Sveučilište/Univerzitet Vitez

1.Iskazi. Operacije sa iskazima

U ovom dijelu ćemo se upoznati sa iskazima, operacijama s njima i nastojati da studentima približimo istinitosne tablice složenih iskaza, te osposobiti studente za rad s njima kao i skrenuti njihovu moguću primjenu u praksi, tačnije u informatici.

Pod iskazom (*ili sudom* **) podrazumijevamo svaku izjavnu rečenicu**

koja ima smisla i koja može primiti samo jednu od vrijednosti : *tačno ili netačno***.**

Navedimo sada nekoliko rečenica koje čine iskaze:

- *sedamnaest je prost broj*

- *svaki paran broj je djeljiv sa* 2

- (-3) *je prirodan broj*

Dakle, svaka od prethodno navedenih rečenica čine iskaze, tj. rečenice koje poprimaju samo jednu od vrijednosti: tačno ili netačno. U daljem tekstu, ćemo iskaze označavati malim slovima npr. *p, q, r*,... dok ćemo istinitosne vrijednosti iskaza označavati sa $\tau(p)=T$ ako je iskaz *p tačan* ili sa $\tau(p)=\perp$ ako je iskaz *p netačan*. U nekim knjigama je uobičajeno da se istinitosne vrijednosti iskaza označavaju sa 1 i 0, i to sa 1 ako je iskaz tačan i sa 0 ako je iskaz netačan.

Primjer: Ako je dat je iskaz $p(x): 2x^2-4<3$, odrediti istinitosne vrijednosti iskaza za

x =1, 2, 0, -1.

rješenje: Dakle, mi treba da odredimo $\tau(p(1))$, $\tau(p(2))$, $\tau(p(0))$ i $\tau(p(-1))$, pa imamo:

$$\tau(p(1)):\ 2\cdot 1^2-4<3 \Rightarrow -2<3 \Rightarrow \tau(p(1))=T$$

$$\tau(p(2)):\ 2\cdot 2^2-4<3 \Rightarrow 4<3 \Rightarrow \tau(p(2))=\perp$$

$$\tau(p(0)):\ 2\cdot 0^2-4<3 \Rightarrow -4<3 \Rightarrow \tau(p(0))=T$$

$$\tau(p(-1)):\ 2\cdot(-1)^2-4<3 \Rightarrow -2<3 \Rightarrow \tau(p(-1))=T$$

1.1.*Operacije sa iskazima*

Definicija :

-***<u>Negacija</u>*** iskaza p je iskaz $\neg p$ (*čitaj*: iskaz nije p) koji je tačan ako i samo ako je iskaz p lažan i obrnuto tj. lažan ako je iskaz p tačan. Istinitosna tablica izgleda ovako:

p	$\neg p$
T	$\perp$
$\perp$	T

Primjer : Ako je dat iskaz $p: 5 < 7$, odrediti istinitosnu vrijednost iskaza $\neg p$.

Rješenje: Budući da se iz same tablice vidi da je negacija iskaza p tačna ako i samo ako je sam iskaz p lažan i obrnuto, te kako je $\tau(p) = \tau(5 < 7) = T$ to je negacija iskaza $\neg p = \perp$.

-***<u>Konjunkcija</u>*** dva iskaza p i q, je iskaz $p \wedge q$ (*čitaj*: iskaz p i q) koji je tačan ako i samo ako su oba iskaza tačna. Istinitosna tablica izgleda ovako:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Primjer : Ako su dati iskazi $p: 5 < 7$ i $q: 4 > 2$, odrediti istinitosnu vrijednost iskaza $p \wedge q$.

Rješenje: Budući da se iz same tablice vidi da je konjunkcija dva iskaza tačna samo ako su oba iskaza p i q tačni, dok u svim ostalim slučajevima je konjunkcija iskaza $p \wedge q$ netačna. Obzirom da je $\tau(p) = \tau(5 < 7) = T \wedge \tau(q) = \tau(4 > 2) = T$ to je konjunkcija iskaza $p \wedge q = T$.

-***<u>Disijunkcija</u>*** dva iskaza p i q, je iskaz $p \vee q$ (*čitaj*: iskaz p ili q) koji je tačan ako i samo ako je bar jedan od iskaza p ili q tačan. Istinitosna tablica izgleda ovako:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Primjer: Ako su dati iskazi $p: -6 < 2$ i $q: 3 + 0 = 30$, odrediti istinitosnu vrijednost iskaza $p \vee q$.

Rješenje: Budući da se iz same tablice vidi da je disijunkcija dva iskaza p i q tačna ako je barem jedan od iskaza tačan, te kako je $\tau(p)=\tau(-6<2)=T$ i $\tau(q)=\tau(3+0=30)=\perp$ to je disijunkcija iskaza $p\vee q=T$.

-Isključiva disijunkcija dva iskaza p i q je iskaz $p\veebar q$ (*čitaj*: p isključivo q) koji je tačan ako i samo ako je jedan od iskaza p i q tačan, što se istinitosnom tablicom može predstaviti na sljedeći način:

p	q	$p\veebar q$
T	T	$\perp$
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Primjer : Ako su dati iskazi $p:-6<2$ i $q:3+0=3$, odrediti istinitosnu vrijednost iskaza $p\veebar q$.

Rješenje: Budući da se iz same tablice vidi da je isključiva disijunkcija dva iskaza p i q tačna ako je jedan od iskaza tačan, nikako ako su tačna oba, te kako je $\tau(p)=\tau(-6<2)=T$ i $\tau(q)=\tau(3+0=3)=T$ to je isključiva disijunkcija iskaza $p\veebar q=\perp$.

-***<u>Implikacija</u>*** dva iskaza p i q je iskaz $p\Rightarrow q$ (*čitaj*: iz p slijedi q *ili* p implicira q *ili* p je dovoljan uslov za q *ili* q je potreban uslov za p) koji je ***lažan*** ako i samo ako je prvi iskaz tačan, a drugi netačan, što se može zapisati u obliku istinitosne tablice:

p	q	$p\Rightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

Primjer: Ako su dati iskazi $p:1+3=5$ i $q:3>7$, odrediti istinitosnu vrijednost iskaza $p\Rightarrow q$.

Rješenje: Budući da se iz same tablice vidi da je implikacija dva iskaza p i q tačna u svim slučajevima sem kada je prvi iskaz tačan a drugi lažan, te kako je $\tau(p)=\tau(1+3=5)=\perp$ i $\tau(q)=\tau(3>7)=\perp$ to je implikacija iskaza $p\Rightarrow q=T$.

-***Ekvivalencija*** dva iskaza p i q je iskaz $p \Leftrightarrow q$ (*čitaj*: p je ekvivalentno sa q *ili* p je dovoljan i potreban uslov za q) koji je tačan ako i samo ako su oba iskaza tačna ili oba iskaza lažna, što se može prikazati istinitosnom tablicom:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T

Primjer: Ako su dati iskazi $p : \neg(5 = 1 + 4)$ i $q : 6 > 9$, odrediti istinitosnu vrijednost iskaza $p \Leftrightarrow q$.

Rješenje: Budući da se iz same tablice vidi da je ekvivalencija dva iskaza p i q tačna samo ako su oba iskaza tačna ili oba iskaza lažna, te kako je $\tau(p) = \tau(\neg(5 = 1 + 4)) = \perp$ i $\tau(q) = \tau(6 > 9) = \perp$ to je ekvivalencija iskaza $p \Leftrightarrow q = T$.

Pod *složenim* **iskazom (** *formulom* **) podrazumijevamo**

dva ili više iskaza koji su povezani logičkim operacijama.

Formula koja je istinita bez obzira na istinitosnu vrijednost iskaza

od kojih je sastavljena naziva se *tautologija*.[1]

***Zadatak* 1**: Popuniti date tablice za date vrijednosti varijable x :

a)

x	-3	0	3	5	11	13	16	20	21
$\tau(x + 1 = 4 \Rightarrow x > 7)$	T	T	$\perp$	T	T	T	T	T	T

Ako shvatimo da je p: x+1=4 i q: x>7, te ako npr. uzmemo da je x=5 tada imamo $\tau(p) = \tau(5 + 1 = 4) = \perp$ i $\tau(q) = \tau(5 > 7) = \perp$ pa je $\tau\left(\underbrace{5 + 1 = 4}_{\perp} \Rightarrow \underbrace{5 > 7}_{\perp}\right) = T$. Na sličan način se popuni i ostatak tablice za ostale ponuđene vrijednosti x.

b)

x	1	-3	-4	5	7	10	11
$\tau((x < 2) \Rightarrow (x + 1 = 2) \Leftrightarrow x < 4)$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

[1] Napomena: prilikom određivanja istinitosne vrijednosti bilo koje formule dogovoreno je da redoslijed primjene logičkih operacija bude sljedeći: $\neg, \wedge, \vee, \underline{\vee}, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, osim ako u formuli figurišu zagrade,tada logičke operacije unutar zagrade najprije rješavamo.

Označimo sa $p: x<2, q: x+1=2, r: x<4$ tada je istinitosna vrijednost datih iskaza za npr. za *x*=1:

$$\tau(1<2)=T\ ,\tau(1+1=2)=T,\tau(1<4)=T$$

Pa je $\tau\left(\underbrace{\underbrace{(1<2)}_{T}\Rightarrow\underbrace{(1+1=2)}_{T}}_{T}\Leftrightarrow\underbrace{1<4}_{T}\right)=T$, na sličan način se popuni i ostatak tablice.

c)

x	-3	-1	0	1	2	6	16
$\tau((x<2)\wedge(x+2=3)\Rightarrow x<1)$	T	T	T	$\perp$	T	T	T

***Zadatak* 2**: Pomoću istinitosnih tablica utvrditi koji je od sljedećih složenih iskaza tautologija:

a) $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$

na osnovu definicija logičkih operacija možemo formirati sljedeću tablicu:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\Rightarrow q$	$\neg q\Rightarrow\neg p$	$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$
T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	T	$\perp$	T	T	T
$\perp$	$\perp$	T	T	T	T	T

Budući da je vrijednost složenog iskaza bez obzira na istinitosnu vrijednost iskaza p i q tačna, to je dati iskaz tautologija.

b) $\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$ (*De-Morganov* zakon)

na osnovu definicija logičkih operacija možemo formirati sljedeću tablicu:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$\neg(p\wedge q)$	$\neg q\vee\neg p$	$\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$
T	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T
T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T	T	T
$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T
$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	T	T	T

Budući da je vrijednost složenog iskaza bez obzira na istinitosnu vrijednost iskaza p i q tačna, to je dati iskaz tautologija.

c) $(p\wedge\neg r)\Leftrightarrow(p\Rightarrow(q\wedge r))$

na osnovu definicija logičkih operacija možemo formirati sljedeću tablicu:

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$(p \wedge \neg r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$
T	T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$
T	T	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
T	$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$

Dakle, složeni iskaz nije tautologija.

d) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

na osnovu definicija logičkih operacija možemo formirati sljedeću tablicu:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T	T	T
T	$\perp$	T	$\perp$	T	T	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	T	T	T	T
$\perp$	T	T	T	T	T	T	T	T
$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

Budući da je vrijednost složenog iskaza bez obzira na istinitosnu vrijednost iskaza p i q tačna, to je dati iskaz tautologija.

***Zadatak* 3** : Odrediti u kom odnosu stoje sljedeći složeni iskazi:

$$p \Rightarrow \left[p \wedge \left(\overline{q \vee r}\right)\right] \quad i \quad \overline{p} \vee \left(\overline{q} \wedge \overline{r}\right)$$

Rješenje : Da bi smo vidjeli u kom odnosu se nalaze dati složeni iskazi, najprije ćemo sastaviti istinitosnu tablicu datih iskaza.

$p \Rightarrow \left[p \wedge \left(\overline{q \vee r}\right)\right]$

p	q	r	$q \vee r$	$\overline{q \vee r}$	$p \wedge \left(\overline{q \vee r}\right)$	$p \Rightarrow \left[p \wedge \left(\overline{q \vee r}\right)\right]$
T	T	T	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
T	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	T	T
$\perp$	T	T	T	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T

$\overline{p} \vee \left(\overline{q} \wedge \overline{r}\right)$

p	q	r	$\overline{q}$	$\overline{r}$	$\overline{p}$	$\overline{q} \wedge \overline{r}$	$\overline{p} \vee \left(\overline{q} \wedge \overline{r}\right)$
T	T	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
T	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	T	T
$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T
$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	T	T	T	T

Dakle, ako uporedimo rezultate dvaju posljednjih istinitosnih tablica sa definicijama logičkih operacija, tada vidimo da dva navedena iskaza su ekvivalentna, tj.

$$p \Rightarrow \left[p \wedge \left(\overline{q \vee r}\right)\right] \Leftrightarrow \overline{p} \vee \left(\overline{q} \wedge \overline{r}\right)$$

***Zadatak* 4** : Pretpostavimo da su sljedeće premise tačne:

(P_1) Ako se Almir kandiduje na izborima, on će postati predsjednik

(P_2) Ako Almir dođe na sastanak, on će dobiti kandidaturu

(P_3) Almir će otići na sastanak ili će biti na rekreaciji

(P_4) Almir se ne rekreira.

Da li će Almir postati predsjednik?

Pojašnjenje : Obzirom da se Almir ne rekreira, jer smatramo da je (P_4) tačna, to iz činjenice da je (P_3) tačna Almir mora doći na satanak. Takođe, imajući u vidu da je (P_2) tačna to Almir mora dobiti kandidaturu. Ako znamo da je Almir dobio kandidaturu i da je (P_1) tačna to Almir mora postati predsjednik.

Zadaci za samostalan rad:

1.Za date složene iskaze sastaviti istinitosne tablice, a zatim zaključiti koji od ponuđenih iskaza daje tautologiju

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$

b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$

c) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$

e) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \wedge r)] \Rightarrow (q \vee s)$

f) $(p \vee p) \wedge q \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee p$

2.Filip, luka i Mirko su se igrali u sobi i razbili prozor. Vera je zbog toga bila ljutai niti jedan od troice dječaka nije priznao krivicu.

Netko od vas laže kaže Vera

Mirko je slagao reče Luka

Znam da Filip neće da slaže reče Mirko

Laže Luka ili Mirko.

Tko je razbio prozor?

3.Za krađu prstena u robnoj kući osumnjičeni su Zoran, Dušan i Nikola jer su se našli u blizini vitrine sa nakitom. Sudija je postavio pitanje: *Tko je od vas ukrao prsten*? Na to su oni odgovorili:

Zoran : *Ja nisam ukrao prsten, ukrao ga je Dušan*.

Dušan : *Nikola nije ukrao prsten, a niti ja ga nisam ukrao*.

Nikola : *Ja nisam ukrao prsten, ukrao ga je Zoran*.

Ispostavilo se da su dvoica oba puta rekli istinu, a da je jedan oba puta slagao. Tko je lopov?

4. Dokazati da su sljedeće formule tautologije:

$p \vee \overline{p}$

$p \veebar \overline{p}$

$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$

$p \wedge p \Leftrightarrow p$
$p \vee p \Leftrightarrow p$ zakon idempotencije

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ zakon komutacije

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ zakon asocijativnosti

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ zakon distributivnosti

$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ De-Morganovi zakoni

$\overline{p \wedge \overline{p}}$ zakon neprotivrječnosti

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ zakon kontrapozicije

$(p \Rightarrow (q \wedge \overline{q})) \Rightarrow p$ protivrječnost

$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ zakon odkidanja

$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$ zakon negacije

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
$(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ zakon tranzitivnosti

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$ zakon zamjene $\Rightarrow$ sa *negacijom*

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$

$(p \Rightarrow \overline{q}) \vee (\overline{q} \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow \overline{s}) \vee (\overline{s} \Rightarrow p)$

5. Bez upotrebe istinitosnih tablica dokazati tačnost složenih iskaza:

a) $p \wedge (\overline{p} \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q$

b) $p \vee q \vee r \vee s \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \Rightarrow s$

2.Skupvi. Operacije sa skupovima

U ovom dijelu ćemo se upoznati sa skupovima, te načinom na koji ih možemo predstaviti. Naučiti ćemo operacije sa skupovima te perimjenu istih na neke skupovne identitete.

Pojam skupa se uzima kao osnovni.

To znači da se pojam skupa ne definiše.

Ako se neki objekat *x* nalazi u skupu *A*, onda ga nazivamo *elementom* skupa *A* i označavamo sa $x \in A$, a ako neki objekat (elemenat) *y* ne pripada skupu *A*, tada to zapisujemo na sljedeći način $y \notin A$.

Skupove označavamo sa velikim abecednim slovima *A, B, C, ..., X, Y, ...* dok *elemente* skupova označavamo malim slovima *a, b, c, ..., x, y, ...*

Ako skup ima konačno mnogo elemenata tada se skup može napisati pomoću velikih zagrada u kojima navodimo sve elemente skupa, npr. $A = \{-1,2,3,5\}$, a ako pak skup ima beskonačno mnogo elemenata tada ga predstavljamo pomoću velikih zagrada u kojima navodimo osobinu koju imaju samo elementi tog skupa npr. $A = \{x | x \in N \wedge x > 2\}$.

Skup koji *nema elemenata* nazivamo praznim skupom i označavamo sa $\emptyset$.

Obzirom, da se sam skup kao pojam ne definiše, to se on kao i elemenat skupa pojašnjavaju na nekim konkretnim primjerima koji nam omogućavaju jasniju sliku o samom skupu i njegovim elementima. Evo nekoliko primjera:

-Univerzitet u Travniku, čini jedan skup, pri čemu su svi studenti univerziteta praktično njegovi elementi.

-Evropa, čini takođe jedan skup, pri čemu možemo smatrati svaku zemlju unutar Evrope njenim elementom, međutim, svaka zemlja unutar Evrope (npr. Bosna i Hercegovina) ima i svoje stanovnike koji su ustvari elementi Bosne i Hercegovine. Ovo nam daje povod za uvođenje definicije koja slijedi:

Definicija: Za skup *A* kažemo da je *podskup* skupa *B* ako je svaki element skupa *A* ujedno i elemenat skupa *B* i pišemo $A \subseteq B$. Ako postoji bar jedan elemenat skupa *B* koji se ne nalazi u skupu *A* tada kažemo da je skup *A pravi podskup* skupa *B* i pišemo $A \subset B$.

Smatramo da je *prazan skup* podskup svakog skupa $\emptyset \subset A$ i da je *svaki skup* podskup samg sebe $A \subset A$.

Definicija: Za dva skupa *A* i *B* kažemo da su *jednaka* ako je $A \subset B \wedge B \subset A$, odnosno, dva skupa su jednaka ako imaju iste elemente.

Definicija: Pod *partitivnim* skupom skupa *A* podrazumijevamo skup svih podskupova skupa *A*.

Primjer: Ako je $A = \{1,2,3\}$, odrediti partitivni skup skupa *A*.

Rješenje: Naime, kako znamo da je partitivni skup, skup svih podskupova to će partitivni skup skupa *A* biti sačinjen od svih skupova koji se mogu načiniti samo od elemenata koji se nalaze u skupu *A*, imajući u vidu i to da je podskup svakog skupa prazan skup i da je svaki skup podskup sam sebi, tako imamo:

$$A = \{O, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}\{1,3\}, \{2,3\}, A\}$$

Definicija: *Komplement* skupa *A* u odnosu na neprazan skup *X* (uz uslov da je $A \subset X$)je skup svih elemenata koji su izvan skupa *A*, ali se nalaze u skupu *X*, što ćemo zapisivati kao:

$$C_X(A) \text{ ili } A^C \text{ ili } \overline{A} = \{x | x \in X \wedge x \notin A\}$$

Primjer: Odrediti komplement skupa $A = \{a, b, c, d\}$ u odnosu na skup $A = \{-1, a, 3, b, -5, c, d, e, f\}$.

Rješenje: Obzirom na definiciju komplementa skupa, možemo primijetiti da se u komplementu nalaze ustvari svi elemeti koji se ne nalaze u skupu A, pa tako imamo:

$$A = \{-1, 3, -5, e, f\}$$

Definicija: Pod *unijom* dva skupa *A* i *B* podrazumijevamo skup $A \cup B$ (čitaj: *A* unija *B*) koji se sastoji iz svih elemenata koji se nalaze u skupu *A* ili u skupu *B*, što ćemo kraće zapisivati kao:

$$A \cup B \overset{def}{=} \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Primjer: Dati su supovi $A = \{x | x \in Z \wedge -3 < x < 7\}$ i $B = \{x | x \in N \wedge x < 10\}$, odrediti $A \cup B$.

Rješenje: Kako i sama definicija kaže, da se u uniji dva skupa nalaze elementi bilo da su skupu *A* ili skupu *B*, to možemo pisati:

$$A = \{x | x \in Z \wedge -3 < x < 7\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{x | x \in N \wedge x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Odakle je: $$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Definicija: Pod *presjekom* dva skupa *A* i *B* podrazumijevamo skup $A \cap B$ (čitaj: *A* presjek *B*) koji se sastoji iz svih elemenata iz skupa *A* i skupa *B* što ćemo kraće zapisivati kao:

$$A \cap B \overset{def}{=} \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Primjer: Dati su supovi $A = \{x | x \in Z \wedge -3 < x < 7\}$ i $B = \{x | x \in N \wedge x < 10\}$, odrediti $A \cap B$.

Rješenje: Odredimo najprije skupove *A* i *B*, a zatim primijenimo definiciju presjeka dva skupa, koja kaže da se u presjeku praktično nalaze samo zajednički elementi iz dotičnih skupova, tako da je:

$$A = \{x | x \in Z \wedge -3 < x < 7\} = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$B = \{x | x \in N \wedge x < 10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Odakle je: $A \cap B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Definicija: Pod *razlikom* dva skupa *A* i *B* podrazumijevamo skup A / B (čitaj: *A* razlika *B*) koji se sastoji od svih elemenata iz skupa *A* koji ne pripadaju skupu *B*, što ćemo kraće zapisivati kao:

$$A / B \overset{def}{=} \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Na potpuno analogan način definišemo

$$B / A \overset{def}{=} \{x | x \in B \wedge x \notin A\}$$

Definicija: Pod *simetričnom* razlikom skupova *A* i *B* podrazumijevamo skup $A \Delta B$ (čitaj: *A* simetrična razlika *B*) koji definičemo na sljedeći način :

$$A \Delta B \overset{def}{=} (A / B) \cup (B / A)$$

Primjer: Dati su supovi $A = \{x | x \in Z \wedge -3 < x < 7\}$ i $B = \{x | x \in N \wedge x < 10\}$, odrediti $A / B, B / A, A \Delta B$.

Rješenje: Primjenom definicija prethodno navedenih možemo zaključiti da je:

$$A = \{x | x \in Z \wedge -3 < x < 7\} = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$B = \{x | x \in N \wedge x < 10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Odakle je:

$$\begin{aligned} A / B &= \{-2,-1,0\} \\ B / A &= \{7,8,9\} \\ A \Delta B &= \{-2,-1,0\} \cup \{7,8,9\} = \{-2,-1,0,7,8,9\} \end{aligned}$$

***Zadatak* 1**: Ako je

$A\bigcup B=\{a,b,c,d,e,f\}; A\bigcap B=\{a,c,d\}; A\bigcup\{2,b,8\}=\{a,b,c,d,2,8\}; B\bigcup\{-3,e,f\}=\{a,c,d,e,f,-3\}$
Odrediti skupove *A* i *B*.

Rješenje:

Obzirom da nam podatak $A\bigcup B$ ne može reći koji se to elementi nalaze u skupu *A* a koji u skupu *B*, to posmatrajmo $A\bigcap B=\{a,c,d\}$, te imajući u vidu definiciju presjeka možemo zaključiti da se elemnti *a*,*c*,*d* moraju nalaziti u oba skupa. Međutim, to nisu jedini elemnti skupova *A* i *B* jer je $A\bigcup B=\{a,b,c,d,e,f\}$, što znači da se elemnti *b*,*e*,*f*, takođe nalaze u nekim od skupova *A* ili *B*, ali se postavlja pitanje koji elemenat u kojem skupu. Naime, iz podataka da je $A\bigcup\{2,b,8\}=\{a,b,c,d,2,8\}; B\bigcup\{-3,e,f\}=\{a,c,d,e,f,-3\}$ zaključujemo da mora biti $b\in A\wedge e,f\in B$, inače podaci nisu korektno zadati. Na osnovu rečenog možemo zaključiti da je

$$A=\{a,b,c,d\}; B=\{a,c,d,e,f\}$$

***Zadatak* 2**: Ako je

$$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}; A=\{1,2,4,7\}; B=\{3,4,5,6,11,12\}$$
$$C=\{3,4,7,8,12,13,14\}, D=\{1,7,14\}$$

odrediti skupove:

a) $(A\bigcup B)\bigcap(D/C)$

b) $((A\bigcup B)\bigcap C)\bigcap\left(B\bigcup\overline{A}\right)$

c) $\left(\overline{A\cap\overline{D}}\right)\bigcup(B\bigcup C)\bigcap\overline{A}$

d) $(A\Delta B)\bigcap(C\Delta D)$

e) $\overline{(A\bigcup B)\bigcup\left(\overline{B\bigcap C}\right)}\bigcup\left(\overline{A}\bigcup D\right)$

Rješenje:

a) Obzirom da se u niji dva skupa nalaze svi elemnti iz skupa *A* ali i iz skupa *B*, te kako razliku dva skupa čine elemnti koji se nalaze u prvom, ali ne i u drugom skupu to možemo pisati da je

$$A\bigcup B=\{1,2,3,4,7,5,6,11,12\}\wedge D/C=\{1\}$$

Odakle je $(A\bigcup B)\bigcap(D/C)=\{1\}$, jer presjek dva skupa čine samo njihovi zajednički elementi.

b) Naime, koristeći se ranije uvedenim definicijama operacija među skupovima možemo reći ponovo da uniju čine svi elemnti iz oba skupa, presjek čine samo zajednički elementi dok se u komplementu nekog skupa nalaze svi elemnti koji nisu u tom skupu, nego u našem slučaju se nalaze u skupu U. Na osnovu prethodno rečenog imamo:

$$((A\cup B)\cap C)\cap\left(B\cup\overline{A}\right)$$
$$A\cup B=\{1,2,3,4,7,5,6,11,12\}$$
$$(A\cup B)\cap C=\{3,4,7,12\}$$
$$\overline{A}=\{5,6,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$
$$B\cup\overline{A}=\{3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

odakle je konačno $((A\cup B)\cap C)\cap\left(B\cup\overline{A}\right)=\{3,4,12\}$

c) Na potpuno analogan način koristeći se samo definicijama koje su prethodno uvedene imamo da je

$$\overline{D}=\{2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13\}$$
$$A\cap\overline{D}=\{2,3,4\}$$
$$\overline{A\cap\overline{D}}=\{1,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$
$$B\cup C=\{3,4,5,6,11,12,7,8,13,14\}$$
$$\left(\overline{A\cap\overline{D}}\right)\cup(B\cup C)=\{1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$
$$\overline{A}=\{5,6,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$
$$\left(\overline{A\cap\overline{D}}\right)\cup(B\cup C)\cap\overline{A}=\{5,6,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

d) Analogno prethodnim zadacima možemo pisati:

$$A\Delta B=(A/B)\cup(B/A)=\{1,2,7\}\cup\{5,6,11,12\}=\{1,2,7,5,6,11,12\}$$
$$C\Delta D=(C/D)\cup(D/C)=\{3,4,8,12,13\}\cup\{1\}=\{3,4,8,12,13,1\}$$
$$(A\Delta B)\cap(C\Delta D)=\{1,12\}$$

e) Analogno prethodnim primjerima imamo:

$$A\cup B=\{1,2,3,4,7,5,6,11,12\}$$
$$B\cap C=\{3,4,12\}$$
$$\overline{B\cap C}=\{1,2,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15\}$$
$$(A\cup B)\cup\left(\overline{B\cap C}\right)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$
$$\overline{(A\cup B)\cup\left(\overline{B\cap C}\right)}=\{\ \}$$
$$\overline{A}=\{5,6,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$
$$\overline{A}\cup D=\{5,6,8,9,10,11,12,13,14,15,1,7\}$$

$$\overline{(A\cup B)\cup\left(\overline{B\cap C}\right)}\cup\left(\overline{A}\cup D\right)=\{1,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

***Zadatak* 3**: Neka su *A*, *B*, *C* ne prazni skupovi, dokazati date skupovne jednakosti:

$$a)(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$$
$$b)A\bigcap(B/C)=(A\bigcap B)/(A\bigcap C)$$
$$c)(A\bigcup B)/(A\bigcup C)=(B/A)\bigcap(B/C)$$

Rješenje: Date skupovne jednakosti ćemo dokazati koristeći se definicijama i logičkim operacijama, a data rješenja predstaviti tabelarno. Za svaku od postavljenih skupovnih jednakosti moramo dobiti da je tautologija da bi moglismatrati da je tačna.

$$a)(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$$
$$x\in(A\bigcup B)\wedge x\in C\Leftrightarrow x\in(A\bigcap C)\vee x\in(B\bigcap C)$$
$$\left(\underbrace{x\in A}_{p}\vee\underbrace{x\in B}_{q}\right)\wedge\underbrace{x\in C}_{r}\Leftrightarrow\left(\underbrace{x\in A}_{p}\wedge\underbrace{x\in C}_{r}\right)\vee\left(\underbrace{x\in B}_{q}\wedge\underbrace{x\in C}_{r}\right)$$
$$(p\vee q)\wedge r\Leftrightarrow(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$$

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\wedge r$	$p\wedge r$	$q\wedge r$	$(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$	$p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	T
T	⊥	T	T	T	T	⊥	T	T
T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	T
⊥	T	T	T	T	⊥	T	T	T
⊥	T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	T
⊥	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T

Budući da je ekvivalentna formula tautologija, to možemo smatrati i da je polazna skupovna jednakost tačna.

$$b)A\bigcap(B/C)=(A\bigcap B)/(A\bigcap C)$$
$$x\in A\wedge(x\in B\wedge x\notin C)\Leftrightarrow x\in(A\bigcap B)\wedge x\notin(A\bigcap C)$$
$$x\in A\wedge(x\in B\wedge\neg x\in C)\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\wedge\neg(x\in A\wedge x\in C)$$
$$\underbrace{x\in A}_{p}\wedge\left(\underbrace{x\in B}_{q}\wedge\neg\underbrace{x\in C}_{r}\right)\Leftrightarrow\left(\underbrace{x\in A}_{p}\wedge\underbrace{x\in B}_{q}\right)\wedge\neg\left(\underbrace{x\in A}_{p}\wedge\underbrace{x\in C}_{r}\right)$$
$$F:\underbrace{p\wedge(q\wedge\neg r)}_{L}\Leftrightarrow\underbrace{(p\wedge q)\wedge\neg(p\wedge r)}_{D}$$

p	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	L	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$\neg(p \wedge r)$	D	F
T	T	T	⊥	⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	T
T	T	⊥	T	T	T	T	⊥	T	T	T
T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T
T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	T	⊥	T
⊥	T	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T	⊥	T
⊥	T	⊥	T	T	⊥	⊥	⊥	T	⊥	T
⊥	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T	⊥	T
⊥	⊥	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	T	⊥	T

Na sličan način kao u prethodnom primjeru možemo zaključiti da je polazna skupovna jednakost tačna.

$$c)(A \bigcup B)/(A \bigcup C) = (B/A) \bigcap (B/C)$$
$$x \in (A \bigcup B) \wedge x \notin (A \bigcup C) \Leftrightarrow x \in (B/A) \wedge x \in (B/C)$$
$$(x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in B \wedge x \notin A) \wedge (x \in B \wedge x \notin C)$$
$$(x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in B \wedge \neg x \in A) \wedge (x \in B \wedge \neg x \in C)$$
$$\left(\underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in B}_{q}\right) \wedge \neg\left(\underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in C}_{r}\right) \Leftrightarrow \left(\underbrace{x \in B}_{q} \wedge \neg\underbrace{x \in A}_{p}\right) \wedge \left(\underbrace{x \in B}_{q} \wedge \neg\underbrace{x \in C}_{r}\right)$$
$$F : \underbrace{(p \vee q) \wedge \neg(p \vee r)}_{L} \Leftrightarrow \underbrace{(q \wedge \neg p) \wedge (q \wedge \neg r)}_{D}$$

P	q	r	$\neg r$	$\neg p$	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee r)$	L	$(q \wedge \neg p)$	$(q \wedge \neg r)$	D	F
T	T	T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T
T	T	⊥	T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	T	⊥	T
T	⊥	T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T
T	⊥	⊥	T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T
⊥	T	T	⊥	T	T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	T	⊥	T	T	T	T	T	T	T	T	T
⊥	⊥	T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T
⊥	⊥	⊥	T	T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	T

***Zadatak* 4**: Neka su dati proizvoljni ne prazni skupovi, dokazati date skupovne jednakosti:

$$a)(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$$

Rješenje: Da bi smo pokazali skupovnu jednakost, nećemo postupiti kao u prethodnom zadatku nego ćemo sada koristiti definiciju jednakosti dva skupa. Dakle na osnovu te definicije, da bi polazna jednakost bila tačna mora da bude:

$$(A \bigcap B) \bigcup C \subset (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C) \wedge (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C) \subset (A \bigcap B) \bigcup C$$

Tek tada na osnovu definicije jednakosti dva skupa možemo tvrditi da je

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

Pokažimo sada da je $(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C)$, pa imamo

$$\begin{aligned}
&(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C)\\
&x\in(A\cap B)\cup C\Rightarrow x\in(A\cap B)\vee x\in C\\
&(x\in A\wedge x\in B)\vee x\in C\Rightarrow(x\in A\vee x\in C)\wedge(x\in B\vee x\in C)\\
&x\in(A\cup C)\wedge x\in(B\cup C)\\
&x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)\\
&\textit{odnosno}\\
&(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C)
\end{aligned}$$

Pokažimo sada da važi i obrnuto tj. $(A\cup C)\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup C$

$$\begin{aligned}
&(A\cup C)\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup C\\
&x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)\\
&x\in(A\cup C)\wedge x\in(B\cup C)\\
&(x\in A\wedge x\in B)\vee x\in C\Rightarrow(x\in A\vee x\in C)\wedge(x\in B\vee x\in C)\\
&x\in(A\cap B)\cup C\Rightarrow x\in(A\cap B)\vee x\in C\\
&(A\cup C)\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup C
\end{aligned}$$

Na osnovu dokazane prethodne dvije relacije možemo zaključiti da je

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

Što smo i trebali pokazati[2].

$b) A\subset X\Rightarrow X/(X/A)=A$

Rješenje : Neka je $A\subset X$, odnosno $x\in A\Rightarrow x\in X$. Pokažimo sada da je $X/(X/A)=A$ u smislu definicije jednakosti dva skupa. Neka je

$$\begin{aligned}
&x\in X/(X/A)\Rightarrow x\in X\wedge x\notin(X/A)\Rightarrow x\in X\wedge\neg x\in(X/A)\Rightarrow x\in X\wedge\neg(x\in X\wedge x\notin A)\\
&\Rightarrow x\in X\wedge\neg(x\in X\wedge\neg x\in A)\Rightarrow x\in X\wedge(\neg x\in X\vee\neg(\neg x\in A))\Rightarrow x\in X\wedge(\neg x\in X\vee x\in A)\\
&\Rightarrow\underbrace{(x\in X\wedge\neg x\in X)}_{prazan_skup}\vee\underbrace{(x\in X\wedge x\in A)}_{A\subset X}\Rightarrow x\in A\\
&X/(X/A)\subset A
\end{aligned}$$

Na sličan način se pokazuje i obrnuto.

[2] U svim narednim primjerima ovakvog tipa ćemo se služiti istim načinom razmišljanja i istim zaključivanjem mada to nećemo više posebno naglašavati.

$c) A/B = A/(A \cap B) = (A \cup B)/B$

Rješenje : Ovaj zadatak ćemo riješiti tako što ćemo pokazati dvije skupovne jednakosti

$$\underbrace{A/B = A/(A \cap B)}_{(1)} \wedge \underbrace{A/B = (A \cup B)/B}_{(2)}$$

Dokažimo najprije prvu jednakost $A/B = A/(A \cap B)$

$$x \in A/(A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge \neg x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)$$
$$x \in A \wedge (\neg x \in A \vee \neg x \in B) \Rightarrow \underbrace{(x \in A \wedge \neg x \in A)}_{prazan\_skup} \vee (x \in A \wedge \neg x \in B) \Rightarrow x \in A/B$$

Analogno pokazujemo i obrnuto, čime možemo smatrati da je prva jednakost tačna. Dokažimo sada i drugu jednakost tj. $A/B = (A \cup B)/B$, naime neka je

$$x \in (A \cup B)/B \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin B \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg x \in B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \in A \wedge \neg x \in B) \vee \underbrace{(x \in B \wedge \neg x \in B)}_{prazan\_skup} \Rightarrow x \in A/B$$

Na isti način pokazujemo i obrnuto, pa možemo zaključiti da je i druga skupovna jednakost tačna, odnosno polazna skupovna jednakost je tačna.

$d) (A \cup B)/C = (A/C) \cup (B/C)$

Rješenje:

$$x \in (A \cup B)/C \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin C \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \Rightarrow (x \in A/C) \vee (x \in B/C) \Rightarrow$$
$$x \in (A/C) \cup (B/C)$$

Analogno zaključujemo da važi i obrnuto, pa je time i polazna jednakost dokazana.

$e) A \cap (B \Delta D) = (A \cap B) \Delta (A \cap D)$

Rješenje: Neka je

$$x \in (A \cap B)\Delta(A \cap D) \Rightarrow x \in ((A \cap B)/(A \cap D)) \cup ((A \cap D)/(A \cap B)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in ((A \cap B)/(A \cap D)) \vee x \in ((A \cap D)/(A \cap B)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \in (A \cap B) \wedge x \notin (A \cap D)) \vee (x \in (A \cap D) \wedge x \notin (A \cap B)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in D)) \vee ((x \in A \wedge x \in D) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \wedge (\neg x \in A \vee \neg x \in D)) \vee ((x \in A \wedge x \in D) \wedge (\neg x \in A \vee \neg x \in B)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\underbrace{(x \in A \wedge x \in B \wedge \neg x \in A)}_{prazan\_skup} \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge \neg x \in D) \right] \vee$$
$$\vee \left[\underbrace{(x \in A \wedge x \in D \wedge \neg x \in A)}_{prazan\_skup} \vee (x \in A \wedge x \in D \wedge \neg x \in B) \right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge \neg x \in D) \vee (x \in A \wedge x \in D \wedge \neg x \in B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in A \wedge [(x \in B \wedge \neg x \in D) \vee (x \in D \wedge \neg x \in B)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in A \wedge [(x \in B/D) \vee (x \in D/B)] \Rightarrow x \in A \wedge x \in [(B/D) \cup (D/B)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in A \cap (B \Delta D)$$

odnosno

$$(A \cap B)\Delta(A \cap D) \subset A \cap (B \Delta D)$$

Na sličan način pokazujemo i obrnuto, pa možemo zaključiti da je polazna jednakost tačna.

***Zadatak* 6**: Neka su dati skupovi $A = \{x \in R | x^2 + 6x + 8 > 0\}$ i $B = \{x \in R | x^2 + 3x > 0\}$. Odrediti $A \cup B, A \cap B, A/B, B/A$.

Rješenje: Najprije odredimo skup *A*, pri čemu znamo da se u skupu *A* nalaze svi realni brojevi koji zadovoljavaju nejednačinu $x^2 + 6x + 8 > 0 \Rightarrow (x+2)(x+4) > 0$. Datu nejednačinu riješimo pomoću tabele

	$-\infty$	-4	-2	$+\infty$
x+4	-	+	+	
x+2	-	-	+	
	+	-	+	

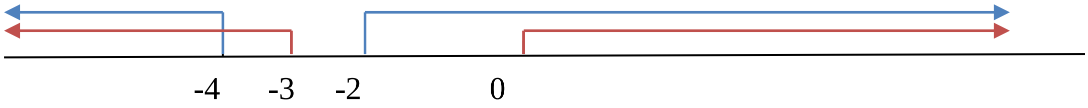
Iz tabele vidimo da je skup *A* ustvari skup svih realnih brojeva $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$.

Na sličan način odredimo sada i skup *B*, naime kako je skup *B* dat sa $B = \{x \in R | x^2 + 3x > 0\}$ to se u *B* nalaze svi elementi koji zadovoljavaju uslov $x^2 + 3x > 0 \Rightarrow x(x+3) > 0$

	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
x	-	-	+	
x+3	-	+	+	
	+	-	+	

Iz tabele vidimo da je skup *B* ustvari skup svih realnih brojeva $x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.

Predstavimo skupove *A* i *B* na brojnoj osi:



Sada sa brojne ose možemo zaključiti da je

$$A \cup B : x \in (-\infty,-3) \cup (-2,+\infty)$$
$$A \cap B : x \in (-\infty,-4) \cup (0,+\infty)$$
$$B / A : x \in [-4,-3)$$
$$A / B : x \in (-2,0]$$

***Zadatak* 5**: Neka su dati skupovi $A = \{x \in R | \sqrt{2x+1} > x-1\}$ i $B = \{x \in R | \sqrt{x-1} > x-3\}$. Odrediti $A \cup B, A \cap B, A / B, B / A$.

Rješenje: Obzirom da su skupovi *A* i *B* dati preko iracinalnih nejednačina, to ćemo skupove *A* i *B* naći primjenom sljedeće formule :

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{array}{l} f(x) > [g(x)]^2 \\ g(x) \geq 0 \end{array}$$

Na osnovu prethodne formule možemo zaključiti da elemnti koji se nalaze u skupu A zadovoljavaju uslove

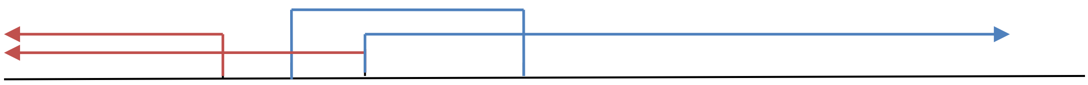
$$\sqrt{2x+1} > x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases} \vee \begin{array}{l} 2x+1 > [x-1]^2 \Rightarrow x^2 - 4x < 0 \Rightarrow x(x-4) < 0 \\ x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \end{array}$$

	$-\infty$	0	4	$+\infty$
x	-	+	+	
x-4	-	-	+	
	+	-	+	

Dakle rješenje nejednačine $x(x-4) < 0$ je $x \in (0,4)$, kako su sve ostale već prethodno već riješene to možemo pisati:

$$\sqrt{2x+1} > x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right] \\ x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty,1) \end{cases} \vee \begin{array}{l} x(x-4) < 0 \Rightarrow x \in (0,4) \\ x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1,+\infty) \end{array}$$

Ako to predstavimo na brojnoj pravoj onda imamo:



-0.5 0 1 4

Sa brojne prave se vidi da je skup $A: x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1,4)$

Na sličan način odredimo sada i skup *B*:

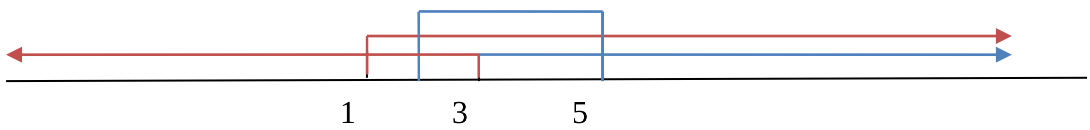
$$\sqrt{x-1} > x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases} \vee \begin{matrix} x-1 > [x-3]^2 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 < 0 \Rightarrow (x-2)(x-5) < 0 \\ x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{matrix}$$

	$-\infty$	2	5	$+\infty$
x-2	-	+	+	
x-5	-	-	+	
	+	-	+	

Dakle rješenje nejednačine $(x-2)(x-5) < 0$ je $x \in (2,5)$, kako su sve ostale već prethodno već riješene to možemo pisati:

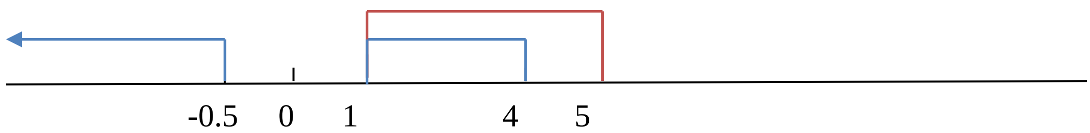
$$\sqrt{x-1} > x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, +\infty) \\ x < 3 \Rightarrow x \in (-\infty, 3) \end{cases} \vee \begin{matrix} (x-2)(x-5) < 0 \Rightarrow x \in (2,5) \\ x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow x \in [3, +\infty) \end{matrix}$$

Ako to predstavimo na brojnoj pravoj onda imamo:



Sa brojne prave vidimo da je skup $B: x \in [1,3) \cup [3,5) = [1,5)$ $A: x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1,4)$

Skupove *A*(plava boja) i *B*(crvena boja) predstavimo na brojnoj pravoj



$A \cup B: x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1,5)$

$A \cap B: x \in [1,4)$

$B / A: x \in [4,5)$

$A / B: x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

***Zadatak* 6**: Neka su dati skupovi $A=\left\{x\in R \middle| \log_{\frac{1}{3}}\frac{4x-2}{3}>1\right\}$ i $B=\left\{x\in R \middle| \left|x^2-2x-1\right|\le 2\right\}$.

Odrediti $A\bigcup B, A\bigcap B, A/B, B/A$.

Rješenje: Odredimo skup *A*, imajući u vidu da skup *A* određuju realni brojevi koji zadovoljavaju logaritamsku nejednačinu, te znajući da logaritam po bilo kojoj bazi (koja je veća od nule i različitoj od jedan) postoji samo ako je podlogaritamska veličina veća od nule to moramo najprije odrediti definiciono područje. Odnosno, trebamo odrediti sve realne brojeve za koje možemo izračunati logaritam, a to je za $\frac{4x-2}{3}>0\Rightarrow x>\frac{1}{2}$. Uz uslov da je $x>\frac{1}{2}$, odredimo sada one brojeve koji zadovoljavaju logaritamsku jednačinu :

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{4x-2}{3}>1$$

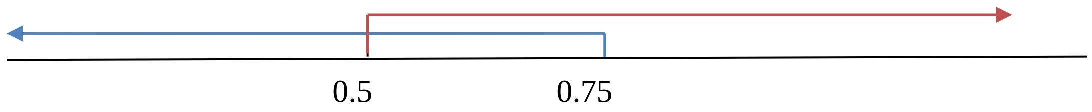
$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{4x-2}{3}>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}(baza\_manja\_od\_jedan)$$

$$\frac{4x-2}{3}<\frac{1}{3}$$

$$4x-2<1$$

$$x<\frac{3}{4}$$

Predstavimo sada ovo na brojnoj osi:



Dakle, skup *A* čine brojevi $A: x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.

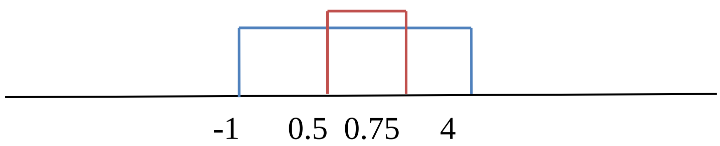
Odredimo sada i skup *B*:

Obzirom da je skup B zadan preko apsolutne nejednačine oblika $|f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a$

$$|x^2-2x-1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x^2-2x-1 \leq 2$$
$$-2 \leq x^2-2x-1 \wedge x^2-2x-1 \leq 2$$
$$x^2-2x+1 \geq 0 \wedge x^2-2x-3 \leq 0$$
$$(x+1)^2 \geq 0 \wedge x^2-2x-3 \leq 0$$
$$tačač\, \forall x \in R \wedge (x+1)(x-3) \leq 0$$

	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x+1$	-	+	+	
$x-3$	-	-	+	
	+	-	+	

Dakle, skup $B: x \in [-1,3]$ $A: x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$



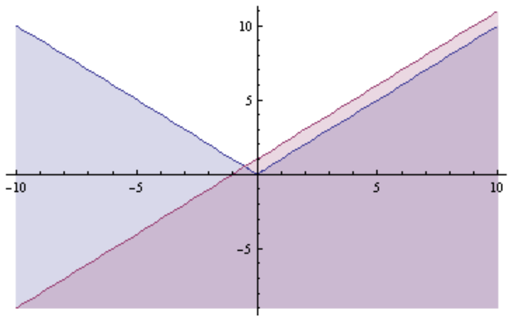
$A \bigcup B: x \in [-1,4]$

$A \bigcap B: x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

$B/A: x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \bigcup \left[\frac{3}{4}, 4\right]$

$A/B: prazan\_skup$

***Zadatak* 7**: Neka su dati skupovi $A = \{(x,y) \in R^2 | y \geq |x|\}$ i $B = \{(x,y) \in R^2 | y \geq x+1\}$. Grafički predstaviti skupove A i B, a zatim odrediti $A \bigcup B, A \bigcap B, A/B, B/A$.



Skup A : bijela boja +svijetlo ljubičasta

Skup B : bijela+ svijtlo plava

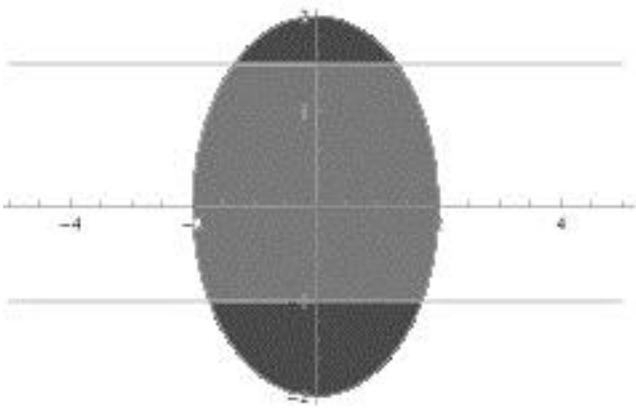
$A \bigcup B$: bijala+svijetlo ljubičasta+ svijetlo plava boja

$A \bigcap B$: bijela boja

A / B: svijetlo ljubičasta boja

B / A: svijetlo plava boja

***Zadatak* 8**: Neka su dati skupovi $A = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$ i $B = \left\{(x, y) \in R^2 \middle| 1 \leq y \leq \frac{3}{2}\right\}$. Grafički predstaviti skupove A i B, a zatim odrediti $A \bigcup B, A \bigcap B, A / B, B / A$.



Skup A : svijetlo siva+ tamno siva

Skup B : svijetlo siva + bijela (između pravih linija)

$A \bigcup B$: svijetlo siva+ tamno siva+ bijela (između pravih linija)

$A \bigcap B$: svijetlo siva

A / B: tamno siva

B / A: bijela (između pravih linija)

Zadaci za samostalan rad:

1. Dati su skupovi $A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d, e\}, C = \{a, d, e\}$. Naći $(A \cup B) \cap C$ i $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. Provjeriti da li je $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
2. Iz knjige strana 38.

Pojam uređenog skupa

Uređeni skup je skup kod kojeg znamo koja je prva, a koja druga koordinata.

Npr. (a, b) je uređeni par ili uređena dvojka, a – prva koordinata, b – druga koordinata

Tako imamo i uređenu trojku (a, b, c).

Dva uređena para su jednaka i pišemo: $(a, b) = (c, d)\ ako\ vrijedi\ (a = c) \wedge (b, d)$.

Direktni (Dekartov ili Kartezijev) **proizvod skupova**

Direktni proizvod nepraznih skupova A i B je skup uređenih parova (x, y) čija je prva koordinata x element skupa A, a druga koordinata y element skupa B, i označava se sa $A \times B$ (čitamo „A puta B“).

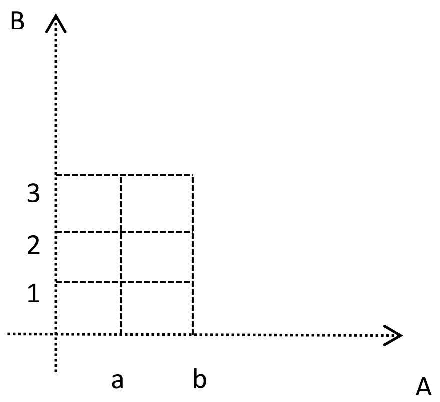
Kratko zapisujemo: $A \times B = \{(x, y):\ x \in A \wedge y \in B\}$.

Direktni proizvod nije komutativan tj. $A \times B \neq B \times A$

Primjer: $A = \{a, b\}, B = \{1,2,3\}$. Tada je:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Grafički prikaz:



Zadatak: Ako je $A = \{1,2,3\}$, odrediti A^2.

Rješenje: $A^2 = A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

Za vježbu, zadaci iz knjige na strani 38.