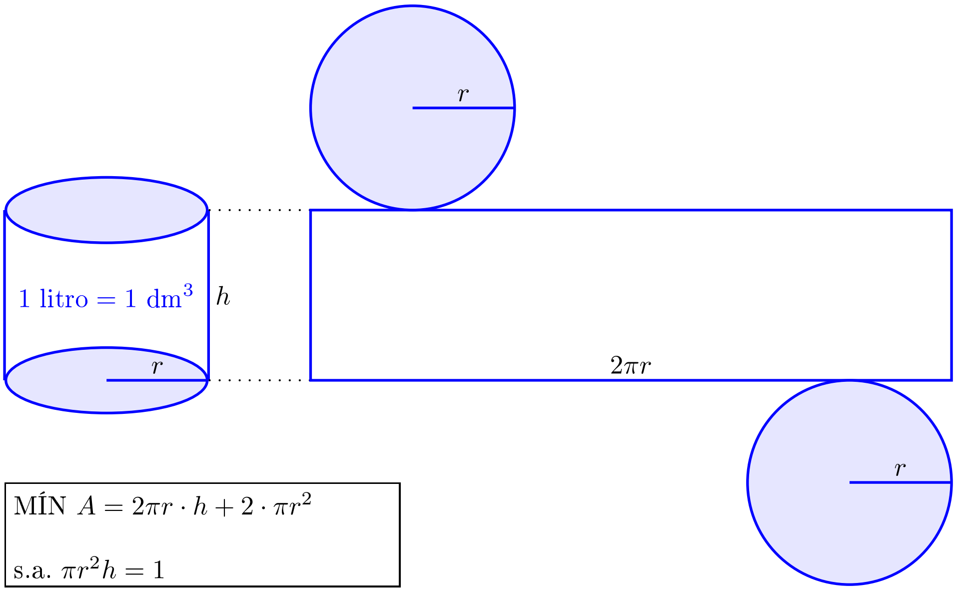
   b) Superficie máxima: $\boxed{A(2{,}5) =}\ 2{,}5 \cdot 5 = \boxed{12{,}5 \text{ m}^2}$

$\square$

Ejemplo 10.236

Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?

Solución:



$$\boxed{\begin{array}{l} \text{MÍN } A = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2 \\ \text{s.a. } \pi r^2 h = 1 \end{array}}$$

Claramente, es mejor despejar en la ecuación de ligadura $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$. Así,

$$A = 2\cancel{\pi r} \cdot \frac{1}{\cancel{\pi r^2}} + 2 \cdot \pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$$

$$A' = \frac{-2}{r^2} + 4\pi r = \frac{-2 + 4\pi r^3}{r^2} = 0 \Longrightarrow -2 + 4\pi r^3 = 0 \Longrightarrow r^3 = \frac{2}{4\pi} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

Signo de A' alrededor de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$: $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \approx 0{,}54192607013\right)$

		$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$	
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	MÍN	$\nearrow$

$$y'(0{,}5) = \frac{-2 + 4\pi(0{,}5)^3}{(0{,}5)^2} < 0$$

$$y'(0{,}6) = \frac{-2 + 4\pi(0{,}6)^3}{(0{,}6)^2} > 0$$

$$\boxed{\text{A tiene un mínimo en } r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}}$$

$$\boxed{h =} \frac{1}{\pi\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2} = \frac{1}{\dfrac{\pi}{\sqrt[3]{4\pi^2}}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{\pi^3}} = \boxed{\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}}$$

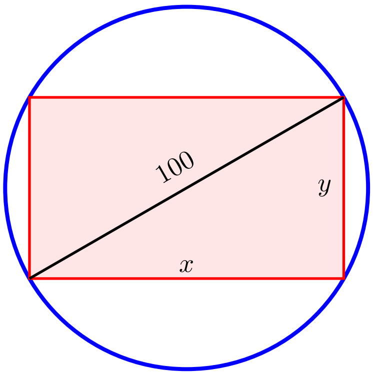
$\square$

EJEMPLO 10.237

Bajo la Redonda (Plaza Circular), que tiene 100 m de diámetro, se quiere construir un aparcamiento rectangular y con, lógicamente, la mayor capacidad posible. ¿Qué dimensiones debe tener?

Solución:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{MÁX } A = x \cdot y \\ \text{s.a. } x^2 + y^2 = 100^2\end{array}}$$



Despejamos $y = \sqrt{10000 - x^2}$. Así,

$$A = x \cdot \sqrt{10000 - x^2} = \sqrt{x^2 \cdot (10000 - x^2)} = \sqrt{10000x^2 - x^4}$$

$$A' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{10000x^2 - x^4}} \cdot (\cancel{2}0000x - \overset{2}{\cancel{4}}x^3) = \frac{10000x - 2x^3}{\sqrt{10000x^2 - x^4}} = 0 \Longrightarrow 10000x - 2x^3 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x(10000 - 2x^2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (No)} \\ 10000 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} x = \sqrt{5000} \\ x = -\sqrt{5000} \text{ (No)} \end{cases} \end{cases}$$

Signo de A' alrededor de $\sqrt{5000}$: $\quad\left(\sqrt{5000} \approx 70{,}7106781187\right)$

		$\sqrt{5000}$	
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	MÁX	$\searrow$

$$y'(70) = \frac{10000 \cdot 70 - 2 \cdot 70^3}{\sqrt{10000 \cdot 70^2 - 70^4}} = \frac{14000}{\sqrt{24990000}} > 0$$

$$y'(71) = \frac{10000 \cdot 71 - 2 \cdot 71^3}{\sqrt{10000 \cdot 71^2 - 71^4}} = \frac{-5822}{\sqrt{24998319}} < 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{A tiene un máximo} \\ \text{en } x = \sqrt{5000}\end{array}}$$

$$\boxed{y =} \sqrt{10000 - (\sqrt{5000})^2} = \boxed{\sqrt{50000}}$$

Es decir, que la solución más provechosa es hacer un aparcamiento cuadrado de lado $\sqrt{5000}$. La máxima superficie que puede ocuparse es $A(5000) = \sqrt{5000} \cdot \sqrt{5000} = 5000 \text{ m}^2$ $\square$

EJEMPLO 10.238

Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 675 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcula:

a) La producción actual de la huerta.

b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.

c) La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.

d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para qué la producción sea máxima?

e) ¿Cuántos frutos producirá como máximo?

Solución:

a) $P(25) = 25 \cdot 675 = 16875$ frutos.

b) $675 - 15x$ frutos.

c) $P(x) = (25 + x) \cdot (675 - 15x)$ frutos.

d) MÁX $P = 16875 - 375x + 675x - 15x^2 = 16875 + 300x - 15x^2$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \blacksquare\ P' = 300 - 30x = 0 \Longrightarrow x = 10 \\ \blacksquare\ P'' = -30 \Longrightarrow P''(10) = -30 < 0 \end{array}} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P'(10) = 0 \\ P''(10) = -30 < 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{f \text{ tiene un máximo en } x = 10}$$

El número total de árboles debe ser $25 + 10 = \boxed{35 \text{ árboles}}$

e) $P(10) = (25 + 10) \cdot (675 - 15 \cdot 10) = 35 \cdot 525 = \boxed{18375 \text{ frutos.}}$

□

4 Regla de L'Hôpital

Es una regla de mucha utilidad para el cálculo de límites y, por ende, para el cálculo de asíntotas, continuidad, derivabilidad, etc., ampliándolo a funciones con las que, hasta ahora, no podíamos trabajar. Se anuncia así:

$$\boxed{\lim_{x \to a \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\frac{0}{0}\right] \\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \end{array} \right\} = \lim_{x \to a \pm \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Ejemplo 10.239

- $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'H}}{\overset{\downarrow}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{2x}{2x-3}=\frac{4}{1}=4$
- $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{2x^3-8x^2+4x+6}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'H}}{\overset{\downarrow}{=}}\lim_{x\to 3}\frac{6x^2-16x+4}{2x}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'H}}{\overset{\downarrow}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'H}}{\overset{\downarrow}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'H}}{\overset{\downarrow}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2}=\frac{-1}{2}$
- $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{\text{L'H}}{\overset{\downarrow}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\frac{\infty}{1}=\infty$
- $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{\text{L'H}}{\overset{\downarrow}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$

Observación 33. *Hay que ser cuidadoso con las condiciones de aplicación, cualquier descuido conduciría a cálculos de límites erróneos: sabemos, por ejemplo, que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+5}{x^2}=\frac{5}{0^+}=\infty$$

Sin embargo, si aplicamos (incorrectamente) la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+5}{x^2}\overset{L'H}{\overset{\downarrow}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\cancelto{3}{6}\cancel{x}}{\cancel{2}\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}3=3\ \textit{(falso)}$$

5 Representación gráfica de funciones

El estudio de la monomonía y la curvatura añaden nueva información a la que ya sabíamos obtener con el cálculo del dominio, asíntotas, corte con los ejes, etcétera, completando un conjunto de pistas que nos permitirán esbozar la gráfica de muchas funciones.

Ejemplo 10.240

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, calcula: a) dominio y puntos de corte con los ejes, b) asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas), c) intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. d) Haz una representación gráfica aproximada.

Solución:

a) $D(f) = R - \{2\}$; Cortes con $\begin{cases} \text{OX: } \dfrac{x^2}{x-2} = 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \longrightarrow \boxed{(0,0)} \\ \text{OY: } \longrightarrow (0, f(0)) = \boxed{(0,0)} \end{cases}$

b) A.V.: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{x-2} = \left[\dfrac{4}{0}\right] = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{4}{0^+} = \infty \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{x = 2}$

A.H.: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = \infty$ (igual hacia $-\infty$) $\longrightarrow$ No tiene.

A.O.: $\left\{ \begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-2x} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x-2} - 1\cdot x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x-2} = 2 \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{y = x + 2}$

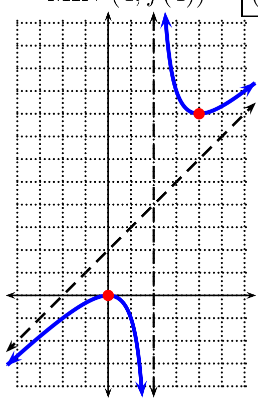
c) Signo de $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(x-2) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-4x-x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-4x}{(x-1)^2}$:

$\begin{cases} x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=4} \end{cases} \\ (x-1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1} \end{cases} \longrightarrow$

		0		1		4	
y'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	MÁX	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	MÍN	$\nearrow$

MÁX $(0, f(0)) = \boxed{(0,0)}$; MÍN $(4, f(4)) = \boxed{(4,8)}$

d)



□

Ejemplo 10.241

Dada la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, calcula: a) dominio y puntos de corte con los ejes, b) asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas), c) intervalos de monotonía y extremos relativos y d) intervalos de curvatura y puntos de inflexión. Haz una representación gráfica aproximada.

Solución:

a) $D(f) = R - \{0\}$; Cortes con $\begin{cases} \text{OX: } e^{\frac{1}{x}} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} = \ln 0 \notin \mathbb{R} \text{ (No tiene)} \\ \text{OY: } \longrightarrow (0, f(0)) = (0, \nexists) \text{ (No tiene)} \end{cases}$

b) A.V.: $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\left[\frac{1}{0}\right]} = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e{-\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e\infty = \infty \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{x = 0^+}$ (Por la derecha)

A.H.: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\pm\infty}} = e^0 = 1 \longrightarrow \boxed{y = 1}$ (Hacia ∞ y $-\infty$)

A.O.: No tiene (ya tiene A.H. hacia $\pm\infty$)

c) Signo de $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$: $\begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = \ln 0 \notin \mathbb{R} \text{ (No)} \\ x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \end{cases}$

		0	
y'	$-$	$\nexists$	$-$
y	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

Decreciente en todo su dominio. No tiene extremos relativos

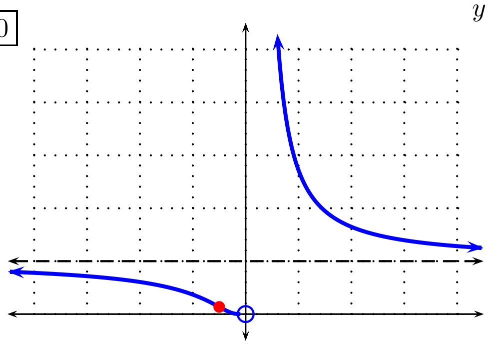
d) Signo de $f''(x) = \dfrac{-e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right) \cdot x^2 - \left(-e^{\frac{1}{x}}\right) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} + 2xe^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (1 + 2x)}{x^4}$:

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}(1+2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = \ln 0 \notin \mathbb{R} \text{ (No)} \\ 1 + 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-1}{2}} \end{cases} \longrightarrow \\ x^4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \end{cases}$$

		$\frac{-1}{2}$		0	
y''	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
y	$\frown$	PI	$\smile$	$\nexists$	$\smile$

PI $\left(\frac{-1}{2}, f\left(\frac{-1}{2}\right)\right) = \left(\frac{-1}{2}, e^{-2}\right)$

e)



$\square$

6 Ejercicios propuestos

Las soluciones de bastantes de los siguientes ejercicios las puedes obtener o completar representando gráficamente la función en la aplicación con el siguiente enlace: Desmos.

1. Halla la ecuación de la curva que pasa por los puntos $P(0,3)$ y $Q(-1,4)$, sabiendo que su derivada segunda es $y'' = 6x - 2$. $\rightarrow y = x^3 - x^2 - 3x + 3$

2. Halla una función polinómica de tercer grado que corte al eje de abcisas en $x = 4$, tenga un máximo en $(1,0)$ y pase por $(0,-8)$. $\rightarrow y = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 8$

3. Halla la función polinómica de grado 3 que pasa por los puntos $(-2,0)$, $(1,0)$ y tiene un máximo en $(-1,4)$ $\rightarrow y = x^3 - 3x + 2$

4. Halla a, b y c sabiendo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que su gráfica pasa por el punto $(1,1)$ $\rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 3x$

5. Encuentra una función polinómica de grado 3 sabiendo que tiene un punto de inflexión en $(0,1)$, un mínimo en $x = 1$ y la recta tangente a su gráfica en $x = 2$ tiene pendiente 1. $\rightarrow y = \frac{x^3}{9} - \frac{x}{3} + 1$

6. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de: $\rightarrow$ Desmos

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\rightarrow \nearrow: (-\infty, 0);\ \searrow: (0, \infty)$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\rightarrow \searrow: \mathbb{R} - \{0\}$

7. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica: $\rightarrow$ Desmos

   a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. $\rightarrow$ Desmos b) $f(x) = x^3 - 9x$ $\rightarrow$ Desmos

8. Determina la monotonía de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica. $\rightarrow$ Desmos

9. Estudia la monotonía y extremos y representa: $\rightarrow$ Desmos

   a) $y = (x-1)(x^2 - 4x)$ b) $y = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ c) $y = x^4 - 5x^2 + 4$

10. Estudia la curvatura y puntos de inflexión de: $\rightarrow$ Desmos

    a) $y = x^3 - \dfrac{3x^2}{2}$ b) $y = \dfrac{6}{x^2 + 3}$ c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

    d) $y = (2 - x)e^x$ e) $y = \dfrac{x}{\ln x}$ $\rightarrow \mathrm{PI}(e^2, \frac{e^2}{2})$

11. Para cada función, halla: a) Puntos de corte con los ejes, b) Asíntotas, c) Monotonía y extremos y d) Gráfica aproximada. $\rightarrow$ Desmos

    a) $y = \dfrac{x-3}{x^2 - 4x}$ b) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ c) $y = \dfrac{x+1}{4 - x^2}$

    d) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$ e) $y = \dfrac{x^2(1-x)}{x^2 - 1}$ f) $y = \sqrt{4 + x^2}$

    g) $y = e^{-x^2}$ h) $y = 2e^x - 3$ i) $y = x \ln x$

12. Determina dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo. $\rightarrow$ 6 y 18

13. Un número más el cuadrado de otro número suman 48. Halla ambos números para que el producto sea máximo. $\rightarrow$ 4 y 32

14. Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de la longitudes de sus dos catetos vale 4 cm. $\rightarrow$ 2 cm^2

15. De entre todos los rectángulos de perímetro 8, calcula el que tiene área máxima. $\rightarrow$ Un cuadrado de lado 2

16. Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 €/m y la de los otros 10 €/m, halla el área del mayor campo que puede cercarse con 28800 €. $\rightarrow$ 115200 m^2

17. Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 10 cm, calcula las dimensiones del que tenga área máxima. Un cuadrado de lado $10\sqrt{2}$

18. Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos distintos materiales. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo tenemos que elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro? Un cuadrado de lado 10 cm y 15 cm

19. Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para $13,5$ metros cúbicos. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el menor posible. $\rightarrow 3 \times 3 \times 1{,}5$

20. De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo $\rightarrow 10 \times 10 \times 5$

21. Se desea construir un depósito con forma de prisma rectangular de base cuadrada y con una capacidad de 360 m^3. Los costes por m^2 son los siguientes: 40 € para el fondo, 30 € para las paredes laterales y 60 € para el techo del depósito. Calcula las dimensiones del depósito para que su coste sea el menor posible. $\rightarrow 6 \times 6 \times 10$

22. Calcula las dimensiones de un rectángulo inscrito en un semicírculo de 10 cm de radio para que su área sea máxima. $\rightarrow \sqrt{50} \times 2\sqrt{50}$

23. Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en una finca, produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca, las cepas producen de media $0,01$ kg menos de uva cada una. Halla el número de cepas que se deben añadir a las existentes para que la producción de uvas de la finca sea máxima. $\rightarrow$ 200

24. A partir de una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados eliminados tienen 10 cm. de lado. ¿Está en lo cierto? $\rightarrow$ Sí

25. Deriva las siguientes funciones, utilizando la regla de L'Hôpital:

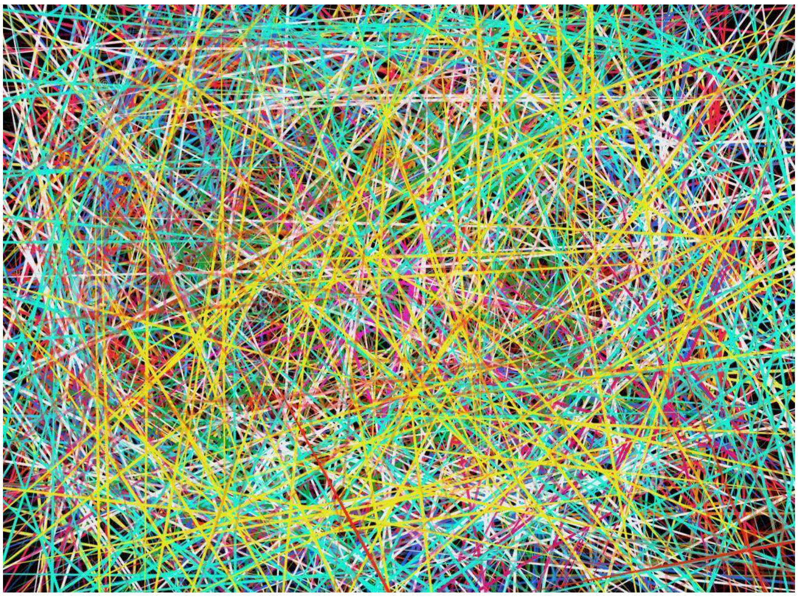
a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-6x+4}$ $\rightarrow \frac{7}{2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$ $\rightarrow 2$ c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x-1)\sec 2x$ $\rightarrow -1$

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{\ln x}{x-1}$ $\rightarrow 0$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x-\frac{3\operatorname{sen} 2x}{2}}$ $\rightarrow -\frac{3}{2}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{ctg} x \arcsin x$ $\rightarrow 1$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}$ $\rightarrow -\frac{1}{2}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{e^x}{x^n}, \forall n\in\mathbb{N}$ $\rightarrow \infty$ i) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{(\ln x)^n}{x}, \forall n\in\mathbb{N}$ $\rightarrow 0$

Bloque III:

GEOMETRÍA DEL PLANO



MATEM – I

TEMA 11

VECTORES EN EL PLANO

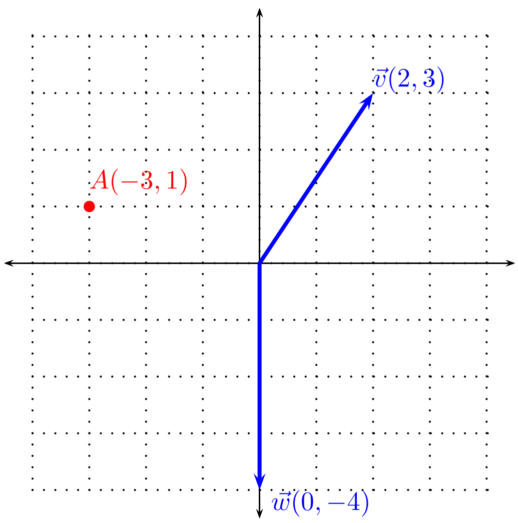
Índice

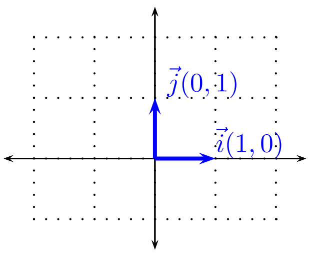
La geometría del plano que vamos a estudiar trata de las intersecciones, posiciones relativas, ángulos y distancias entre los objetos elementales del plano: vectores, puntos y rectas. Todo lo veremos desde un punto de vista numérico y algebraico, para dar precisión y facilidad a los cálculos, sin perder de vista el significado geométrico que nos aporta intuición y estrategia.

1 Vectores numéricos y geométricos

Un par ordenado de números (a, b) representa un punto del plano referido a un sistema de ejes cartesiano; pero también al vector con origen $(0, 0)$ y extremo (a, b). Los puntos se suelen denominar con letras mayúsculas, mientras los vectores con minúsculas bajo una flecha. Los vectores $\vec{i}(1, 0)$, $\vec{j}(0, 1)$ y $\vec{0}(0, 0)$ (vector sin longitud) son específicos.

EJEMPLO 11.242

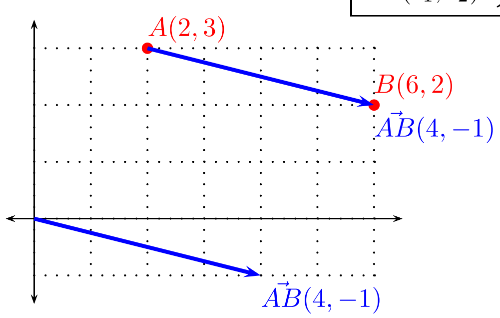


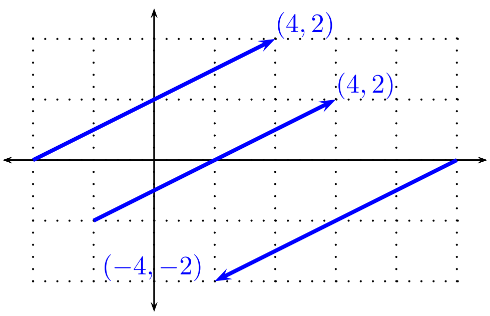


Vector definido por dos puntos: Es el que resulta de restar sus respectivas coordenadas (extremo menos origen) quedando el vector (*lo que avanza, lo que sube*), indistinguible (tiene la misma longitud, dirección y sentido) del que se dibuja desde el origen de coordenadas; por eso los consideramos iguales.

EJEMPLO 11.243

$$\left.\begin{array}{c} A(a_1, a_2) \\ B(b_1, b_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$



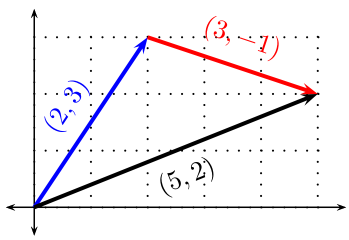


2 Operaciones básicas

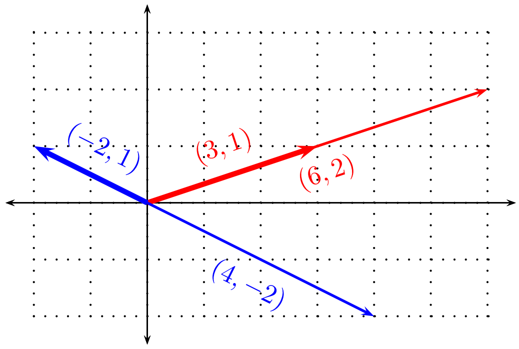
Las operaciones, desde el punto de vista numérico, se definen de forma natural, y tienen una interpretación geométrica como la dada en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 11.244

$\boxed{(2,3)+(3,-1)=(5,2)}$



$\boxed{2\cdot(3,1)=(6,2)}$



$\boxed{-2\cdot(-2,1)=(4,-2)}$

En general, $\boxed{(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)}$ y $\boxed{t\cdot(a_1,a_2)=(t\cdot a_1,t\cdot a_2)}$

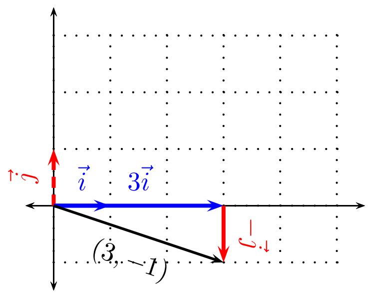
Suma gráfica: concatenados los dos vectores, unir origen del primero con extremo del segundo

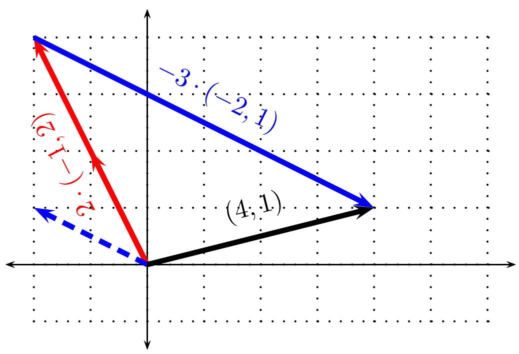
Producto por escalar gráfico: estirar o reducir el vector inicial tal como indique el escalar, cambiando el sentido si el escalar es negativo.

Observación 34. $\boxed{a\vec{i}+b\vec{j}=}\ a(1,0)+b(0,1)=(a,0)+(0,b)=\boxed{(a,b)}$. *La notación con $\vec{i}$ y $\vec{j}$ es que se utiliza en física.*

EJEMPLO 11.245

- $3\vec{i}-\vec{j}=(3,-1)$
- $2\cdot(-1,2)-3\cdot(-2,1)=(-2,4)+(6,-3)=(4,1)$





3 Combinación lineal

Se llama así a cualquier expresión de la forma

$$\boxed{t_1 \cdot \vec{v}_1 + t_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + t_n \cdot \vec{v}_n}, \quad t_i \in \mathbb{R}, \ \vec{v}_i \text{ vectores}$$

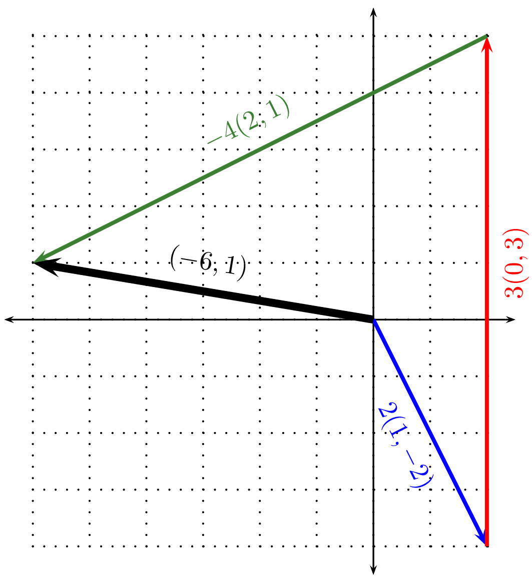
Desde el punto de vista geométrico consiste en, a partir de un grupo inicial de vectores, alargarlos o reducirlos, pudiéndole cambiar el sentido, para después ir colocándolos uno a continuación del otro. El vector resultante de unir el origen del primero con el extremo del último es lo que llamamos combinación lineal (**c. l.**).

EJEMPLO 11.246

- $-2(4,5)$ es una c. l. del vector $(4,5)$
- $-(-1,3)+4(5,-2)$ es una c. l. de los vectores $(-1,3)$ y $(5,-2)$
- $7(-1,3)-3(5,-2)$ es otra c. l. de los vectores $(-1,3)$ y $(5,-2)$
- $2(1,-2)+3(0,3)-4(2,1)$ es una c. l. del conjunto $\{(1,-2),(0,3),(2,1)\}$

En el anterior ejemplo, la última combinación da lugar al vector

$$2(1,-2)+3(0,3)-4(2,1) = (2,-4)+(0,9)+(-8,-4) = (-6,1)$$



Otra forma de describir esta situación es: el vector $(6,-1)$ se puede expresar como combinación de los vectores $\{(1,-2),(0,3),(2,1)\}$

3.1 Vectores paralelos

Definición 25. *Dos vectores son paralelos si uno se puede expresar como c. l. del otro:*

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} = t\vec{b}$$

(el número t será el cociente de sus longitudes)

Un criterio numérico puede ser:

$$\boxed{\vec{a}(a_1,a_2) \parallel \vec{b}(b_1,b_2)} \iff (a_1,a_2) = t(b_1,b_2) \iff (a_1,a_2) = (t\cdot b_1, t\cdot b_2) \iff$$

$$\iff \begin{cases} a_1 = tb_1 \Longrightarrow t = \frac{a_1}{b_1} \\ a_2 = tb_2 \Longrightarrow t = \frac{a_2}{b_2} \end{cases} \iff \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \iff \boxed{a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1} = 0$$

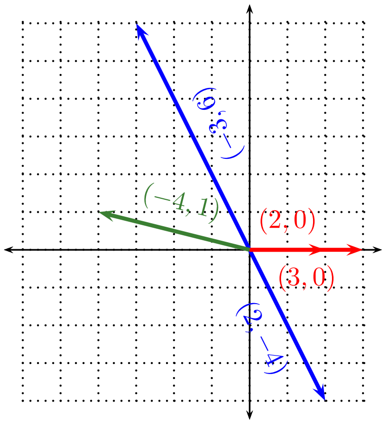
Observación 35. *La expresión que decide el paralelismo de los vectores se llama **determinante** de orden dos, y se suele ordenar así:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1$$

Los vectores formarán base, entonces, si el determinante que forman es distinto de cero, criterio que se mantendrá para cualquier dimensión. La generalización de este concepto es una herramienta fundamental para estudiar la dependencia lineal de vectores en dimensiones mayores que 2, que se estudiará en el siguiente curso.

EJEMPLO 11.247

- $(2,-4) \parallel (-3,6)$, porque $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - (-4)\cdot(-3) = 12 - 12 = 0$
- $(3,0) \parallel (2,0)$, porque $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 0 - 0\cdot 2 = 0 - 0 = 0$
- $(2,-4) \nparallel (-4,1)$, porque $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 16 = -14 \neq 0$



EJEMPLO 11.248

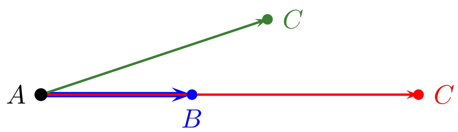
Averigua si los siguientes puntos están alineados:

a) $A(2,3), B(-2,13)$ *y* $C(12,-22)$

b) $P(3,1), Q(11,-12)$ *y* $R(-7,15)$

Solución:

Estarán alineados si los vectores que unen uno de los puntos con los otros dos son paralelos:



a) $\vec{AB} = (-4,10)$, $\vec{AC} = (10,-25) \Longrightarrow \begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 10 & -25 \end{vmatrix} = 100 - 100 = 0 \Longrightarrow \vec{AB} \parallel \vec{AC}$ (SÍ)

b) $\vec{PQ} = (8,-13)$, $\vec{PR} = (-10,14) \Longrightarrow \begin{vmatrix} 8 & -13 \\ -10 & 14 \end{vmatrix} = 112 - 130 \neq 0 \Longrightarrow \vec{PQ} \nparallel \vec{PR}$ (NO)

□

3.2 Bases del plano

Definición 26. *Llamamos* ***base*** *del plano a dos vectores no paralelos*

EJEMPLO 11.249

- $\{\vec{i}(1,0), \vec{j}(0,1)\}$ es base, porque $1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1 \neq 0 \Longrightarrow \vec{i} \nparallel \vec{j}$ (base canónica)
- $\{\vec{i}(3,-2), \vec{j}(4,0)\}$ es base, porque $3\cdot 0 - (-2)\cdot 4 = 8 \neq 0 \Longrightarrow \vec{i} \nparallel \vec{j}$
- $\{(-2,2),(3,-3)\}$ no es base, porque $(-2)\cdot(-3) - 2\cdot 3 = 6 - 6 = 0 \Longrightarrow (-2,2) \parallel (3,-3)$

Una propiedad fundamental de las bases (incluso en cualquier dimensión, como también se verá en cursos posteriores) es la que sigue:

> Cualquier vector del plano se puede expresar de forma única como combinación lineal de los vectores de una base. A los escalares que forman parte de esa c. l. se les llama **coordenadas** del vector respecto a esa base.

EJEMPLO 11.250

Sea el $B = \{\vec{a}(2,-1), \vec{b}(1,3)\}$.

a) Demuestra que B es una base.

b) Expresa $\vec{v}(-5,-1)$ como combinación lineal de los vectores de B. ¿Cuáles son sus coordenadas respecto a B?

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - (-1)\cdot 1 = 6 + 1 = 7 \neq 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow B$ es una base.

b)

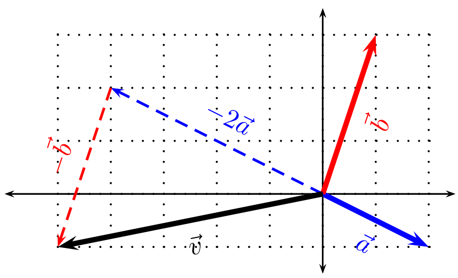
$$\begin{array}{rcl} (-5,-1) & = & x(2,-1) + y(1,3) \\ (-5,-1) & = & (2x,-x) + (y,3y) \\ (-5,-1) & = & (2x+y, -x+3y) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+y & = & -5 \\ -x+3y & = & -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{[ec 2]}\ x = 3y+1$$

[ec 1] $2(3y+1) + y = -5 \Rightarrow 6y + 2 + y = -5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7y = -7 \Rightarrow \boxed{y=-1} \Rightarrow \boxed{x=}\ 3(-1)+1 = \boxed{-2}$

$\boxed{\vec{v} = -2\vec{a} - \vec{b}} \Longrightarrow$ Coordenadas: $\vec{v} = (-2,-1)_B$



□

Observación 36. *Podríamos decir que, si no se especifica la base al dar las coordenadas, ésta es la canónica, es decir, la formada por los vectores $\{\vec{i},\vec{j}\}$, pues cualquier vector, según ya vimos, $(a,b) = a\vec{i} + b\vec{j}$*

4 Producto escalar

Definición 27. *Sean $\vec{a}(a_1, a_2)$ y $\vec{b}(b_1, b_2)$. Llamamos* ***producto escalar*** *de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ al escalar*

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}$$

Ejemplo 11.251

- $(-1, 3) \cdot (4, -2) = (-1) \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = -4 - 6 = -10$
- $(2, -5) \cdot (5, 2) = 2 \cdot 5 + (-5) \cdot 2 = 10 - 10 = 0$
- $(2, -3) \cdot (2, -3) = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) = 4 + 9 = 13$
- $(a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 = (a_1)^2 + (a_2)^2$

4.1 Módulo de un vector

Definición 28. *Sea $\vec{a}(a_1, a_2)$. Llamamos* ***módulo*** *de $\vec{a}$ al escalar*

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}}$$

Observación 37. *Podríamos decir también que $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$*

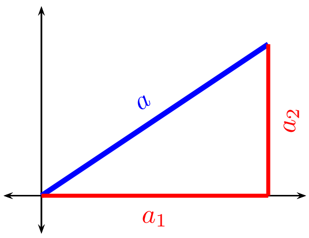
Ejemplo 11.252

- $|(3, 1)| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
- $|(-6, 8)| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

Al definirse el radicando como suma de cuadrados, podemos concluir que:

- Podemos calcular el módulo de cualquier vector, incluso con coordenadas negativas.
- El módulo de un vector es en todo caso positivo.

Interpretación geométrica: El módulo de un vector corresponde con su longitud (es el teorema de Pitágoras): si llamamos a a la longitud de $\vec{a}(a_1, a_2)$,



$$a^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 \Rightarrow$$

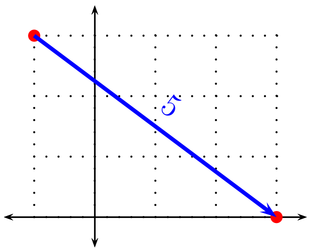
$$\Rightarrow a = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2} = |\vec{a}|$$

EJEMPLO 11.253

Calcula el módulo del vector $\vec{AB}$, siendo $A(-1,3)$ y $B(3,0)$. (Es decir, calcula la distancia entre los puntos A y B)

Solución:

$$d(A,B) = \vec{AB} = B - A = (3,0) - (-1,3) = (4,-3) \Longrightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$



□

4.1.1 Vectores unitarios:

Definición 29. *Un vector $\vec{u}$ es unitario si $|\vec{u}| = 1$.*

EJEMPLO 11.254

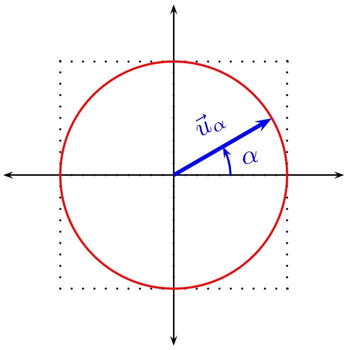
- $\vec{i}(1,0)$ es unitario, porque $|\vec{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$
- $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es unitario, porque $\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$
- $(\cos 100°, \text{sen}\, 100°)$ es unitario, porque

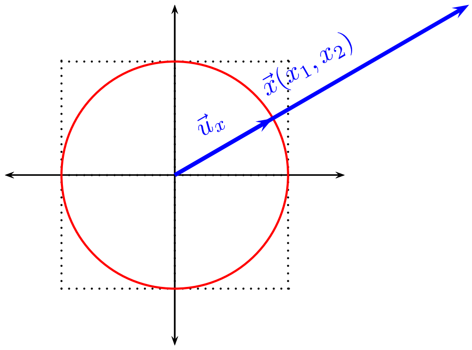
  $$|(\cos 100°, \text{sen}\, 100°)| = \sqrt{\cos^2 100° + \text{sen}^2\, 100°} = \sqrt{1} = 1$$
- Si $|\vec{x}| = 2$, entonces $\frac{1}{2} \cdot \vec{x}$ es unitario (lo reduzco a su longitud mitad, que es 1)

Observación 38.

- *Todos los vectores unitarios son de la forma* $\boxed{\vec{u}_\alpha(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)}$ *(completan todas las direcciones y sentidos y* $|\vec{u}_\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1} = 1$*)*
- *Un vector unitario, con la misma dirección y sentido que* $\vec{x}(x_1, x_2)$ *es*

$$\boxed{\vec{u}_x = \frac{1}{|\vec{x}|}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{|\vec{x}|}, \frac{x_2}{|\vec{x}|}\right)}$$





EJEMPLO 11.255

Sea $\vec{x}(-3, 2)$. Calcula:

a) Un vector unitario con su misma dirección y sentido

b) Un vector de módulo 3 con su misma dirección y sentido

c) Un vector de longitud 2 con su misma dirección y sentido contrario.

Solución:

a) Como $|\vec{x}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $\vec{u}_x = \left(\frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

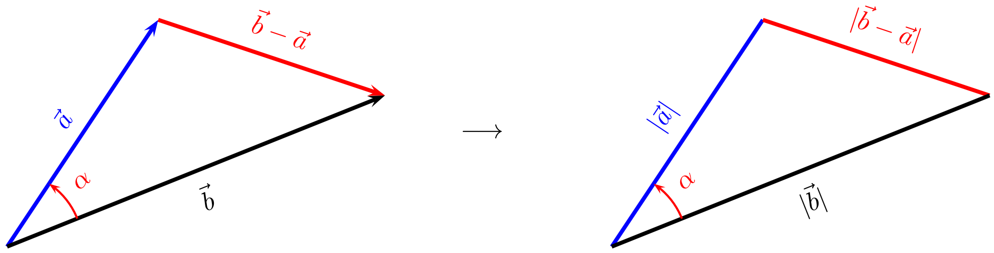
b) $3\vec{u}_x = \left(\frac{-9}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right)$

c) $-2\vec{u}_x = \left(\frac{6}{\sqrt{13}}, \frac{-4}{\sqrt{13}}\right)$

□

4.2 Ángulo entre dos vectores

Sean dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$; el vector $\vec{b}-\vec{a}$ se interpreta como en la gráfica siguiente, ya que $\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}$.



Si, teniendo en cuenta los módulos (longitudes) de cada vector, aplicamos sobre el triángulo el teorema del coseno,

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = \overbrace{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\alpha}^{(1)}$$

También podemos calcular algebraicamente la expresión

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{b}-2\,\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{a} = \overbrace{|\vec{b}|^2-2\,\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2}^{(2)}$$

Igualando (1) = (2),

$$\cancel{|\vec{a}|^2}+\cancel{|\vec{b}|^2}-2|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\alpha = \cancel{|\vec{b}|^2}-2\,\vec{b}\cdot\vec{a}+\cancel{|\vec{a}|^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cancel{-2}\,\vec{b}\cdot\vec{a}}{\cancel{-2}|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

Definición 30. *El ángulo* $\alpha = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ *formado por los vectores* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *es*

$$\boxed{\alpha = \arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

También podemos extraer otra expresión, muy utilizada en física, del producto escalar:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha}$$

Observación 39. $0^\circ \leq (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \leq 180^\circ$

EJEMPLO 11.256

- Ángulo que forman $(3,3)$ y $(-1,0)$:

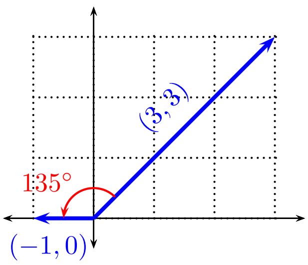
$$\cos\alpha = \frac{(3,3)\cdot(-1,0)}{|(3,3)|\cdot|(-1,0)|} = \frac{-3}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{1}} = \frac{-\cancel{3}}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \alpha = 135^\circ$$

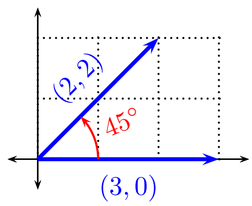
- Ángulo que forman $(3,0)$ y $(2,2)$:

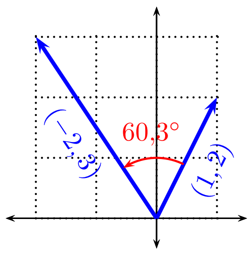
$$\cos\alpha = \frac{(3,0)\cdot(2,2)}{|(3,0)|\cdot|(2,2)|} = \frac{6}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{3\cdot 2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \alpha = 45^\circ$$

- Ángulo que forman $(1,2)$ y $(-2,3)$:

$$\cos\alpha = \frac{(1,2)\cdot(-2,3)}{|(1,2)|\cdot|(-2,3)|} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{4}{\sqrt{65}} \approx 60{,}2551187031^\circ$$





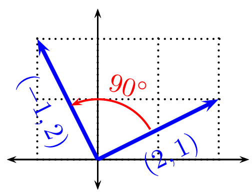


EJEMPLO 11.257

- Ángulo que forman $(2,1)$ y $(2,1)$:

$\cos\alpha = \dfrac{(2,1)\cdot(2,1)}{|(2,1)|\cdot|(2,1)|} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{5}{5} = 1 \Longrightarrow \alpha = 0^\circ$ (claro, un vector no produce ningún giro consigo mismo)

- Ángulo que forman $(-1,2)$ y $(2,1)$:



$$\cos\alpha = \frac{(-1,2)\cdot(2,1)}{|(-1,2)|\cdot|(2,1)|} = \frac{0}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = 0 \Longrightarrow \alpha = 90^\circ$$

- Ángulo que forman (a,b) y $(b,-a)$:

$$\cos\alpha = \frac{(a,b)\cdot(b,-a)}{|(a,b)|\cdot|(b,-a)|} = \frac{0}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \Longrightarrow \alpha = 90^\circ$$

Ejemplo 11.258

Sobre un cuerpo actúa una fuerza de 50 N, produciendo un desplazamiento de 25 m con un ángulo de 60° respecto a la dirección de la fuerza. ¿Cuál es el trabajo producido?

Solución:

Como el trabajo $T = \vec{F} \cdot \vec{r}$,

$T = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos 60° = 50 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} = 625\ J$ □

4.2.1 Signo del producto escalar

El signo del producto escalar coincide con el del coseno del ángulo producido:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \overset{+}{|\vec{a}|} \cdot \overset{+}{|\vec{b}|} \cdot \cos\alpha}$$

$$\text{Entonces: } \begin{cases} \bullet\ \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Longrightarrow 0° \leq \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} < 90° \text{ (agudo)} \\ \bullet\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longrightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 90° \text{ (recto)} \\ \bullet\ \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Longrightarrow 90° < \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} \leq 180° \text{ (obtuso)} \end{cases}$$

4.2.2 Vectores ortogonales

Definición 31. *Dos vectores son ortogonales (normales, perpendiculares),*

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

Está claro que $\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 90°$

Ejemplo 11.259

- $(4, -6) \perp (3, 2)$, porque $(4, -6) \cdot (3, 2) = 12 - 12 = 0$
- Ya vimos en un ejemplo anterior que $(a, b) \perp (b, -a)$. Para encontrar un vector normal, basta con intercambiar las coordenadas y cambiar el signo a sólo una de ellas.

EJEMPLO 11.260

Sean los vectores $\vec{a}(-2,1)$ y $\vec{b}(x,3)$; Calcula x para que:

a) $\vec{a} \parallel \vec{b}$

b) $\vec{a} \perp \vec{b}$

c) Calcula un vector unitario normal a $\vec{a}$

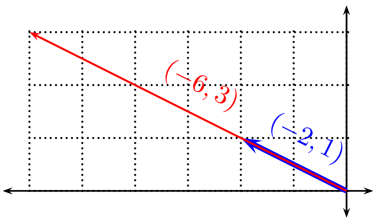
Solución:

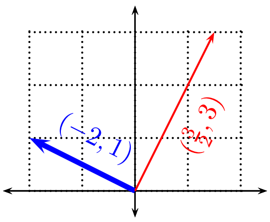
a) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ x & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -6 - x = 0 \Longrightarrow x = -6$

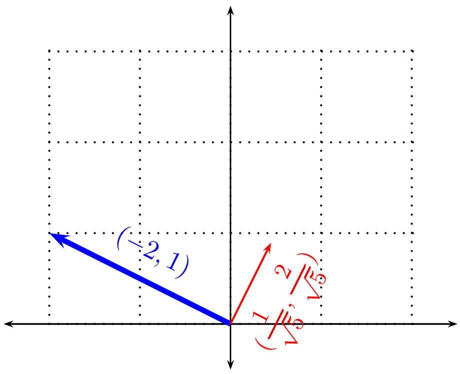
b) $\vec{a} \perp \vec{b} \Longrightarrow (-2,1)(x,3) = 0 \Longrightarrow -2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$

c) Un vector perpendicular a $\vec{a}$ es $\vec{n}(1,2)$. El vector buscado será $\vec{u}_n = (\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}})$

$\square$







5 Ejercicios propuestos

1. Dados los vectores $\vec{a}(2,-5)$ y $\vec{b}(-2,4)$, calcula:

   a) $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ $\rightarrow (10,-23)$ b) $\vec{w} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ $\rightarrow (-5,12)$ c) $\vec{x} = -\vec{a} - 3\vec{b}$ $\rightarrow (4,-7)$

2. Expresa el vector $\vec{a}(-1,-8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3,-2)$ y $\vec{c}(4,-\frac{1}{2})$. $\rightarrow \vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

3. Comprueba que $B = \{(1,-1),(0,-1)\}$ es una base. Halla las coordenadas del vector $\vec{v}(2,-5)$ respecto a B. $\rightarrow \vec{v} = (2,3)_B$

4. Comprueba que $B = \{(3,-2),(2,1)\}$ es una base. Halla las coordenadas del vector $\vec{v}(4,9)$ respecto a B. $\rightarrow \vec{v} = (-2,5)_B$

5. Averigua si las siguientes ternas de puntos están alineados:

   a) $A(-3,9), B(1,3)$ y $C(8,-6)$ $\rightarrow$ No b) $P(7,-3), Q(-1,-1)$ y $R(-5,0)$ $\rightarrow$ Sí

6. Calcula el valor de x para que los tres puntos estén alineados:

   a) $A(2,x), B(-3,-11)$ y $C(4,10)$ $\rightarrow 4$ b) $P(3,-6), Q(x,-12)$ y $R(0,-8)$ $\rightarrow -6$

7. Dados $\vec{u}(2,3)$, $\vec{v}(-3,1)$ y $\vec{w}(5,2)$, calcula:

   a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$ $\rightarrow 22$ b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$ $\rightarrow 29$

   c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ $\rightarrow (-15,-6)$ d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$ $\rightarrow (20,30)$

8. Calcula m para que $\vec{u}(\frac{3}{5}, m)$ sea unitario. $\rightarrow \pm\frac{4}{5}$

9. Calcula un vector de módulo 3 con la misma dirección y sentido que $\vec{v}(3,-4)$. $\rightarrow (\frac{9}{5}, \frac{-12}{5})$

10. Calcula un vector de módulo 2 con la misma dirección y sentido contrario al de $\vec{v}(2,-1)$. $\rightarrow (\frac{-4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$

11. Encuentra el ángulo formado por las siguientes parejas de vectores:

    a) $(3,2)$ y $(1,-5)$ $\rightarrow 112{,}38^\circ$ b) $(4,6)$ y $(3-2)$ $\rightarrow 90^\circ$ c) $(1,6)$ y $(-\frac{1}{2},-3)$ $\rightarrow 180^\circ$

12. En una circunferencia de centro O y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono regular de vértices consecutivos A, B, C, D, E, F. Calcula los productos:

    a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ $\rightarrow 2$ b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$ $\rightarrow -2$ c) $\vec{AB} \cdot \vec{ED}$ $\rightarrow 4$

    d) $\vec{BC} \cdot \vec{EF}$ $\rightarrow -4$ e) $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$ $\rightarrow -2$

13. Calcula k para que sean perpendiculares:

    a) $(6,k)$ y $(-1,3)$ $\rightarrow 2$ b) $(\frac{1}{5},-2)$ y $(k,3)$ $\rightarrow 30$ c) $(k,-k)$ y $(5,5)$ $\rightarrow \forall k \in \mathbb{R}$

14. Dado $\vec{v}(-5,k)$, calcula k para que:

    a) $\vec{v} \perp \vec{(4,-2)}$ $\rightarrow -10$ b) $|\vec{v}| = \sqrt{34}$ $\rightarrow \pm 3$

15. Dado $\vec{v}(5,12)$, determina:

    a) Los vectores unitarios paralelos a $\vec{v}$ $\rightarrow \pm(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$

    b) Los vectores ortogonales a $\vec{v}$ con su mismo módulo $\rightarrow \pm(12,-5)$

    c) Los vectores unitarios y perpendiculares a $\vec{v}$ $\rightarrow \pm(\frac{12}{13}, \frac{-5}{13})$

16. Calcula un vector de módulo 50 que sea perpendicular a $\vec{a}(8,6)$ $\rightarrow \pm(30,-40)$

17. Sean $A(1,1)$, $B(0,5)$A y $C(5,-4)$ ¿puede tratarse de un triángulo rectángulo? $\rightarrow$ No

18. Dados los vectores $\vec{a}(-1,a)$ y $\vec{b}(b,15)$, halla a y b, en cada caso, de modo que:

    a) $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $|\vec{a}| = \sqrt{10}$ $\rightarrow a = -3,\ b = -45;\ a = 3,\ b = 45$

    b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$ y $|\vec{b}| = 17$ $\rightarrow a = 1,\ b = 8;\ a = \frac{-1}{15},\ b = -8$

MATEM – I

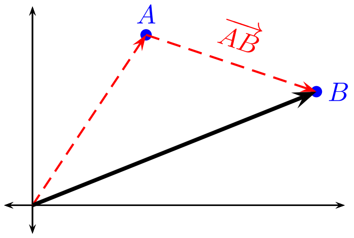
TEMA 12

GEOMETRÍA MÉTRICA DEL PLANO

Índice

1 Puntos y vectores en el plano

CON puntos y vectores nos podemos mover en el plano: un punto fija una posición y un vector lo traslada hasta una cierta distancia (su módulo) en su dirección y sentido.



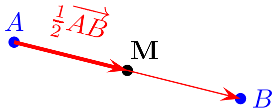
La gráfica indica que al sumar las coordenadas de A más las de $\overrightarrow{AB}$ obtenemos las de B:

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$

expresión bastante práctica, aunque para ello 'confundamos' coordenadas de puntos y vectores.

1.1 Punto medio

El punto medio M entre A y B nos lo da la expresión $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

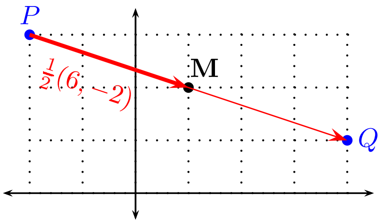


EJEMPLO 12.261

$\overrightarrow{PQ} = (4-(-2), 1-3) = (6,-2)$

El punto medio entre $P(-2,3)$ y $Q(4,1)$ es

$M = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = (-2,3) + \frac{1}{2}(6,-2) = \boxed{(1,2)}$



1.2 Particiones proporcionales de un segmento

En el apartado anterior hemos visto cómo dividir el segmento de extremos A y B en dos partes iguales, cortando por su punto medio. El proceso se puede generalizar:

EJEMPLO 12.262

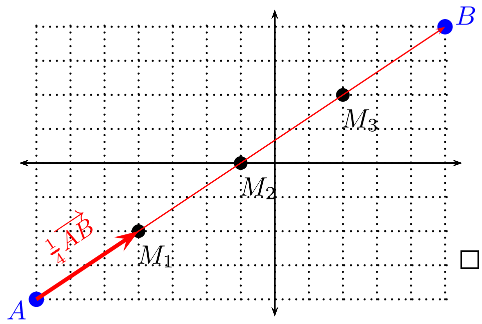
Calcula los puntos que dividen en cuatro partes iguales al segmento de extremos $A = (-7,-4)$ y $B = (5,4)$

Solución: Los tres puntos serán los de coordenadas

$$M_1 = A + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (-7,-4) + \tfrac{1}{4}(12,8) = (-4,-2)$$

$$M_2 = A + \tfrac{2}{4}\overrightarrow{AB} = (-7,-4) + \tfrac{2}{4}(12,8) = (-1,0)$$

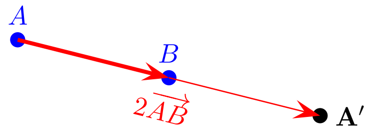
$$M_3 = A + \tfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} = (-7,-4) + \tfrac{3}{4}(12,8) = (2,2)$$



□

1.3 Punto simétrico respecto a otro

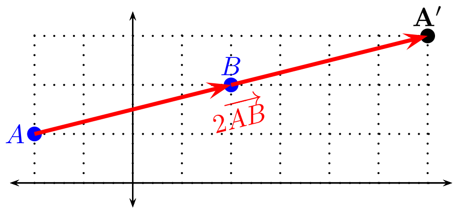
El punto simétrico A' de A respecto al punto B nos lo da la expresión $A' = A + 2\overrightarrow{AB}$



Ejemplo 12.263

El punto simétrico de $A(-2,1)$ respecto a $B(2,2)$ es

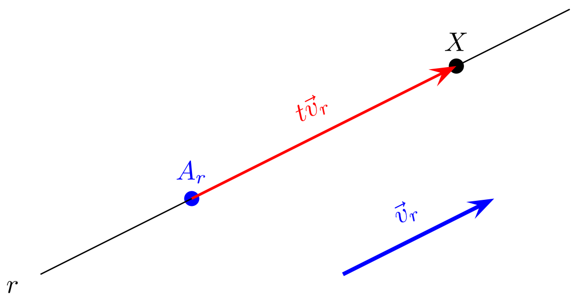
$A' = A + 2\overrightarrow{AB} = (-2,1) + 2(4,1) = \boxed{(6,3)}$



2 Ecuaciones de la recta

Una recta queda determinada por un punto por el que pase y un vector cuya dirección siga:

$$r : \begin{cases} A_r(a_1, a_2) \\ \vec{v}_r(v_1, v_2) \end{cases}$$



Todos los puntos $X(x,y)$ de esa recta son los que se consiguen con la expresión $X = A_r + t\vec{v}_r$, es decir, los que tienen coordenadas

$$\boxed{(x,y) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2)} \qquad \textbf{[Ecuación vectorial]}$$

Siguiendo con el cálculo algebraico,

$$(x,y) = (a_1 + t\vec{v}_1, a_2 + t\vec{v}_2) \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x = a_1 + v_1 \cdot t \\ y = a_2 + v_2 \cdot t \end{cases}} \qquad \textbf{[Ecuaciones paramétricas]}$$

Despejando t en ambas ecuaciones, conseguimos expresar la recta sin el parámetro t:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - a_1}{v_1} \\[2ex] t = \dfrac{y - a_2}{v_2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}} \qquad \textbf{[Ecuación continua]}$$

Quitando denominadores y pasando a la izquierda,

$$(x - a_1)v_2 = (y - a_2)v_1 \Longrightarrow v_2 \cdot x - v_1 \cdot y + a_2 v_1 - a_1 v_2 = 0$$

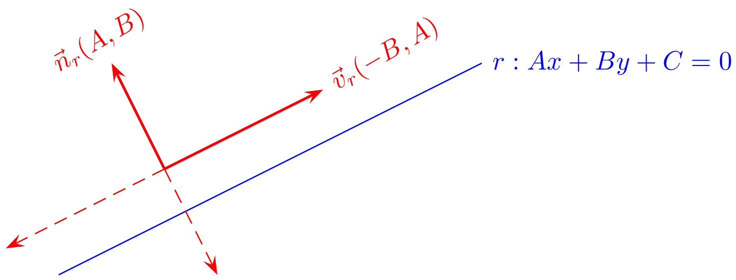
Esta última ecuación, haciendo las operaciones con las coordenadas, queda de la forma

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \qquad \textbf{[Ecuación general (implícita)]}$$

siendo $\begin{cases} A = v_2 \\ B = -v_1 \\ C = a_2v_1 - a_1v_2 \end{cases}$, en donde se puede observar que los vectores

$$(v_2, -v_1) = \boxed{(A, B) \perp \vec{v}_r} \qquad\qquad (v_1, v_2) = \boxed{(-B, A) = \vec{v}_r}$$

formados a partir de los dos primeros coeficientes de la ecuación general son, respectivamente, un vector normal y otro perpendicular a la recta r.



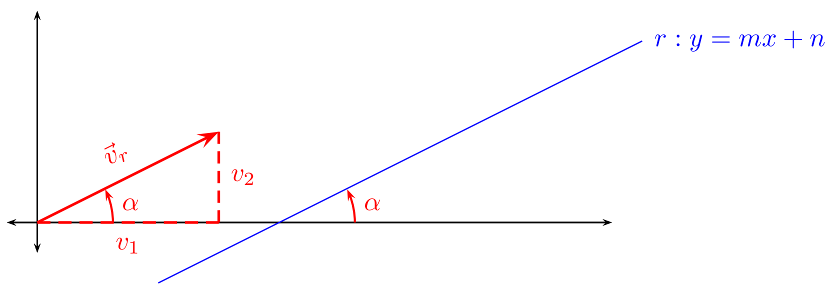
Reservaremos, a partir de aquí, la notación $\vec{n}_r(A, B)$ para designar un vector normal a r.

Despejando y en la ecuación general (supuesto $B \neq 0$), $y = \dfrac{-Ax - C}{B}$ y tenemos la conocida

$$\boxed{y = mx + n} \qquad \textbf{[Ecuación explícita]}$$

siendo $\begin{cases} m = \dfrac{-A}{B} = \dfrac{-v_2}{-v_1} = \dfrac{v_2}{v_1} & \text{(pendiente)} \\[2ex] n = \dfrac{-C}{B} & \text{(ordenada en el origen)} \end{cases}$

$\boxed{m = \dfrac{v_2}{v_1}} = \operatorname{tg} \alpha$, donde α es el ángulo de inclinación de r.



Por último, retomando la ecuación continua $\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}$ para despejar y,

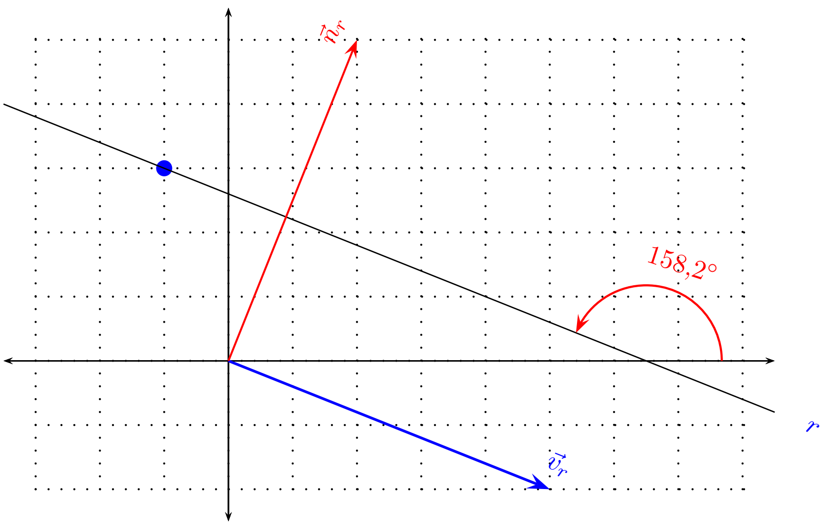
$$y = a_2 + \frac{v_2}{v_1}(x - a_1) \Longrightarrow \boxed{y = a_2 + m(x - a_1)} \qquad \textbf{[Ecuación punto–pendiente]}$$

EJEMPLO 12.264

Encuentra todas las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $A_r(-1,3)$ y es paralela al vector $\vec{v}_r(5,-2)$

Solución: $r : \begin{cases} A_r(-1,3) \\ \vec{v}_r(5,-2) \end{cases}$

- Ec. vectorial: $r : (x,y) = (-1,3) + t(5,-2)$
- Ec. paramétricas: $r : \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$
- Ec. continua: $r : \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-3}{-2}$
- Ec. general: $-2x - 2 = 5y - 15 \Longrightarrow r : 2x + 5y - 13 = 0$ $[\vec{n}_r(2,5)]$
- Ec. explícita: $r : y = -\frac{2}{5}x + \frac{13}{5}$ $[m = -\frac{2}{5},\ \alpha = \operatorname{arc\,tg}(-\frac{2}{5}) \approx 158{,}2°]$
- Ec. punto–pendiente: $r : y = 3 - \frac{2}{5}(x+1)$



□

EJEMPLO 12.265

Ecuaciones del eje de abcisas: $OX : \left\{ \begin{array}{l} A_r(0,0) \\ \vec{v}_r(1,0) \end{array} \right.$

- Ec. vectorial: $r : (x,y) = (0,0) + t(1,0)$
- Ec. paramétricas: $r : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & 0 & + & 1t \\ y & = & 0 & + & 0t \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array} \right.$
- Ec. continua: $r : \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{0} \Longrightarrow r : x = \dfrac{y}{0}$
- Ec. general: $y = 0$ $[\vec{n}_r(0,1)]$
- Ec. explícita: $r : y = 0$ $[m = 0,\ \alpha = \operatorname{arc\,tg}(0) = 0°]$
- Ec. punto–pendiente: $r : y = 0 + 0(x-0)$

EJEMPLO 12.266

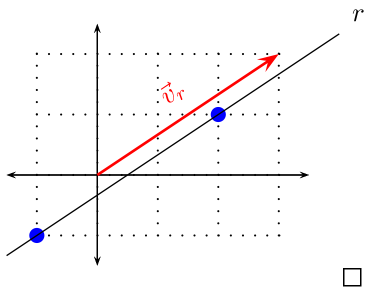
Ecuaciones del eje de ordenadas: $OY : \left\{ \begin{array}{l} A_r(0,0) \\ \vec{v}_r(0,1) \end{array} \right.$

- Ec. vectorial: $r : (x,y) = (0,0) + t(0,1)$
- Ec. paramétricas: $r : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & 0 & + & 0t \\ y & = & 0 & + & 1t \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \end{array} \right.$
- Ec. continua: $r : \dfrac{x-0}{0} = \dfrac{y-0}{1} \Longrightarrow r : \dfrac{x}{0} = y$
- Ec. general: $x = 0$ $[\vec{n}_r(1,0)]$
- Ec. explícita: No tiene (pendiente infinita) $[\alpha = 90°]$
- Ec. punto–pendiente: No tiene (pendiente infinita)

Ejemplo 12.267

Encuentra la ecuación general de la recta r que pasa por los puntos $A(2,1)$ y $B(-1,-1)$

Solución: $r: \begin{cases} A_r = A(2,1) \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = B - A = (-3,-2) \parallel (3,2) \end{cases}$



- Ec. continua: $r: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2}$
- Ec. general: $2x - 4 = 3y - 3 \Longrightarrow \boxed{r: 2x - 3y - 1 = 0}$

□

Otra forma de resolver el ejercicio anterior:

Ejemplo 12.268

Encuentra la ecuación general de la recta r que pasa por los puntos $A(2,1)$ y $B(-1,-1)$

Solución: $r: \begin{cases} A_r = A(2,1) \\ \vec{v}_r = (3,2) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} A_r = A(2,1) \\ \vec{n}_r = (-2,3) \end{cases} \Longrightarrow r: -2x + 3y + C = 0$

$A_r(2,1) \in r \Longrightarrow -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + C = 0 \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow \boxed{r: -2x + 3y + 1 = 0}$

□

Ejemplo 12.269

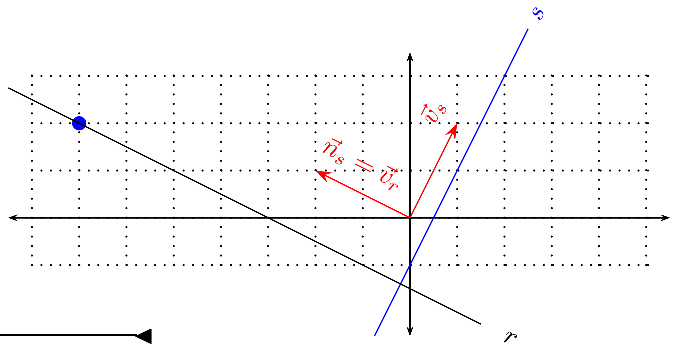
Calcula la recta r perpendicular a $s: y = 2x - 1$ que pasa por $P(-7,2)$

Solución:

Pendiente de la recta s: $m_s = 2 = \frac{2}{1} \Longrightarrow \vec{v}_s = (1,2) \Longrightarrow r: \begin{cases} A_r = A(-7,2) \\ \vec{v}_r = \vec{n}_s = (-2,1) \end{cases}$

Como no se especifica podemos, por ejemplo, responder con la ecuación continua:

$\boxed{r: \dfrac{x+7}{-2} = y - 2}$



□

Observación 40. *Hemos visto con anterioridad que la pendiente* $m = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{m}{1}$*; así, un vector de dirección de* r *puede ser* $v_r(1, m)$*. También, una condición de perpendicularidad es*

$$\boxed{r \perp s \Longleftrightarrow} \; \vec{v}_r(1, m_r) \perp \vec{v}_s(1, m_s) \Longleftrightarrow 1 + m_r \cdot m_s = 0 \Longleftrightarrow \boxed{m_s = \dfrac{-1}{m_r}}$$

Ejemplo 12.270

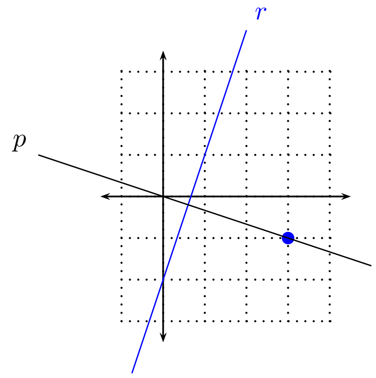
Encuentra la recta perpendicular a $r : y = 3x - 2$ que pasa por el punto $(3, -1)$

Solución: Llamemos p a la recta perpendicular pedida:

$$p : \begin{cases} A_p = (3, -1) \\ m_p = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{3} \end{cases} \Longrightarrow n : \; y = -\tfrac{1}{3}x + n$$

$$A_p \in p \Longrightarrow -1 = -\tfrac{1}{3} \cdot 3 + n \Longrightarrow -1 = -1 + n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n = 0 \Longrightarrow p : \; y = -\tfrac{1}{3}x$$

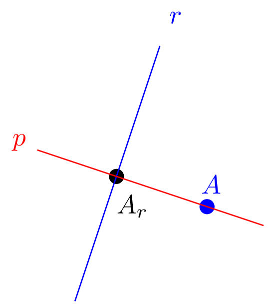


□

3 Proyección (ortogonal) de un punto sobre una recta

La proyección del punto A sobre la recta r es el punto A_r que hace que el $\overrightarrow{AA_r} \perp r$.

$A = p \cap r$, donde $p : \begin{cases} A_p = A \\ \vec{v}_p = \vec{n}_r \end{cases}$ es la recta perpendicular a r que pasa por A.



Ejemplo 12.271

Calcula la proyección del punto $P(-2, -1)$ sobre la recta $r : 2x + 3y - 6 = 0$

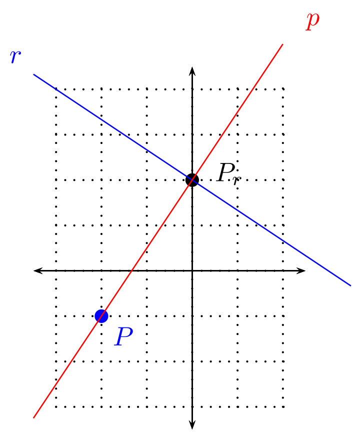
Solución:

- Recta perpendicular a r que pasa por P:

$$p : \begin{cases} A_p = P(-2, -1) \\ \vec{v}_p = \vec{n}_r(2, 3) \end{cases} \Longrightarrow p : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$$

- $P_r = p \cap r$:

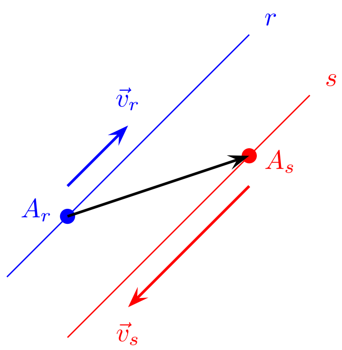
$$2(-2 + 2t) + 3(-1 + 3t) - 6 = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 13t - 13 = 0 \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P_r : \begin{cases} x = -2 + 2 \cdot 1 \\ y = -1 + 3 \cdot 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{P_r(0, 2)}$$



□

4 Posición relativa entre dos rectas

Paralelas



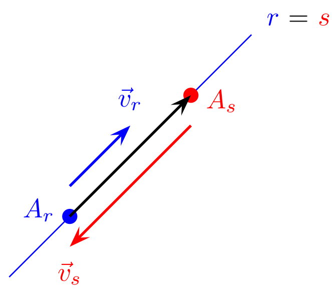
$\boxed{r \parallel s}$

$\vec{v}_r \parallel \vec{v}_s \nparallel \overrightarrow{A_rA_s}$

$r \cap s = \emptyset$

$m_r = m_s, \; n_r \neq_s$

Coincidentes



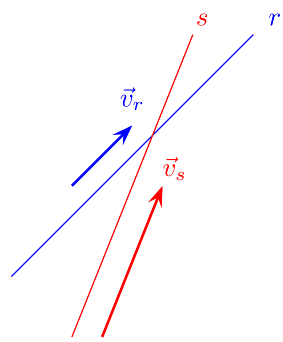
$\boxed{r = s}$

$\vec{v}_r \parallel \vec{v}_s \parallel \overrightarrow{A_rA_s}$

$r \cap s = \infty$ puntos

$m_r = m_s, \; n_r = n_s$

Secantes



$\boxed{r \between s}$

$\vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$

$r \cap s = 1$ punto

$m_r \neq m_s$

Como puede verse, hay varias formas de calcular la posición relativa entre dos rectas.

Ejemplo 12.272

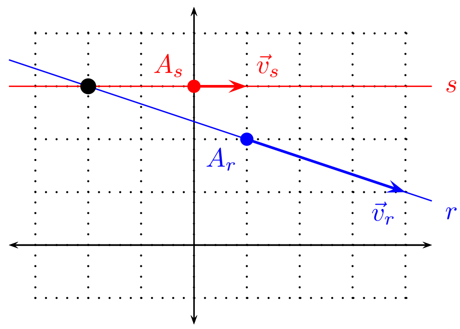
Calcula la posición relativa entre las rectas $r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = \mu \\ y = 3 \end{cases}$

Solución: Se cortan en los puntos que son solución conjunta de ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 1 + 3\lambda = \mu \\ 2 - \lambda = 3 \end{cases} \Longrightarrow [eq2] \; \lambda = -1 \Longrightarrow [eq1] \; 1 + 3(-1) = \mu \Longrightarrow \mu = -2$$

Sólo tenemos un valor para el parámetro $\Longrightarrow$ hay un punto en la intersección; por ejemplo,

$$\lambda = -1 \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 3(-1) = -2 \\ y = 3 \end{cases} \Longrightarrow r \cap s = (-2, 3) \Longrightarrow \boxed{r \between s}$$ □



Ejemplo 12.273

Calcula la posición relativa entre las rectas $r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = \mu \\ y = 3 \end{cases}$

Solución:

$$r : \begin{cases} A_r(1,2) \\ \vec{v}_r(3,-1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} A_s(0,3) \\ \vec{v}_s(1,0) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1 \neq 0 \Longrightarrow \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s \Longrightarrow \boxed{r \between s}$$

□

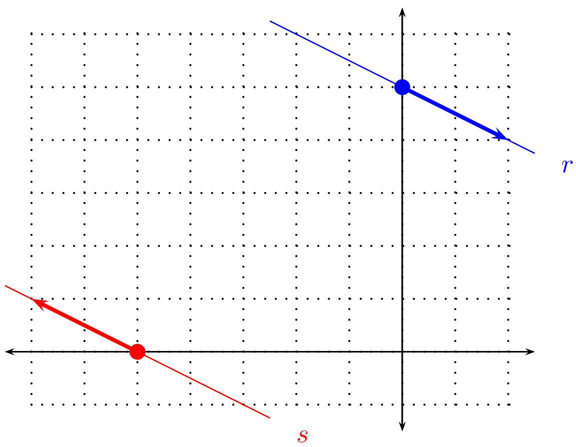
Ejemplo 12.274

Calcula la posición relativa entre las rectas $r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$ y $s : x + 2y + 5 = 0$

Solución: Se cortan en los puntos que son solución conjunta de ambas ecuaciones.

$$(2t) + 2(5 - t) + 5 = 0 \Longrightarrow 2t + 10 - 2t + 5 = 0 \Longrightarrow 15 = 0 \text{ (No sol.)} \Longrightarrow \boxed{r \parallel s}$$

□



EJEMPLO 12.275

Calcula la posición relativa entre las rectas $r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$ y $s : x + 2y + 5 = 0$

Solución: Para encontrar un punto de s en la ecuación general fijamos un valor para una variable y calculamos la otra. Por ejemplo, $y = 0 \Longrightarrow x + 2(0) + 5 = 0 \Longrightarrow x = -5$

$$r : \begin{cases} A_r(0,5) \\ \vec{v}_r(2,-1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} A_s(-5,0) \\ \vec{v}_s(-2,1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{A_rA_s} = (-5,-5)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \Longrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_s$$

$$\vec{v}_r \parallel \vec{v}_s \nparallel \overrightarrow{A_rA_s} \Longrightarrow \boxed{r \parallel s}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_r \\ \overrightarrow{A_rA_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 5 = -15 \neq 0 \Longrightarrow \vec{v}_r \nparallel \overrightarrow{A_rA_s}$$

□

EJEMPLO 12.276

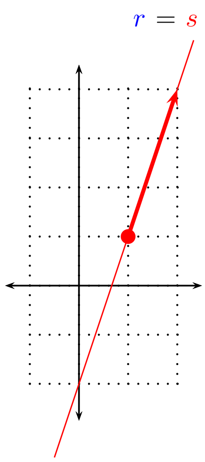
Calcula la posición relativa entre las rectas $r : y = 3x - 2$ y $s : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{1-y}{6}$

Solución: Encontremos la ecuación explícita de s:

$$6(x-1) = -2(1-y) \Longrightarrow 6x - 6 = -2 + 2y \Longrightarrow 6x - 4 = 2y \Longrightarrow y = 3x - 2 \Longrightarrow \boxed{r = s}$$

□

Observación 41. *En el anterior ejemplo, debemos prestar atención a la ecuación continua de s: hay que reordenar la fracción del segundo término para extraer las segundas coordenadas de un punto y un vector suyos.*



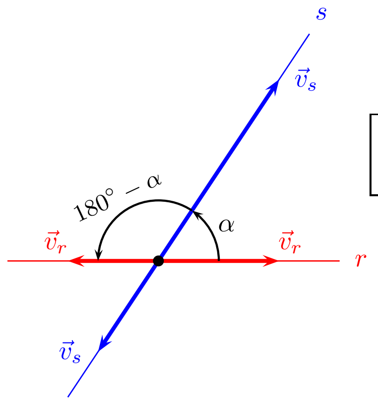
- $s : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{1-y}{6} \Longrightarrow s : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{-6} \Longrightarrow s : \begin{cases} A_s(1,1) \\ \vec{v}_s(-2,-6) \parallel (1,3) \end{cases}$
- $r : \begin{cases} A_r(0,-2) \\ m_r = 3 = \frac{3}{1} \Rightarrow \vec{v}_r(1,3) \end{cases}$
- $\overrightarrow{A_rA_s} = (1-0, 1-(-2)) = (1,3)$

$$\vec{v}_r(1,3) \parallel \vec{v}_s(1,3) \parallel \overrightarrow{A_rA_s}(1,3) \Longrightarrow r = s$$

5 Ángulo entre dos rectas

Definición 32. *Es el menor de los dos posibles ángulos que forman dos de sus vectores directores.*

Dichos ángulos son suplementarios y su coseno, por tanto, será un número entre 0 y 1 (cuadrante I) o su opuesto negativo (cuadrante II). Debemos elegir el positivo, que nos da el ángulo menor, por eso la expresión viene encerrada en valor absoluto



$$\boxed{\cos\alpha = \left|\frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r|\,|\vec{v}_s|}\right|}$$

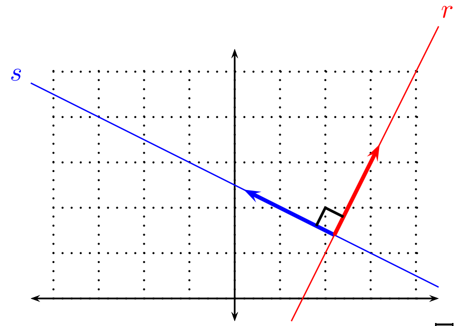
EJEMPLO 12.277

Calcula el ángulo que forman las rectas $r : \dfrac{x+1}{-2} = y - 3$ y $s : 2x - y = 3$

Solución: $\vec{v}_r = (-2, 1)$; $\vec{v}_s = (1, 2)$

$$\cos\alpha = \left|\frac{(-2,1)\cdot(1,2)}{|(-2,1)|\,|(1,2)|}\right| = \left|\frac{0}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}\right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha = \arccos 0 = 90°$$



□

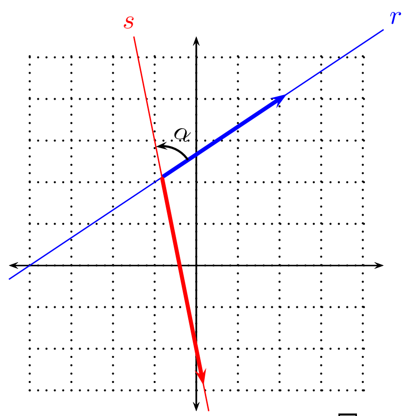
EJEMPLO 12.278

Calcula el ángulo que forman las rectas $r : 2x - 3y + 8 = 0$ y $s : \begin{cases} x = t \\ y = -2 - 5t \end{cases}$

Solución: $\vec{v}_r = (3, 2)$; $\vec{v}_s = (1, -5)$

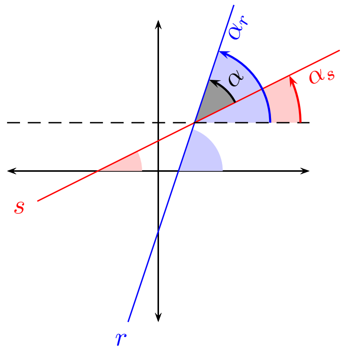
$$\cos\alpha = \left|\frac{(3,2)\cdot(1,-5)}{|(3,2)|\,|(1,-5)|}\right| = \left|\frac{-7}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}\right| = \left|\frac{-7}{13\sqrt{2}}\right| =$$

$$= \frac{7}{13\sqrt{2}} \Longrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{7}{13\sqrt{2}}\right) \approx 67{,}62°$$



□

Otra expresión, en ocasiones útil, la podemos encontrar usando las pendientes. Una vez más, utilizamos el valor absoluto para asegurarnos de elegir el ángulo menor entre los dos posibles:



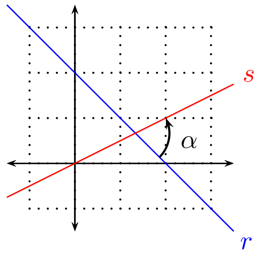
$\alpha = \alpha_r - \alpha_s$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha =} \ \operatorname{tg}(\alpha_r - \alpha_s) = \left|\frac{\operatorname{tg}\alpha_r - \operatorname{tg}\alpha_s}{1 + \operatorname{tg}\alpha_r \operatorname{tg}\alpha_s}\right| = \boxed{\left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right|}$$

Ejemplo 12.279

Calcula el ángulo que forman las rectas $r: y = 2 - x$ y $s: x - 2y = 0$

Solución: $m_r = -1$; $\vec{v}_s = (2,1) \Longrightarrow m_s = \frac{1}{2}$



$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{(-1) - \frac{1}{2}}{1 + (-1)\cdot\frac{1}{2}}\right| = \left|\frac{\frac{-3}{2}}{\frac{1}{2}}\right| = |-3| = 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha = \operatorname{arc\,tg}(3) = 71{,}565^\circ$$

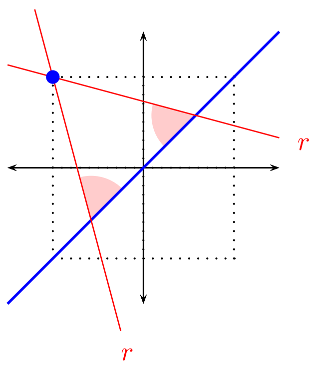
□

Esta última expresión, a través de la tangente, es necesaria para resolver siguientes problemas:

Ejemplo 12.280

Calcula las rectas que pasan por el punto $(-1,1)$ y forman un ángulo de 60° con la bisectriz del primer cuadrante.

Solución: Sea r la recta buscada: $r: \begin{cases} A_r = (-1,1) \\ m_r \end{cases}$



Bisectriz del primer cuadrante: $y = x \Longrightarrow m = 1$

$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \left|\frac{m_r - m}{1 + m_r m}\right| \Longrightarrow \sqrt{3} = \left|\frac{m_r - 1}{1 + m_r \cdot 1}\right| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt{3} = \left|\frac{m_r - 1}{1 + m_r}\right| \Longrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} = \dfrac{m_r - 1}{1 + m_r} \\[2ex] -\sqrt{3} = \dfrac{m_r - 1}{1 + m_r} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} + \sqrt{3}\,m_r = m_r - 1 \Longrightarrow 1 + \sqrt{3} = m_r - \sqrt{3}\,m_r \Longrightarrow m_r = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \\ -\sqrt{3} - \sqrt{3}\,m_r = m_r - 1 \Longrightarrow 1 - \sqrt{3} = m_r + \sqrt{3}\,m_r \Longrightarrow m_r = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} r: \begin{cases} A_r = (-1,1) \\ m_r = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \end{cases} \Longrightarrow r: \boxed{y - 1 = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}(x+1)} \\[4ex] r: \begin{cases} A_r = (-1,1) \\ m_r = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \end{cases} \Longrightarrow r: \boxed{y - 1 = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}(x+1)} \end{cases}$$

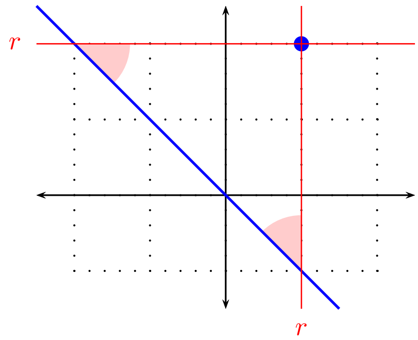
□

EJEMPLO 12.281

Calcula las rectas que pasan por el punto $(1,2)$ y forman un ángulo de 45° con la bisectriz del segunto cuadrante.

Solución: Sea r la recta buscada: $r : \begin{cases} A_r = (1,2) \\ m_r \end{cases}$

Bisectriz del segundo cuadrante: $y = -x \Longrightarrow m = -1$



$$\operatorname{tg}(45°) = \left|\frac{m_r - m}{1 + m_r m}\right| \Longrightarrow 1 = \left|\frac{m_r - (-1)}{1 + m_r(-1)}\right| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1 = \left|\frac{m_r + 1}{1 - m_r}\right| \Longrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{m_r + 1}{1 - m_r} \\ -1 = \dfrac{m_r + 1}{1 - m_r} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 - m_r = m_r + 1 \Longrightarrow m_r = 0 \\ -1 + m_r = m_r + 1 \Longrightarrow m_r = \frac{2}{0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r : \begin{cases} A_r = (1,2) \\ m_r = 0 \text{ (Horiz.)} \end{cases} \Longrightarrow r : \boxed{y = 2} \\ \\ r : \begin{cases} A_r = (1,2) \\ m_r = \frac{2}{0} \text{ (Vert.)} \end{cases} \Longrightarrow r : \boxed{x = 1} \end{cases}$$

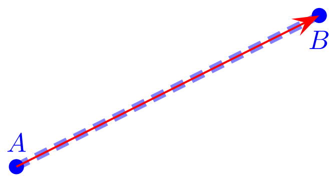
□

6 Distancias

6.1 Entre dos puntos

Sean $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$;

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



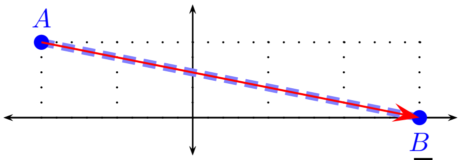
EJEMPLO 12.282

Calcula la distancia entre los puntos $A(-2,1)$ y $B(3,0)$.

Solución:

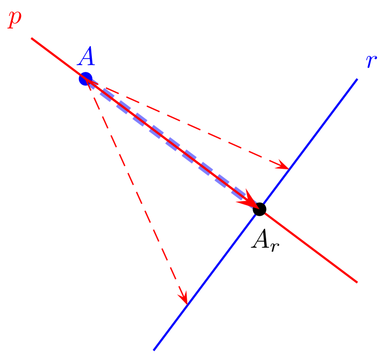
Sean $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$;

$$d(A,B) = |(5,-1)| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$



□

6.2 Entre punto y recta



Sean $A(a,b)$ y $r: Ax+By+C=0$.

$d(A,r)$ es la menor de las distancias posibles entre A y los puntos de r.

Es obvio que es $d(A,r)=d(A,A_r)$,
donde A_r es la proyección ortogonal de A sobre r.

Si resolvemos el problema de forma general, encontraremos una fórmula fácil de recordar:

- Perpendicular a r que pasa por A : $\quad p:\left\{\begin{array}{l} A_p=A(a,b) \\ \vec{v}_p=\vec{n}_r=(A,B)\end{array}\right. \Longrightarrow p:\left\{\begin{array}{l} x=a+At \\ y=b+Bt\end{array}\right.$
- Proyección de A sobre r: $A_r=p\cap r$. Sustituimos p en r:

  $$A(a+At)+B(b+Bt)+C=0 \Longrightarrow A^2t+B^2t+Aa+Bb+C=0 \Longrightarrow t=-\frac{Aa+Bb+C}{A^2+B^2}$$

  Entonces, $A_r=\left(a-A\cdot\frac{Aa+Bb+C}{A^2+B^2}, b-B\cdot\frac{Aa+Bb+C}{A^2+B^2}\right)$

  Y, también, $\overrightarrow{AA_r}=\left(-A\cdot\frac{Aa+Bb+C}{A^2+B^2}, -B\cdot\frac{Aa+Bb+C}{A^2+B^2}\right)$
- $\boxed{d(A,r)=}\; d(A,A_r)=\left|\overrightarrow{AA_r}\right|=\sqrt{\left(-A\cdot\frac{Aa+Bb+C}{A^2+B^2}\right)^2+\left(-B\cdot\frac{Aa+Bb+C}{A^2+B^2}\right)^2}=$

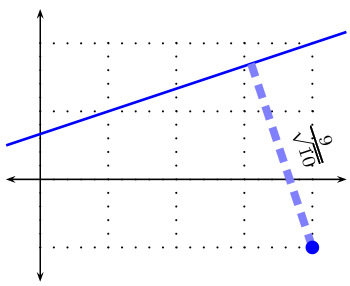
$$=\sqrt{\frac{A^2}{(A^2+B^2)^2}(Aa+Bb+C)^2+\frac{B^2}{(A^2+B^2)^2}(Aa+Bb+C)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cancel{A^2+B^2}}{(A^2+B^2)^{\cancel{2}}}(Aa+Bb+C)^2}=\sqrt{\frac{(Aa+Bb+C)^2}{A^2+B^2}}=\boxed{\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

EJEMPLO 12.283

Calcula la distancia del punto $A(4,-1)$ a la recta $r: y=\dfrac{x+2}{3}$

Solución: $r: 3y=x+2 \Longrightarrow r: -x+3y-2=0$



$$d(A,r)=\frac{|(-1)(4)+(3)(-1)-2|}{\sqrt{(-1)^2+(3)^2}}=\frac{|-9|}{\sqrt{10}}=\frac{9}{\sqrt{10}}$$

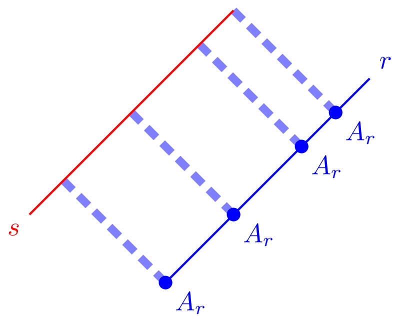
□

6.3 Entre dos rectas

Sean r y s dos rectas.

$d(r,s)$ es la menor de las distancias posibles entre los puntos de r y de s.

- Es obvio que si $r \nparallel s \Longrightarrow d(r,s)=0$
- Si $r \parallel s \Longrightarrow d(r,s)=d(A_r,s)$, para cualquier punto A_r de r



Para hallar la distancia entre dos rectas es necesario estudiar previamente su posición relativa: sería erróneo calcularla como la distancia desde un punto de una de ellas a la otra si no son paralelas.

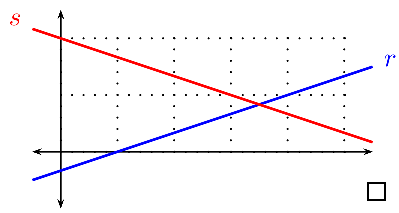
Ejemplo 12.284

Calcula la distancia entre las rectas $r: \dfrac{-x-2}{-3}=y+1$ y $s: \begin{cases} x=-3\mu \\ y=2+\mu \end{cases}$

Solución:

$$r: \frac{x+2}{3}=y+1 \Longrightarrow \vec{v}_r(3,1);\ \vec{v}_s(-3,1)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s \Longrightarrow r \between s \Longrightarrow d(r,s)=0$$



□

Ejemplo 12.285

Halla la distancia entre las rectas $r:(x,y)=(-3,2)+\lambda(2,-1)$ y $s: 2x+4y+5=0$

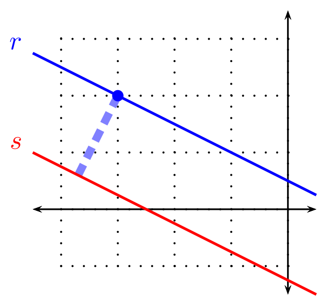
Solución:

$\vec{v}_r(2,-1);\ \vec{v}_s(-4,2)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_s \Longrightarrow r \parallel s$$

$d(r,s)=d(A_r,s)=d((-3,2),s)=$

$$=\frac{|(2)(-3)+(4)(2)+5|}{\sqrt{(2)^2+(4)^2}}=\frac{|7|}{\sqrt{20}}=\frac{7}{2\sqrt{5}}$$



□

7 Algunos problemas geométricos

7.1 Bisectrices de dos rectas

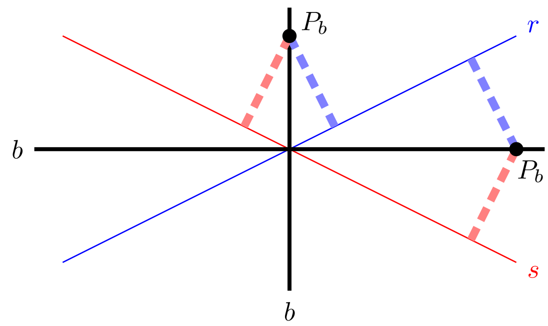
Son las dos rectas formadas por los puntos que equidistan de ambas. Las dos bisectrices son, además, perpendiculares.

Para calcularlas, basta con aplicar la condición de igualdad de distancias: un punto $P_b(x, y)$ está en una bisectriz de las rectas

$$r : Ax + By + c = 0 \quad \text{y} \quad s : A'x + B'y + C' = 0$$

si $d(P_b, r) = d(P_b, s)$, es decir, si

$$\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|A'x + B'y + C'|}{\sqrt{(A')^2 + (B')^2}}$$



Esa igualdad nos lleva a las ecuaciones de ambas bisectrices.

Ejemplo 12.286

Encuentra las bisectrices de las rectas $r : y = 2x - 5$ y $s : x - 2y + 4 = 0$

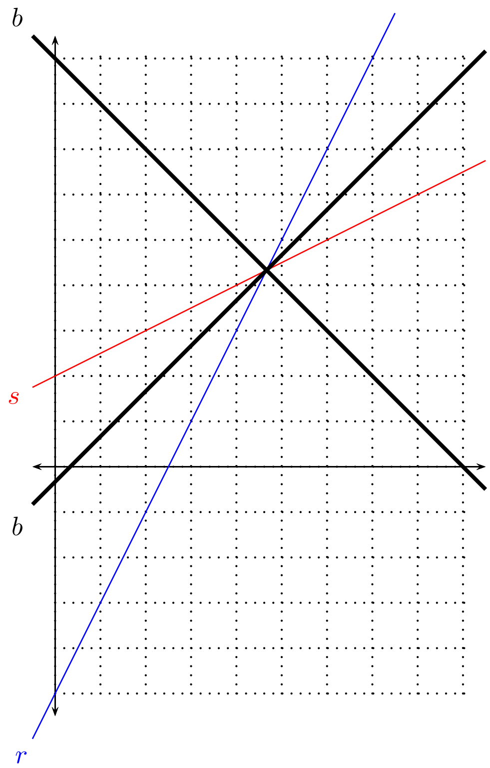
Solución: $r : 2x - y - 5 = 0$

$$\frac{|2x - y - 5|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|x - 2y + 4|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}}$$

$$\frac{|2x - y - 5|}{\cancel{\sqrt{5}}} = \frac{|x - 2y + 4|}{\cancel{\sqrt{5}}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 5 = x - 2y + 4 \\ 2x - y - 5 = -(x - 2y + 4) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b : x + y - 9 = 0 \\ b : 3x - 3y - 1 = 0 \end{array} \right.$$

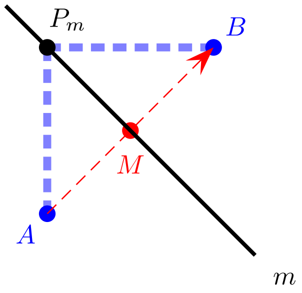


□

7 2 Mediatriz de dos puntos

Es la recta perpendicular al vector que los une y pasa por su punto medio.

También se puede definir como la recta formada por los puntos que equidistan de ambos puntos, lo que nos aporta dos formas diferentes de calcular una mediatriz.



EJEMPLO 12.287

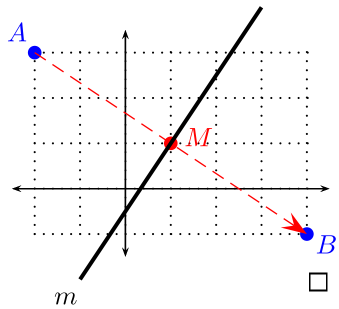
Calcula la ecuación general de la mediatriz de los puntos $A(-2,3)$ y $B(4,-1)$

Solución: $\overrightarrow{AB} = (4-(-2), -1, -3) = (6,-4)$

$$m : \begin{cases} A_m = M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-2,3) + \frac{1}{2}(6,-4) = (1,1) \\ \vec{v}_m = (4,6) \parallel (2,3) \end{cases}$$

$$m : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} \Longrightarrow m : 3x - 3 = 2y - 2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m : 3x - 2y - 1 = 0$$



□

De otra forma:

EJEMPLO 12.288

Calcula la ecuación general de la mediatriz de los puntos $A(-2,3)$ y $B(4,-1)$

Solución: Sea $P_m(x,y) \in m$

$$d(P_m, A) = d(P_m, B)$$

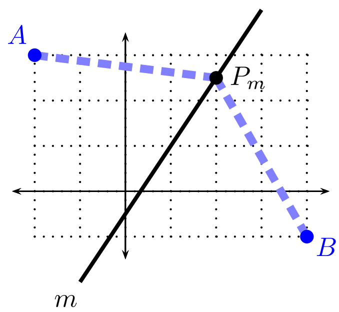
$$\sqrt{(x-(-2))^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-(-1))^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2}\right)^2$$

$$\cancel{x^2} + 4x + 4 + \cancel{y^2} - 6y + 9 = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} + 2y + 1$$

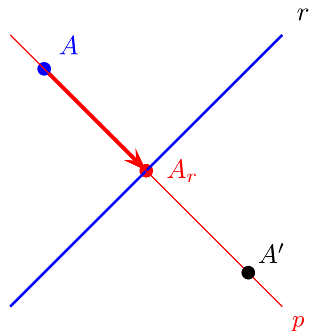
$$12x - 8y - 4 = 0$$

$$m : 3x - 2y - 1 = 0$$



□

7.3 Simétrico de un punto respecto de una recta



Es el simétrico respecto a la proyección ortogonal sobre la recta.

Así, si llamamos A' al simétrico de A respecto a la recta r,

A_r su proyección ortogonal, $A' = A + 2\overrightarrow{AA_r}$

EJEMPLO 12.289

Halla el simétrico del punto $P(1,3)$ respecto a la recta $r: y = 2x - 1$

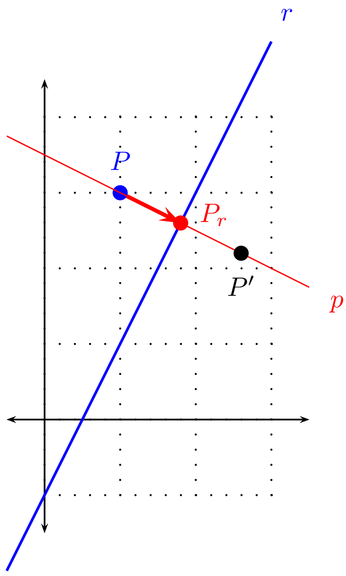
Solución: $m = 2 = \frac{2}{1} \Longrightarrow \vec{v}_r(1,2) \Longrightarrow \vec{v}_p(-2,1)$

- Perpendicular a r que contiene a P:

$$p: \begin{cases} A_p = P(1,3) \\ \vec{v}_p = (-2,1) \end{cases} \Longrightarrow p: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$$

- $P_r = p \cap r = \left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{13}{5}\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} (3+t) &= 2(1-2t) - 1 \\ 3 + t &= 2 - 4t - 1 \\ 5t &= -2 \\ t &= \frac{-2}{5} \end{aligned}} \Longrightarrow p: \begin{cases} x = 1 - 2(\frac{-2}{5}) = \frac{9}{5} \\ y = 3 + \frac{-2}{5} = \frac{13}{5} \end{cases}$$



- $\overrightarrow{PP_r} = (\frac{9}{5} - 1, \frac{13}{5} - 3) = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{-2}{5}\right)$
- $P' = P + 2\overrightarrow{PP_r} = (1,3) + 2(\frac{4}{5}, \frac{-2}{5}) = \left(\dfrac{13}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$

$\square$

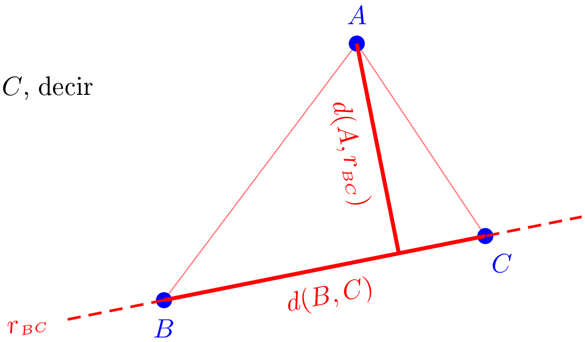
7.4 Área de un triángulo

Si no están alineados, tres puntos distintos son los vértices de un triángulo. Su área se calcula con la conocida fórmula Área $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$, donde b es una de las tres bases que elegimos previamente y h su correspondiente altura.

Podríamos, por ejemplo, dados tres puntos A, B y C, decir que el área del triángulo que forman es

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot d(B,C) \cdot d(A, r_{BC})$$

donde r_{BC} es la recta que pasa por B y C



Ejemplo 12.290

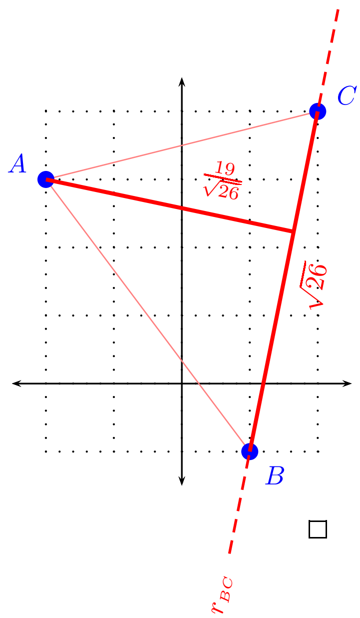
Calcula el área del triángulo cuyos vértices son $A(-2,3)$, $B(1,-1)$ y $C(2,4)$

Solución: $\overrightarrow{BC} = (2-1, 4-(-1)) = (1,5)$

- Base: $d(B,C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{26}$
- $r_{BC} : \begin{cases} P_r = B(1,-1) \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{BC}(1,5) \end{cases} \Longrightarrow r_{BC} : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{5}$

  $r_{BC} : 5x - 5 = y + 1 \Longrightarrow r_{BC} : 5x - y - 6 = 0$
- Altura: $d(A, r_{BC}) = \dfrac{|(5)(-2)+(-1)(3)-6|}{\sqrt{(5)^2+(-1)^2}} =$

  $= \dfrac{|-19|}{\sqrt{26}} = \dfrac{19}{\sqrt{26}}$
- Área $= \dfrac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{26}} \cdot \dfrac{19}{\cancel{\sqrt{26}}} = \dfrac{19}{2}$



□

8 Ejercicios propuestos

1. Halla las coordenadas del punto medio de los siguientes pares: $\to$ a) $(2,3)$, b) $(2,-2)$, c) $(3,-5)$

   a) $A(3,-3)$, $B(1,9)$ b) $C(0,-5)$, $D(4,1)$ c) $E(-2,-7)$, $F(8,-3)$

2. Encuentra las coordenadas de los puntos que dividen en tres partes iguales al segmento de extremos $A(-5,-2)$ y $B(4,1)$. $\to (-2,-1)$, $(1,0)$

3. Calcula las coordenadas de los puntos que dividen en cinco partes iguales al segmento de extremos $A(-9,8)$ y $B(1,-12)$. $\to (-7,4)$, $(-5,0)$, $(-3,-4)$, $(-1,-8)$

4. Los vértices de un triángulo son $A(-7,8)$, $B(-10,4)$ y $C(-4,4)$. Dibuja el triángulo ABC y su simétrico $A'B'C'$ respecto del punto $P(-2,1)$. Escribe las coordenadas de A', B' y C'. $\to A'(3,-6)$, $B'(6,-2)$, $C'(0,-2)$

5. Comprueba si los puntos $A(-3,2)$ y $B(5,-1)$ están en las rectas:

   a) $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 3+4t \end{cases}$ $\to$ A no; B sí b) $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+7}{2}$ $\to$ A no; B sí

6. Halla el valor de k para que la recta $x + ky - 7 = 0$ contenga al punto $A(5,-2)$. $\to k = -1$

7. Escribe la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $P(-2,5)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-3,-2)$ $\to y = \frac{2x}{3} + \frac{19}{3}$

8. Escribe la ecuación general de la recta que pasa por los puntos:
   $\to$ a) $8x+3y-7=0$, b) $8x+2y-14=0$, c) $-4x+8y+20=0$

   a) $A(2,-3)$ y $B(-1,5)$ b) $C(0,7)$ y $D(2,-1)$ c) $E(5,0)$ y $F(-3,-4)$

9. Da la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,-5)$ y es paralela a la recta:
   $\to$ a) $\begin{cases} x = 3+t \\ y = -5-3t \end{cases}$, b) $4x-2y-22=0$, c) $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+5}{-7}$, d) $y=-2x+1$, e) $2x-6=0$, f) $4y+20=0$

   a) $\begin{cases} x = -5+t \\ y = 2-3t \end{cases}$ b) $4x-2y+5=0$ c) $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{-7}$

   d) $y = -2x+4$ e) $2x+7=0$ f) $4y-2=0$

10. Da la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2,3)$ y es perpendicular a la recta:
    $\to$ a) $\begin{cases} x = -2+t \\ y = 3 \end{cases}$, b) $9x+y+15=0$, c) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-3}{2}$, d) $y = -\frac{1}{2}x+2$, e) $y-3=0$, f) $x+2=0$

    a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6-t \end{cases}$ b) $-x+9y+2=0$ c) $\dfrac{x-7}{-2} = \dfrac{y+1}{5}$

    d) $y = 2x-4$ e) $x+5=0$ f) $y=0$

11. Calcula los puntos de corte, si es posible, de las parejas de rectas.

    a) $r: 2x-y+8=0$, $s: \begin{cases} x = -2+3t \\ y = 7+t \end{cases}$ $\to (-1,6)$

    b) $r: y = \dfrac{6x+3}{2}$, $s: \begin{cases} x = 1+t \\ y = \frac{3}{2}+3t \end{cases}$ $\to r \parallel s$

12. Averigua la posición relativa de las rectas r y s. Encuentra el punto de intersección cuando sean secantes.

    a) $r: 3x+y-1=0$, $s: 2x-4y+18=0$ $\to r \times s; r\cap s = (-1,4)$

    b) $r: 4x-2y+6=0$, $s: -6x+3y+12=0$ $\to r \parallel s$

c) $r: \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, \quad s: x + 2y - 7 = 0$ $\to r \parallel s$

d) $r: y = \dfrac{-5x+1}{-2}, \quad s: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-7}{-5}$ $\to r \times s; r \cap s = (0, -\frac{1}{2})$

e) r pasa por $(-3, 4)$ y $(8, -1)$, $\quad s: x - 2y + 15 = 0$ $\to r \times s; r \cap s = (\frac{-107}{21}, \frac{104}{21})$

f) r pasa por $(-1, 4)$ y $(2, -5)$, $\quad s: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{7-y}{-3}$ $\to r = s$

13. ¿Es isósceles el triángulo de vértices $A(-4, 3)$, $B(3, 10)$ y $C(8, -2)$? $\to$ Sí

14. Se consideran los puntos $A(0, 1)$, B $(4, 9)$ y $C(-4, k)$.

    a) Halla P para que divida al segmento AB en dos partes tales que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$. $\to P(1, 3)$

    b) Determina k para que el punto C sea el simétrico de B respecto de A. $\to k = -7$

15. Sean $A(3, 4)$ y $B(-5, 2)$. Se pide: $\to$ a) $(-1, 3)$, b) $y = \frac{x}{4} + \frac{13}{4}$, c) $y = \frac{x}{4}$, d) $y = -4x - 1$

    a) El punto medio del segmento AB.

    b) La ecuación explícita de la recta r que pasa por los puntos A y B.

    c) La recta s que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a r.

    d) La recta t que pasa por el punto medio del segmento AB y es perpendicular a r.

16. Halla k para que la recta $\dfrac{x+1}{k} = \dfrac{y-2}{3}$ sea paralela a $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + 5\lambda \end{cases}$ $\to k = \frac{-3}{5}$

17. Halla m para que $r: y = mx + 6$ y $s: 8x - 5y + 1 = 0$ sean ortogonales. $\to m = \frac{-5}{8}$

18. Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

    a) $r: y = \dfrac{-6x-4}{3}, \quad s: -4x + 2y - 1 = 0$ $\to 53° 7'$

    b) $r: \begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases}, \quad s: 2x + 2y - 1 = 0$ $\to 90°$

19. Halla m para que $y = mx - 1$ forme un ángulo de 45° con $\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-3}{6}$ $\to m = 3$; $m = \frac{-1}{3}$

20. Halla la distancia del punto $P(4, -2)$ a la recta $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{6}$ $\to 2\sqrt{5}$

21. Halla la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por $(-3, 6)$ y es paralela a $\dfrac{x-1}{-6} = \dfrac{y-2}{8}$ $\to \frac{6}{5}$

22. Las rectas que contienen los lados de un triángulo son $x + y - 5 = 0$, $6x + 5y - 24 = 0$, y $2x + y - 8 = 0$. Calcula sus vértices y su área. $\to A(-1, 6)$; $A(3, 2)$; $A(4, 0)$; Área $= 2$

23. Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:

    a) $r: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{6}, \quad s: s: y = 2x - 3$ $\to 0$

    b) $r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}, \quad s: -x + 2y + 5 = 0$ $\to \frac{12\sqrt{5}}{5}$

24. Halla el valor de a para que la distancia del punto $P(3, a)$ a la recta $r: 12x + 5y - 19 = 0$ sea de 4 unidades. $\to a = 7$; $a = \frac{-69}{5}$

25. Halla el valor de b para que la recta $r: \dfrac{x+1}{b} = \dfrac{y+3}{3}$ y el punto $P(-4, 1)$ disten 5 unidades. $\to b = 4$

26. Determina a para que $r: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = -1 + a\lambda \end{cases}$ y $s: 4x - 3ay + 6 = 0$ sean paralelas y halla, en ese caso, la distancia que las separa. $\to a = 2; d = \frac{14}{\sqrt{13}}, a = -2; d = \frac{8}{\sqrt{13}}$

27. Calcula k para que $r: y = 2x + 1$ y $s: 3x + ky + 3 = 0$ sean perpendiculares. $\to k = 6$

28. Calcula k para que $r: 2x + 3y + 5 = 0$ y $s: \begin{cases} x = -6\lambda + k \\ y = 4\lambda + 2 \end{cases}$ sean coincidentes. $\to k = \frac{-11}{2}$

29. Encuentra la ecuación de una recta paralela a $r: \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-5}{4}$ y que se halle a 8 unidades de distancia de ella. $\to 4x + 3y + 29 = 0;\ 4x + 3y - 51 = 0$

30. La recta que pasa por $(2, 3)$ y es paralela a $\dfrac{x-6}{4} = \dfrac{y+3}{-6}$ forma un triángulo con los ejes cartesianos. Calcula su área. $\to 12$

31. Dadas $r: 5x - 2y - 12 = 0$, $s: x + 6y + 4 = 0$ y $t: -2x + y + 1 = 0$, halla la recta que pasa por el punto de intersección de r y s y es paralela a t. $\to y = 2x - 5$

32. Dados los puntos $A(-2, 5)$, $B(6, 7)$ y $C(3, -1)$,

    a) Escribe la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A y B. $\to x - 4y + 22 = 0$

    b) Calcula la distancia del punto C a la recta que pasa por los puntos A y B. $\to \frac{29\sqrt{17}}{17}$

    c) Halla el área del triángulo ABC. $\to 29$

    d) Escribe la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A y B. $\to 4x + y - 14 = 0$

    e) Calcula el ángulo que forma la mediatriz anterior con el eje de abscisas. $\to 75^\circ 57' 49{,}52''$

33. Halla las ecuaciones de las bisectrices que determinan las rectas $r: 3x+2y-6 = 0$ y $s: 2x+3y+6 = 0$. $\to x - y - 12 = 0; x + y = 0$

34. Dadas las rectas $r: 4x - 3y - 9 = 0$ y $s: \begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

    a) Escribe las ecuaciones de las bisectrices de r y s. $\to x + y - 4 = 0; x - y - 2 = 0$

    b) ¿Qué ángulo forman las rectas bisectrices calculadas en el apartado anterior? $\to 90^\circ$

35. Dada la recta $r: 4x - 3y - 6 = 0$ y el punto $P(3, -1)$

    a) Encuentra las dos rectas paralelas a r que disten 2 unidades del punto P. $\to 4x - 3y - 25 = 0; 4x - 3y - 5 = 0$

    b) Calcula la distancia entre las dos rectas del apartado anterior. $\to 4$

36. Encuentra las rectas perpendiculares a $r: 6x + 8y - 1 = 0$ que disten 5 unidades del punto $P(1, -2)$. $\to 4x - 3y + 15 = 0; 4x - 3y - 35 = 0$

37. Sean A, B, C y D los puntos de corte de las rectas $r: x - 2y + 2 = 0$ y $s: 2x - y - 2 = 0$ con los ejes. Demuestra que $ABCD$ es un trapecio isósceles y halla su área. $\to 4{,}5$

38. Un vértice de un cuadrado es $A(3, 11)$ y una diagonal está sobre $r: x - 2y + 4 = 0$. Encuentra los otros tres vértices. $\to B(12, 8);\ C(9, -1);\ D(0, 2)$

39. Dada la recta $r: \begin{cases} x = 8 + 4\lambda \\ y = -7 - 3\lambda \end{cases}$ y el punto $P(-1, 6)$

    a) Obtén la ecuación general de r. Escribe la ecuación de la recta s que es paralela a r y pasa por P. $\to r: 3x + 4y + 4 = 0;\ s: 3x + 4y - 21 = 0$

    b) Calcula la distancia que separa P de r. Obtén los dos puntos de la recta s que están a la misma distancia de r que de P. $\to d = 5,\ Q(3, 3);\ R(-5, 9)$

40. Obtén la ecuación general de las rectas r que pasan por el punto $P(5, 4)$ y forman un ángulo de 45° con la recta $s: 3x - y - 5 = 0$. $\to 2x + y - 14 = 0;\ -x + 2y - 3 = 0$

41. Del paralelogramo $ABCD$ se conocen tres de sus vértices: $A(2,3)$, $B(-6,-1)$ y $C(-3,-2)$.

 a) Obtén las coordenadas del vértice D. $\rightarrow D(5,2)$

 b) Obtén la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A y B. $\rightarrow x-2y+4=0$

 c) Comprueba que el área del paralelogramo $ABCD$ es 20.

 d) Calcula los ángulos del paralelogramo $ABCD$ y exprésalos en radianes. $\rightarrow \frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$

42. Halla el área del triángulo de vértices $A(-3,8)$, $B(-3,2)$, $C(5,2)$. $\rightarrow 24$

43. Halla las ecuaciones de las rectas que distan 10 unidades de $r: y=3x-2$.
$\rightarrow 3x-y+8=0$; $3x-y-12=0$

44. Halla la ecuación de las rectas que pasan por el origen de coordenadas y forman un ángulo de 60° con la recta $r: y=x+3$. $\rightarrow y=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x$; $y=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}x$

45. Un rombo $ABCD$ tiene el vértice A en el eje de abscisas. Otros dos vértices opuestos son $B(6,0)$ y $D(2,-2)$. Halla A y C. $\rightarrow A(\frac{7}{2},0)$; $B(\frac{9}{2},-2)$

46. Dada la recta $4x+3y-6=0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas. $\rightarrow \frac{x}{4}=\frac{y-2}{3}$

47. Calcula la mediatriz del segmento de extremos $P(0,1)$ y $Q(4,-3)$ $\rightarrow x-y-3=0$

48. Halla el punto simétrico de $P(1,1)$ respecto a la recta $x-2y-4=0$. $\rightarrow P'(3,-3)$

49. El lado desigual del triángulo isósceles ABC, tiene por extremos $A(1,-2)$ y $B(4,3)$. El vértice C está en la recta $3x-y+8=0$. Halla las coordenadas de C. $\rightarrow C(\frac{-5}{3},3)$

50. Encuentra los puntos de la recta $x-2y-6=0$ que equidistan de los ejes. $\rightarrow (-6,-6)$; $(2,-2)$

51. Halla los puntos del eje de abscisas que equidistan de las rectas $4x+3y+6=0$ y $3x+4y-9=0$.
$\rightarrow (-15,0)$; $(\frac{3}{7},0)$

52. La recta $2x+y-4=0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto $(0,0)$. Halla las coordenadas del otro extremo. $\rightarrow (\frac{16}{5},\frac{8}{5})$

MATEM – I

TEMA 13

LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO

Índice

1 Introducción

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos (en este curso, del plano) que cumplen una determinada propiedad. Ya hemos visto, en el tema anterior, cómo calcular algunos lugares geométricos:

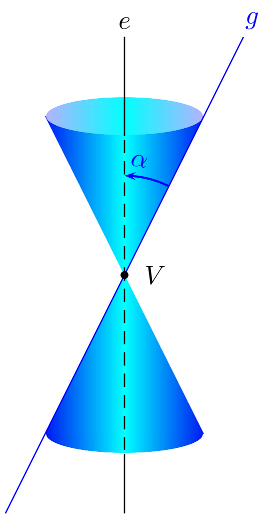
- La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos.
- La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas que lo forman.

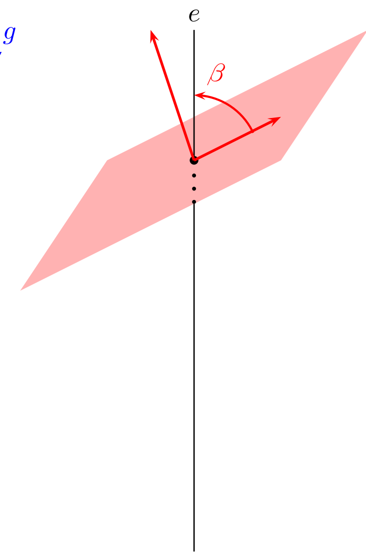
La solución consiste en, a partir de una traducción matemática de la propiedad que cumplen los puntos de ese lugar, encontrar la ecuación de la recta correspondiente. Podemos, sin embargo, definir otros lugares geométricos, con propiedades sencillas, cuyo resultado no es una recta. Nos vamos a centrar en cuatro de ellos, las llamadas cónicas (porque se pueden visualizar como secciones de un cono) y en estudiar sus elementos y ecuaciones (que, al no ser rectas, ya no serán lineales o de grado uno, sino, en el caso de las cónicas, cuadráticas).

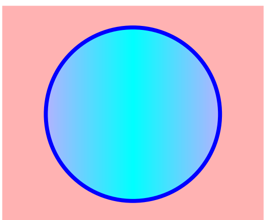
Para ilustrarlo, hay que tener en cuenta que un cono es la superficie en el espacio que se obtiene al rotar una recta (generatriz, g) alrededor de otra (eje, e) a la que corta en un punto (vértice, V), formando un ángulo α, $0 < \alpha < 90°$.

Si a un cono lo cortamos con un plano π que no pase por el vértice, formando un ángulo $\beta > 0$ con el eje, obtenemos las curvas llamadas cónicas:

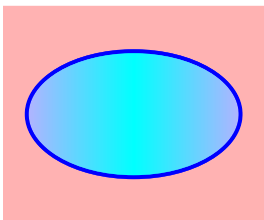
- $\beta = 90° \Longrightarrow \pi \cap \text{Cono} = \text{Circunferencia}$
- $90° > \beta > \alpha > 0 \Longrightarrow \pi \cap \text{Cono} = \text{Elipse}$
- $90° > \beta = \alpha > 0 \Longrightarrow \pi \cap \text{Cono} = \text{Parábola}$
- $90° > \alpha > \beta > 0 \Longrightarrow \pi \cap \text{Cono} = \text{Hipérbola}$



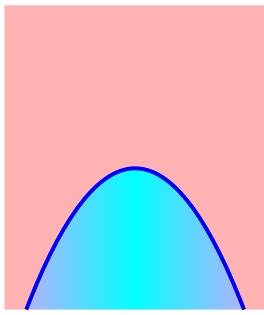




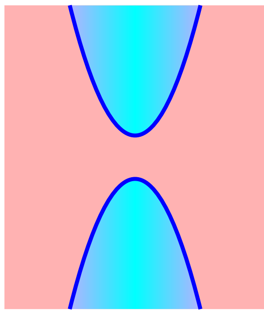
Circunferencia



Elipse



Parábola



Hipérbola

Dicho ésto, es mejor tratarlas bajo la perspectiva de lugar geométrico, pues vamos a aprovechar sus propiedades para, a partir de ellas, deducir sus ecuaciones.

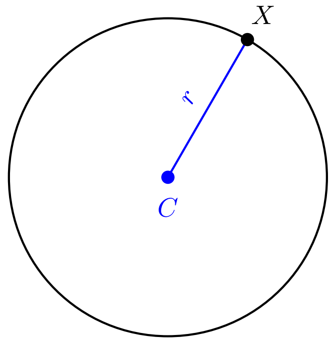
2 La circunferencia

La circunferencia c de centro el punto $C(a,b)$ y radio r, $c : \begin{cases} C(a,b) \\ r \end{cases}$, es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a C es r;

2 1 Ecuaciones de la circunferencia

Así, si $X(x, y)$ es un punto de la circunferencia,

$$d(X, C) = r$$
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \text{ (ec. centro–radio)}$$



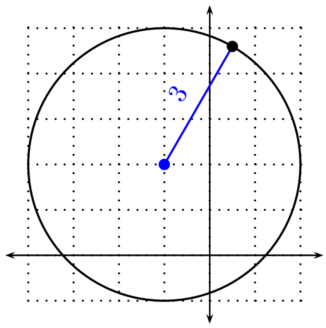
Si seguimos desarrollando y pasando todo al primer miembro, llegaremos a una expresión de la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \text{ (ec. general)}$$

EJEMPLO 13.291

La circunferencia de centro $(-1, 2)$ y radio 3,
$c : \begin{cases} C(-1,2) \\ r = 3 \end{cases}$, es $c : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$.
Su ecuación general será

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4x + 4 = 9$$
$$c : x^2 + y^2 + 2x - 4x - 4 = 0$$



Pincha aquí para ver cómo cambia una circunferencia al variar los parámetros de su ecuación centro–radio.

Pincha aquí para ver cómo cambia una circunferencia al variar los coeficientes de su ecuación general.

Para encontrar el centro y el radio de una circunferencia dada por su ecuación general, habrá que recorrer el proceso contrario:

EJEMPLO 13.292

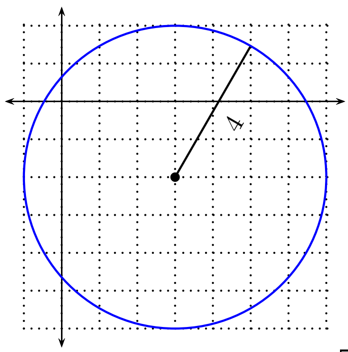
Halla el centro y el radio de la circunferencia $c : x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

Solución:

$$\underbrace{\overbrace{x^2 - 2\cdot x\cdot 3}^{x^2-6x} {\color{red}+9}}_{(x-3)^2} {\color{red}-9} + \underbrace{\overbrace{y^2 + 2\cdot y\cdot 2}^{y^2+4y} {\color{red}+4}}_{(y+2)^2} {\color{red}-4} - 3 = 0$$

$$c : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$$

$$c : \begin{cases} C(3,-2) \\ r = \sqrt{16} = 4 \end{cases}$$



□

Ejemplo 13.293

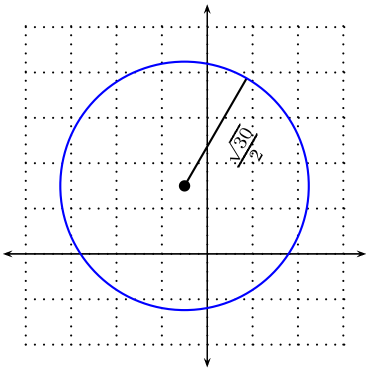
Halla el centro y el radio de la circunferencia $c : x^2 + y^2 + x - 3y - 5 = 0$

Solución:

$$\underbrace{\overbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}}^{x^2+x} + \frac{1}{4}}_{(x+\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{4} + \underbrace{\overbrace{y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{3}{2}}^{y^2-3y} + \frac{9}{4}}_{(y-\frac{3}{2})^2} - \frac{9}{4} - 5 = 0$$

$$c : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{30}{4}$$

$$c : \begin{cases} C(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \\ r = \sqrt{\frac{30}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2} \end{cases}$$



□

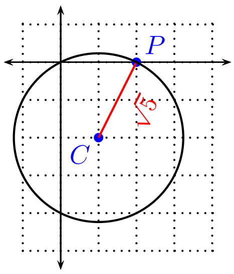
Ejemplo 13.294

Halla la ecuación de la circunferencia con centro $C(1, -2)$ que pasa por el punto $P(2, 0)$

Solución:

$$c : \begin{cases} C(1, -2) \\ r = d(P, C) = \sqrt{(1-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5} \end{cases}$$

$c : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$



□

No todas las ecuaciones de la forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ representan una circunferencia: deben de provenir del desarrollo de una de la forma centro–radio.

Ejemplo 13.295

No hay ninguna circunferencia cuya ecuación sea $x^2 + y^2 + x - 3y + 5 = 0$:

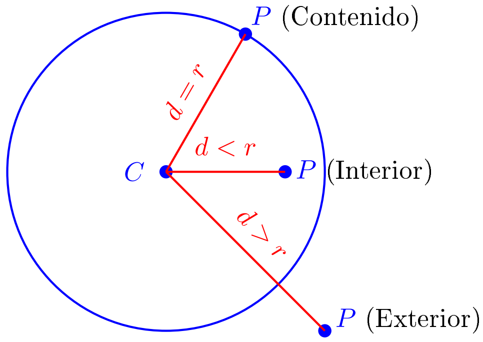
$$\underbrace{\overbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}}^{x^2+x} + \frac{1}{4}}_{(x+\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{4} + \underbrace{\overbrace{y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{3}{2}}^{y^2-3y} + \frac{9}{4}}_{(y-\frac{3}{2})^2} - \frac{9}{4} + 5 = 0$$

$$c : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{10}{4}$$

Lo que es absurdo, pues dos cuadrados no pueden sumar un número negativo.

2.2 Posición relativa de un punto respecto a una circunferencia

Respecto a una circunferencia c, un punto P puede ser contenido, interior o exterior a ella. Dependerá de la distancia $d = d(P, C)$



Escojamos un punto cualquiera $P(\alpha, \beta)$ y c una circunferencia; con las notaciones del apartado anterior,

$$d = d(P, C) = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2}$$

Definición 33. *Llamamos Potencia del punto P respecto a la circunferencia c al número*

$$\mathcal{P}(P, c) = d^2 - r^2 = (\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 - r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + A\alpha + B\beta + C$$

Según dicha potencia, entonces:

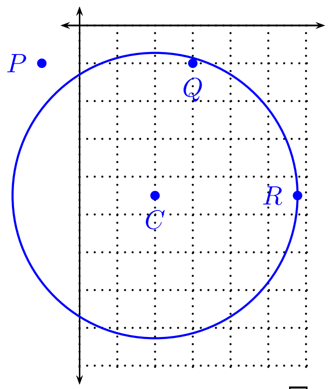
- P es **interior** a $c \iff d < r \iff d^2 < r^2 \iff \boxed{\mathcal{P}(P, c) < 0}$
- P es **contenido** en $c \iff d = r \iff d^2 = r^2 \iff \boxed{\mathcal{P}(P, c) = 0}$
- P es **exterior** a $c \iff d > r \iff d^2 > r^2 \iff \boxed{\mathcal{P}(P, c) > 0}$

Ejemplo 13.296

Encuentra la posición relativa de los puntos $P(-1, -1)$, $Q(3, -1)$ y $R(5'775, -4'5)$ respecto a la circunferencia $c : x^2 + y^2 - 4x + 9y + 10 = 0$

Solución:

- $\mathcal{P}(P, c) = (-1)^2 + (-1)^2 - 4(-1) + 9(-1) + 10 = 7 > 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow P$ es exterior a c.
- $\mathcal{P}(Q, c) = (3)^2 + (-1)^2 - 4(3) + 9(-1) + 10 = -1 > 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow Q$ es interior a c.
- $\mathcal{P}(R, c) = (5'775)^2 + (-4'5)^2 - 4(5'775) + 9(-4'5) + 10 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow R \in c$.

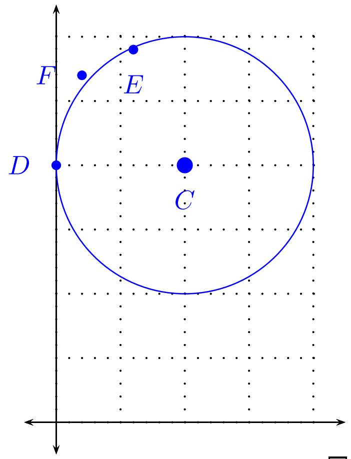


$\square$

Ejemplo 13.297

Encuentra la posición relativa de los puntos $D(0,4)$, $E(1'2,5'8)$ y $F(0'4,5'4)$ respecto a la circunferencia $c:(x-2)^2+(y-4)^2=4$

Solución:



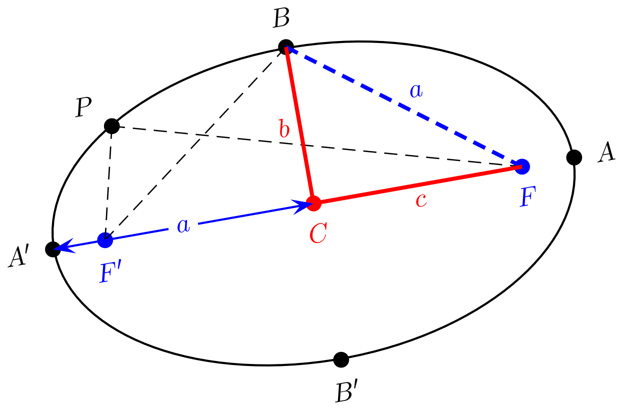
- $\mathcal{P}(D,c)=(0-2)^2+(4-4)^2-4=0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow D \in c$.
- $\mathcal{P}(E,c)=(1'2-2)^2+(5'8-4)^2-4=-0'12 \Rightarrow$
  $\Rightarrow E$ es interior a c.
- $\mathcal{P}(F,c)=(0'4-2)^2+(5,4-4)^2-4=0'52>0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow F$ es exterior a c.

□

3 La elipse

Fijados dos puntos llamados focos, F y F', la elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los focos es constante. Esta constante es $2a$, según se puede observar en la gráfica.

- $2a$: longitud del eje mayor.
- $2b$: longitud del eje menor.
- $2c$: distancia focal.
- $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a>c$ (los vértices son exteriores a los focos) y $a>b$.
- A, A', B y B' vértices, C (punto medio entre los focos) centro de la elipse.



Pincha aquí para variar los elementos de la elipse, y ver que en cualquiera de ellas la suma de distancias a los focos es constante.

La ecuación que nos quedaría al aplicar la definición a un punto de la elipse $P(x,y)$ sería

$$d(P,F)+d(P,F')=2a$$
$$\vdots$$
$$\sqrt{(x-f_1)^2+(y-f_2)^2}+\sqrt{(x-f_1')^2+(y-f_2')^2}=2a$$

lo que nos llevaría a una ecuación cuadrática general de la forma

$$Ax^2+Bx^2+Cx+Dy+Exy+F=0$$

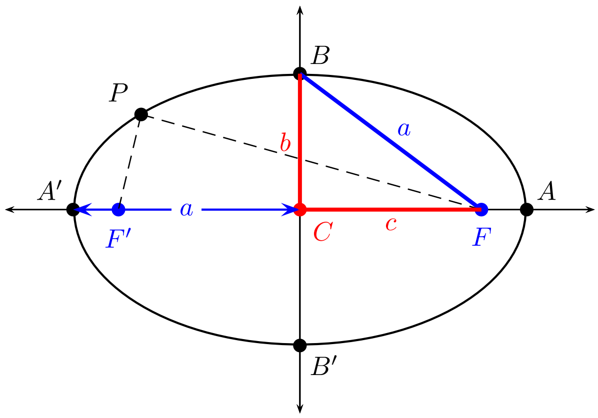
algo cara, en casos, de alcanzar (hay que elevar al cuadrado dos veces hasta quitar las raíces cuadradas, hacer el cuadrado de un trinomio, etc.). Es por ello que sólo vamos a estudiar las ecuaciones de elipses con eje mayor horizontal o vertical, que tienen una ecuación reducida.

3.1 Ecuación reducida de la elipse centrada en el origen

3.1.1 Con eje mayor horizontal

Si $C(0,0)$ y la elipse es horizontal (el eje mayor es horizontal), entonces

- $A(a,0)$, $A'(-a,0)$
- $B(0,b)$, $B'(0,-b)$
- $F(c,0)$, $F'(-c,0)$
- $P(x,y)$



La ecuación que nos queda al aplicar la definición a un punto $P(x,y)$ de la elipse e es

$$d(P,F)+d(P,F')=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$\cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}$$

$$\frac{\cancel{4}a\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{\cancel{4}}=\frac{\cancel{4}a^2+\cancel{4}cx}{\cancel{4}}$$

$$\left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(a^2+cx\right)^2$$

$$a^2\left(x^2+2cx+c^2+y^2\right)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2+\cancel{2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2=a^4+\cancel{2a^2cx}+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\qquad\longleftarrow [a^2-c^2=b^2]$$

$$\frac{\cancel{b^2}x^2}{a^2\cancel{b^2}}+\frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2}=\frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}}$$

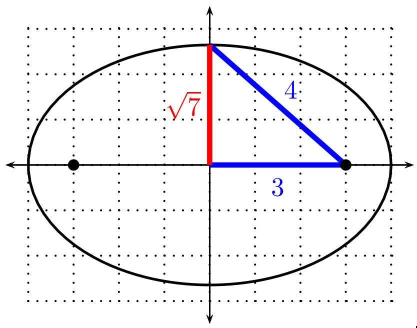
$$e:\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

EJEMPLO 13.298

Halla la ecuación reducida de la elipse horizontal centrada en el origen cuya distancia focal es 6 y el eje mayor mide 8.

Solución:

$$e : \begin{cases} \text{Horizontal} \\ C(0,0) \\ a = 4 \\ c = 3 \end{cases} \quad ; \quad b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$



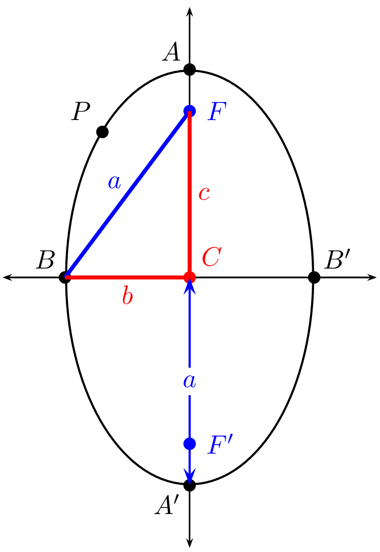
$$e : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

□

3.1.2 Con eje mayor vertical

Si $C(0,0)$ y la elipse es vertical (el eje mayor es vertical), entonces

- $A(0, a),\ A'(0, -a)$
- $B(b, 0),\ B'(0, -b)$
- $F(0, c),\ F'(0, -c)$



La construcción es análoga a la anterior, pero con los ejes intercambiados; si intercambiamos, por tanto, las incógnitas en la ecuación reducida, queda:

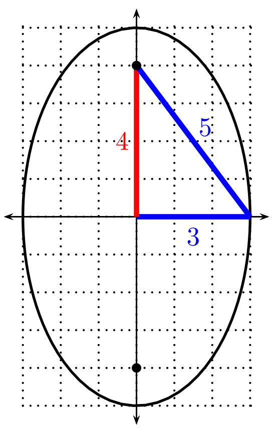
$$e : \boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

EJEMPLO 13.299

Halla la ecuación reducida de la elipse vertical centrada en el origen cuyos ejes midan 6 y 10. Halla las coordenadas de sus focos.

Solución:

$$e : \begin{cases} \text{Vertical} \\ C(0,0) \\ a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \quad ; \quad e : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$



$$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$$c = \sqrt{16} = 4 \Longrightarrow F(0,4),\ F'(0,-4)$$

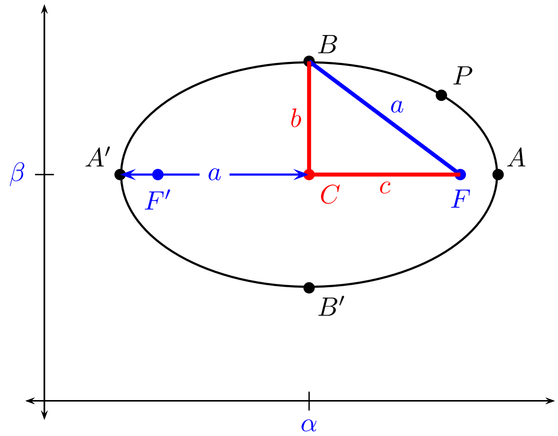
□

32 Ecuación reducida de la elipse no centrada en el origen

Si $C(\alpha, \beta)$ y la elipse es horizontal o vertical, entonces la ecuación que nos queda es una traslación hacia el nuevo centro de la que estuviera en el origen con las mismas medidas. Quedan, por tanto, las ecuaciones reducidas

$$e : \frac{(x-\alpha)}{a^2} + \frac{(y-\beta)}{b^2} = 1 \quad \text{(horizontal)}$$

$$e : \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1 \quad \text{(verticall)}$$



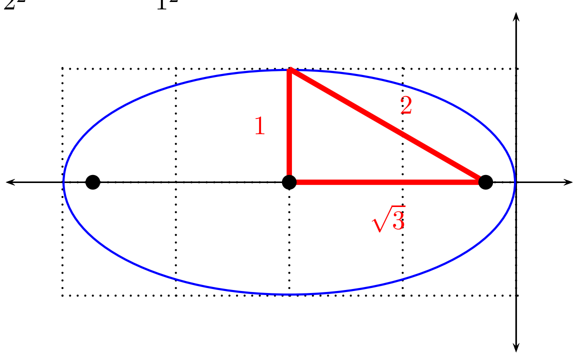
Ejemplo 13.300

Calcula centro, focos y vértices de la elipse $e : \dfrac{(x+2)^2}{4} + y^2 = 1$. ¿Cuál es su ecuación general?

Solución: La equación es equivalente a $\quad e : \dfrac{(x-(-2))^2}{2^2} + \dfrac{(y-0)^2}{1^2} = 1$

$$e : \begin{cases} \text{Horizontal} \\ C(-2, 0) \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3 \Longrightarrow c = \sqrt{3}$



$F'(-2-\sqrt{3}, 0)$, $F(-2+\sqrt{3}, 0)$,

$A'(-4, 0)$, $A(0, 0)$, $B'(-2, -1)$, $B(-2, 1)$

Ecuación general:

$$4 \cdot \left(\frac{(x+2)^2}{4} + y^2\right) = (1) \cdot 4$$

$$x^2 + 4x + 4 + 4y^2 = 4$$

$$e : x^2 + 4y^2 + 4x = 0$$

□

Observación 42.

- *Cualquiera de las ecuaciones reducidas anteriores, si quitamos denominadores, desarrollamos cuadrados, pasamos a la izquierda y reducimos, llega a una ecuación cuadrática de la forma*

  $$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$$

  con A y B positivos no nulos. Está claro, pues, que si tenemos la ecuación general de una elipse en la que aparece el término Exy, ésta está estrictamente inclinada.

- *Si $A = B$, es decir, si $a = b$, nos queda, dividiendo la ecuación por ese coeficiente, la ecuación de una circunferencia. En otras palabras, la circunferencia es un tipo especial de elipse: aquél en el que los focos coinciden en el centro.*

- *al igual que ocurre con la circunferencia (ver ejemplo* 13.295*), no toda ecuación cuadrática como la de arriba corresponde con una elipse, pues algunas no tienen solución.*

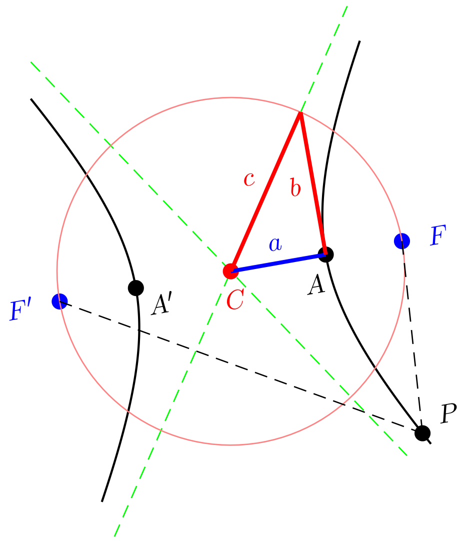
Pincha aquí para ver cómo cambia una elipse al variar los parámetros de su ecuación reducida.

Pincha aquí para ver cómo cambia una elipse al variar los coeficientes de su ecuación general.

4 La hipérbola

Fijados dos puntos llamados focos, F y F', la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias, en valor absoluto, a los focos es constante. Esta constante es $2a$, según se puede observar en la gráfica.

- $2a$: distancia entre los vértices.
- $2c$: distancia focal.
- $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c > a$ (los vértices son interiores a los focos).
- A y A'vértices, C (punto medio entre los focos) centro.



La ecuación que nos quedaría al aplicar la definición a un punto de la hipérbola $P(x, y)$ sería

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a$$
$$\sqrt{(x - f_1)^2 - (y - f_2)^2} - \sqrt{(x - f_1')^2 + (y - f_2')^2} = \pm 2a \qquad \vdots$$

lo que nos llevaría otra vez a una ecuación cuadrática general de la forma

$$Ax^2 + Bx^2 + Cx + Dy + Exy + F = 0$$

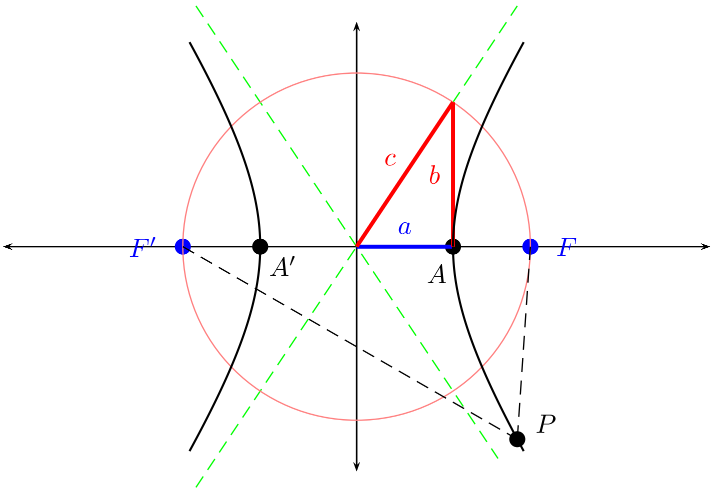
Como con la elipse, por razones de complejidad, vamos a estudiar sólo las situadas en ejes horizontales o verticales.

4 1 Ecuación reducida de la hipérbola centrada en el origen

4 1 1 Con eje focal horizontal

Si $C(0,0)$ y la hipérbola es horizontal (el eje focal es horizontal), entonces

- $A(a,0)$, $A'(-a,0)$
- $F(c,0)$, $F'(-c,0)$
- $P(x,y)$
- $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ asíntotas.



La ecuación que nos queda al aplicar la definición a un punto $P(x,y)$ de la hipérbola h es, por un proceso análogo al efectuado con la elipse,

$$|d(P,F)-d(P,F')|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2-(y-0)^2}-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=\pm 2a$$

$$\vdots$$

$$(-1)\cdot\left[(a^2-c^2)x^2+a^2y^2\right]=\left[a^2(a^2-c^2)\right]\cdot(-1)$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \quad \longleftarrow [c^2-a^2=b^2]$$

$$\frac{\cancel{b^2}x^2}{a^2\cancel{b^2}}-\frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2}=\frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}}$$

$$h:\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

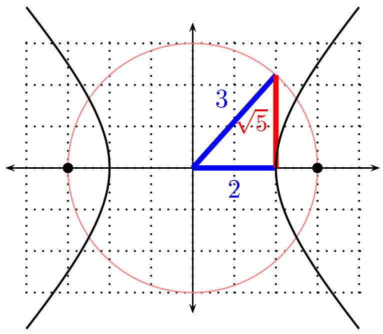
EJEMPLO 13.301

Halla la ecuación reducida de la hipérbola horizontal centrada en el origen cuya distancia focal es 6 y la distancia entre sus vértices es 4.

Solución:

$$e:\begin{cases}\text{Horizontal}\\ C(0,0)\\ a=2\\ c=3\end{cases} \quad ; \quad b^2=c^2-a^2=3^2-2^2=5$$

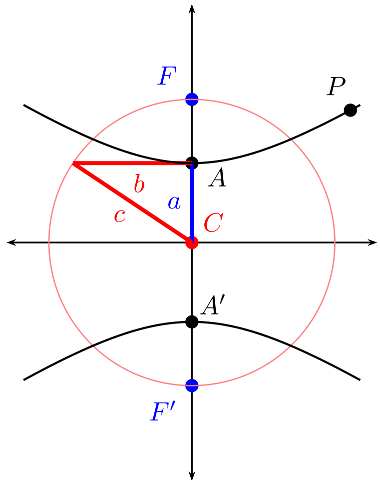
$$h:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$$



□

4.1.2 Con eje focal vertical

Si $C(0,0)$ y la hipérbola tiene eje vertical, entonces



- $A(0,a)$, $A'(0,-a)$
- $F(0,c)$, $F'(0,-c)$
- $y=\frac{a}{b}x$, $y=-\frac{a}{b}x$ asíntotas.

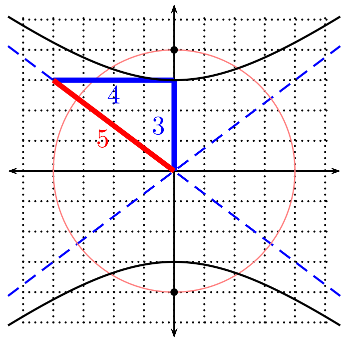
La construcción es análoga a la anterior, pero con los ejes intercambiados; si intercambiamos, por tanto, las incógnitas de la ecuación reducida, queda:

$$e:\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$$

EJEMPLO 13.302

Halla la ecuación reducida de la hipérbola vertical centrada en el origen con asíntotas $y=\pm\frac{3}{4}x$

Solución:



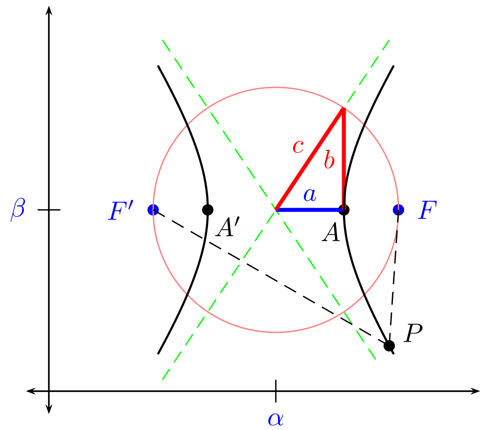
$$e:\begin{cases}\text{Vertical}\\ C(0,0)\\ a=3\\ b=4\end{cases}\quad ;\ 3^2+4^2=c^2\Rightarrow c=5$$

$$h:\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$$

□

4.2 Ecuación reducida de la hipérbola no centrada en el origen

Si $C(\alpha,\beta)$ y la hipérbola es horizontal o vertical, entonces la ecuación que nos queda es una traslación hacia el nuevo centro de la que estuviera en el origen con las mismas medidas. Quedan, por tanto, las ecuaciones reducidas



$$h:\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1\quad\text{(horizontal)}$$

$$h:\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1\quad\text{(vertical)}$$

Ejemplo 13.303

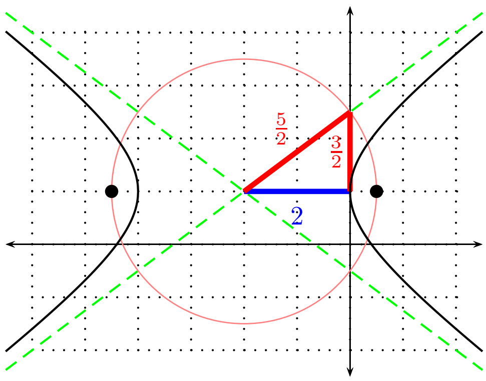
Halla la ecuación reducida de la hipérbola con eje focal horizontal, distancia focal 5 y vértices $A(0,1)$, $A'(-4,1)$. ¿Cuáles son las ecuaciones de sus asíntotas?

Solución:

$$e : \begin{cases} \text{Horizontal} \\ C = M_{AA'} = (-2,1) \\ a = 2 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$2^2 + b^2 = (\tfrac{5}{2})^2 \Rightarrow b^2 = \tfrac{9}{4} \Rightarrow b = \tfrac{3}{2}$$

$$h : \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{4(y-1)^2}{9} = 1$$



Asíntotas: $y + 2 = \pm\dfrac{\frac{3}{2}}{2}\,(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -2 \pm \frac{3}{4}\,(x-1)$

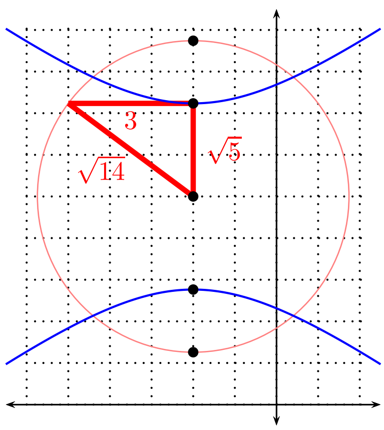
□

Ejemplo 13.304

La ecuación $5x^2 - 9y^2 + 20x + 90y - 160 = 0$ corresponde a una hipérbola. ¿Cuál es su centro, sus vértices y sus focos?

Solución: (Completar cuadrados y conseguir 1 a la derecha)

$$\begin{aligned} 5x^2 - 9y^2 + 20x + 90y - 160 &= 0 \\ 5(x^2+4x) - 9(y^2 - 10y) &= 160 \\ 5(x^2 + 2\cdot 2x + 4 - 4) - 9(y^2 - 2\cdot 5y + 25 - 25) &= 160 \\ 5(x+2)^2 - 20 - 9(y-5)^2 - 225 &= 160 \\ \frac{5(x+2)^2 - 9(y-5)^2}{-45} &= \frac{-45}{-45} \\ \frac{(x+2)^2}{-9} + \frac{(y-5)^2}{5} &= 1 \\ \frac{(y-5)^2}{5} - \frac{(x+2)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$



$$h : \begin{cases} \text{Vertical} \\ C(-2,5) \\ a = \sqrt{5} \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad (\sqrt{5})^2 + 3^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{14} \quad \Longrightarrow \begin{cases} A(-2, 5+\sqrt{5}) \\ A'(-2, 5-\sqrt{5}) \\ F(-2, 5+\sqrt{14}) \\ F(-2, 5-\sqrt{14}) \end{cases}$$

□

Observación 43. *Cualquiera de las ecuaciones reducidas anteriores, si quitamos denominadores, desarrollamos cuadrados, pasamos a la izquierda y reducimos, llega a una ecuación cuadrática de la forma*

$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + F = 0$$

con A y B positivos no nulos. Está claro, pues, que si tenemos la ecuación general de una hipérbola en la que aparece el término Exy, ésta está estrictamente inclinada.

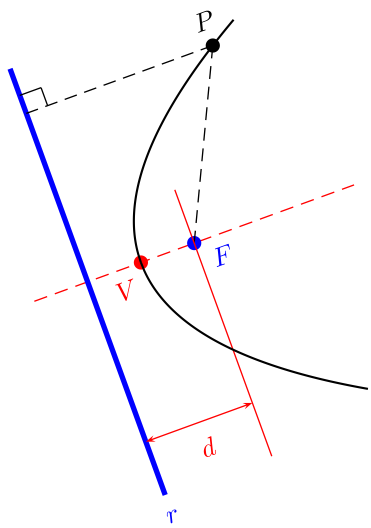
Pincha aquí para ver cómo cambia una hipérbola horizontal al variar los parámetros de su ecuación reducida.

Pincha aquí para ver cómo cambia una elipse al variar los coeficientes de su ecuación general.

5 La parábola

Fijados un punto F, llamado foco, y una recta r, llamada directriz, la parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan del foco y la directriz.

- d: distancia entre el foco y la recta.
- V: Vértice (punto medio entre el foco y su proyección ortogonal sobre la directriz).



La ecuación que nos quedaría al aplicar la definición a un punto de la parábola $P(x, y)$, con la directriz $r : Ax + By + C = 0$ sería

$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P,r)| \\ \sqrt{(x-f_1)^2-(y-f_2)^2} &= \left|\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \\ \pm\sqrt{(x-f_1)^2-(y-f_2)^2} &= \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

lo que nos llevaría, de nuevo, a la conocida ecuación cuadrática general

$$Ax^2 + Bx^2 + Cx + Dy + Exy + F = 0$$

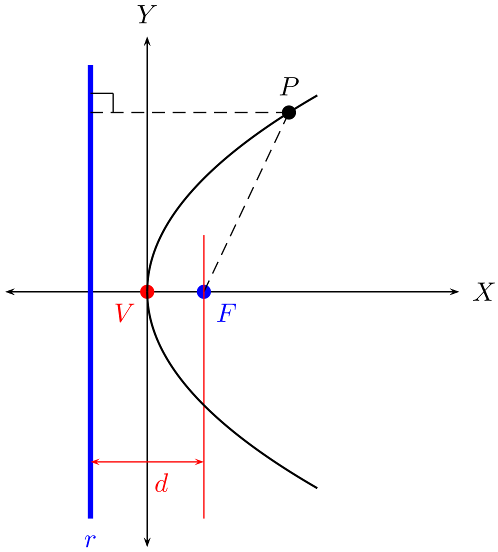
Por razones de complejidad, nuevamente, vamos a estudiar sólo las situadas en ejes horizontales o verticales.

5.1 Ecuación reducida de la parábola con vértice en el origen

5.1.1 Con eje focal horizontal

Si $V(0,0)$, es decir, situamos el vértice en el origen de coordenadas, y el eje focal es horizontal (sobre el eje X), entonces

- $V(0,0)$
- $F(\frac{d}{2},0)$
- $P(x,y)$
- $r : x = -\frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad r : x + \frac{d}{2} = 0 \quad$ directriz



La ecuación que nos queda al aplicar la definición a un punto $P(x,y)$ de la parábola p es

$$d(P,F) = d(P,r)|$$
$$\sqrt{(x-\frac{d}{2})^2 + (y-0)^2} = \left| \frac{x+\frac{d}{2}}{\sqrt{1^2+0^2}} \right|$$
$$\left(\pm\sqrt{(x-\frac{d}{2})^2 + y^2} \right)^2 = \left(x+\frac{d}{2}\right)^2$$
$$\cancel{x^2} - dx + \frac{\cancel{d^2}}{\cancel{4}} + y^2 = \cancel{x^2} + dx + \frac{\cancel{d^2}}{\cancel{4}}$$
$$p : \boxed{y^2 = 2dx}$$

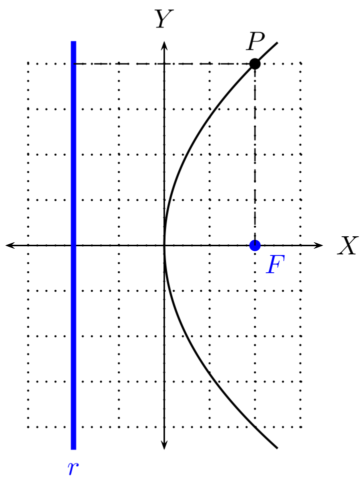
Ejemplo 13.305

Halla la ecuación reducida de la parábola con foco $F(2,0)$ y directriz $r : x = -2$.

Solución:

$$p : \begin{cases} \text{Horizontal} \\ V(0,0) \\ d = d(F,r) = 4 \end{cases}$$

$$p : y^2 = 8x$$



□

Por simetría, si el foco está en el semieje horizontal negativo, la ecuación que nos queda será

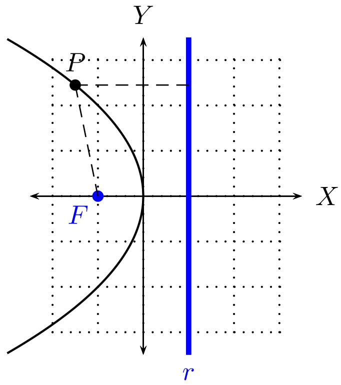
$$p : \boxed{y^2 = -2dx}$$

Ejemplo 13.306

Halla la ecuación reducida de la parábola con foco $F(-1, 0)$ y directriz $r : x = 1$.

Solución:

$$p : \begin{cases} \text{Horizontal} \\ V(0,0) \\ d = d(F,r) = 2 \end{cases}$$



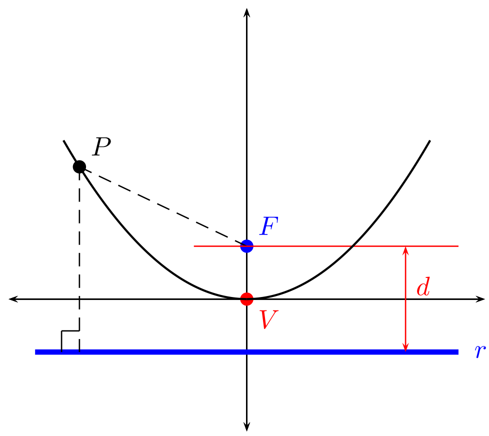
$$p : y^2 = -4x$$

□

5 1 2 Con eje focal vertical

Si $V(0, 0)$ y la parábola tiene eje focal vertical, entonces

- $V(0, 0)$
- $F(0, \frac{d}{2})$
- $r : y = -\frac{d}{2}$ directriz



La construcción es análoga a la anterior, pero con los ejes intercambiados; si intercambiamos, por tanto, las incógnitas de la ecuación reducida, queda:

$$p : \boxed{x^2 = 2dy}$$

Si despejamos y, tenemos

$$y = \frac{1}{2d}\,x^2$$

o, si el foco queda en el semieje vertical negativo,

$$y = -\frac{1}{2d}\,x^2$$

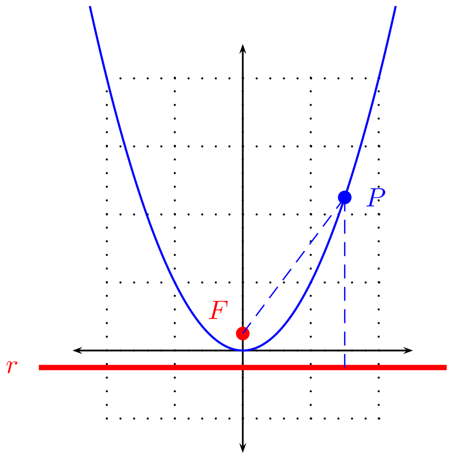
que es la ecuación de una función parabólica cuyo vértice está en el origen de coordenadas, ya conocida desde cursos anteriores.

Ejemplo 13.307

La función $y = x^2$ corresponde con la parábola

$$p : \begin{cases} \text{Vertical, ramas hacia arriba} \\ V(0,0) \\ \frac{1}{2d} = 1 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Es decir, sus puntos están a la misma distancia del foco $F(0,-1)$ que de la recta directriz $r : y = 1$

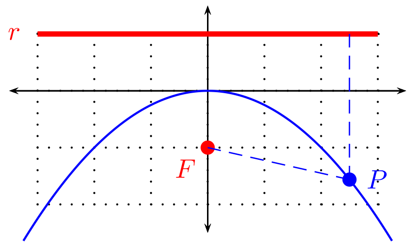


Ejemplo 13.308

La función $y = -\dfrac{x^2}{4}$ corresponde con la parábola

$$p : \begin{cases} \text{Vertical, ramas hacia abajo} \\ V(0,0) \\ -\frac{1}{2d} = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad d = 2 \end{cases}$$

Es decir, sus puntos están a la misma distancia del foco $F(0,-1)$ que de la recta directriz $r : y = 1$

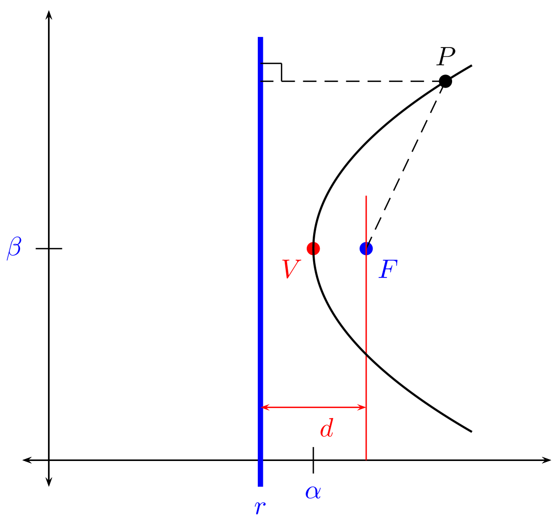


5.2 Ecuación reducida de la parábola con vértice fuera del origen

Si $V(\alpha, \beta)$ y la parábola es horizontal o vertical, entonces la ecuación que nos queda es una traslación hacia el nuevo centro de la que estuviera en el origen con las mismas medidas. Quedan, por tanto, las ecuaciones reducidas

$$p : (y-\beta)^2 = \pm 2d(x-\alpha) \quad \text{(horizontales)}$$

$$p : (x-\alpha)^2 = \pm 2d(y-\beta) \quad \text{(verticales)}$$



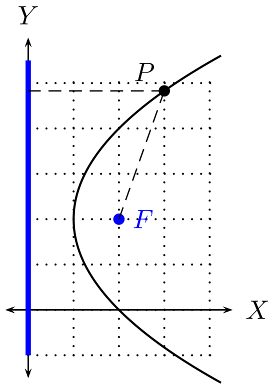
EJEMPLO 13.309

Halla la ecuación reducida de la parábola con foco $F(2,2)$ y directriz el eje OY.

Solución:

$$p: \begin{cases} \text{Horizontal (la directriz es vertical)} \\ V(1,2) \\ d = d(F, OY) = 2 \end{cases}$$

$$p: (y-2)^2 = 4(x-1)$$



□

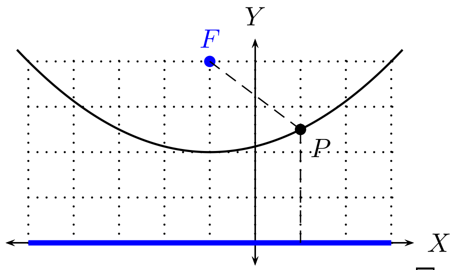
EJEMPLO 13.310

Halla la ecuación reducida de la parábola con vértice $V(-1,2)$ y directriz el eje OX.

Solución:

$$p: \begin{cases} \text{Vertical (la directriz es horizontal)} \\ V(-1,2) \\ d = d(F, OY) = 4 \end{cases}$$

$$p: (x+1)^2 = 8(y-2)$$



□

EJEMPLO 13.311

Halla la ecuación reducida de la parábola con vértice $V(-1,2)$ que pasa por $P(1,3)$. Halla su foco y su directriz.

Solución:

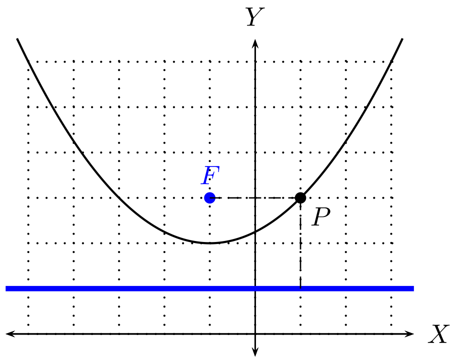
$$p: \begin{cases} \text{Vertical } (P \text{ más alto } V) \\ V(-1,2) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p: (x+1)^2 = 2d(y-2)$$

$$P(1,3) \in p \quad \Longrightarrow \quad (1+1)^2 = 2d(3-2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 4 = 2d \quad \Longrightarrow \quad d = 2 \Rightarrow \begin{cases} F(-1,3) \\ r: y = 1 \end{cases}$$

$$p: (x+1)^2 = 4(y-2)$$



□

Pincha aquí para ver cómo cambia una parábola horizontal al variar los parámetros de su ecuación reducida.

6 Intersecciones de cónicas y rectas

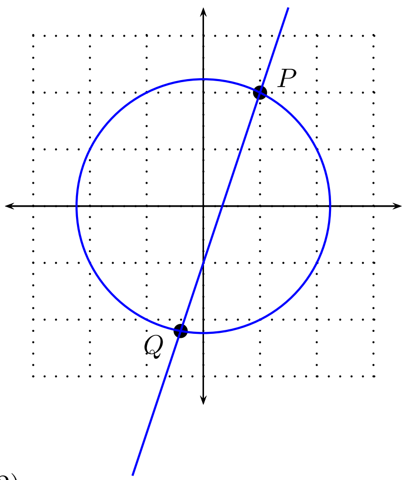
El estudio de las cónicas nos permite representar gráficamente bastantes sistemas de ecuaciones no lineales que estudiamos el curso anterior, pues muchas de las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas representan una cónica.

También nos permite, según el número de soluciones, encontrar la posición relativa entre recta y cónicas cerradas (circunferencia y elipse), a saber: si sólo hay un punto de corte, será tangente; si no hay ninguno, será exterior y si hay dos será secante.

Ejemplo 13.312

Calcula los puntos de intersección de la circunferencia $c: x^2+y^2=5$ con la recta $r: 3x-y-1=0$

Solución: Serán los puntos cuyas coordenadas sean las soluciones del sistema



$$p: \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 3x-y-1=0 \end{cases}$$

[ec2] $y = 3x-1$

[ec1] $x^2+(3x-1)^2=5 \implies x^2+9x^2-6x+1=5 \implies$

$$\implies \frac{10x^2-6x-4}{2} = \frac{0}{2} \implies 5x^2-3x-2=0$$

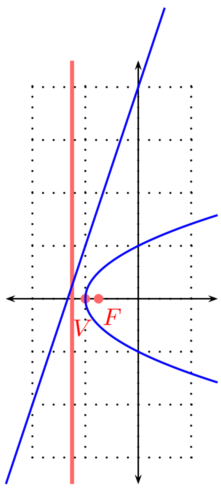
$$\Delta = (-3)^2-4\cdot(5)\cdot(-2)=49 \implies x = \frac{3\pm 7}{10} \begin{cases} 1 \\ \frac{-2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \implies y=3(1)-1=2 \\ x=\frac{-2}{5} \implies y=3(\frac{-2}{5})-1=\frac{-11}{5} \end{cases} \implies c\cap r = \begin{cases} P(1,2) \\ Q(\frac{-2}{5},\frac{-11}{5}) \end{cases} \Rightarrow r \text{ secante a } c.$$ □

Ejemplo 13.313

Resuelve e interpreta gráficamente el sistema $\begin{cases} y^2-x-1=0 \\ 3x-y+4=0 \end{cases}$

Solución:



[ec2] $y=3x+4$
[ec1] $(3x+4)^2-x-1=0 \implies 9x^2+24x+16-x-1=0 \implies$

$$\implies 9x^2+23x+15=0 \implies \Delta=(23)^2-4\cdot(9)\cdot(15)=-11 \text{ (No)}$$

[ec1] $y^2=1(x+1)$ es la ec. reducida de la parábola horizontal

$$p: \begin{cases} V(-1,0) \\ 2d=1 \implies d=\frac{1}{2} \end{cases}$$

No hay solución: la parábola p y la recta $s: 3x-y+4=0$ no se cortan. □

EJEMPLO 13.314

Resuelve el sistema e interprétalo gráficamente: $\begin{cases} x^2+4y^2-2x+8y-3=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$

Solución:

[ec2] $x = 3-2y$

[ec1] $(3-2y)^2+4y^2-2(3-2y)+8y-3=0 \Longrightarrow \cancel{9}-\cancel{12y}+4y^2-\cancel{6}+\cancel{4y}+\cancel{8y}-\cancel{3}=0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 4y^2=0 \Longrightarrow y=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=3-2(0)=3 \Longrightarrow \text{Sol: }(3,0)$

Veamos si la ecuación cuadrática corresponde a una cónica y de qué tipo; para ello, buscamos si tiene una ecuación reducida equivalente, completando cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2+4y^2-2x+8y-3&=0 \\ x^2-2x+4(y^2+2y)-3&=0 \\ \underbrace{x^2-2x\cdot 1+1}-1+4\left(\underbrace{y^2+2y\cdot 1+1}-1\right)-3&=0 \end{aligned}$$

$$(x-1)^2+4(y+1)^2-1-4-3=0$$

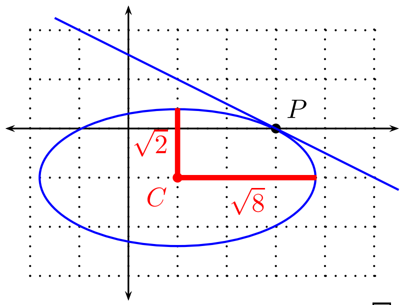
$$\frac{(x-1)^2+4(y+1)^2}{8}=\frac{8}{8}$$

$$\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y+1)^2}{2}=1$$

que es la ecuación reducida de la elipse horizontal

$e:\begin{cases} C(1,-1) \\ a=\sqrt{8} \\ b=\sqrt{2} \end{cases}$ tangente (sólo corta en un punto)

a la recta $r: x+2y-3=0$



□

7 Ejercicios propuestos

REPRESENTA GRÁFICAMENTE TODOS LOS ELEMENTOS DE CADA EJERCICIO (CONDICIONES Y SOLUCIONES) EN DESMOS O EN CUALQUIER OTRA APLICACIÓN GRÁFICA QUE TE LO PERMITA. NO TIENES MÁS QUE ESCRIBIR EN LA CELDA LA ECUACIÓN O LAS COORDENADAS DE LAS RECTAS, CÓNICAS O PUNTOS QUE DESÉES DIBUJAR.

1. Halla la ecuación general de la circunferencia que tiene:
   a) el centro en el punto $(2,5)$ y el radio es igual a 7. $\to x^2+y^2-4x-10y-20=0$
   b) un diámetro con extremos los puntos $(8,-2)$ y $(2,6)$. $\to x^2+y^2-10x-4y+4=0$
2. Calcula el centro y el radio de la circunferencia $2x^2+2y^2+3x+5y-5=0$. $\to C(\frac{-3}{4},\frac{-5}{4});\ r=\sqrt{\frac{37}{8}}$
3. Estudia la posición relativa de los siguientes puntos respecto a la circunferencia $2x^2+2y^2+3x-2y-6=0$
   a) $(-2,2)$ → Contenido b) $(1,0)$ → Interior c) $(1,1'5)$ → Exterior
4. Estudia la posición relativa del punto $P(0,3)$ respecto a la circunferencia $(x-m)^2+y^2=25$ en función de los valores del parámetro m. $\to \begin{cases} \text{Interior si } m\in(-4,4) \\ \text{contenido si } m=\pm 4 \\ \text{Exterior si } m\in(-\infty,-4)\cup(4,\infty)\end{cases}$
5. Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 5 que es concéntrica a la de ecuación: $2x^2+2y^2-8x-12y+8=0$. $\to x^2+y^2-4x-6y-12=0$
6. Halla la ecuación reducida de la elipse que verifica:
   a) pasa por $(25,0)$ y la distancia semifocal es 7. $\to \frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{576}=1$
   b) pasa por $(4,1)$ y por $(0,3)$. $\to \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$
7. En cada caso halla la ecuación de la elipse que satisface las condiciones dadas:
   a) Focos: $(\pm 3,0)$; pasa por $(4,1)$ $\to \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$
   b) $A(2,2)$ y $A'(-4,2)$; eje menor: 2 $\to x^2+9y^2+2x-36y+28=0$
   c) Vértices: $A(1,2)$, $A'(1,-4)$; $B(-\frac{1}{2},-1)$ $\to 4x^2+y^2-8x+2y-4=0$
8. Para cada una de las siguientes elipses, halla el centro, los semiejes mayor y menor y la semidistancia focal.
   a) $9x^2+16y^2=144$ $\to C(0,0),\ a=4,\ b=3,\ c=\sqrt{7}$
   b) $3x^2+2y^2=6$ $\to C(0,0),\ a=\sqrt{3},\ b=\sqrt{2},\ c=1$
   c) $2x^2+3y^2=11$ $\to C(0,0),\ a=\sqrt{\frac{11}{2}},\ b=\sqrt{\frac{11}{3}},\ c=\sqrt{\frac{11}{6}}$
   d) $x^2+2y^2-8x+4y=0$ $\to C(4,-1),\ a=3\sqrt{2},\ b=3,\ c=3$
   e) $9x^2+8y^2-54x-16y+17=0$ $\to C(3,1),\ a=3,\ b=2\sqrt{2},\ c=1$
9. Halla la ecuación reducida de la hipérbola con focos en $(7,0)$ y $(-7,0)$ y que pasa por el punto $(4,0)$. $\to \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{33}=1$

10. En cada uno de los casos, obtén la ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones:

   a) Vértices: $(\pm 5, 0)$; Focos: $(\pm 7, 0)$ $\rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$
   b) Vértices: $(\pm 2, 0)$; Asíntotas: $y = \pm 2x$ $\rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$
   c) $C(-1, 4)$, $F'(-1, 2)$ y $A'(-1, 3)$ $\rightarrow x^2 - 3y^2 + 2x + 24y - 44 = 0$

11. Para cada una de las siguientes hipérbolas, halla los focos y los vértices.

   a) $16x^2 - 8y^2 = 144$ $\rightarrow F(5, 0);\ F'(-5, 0);\ A(3, 0);\ A'(-3, 0)$
   b) $25x^2 - 144y^2 + 3600 = 0$ $\rightarrow F(0, 13);\ F'(0, -13);\ A(0, 5);\ A'(0, -5)$
   c) $2x^2 - 3y^2 - 6 = 0$ $\rightarrow F(\sqrt{5}, 0);\ F'(-\sqrt{5}, 0);\ A(\sqrt{3}, 0);\ A'(-\sqrt{3}, 0)$
   d) $2x^2 - 3y^2 - 4x - 18y - 37 = 0$ $\rightarrow F(1 + \sqrt{10}, -3);\ F'(1 - \sqrt{10}, -3);\ A(1 + \sqrt{6}, -3);\ A'(1 - \sqrt{6}, -3)$
   e) $16y^2 - x^2 - 128y + 240 = 0$ $\rightarrow F(0, 4 + \sqrt{17});\ F'(0, 4 - \sqrt{17});\ A(0, 5);\ A'(0, 3)$
   f) $2x^2 - y^2 - 8x + -2y + 3 = 0$ $\rightarrow F(2 + \sqrt{6}, -1);\ F'(2 - \sqrt{6}, -1);\ A(2 + \sqrt{2}, -1);\ A'(2 + \sqrt{2}, -1)$

12. Halla la ecuación que verifican los puntos del plano que equidistan del punto $(3, 0)$ y de la recta $x = -4$. $\rightarrow y^2 = 14x + 7$

13. Halla las ecuaciones de las parábolas que verifican:

   a) su directriz es $y = -6$ y su foco $(0, 6)$. $\rightarrow x^2 = 24y$
   b) su vértice $(2, 0)$ y su foco $(6, 0)$. $\rightarrow y^2 = 16x - 32$

14. Halla la parábola vertical con vértice en $V(-1, -1)$ y que pasa por el punto $P(1, 6)$ $\rightarrow (x + 1)^2 = \frac{4}{7}(y + 1)$

15. Encuentra la ecuación de la parábola horizontal cuyo foco es $(-3, 5)$ y su distancia a la directriz $\frac{5}{3}$. $\rightarrow (y - 5)^2 = -\frac{10}{3}(x + \frac{13}{6});\ (y - 5)^2 = \frac{23}{3}(x + \frac{23}{6})$

16. Determina la ecuación de una parábola cuyo eje de simetría sea paralelo al eje Y, su vértice pertenezca al eje X y que contenga a los puntos $A(2, 3)$ y $B(-1, 12)$. $\rightarrow (x - 5)^2 = 3y;\ (x - 1)^2 = \frac{1}{3}y$

17. Dada la parábola de ecuación $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$, calcula la coordenadas de vértice y foco, y la ecuación de su directriz. $\rightarrow V(1, 3);\ F(3, 3);\ d : x = -1$

18. Clasifica las cónicas que tienen las siguientes ecuaciones:

   a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ $\rightarrow c : \begin{cases} C(-1, -3) \\ r = 3 \end{cases}$
   b) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 19 = 0$ $\rightarrow$ *Nada*
   c) $x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ $\rightarrow e : \begin{cases} C(0, 0),\ \text{Hor.} \\ a = 10, b = 5 \end{cases}$
   d) $8x^2 - 3y^2 - 120 = 0$ $\rightarrow h : \begin{cases} C(0, 0),\ \text{Hor.} \\ a = \sqrt{15}, b = \sqrt{40} \end{cases}$
   e) $y^2 - 36x = 0$ $\rightarrow p : \begin{cases} V(0, 0),\ \text{Hor.} \\ d = 18 \end{cases}$
   f) $x^2 - y - 2x + 3 = 0$ $\rightarrow p : \begin{cases} V(1, 2),\ \text{Vert.} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$
   g) $4y^2 - x + 16y + 17 = 0$ $\rightarrow p : \begin{cases} V(1, -2),\ \text{Hor.} \\ d = \frac{1}{8} \end{cases}$
   h) $4x^2 + y^2 - 8x = 0$ $\rightarrow e : \begin{cases} C(1, 0),\ \text{Vert.} \\ a = 2, b = 1 \end{cases}$
   i) $3x^2 + 4y^2 - 18x + 40y + 103 = 0$ $\rightarrow e : \begin{cases} C(3, -5),\ \text{Hor.} \\ a = \sqrt{8}, b = \sqrt{6} \end{cases}$

19. Di la posición relativa de la recta $y = 3 - 2x$ respecto de las circunferencias:

   a) $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$ $\rightarrow$ Tangente   b) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$ $\rightarrow$ Secante
   c) $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$ $\rightarrow$ Exterior

20. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas respecto a las elipses:

    a) $x + y = -3$ respecto a $9x^2 + 4y^2 = 36$. → *Secante*

    b) $3x + y = 2$ respecto a $x^2 + 8y^2 - 10x - 48y + 81 = 0$. → *Exterior*

    c) $16x + 15y = 100$ respecto a $16x^2 + 25y^2 = 400$. → *Tangente*

21. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0$, calcular las rectas tangentes a ella que son paralelas a la recta $x + y + 4 = 0$. → $x + y + 11 = 0$; $x + y - 13 = 0$

22. Obtén el valor de k para que la recta $s : x + y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$. → $k = 4 \pm 2\sqrt{2}$

23. Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $(2, -3)$ y que es tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$. → $25x^2 + 25y^2 - 100x + 150y - 204 = 0$

24. ¿Cuál dirías que es la posición relativa entre las circunferencias $x^2 + y^2 - 8 = 0$ y $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 24 = 0$? → *Tangentes*