Matrica

Posmatramo skup od $m \times n$ brojeva i napišimo ga u obliku šeme:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} prva\ vrsta \\ druga\ vrsta \\ i-ta\ vrsta \\ n-ta\ vrsta \end{array}$$

Brojevi u matrici su označeni sa dva indeksa. Prvi indeks označava vrstu, a drugi kolonu (stupac).
Šema (matrica) se označava velikim latinskim slovima A, B, C, ...
Prethodna matrica se označava sa:

$$A = (a_{ik})_{m\times n}$$

gdje m označava broj vrsta, a n broj kolona (stupaca), te je matrica reda $m \times n$, a brojevi a_{ik} su elementi matrice. Ako se u matrici $A = (a_{ik})_{m\times n}$ vrste zamjene odgovarajućim kolonama dobiće se matrica reda $n \times m$ i za nju kažemo da je transponovana matrica matrice A i označava se sa A^T.

Jednakost matrice:

Dvije matrice
$A = (a_{ij})_{m\times n}$
$B = (b_{ij})_{m\times n}$
su jednake ako je $a_{ij} = b_{ij}$, pri čemu je *i = 1,2,...,m* i *j=1,2,...,n* , (pri čemu matrice moraju biti istog reda).

Sabiranje matrica

Zbir dvije matrice reda $m \times n$ jednak je matrici čiji su elementi jednaki zbiru odgovarajućih elemenata datih sabiraka.

ZADACI:

1. Neka je:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunati $A + B$.

2. Neka je:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunati $A + B$.

Množenje matrice brojem

Matrica se množi brojem tako što se svaki njen član množi tim brojem.

ZADACI:

3. Neka je:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $a = 2.$ Izračunati $A \times a.$

4. Neka je:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ i $a = 3.$ Izračunati $A \times a.$

Množenje matrica

Matrice C= AxB je moguće množiti ukoliko je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B. Proizvod matrica A i B je C čiji je skalarni proizvod jednak skalarnom proizvodu vektora i-te vrste matrice A i j-te kolone matrice B.

ZADACI:

5. Neka je:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunati $A \times B.$

6. Neka je:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Izračunati $A \times B.$

Kvadratna matrica

Matrica kod koje je broj vrsta jednak broju kolona ***n*** naziva se kvadratna matrica reda ***n***.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Elementi $\mathbf{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}}$ obrazuju glavnu dijagonalu, a elementi $\mathbf{a_{n1}, a_{n-1}, ... , a_{1n}}$ sporednu dijagonalu matrice.

Kvadratna matrica kod koje su svi elementi van glavne dijagonale jednaki nuli naziva se **dijagonalna matrica** i ima oblik:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Dijagonalnu matricu kod koje su $d_1=d_2=...=d_n$ nazivamo **skalarnom matricom**.

$$\begin{bmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{bmatrix}$$

Skalarnom matricom kod koje je d=1 nazivamo **jediničnom matricom i ona se označava sa E**.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Svakoj kvadratnoj matrici možemo pridružiti jedan broj, tzv. **determinantu matrice**, koja se označava sa det A.

ZADACI:

7. Izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} =$$

8. Izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

Važnije osobine determinanti

1. Ako je A^T transponovana matrica kvadratne matrice A, tada je det A^T = det A.

2. Determinanta se množi brojem tako da se tim brojem množe svi elementi jedne vrste (kolone).

3. Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi jedne vrste (kolone) jednaki odgovarajućim elementima druge vrste (kolone).

4. Determinanta ne mijenja vrijednost ako elementima jedne vrste (kolone) dodamo odgovarajuće elemente druge vrste (kolone) pomnožene istim brojem.

5. Ako se determinante matrica A = (a_{ij}) i B = (b_{ij}) razlikuju samo u i-toj vrsti tada je det A + det B jednaka determinanti u kojoj je i-ta vrsta jednaka zbiru odgovarajućih elemenata i-te vrste determinante A i determinante B, dok su ostale vrste nepromjenjene. Isto vrijedi i za kolone.

9. Neka je:

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ i $\det B = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix}$. Izračunati: $\det A + \det B$.

Minori i kofaktori determinante

Ako u determinanti matrice $A = (a_{ik})$ reda n izostavimo i-tu vrstu i k-tu kolonu dobićemo determinantu (n-1)-og reda (M_{ik}), koju nazivamo minor $\det A$. Minoru M_{ik} odgovara jedan elemenat a_{ik} koji se nalazi na presjeku i-te vrste i k-te kolone, pa govorimo o minoru M_{ik} elemenata a_{ik} *(i,k= 1, 2, ..., n).*

Ako je M_{ik} minor (n-1)-og reda det *A* reda *n*, tada

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

Nazivamo kofaktor ili algebarski komplement elemenata a_{ik} determinante *A*.

Determinanta se može razviti po i-toj vrsti putem formule:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}$$

i = 1, 2,.., n.

Determinanta se može razviti po k-toj koloni putem formule:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}$$

k = 1, 2,.., n.

ZADACI:

10. Izračunati vrijednost determinante

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) Razvijanjem po drugoj vrsti
b) Razvijanjem po četvrtoj koloni

Adjungovana matrica

Neka je data kvadratna matrica $A = (a_{ik})$ reda *n*. Transponovanjem matrice dobićemo

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ako elemente matrice A^T zamjenimo odgovarajućim kofaktorima dobićemo matricu:

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Za matricu B kažemo da je adjungovana matrica matrice A i označavamo je sa *adjA*, što se čita „adjungovano A".

11. Naći *adjA* ako je

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Inverzna matrica

Neka su *X* i *A* kvadratne matrice reda *n*. Za matricu *X* kažemo da je inverzna matrica matrice *A* ako je:

$$A \cdot X = X \cdot A = E_{n \times n}$$

Inverznu matricu matrice A ćemo označavati sa A^{-1}. (Definicija)

Za kvadratnu matricu A kažemo da je regularna ako je $detA \neq 0$, te u tom slučaju vrijedi:

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$ (Teorema).

12. Neka je data matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Naći inverznu matricu matrice A
a) po teoremi
b) po definiciji

Elementarne transformacije matrica. Rang matrice.

Elementarnim transformacijama matrica nazivamo:
1. promjenu mjesta dvije vrste (kolone),
2. množenje jedne vrste (kolone) brojem različitim od nule,
3. dodavanjem elemenata jedne vrste (kolone) pomnoženih nekim brojem različitim od nule odgovarajućim elementima druge vrste (kolone)

Elementarne matrice su matrice dobijene vršenjem jedne od elementarnih transformacija na jediničnoj matrici, i označavamo ih sa:
1. i-ta vrsta i j-ta vrsta zamijene mjesta E_{ij},
2. i-ta vrsta pomnožena sa a $E_i(a)$,
3. i-ta vrsta pomnožena sa a, dodata j-toj vrsti $E_{ij}(a)$,

Elementarne matrice kod kojih su odgovarajuće promjene izvršene na kolonama su E'_{ij}, $E'_i(a)$, $E'_{ij}(a)$

Za izvršenje elementarnih transformacija na vrstama matrice A dovoljno je tu transformaciju izvesti na jediničnoj matrici E, a zatim matricu A pomnožiti slijeva dobivenom elementarnom matricom. Elementarne transformacije na kolonama matrice A ekvivalentne su množenju matrice A sdesna odgovarajućim elementarnim matricama.

Elementarnim transformacijama ne mijenja se broj linearno nezavisnih vrsta (kolona) matrice. (Teorema).

Maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta matrice A zove se **rang matrice *A*** i označava se sa ***r(A).***
Matrica, koja nije nula matrica, primjenom elementarnih transformacija može se svesti na gornju trougaonu matricu, te se pomoću p linearno nezavisnih vrsta može odrediti rang matrice, tj. isti iznosi r(A) = p.

13. Matricu A svesti na gornju trougaonu matricu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Odrediti rang matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

15. Naći inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Osobine determinanti

1. Determinanta mijenja znak ako dvije vrste (kolone) međusobno zamjene mjesta.
2. Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi jedne vrste (kolone) jednaki nuli.

Sistemi linearnih algebarskih jednačina

Sistem od *m* linearnih jednačina sa *n* nepoznatih $x_1, x_2, \dots, x_n$ je

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

Brojevi a_{ik} (*i=1,2,...,m; k=1,2,...,n*) zovu se koeficijenti, a b_i (*i=1,2,...,m)* slobodni članovi sistema.

Sistem se može napisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ili u obliku

$$A \cdot X = B$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Rješavanje sistema od n jednačina sa n nepoznatih

Za $m = n$ sistem jednačina ima oblik:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ako je matrica *A* regularna (tj. $detA \neq 0$), sistem ima jedinstveno rješenje i tada postoji A^{-1}, pomoću koje ćemo rješiti isti. Pomnožimo jednakost slijeva sa A^{-1}.

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Što predatavlja jedinstveno rješenje sistema A.

1. Rješiti sistem jednačina:

$$\begin{gathered} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -2 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{gathered}$$