**SVEUČILIŠTE/UNIVERZITET "VITEZ"**

**TRAVNIK**

# M A T E M A T I K A

# S A D R Ž A J

**IV GLAVA**

# I GLAVA

# ISKAZNA ALGEBRA. SKUPOVI. ALGEBARSKE STRUKTURE

## 1. ISKAZNA ALGEBRA

### 1.1. Pojam iskaza

Iskaz je ona rečenica koja može da ima jednu i samo jednu istini-tosnu vrijednost: TAČAN, NETAČAN (odnosno istinit, neistinit). Tačan iskaz zovemo TVRĐENJE (STAV).

Navedimo nekoliko primjera iskaza:

1. Broj 10 je jednak razlici brojeva 15 i 5.
2. Broj 8 je veći od broja 1.
3. Broj 7 je manji od broja 2.
4. Postoji realan broj takav da je $x^2 = -16$.
5. Postoji realan broj $x$ takav da je $x^2 = 16$.
6. Broj 10 je djeljiv brojem 3.

Među ovim iskazima tačni su 1. 2. 5. dok su 3. 4. i 6. netačni.

Znak za istinitosnu vrijednost iskaza $p$ je $\tau(p)$, i istinitosnu vri-jednost TAČAN označavamo brojem 1, a istinitosnu vrijednost NETAČAN brojem 0. Često se istinitosna vrijednost tačan označava i znakom , a istinitosna vrijednost netačan sa $\perp$ što se čita "te" odnosno "nete".

Sa iskazima se pomoću LOGIČKIH OPERACIJA mogu praviti novi iskazi. Osnovne logičke operacije su: *negacija, disjunkcija, konjukcija, implikacija i ekvivalencija.*

### 1.2. Osnovne operacije sa iskazima

#### 1.2.1. Negacija

**Definicija 1.1.** *Negacija iskaza $x$ je "ne $x$" i označavamo ga sa* $\neg x$.

Navedimo nekoliko primjera negacije iskaza.

1. Za $x$:"Kiša pada" je $\neg x = \neg$ "Kiša pada" : " Nije istina da kiša pada" ili "Kiša ne pada".

2. Za $x:"2>5"$ je $\neg x:"\neg(2>5)":$ "nije $2>5$".

3. Za $x:"\sin x>1"$ je $\neg x:"\neg(\sin x>1)":"nije\ \ \sin x>1"$.

Negacija tačnog iskaza je netačan iskaz, a negacija netačnog iskaza je tačan iskaz.

Istinitosna vrijednost negacije iskaza "$x$" može se dati tabelama 1.1.

| $\tau(x)$ | $\tau(\neg x)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

ili

| | $\neg$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

Tabela 1.1.

## 1.2.2. Disjunkcija

**Definicija 1.2.** *Disjunkcija dva iskaza* $p$ *i* $q$ *je iskaz* "$p$ *ili* $q$", *što se simbolički zapisuje* $p \vee q$.

*Disjunkcija iskaza* $p$ i $q$ *je tačna ako je*:

1. $p$ *tačan i* $q$ *tačan*,
2. $p$ *tačan, a* $q$ *netačan*,
3. $p$ *netačan, a* $q$ *tačan*,

*a netačan ako je* $p$ *netačan i* $q$ *netačan iskaz.*

Istinitosna vrijednost disjunkcije iskaza $p$ i $q$ može se dati tabelama 1.2.

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p \vee q)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

ili

| $\vee$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |

Tabele 1.2.

Za disjunkciju iskaza $p$ i $q$ se često kaže da je tačna ako je bar jedan od tih iskaza tačan.

Naprimjer, ako su $p$ i $q$ redom iskazi "$5=5$" i "$7<3$" tada je disjunkcija $p \vee q$ tačan iskaz jer je tačan iskaz "$5=5$". Tačan je i iskaz "$5=5$ ili $7=7$", jer su tačni iskazi "$5=5$" i "$7=7$".

### 1.2.3. Konjukcija

**Definicija 1.3.** *Konjukcija iskaza* $p$ *i* $q$ *je iskaz "p i q", što se označava sa* $p \wedge q$, *i ona je tačna ako su* $p$ *i* $q$ *tačni, a netačna ako* $p$ *i* $q$ *imaju druge istinitosne vrijednosti.*

Istinitosna tablica za konjukciju iskaza $p$ i $q$, prema definiciji 1.3. je data tabelama 1.3.

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p \wedge q)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

ili

| $\wedge$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Tabele 1.3.

### 1.2.4. Implikacija

**Definicija 1.4.** *Implikacija iskaza* $p$ *i* $q$ *je iskaz "Ako p onda je q", što se označava sa* "$p \Rightarrow q$". *Ona je netačan iskaz samo u slučaju da je* $p$ *tačan a* $q$ *netačan iskaz. U svim ostalim slučajevima ona je tačan iskaz.*

Prema tome istinitosne vrijednosti implikacije izgledaju kao u tabe-lama 1.4.

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p \Rightarrow q)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

ili

| $\Rightarrow$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |

Tabele 1.4.

Za rečenicu "Ako je $p$ onda je $q$" ima više rečenica sa istim značenjima, kao na primjer:

1. Ako $p$ onda $q$.
2. Iz $p$ slijedi $q$.
3. $p$ povlači $q$.
4. $p$ je pretpostavka, a $q$ je posljedica.
5. $p$ je dovoljan uslov za $q$.
6. $q$ je potreban uslov za $p$.

Tako, naprimjer, isto značenje imaju sljedeće rečenice:

1. Ako je $a \neq 0$, onda jednačina $a\,x = b$ ima rješenje po $x$.
2. Iz $a \neq 0$, slijedi da jednačina $a\,x = b$ ima rješenje po $x$.

3. $a \neq 0$, povlači da jednačina $a\,x = b$ ima rješenje po $x$.

4. $a \neq 0$ je dovoljan uslov da jednačina $a\,x = b$ ima rješenje po $x$.

### 1.2.5. Ekvivalencija

**Definicija 1.5.** *Ekvivalencija iskaza p i q je iskaz "$p$ je ako i samo ako je $q$". Ona je istinita ako p i q imaju jednake istinitosne vrijednosti, a netačna ako p i q imaju različite istinitosne vrijednosti.*

Ekvivalenciju iskaza $p$ i $q$ označavamo sa $p \Leftrightarrow q$. Prema defi-niciji ekvivalencije iskaza $p$ i $q$ njene istinitosne vrijednosti su date tabe-lama 1.5.

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p \Leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

ili

| $\Leftrightarrow$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

Tabele 1.5.

Pored rečenice "$p$ je ako i samo ako je $q$" isto značenje imaju i rečenice:

1. Ako je $p$ onda je $q$ i ako je $q$ onda je $p$.
2. $p$ je ekvivalentno sa $q$.
3. $p$ je potreban i dovoljan uslov za $q$.

Tako naprimjer, isto značenje imaju rečenice:

1. Prirodan broj $n$ je djeljiv sa tri ako i samo ako je zbir cifara broja $n$ djeljiv sa tri.
2. Ako je zbir cifara prirodnog broja $n$ djeljiv sa tri onda je i broj djeljiv sa tri i ako je prirodan broj $n$ djeljiv sa tri onda je zbir cifara djeljiv sa tri.
3. Da bi prirodan broj $n$ bio djeljiv sa tri potrebno je i dovoljno da mu je zbir cifara djeljiv sa tri.

## 1.3. Iskazna algebra (1,0)

U dosadašnjem radu smo iskaze označavali simbolima $p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots$ koji se nazivaju iskazna slova. U matematičkoj logici se pored iskaznih slova uvodi i pojam iskazne formule.

**Definicija 1.6.** 1. *Iskazna slova su iskazne formule* (*Iskazne formule ćemo označavati velikim štampanim latinskim slovima,* $A, B, C, \dots$)

2. *Ako su A i B iskazne formule, tada su i* $\neg A$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ *iskazne formule.*

3. *Iskazne formule mogu se obrazovati jedino pomoću konačnog broja logičkh operacija*.

Svaka iskazna formula ima i svoju istinitosnu vrijednost koja se mo-že predstaviti tablicom istinitosti za datu formulu. Tako, naprimjer, iskazna formula: $(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ ima sljedeću tablicu istinitosti, tabela 1.6.

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \Rightarrow B$ | $(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Tabela 1.6.

Ili, naprimjer, tablica istinitosti za iskaznu formulu:

$$\neg[(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)]\text{, je}$$

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \vee \neg B$ | $C = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ | $\neg C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Tabela 1.7.

Vidimo, iz prethodna dva primjera, da se istinitosna vrijednost iskaza formule od dva iskazna slova dobija kao rezultat kombinacija istinitosnih vrijednosti ta dva iskaza. U slučaju da se iskazna formula sastoji od tri iskazna slova tada bi tablica imala $2^3 = 8$ kombinacija istinitosnih vrijednosti iskaznih slova. Tako, naprimjer, iskazna formula

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

ima tabelu istinitosnih vrijednosti; (tabela 1.8.)

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \wedge B$ | $A \wedge C$ | $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 1.8.

Na sličan način se obrazuju tabele istinitosnih vrijednosti iskaznih formula koje sadrže četiri ili više iskaznih slova.

### 1.3.1. Tautologija

**Definicija 1.7.** *Iskazna formula je tautologija ako za sve istinitosne vrijednosti svojih iskaznih slova dobija vrijednost* 1.

***Primjer* 1.1.** Pokazati da iskazna formula

$$Y:\ \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

predstavlja tautologiju.

Tabela istinitosne vrijednosti iskazne formule $Y$ glasi:

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \wedge \neg B$ | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela 1.9.

Kao što se vidi iz tabele iskazna formula ima uvijek istinitosnu vrijednost 1 za sve kombinacije istinitosnih vrijednosti iskaznih slova $A$ i $B$, pa je pre-ma definiciji 1.7. formula $Y$ tautologija.

Navedimo neke važnije tautologije sa njihovim imenima:

1. $A \Rightarrow A$, (Zakon reflektivnosti za implikaciju)
2. $A \vee \neg A$, (Zakon isključenja trećeg)
3. $\neg(A \wedge \neg A)$, (Zakon neprotivrječnosti)
4. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$, (Zakon dvojne negacije)
5. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$, (Pircerov zakon)
6. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$, (Zakon tranzitivnosti za implikaciju)
7. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, (Zakon kontrapozicije)
8. $((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow C)$, (Zakon tranzitivnosti ekvivalencije)
9. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$, (Zakon negacije premise)
10. $A \vee A \Leftrightarrow A,\quad A \wedge A \Leftrightarrow A$, (Zakon idenpotencije za $\vee$ i $\wedge$)
11. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A,\ A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, (Zakon komutativnosti za $\vee$ i $\wedge$)

12. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$, (Zakon asocijativnosti za $\vee$ )
13. $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, (Zakon asocijativnosti za $\wedge$ )
14. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, (Zakon distributivnosti $\vee$ prema $\wedge$ )
15. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, (Zakon distributivnosti $\wedge$ prema $\vee$ )
16. $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, (Zakon apsorpcije $\vee$ prema $\wedge$ )
17. $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$, (Zakon apsorpcije $\wedge$ prema $\vee$ )
18. $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
19. $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (De Morganovi zakoni)

Da su navedene iskazne formule zaista tautologije, lahko se može do-kazati pomoću istinitosnih tablica za svaku formulu posebno. Ti dokazi čita-ocu mogu poslužiti kao primjeri za dokazivanje da je data iskazna formula tautologija.

Tautologije od 1 do 19 mogu poslužiti za dokazivanje drugih tauto-logija, a da se pri tome ne koriste tablice istinitosnih vrijednosti. Tako, na pri-mjer, pokažimo da je iskazna formula

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

tautologija.

Ako se pođe od lijeve strane date ekvivalencije i ako se ova formula zamjenjuje ekvivalentnim formulama, datim u prethodnom spisku ekvivale-ncija, dobiće se desna strana date ekvivalencije.Taj postupak bi izgledao ovako:

$$\begin{aligned}
(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C) &\Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \vee (B \wedge C) \\
&\Leftrightarrow (((A \vee (A \wedge C)) \wedge (B \vee (A \wedge C)))) \vee (B \wedge C) \\
&\Leftrightarrow (A \wedge (B \vee (A \wedge C))) \vee (B \wedge C) \\
&\Leftrightarrow (A \wedge (B \vee A) \wedge (B \vee C)) \vee (B \wedge C) \\
&\Leftrightarrow (A \wedge (B \vee C)) \vee (B \wedge C) \\
&\Leftrightarrow (A \vee (B \wedge C)) \wedge ((B \vee C) \vee (B \wedge C)) \\
&\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C \vee B) \wedge (B \vee C \vee C) \\
&\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C \vee B) \wedge (B \vee C) \\
&\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C).
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo desnu stranu iskazne formule, što znači da je ta formula tautologija.

## 1.4. Zadaci za vježbu

**1.** Koji su od datih iskaza tačni? Broj 1 zadovoljava:

a) jednačinu $2x + 1 = x + 2$,

b) jednačinu $x^2 + x^3 = 2$,

c) jednačinu $x - 3 = 4$,

d) nejednačinu $4x < 2$.

**2.** Odrediti istinitosnu vrijednost iskaza:

a) Zbir dvije stranice trougla je veći od treće.
b) Uglovi pravougaonika su jednaki.
c) Simetrale stranica trougla sijeku se u jednoj tački.
d) Jednakokraki trougao ima tri ose simetrije.

**3.** Obrazovati negaciju date rečenice i odrediti njenu istinitosnu vrijednost:

a) Broj 2 je prirodan broj.
b) 3 je rješenje jednačine $x^3 = x + 2$.
c) Simetrala duži ne prolazi kroz njeno središte.
d) Trougao ima dva prava ugla.

**4.** Napisati tablice istinitosti za sljedeće iskazne formule:

a) $(A \wedge (\neg B)) \Rightarrow (\neg B)$
b) $((A \Rightarrow ((\neg B) \wedge C))) \Leftrightarrow (B \wedge C)$
c) $(A \Leftrightarrow (\neg B)) \Rightarrow (\neg C)$.

**5.** Pokazati da su date iskazne formule tautologije, a da se ne formiraju tablice istinitosti:

a) $((B \wedge C) \vee (A \wedge (\neg B \wedge C)) \vee (\neg A \wedge (\neg B \wedge C))) \Leftrightarrow C$,
b) $(A \vee (B \wedge A)) \vee ((\neg A \wedge B) \vee A) \Leftrightarrow (A \vee B)$,
c) $(A \vee (B \wedge \neg A)) \vee (C \vee ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B))) \Leftrightarrow (A \vee B \vee C)$,
d) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge B)) \Leftrightarrow (A \vee \neg A \vee \neg B)$.

**6.** Riješiti sistem jednačina

a: $xy = 0$
b: $yz = 0$
c: $xz = 0$.

***Rješenje.*** Iz sistema jednačina slijede tautologije

$$(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$$
$$(yz = 0) \Leftrightarrow (y = 0 \vee z = 0)$$
$$(xz = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee z = 0).$$

Označimo iskaze $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ sa $A,\ B$ i $C$ respektivno. Dati sistem će glasiti:

a: $A \vee B$
b: $B \vee C$
c: $C \vee A$,

pa je

$$(a \wedge b \wedge c) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A)).$$

Kako je

$$((A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A))$$

tautologija, (vidjeti primjer ispred zadataka za vježbu) to je

$$(a \wedge b \wedge c) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A))$$

odnosno

$$(a \wedge b \wedge c) \Leftrightarrow ((x = 0 \wedge y = 0) \vee (y = 0 \wedge z = 0) \vee (z = 0 \wedge x = 0)).$$

**7.** Četiri studenta A, B, C i D učestvovala su u takmičenju i zauzela prva četiri mjesta. Kad su ih pitali za redoslijed, dobili su tri različita odgovora:

1. C-prvi, B-drugi,
2. C-drugi, D-treći,
3. B-drugi, D-četvrti.

Usvakom odgovoru bar jedan je tačan. Odrediti pobjednika.

***Rješenje.*** Uvedimo oznake $A_i, B_i, C_i$ i $D_i$ $(i = 1,2,3,4)$ koje ozna-čavaju da su igrači A, B, C i D zauzeli $i$-to mjesto. Odgovori 1, 2 i 3 treba da daju tačan odgovor, tj. treba da je

$$((C_1 \vee B_2) \wedge (C_2 \vee D_3) \wedge (B_2 \vee D_4)) \Leftrightarrow 1,$$

što nakon sređivanja daje:

$$(C_1 \wedge C_2 \wedge B_2) \vee (B_2 \wedge C_2 \wedge B_2) \vee (C_1 \wedge D_3 \wedge B_2) \vee (B_2 \wedge D_3 \wedge B_2) \vee$$
$$\vee (C_1 \wedge C_2 \wedge D_4) \vee (C_1 \wedge D_3 \wedge D_4) \vee (B_2 \wedge D_3 \wedge D_4) \Leftrightarrow 1.$$

Iskazna formula $C_1 \wedge C_2 \wedge B_2$ je netačna za sve moguće kombinacije iskaznih slova, jer je nemoguće da je $C$ prvi i da je drugi, a da je $B$ drugi. Na isti način se zaključuje da su iskazne formule

$C_1 \wedge C_2 \wedge D_4$, $C_1 \wedge D_3 \wedge D_4$, $B_2 \wedge C_2 \wedge D_4$

$$B_2 \wedge D_3 \wedge D_4, \quad B_2 \wedge C_2 \vee B_2,$$

netačne. Znači ostaje

$$((C_1 \wedge D_3 \wedge B_2) \vee (B_2 \wedge D_3 \wedge B_2)) \Leftrightarrow 1$$

odnosno

$$((C_1 \wedge D_3 \wedge B_2) \Leftrightarrow 1) \vee ((B_2 \wedge D_3) \Leftrightarrow 1).$$

Znači mogući redosljedi su: C-prvi, B-drugi, D-treći, A-četvrti ili B-drugi, D-treći.

**8.** Četiri studenta se takmiče i nakon toga su odgovorili da su postigli sljedeći plasman:

A: nisam bio ni prvi ni posljednji
B: nisam bio posljednji
C: bio sam prvi
D: bio sam posljednji.

Tri data odgovora su tačna, a jedan je lažan. Odrediti poredak i ko nije govorio istinu.

# 2. Skupovi

## 2.1. Pojam skupa

Skup je osnovni pojam u matematici i ne definiše se. On se samo može opisati. Naime, pojam skupa se najlakše može shvatiti na primjerima. Tako, govorimo o skupu učenika jednog razreda ili odjeljenja neke škole, o skupu preduzeća koja se bave proizvodnjom određenog artikla, o skupu tačaka jedne ravni koje su jednako udaljene od jedne stalne tačke te ravni, o skupu prirodnih brojeva, itd.

U prethodnim primjerima posmatrano je više objekata zajedno, objekata koji imaju zajedničku osobinu, koji predstavljaju određenu cjelinu, koja se naziva skup ili množina.

Da bi se simbolično označilo da skup predstavlja određenu cjelinu skupovi se označavaju jednim simbolom, jednim slovom, i oni se obično označavaju velikim latinskim štampanim slovima. Tako, na primjer, skupovi se označavaju sa: $A, B, \dots, S, \dots$. Skup je, dakle, neka cjelina sastavljena od nekih za tu cjelinu osnovnih djelova, koji se nazivaju elementi skupa, i oni se obično označavaju malim latinskim slovima. Činjenicu da je $a$ element skupa $A$ simbolično se označava sa

$$a \in A$$

i čita "$a$ je element skupa $A$" ili "$a$ pripada skupu $A$". Činjenica da $b$ nije element skupa $A$ se simbolično označava sa

$$b \notin A .$$

Za skup se smatra da je poznat ili zadan ako se za bilo koji objekat može jednoznačno reći da li pripada ili ne pripada tom skupu. Zadati skup $A$ znači dati zakon, ograničenje, propis, specifikaciju osobina prema kojima se potpuno određuju svi elementi toga skupa[1].

U nekim slučajevima skup $A$ može biti zadan jednostavnim nabra-janjem svih elemenata koji pripadaju tome skupu. Tako, naprimjer, kažemo "Skup $A$ svih cifara dekadnkg brojnog sistema. Jasno je da su to cifre: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 elementi toga skupa i da nema drugih. Činjenicu da cifre: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 čine skup $A$ pišemo

$$A = \{\ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \},$$

tj. sve elemente pišemo u veliku zagradu.

Skup može biti zadan i nabrajanjem osobina koje moraju imati objekti da bi bili elementi skupa $A$. Tako, naprimjer, skup $A$ je skup svih prirodnih brojeva većih od 10 i manjih od 16. Očigledno je da su to brojevi 11,12,13,14,15 i da nema drugih. Dakle,

$$A = \{\ 11, 12, 13, 14, 15 \}.$$

Ako se sa $\boldsymbol{N}$ označi skup prirodnih brojeva tada se skup $A$ skraćeno označava sa:

(2.1) $$A = \{\ x \colon x \in \boldsymbol{N} \wedge 10 < x < 16 \}.$$

Dvije tačke ":" iza kojih su dati uslovi koje moraju ispunjavati članovi skupa $A$ se čitaju: "takvih da", "za koje je", "sa osobinom". Prema tome, izraz (2.1) se može pročitati: "$A$ je skup elemenata $x$ takvih da $x$ pripada skupu prirodnih brojeva i $x$ ima vrijednost između 10 i 16".

Postoje slučajevi kada se ne mogu nabrojati svi elementi skupa iako se mogu opisati. Tako, na primjer, $A$ je skup svih parnih prirodnih brojeva. Jasno je da su

1 Kurepa 5. "Uvod u matematiku", Tehnička knjiga, Zagreb 1970.

2,4,6,8, itd. elementi skupa. Svi parni prirodni brojevi se ne mogu napisati, iako je potpuno jasno koji elementi čine skup $A$. Skup $A$ se
simbolično zapisuje u obliku

$$A = \{ 2,4,6,8,\ldots \},$$

gdje tri tačke označavaju sve ostale brojeve koji nisu navedeni.

## 2.2. Jednakost skupova. Univerzalni skup

Neka su $A$ i $B$ skupovi. Ako je svaki element skupa $A$ isto-vremeno i element skupa $B$, tj. ako je $a \in A$ onda je $a \in B$, onda se kaže da je $A$ podskup skupa $B$, što se simbolično zapisuje

$$A \subseteq B$$

i čita "$A$ je sadržan u $B$". Kaže se i da skup $B$ sadrži skup $A$, što se piše

$$B \supseteq A$$

i čita "$B$ sadrži $A$".

Umjesto "ako je $a \in A$, onda je $a \in B$", piše se simbolično

$$a \in A \Rightarrow a \in B,$$

što se čita "iz $a \in A$ slijedi $a \in B$", ili "$a \in A$ implicira $a \in B$", ili "ako je $a \in A$ onda je $a \in B$".

Naglasimo da $A \subseteq B$ znači da je svaki element skupa $A$ ujedno i element skupa $B$, što se kratko zapisuje sa

$$(\forall a \in A)(a \in A \Rightarrow a \in B), \tag{2.2}$$

gdje znak $\forall$ znači "svaki".

Ako je svaki element skupa $A$ ujedno i element skupa $B$ i svaki element skupa $B$ ujedno i element skupa $A$, onda su $A$ i $B$ identični (jednaki) skupovi, što se kratko zapisuje sa

$$A = B$$

i čita "skup $A$ je jednak skupu $B$".

Dakle, dva skupa $A$ i $B$ su jednaka ako i samo ako se sastoje od istih elemenata.

Ako je $A \subseteq B$ i skup $A$ nije jednak skupu $B$ tada postoji $b \in B$ takav $b \notin A$, što se kratko zapisuje "$\exists b \in B$ takvo da $b \notin A$". Za skup $A$ se kaže da je pravi dio skupa $B$, što se simbolično zapisuje

$$A \subset B.$$

***Primjer* 2.1.** Skup $A = \{a,b,c,1\}$ je pravi dio skupa $B = \{a,b,c,d,1,2\}$, tj. $A \subset B$, jer je $A \subseteq B$ i $d \in B$, a $d \notin A$. Takođe i $2 \in B$, a $2 \notin A$.

***Primjer* 2.2.** Skupovi $A=\{a,b,c,1\}$ i $B=\{a,a,b,c,1\}$ su jednaki jer se sastoje od istih elemenata, tj. od elemenata $a,b,c,1$.

Činjenica da skupovi $A$ i $B$ nisu jednaki zapisuje se simbolično sa

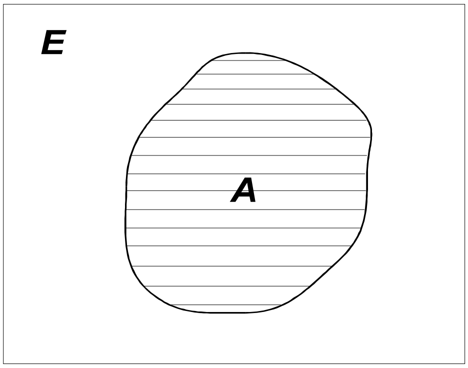
$$A \neq B$$

i čita se "skup $A$ nije jednak skupu $B$".

Svi skupovi se posmatraju kao dijelovi nekog skupa, kao podskupovi skupa $E$, i tada se shvata da ne postoje skupovi koji nisu podskupovi skupa $E$. Ovako shvaćen skup $E$ ima univerzalno značenje i naziva se *univerzalni skup*.

Jasno je da univerzalni skup $E$ ima relativno značenje i da varira od slučaja do slučaja. Tako, naprimjer, univerzalni skup može biti skup realnih brojeva, skup kompleksnih brojeva, skup studenata ekonomskog fakulteta, skup preduzeća jedne regije, skup tačaka, itd.

Iz praktičnih razloga dobro je univerzalni skup $E$ predstaviti pravougaonikom, a njegove podskupove kao dijelove površine tog pravo-ugaonika, Sl.2.1 (Veneov dijagram).




Sl. 2.1.

## .2.3. Operacije sa skupovima

### 2.3.1. Unija skupova

Neka su $A$ i $B$ podskupovi univerzalnog skupa $E$. Tada se pod unijom skupova $A$ i $B$ podrazumijeva skup svih elemenata $x \in E$ koji pripadaju bar jednom od skupova $A$ ili $B$.

Ako se sa $C$ označi unija skupova $A$ i $B$, tada se kratko zapisuje

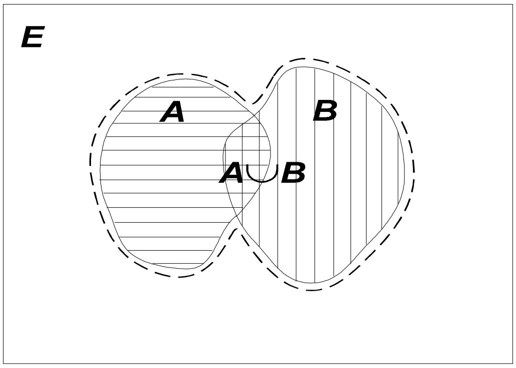
(2.3) $$C = A \cup B = \{x \in E : x \in A \vee x \in B\},$$

gdje je $\cup$ početno slovo riječi "unija".

***Primjer* 2.3.** Neka je $A = \{ a,b,c \}$, $B = \{ a,b,d,1 \}$, tada je

$$C = A \cup B = \{ a,b,c,d,1 \} .$$

Ako se, kako je već rečeno, univerzalni skup $E$ šematski prikaže pravougaonikom, a skupovi $A$ i $B$ zatvorenim linijama zajedno sa unu-trašnjim tačkama (Sl.2.2), tada će shematski prikaz unije skupova $A$ i $B$ biti površina ograničena tačkastom linijom.




Sl. 2.2.

Neka su $A_1, A_2, \dots, A_n$ podskupovi univerzalnog skupa $E$. Tada uniju skupova $A_1, A_2, \dots, A_n$ predstavlja skup elemenata koji pripadaju bar jednom od skupova $A_k$ $(k = 1,2,\dots,n)$ i označava se sa*)

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

ili kratko sa

*) Ovo slijedi na osnovu asocijativnosti unije skupova, što æe kasnije biti dokazano.

$$\bigcup_{k=1} A_k .$$

Dakle, ako se sa $C$ označi ova unija, vrijedi jednakost

(2.4) $$C = \{ x \in E : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n \} .$$

***Primjer* 2.4.** Neka je $A_1 = \{ a,b,c \}$, $A_2 = \{ 1,a \}$, $A_3 = \{ a,c,d,2 \}$, tada je

$$\bigcup_{k=1}^{3} A_k = \{ a,b,c,d,1,2 \} .$$

## 2.3.2. Presjek skupova

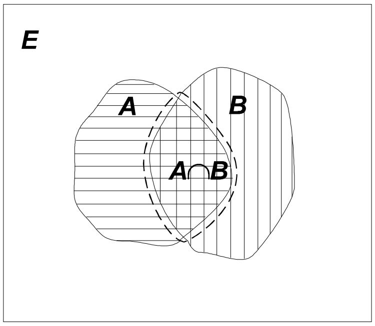
Neka su $A$ i $B$ podskupovi univerzalnog skupa $E$, tada se skup $C$, koga čine svi elementi koji pripadaju istovremeno i skupu $A$ i skupu $B$, tj. skup

(2.5) $$C = \{ x \in E : x \in A \wedge x \in B \} ,$$

naziva *presjek skupova* $A$ i $B$.

Presjek skupova $A$ i $B$ se simbolično označava sa $A \cap B$.

Presjek skupova $A$ i $B$ univerzalnog skupa $E$ shematski je prika-zan dijelom ravni omeđenom tačkastim linijama (Sl.2.3).




Sl. 2.3.

***Primjer* 2.5.** Neka je

$$A = \{ 1,2,3,4,5,6 \} ,$$
$$B = \{ 2,4,6,10,15 \}$$

tada je:

$$A \cap B = \{ 2,4,6 \} .$$

Može se desiti da presjek skupova $A$ i $B$ univerzalnog skupa $E$ nema ni jednog elementa, odnosno da podskupovi $A$ i $B$ nemaju zajedničkih elemenata. Za takve skupove se kaže da su *dijunktni.* Skup bez ijednog elementa naziva se *prazan skup* i obično se označava sa $\varnothing$.

Neka su $A_k \quad (k = 1,2, \dots ,n)$ podskupovi univerzalnog skupa $E$, tada se za skup koji je sastavljen od svih elemenata koji pripadaju istovreme-no svim skupovima $A_k \quad (k = 1,2, \dots ,n)$ kaže da je presjek skupova $A_1, A_2, \dots , A_n$ i označava se sa

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k .$$

Dakle,

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{ x \in E : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n \} .$$

## 2.3.3. Razlika skupova

Neka su $A$ i $B$ podskupovi univerzalnog skupa $E$. Pod razlikom skupova $A$ i $B$ podrazumijeva se skup svih elemenata skupa $A$ koji nisu istovremeno elementi skupa $B$. Razlika skupova $A$ i $B$ se simbolično zapisuje sa $A \setminus B$ što se čita: " $A$ isključeno $B$ " ili " $A$ bez $B$ ".

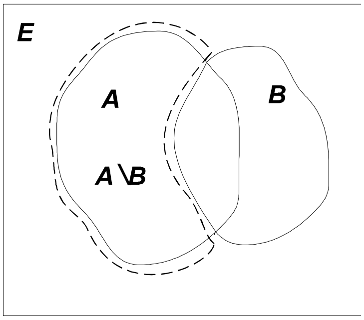
Definicija razlike skupova $A$ i $B$ se kratko zapisuje sa:

(2.6) $$A \setminus B = \{ x \in E : x \in A \wedge x \notin B \} .$$

***Primjer* 2.6.** Neka je $A = \{ a,b,c,d,e,f \}$, $B = \{ a,d,g,h \}$. Tada je

$$A \setminus B = \{ b,c,e,f \},$$

jer je $b,c,e,f \in A$ a $b,c,e,f \notin B$.



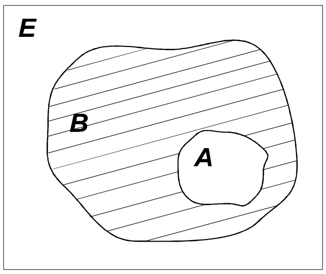

Sl. 2.4.

Razlika $A \setminus B$ šematski je predstavljena dijelom ravni ograničene isprekidanom linijom (Sl.2.4).

### 2.3.4. Komplement skupa

Neka su $A$ i $B$ podskupovi univerzalnog skupa $E$ i neka je $A \subseteq B$. Tada je skup svih elemenata skupa $B$ koji nisu elementi skupa $A$ naziva komplement skupa $A$ u odnosu na skup $B$. To se simbolično zapi-suje sa: $A'$ ili $C_B(A)$. Ova definicija se kratko zapisuje sa

(2.7) $$C_B(A) = \{ x \in E : x \in B \wedge x \notin A \} .$$



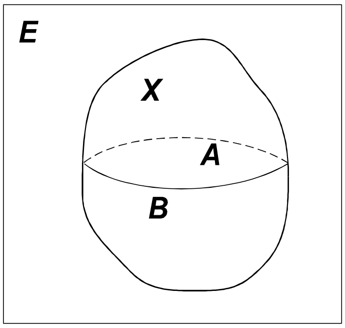

Sl. 2.5.

Komplement skupa $A$ shematski je predstavljen iscrtanim dijelom ravni (Sl.2.5).

***Primjer* 2.7.** Neka je $B = \{ a,b,c,d,e,f \}$ a $A = \{ a,d,f \}$.
Očigledno je $A \subseteq B$ i tada je $C_B(A) = \{ b,c,e \}$ jer je $b,c,e \in B$, a $b,c,e \notin A$.

## 2.4. Partitivni skup

Neka je $X$ podskup univerzalnog skupa $E$ (Sl.2.6). Očigledno je da se skup $X$ može razložiti na dva skupa $A$ i $B$, koji ne moraju biti disjunktni, tj. skup $X$ se može dati kao unija skupova $A$ i $B$ ili simbolično $X = A \cup B$.



Sl. 2.6.

***Primjer* 2.8.** Skup $X = \{a,b,c,d,e\}$ može se razložiti na skupove $A = \{a,b,d\}$ i $B = \{b,c,d,e\}$. Skupovi $A$ i $B$ su se mogli formirati i od drugih elemenata. Naravno, mora se voditi računa da svaki od elementa skupa $X$ pripada bar jednom skupu, skupu $A$ ili skupu $B$.

Od elemenata skupa $X$ mogu se formirati: jednočlani skupovi:

$$\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{e\};$$

dvočlani skupovi:

$$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\};$$

tročlani skupovi

$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,d,e\},\{b,c,d\},\ \{b,c,e\},\ \{b,d,e\},\ \{c,d,e\};$$

četvoročlani skupovi:

$$\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,d,e\},\{a,c,d,e\},\{b,c,d,e\};$$

petočlani skup $\{a,b,c,d,e\}$.

Od svih jednočlanih, dvočlanih, tročlanih, četvoročlanih, petočlanog i praznog skupa može se formirati novi skup. Taj skup se naziva *partitivni* skup skupa $X$.

**Definicija. 2.1.** *Skup čiji su elementi svi podskupovi skupa $X$ naziva se **partitivni skup** skupa $X$ i obično se obilježava sa $P(X)$ i čita "partitivni skup skupa $X$".*

## 2.4.1. Algebra skupova

Neka su $A$ i $B$ podskupovi univerzalnog skupa $E$. Obrazovanje unije, presjeka i razlike skupova $A$ i $B$ su osnovne operacije sa skupovima. Za ove operacije vrijede sljedeće osobine:

**1.** $A \cup \varnothing = A, \quad A \cap E = A,$
$A \cup E = E, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$ (Zakon identiteta)

$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

**2.** $A \cup A' = E, \quad A \cap A' = \varnothing$ (Zakon idempotencije)

**3.** $(A')' = A, \quad \varnothing' = E$, (Zakon komplementacije)

**4.** $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$, (Zakon komutacije)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

**5.** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, (Zakon asocijacije )

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

**6.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(Zakon distribucije unije u odnosu na presjek odnosno presjeka u odnosu na uniju)

**7.** $A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$, (Zakon apsorpcije)

**8.** $(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$, (De Morganovi zakoni).

Ove osobine nije teško dokazati. Tako, naprimjer, dokaz za osobinu asocijativnost bi izgledao ovako:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow \{x \in E : x \in (A \cup B) \vee x \in C\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in E : (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in E : x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in E : x \in A \vee (x \in (B \cup C))\} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C), \end{aligned}$$

(gdje smo koristili odgovarajuće osobine za operaciju " $\vee$ ", u 1.3.1.).
Ili, dokaz da je

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

bi izgledao ovako:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup (B \cap C)) &\Leftrightarrow \{x \in E : x \in A \vee x \in (B \cap C)\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in E : x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in E : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in (A \cup B) \wedge (A \cup C)\}. \end{aligned}$$

Dokažimo i osobinu $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Leftrightarrow \{x \in E : x \notin (A \cup B)\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in E : x \notin A \wedge x \notin B\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in E : x \in A' \wedge x \in B'\} \\ &\Leftrightarrow x \in A' \cap B'. \end{aligned}$$

Na isti način dokazuju se i ostale osobine, i ti dokazi mogu poslužiti kao primjeri za vježbanje.

Prethodne osobine mogu poslužiti za dokazivanje složenijih jednakosti. Tako, naprimjer, dokazati da je

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

*Dokaz:*

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C) &\overset{6.}{=}(A\cup(A\cap C))\cap(B\cup(A\cap C))\cup(B\cap C)\\ &\overset{7.}{=}(A\cap(B\cup(A\cap C)))\cup(B\cap C)\\ &\overset{6.}{=}(A\cap(B\cup A)\cap(B\cup C))\cup(B\cap C)\\ &\overset{4.}{=}(A\cap(A\cup B)\cap(B\cup C))\cup(B\cap C)\\ &\overset{7.}{=}(A\cap(B\cup C))\cup(B\cap C)\\ &\overset{6.}{=}(A\cup(B\cap C))\cap((B\cup C)\cup(B\cup C))\\ &\overset{2.}{=}(A\cup(B\cap C))\cap(B\cup C)\\ &\overset{6.}{=}(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C).\end{aligned}$$

## 2.5. Pojam uređenog skupa

Pored elemenata skupa $A$ često se posmatraju podskupovi od dva elementa, npr. podskupovi $\{a,b\}$, ili $\{b,a\}$ skupa $\{a,b,\ldots\}$. Po definiciji jednakosti skupova slijedi da je

$$\{a,b\}=\{b,a\},$$

jer su sastavljeni od istih elemenata. To znači da redoslijed elemenata u skupu nije bitan. Ponekad je bitno precizirati redoslijed elemenata $a$ i $b$, i takav skup se naziva *uređeni par* ili *uređena dvojka*. Ako je jedan od elemenata, recimo $a$ prvi, tada se skup $\{a,b\}$ označava sa $(a,b)$. Element "$a$" se naziva prva koordinata, ili prva komponenta, a "$b$" druga koordinata ili druga komponenta.

Dakle, za skup od dva elementa $a$ i $b$ se kaže da čini uređeni par ili uređenu dvojku ako je određeno koji je od njih prvi, a koji drugi.

Dva uređena para $(a,b)$ i $(c,d)$ su jednaka, što se piše

$$(a,b)=(c,d),$$

ako vrijedi

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow(a=c)\wedge(b=d).$$

Slično se definiše i uređena trojka. Skup od tri elementa $a$, $b$ i $c$ se naziva uređena trojka, ako se zna koji je od njih prvi, koji je drugi i koji je treći. Ako je "$a$" prvi, "$b$" drugi i "$c$" treći, onda se uređeni skup piše ovako

$$(a,b,c).$$

Elementi $a,b$ i $c$ se respektivno nazivaju prva, druga i treća komponenta ili koordinata.

Ako su $(a,b,c)$ i $(a_1,b_1,c_1)$ dvije uređene trojke tada je

$$(a,b,c) = (a_1,b_1,c_1) \Leftrightarrow (a = a_1) \wedge (b = b_1) \wedge (c = c_1).$$

Skup od $n$ elemenata $a_1, a_2, \dots, a_n$ naziva se uređena $n$-torka ako se zna koji je od njh prvi, koji drugi, i tako dalje, koji je $n$-ti, i označava se sa

$$(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

## 2.6. Direktni proizvod skupova

Direktni proizvod (Descartesov*) ili Kartezijev proizvod) nepraznih skupova $A$ i $B$ je skup svih uređenih parova $(x, y)$ čija je prva kordinata $x$ element skupa $A$, a druga komponenta $y$ element skupa $B$, i označava se sa $A \times B$. Znak $A \times B$ se čita "$A$ puta $B$".

Direktan proizvod skupova $A$ i $B$ se kratko zapisuje

$$A \times B = \{ (x, y) : x \in A \wedge y \in B \}. \tag{2.8}$$

***Primjer* 2.9.** Neka je $A = \{ a, b \}, \quad B = \{ 1, 2, 3 \}$.
Tada je

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$

Formiranje uređenih parova se shematski može prikazati na sljedeći način:

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & 1 & \longrightarrow & (a,1) \\ a & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & (a,2) \\ & \searrow & 3 & \longrightarrow & (a,3) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & \nearrow & 1 & \longrightarrow & (b,1) \\ b & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & (b,2) \\ & \searrow & 3 & \longrightarrow & (b,3) \end{array}$$

Iz definicije direktnog proizvoda lahko se može zaključiti da on nije komutativan, tj. da u opštem slučaju ne vrijedi jednakost

$$A \times B = B \times A.$$

***Primjer* 2.10.** Za skupove $A = \{ a, b \}$ i $B = \{ 1, 2, 3 \}$ je

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$

---

*) R. Descartes (1596-1650), francuski matematièar.

$$B \times A = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}.$$

Očigledno je, po definiciji jednakosti uređenog para i jednakosti skupova,

$$A \times B \neq B \times A$$

U dosadašnjem objašnjenju direktnog proizvoda skupova pretpo-stavljeno je da su skupovi $A$ i $B$ neprazni. Ovaj proizvod se definiše i za prazne skupove na sljedeći način:

(2.9.) $$A \times \varnothing = \varnothing, \quad \varnothing \times B = \varnothing, \quad \varnothing \times \varnothing = \varnothing.$$

Ako je $A = B$ tada se direktni proizvod

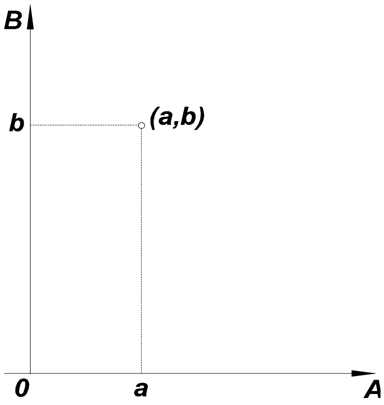
$$A \times B = A \times A = A^2$$

naziva kvadrat skupa $A$.

***Primjer* 2.11.** Neka je $A = \{1,2,3\}$, tada je

$$A^2 = A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

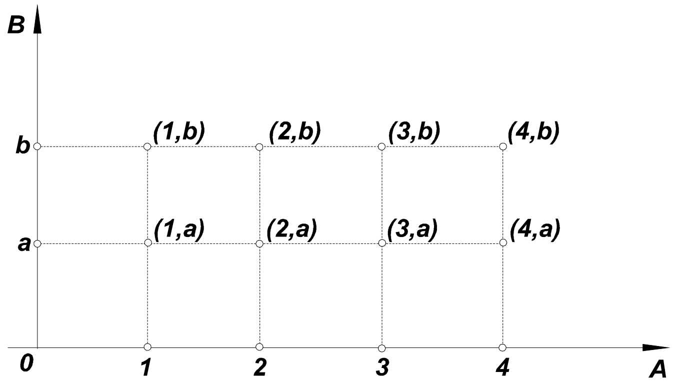
Direktni proizvod skupova $A$ i $B$, tj. $A \times B$, može se grafički pri-kazati na sljedeći način:




Sl. 2.7.

Neka su elementi skupa $A$ predstav-ljeni tačkama na horizontalnoj osi, a elementi skupa $B$ tačkama na verti-kalnoj osi pravouglog koordinatnog sistema $AOB$. Tada će tačka $(a,b) \in A \times B$ biti tačka u koordi-natnom sistemu $AOB$ koja se nalazi na presjeku vertikalne i horizontalne linije povučene kroz tačke $a$ i $b$ (Sl. 2.7). Na isti način se predstavljaju svi ostali elementi skupa $A \times B$.

***Primjer* 2.11.** Neka je $A = \{1,2,3,4\}, B = \{a,b\}$. Tada je grafički prikaz Dekartovog proizvoda $A \times B$ dat na Sl.2.8.




Sl. 2.8.

Analogno direktnom proizvodu dva skupa se definiše i direktni pro-izvod proizvoljnog broja skupova.

Neka su $X_k\ (k = 1,2,\dots,n)$ neprazni podskupovi. Tada se skup
$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in X_k,\ k = 1,2,\dots,n\}$
zove direktni proizvod skupova $X_k\ (k = 1,2,\dots,n)$.

Specijalno, za $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$ dobijamo
$X \times X \times \dots \times X = X^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in X,\ k = 1,2,\dots,n\}$.

***Primjer* 2.12.** Neka su $X_1 = \{1,2,3\},\quad X_2 = \{a,b\},\quad X_3 = \{x,y\}$,

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = \begin{Bmatrix} (1,a,x),(1,a,y),(1,b,x),(1,b,y),(2,a,x),(2,a,y), \\ (2,b,x),(2,b,y),(3,a,x),(3,a,y),(3,b,x),(3,b,y) \end{Bmatrix}.$$

***Primjer* 2.13.** Neka je $X = \{a,b\}$ tada je
$X^3 = \{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b),(b,a,a),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}$.

## 2.7. Zadaci za vježbu

**1.** Dati su skupovi $A = \{1,2,3,4,5\},\quad B = \{-1,2,3,4\},\quad C = \{0,1,2,3\}$.
Naći skupove: a) $A \cup B$, b) $A \cup C$, c) $A \setminus B$, d) $A \setminus C$, e) $A \cap B$.

**2.** Dati su skupovi $A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,c,d,e\}$, $C = \{a,d,e\}$.
Naći $(A \cup B) \cap C$ i $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.
Provjeriti da li je $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

**3.** Dati su skupovi $A, B$ i $C$ kao i u predhodnom primjeru. Pokazati da je

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

**4.** Dati su skupovi $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ i $B = \{3,4,5\}$. Da li se može tražiti $C_A(B)$ i ako je moguće naći ga.

**5.** Da li je moguća jednadžba po $X$: $X \cap \{1,2,3,4\} = \{2,3,4,5\}$ ?

**6.** Neka je $X$ podskup skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$. Riješiti po $X$ jednadžbe:
a) $\{1,2,3\} \cap X = \{1,2,3,4\}$, b) $\{1,2,3,5\} \cap X = \{2,3\}$, c) $\{2,4,6\} \cap X = \{2,6\}$.

**7.** Odrediti $A \cup B$ ako je:
a) $A = \{x : x \in \boldsymbol{R} \wedge x^2 = 4\}$, $B = \{x : x \in \boldsymbol{R} \wedge x^2 = 9\}$,
b) $A = \{x : x = 1 \vee x = 2\}$, $B = \{x : x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4\}$.

**8.** Dati su skupovi $A = \{2,3,5\}$, $B = \{2,4,6\}$, $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Odrediti skup $X$, podskup skupa $E$, koji zadovoljava uslove:

$$A \cap X = \{3,5\}, \quad B \cup X = E.$$

**9.** Odrediti komplemente skupova:
a) $\{1,3\}$, b) $\{1,2,4\}$, c) $\{1,2,3,4\}$ u odnosu na skup $\{1,2,3,4\}$.

**10.** Odrediti partitivan skup skupa: a) $\{1,2\}$, b) $\{1\}$, c) $\{1,2,3\}$.

**11.** Odrediti direktni proizvod skupova: $A = \{1,2,3,4\}$ i $B = \{x, y, z\}$.

**12.** Neka je $A = \{a,b\}$. Odrediti: $A \times A$, $A \times (A \times A)$, $(A \times A) \times A$.

**13.** Neka je $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{x,y\}$. Odrediti:
a) $A \times B \times C$, b) $A \times C \times B$, c) $C \times B \times A$, d) $C^2 \times A$, e) $C^4$.

**14.** Dokazati tačnost sljedećih iskaza: a) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$,
b) $P(A \cup B) \supset P(A) \cup P(B)$, c) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = C_A(A \cap B)$.

# 3. Relacije. Funkcija

## 3.1. Relacije

**Definicija. 3.1.** *Bilo koji neprazan podskup* $\rho$ *Dekartovog proizvoda* $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ $\left( X_k \neq \varnothing, \ k = 1,2,\dots,n \right)$ *nazivamo* ***n-arna relacija*** *u tom proizvodu. Za elemente* $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$ *kažemo da su u relaciji* $\rho$, *ako i samo ako* $\left( x_1, x_2, \dots, x_n \right) \in \rho$.

### 3.1.1. Binarna relacija

Ako je u definiciji 3.1. $n = 2$ tada dobijamo relaciju $\rho \subseteq X_1 \times X_2$ koja se zove *binarna relacija* u $X_1 \times X_2$. Specijalno, neprazan podskup $\rho$ skupa $X^2$ zove se binarna relacija u $X$. Ako je $(x, y) \in \rho$, tada se kaže da je $x$ u relaciji $\rho$ sa $y$ i piše se $\rho(x, y)$ ili $x \rho y$.

Skup uređenih parova $\{(x, y)\} \subset X \times Y$ koji su u relaciji $\rho$ piše se

(3.1) $$\rho = \left\{ (x, y) \in X \times Y : x \rho y \right\}.$$

***Primjer* 3.1.** Neka je $X = \{1,4,5\}, \quad Y = \{2,6\}$, tada je

$$X \times Y = \left\{ (1,2), (1,6), (4,2), (4,6), (5,2), (5,6) \right\}.$$

Neka je, naprimjer, relacija

$$\rho = \left\{ (1,2), (4,2), (4,6) \right\}.$$

Relacija će predstavljati i bilo koji drugi podskup $X \times Y$ kao naprimjer

$$\rho = \left\{ (4,2), (5,6) \right\}$$

ili neki drugi podskup.

***Primjer* 3.2.** Dat je skup $X = \{1,2,3,4\}$. Napisati relaciju $\rho$ definisanu sa:

$$\rho = \left\{ (x, y) \in X^2 : x < y \right\}.$$

Tada je

$$\rho = \left\{ (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) \right\}.$$

**Definicija 3.2.** *Neka su* $X$ *i* $Y$ *neprazni skupovi i neka je* $\rho$ *binarna relacija u* $X \times Y$. *Tada se*

(3.2) $$D(\rho) = \left\{ x \in X : (x, y) \in \rho, \quad y \in Y \right\}$$

*naziva* ***oblast definisanosti*** *ili* ***domena relacije*** $\rho$ *, a*

(3.3) $$V(\rho) = \{ y \in Y : (x,y) \in \rho ,\ x \in X \}$$

***područje vrijednosti*** *ili* ***kodomena relacije*** $\rho$ *.*

Neka je $\rho$ binarna relacija, tada se skup

$$\rho^{-1} = \{ (y,x) : (x,y) \in \rho \}$$

naziva *inverzna relacija* relacije $\rho$ .

**Definicija 3.3.** *Ako je* $\rho_1$ *binarna relacija u* $X \times Y$ *, a* $\rho_2$ *binarna relacija u* $Y \times Z$ $(X,Y,Z \neq \varnothing)$ *tada se skup*

(3.4) $$\rho_1 \cdot \rho_2 = \{ (x,z) : (x,y) \in \rho_1 \wedge (y,z) \in \rho_2 \text{ za neko } y \in Y \}$$

*zove proizvod relacije* $\rho_1$ i $\rho_2$ .

**Definicija 3.4.** *Ako za binarnu relaciju* $\rho \subseteq X^2$ *vrijedi*

(3.5)
$$\begin{aligned}
&1. (\forall x \in D(\rho)) \quad x\rho x \\
&2. (\forall x,y \in D(\rho)) \quad x\rho y \Rightarrow y\rho x \\
&3. (\forall x,y,z \in D(\rho)) \quad (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z \\
&4. (\forall x,y \in D(\rho)) \quad (x\rho y \wedge x \neq y) \Rightarrow \neg (y\rho x)
\end{aligned}$$

*za relaciju se kaže da je* ***refleksivna, simetrična, tranzitivna i asimetrična****, respektivno.*

## 3.1.2. Relacija ekvivalencije

**Definicija 3.5.** *Za binarnu relaciju* $\rho$ *u nepraznom skupu* $X$ *kažemo da je relacija ekvivalencije ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj. ako vrijedi:*

(3.6)
$$\begin{aligned}
&(\forall x \in D(\rho)) \quad x\rho x \\
&(\forall x,y \in D(\rho)) \quad x\rho y \Rightarrow y\rho x \\
&(\forall x,y,z \in D(\rho)) \quad (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z
\end{aligned},$$

*i označava se sa "~". Ako je* $\rho$ *relacija ekvivalencije i ako je* $x\rho y$ *, onda kažemo da su x i y ekvivalentni i označavamo sa* $x \sim y$ *.*

***Primjer* 3.3.** Relacija " = " u skupu realnih brojeva je relacija ekvivalencije. Relacija "biti sličan" i "biti podudaran" u skupu trouglova su relacije ekvi-valencije.

Neka je u skupu $X$ definisana relacija ekvivalencije $\sim$ i neka je $z$ proizvoljan element iz $X$. Neka je $C_z$ skup svih elemenata iz $X$ ekvivalent-nih sa $z$.

Za skup $C_z$ se kaže da čini klasu ekvivalencije koja odgovara ele-mentu $z$. Neka su $C_z$ i $C_y$ dvije klase koje odgovaraju elementima $z$ i $y$, tada su skupovi $C_z$ i $C_y$ jednaki ili su disjunktni. Znači skup $X$ je podi-jeljen na disjunktne klase koje se zovu *klase ekvivalencije*.

Klasu ekvivalencije skupa $X$ koje odgovaraju elementu $x$ kratko zapisujemo

(3.7) $$C_x = [X] = \{y : y \in X \wedge x \sim y\}.$$

Skup svih klasa ekvivalencije skupa $X$ se označava sa $X/\sim$ i naziva količnikom skupa $X$ u odnosu na relaciju $\sim$ (odnosno kvocijentnim skupom).

### 3.1.3. Relacija poretka

**Definicija 3.6.** *Za relaciju*

$$\rho = \{(x, y) \in X \times X : x \rho y\}$$

*kažemo da je relacija poretka (uređenja) ako je ona refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, tj. ako vrijedi*

(3.8) $$\begin{aligned} &(\forall x \in D(\rho)) \quad x \rho x \\ &(\forall x, y \in D(\rho)) \quad (x \rho y \wedge x \neq y) \Rightarrow \neg (y \rho x) \\ &(\forall x, y \in D(\rho)) \quad (x \rho y \wedge y \rho z) \Rightarrow x \rho z \end{aligned}.$$

Relacija uređenja $\rho$ u skupu $X$ označavamo sa " $\leq$ " i umjesto $x \rho y$ piše-mo $x \leq y$. Ako je $x \leq y \wedge x \neq y$ tada pišemo $x < y$.

Ako za dva elementa $x, y \in X$ vrijedi $x \leq y$ ili $x < y$ za elemente $x, y$ se kaže da su uporedivi. Ako su svaka dva elementa skupa $X$ uporediva, za skup $X$ se kaže da je potpuno ili totalno uređen.

Za skup $X$ se kaže da je dobro uređen ako svaki njegov neprazan podskup ima svoj početni element.

Neka je $A$ uređen skup i $X \subset A, \quad X \neq \varnothing$. Ako za neko $a \in A$ vrijedi $(\forall x \in X) \quad a \leq x$ tada se za $a$ kaže da je donje ograničenje ili minoranta skupa $X$. Ako za neko $b \in A$ vrijedi $(\forall x \in X) \quad b \quad x$ tada se za $b$ kaže da je gornje ograničenje ili majoranta skupa $X$.

Ako minoranta $a$ (majoranta $b$) skupa $X$ pripada skupu $X$ onda kažemo da je $a$ minimum ( $b$ maksimum) skupa $X$. To pišemo

$$a = \min X \text{ ili } a = \min_{x \in X} x,$$

odnosno

$$b = \max X \text{ ili } b = \max_{x \in X} x.$$

Ako skup svih minoranata skupa $X$ ima maksimum $a$, tada se za $a$ kaže da je infimum skupa $X$ i piše se

$$a = \inf X \text{ ili } a = \inf_{x \in X} x .$$

Ako skup svih majoranata skupa $X$ ima minimum $b$, tada se za $b$ kaže da je supremum skupa $X$ i piše se

$$b = \sup X \text{ ili } b = \sup_{x \in X} x .$$

Za skup $X$ se kaže da je ograničen ako ima minorantu i majorantu.

## 3.2. Funkcije

**Definicija 3.7.** *Neka su $E$ i $F$ neprazni skupovi. Tada binarnu relaciju $f \subseteq E \times F$ koja zadovoljava uslove*

(3.9) $$(\forall x \in E)(\forall y, z \in F)(x f y \wedge x f z \Rightarrow y = z) \ (\forall x \in E)(\exists y \in F)\ x f y$$

*nazivamo funkcijom ili preslikavanjem iz $E$ u $F$, i označavamo sa*

$$f : E \to F, \text{ ili } f : x \to y, \text{ ili } y = f(x) .$$

Skupove $D(f)$ i $V(f)$ nazivamo oblast definisanosti ili domenom odnosno područje vrijednosti ili kodomenom funkcije, respektivno.

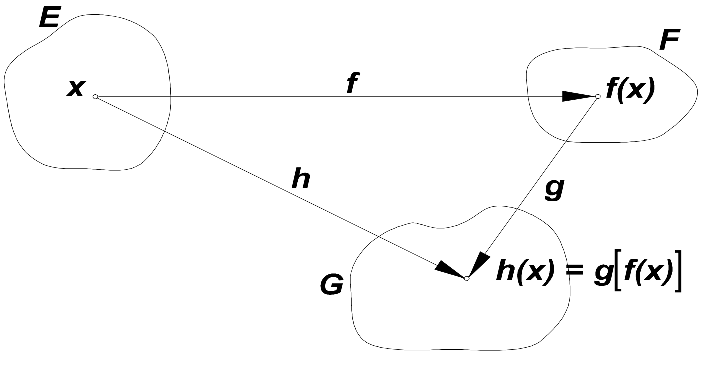
Funkciju $f : E \to F$ nazivamo *surjekcija* ili *na* ako je $V(f) = F$.

Funkciju $f : E \to F$ nazivamo *injekcija* ili *jedan-jedan* ako vrijedi

$$(\forall x, y \in E) \quad (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)) .$$

Funkciju $f : E \to F$ koja je surjekcija i injekcija nazivamo *bijekcija*.

Neka su $E, F$ i $G$ tri neprazna skupa i neka su $f$ i $g$ funkcije takve da $f : E \to F, \quad g : F \to G$, (Sl. 3.1)




Sl. 3.1.

Funkcijom *f* se svakom elementu $x \in E$ prvo pridružuje element $f(x) \in F$, a zatim funkcijom $g$ se svakom elementu $y = f(x) \in F$ pridru-žuje element $g[f(x)] \in G$. Na taj način se svakom elementu $x \in E$ pridru-žuje potpuno određen element $g[f(x)] \in G$, dakle zadana je funkcija sa $E$ u $G$. Tu funkciju nazivamo *kompozicijom* funkcija (posrednom funkcijom) $f$ i $g$ i označavamo je sa $h = g \circ f$. Dakle,

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] \in G, \quad x \in E.$$

***Primjer* 3.4.** Neka je $E = F = G = \boldsymbol{R}$ (***R*** je skup realnih brojeva) i neka je

$$f(x) = x^2 + x, \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1},$$

tada je

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{\left[f(x)^2\right]+1} =$$

$$= \frac{1}{\left(x^2+x\right)^2+1} = \frac{1}{x^4+2x^3+x^2+1}.$$

Za funkcije $f$ i $g$ kažemo da su jednake ako imaju jednake domene i kodomene i ako je

$$(\forall x \in D(f) = D(g)) \quad (f(x) = g(x))$$

što pišemo $f = g$.

***Primjer* 3.5.** Neka su $f$ i $g$ funkcije ***R*** u ***R*** definisane sa

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad g(x) = \sin x \cos x$$

tada je $f(x) = g(x)$.

Neka je $f: E \to F$ injekcija i neka je

$$V(f) = \{f(x) : x \in E\},$$

tj. kodomena funkcije $f: E \to F$. Tada svakom elementu $y \in V(f)$ odgo-vara jedan i samo jedan element $x \in E$ takav da je $f(x) = y$.

Funkciju $f^{-1}: V(f) \to D(f)$ zovemo *inverzna funkcija* funkcije $f: E \to F$. Sada je

$$D\left(f^{-1}\right) = V(f); \quad V(f^{-1}) = D(f),$$

tj. slika $V(f)$ funkcije *f* je domena funkcije $f^{-1}$, a slika $f^{-1}$ je domena funkcije *f*.

Dalje je

$$f^{-1}[f(x)] = x \quad \forall \in D(f)$$

i

$$f\left[f^{-1}(y)\right] = y \quad \forall y \in V(y)$$

a to su *identična preslikavanja*.

## 3.3. Zadaci za vježbu

**1.** U skupu $\{1,2,3,4,5\}$ definisana je relacija $\rho$ na sljedeći način: ako i samo ako je $x + y = 8$.

1) Koja je od formula: $1\rho 1, 2\rho 5, 5\rho 3, 4\rho 4, 4\rho 5$ tačna?

2) Riješiti po $x$ formule: $1\rho x, \neg 2\rho x, 3\rho x \vee x\rho 4$.

**2.** Definicijom: $x\rho y$ ako i samo ako je $x^2 = y^2$ je određena relacija skupa $\{0,1,-1,2,-2\}$. Dokazati da je relacija $\rho$ refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija. Odrediti klase ekvivalencije.

**3.** U skupu $E = \{6,8,10,\ldots,28\}$ data je relacija $\rho$ : "završava se istom cif-rom". Ispitati da li je $\rho$ relacija ekvivalencije na *E*.

**4.** Da li je relacija "biti djeljiv" relacija ekvivalencije u skupu prirodnih brojeva?

**5.** Dati su skupovi $X = \{1,2,3,4,5\}$ i $Y = \{3,6,9,12,15,18\}$. Relacija $f : X \to Y$ definisana je ovako: $f(x) = 3x$. Ispitati da li je $f$ funkcija i ako jeste odrediti kodomenu funkcije.

**6.** Zadana je funkcija $f(x) = 2x + 5$. Naći:

$$f(1), f(2), f(f(1)), f(f(f(2))).$$

**7.** Funkcije $f$ i $g$ su definisane na skupu realnih brojeva formulama:

$f(x) = \dfrac{2x-3}{4}$ i $g(x) = \dfrac{3x-5}{2}$. Naći: $g \circ f, (g \circ f)(1), (g \circ f)(3)$.

**8.** Funkcija $f : X \to X$ gdje je $X$ skup realnih brojeva, zadana je formu-lom $f(x) = 2x - 4$. Naći inverznu funkciju funkcije *f*.

**9.** Neka je $f(x) = 3x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = \dfrac{x+3}{2}$. Odrediti:

$g \circ f, f \circ g, g^{-1}$, $\quad g^{-1} \circ f$.

# 4. Binarna operacija

Postupak kojim se elementima skupa $E \times E$ jednoznačno pridružuje element skupa $E$ naziva se binarna operacija.

Znak koji pokazuje da nad elementima $a,b \in E$ treba izvršiti binar-nu operaciju naziva se operator i obično se označava sa $\circ$ ili $*$. Tako, na primjer, ako se uređenom paru $(a,b) \in E \times E$ pridružuje $c \in E$ to se sim-bolično zapisuje sa

$$a \circ b = c$$

i čita "$a$ operacija $b$ jednako $c$".

Za binarnu operaciju se često razmatraju sljedeće osobine.

**1.** *Zatvorenost*. Binarna operacija je zatvorena ako je za bilo koja dva elementa $a,b \in E$ i rezultat binarne operacije $c \in E$, ili kratko, binarna operacija je zatvorena ako vrijedi

(4.1) $$(\forall a,b \in E) \quad a \circ b \in E.$$

**2.** *Asocijativnost*. Binarna operacija je asocijativna ako vrijedi

(4.2) $$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \text{ za } \forall a,b,c \in E.$$

**3.** *Komutativnost*. Binarna operacija je komutativna ako je

(4.3) $$a \circ b = b \circ a \text{ za } \forall a,b \in E.$$

**4.** *Jedinični element*. Ako postoji $e \in E$ tako da je

(4.4) $$(\forall a \in E) \quad (a \circ e = e \circ a = a)$$

tada se $e$ naziva jedinični ili neutralni element.

**5.** *Inverzni element*. Ako binarna operacija ima jedinični element $e$ i ako za svako $a \in E$ postoji $a^{-1}$ takav da je

(4.5) $$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

tada se $a^{-1}$ naziva inverzni element elementa $a$ za tu binarnu operaciju.

## 4.1. Grupa, prsten, polje

**Definicija 4.1.** *Neka je zadan neprazan skup* $G = \{a, b, c, \ldots\}$ *i u njemu zadana zatvorena binarna operacijav* $\circ$. *Skup G je grupa u odnosu na za-danu binarnu operaciju ako su ispunjeni slijedeći uslovi*:

(4.6) $\quad (\forall a, b, c \in G) \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (***asocijativnost***),

(4.7) *za svako* $a \in G$ *postoji* ***jedinični element*** $e \in G$ *sa osobinom*

$$a \circ e = e \circ a = a,$$

(4.8) *za svako* $a \in G$ *postoji* ***inverzni element*** $a^{-1} \in G$ *sa osobinom*

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

*Ako je, pored ovih, ispunjen i uslov*

(4.9) $\quad (\forall a, b \in G) \quad (a \circ b = b \circ a)$

*za grupu G se kaže da je* ***komutativna*** *ili* ***Abelova grupa*****)*.

---

*) N. Abel (1802-1829), norveški matematièar $\boldsymbol{N}$ u odnosu na operaciju sabiranja ne čini grupu jer nema jediničnog (neutralnog) elementa $e$ tj. takvog elementa da je $n + e = n$ za svako $n \in \boldsymbol{N}$.

***Primjer*** **4.2.** Skup $\boldsymbol{N}$ ne čini grupu ni u odnosu na operaciju množenja, jer nema inverznog elementa za svako $n \in \boldsymbol{N}$.

***Primjer*** **4.3.** Skup cijelih brojeva $\boldsymbol{Z}$ čini Abelovu grupu u odnosu na ope-raciju sabiranja. Nula je jedinični element a suprotan broj je inverzni element. Skup $\boldsymbol{Z}$ nije grupa u odnosu na operaciju množenja jer nema inverznog ele-menta.

Binarna operacija u Abelovoj grupi obično se označava aditivno, tj. umjesto $a \circ b$ obično se piše $a + b$. Tada se umjesto neutralnog elementa $e$ piše 0 (nula element), a umjesto inverznog elementa $a^{-1}$ piše se $-a$ (suprotni element).

**Definicija 4.2.** *Abelova grupa R za koju je definisana još jedna unutra-šnja operacija, asocijativna i distributivna u odnosu na operaciju grupe naziva se, prsten.*

Ako drugu operaciju nazovemo množenje i označimo sa " $\cdot$ " ili pro-sto stavljajući dva elementa jedan pored drugog bez ikakvog znaka tada se osobine koje su date u definiciji (4.2) mogu izraziti sa:

(4.10) $\quad R$ je Abelova grupa

(4.11) $\quad (\forall a, b \in R) \quad (a \cdot b \in R)$

(4.12) $$(\forall a,b,c \in R) \quad ((a\,b)\;c = a(b\,c))$$

$$a(b+c) = a\,b + a\,c,$$

(4.13) $$(b+c)\;a = b\,a + c\,a.$$

**Definicija 4.3.** *Prsten* $P$ *sa najmanje dva elementa naziva se* ***polje*** *ako čini grupu u odnosu na drugu operaciju.*

To znači da bi skup $P$ bio polje potrebno je da pored uslova (4.10)--(4.13) budu ispunjeni i uslovi:
- za svako $a \in P$ postoji jedinični element u $P$ koga ćemo označavati sa 1 (jedan), tj.

(4.14) $$(\forall a \in P) \quad (1 \cdot a = a),$$

- za svako $a \in P \quad (a \neq 0)$ postoji jedan i samo jedan broj $a^{-1}$ takav da je

(4.15) $$a^{-1} a = a\,a^{-1} = 1.$$

Ako je ispunjen i uslov

(4.16) $$(\forall a,b \in P) \quad (a\,b = b\,a)$$

za polje se kaže da je *komutativno*.

***Primjer*** **4.4.** Skup cijelih brojeva je prsten u odnosu na sabiranje i množenje jer je:

1. $(\forall a,b \in \boldsymbol{Z}) \quad (a + b \in \boldsymbol{Z})$
2. $(\forall a,b,c \in \boldsymbol{Z}) \; ((a+b) + c = a + (b+c))$
3. $(\forall a \in \boldsymbol{Z}) \quad (a + 0 = 0 + a = a)$
4. $(\forall a \in \boldsymbol{Z}) \quad (a + (-a) = 0)$
5. $(\forall a,b \in \boldsymbol{Z}) \quad (a + b = b + a)$
6. $(\forall a,b \in \boldsymbol{Z}) \quad (a \cdot b \in \boldsymbol{Z})$
7. $(\forall a,b,c \in \boldsymbol{Z}) \quad ((a\,b)\,c = a(b\,c))$
8. $(\forall a,b,c \in \boldsymbol{Z}) \quad (a(b+c) = a\,b + a\,c,\ (a+b)\,c = a\,c + b\,c).$

***Primjer*** **4.5.** Neka je dat dvočlani skup $\{n, p\}$ i u njemu operacije $+$ i $\cdot$ definisane sljedećim tabelama:

| + | n | p |
|---|---|---|
| n | p | n |
| p | n | p |

| · | n | p |
|---|---|---|
| n | n | p |
| p | p | p |

Skup $\{n, p\}$ čini polje u odnosu na ovako definisanu prvu operaciju $+$ i drugu operaciju $\cdot$, što nije teško provjeriti.

Naime, skup $\{n, p\}$ čini Abelovu grupu u odnosu na operaciju +, jer je:

1. operacija zatvorena,
2. operacija asocijativna,
3. $n + p = p + n = n, \quad p$ je nulti ili neutralni element,
4. $n + n = p, \quad p + p = p,$ tj. $n$ i $p$ su inverzni elementi od $n$ odnosno $p$,
5. $n + p = p + n$, operacija je komutativna.

Na sličan način se provjeravaju ostali uslovi polja, i to može poslužiti kao primjer za vježbu.

## 4.2. Skup realnih brojeva

**Definicija 4.4.** *Neka su u skupu* $\boldsymbol{R} = \{x, y, z, \ldots\}$ *definisane operacije sabi-ranja* +, *množenja* $\cdot$ *i binarna relacija* $\le$. *Ako su za svako* $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ *ispunjeni uslovi*:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
2. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists 0 \in \boldsymbol{R}) \quad x + 0 = x$,
3. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists -x \in \boldsymbol{R}) \quad x + (-x) = 0$,
4. $x + y = y + x$,
5. $(x\,y)\,z = x(y\,z)$,
6. $x(y + z) = x\,y + x\,z$,
7. $(\exists 1 \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\})(\forall x \in \boldsymbol{R}) \quad x \cdot 1 = x$,
8. $(\forall x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in \boldsymbol{R}) \quad x \cdot x^{-1} = 1$,
9. $x\,y = y\,x$,
10. $(x \le y) \vee (y \le x)$,
11. $(x \le y \wedge y \le x) \Rightarrow x = y$,
12. $(x \le y \wedge y \le z) \Rightarrow x \le z$,
13. $(x \le y) \Leftrightarrow (x + z \le y + z)$,
14. $(x \le y \wedge z < 0) \Rightarrow x\,z \quad y\,z$,
15. *svaki odozgo ograničen neprazan skup u* $\boldsymbol{R}$ *ima supremum u* $\boldsymbol{R}$. *Tada za skup* $\boldsymbol{R}$ *kažemo da je skup realnih brojeva i označavaćemo ga sa* $\boldsymbol{R}$.

Uređenu četvorku $(\boldsymbol{R}, +, \cdot, \le)$ zovemo *polje realnih brojeva*. Često se umjesto $(\boldsymbol{R}, +, \cdot, \le)$ piše samo $\boldsymbol{R}$. Uslovi 1 do 15 zovu se *aksiomi sku-pa realnih brojeva*.

**Teorema 4.1.** *Za svako* $x, x', y, y' \in \boldsymbol{R}$ *vrijedi*:

1. $-(-x) = x$,

2. $0 \cdot x = 0, \quad (2x = x) \Rightarrow x = 0$,

3. $x(-y) = (-x)\,y = -(x\,y)$,

4. $(-x)(-y) = x\,y$,

5. $(x < y) \Leftrightarrow (-x > -y)$,

6. $(x < 0 \wedge y < 0) \Rightarrow x\,y > 0$,

7. $(x < y \wedge x' < y') \Rightarrow (x + x' < y + y')$,

8. $\dfrac{x'}{x} + \dfrac{y'}{y} = \dfrac{x'y + xy'}{x\,y}, \quad (x, y \neq 0)$,

9. $\dfrac{x'}{x} \cdot \dfrac{y'}{y} = \dfrac{x'y'}{xy}, \quad (x, y \neq 0)$,

10. $0 < 1$.

***Dokaz*:**

1. $x = x + 0 = x + ((-x) + (-(-x))) = (x + (-x)) - (-x) =$
$= 0 - (-x) = -(-x)$,

2. $2x = x \Rightarrow 2x + (-x) = x + (-x) \Leftrightarrow x = 0$,
$0 \cdot x = (0 + 0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x = 2(0 \cdot x) \Rightarrow 0 \cdot x = 0$.

3. $y + (-y) = 0 \Rightarrow x(y + (-y)) = x\,y + x(-y) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x\,y) - (x\,y) + x(-y) = -(x\,y) \Rightarrow x(-y) = -(x\,y)$.

4. $(-1)x + x = (-1 + 1)x = 0 \cdot x = 0 \Rightarrow (-1)x = -x \Rightarrow x\,y = -(-x\,y) =$
$= (-1)(-x\,y) = (-1)(-1)x\,y = ((-1)x)((-1)y) = (-x)(-y)$.

5. $x < y \Leftrightarrow x + (-x) < y + (-x) \Leftrightarrow 0 < y + (-x) \Leftrightarrow 0 < y - x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0 + (-y) < y + (-y) \Leftrightarrow -y < -x \Leftrightarrow -x > -y$.

6. $(x < 0 \wedge y < 0) \Rightarrow (-x > 0 \wedge -y > 0) \Rightarrow (-x)(-y) > 0 \Rightarrow x\,y > 0$.

7. $\left.\begin{array}{l} x < y \Leftrightarrow (x + x' < y + x') \\ x' < y' \Leftrightarrow (x' + y < y' + y) \end{array}\right\} \Rightarrow x + x' < y + y'$.

8. $\dfrac{x'y + xy'}{x\,y} = (x'y + x\,y')\,\dfrac{1}{x\,y} = x' \cdot y \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y} + x \cdot y' \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{x'}{x} + \dfrac{y'}{y}$.

9. $\dfrac{x'y'}{x\,y} = \dfrac{1}{x\,y} \cdot x'y' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y} \cdot x' \cdot y' = \dfrac{1}{x} \cdot x' \cdot \dfrac{1}{y} \cdot y' = \dfrac{x'}{x} \cdot \dfrac{y'}{y}$.

10. Na osnovu aksiome 7. je $1 \neq 0$. Prepostavimo da je $1 < 0$, tada bi bilo $-1 > 0$, odnosno $(-1)(-1) = 1 > 0$ što je u kontradikciji sa pretpostav-kom. Dakle, mora biti $1 > 0$.

### 4.2.1. Skup prirodnih brojeva

Neka je $F = (\boldsymbol{N}_a, a \in A)$ familija podskupova skupa*) $\boldsymbol{R}$ sa osobi-nama:

1. $(\forall a \in A) \quad 1 \in \boldsymbol{N}_a,$
2. $(\forall a \in A)(x \in \boldsymbol{N}_a) \Rightarrow (x+1) \in \boldsymbol{N}_a,$

*) Elementi nekog skupa mogu biti i sami skupovi. U tom sluèaju govorimo o skupu skupova ili o familiji skupova.

*jeva.*

Jasno je da je $\boldsymbol{R} \in A$, što znači da familija $A$ nije prazan skup.

Ako za svako $n \in \boldsymbol{N}$ stavimo $n + 1 = n'$ tada se bitne osobine skupa $\boldsymbol{N}$ mogu dati sljedećom teoremom:

**Teorema 4.2.** (*Peanovi**) *aksiomi*)

P1. $1 \in \boldsymbol{N}$ (1 (*jedan*) *je prirodan broj*),

P2. $n \in \boldsymbol{N} \Rightarrow n' \in \boldsymbol{N}$ ( *broj* $n'$ *se naziva sljedbenik broja* $n$),

P3. $(\forall m, n \in \boldsymbol{N}) \quad m' = n' \Rightarrow m = n$,

P4. $(\forall n \in \boldsymbol{N}) \quad n' \neq 1$ (*jedan nije sljedbenik ni jednog prirodnog broja*),

P5. *Ako neki podskup* $M$ *skupa prirodnih brojeva* $\boldsymbol{N}$ *ima osobine*:

1. $1 \in M$

2. *ako skup* $M$ *sadrži prirodan broj* $n$ *i ako sadrži njegovog sljedbenika* $(n')$, *onda taj skup sadrži sve prirodne brojeve*, *tj.* $M = \boldsymbol{N}$.

*Dokaz* ove teoreme nećemo izvoditi, a čitalac ga može naći npr. u Matematici I, Dimitrije Hajduković, Glas Banjaluke, 1989. str 15.

Prema $P1$. slijedi $1 \in \boldsymbol{N}$, a prema $P2$ slijedi $1 + 1 = 1' \in \boldsymbol{N}$ i um-jesto $1'$ pišemo 2. Dalje je $2 + 1 = 2' \in \boldsymbol{N}$ i umjesto $2'$ pišemo 3, itd. Ovaj postupak se misaono može nastaviti u beskonačnost. Tako se dobija skup $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ koji ispunjava Peanove aksiome, što nije teško provjeriti, pa se može pisati

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\} .$$

#### 4.2.1.1. Matematička indukcija

Peti Peanov aksiom, koji je poznat i kao princip matematičke induk-cije, upotrebljava se pri dokazivanju iskaza čija formulacija implicira pri-rodne brojeve.

Princip matematičke indukcije može se iskazati i na sljedeći način: Zadan iskaz $P$ je istinit za svaki prirodan broj:

1. ako je istinit za prirodan broj 1 (vrijedi za $P(1)$ )

2. ako iz pretpostavke da je istinit za prirodan broj $n = k \quad 1$ slijedi da je istinit za broj $k + 1$.

Može se desiti da jedan iskaz važi počev od prirodnog broja $n_0 > 1$. Tada se princip matematičke indukcije iskazuje na sljedeći način.

*) G. Peano (1858-1935), italijanski matematièar.

n broj $n_0$ i ako iz pretpostavke da je istinit za prirodan broj $k$ $n_0$ slijedi da je istinit za $n = k + 1$, tada je ovaj iskaz istinit za svaki prirodan broj $n$ $n_0$.

***Primjer* 4.5.** Matematičkom indukcijom dokazati da je jednakost

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

zadovoljena za svako $n \in \boldsymbol{N}$.

***Rješenje.***

1. Prvo provjerimo tačnost tvrdnje za $n = 1$. Tada je

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Očigledno je jednakost zadovoljena.

2. Pretpostavimo da je jednakost zadovoljena za $n = k$ tj. da vrijedi

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

3. Na osnovu 2. i osobina realnih brojeva slijedi da vrijedi jednakost

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}. \end{aligned}$$

Dakle jednakost je zadovoljena za $n = k + 1$ a onda i za svako $n \in \boldsymbol{N}$.

***Primjer* 4.6.** Dokazati da za svako $a \neq 1$ i svako $n \in \boldsymbol{N}$ vrijedi jednakost

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

***Dokaz.*** Za $n = 1$ data jednakost se svodi na $1 + a = \dfrac{1 - a^2}{1 - a}$, što nakon skraćivanja sa $1 - a$ daje $1 + a = 1 + a$, tj. data jednakost vrijedi za $n = 1$.

Iz pretpostavke da data jednakost vrijedi za $n = k$ slijedi jednakost

$$\begin{aligned} 1 + a + a^2 + \cdots + a^k + a^{k+1} &= \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a} + a^{k+1} \\ &= \frac{1 - a^{(k+1)+1}}{1 - a}, \end{aligned}$$

što pokazuje da jednakost vrijedi za $n = k + 1$. Dakle jednakost vrijedi za svako $n \in \boldsymbol{N}$.

***Primjer* 4.7.** Dokazati da je za svako $n \in \boldsymbol{N}$

$2^{3n+2} - 28n - 4 \equiv 0$ djeljivo sa 196 (a)

1. Provjerimo tačnost tvrdnje (a) za $n = 1$,

$$2^{3\cdot 1+2} - 28\cdot 1 - 4 = 32 - 28 - 4 = 0.$$

Time je tvrdnja dokazana.

2. Pretpostavimo da je tvrdnja (a) tačna za $n = k$ tj. da vrijedi

$2^{3k+2} - 28k - 4 = 196A, \quad A$ – cijeli broj (b)

3. Dokažimo tačnost tvrdnje za $n = k + 1$,

$$\begin{aligned}
2^{3(k+1)+2} - 28(k+1) - 4 &= 2^{3k+5} - 28k - 28 - 4 \\
&= 2^{3k+2}\cdot 2^3 - 28k - 4 - 28 \\
&= 8\cdot 2^{3k+2} - 28k - 4 - 28 \\
&= 8\left(2^{3k+2} - 28k - 4\right) + 196k + 28 - 28 \\
&= 8\cdot 196A + 196k \\
&= 196\left(8A + k\right) = 196B, \quad B \in \boldsymbol{Z}.
\end{aligned}$$

Kako je faktor $B$ proizvoda $196B$ cijeli broj, to je taj proizvod djeljiv sa $196$. Dakle, tvrdnja (a) vrijedi za $\forall n \in \boldsymbol{N}$.

***Primjer* 4.8.** Dokazati:

$$2^n \quad 1 + n, \quad \forall n \in \boldsymbol{N}.$$

1. Provjerimo tačnost tvrdnje za $n = 1$.

$$2^1 \quad 1 + 1,$$

što je ispravno.

2. Neka je tvrdnja tačna za $n = k > 1$, tj. neka vrijedi

$$2^k \quad 1 + k.$$

Tada je

$$2^{k+1} = 2\cdot 2^k \quad 2\cdot\left(1 + k\right) = 1 + \left(1 + k\right),$$

što je i trebalo dokazati.

***Primjer* 4.9.** Dokazati nejednakost (Bernulijeva)

$$\left(1 + h\right)^n > 1 + nh, \text{ za } h \neq 0,\ 1 + h > 0,\ \forall n \quad 2,\ n \in \boldsymbol{N}.$$

1. Za $n = 2$ je

$$\left(1 + h\right)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h, \text{ jer je } h^2 > 0.$$

2. Neka vrijedi, za neko $n = k > 2$

$$\left(1 + h\right)^k > 1 + kh.$$

Pomnožimo li obje strane prethodne nejednakosti sa $1 + h > 0$ dobićemo

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h) = 1+(1+k)h+kh^2$$
$$> 1+(1+k)h \; .$$

što je i trebalo dokazati.

### 4.2.1.2. Binomna formula

Razmotrimo značenje sljedećih izraza. Izraz $r!,\ r\in \boldsymbol{N}$, se čita "$r$ faktorijel" i ima vrijednost

(4.17) $$r! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot r \; .$$

Na primjer, $1! = 1,\quad 2! = 1\cdot 2 = 2,\quad 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6,\quad 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ .

Izraz $\binom{n}{r}$ se čita " $n$ nad $r$ " i definiše se sa

(4.18) $$\binom{n}{r} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot \cdots \cdot(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot r} = \frac{n(n-1)\cdot \cdots \cdot(n-r+1)}{r!} \; .$$

Naprimjer, $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = \frac{12}{2} = 6$ , $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$ .

Napomenimo da je po konvenciji

$$\binom{0}{0} = 0,\ \binom{n}{0} = 1 \;,\quad 0! = 1 \; .$$

Dokažimo da vrijede sljedeći identiteti:

(4.19) $$\binom{n}{r+1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} \; ,$$

(4.20) $$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \; .$$

***Dokaz.***

$$\binom{n}{r+1} + \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)(n-r)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot r(r+1)} + \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot r} =$$
$$= \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}{r!}\left(\frac{n-r}{r+1}+1\right)$$
$$= \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}{r!}\cdot\frac{n+1}{r+1}$$
$$= \frac{(n+1)\cdot n\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}{(r+1)!} = \binom{n+1}{r+1}$$

Time je dokazana relacija (4.19).

Za dokaz relacije (4.20) pođimo od jednakosti

(4.21) $$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}{r!},$$

(4.22) $$\binom{n}{n-r} = \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot[n-(n-r)+1]}{(n-r)!}.$$

Ako se razlomak na desnoj strani relacije (4.21) proširi sa $(n-r)!$, a razlomak na desnoj strani relacije (4.22) proširi sa $r!$ dobiće se

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

odakle slijedi tačnost relacije (4.20.)

**Teorema 4.2.** (***Newtonova***) **formula***) *Neka je* $a,b \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$. *Tada vrijedi*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}a^{n-n}b^n$$

*ili kratko*

(4.23) $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}\,b^r.$$

***Dokaz.*** Teorema se može dokazati primjenom matematičke induk-cije.

1. Za $n=1$ je

$$(a+b)^1 = a+b.$$

2. Neka formula (4.23) vrijedi za $n=k$, tj. neka je

(4.24) $$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^r + \cdots + \binom{k}{k}b^k.$$

Pomnožimo relaciju (4.24) sa $a+b$ dobićemo

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k}ab^k +$$

$$+\binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

odnosno

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]a^k b + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right]a^{k-1}b^2 + \cdots + b^{k+1}$$

odakle na osnovu relacije (4.19) slijedi

*) I. Newton (1643-1727), engleski fizièar i matematièar.

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \cdots + b^{k+1}$$

ili kratko

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k+1}{r} a^{k+1-r} b^r .$$

Na osnovu principa matematičke indukcije, slijedi tačnost tvrdnje.

Napomenimo da se izraz $\binom{n}{r}$ u relaciji (4.23) naziva $(r+1)$ -vi bi-nomni koeficijent.

## 4.2.2. Skup cijelih brojeva

Kao što je poznato operacija oduzimanja u skupu prirodnih brojeva nije općenito izvodiva. Razlika $a-b$ postoji samo u slučaju kada je $a>b$. Da bi se to ograničenje otklonilo potrebno je skup $\boldsymbol{N}$ proširiti nulom i skupom $-\boldsymbol{N} = \{-n: n \in \boldsymbol{N}\}$ .

Skup

$$\boldsymbol{Z} = -\boldsymbol{N} \cup \{0\} \cup \boldsymbol{N}$$

se naziva skup cijelih brojeva. Skup $-\boldsymbol{N}$ se naziva skup cijelih negativnih brojeva.

Skup cijelih brojeva se označava i na sljedeći način:

$$\boldsymbol{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

Ovom prilikom nećemo definisati operacije u skupu $\boldsymbol{Z}$ jer se smatra da su one čitaocu dovoljno poznate.

## 4.2.3. Skup racionalnih brojeva

Skup

$$\boldsymbol{Q} = \left\{ \frac{x}{n} : x \in \boldsymbol{Z} \wedge n \in \boldsymbol{N} \right\}$$

naziva se skup racionalnih brojeva.

Ako je $n=1$ tada je $\frac{x}{n} = \frac{x}{1} = x$ za svako $x \in \boldsymbol{Z}$, dakle skup cijelih brojeva je podskup skupa racionalnih brojeva.

U skupu racionalnih brojeva operacije sabiranja, množenja i oduzi-manja se definišu na sljedeći način:

Neka su $p = \frac{a}{b}$ i $q = \frac{c}{d}$ racionalni brojevi, tada je

$$p+q=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$

$$pq=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

$$p-q=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

U skupu racionalnih brojeva se operacija dijeljenja definiše na slje-deći način:
Neka su $p$ i $q$ racionalni brojevi i neka je $q \neq 0$, tada je

$$p:q=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

## 4.2.4. Skup iracionalnih brojeva

Skup svih brojeva koji se ne mogu napisati u obliku količnika dva ci-jela broja naziva se skup iracionalnih brojeva i označava se sa *I*.

Skup *I* nije prazan, tj. on ima bar jedan element, što ćemo dokazati. Dokazat ćemo da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj.

Pretpostavićemo suprotno, tj. da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Tada bi po-stojali relativno prosti brojevi $m \in \boldsymbol{Z}$ i $n \in \boldsymbol{N}$ takvi da je $\frac{m}{n}=\sqrt{2}$. Kvadri-ranjem ove jednakosti dobijamo

(a) $$m^2=2n^2.$$

Iz (a) slijedi da je $m^2$ paran broj, odnosno da je $m$ paran broj. Tada se može pisati da je

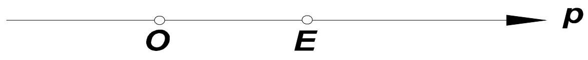
(b) $$m=2k,\quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Zamjenom $m$ iz (b) dobijamo jednakost $4k^2=2n^2$ ili $n^2=2k^2$. To znači da je $n$ paran broj. Dakle brojevi $m$ i $n$ su djeljivi sa 2, što znači da oni nisu relativno prosti. To je u suprotnosti s pretpostavkom. Ta kontradikcija obara pretpostavku da je $\sqrt{2}$ racionalan broj.

## 4.2.5. Brojna prava

Neka je data prava $p$. Odredimo proizvoljnu tačku $O \in p$, i tačku $E \in p$ desno od tačke $O$. Smjer slijeva na desno označimo kao pozitivan. Tačku $O$

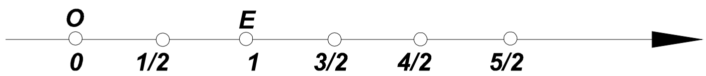
nazivamo ishodište a duž $\overline{OE}$ jediničnu duž. Pravu $p$ sa ovako definisanim tačkama $O$ i $E$ nazivamo brojna prava (sl.4.1).




Sl. 4.1.

Proizvoljnom racionalnom broju $\frac{x}{n};\ n, x \in \boldsymbol{N}$ odgovara jedna i samo jedna tačka $A$ na brojnoj pravoj $p$. Tačku $A$ ćemo dobiti ako duž $\frac{1}{n}\overline{OE}$ nanosimo $x$ puta desno od tačke $O$. Tačka $A'$ koja odgovara broju $-\frac{x}{n}$ je simetrična, u odnosu na tačku $O$, tački $A$.

***Primjer* 4.10.** Broju $\frac{5}{2}$ odgovara tačka $A$ (Sl. 1.4.2),



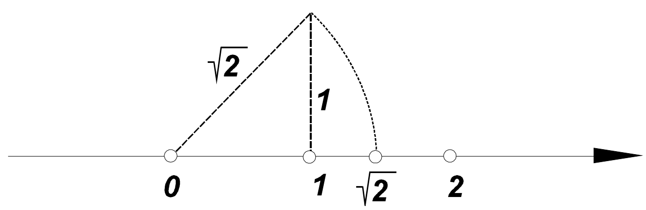

Sl. 4.2.

a dobija se na sljedeći način:

$$\frac{1}{2}\overline{OE} = \frac{1}{2}\cdot 5,$$

znači $\frac{1}{2}$ nanosimo 5 puta desno od tačke $O$.

Iracionalnom broju $\sqrt{2}$ odgovara jedna i samo jedna tačka na brojnoj pravoj $p$ i ona se može odrediti primjenom Pitagorine teoreme (Sl.4.2-a).




Sl. 4.2-a

Takođe primjenom te teoreme možemo odrediti položaj tačke na brojnoj pravoj $p$ koja odgovara broju $\sqrt{3}$ $\left(\sqrt{3} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2}\right)$. Određivanje po-ložaja tačke koja odgovara kvadratnom korijenu racionalnog broja, racionali-sanjem imenioca, svodi se na određivanje položaja tačke na način koji je već objašnjen. Npr.

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\ .$$

Svim ostalim iracionalnim brojevima odgovaraju tačke brojne prave. Međutim, one se ne mogu tačno dobiti elementarnim konstrukcijama (ne mogu se dobiti upotrebom samo šestara i lenjira).

Na osnovu prethodnog može se zaključiti:

"*Svakom realnom broju odgovara jedna tačka brojne prave, i obratno*, *svakoj tački brojne prave odgovara jedan realan broj*".

### 4.2.6. Apsolutna vrijednost realnog broja

Apsolutna vrijednost realnog broja $x$, koja se označava sa $|x|$, definiše se sa

(4.24)
$$|x| = \begin{cases} x & za \ \ x \geq 0, \\ -x & za \ \ x < 0. \end{cases}$$

Tako je naprimjer: $|3| = 3,\ |-5| = -(-5),\ \left|-\sqrt{10}\right| = \sqrt{10}$, $|0| = 0$.

Iz definicije apsolutne vrijednosti realnog broja neposredno slijedi nejednakost

(4.25)
$$|x| \geq 0.$$

Navedimo neke osnovne osobine apsolutne vrijednosti realnog broja

(4.26)
$$|x| = |-x|,$$

(4.27)
$$-|x| \leq x \leq |x|,$$

(4.27-a)
$$\left(|x| \leq a \ \ (a > 0)\right) \Leftrightarrow \left(-a \leq x \leq a\right),$$

(4.27-b)
$$\left(|x| > a \ \ (a > 0)\right) \Leftrightarrow \left(x < -a \vee x > a\right).$$

**Teorema 4.3.** *Apsolutna vrijednost zbira realnih brojeva manja je ili jednaka zbiru apsolutnih vrijednosti sabiraka, tj.*

(4.28)
$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (a, b \in \boldsymbol{R})$$

***Dokaz.*** Iz
$$-|a| \leq a \leq |a|$$
$$-|b| \leq b \leq |b|$$

sabiranjem dobijamo
$$-\left(|a| + |b|\right) \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

odakle prema (4.27-a) slijedi

$$|a+b| \leq \big||a|+|b|\big| = |a|+|b| \, .$$

**Teorema 4.4.** *Apsolutna vrijednost proizvoda dva realna broja jednaka je proizvodu apsolutnih vrijednosti faktora, tj.*

(4.29) $$|a\,b| = |a| \cdot |b| \quad (a,b \in \boldsymbol{R}) \, .$$

***Dokaz.*** Ako je $a=0$ ili $b=0$, tada je $|a|=0$ ili $|b|=0$, tj. $|a|\cdot|b|=0$. Istovremeno je $a\cdot b = 0 \Rightarrow |a\,b| = 0$, tj. vrijedi $|a\,b| = |a|\cdot|b|$.

Ako je $a>0$ i $b>0$, tada $(a>0) \Rightarrow (\,|a|=a\,)$, $(b>0) \Rightarrow (\,|b|=b\,)$. Dalje je $a\,b>0$ pa je $|a\,b| = a\,b$. Iz ovog slijedi da je

$$|a\,b| = a\,b = |a|\cdot|b| \, .$$

Ako je $a<0$ i $b<0$, tada je

$$|a| = -a,\ |b| = -b \ \text{ i } \ (a\,b>0) \Rightarrow (\,|a\,b| = a\,b) \, .$$

Na osnovu toga slijedi

$$|a\,b| = a\,b = (-a)(-b) = |a|\cdot|b| \, .$$

Ako je $a>0$ i $b<0$, tada je

$$|a| = a,\ |b| = -b \, , \ a\,b<0 \, .$$

Na osnovu toga je

$$|a\,b| = -\,a\,b = a\,(-b) = |a|\cdot|b| \, .$$

Analogno se dokazuje da je jednakost (4.29) tačna za $a<0 \wedge b>0$. To znači da je jednakost (4.29) dokazana za svaki par realnih brojeva.

***Posljedica teoreme* 4.3.** Ako su $a,b,c$ realni brojevi, tada je

$$|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c| \, .$$

Zaista, na osnovu teoreme 4.3. je

$$|a+b+c| = |(a+b)+c| \leq |a+b|+|c| \leq |a|+|b|+|c| \, .$$

Primjenom principa matematičke indukcije nije teško dokazati da vrijedi nejednakost

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \quad \text{za svako } n \in \boldsymbol{N}.$$

Iz teoreme 4.3. slijedi i sljedeća nejednakost

(4.30) $$|a-b| \quad |a|-|b| \, ,$$

u šta se nije teško uvjeriti.

Ako se pođe od jednakosti $a = (a-b)+b$ dobija se

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b| \Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b| \, ,$$

odnosno

$$|a-b| \quad |a|-|b|.$$

**Teorema 4.5.** *Apsolutna vrijednost količnika dva realna broja, uz pretpostavku da je imenilac različit od nule, jednaka je količniku apsolutnih vrijednosti brojnika i nazivnika, tj.*

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0 \quad . \tag{4.31}$$

*Dokaz* ove teoreme je sličan dokazu teoreme (4.4) i čitaocu može poslužiti kao primjer za vježbu.

***Primjer* 4.11.** Riješiti jednačinu

$$|x+3| + |2x+2| = |1-x| .$$

***Rješenje*:** Iz sljedeće tabele

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $2x+2$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $1-x$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ |

u kojoj su dati znakovi pojedinih izraza, slijedi:

1. Za $-\infty < x < -3$ po definiciji apsolutne vrijednosti je

$$|x+3| = -(x+3),$$

$$|2x+2| = -(2x+2),$$

$$|1-x| = (1-x),$$

pa data jednačina glasi

$$-(x+3) - (2x+2) = 1-x,$$

čije je rješenje $x=-3$. Kako $x=-3$ ne ispunjava uslov 1. to $x=-3$ neće biti rješenje date jednačine.

2. Za $-3 \le x < -1$ je

$$|x+3| = x+3,$$

$$|2x+2| = -(2x+2),$$

$$|1-x| = 1-x,$$

pa jednačina glasi

$$(x+3) - (2x+2) = 1-x$$

ili $3=3$, što znači da je svako $x$ iz posmatranog intervala rješenje date jednačine.

3. Za $-1 \le x < 1$ je

$$|x+3| = x+3$$

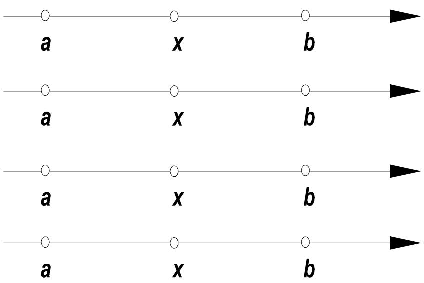
$$|\,2x+2\,| = 2x+2\,,$$
$$|\,1-x\,| = 1-x\,,$$
pa jednačina glasi
$$(x+3)+(2x+2) = 1-x\,,$$
odakle je $x=-1\in[-1,1\rangle$, tj. ovo je rješenje jednačine.

4. Za $1\le x<+\infty$ je
$$|\,x+3\,| = x+3\,,$$
$$|\,2x+2\,| = 2x+2\,,$$
$$|\,1-x\,| = x-1\,,$$
i jednačina glasi
$$x+3+2x+2 = x-1$$
čije je rješenje $x=-3$. Kako $x=-3$ ne ispunjava uslove 4. to nije rješenje jednačine.

Rezultat: $x\in[-3,-1\rangle\cup\{-1\} = [-3,-1]$.

## 4.2.7. Interval. Okolina i tačka nagomilavanja

Neka su $a$ i $b$ realni brojevi i neka je $a<b$ (Sl. 4.3).



Sl. 4.3.

Skup svih realnih brojeva $x$ koji su između brojeva $a$ i $b$ zove se *otvoreni interval* i označava se sa $\langle a,b\rangle$. Ova definicija se pomoću skupovnih simbola zapisuje sa

(4.32) $$\langle a,b\rangle = \{\,x\in\boldsymbol{R}:\ a<x<b\}\,.$$

Brojevi $a$ i $b$ su rubovi ili krajevi intervala.

Skup svih realnih brojeva koji su između $a$ i $b$ uključujući i broje-ve $a$ i $b$, zove se *zatvoreni interval* ili *segment* i označava se sa $[\,a,b\,]$, tj.

(4.33) $$[\,a,b\,] = \{\,x\in\boldsymbol{R}:\ a\le x\le b\}\,.$$

Skup svih realnih brojeva koji su između $a$ i $b$ uključivši i broj $a$ zove se poluotvoreni odnosno poluzatvoreni interval i označava se sa $[a,b\rangle$, tj.

(4.34) $$\left[a,b\right\rangle = \left\{ x \in \boldsymbol{R} : a \le x < b \right\} .$$

Ovaj interval je zatvoren slijeva, otvoren sdesna. Analogno se definiše i interval otvoren slijeva, a zatvoren sdesna, tj.

(4.35) $$\left\langle a,b\right] = \left\{ x \in \boldsymbol{R} : a < x \le b \right\} .$$

Okolina realnog broja $a$ je svaki (proizvoljno mali) otvoreni interval koji sadrži broj $a$. Za broj $x$ se kaže da se nalazi u blizini broja $a$ ako pripada intervalu $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$ za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$. Interval $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$ se naziva i $\varepsilon$ okolina broja $a$.

*Tačka nagomilavanja* beskonačnog skupa realnih brojeva naziva se tačka u čijoj se $\varepsilon$ okolini nalazi beskonačno mnogo brojeva tog skupa.

### 4.2.8. Još o skupovima

**Definicija. 4.5.** *Za skupove $A$ i $B$ kažemo da su ekvivalentni, da imaju istu moć ili isti kardinalni broj, ako postoji bijekcija skupa $A$ na skup $B$, što pišemo* $A \cong B$.

Ekvivalentnost skupova $A$ i $B$ označavaćemo sa $kard\ A = kard\ B$ (ili $A \sim B$).

***Primjer* 4.12.** Skup prirodnih brojeva $\boldsymbol{N}$ ekvivalentan je skupu cijelih ne-gativnih brojeva $-\boldsymbol{N}$, jer je funkcija $f: n \to -n$ bijekcija.

***Primjer* 4.13.** Skup prirodnih brojeva ekvivalentan je skupu parnih pozi-tivnih brojeva, jer je funkcija $f: n \to 2n$ bijekcija.

**Definicija 4.6.** *Za skup $A$ kažemo da je konačan ako nije ekvivalentan ni sa jednim svojim pravim podskupom. Za skup koji nije konačan kažemo da je beskonačan. Kardinalnim brojem konačnog skupa nazivamo broj ele-menta toga skupa.*

Na primjeru 4.13. zapažamo da skup može biti ekvivalentan svom pravom podskupu, i na osnovu definicije 4.6. to se odnosi samo na bes-konačne skupove.

**Definicija 4.7.** *Kažemo da je skup $A$* ***prebrojiv***, *ako je konačan ili ako je* $A \cong \boldsymbol{N}$. *U protivnom kažemo da je skup $A$ neprebrojiv.*

## 4.3. Skup kompleksnih brojeva

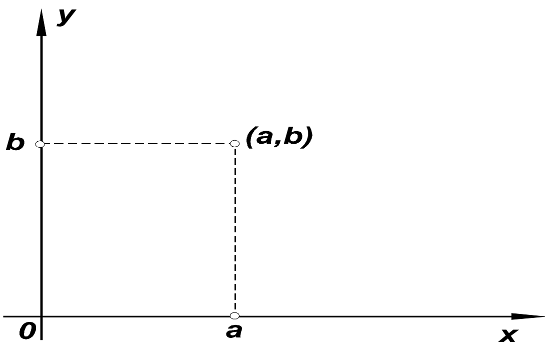
Neka je $\boldsymbol{R}$ polje realnih brojeva. Formirajmo $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^2$, tj. Descartesov proizvod skupa $\boldsymbol{R}$ sa samim sobom. U $\boldsymbol{R}^2$ uvedimo sabiranje i množenje na sljedeći način.

**Definicija 4.8.** *Neka je* $\boldsymbol{R}$ *polje realnih brojeva. Za bilo koja dva elementa* $(a,b),\ (c,d) \in \boldsymbol{R}^2$ *neka je*

$$\begin{cases} (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), \\ (a,b) \cdot (c,d) = (a\,c - b\,d,\ a\,d + b\,c). \end{cases} \tag{4.36}$$

*Skup* $\boldsymbol{R}^2$ *koji ima osobine* (4.36) *nazivamo skup kompleksnih brojeva i ubuduće ćemo ga označavati sa* $\boldsymbol{C}$.

Kako se svakom paru $(a,b) \in \boldsymbol{R}^2$ može pridružiti tačka $A$ pra-vouglog Descartesovog) koordinatnog sistema, pri čemu se paru $(a,b)$ pri-družuje tačka $A$ sa apscicom $a$ i ordinatom $b$, to kompleksne brojeve mo-žemo predstaviti tačkama ravni. Ovakva ravan se zove kompleksna ili Gaussova*) ravan (Sl. 4.4).




Sl. 4.4.

Skup $\boldsymbol{R}^2$ uz definisane operacije sabiranja i množenja sa (4.36), tj. skup kompleksnih brojeva, ima algebarsku strukturu polja, što ćemo i doka-zati, koristeći se činjenicom da je skup $\boldsymbol{R}$ polje u odnosu na operacije $"+"$ i $"\cdot"$ definisane u $\boldsymbol{R}$..

*) K. F. Gauss (1777-1855), njemaèki matematièar.

1. Sabiranje u $\boldsymbol{C}$ je asocijativno. Neka su $(a,b),\ (c,d)$, $(e,f)$ proizvoljni elementi iz $\boldsymbol{C}$, tada je

$$[(a,b) + (c,d)] + (e,f) = (a+c, b+d) + (e,f) = ((a+c)+e, (b+d)+f) =$$
$$= (a + (c+e), b + (d,f)) = (a,b) + (c+e, d+f) = (a,b) + [(c,d) + (e,f)].$$

2. $(\forall (a,b)\in \boldsymbol{C})(\exists (0,0)\in \boldsymbol{C})$ tako da je

$$(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b).$$

3. $(\forall (a,b)\in \boldsymbol{C})(\exists (-a,-b)\in \boldsymbol{C})$ tako da je

$$(a,b)+(-a,-b)=(a+(-a),b+(-b))=(a-a,b-b)=(0,0).$$

4. $(\forall (a,b),(c,d)\in \boldsymbol{C})\Rightarrow (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=$

$$=(c+a,d+b)=(c,d)+(a,b).$$

Na osnovu 1,2,3, i 4 slijedi da je $(\boldsymbol{C},+)$ Abelova grupa.

5. $(\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in \boldsymbol{C})\Rightarrow [(a,b)(c,d)]\cdot (e,f)=$

$$\begin{aligned}
&=(ac-bd,ad+bc)(e,f)=\\
&=((ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e)=\\
&=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)=\\
&=(a(ce-df)-b(cf+de),a(cf+de)+b(ce-df))=\\
&=(a,b)(ce-df,cf+de)=(a,b)[(c,d)(e,f)].
\end{aligned}$$

6. $(\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in \boldsymbol{C})\Rightarrow [(a,b)+(c,d)](e,f)=$

$$\begin{aligned}
&=((a+c)e-(b+d)f,(a+c)f+(b+d)e)=\\
&=(ae+ce-bf-df,af+cf+be+de)=\\
&=((ae-bf)+(ce-df),(af+be)+(cf+de))=\\
&=(ae-bf,af+be)+(ce-df,cf+de)=\\
&=(a,b)(e,f)+(c,d)(e,f).
\end{aligned}$$

7. $(\forall (a,b)\in \boldsymbol{C})(\exists (1,0)\in \boldsymbol{C})$ tako da je

$$(a,b)(1,0)=(a,b).$$

Broj $(1,0)$ je jedinica u $\boldsymbol{C}$.

8. $(\forall (a,b)\in \boldsymbol{C}\wedge (a,b)\neq (0,0))(\exists (x,y)\in \boldsymbol{C})$ tako da je

$$(a,b)(x,y)=(1,0),$$

odakle je

$$\begin{aligned}
ax-by&=1,\\
ay+bx&=0.
\end{aligned}$$

Rješavanje ovog sistema jednačina po $x,y$ dobijamo

$$x=\frac{a}{a^2+b^2},\quad y=\frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Dakle, inverzni element za $(a,b)$ je komplesan broj

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

9. $\left(\forall (a,b),(c,d)\in \boldsymbol{C}\right) \Rightarrow (a,b)(c,d) = (a\,c - b\,d,\; a\,d + b\,c) =$
$$= (c\,a - d\,b,\; d\,a + c\,b) = (c,d)(a,b).$$

Na osnovu osibina 1 do 9 i definicije polja slijedi da je $(\boldsymbol{C},+,\cdot)$ polje.

Neka je $\boldsymbol{R}$ polje realnih brojeva i neka je
$$\boldsymbol{R}' = \left\{(x,0)\in \boldsymbol{C} : x\in \boldsymbol{R}\right\}.$$

Tada za svako $(x,0),\,(y,0)\in \boldsymbol{R}'$ na osnovu relacije (4.36) dobijamo
$$(x,0)+(y,0) = (x+y,0),\quad (x,0)(y,0) = (x\,y,0).$$

Znači skup $\boldsymbol{R}'$ je zatvoren u odnosu na sabiranje i množenje defi-nisane sa (4.36). Dalje, nije teško provjeriti da $\boldsymbol{R}'$ ispunjava aksiome skupa realnih brojeva. Zbog toga je skup realnih brojeva jednak skupu kompleksnih brojeva oblika $(x,0)$ pa se piše $(x,0) = x$. Tada je po konvenciji $(0,0) = 0$ i $(1,0) = 1$.

**Definicija 4.9.** *Kompleksan broj* $(0,1)$ *zovemo imaginarna jedinica i označavamo ga sa* $\boldsymbol{i}$, *dakle* $\boldsymbol{i} = (0,1)$.

Bilo koji broj $(x,y)\in \boldsymbol{C}$ sada se može izraziti u obliku
$$(x,y) = (x,0)+(0,y) = (x,0)+(0,1)(y,0) = x + i\,y,$$
dakle

(4.37)
$$(x,y) = x + i\,y.$$

Kompleksan broj oblika $x+i\,y$ naziva se standardni oblik kompleksnog broja (ili algebarski oblik).

Operacije (4.36) za standardni oblik kompleksnog broja prelaze u
$$(a+i\,b)+(c+i\,d) = (a+c)+i(b+d),$$
$$(a+i\,b)\cdot(c+i\,d) = (a\,c-b\,d)+i(a\,d+b\,c).$$

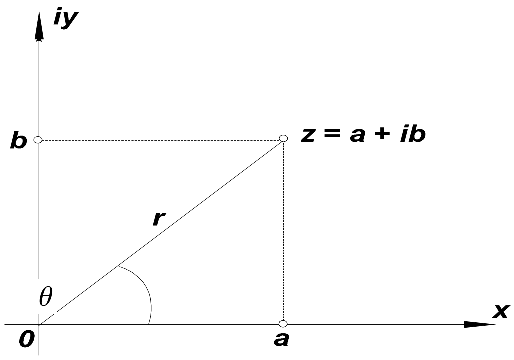
Ako se stavi $z = a+i\,b$ tada se realan broj $a$ naziva realan dio kompleksnog broja $z$ i označava se sa $\mathrm{Re}\,(z)$, a realan broj $b$ se zove imaginarni dio kompleksnog broja $z$ i označava se sa $\mathrm{Im}\,(z)$.

Broj $\bar{z} = a - i\,b$ je konjugovano kompleksan broj broja $z = a+i\,b$.

Tačke $(a,0) = a\in \boldsymbol{R}$ kompleksne ravni leže na $x$-osi, zbog toga tu osu zovemo realna osa. Tačke $(0,b) = i\,b$ leže na $y$-osi zbog čega je nazi-vamo imaginarna osa i označavamo sa $i\,y$ (Sl.4.5).

Zapažamo da su brojevi $z$ i $\bar{z}$ simetrični u odnosu na $x$-osu. Dalje je za $z = a + ib$

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 .$$




Sl. 4.5.

Realan broj $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ zovemo *modul*, *norma* ili *apsolutna vrijednost* kompleksnog broja $z$.

Treba zapaziti da je

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

i to je rastojanje tačke $(a, b)$ od kordinatnog početka.

Iz trougla $OAz$ (Sl.4.5) neposredno slijedi da je

$$\operatorname{Im}(z) \le |z|, \quad \operatorname{Re}(z) \le |z|, \text{ za svako } z \in \boldsymbol{C}.$$

**Teorema 4.6.** *Za kompleksne brojeve* $z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}$ *vrijedi*:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,

c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

d) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \quad z_2 \ne 0$.

***Dokazi*** su jednostavni i primjera radi dokažimo samo a).

Ako je $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$ tada je

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) =$$
$$= (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2} .$$

Ostali dokazi se izvode na sličan način.

**Teorema 4.7.** *Za svako* $z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}$ *vrijedi*:

a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

b) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

***Dokaz.*** a) $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 z_2)\left(\overline{z_1 z_2}\right) = \left(z_1 \overline{z_1}\right)\left(z_2 \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$,

dakle

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

b) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right)$

$$= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 \overline{z_2}} =$$

$$= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z_1 \overline{z_2}\right) + |z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 =$$

$= \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$, tj.

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

### 4.3.1. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kompleksan broj $z = a + ib \ne 0$ određen je poluprečnikom $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ centralne kružnice koja prolazi tačkom $z$ i uglom $\theta \ (0 \le \theta \le 2\pi)$ koji duž $\overline{Oz}$ zaklapa sa poluosom $x > 0$, (Sl.4.5). Ugao $\theta$ se zove argument ili glavna vrijednost argumenta kompleksnog broja $z = a + ib$, i označava se sa $\arg z$.

Kako je $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ ili $a = r\cos\theta$, i $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$ ili $b = r\sin\theta$ to je

(4.38) $$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Iz $a = r\cos\theta$; $b = r\sin\theta$, se dijeljenjem dobija

$$\frac{b}{a} = \frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} = tg\theta.$$

Znači argument kompleksnog broja $z$ $(\arg z)$ je

$$\theta = \arg z = arc\, tg\frac{b}{a}; \quad 0 \le \theta < 2\pi.$$

Kompleksan broj

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

zovemo *trigonometrijski oblik kompleksnog broja z*.

***Primjer* 4.14.** Napisati u trigonometrijskom obliku kompleksan broj $z = -1 + i$.

***Rješenje.*** Apsolutna vrijednost datog kompleksnog broja je

$$r = z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Iz $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dobijamo $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Uvrštavanjem vri-jednosti za $r$ i $\theta$ u (4.38) dobijamo

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

## 4.3.2. Množenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja je vrlo pogodan za neke računske operacije.

Neka su $z_k = r_k\left(\cos\theta_k + i\sin\theta_k\right), \quad k = 1,2,\dots,n$, tada je

(4.39) $$\prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} r_k \left(\cos\sum_{k=1}^{n}\theta_k + i\sin\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right).$$

***Dokaz.*** Za $n = 2$ imamo

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right) =$$

$$= r_1 r_2\left[\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1\right)\right],$$ tj.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right].$$

Dalje se primjenom matematičke indukcije pokazuje da jednakost (4.39) vrijedi za svako $n \in \boldsymbol{N}$.

***Primjer* 4.15.** Naći proizvod brojeva: $z_1 = \cos 10^0 + i\sin 10^0$, $z_2 = 3\left(\cos 15^0 + i\sin 15^0\right)$ i $z_3 = 8\left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right)$.

***Rješenje.*** Prema relaciji (4.39) je

$$z_1 z_2 z_3 = 1\cdot 3\cdot 8\left(\cos\left(10^0 + 15^0 + 20^0\right) + i\sin\left(10^0 + 15^0 + 20^0\right)\right) =$$

$$= 24\left(\cos 45^0 + i\sin 45^0\right) = 24\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 12\sqrt{2}\left(1 + i\right).$$

Ako je $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ tada se na osnovu relacije (4.39) dobija

(4.40) $$z^n = r^n\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

tj. dobija se formula za stepenovanje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku. Za $r = 1$ a na osnovu relacije (4.40) dobijamo relaciju

(4.41) $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\,, \quad n\in \mathbf{N}$$

koja je poznata pod imenom Moavreova*) formula.

U prethodnom dijelu smo razmotrili kako se množe i stepenuju kom-pleksni brojevi dati u trigonometrijskom obliku, a sada razmotrimo način korjenovanja tih brojeva.

### 4.3.3. Korjenovanje kompleksnih brojeva

Kompleksan broj $w=\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nazivamo ***n**-ti korijen kompleksnog broja* $z=r(\cos\theta + i\sin\theta)$, i pišemo $w=\sqrt[n]{z}$, ako je $w^n = z$. Ovdje, na osnovu formule za stepenovanje kompleksnih brojeva, dobijamo

$$\rho^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right),$$

odakle je $\rho^n = r$ ili $\rho=\sqrt[n]{r}$, gdje se pod $\sqrt[n]{r}$ podrazumijeva aritmetički korijen, a $n\,\varphi = \theta + 2k\pi$, ili $\varphi = \dfrac{\theta+2k\pi}{n}$. Iz $\varphi = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{k}{n}\cdot 2\pi$ slijedi da će sinusi, odnosno kosinusi ugla, $\varphi$, biti različiti za $k=0,1,2,\ldots,n-1$, pa će

$$w=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

imati $n$ različitih vrijednosti i označavaćemo ih sa $w_0, w_1, \ldots, w_n$, dakle

(4.42) $$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2,\ldots,n-1\,.$$

Ova formula se zove formula za korjenovanje kompleksnih brojeva.

*) A. Moavro (1667-1754), engleski matematièar.

***Rješenje.*** Broj $z=1+i$ u trigonometrijskom obliku glasi

$$z=1+i=\sqrt{2}\,\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

pa je

$$w_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),\quad k=0,1,2,3\,.$$

U ovom slučaju je

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

### 4.3.4. Inverzni element kompleksnog broja

Inverzni element kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ r \neq 0$, za operaciju množenja je

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} =$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Iz prethodnog slijedi da je količnik brojeva:

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),\ r_2 \neq 0$,

jednak

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{1}{z_2} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\frac{1}{r_2}(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2),$$

(4.43) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

## 4.4. Zadaci za vježbu

**1.** U skupu $N$ definisana je operacija sa

$$x * y = x + y + 1.$$

Izračunati: a) $1*(2*3)$, b) $(2*1)*3$, c) $(2*3)*(5*6)$.

**2.** Tablicama

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | c | a |
| c | c | a | b |

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | c | c |
| c | c | a | b |

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | c | c | a |
| b | b | c | a |
| c | a | b | c |

definisane su tri operacije u skupu $\{a,b,c\}$. U svakom slučaju:

a) izračunati $a*b,\ \ b*a,\ \ (a*b)*(b*c),\ \ a*(b*(c*a))$.

b) Riješiti jednačine: $a*x=b, \quad x*x=c, \quad x*a=c$.

**3.** Obrazovati tablicu operacije $*$ skupa $\{a,b,c,d\}$ koja je definisana sa:
a) $x*y=x$, b) $x*y=y$, c) $x*y=d$.

**4.** Neka je $*$ operacija u skupu $\boldsymbol{R}$ definisana sa $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Izračunati $(x*y)*z$ i $x*(y*z)$. Da li je operacija $*$ asocijativna operacija?

**5.** Da li je 0 jedinični element operacije $*$ skupa $\boldsymbol{R}$, određena formulom

$$x*y=x+y+x^2y^2 \text{ ?}$$

**6.** Dokazati da je $(S,*)$ grupa gdje je:
a) $S=\{-1,1\}$, $*$ je množenje,
b) $S$ je skup cijelih brojeva, $*$ je određena formulom $x*y=x+y+1$,
c) $S$ je skup realnih brojeva, $*$ je određena formulom $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

**7.** Dokazati da je tablicom

| $*$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| a | $a$ | $b$ | $c$ |
| b | $b$ | $c$ | $a$ |
| c | $c$ | $a$ | $b$ |

definisana grupa.

U zadacima od 8. do 11. dokazati matematičkom indukcijom da je za $(\forall n\in\boldsymbol{N})$:

**8.** $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

**9.** $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

**10.** $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

**11.** $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

U zadacima od 12. do 15. dokazati djeljivost izraza:

**12.** $5^n+2^{n+1}$ sa 3, $(n=0,1,2,\ldots)$.

**13.** $3^{2n+1}+2^{n+2}$ sa 7, $(n=0,1,2,\ldots)$.

**14.** $5^{n-1}+2^n$ sa 3, $(n=1,2,\ldots)$.

**15.** $4^n + 15n - 1$ sa $(n = 1,2,\ldots)$ .

**16.** Dokazati jednakost za $a \in \boldsymbol{R}$:

a) $\dfrac{a + |a|}{2} = \begin{cases} a, & a \quad 0 \\ 0, & a < 0, \end{cases}$ b) $\dfrac{a - |a|}{2} = \begin{cases} 0, & a \quad 0 \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

**17.** Dokazati jednakosti, $a, b \in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{a + b + |b - a|}{2} = \max(a, b),$$

$$\frac{a + b - |b - a|}{2} = \min(a, b).$$

**18.** Dokazati jednakost, $a \in \boldsymbol{R}$,

$$\left(\frac{a + |a|}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - |a|}{2}\right)^2 = a^2.$$

**19.** Riješiti jednačinu

$$|2x + 1| + |x + 3| = |x + 6|, \quad (x \in \boldsymbol{R}).$$

**20.** Riješiti nejednačine:

a) $|x + 2| + |x - 2| \le 12$,

b) $|x + 2| - |x| > 1$,

c) $|x(1 - x)| < 0{,}05$, $(x \in \boldsymbol{R})$.

**21.** Odrediti komleksan broj koji zadovoljava jednačinu

$$|z| + z = 2 + i.$$

**22.** Izračunati $z^{20}$ ako je $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**23.** Izračunati $z^{10}$ ako je $z = 1 + i$.

**24.** Izračunati: a) $\sqrt{3 - 4i}$, b) $\sqrt{-7 + 24i}$.

**25.** Izračunati: a) $\sqrt[6]{27}$, b) $\sqrt[4]{-4}$.

**26.** Riješiti jednačinu $x^3 + 8 = 0$.

**II G L A V A**

# ELEMENTI LINEARNE ALGEBRE

# 1. Vektorski prostor

**Definicija 1.1.** *Abelova grupa* $V=\{a,b,c,\dots\}$ *sa unutrašnjom operacijom "+" čini vektorski prostor ako je između njenih elemenata i elemenata polja* $K=\{\alpha,\beta,\dots\}$ *definisana spoljašnja operacija " • " tako da važi*:

$$\begin{array}{ll} & 1.\ \ \alpha\cdot a\in V\ za\ \forall\alpha\in K\ i\ \forall a\in V, \\ & 2.\ \ (\alpha+\beta)\,a=\alpha a+\beta a\ za\ \forall\alpha,\beta\in K\ i\ \forall a\in V, \\ (1.1) & \quad\ \ \alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b\ za\ \forall\alpha\in K\ i\ \forall a,b\in V, \\ & 3.\ \ \alpha(\beta a)=(\alpha\beta)\,a\ za\ \forall\alpha,\beta\in K\ i\ \forall a\in V, \\ & 4.\ \ 1\cdot a=a\ za\ \forall a\in V, \end{array}$$

*gdje* $1$ *označava jedinicu polja* $K$.

Elemente $a,b,\dots$ vektorskog prostora $V$ nazivamo vektorima, a elemente $\alpha,\beta,\dots$ polja $K$ nazivamo skalarima.

Ako je $K$ skup realnih brojeva ***R***, odnosno ako je $K$ skup kom-pleksnih brojeva ***C***, onda govorimo o realnom odnosno kompleksnom vektor-skom prostoru. Mi ćemo ubuduće, ako ne bude drugačije naglašeno, govoriti o realnom vektorskom prostoru.

Nije teško provjeriti da u bilo kojem vektorskom prostoru $V$ vrijedi jednakost

$$0\cdot a=0\ \ za\ \ \forall a\in V;\ \ 0\in K,$$

gdje je lijevo nula element polja $K$, desno nula element prostora $V$. Za do-kaz ove jednakosti iskoristimo zbir $0\cdot a+a$. Iz definicije vektorskog prosto-ra slijedi

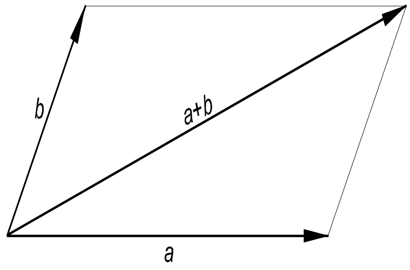
$$0\cdot a+a=0\cdot a+1\cdot a=(0+1)\,a=1\cdot a=a,$$

tj.

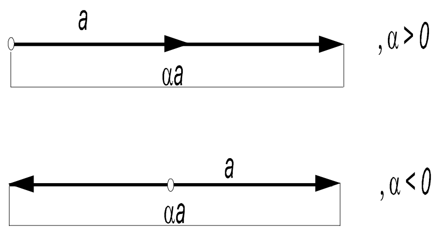
$$0\cdot a+a=a.$$

***Primjer* 1.1.** Označimo sa $V$ skup slobodnih vektora, a sa $K$ skup realnih brojeva. Poznato je da je u skupu $V$ definisana unutrašnja operacija sabi-ranja po "pravilu paralelograma", Sl.1.1, i spoljašnja operacija množenja vektora realnim brojem, Sl.1.2, gdje je $|\alpha a|=|\alpha||a|$.

Nije teško provjeriti da $V$ čini Abelovu grupu u odnosu na operaciju sabiranja. Također, od ranije je poznato da skup realnih brojeva čini polje u odnosu na operacije sabiranja i množenja. Pored toga vrijede nejednakosti:



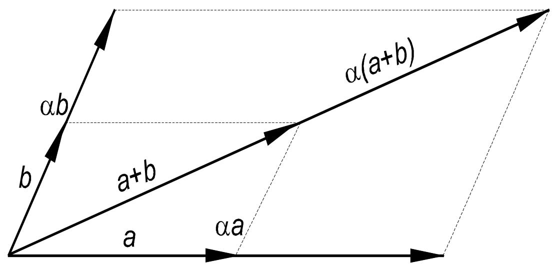

Sl. 1.1.




Sl. 1.2.

1. $\alpha \cdot a \in \boldsymbol{V}$ $za$ $\forall \alpha \in K$ $i$ $\forall a \in \boldsymbol{V}$ ,
2. $(\alpha + \beta)\, a = \alpha\, a + \beta\, a$ $za$ $\forall \alpha, \beta \in K$ $i$ $\forall a \in \boldsymbol{V}$ ,

   $\alpha(a + b) = \alpha\, a + \alpha\, b$ $za$ $\forall \alpha \in K$ $i$ $\forall a, b \in \boldsymbol{V}$ , (Sl. 1.3)




Sl. 1.3.

3. $\alpha(\beta\, a) = (\alpha\, \beta)\, a$ $za$ $\forall \alpha, \beta \in K$ $i$ $\forall a \in \boldsymbol{V}$ ,
4. $1 \cdot a = a$ $za$ $\forall a \in \boldsymbol{V}$ ,

što znači da skup običnih vektora čini vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

***Primjer* 1.2.** Neka je $K$ polje realnih brojeva, a $\boldsymbol{R}^n$ skup uređenih $n$-torki. Za $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \boldsymbol{R}^n$ kažemo da su jednaki ako i samo ako vrijedi

(1.2) $$\alpha_i = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) .$$

Sabiranje u $\boldsymbol{R}^n$ definišimo sa

(1.3) $$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) .$$

Proizvod $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),\ \alpha \in K$ definišimo sa

(1.4) $$\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \dots, \alpha\alpha_n) .$$

Ovako definisan skup $\boldsymbol{R}^n$ je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Da bi to dokazali moramo ispitati da li vrijede uslovi definicije 1.1. Mi ćemo ovom prilikom provjeriti samo uslove (1.1).

Neka je $\alpha,\beta\in K$ a $a=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n),\ b=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)\in V$. Tada je

1. $\alpha(a+b)=\alpha(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_n+\beta_n)=$

$$=(\alpha\alpha_1+\alpha\beta_1,\alpha\alpha_2+\alpha\beta_2,\dots,\alpha\alpha_n+\alpha\beta_n)=$$
$$=(\alpha\alpha_1,\dots,\alpha\alpha_n)+(\alpha\beta_1,\dots,\alpha\beta_n)=$$
$$=\alpha(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+\alpha(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=\alpha a+\alpha b.$$

2. $(\alpha+\beta)a=(\alpha+\beta)(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=((\alpha+\beta)\alpha_1,\dots,(\alpha+\beta)\alpha_n)=$

$$=(\alpha\alpha_1+\beta\alpha_1,\dots,\alpha\alpha_n+\beta\alpha_n)=$$
$$=(\alpha\alpha_1,\dots,\alpha\alpha_n)+(\beta\alpha_1,\dots,\beta\alpha_n)=$$
$$=\alpha(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+\beta(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=\alpha a+\beta a.$$

3. $(\alpha\beta)a=((\alpha\beta)\alpha_1,(\alpha\beta)\alpha_2,\dots,(\alpha\beta)\alpha_n)=$

$$=(\alpha(\beta\alpha_1),\dots,\alpha(\beta\alpha_n))=$$
$$=\alpha\,(\beta(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n))=\alpha\,(\beta a).$$

4. $1\cdot a=1\cdot(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=a.$

## 1.1. Linearna kombinacija vektora

**Definicija 1.2.** *Neka je* $\alpha_i\in K,\ a_i\in V$ *za* $i=1,2,\dots,n$. *Izraz oblika*

(1.5) $$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots+\alpha_na_n$$

*naziva se linearna kombinacija vektora* $a_1,a_2,\dots,a_n\in V$ *sa koeficijentima* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in K$.

**Definicija 1.3.** *Konačan skup vektora* $a_1,a_2,\dots,a_n\in V$ *različitih od nula- vektora je linearno zavisan ako i samo ako postoje* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in K$ *od kojih je bar jedan različit od nule takvi da je*

(1.6) $$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots+\alpha_na_n=0.$$

Ako iz

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_na_n=0$$

slijedi

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$$

tada za vektore $a_1,a_2,\dots,a_n$ kažemo da su linearno nezavisni.

***Primjer* 1.3.** Neka su dati vektori $a_1,a_2$ i $a_3$ i neka su operacije definisane kao u primjeru 1.2. pri čemu je

$$a_1=(1{,}0{,}0),\quad a_2=(0{,}2{,}1),\quad a_3=(1{,}0{,}1),$$

tada su vektori $a_1, a_2$ i $a_3$ linearno nezavisni. Dokazati.

***Rješenje.*** Iz

$$\alpha\, a_1 + \beta\, a_2 + \gamma\, a_3 = 0,$$

tj.

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,2,1) + \gamma(1,0,1) = 0$$

dobijamo

$$(\alpha + \gamma, 2\beta, \beta + \gamma) = 0.$$

Na osnovu definicije jednakosti vektora, u datom primjeru, dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0 \\ 2\beta &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0, \end{aligned}$$

čije je rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$. To znači da su vektori $a_1, a_2$ i $a_3$ linearno nezavisni.

***Primjer* 1.4.** Za vektore $a = (1,1,1),\ b = (1,1,0),\ c = (0,0,1)$, definisane kao u primjeru 1.3. je

$$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,0,1) = 0$$

ili

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sistema je $\beta = -\alpha,\ \gamma = -\alpha,\ \alpha$-proizvoljno, što znači da su vektori $a, b, c$ linearno zavisni.

## 1.2. Baza vektorskog prostora

Za vektor $a \in V$ kažemo da je izražen kao linearna kombinacija vektora $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ ako postoje $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ takvi da je

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k.$$

Za skup vektora $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ vektorskog prostora $V$ kažemo da generišu vektorski prostor $V$ ako se svako $a \in V$ može izraziti kao linearna kombinacija tih vektora. Skup vektora $a$ nazivamo generator vektorskog prostora.

***Primjer* 1.5.** Vektor $(9,6,5)$ izraziti kao lineralnu kombinaciju vektora $(2,4,0)$, $(2,1,1)$ i $(1,0,1)$.

***Rješenje.*** Treba odrediti, ako postoje, brojeve $x, y, z \in K$ za koje vrijedi jednakost:

$$(9,6,5) = x(2,4,0) + y(2,1,1) + z(1,0,1).$$

Na osnovu definicije množenja je

$$(9,6,5) = (2x, 4x, 0) + (2y, y, y) + (z, 0, z)$$

a na osnovu definicije sabiranja u $V$ je

$$(9,6,5) = (2x + 2y + z, 4x + y, y + z).$$

Na osnovu definicije jednakosti vektora slijedi:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 9 \\ 4x + y \phantom{+ z} &= 6 \\ y + z &= 5. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sistema je $x = 1, y = 2, z = 3$, pa je

$$(9,6,5) = 1(2,4,0) + 2(2,1,1) + 3(1,0,1).$$

**Definicija 1.4.** *Za podskup linearno nezavisnih vektora* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *koji generišu vektorski prostor* $\boldsymbol{V}$ *kažemo da čine bazu vektorskog prostora* $\boldsymbol{V}$ *i u tom slučaju kažemo da je prostor* $\boldsymbol{V}$ ***n****-dimenzionalni vektorski prostor*.

**Teorema 1.1.** *Ako vektori* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *čine bazu* $n$*-dimenzionalnog vektorskog prostora* $\boldsymbol{V}$, *tada se svaki vektor* $a \in \boldsymbol{V}$ *može jednoznačno prikazati kao linearna kombinacija vektora baze.*

***Dokaz.*** Pretpostavimo da se vektor $a$ može izraziti na dva načina kao linearna kombinacija vektora baze i neka je

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad \text{i} \quad a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' e_i.$$

Tada je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' e_i$$

odakle je

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_i') e_i = 0.$$

Kako su vektori $e_1, e_2, \dots, e_n$ linearno nezavisni to je

$$\alpha_i = \alpha_i' \text{ za } \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Ova teorema nam olakšava operacije u posmatranom vektorskom prostoru $\boldsymbol{V}$. Umjesto da se svaki vektor $a \in \boldsymbol{V}$ posmatra zasebno posma-traju se samo vektori baze, a od slučaja do slučaja mijenjaju se samo koefi-cijenti u linearnoj kombinaciji vektora baze.

**Teorema 1.2.** *Ako je skup vektora* $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \in V$ *linearno zavisan,* $a_i \neq 0$ *za svako* $i = 1,2,\dots,n$, *onda je vektor* $a_k$ *za neko* $k = 2,3,\dots,n$ *jednak linearnoj kombinaciji vektora* $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$.

***Dokaz.*** U teoremi je pretpostavljeno da među datim vektorima nije nula-vektor, jer je svaki skup vektora u kojem je i nula-vektor linearno zavisan. Kako je $a_1 \neq 0$ to iz $\alpha_1 a_1 = 0$ slijedi $\alpha_1 = 0$, to znači da je jed-nočlan skup vektora linearno nezavisan. Iz jednakosti $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$ slijedi: a) ona je moguća za neko $\alpha_2 \neq 0$ tada je i $\alpha_1 \neq 0$ pa je $a_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} a_1$, za $k = 2$ dokaz je završen; b) za $\alpha_2 = 0$ je i $\alpha_1 = 0$ a to znači da su vektori $a_1$ i $a_2$ linearno nezavisni (i tada se mora preći na ispitivanje linearne kombinacije $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$) a taj nas slučaj ne zanima.

Jednakost $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$ je moguća za neko $\alpha_3 \neq 0$, a tada je $a_1 \neq 0$ ili $\alpha_2 \neq 0$, pa je

$$a_3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} a_2$$

i teorema je dokazana za $k = 3$. Ako jednakost nije moguća tada je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Taj postupak se nastavlja i u jednom koraku posljednji koeficijent od

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

mora biti različit od nule, jer ukoliko se to nebi desilo sve do kraja onda bi vektori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bili linearno nezavisni, što se protivi pretpostavci teoreme.

**Teorema 1.3.** *Svaki konačan skup linearno nezavisnih vektora* $\{e_1, e_2, \dots, e_s\} \in V$ *ili je baza konačnog vektorskog prostora* $V$ *ili se može nadopuniti novim vektorima* $\{b_1, b_2, \dots, b_k\} \in V$ *sa kojim zajedno čini bazu.*

*Dokaz* ove teoreme nećemo izvoditi.

**Definicija 1.5.** *Za vektorske prostore* $X$ *i* $Y$ *nad istim poljem* $K$ *kažemo da su izomorfni ako postoji bijektivno preslikavanje* $f : X \to Y$ *sa osobinama*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

*za svako* $x, y \in X$ *i svako* $\alpha \in K$. *Preslikavanje* $f$ *nazivamo* ***izomorfizam vektorskih prostora.***

## 1.3. Euklidov*) vektorski prostor

**Definicija 1.6.** *Neka je* $V$ *vektorski prostor nad poljem realnih brojeva* $\boldsymbol{R}$. *Unutrašnji ili skalarni proizvod na* $\boldsymbol{V}$ *je preslikavanje koje svakom uređeom paru* $(x,y)\in\boldsymbol{V}$ *pridružuje realan broj* $\langle x,y\rangle$ *ili* $x\cdot y$ *takav da važi*:

1. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
2. $\langle x_1+x_2,y\rangle = \langle x_1,y\rangle + \langle x_2,y\rangle$
3. $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$
4. $\langle x,y\rangle \quad 0,\ \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$.

Konačnodimenzionalni vektorski prostor $V$ nad poljem realnih brojeva u kome je definisan skalarni proizvod obično se zove Euklidov vektorski prostor.

***Primjer* 1.6.** U primjeru 1.2. smo definisali skup uređenih $n$-torki $(\boldsymbol{R}^n)$ i u njemu smo operacije "+" i "$\cdot$" definisali na sljedeći način:

*) Euklid (3. vijek prije n.e), antièki matematièar.

$$\ldots, y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$

$$\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n).$$

Vidjeli smo da je $\boldsymbol{R}^n$ vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

Neka je u $\boldsymbol{R}^n$ "proizvod" definisan sa:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)(y_1,y_2,\ldots,y_n) = x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n. \tag{1.7}$$

Ovako definisan proizvod je skalarni, što ćemo dokazati.

1. $\langle x,y\rangle = (x_1,x_2,\ldots,x_n)(y_1,y_2,\ldots,y_n) = x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n =$
$= y_1x_1+y_2x_2+\cdots+y_nx_n = \langle y,x\rangle$.

2. $\langle x+y,z\rangle = (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)(z_1,z_2,\ldots,z_n) =$
$= (x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2+\cdots+(x_n+y_n)z_n =$
$= x_1z_1+y_1z_1+x_2z_2+y_2z_2+\cdots+x_nz_n+y_nz_n =$
$= (x_1z_1+x_2z_2+\cdots+x_nz_n)+(y_1z_1+y_2z_2+\cdots+y_nz_n) =$
$= \langle x,z\rangle + \langle z,y\rangle$.

3. $\langle \alpha x,y\rangle = (\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n)(y_1,y_2,\ldots,y_n) =$
$= \alpha x_1y_1+\alpha x_2y_2+\cdots+\alpha x_ny_n =$
$= \alpha(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n) = \alpha\langle x,y\rangle$.

4. $\langle x,x\rangle = (x_1,x_2,\ldots,x_n)\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \quad 0$.

Proizvod definisan sa (1.7) se naziva standardni skalarni proizvod. Vektorski prostor $\boldsymbol{R}^n$ sa definisanim standardnim skalarnim proizvodom mi ćemo označavati sa $\boldsymbol{R}^n$ .

Vektorski prostor $\boldsymbol{R}^n$ u kojem je skalarni proizvod dat u definiciji 1.6 zove se $n$ -dimenzionalni Euklidov prostor.

## 1.4. Normirani i metrički prostori

**Definicija 1.7.** *Neka je* $\boldsymbol{V}$ *vektorski prostor. Norma vektora* $x \in \boldsymbol{V}$ *naziva se svaka funkcija* $f : V \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \| x \| \in \boldsymbol{R}$ *koja ima osobine*:

1. $\| x \| \quad 0, \quad \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad (\forall x \in \boldsymbol{V})$
2. $\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \| \quad (\forall x \in \boldsymbol{V}, \forall \alpha \in \boldsymbol{R})$
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \quad (\forall x, y \in \boldsymbol{V})$ .

Dvojka $(\boldsymbol{V}, \| \ \|)$ zove se *normirani prostor*.

U Euklidovom vektorskom prostoru se norma vektora $x$ definiše sa

(1.8) $$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \, .$$

***Primjer* 1.7.** Neka je vektor $(2,1,5) \in \boldsymbol{R}^3$ . Tada je

$$\| \langle 2,1,5 \rangle \| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30} \, .$$

***Primjer* 1.8.** U $\boldsymbol{R}^3$ za vektor $x = (3,2,-1)$ je

$$\| \langle 3,2,-1 \rangle \| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \, .$$

Nije teško provjeriti da relacija (1.8) zadovoljava sve uslove definicije 1.7.

Uslov 1. definicije 1.7. neposredno slijedi iz uslova 4. definicije 1.6. Dalje je

$$\| \alpha x \| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = | \alpha | \sqrt{\langle x, x \rangle} = | \alpha | \| x \|$$

čime je dokazano da je ispunjen uslov 2 definicije 1.7.

Da bismo dokazali uslov 3 definicije 1.7 dokažimo prvo nejed-nakost (Shwarzova*) nejednakost)

(1.9) $$| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \cdot \| y \| \, .$$

Ako je bar jedan od vektora $x, y$ jednak nuli onda vrijedi jednakost. Zato pretpostavimo da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$ . Iz relacije

$$\langle a\,x - b\,y, a\,x - b\,y\rangle = a^2\langle x,x\rangle - 2ab\langle x,y\rangle + b^2\langle y,y\rangle =$$
$$= a^2\|\,x\,\|^2 - 2ab\langle x,y\rangle + b^2\|\,y\,\|^2 \quad 0\,,$$

ako zamijenimo $a = \|\,y\,\|,\quad b = \|\,x\,\|$ dobijamo

$$(\,\|x\|\cdot\|\,y\|\,)^2 - 2\|x\|\cdot\|\,y\|\langle x,y\rangle + (\,\|\,x\,\|\cdot\|\,y\,\|\,)^2 \quad 0$$

ili

$$2(\,\|x\|\cdot\|\,y\|\,)^2 - 2\|x\|\cdot\|\,y\|\,\langle x,y\rangle \quad 0$$

odnosno

$$\langle x,y\rangle \le \|\,x\,\|\cdot\|\,y\|$$

jer je $\|\,x\,\|\cdot\|\,y\| > 0$. Dalje je

$$-\langle x,y\rangle = \langle -x,y\rangle \le \|\,x\,\|\cdot\|\,y\|\,.$$

---

*) K. H. Shwarz (1845-1921), njemaèki matematièar.

$$|\,\langle x,y\rangle\,| \le \|\,x\,\|\cdot\|\,y\,\|\,.$$

Kako je

$$\|\,x + y\,\|^2 = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \|\,x\,\|^2 + 2\,\langle x,y\rangle + \|\,y\|^2 =$$
$$= (\,\|x\| + \|\,y\|\,)^2 + 2(\,\langle x,y\rangle - \|\,x\,\|\cdot\|\,y\|\,)\,,$$

to je na osnovu relacije (1.9)

$$\|\,x + y\,\|^2 \le (\,\|\,x\,\| + \|\,y\|\,)^2$$

tj.

$$\|\,x + y\,\| \le \|\,x\,\| + \|\,y\|\,.$$

**Definicija 1.8.** *Za dva vektora* $x, y$ *Euklidovog vektorskog prostora* ***V*** *kažemo da su uzajamno normalni* (*ortogonalni*) *ako je* $\langle x,y\rangle = 0$. *Za vektor x se kaže da je normiran ako je* $\|\,x\,\| = 1$.

**Teorema 1.4.** *Neka je* ***V*** *Euklidov vektorski prostor i neka su vektori* $x, y \in V$ *ortogonalni, tada je*

$$\|\,x + y\,\|^2 = \|\,x\,\|^2 + \|\,y\|^2\,.$$

***Dokaz.*** $\|\,x + y\,\|^2 = \|\,x\,\|^2 + 2\,\langle x,y\rangle + \|\,y\|^2 = \|\,x\,\|^2 + \|\,y\|^2$

jer je po pretpostavci teoreme $\langle x,y\rangle = 0$. Ovo je poznata Pitagorina*) teo-rema.

***Primjer*** **1.9.** Vektori $x = (1,2,3)$ i $y = (-3,0,1)$ su ortogonalni jer je

$$\langle x,y\rangle = 1\cdot(-3) + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 0\,,$$

a nisu ortonormirani jer je $\|\,x\,\| = \sqrt{14} \ne 1,\quad \|\,y\| = \sqrt{10} \ne 1\,.$

**Definicija 1.9.** *Za skup vektora* $A \subset V$ *se kaže da je* ***normiran*** *ako je svaki vektor iz A normiran. Za normiran i ortogonalizovan skup vektora A se kaže da je* ***ortonormiran***.

Neka je $V$ Euklidov vektorski prostor i neka ortonormirani vektori $a_1, a_2, \dots, a_n$ čine bazu prostora $V$. U tom slučaju vrijedi teorema.

**Teorema 1.5.** *Koordinate* $\alpha_i \ (i = 1,2,\dots,n)$ *vektora* $x$ *u ortonormiranoj bazi* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *jednaka je skalarnom proizvodu vektora* $x$ *i* $a_i$ .

***Dokaz.*** Svaki vektor $x \in V$ može se na jedinstven način prikazati u obliku

*) Pitagora (IV-III vijek prije n.e), antièki matematièar

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k .$$

Ako se jednakost pomnoži skalarno sa $a_i$ dobiće se

$$\langle x, a_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k a_i = \alpha_i$$

jer je $a_k a_i = 0$ za $k \neq i, \quad a_k a_i = 1$ za $k = 1$.

**Teorema 1.6.** *Svaka baza Euklidovog vektorskog prostora može se ortonormirati.*

*Dokaz* ove teoreme nećemo izvoditi, a umjesto toga pokazaćemo ka-ko se izvodi ortogonalizacija posmatranog skupa vektora koji čine bazu vek-torskog prostora $V$. Neka vektori $a_1, a_2, \dots, a_n$ čine bazu vektorskog pro-stora $V$ i neka na osnovu ove baze treba odrediti bazu koju čine međusobno ortogonalni vektori $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

Uzmimo ma koji vektor, npr. vektor $a_1$, za $b_1$ tj.

$$b_1 = a_1 .$$

Vektor $b_2$ ćemo izabrati u obliku

$$b_2 = a_2 - \alpha_{21} b_1 ,$$

gdje je $\alpha_{21}$ nepoznat koeficijent i odredićemo ga iz uslova da je $\langle b_2, b_1 \rangle = 0$ .

Iz

$$\langle b_2, b_1 \rangle = 0 = \langle a_2, b_1 \rangle - \alpha_{21} \langle b_1, b_1 \rangle$$

je

$$\alpha_{21} = \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} ,$$

pa je

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} \cdot b_1 .$$

Za treći vektor uzimamo

$$b_3 = a_3 - \alpha_{31} b_1 - \alpha_{32} b_2$$

gdje se $\alpha_{31}$ i $\alpha_{32}$ mogu odrediti iz uslova da vektor $b_3$ bude ortogonalan na vektore $b_1$ i $b_2$. Na osnovu toga je

$$\langle b_3,b_1\rangle = 0 = \langle a_3,b_1\rangle - \alpha_{31}\langle b_1,b_1\rangle$$
$$\langle b_3,b_2\rangle = 0 = \langle a_3,b_2\rangle - \alpha_{32}\langle b_2,b_2\rangle$$

odakle je

$$\alpha_{31} = \frac{\langle a_3,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}, \quad \alpha_{32} = \frac{\langle a_3,b_2\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle},$$

pa je

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle a_3,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}\cdot b_1 - \frac{\langle a_3,b_2\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle}\cdot b_2 = a_3 - \sum_{i=1}^{2}\frac{\langle a_3,b_i\rangle}{\langle b_i,b_i\rangle}\cdot b_i .$$

Ako se ovaj postupak nastavi dobija se

$$b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\langle a_k,b_i\rangle}{\langle b_i,b_i\rangle}\cdot b_i, \quad k = 2,3,\dots,n \quad i = 1,2,\dots,k-1 \tag{1.10}$$

Ako svaki vektor $b_k, \quad k = 1,2,\dots,n$ podijelimo sa njegovom nor-mom dobićemo ortonormiranu bazu.

***Primjer* 1.10.** U $\boldsymbol{R}^3$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom ortonormirati bazu $a_1 = (1,0,1), \quad a_2 = (1,3,1), \quad a_3 = (3,2,1)$.

***Rješenje.*** Nije teško pokazati da su vektori $a_1, a_2$ i $a_3$ linearno nezavisni, što znači da oni čine bazu prostora. Neka je

$$b_1 = a_1 = (1,0,1).$$

Na osnovu relacije (1.4) je

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}b_1 = (1,3,1) - \frac{\langle 1,3,1\rangle\langle 1,0,1\rangle}{\langle 1,0,1\rangle\langle 1,0,1\rangle}(1,0,1) =$$
$$= (1,3,1) - \frac{1+1}{1+1}\cdot(1,0,1) = (0,3,0),$$

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle a_3,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}\cdot b_1 - \frac{\langle a_3,b_2\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle}\cdot b_2 = (3,2,1) - \frac{4}{2}(1,0,1) - \frac{6}{9}(0,3,0) =$$
$$= (3,2,1) - (2,0,2) - (0,2,0) = (1,0,-1).$$

Ortonormirana baza je

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{3}(0,3,0) = (0,1,0),$$

$$e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

**Definicija 1.10.** *Neka je* $X$ *neprazan skup. Preslikavanje* $d\colon X\times X\to \boldsymbol{R}$ *za koje vrijedi*:

1. $d(x,y)\quad 0$ , $(\forall x,y\in X)$
2. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ , $(\forall x,y\in X)$
3. $d(x,y)=d(y,x)$ , $(\forall x,y\in X)$
4. $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ , $(\forall x,y,z\in X)$

*zove se* ***metrika*** *na* $X$. *Uređeni par* $(X,d)$ *zove se metrički prostor*, *a broj* $d(x,y)$ *rastojanje tačaka* $x,y\in X$ .

Pokazuje se da rastojanje tačaka $x$ i $y$ predstavlja jednu metriku u normi-ranom vektorskom prostoru $X$.

***Primjer* 1.11.** Par $(\boldsymbol{R}^n,d)$ je metrički prostor i pri tome je

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y)(x-y)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

gdje je $x=(x_1,x_2,\dots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n$ .

## 1.5. Zadaci za vježbu

**1.** Neka je $\boldsymbol{R}_+$ skup pozitivnih realnih brojeva u kojem je operacija " $\cdot$ " de-finisana kao obično množenje realnih brojeva a množenje broja $a$ sa realnim brojem $\alpha$ iz $\boldsymbol{R}$ kao $a^{\alpha}$. Dokazati da je $\boldsymbol{R}_+$ vektorski prostor nad poljem $\boldsymbol{R}$.

**2.** Dati su vektori $a_1=(0,1,1)$, $a_2=(1,0,1)$, $a_3=(2,1,1)\in\boldsymbol{R}^3$. Izraziti vektor $(2,1,2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $a_1,a_2$ i $a_3$.

**3.** Ispitati linearnu zavisnost vektora

$$a=(4,-5,2,6),\ b=(2,-2,1,3),\ c=(6,-3,3,9),\ d=(4,-1,5,6)\in\boldsymbol{R}^4 .$$

**4.** Za koje vrijednosti $a$ vektori $(a,1-a,a)$, $(2a,2a-1,a+2)$, $(-2a,a,a)$ čine bazu vektorkog prostora $\boldsymbol{R}^3$.

**5.** Dokazati da vektori $e_1=(1,1,0)$, $e_2=(1,0,1)$, $e_3=(1,-1,1)$ čine bazu vek-torskog prostora $\boldsymbol{R}^3$. Naći koordinate vektora $x=(6,2,-7)$ u odnosu na tu bazu.

**6.** U $\boldsymbol{R}^3$ sa standardnim skalarnim proizvodom odrediti skalarni proizvod vektora $a=(1,2,3)$, $b=(-1,3,2)$. Naći njihove norme i normirati ih.

**7.** Dati su vektori $a=(1,1,21,2)$, $b=(1,2,3,-3)$ u vektorskom prostoru $\boldsymbol{R}^4$ sa standardnim skalarnim proizvodom. Pokazati da su oni ortogonalni i dopuniti ih do ortogonalne baze.

**8.** U $\boldsymbol{R}^3$ sa standardnim skalarnim proizvodom ortonormirati bazu

$$a_1=(1,0,1),\ b=(1,3,1),\ c=(3,2,1).$$

**9.** U $\boldsymbol{R}^2$ za $x=(x_1,x_2)$ i $y=(y_1,y_2)$ definisano je preslikavanje

$$(x,y)=5x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+2x_2y_2.$$

Dokazati da je ovim preslikavanjem definisan skalarni proizvod na $\boldsymbol{R}^2$.

# 2. Linearna transformacija. Matrica

## 2.1. Linearna transformacija

**Definicija 2.1.** *Neka su $X$ i $Y$ vektorski prostori nad istim poljem skalara $K$. Svako preslikavanje $A: X\to Y$ koje zadovoljava uslove*

1. $A(x_1+x_2)=A(x_1)+A(x_2)$,
2. $A(\alpha x_1)=\alpha A(x_1)$,

*za sve vrijednosti $x_1,x_2\in X$ i sve $\alpha\in K$ nazivamo linearnom transfor-macijom vektorskog prostora $X$ u vektorski prostor $Y$.*

Umjesto $A(x),\ x\in X$ često se piše i $Ax,\ x\in X$ pa se uslovi 1. i 2. definicije 2.1. mogu pisati

$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2,\quad x_1,x_2\in X,$$

$$A(\alpha x_1)=\alpha Ax_1,\quad x_1\in X,\ \alpha\in K.$$

***Primjer* 2.1.** Ako je $(a,b,c)\in\boldsymbol{R}^3$ onda transformacija data sa

$$A((a,b,c))=(a+b,a-b,a+2b-c)$$

je linearna transformacija jer je za svako $(x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2)\in\boldsymbol{R}^3$ i svako $\alpha\in K$

$$A((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2))=A(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)=$$

$$=(x_1+x_2+y_1+y_2,x_1+x_2-y_1-y_2,x_1+x_2+2y_1+2y_2-z_1-z_2)=$$

$$=(x_1+y_1,x_1-y_1,x_1+2y_1-z_1)+(x_2+y_2,x_2-y_2,x_2+2y_2-z_2)=$$
$$=A(x_1,y_1,z_1)+A(x_2,y_2,z_2),$$

dalje je

$$A(\alpha(x_1,y_1,z_1))=A(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)=$$
$$=(\alpha x_1+\alpha y_1,\ \alpha x_1-\alpha y_1,\alpha x_1+2\alpha y_1-\alpha z_1)=$$
$$=\alpha(x_1+y_1,x_1-y_1,x_1+2y_1-z_1)=\alpha A(x_1,y_1,z_1).$$

# 2.2. Matrica

## 2.2.1. Definicija matrice

Neka su $e=(e_1,e_2,\dots,e_n)$, $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)$ baze vektorskih prostora $X$ i $Y$, respektivno. Tada se $x\in X$ može izraziti kao

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n,$$

gdje su $x_1,x_2,\dots,x_n$ koordinate vektora $x$ u odnosu na bazu $e=(e_1,e_2,\dots,e_n)$. Neka je $A$ linearna transformacija prostora $X$ u prostor $Y$, a $y=Ax$, tada je

(2.1)
$$y=Ax=A(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)=$$
$$=x_1Ae_1+x_2Ae_2+\ldots+x_nAe_n=\sum_{j=1}^{n}x_j\,Ae_j.$$

Prema tome linearna transformacija vektora $x\in X$ biće poznata ako su poznate linearne transformacije vektora baze prostora $X$. Vektori $Ae_k\in Y,\quad k=1,2,\dots,n$ se mogu izraziti kao linearna kombinacija vektora baze prostora $Y$, dakle

(2.2)
$$Ae_k=a_{1k}f_1+a_{2k}f_2+\cdots+a_{mk}f_m=\sum_{i=1}^{m}a_{ik}f_i.$$

Na osnovu relacija (2.1) i (2.2) slijedi

$$y=Ax=x_1\sum_{i=1}^{m}a_{i1}f_i+x_2\sum_{i=1}^{m}a_{i2}f_i+\cdots+x_n\sum_{i=1}^{m}a_{in}f_i=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{i=1}^{m}a_{ik}f_i=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right)f_i,$$

što znači da su koordinate $y\in Y$

(2.3)
$$y_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\quad(i=1,2,\dots,m).$$

Iz relacije (2.3) slijedi da linearnoj transformaciji $A$ vektorskog prostora $X$ u vektorski prostor $Y$ odgovara jedinstvena pravougaona uređena tabela određena bazama $e$ i $f$ vektorskih prostora $X$ i $Y$, oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Tabela (2.4) zove se matrica reda $m \times n$ linearne transformacije $A$ i ozna-čava se sa $A = \left(a_{ik}\right)_{m \times n}$, mada treba razlikovati linearnu transformaciju od njene matrice. Brojevi $a_{ik}$ $\left(i = 1,2,\ldots,m;\ k = 1,2,\ldots,n\right)$ zovu se elementi matrice $A = \left(a_{ik}\right)$. Brojevi $a_{ik}$ $\left(i = 1,2,\ldots,m\right)$ čine $i$-tu vrstu, a brojevi $a_{ik}$ $\left(k = 1,2,\ldots,n\right)$ $k$-tu kolonu matrice $A = \left(a_{ik}\right)$. Matricu sa jednom vrstom nazivamo matrica vrsta, a matricu sa jednom kolonom nazivamo matrica kolona.

Treba uočiti, vidjeti relacije (2.2) i (2.4), da su elementi u $k$-toj koloni matrice $A = \left(a_{ik}\right)$ koordinate transformanta $k$-tog vektora baze linearnom transformacijom $A$.

Ako u matrici $A = \left(a_{ik}\right)_{m \times n}$ vrste zamijenimo odgovarajućim kolonama dobiće se matrica reda $n \times m$ i za nju kažemo da je transponovana matrica matrice $A$, i označavat ćemo je sa $A^T$, tj.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}.$$

***Primjer* 2.2.** Neka su vektori: $e_1 = \left(1,0,1\right)$, $e_2 = \left(1,1,0\right)$ i $e_3 = \left(0,0,1\right)$ vektori baze Euklidovog vektorskog prostora $X$, i neka su $f_1 = \left(2,1\right)$ i $f_2 = \left(0,2\right)$ baza prostora $Y$. Neka je linearna transformacija prostora $X$ u prostor $Y$ data sa

$$A\left(x_1,x_2,x_3\right) = \left(x_1 + x_3, x_2 - x_3\right). \tag{a}$$

Odrediti matricu transformacije $A$.

***Rješenje.*** Prema definiciji linearne transformacije $A: X \to Y$ je

$$A e_1 = (2,-1);\; A e_2 = (1,1);\; A e_3 = (1,-1).$$

Na osnovu relacije (2.2) slijede sistemi jednačina

$$A e_1 = (2,-1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 = a_{11}(2,1) + a_{21}(0,2)$$
$$A e_2 = (1,1) = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 = a_{12}(2,1) + a_{22}(0,2)$$
$$A e_3 = (1,-1) = a_{13} f_1 + a_{23} f_2 = a_{13}(2,1) + a_{23}(0,2),$$

ili sistem jednačina

$$2a_{11} = 2;\quad a_{11} + 2a_{21} = -1$$
$$2a_{12} = 1;\quad a_{12} + 2a_{22} = 1$$
$$2a_{13} = 1;\quad a_{13} + 2a_{23} = -1.$$

Rješenja prethodnih sistema su

$$a_{11} = 1,\quad a_{12} = \frac{1}{2},\quad a_{13} = \frac{1}{2},$$
$$a_{21} = -1,\quad a_{22} = \frac{1}{4},\quad a_{23} = -\frac{3}{4}.$$

Matrica (2.4) za datu linearnu transformaciju $A$ glasi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \end{bmatrix}.$$

Na osnovu dobijenih rezultata i relacije (2.3) vektor

$$x = 2(1,0,1) + 3(1,1,0) + 4(0,0,1) \in X$$

se transformiše u vektor $y \in Y$, koji po bazi $(2,1)$ i $(0,2)$ ima koordinate:

$$y_1 = 2\cdot 1 + \frac{3}{2}\cdot 1 + \frac{4}{2}\cdot 1 = \frac{11}{2},$$
$$y_2 = 2\cdot(-1) + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{17}{4},$$

tj.

$$y = A x = \frac{11}{2}(2,1) - \frac{17}{4}(0,2).$$

## 2.2.2. Operacije sa matricama

Neka su $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ i $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ baze vektorskih prostora $X$ i $Y$, respektivno. Neka su $A$ i $B$ linearne transformacije $X$ u $Y$. Ako je $A x = B x$ za svako $x \in X$, tada je

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, x_k \qquad (i = 1,2,\dots,m)$$

ili

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}-b_{ik}\right)x_k=0 \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

odakle je

(2.5) $$a_{ik}=b_{ik} \quad \left(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n\right).$$

Znači jednake transformacije u odnosu na iste baze imaju jednake matrice.

Neka su $e=\left(e_1,e_2,\ldots,e_n\right)$ i $f=\left(f_1,f_2,\ldots,f_m\right)$ baze vektorskih prostora $X$ i $Y$, respektivno, i neka su $A$ i $B$ linearne transformacije sa $X$ na $Y$. Tada zbirom linearnih transformacija $A$ i $B$ zovemo linearnu transformaciju $C=A+B$, a proizvodom linearne transformacije $A$ i broja $a\in\boldsymbol{R}$ zovemo linearnu transformaciju $H=a\cdot A$, gdje su $C$ i $H$ defi-nisane sa

$$Cx=\left(A+B\right)x,\ Hx=\left(a\,A\right)x \quad \left(x\in X\right).$$

Kako je $Cx=Ax+Bx$ to na osnovu (2.3) je

(2.6) $$y_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,x_k+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}\,x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}+b_{ik}\right)x_k\,,\quad \left(i=1,2,\ldots,m\right).$$

Znači da matrici $C=A+B$ odgovara matrica

(2.7) $$\left(c_{ik}\right)=\left(a_{ik}+b_{ik}\right)$$

i zove se suma matrica $\left(a_{ik}\right)$ i $\left(b_{ik}\right)$. Dakle, matrice istog reda sabiraju se tako da im se saberu odgovarajući elementi.

***Primjer* 2.3.** Neka je

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 5 & 6\\ 1 & 0 & 4 & 3\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6 & 7\\ 8 & 9 & 3 & 1\end{bmatrix},$$

tada je

$$A+B=\begin{bmatrix}2+0 & -3+1 & 5+2 & 6+3\\ 1+4 & 0+5 & 4+6 & 3+7\\ 3+8 & 1+9 & 2+3 & 1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 7 & 9\\ 5 & 5 & 10 & 10\\ 11 & 10 & 5 & 2\end{bmatrix}.$$

Kako je $Hx=\left(a\,A\right)x=a\cdot Ax$, to je

$$y_i=a\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(a\,a_{ik}\right)x_k\,,\quad i=1,2,\ldots,m$$

odakle je

(2.8) $$\left(h_{ik}\right)=\left(a\cdot a_{ik}\right) \quad \left(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n\right).$$

Matrica $\left(h_{ik}\right)$ se zove proizvod matrice $\left(a_{ik}\right)$ i broja $a$. Dakle, matrica se množi brojem tako da se svaki element matrice pomnoži tim brojem.

***Primjer* 2.4.** Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } a = 2,$$

tada je

$$a \cdot A = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 3\cdot 2 & 4\cdot 2 \\ -1\cdot 2 & 2\cdot 2 & 5\cdot 2 \\ 1\cdot 2 & 3\cdot 2 & 4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & 10 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Neka su $\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right), \left(f_1, f_2, \ldots, f_p\right), \left(g_1, g_2, \ldots, g_m\right)$ baze vek-torskih prostora $X, Y, Z$ respektivno. Neka je $B$ linearna transformacija $X$ u $Y$, a $A$ linearna transformacija $Y$ u $Z$. Neka linearnoj transformaciji $B$ odgovara matrica $\left(b_{kj}\right)_{p\times n}$, a linearnoj transformaciji $A$ matrica $\left(a_{ik}\right)_{m\times p}$. Linearnoj transformaciji $Cx = A(Bx),\quad x \in X$, neka odgovara matrica $C$. Tada je

$$B e_j = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} f_k \quad (j = 1,2,\ldots,n),$$

$$A f_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\, g_i \quad (k = 1,2,\ldots,p).$$

Kako je $C$ linearna transformacija $X$ u $Z$ to postoje $c_{ij} \in \boldsymbol{R}$ $(i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$ takvih da je

$$C e_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\, g_i \quad (j = 1,2,\ldots,n).$$

Budući da je

$$C e_j = A\left(B e_j\right) = A\left(\sum_{k=1}^{p} b_{kj} f_k\right) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} A f_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} b_{kj} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\, g_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}\right) g_i \quad (j = 1,2,\ldots,n),$$

dalje je

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\, g_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}\right) g_i$$

ili

$$\sum_{i=1}^{m}\left(c_{ij}-\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\,b_{kj}\right)g_i=0 .$$

Kako su vektori $g_1, g_2, \dots, g_m$ linearno nezavisni to je

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\,b_{kj}\,,\quad i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n \tag{2.9}$$

Znači linearnoj transformaciji $C$ odgovara matrica $C=\left(c_{ij}\right)$ reda $m\times n$ i naziva se proizvod matrica $A$ i $B$. Treba zapaziti da proizvod $AB$ postoji samo ako je broj kolona matrice $A$ jednak broju vrsta matrice $B$. Dalje treba zapaziti da je element $c_{ij}$ matrice $C$ jednak skalarnom pro-izvodu vektora $i$-te vrste matrice $A$ i $j$-kolone matrice $B$.

***Primjer* 2.5.** Neka je

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\ \text{ i }\ B=\begin{bmatrix}-1&5\\-3&6\\4&0\end{bmatrix}$$

tada je

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1(-1)+2(-3)+3\cdot4 & 1\cdot5+2\cdot6+3\cdot0\\4(-1)+5(-3)+6\cdot4 & 4\cdot5+5\cdot6+6\cdot0\\7(-1)+8(-3)+9\cdot4 & 7\cdot5+8\cdot6+9\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&17\\5&50\\5&83\end{bmatrix}.$$

### 2.2.3. Kvadratna matrica i njena determinanta

Matrica kod koje je broj vrsta jednak broju kolona i jednak $n$ naziva se kvadratna matrica reda $n$, tj. kvadratna matrica reda $n$ je matrica oblika

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots&\cdots\cdots\\a_{n1}&a_{n2}\cdots a_{nn}\end{bmatrix}.$$

Elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ obrazuju glavnu dijagonalu, a elementi $a_{n1}, a_{n-1\,2}, \dots, a_{1n}$ sporednu dijagonalu matrice.

Kvadratna matrica kod koje su svi elementi van glavne dijagonale jednaki nuli naziva se dijagonalna matrica, dakle dijagonalna matrica ima oblik

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & d_2 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 \ldots d \end{bmatrix}.$$

Dijagonalnu matricu kod koje je $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = d$ nazivamo skalarna matrica, dakle skalarna matrica ima oblik

$$\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & d & 0 \cdots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots d \end{bmatrix}.$$

Skalarna matrica kod koje je $d = 1$ naziva se jedinična matrica, dakle jedi-nična matrica je matrica

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix}.$$

Svakoj kvadratnoj matrici

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

pridružujemo jedan broj, takozvanu determinantu matrice, koga označa-vamo sa $\det A$ ili

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Prije nego definišemo determinantu kvadratne matrice $A$ razmotrimo neke pojmove koji se pojavljuju u definiciji.

Neka je zadan skup od $n$ različitih elemenata. Kompleksije svih elemenata toga skupa, ako se one razlikuju jedna od druge po različitom položaju elemenata, čine permutacije bez ponavljanja.

U nekoj permutaciji dva elementa čine inverziju ili transpoziciju ako nisu u svom prirodnom poredku. Ako je broj transpozicija paran za permutaciju se kaže da je parna, a ako je neparan i za permutaciju se kaže da je neparna.

**Definicija 2.2.** *Neka je* $A$ *kvadratna matrica*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Tada broj*

$$\det A = \sum_{\pi} (-1)^{I(k_1,k_2,\dots,k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} \tag{2.10}$$

*gdje se sumiranje vrši po svim permutacijama* $\pi = k_1 k_2 \dots k_n$ , $I = (k_1 k_2 \dots k_n)$ *broj inverzija*, *nazivamo determinanta matrice* $A$.

Brojevi $a_{ik}$ su elementi determinante. Vrste, kolone, glavna i spo-redna dijagonala se definišu kao i kod matrice.

***Primjer* 2.6.** Ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

tada je

$$\det A = \sum_{\pi} (-1)^{I(k_1 k_2)} a_{1k_1} a_{2k_2}.$$

Pored osnovne permutacije 1 2 postoji i permutacija 2 1. Permutacija 2 1 je neparna pa je

$$\det A = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Dakle

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

***Primjer* 2.7.** Ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

tada je

$$\det A = \sum_{\pi} (-1)^{I(k_1 k_2 k_3)} a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3}.$$

Permutacije elemenata 1,2,3 sa brojem inverzija su

$$1\,2\,3 \to 0$$
$$1\,3\,2 \to 1$$
$$2\,1\,3 \to 1$$
$$2\,3\,1 \to 2$$

$$3\,1\,2 \to 2$$
$$3\,2\,1 \to 3 .$$

Na osnovu definicije determinante je

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Determinanta trećeg reda (i samo trećeg reda) se izračunava po tzv. Sarussovom*) pravilu, koje se sastoji u sljedećem.

Uz tablicu determinante trećeg reda sa desne strane dopišemo prvu pa drugu kolonu date determinante. Pomnožimo elemente na glavnoj dijagonali, zatim elemente na jednoj pa na drugoj dijagonali "paralelnoj" sa glavnom. Isto se radi i sa elementima sporednih dijagonala. Dobijeni proiz-vodi se saberu uzimajući znak "+" za proizvode elemenata glavnih dijagonala a znak "−" za proizvod elemenata sporednih dijagonala.

Pravilo se može prikazati sljedećom shemom

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & - \quad - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & & + \quad + & + \end{array} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - \\ - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} . \end{array}$$

Ako se ovaj rezultat uporedi sa rezultatom primjera 3.2. zapaža se da su oni jednaki.

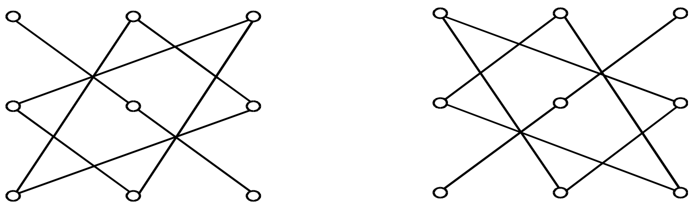
*) Saruss, francuski matematièar.

***Primjer* 2.8 .**

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & - \quad - & - \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 8 & -1 & 3 \\ & & & + \quad + & + \end{array} =$$

$$= 2\cdot 5\cdot 8 + 3\cdot 6(-1) + 4\cdot 1\cdot 3 - (-1)5\cdot 4 - 3\cdot 6\cdot 2 - 8\cdot 1\cdot 3 = 34 .$$

Drugo pravilo za izračunavanje determinanti trećeg reda je dato sljedećom shemom



Naprave se proizvodi od tri elementa, kako je prikazano na shemi. Nađe se zbir proizvoda elemenata sa prve sheme i proizvoda elemenata sa druge she-me uz prethodnu promjenu predznaka.

***Primjer* 2.9.**

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 8 & -1 & 3 \end{array} =$$

$$= 2\cdot 5\cdot 8 + 3\cdot 6(-1) + 4\cdot 1\cdot 3 - (-1)5\cdot 4 - 3\cdot 6\cdot 2 - 8\cdot 1\cdot 3 = 34 \ .$$

Važnije osobine determinanata su date teoremama 3.1. do 3.7.

**Teorema 2.1.** *Ako je* $A^T$ *transponovana matrica kvadratne matrice* $A$ *tada je*

$$\det A^T = \det A \ .$$

**Teorema 2.2.** *Determinanta mijenja znak ako dvije vrste* (*kolone*) *među-sobno zamijene mjesta.*

**Teorema 2.3.** *Determinanta se množi brojem tako da se tim brojem po-množe svi elementi jedne vrste* (*kolone*).

***Dokaz.*** Prema definiciji determinanti zapaža se da u svaki sabirak ulazi samo po jedan element $i$-te vrste. Kako je

$$a\cdot \det(A) = a\sum_{\pi}(-1)^I a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n} =$$

$$= \sum_{\pi}(-1)^I a_{1k_1}\cdots \left(a\, a_{ik_i}\right)\cdots a_{nk_n}$$

to će se u svakom sabirku pojaviti po jedan element $i$-te vrste pomnožen sa $a$.

**Teorema 2.4.** *Ako se determinante matrica* $A = \left(a_{ij}\right)$ *i* $B = \left(b_{ij}\right)$ *razli-kuju samo u* $i$-*toj vrsti tada je* $\det A + \det B$ *jednaka determinanti u kojoj je* $i$-*ta vrsta jednaka zbiru odgovarajućih elemenata* $i$-*te vrste determi-nante* $A$ *i determinante* $B$, *dok su ostale vrste nepromijenjene. Isto vrijedi i za kolone*.

***Dokaz.*** Neka je

$$\det A = \sum_{\pi}(-1)^{I(k_1,k_2,\dots,k_n)} a_{1k_1}\cdots a_{i-1\,k_{i-1}}a_{ik_i}\cdots a_{nk_n}$$

$$\det B = \sum_{\pi}(-1)^{I(k_1,k_2,\dots,k_n)} b_{1k_1}\cdots b_{i-1\,k_{i-1}}b_{ik_i}\cdots b_{nk_n}$$

tada je

$$\det A + \det B = \sum_{\pi}(-1)^I a_{1k_1}\dots(a_{ik_i} + b_{ik_i})\dots a_{nk_n} \ .$$

***Primjer*** **2.10.**

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 8 \end{vmatrix} .$$

**Teorema 2.5.** *Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi jedne vrste* (*kolone*) *jednaki nuli.*

***Dokaz.*** Neka su elementi $i$-te vrste jednaki nuli. Kako se u svakom sabirku

$$\sum_{\pi}(-1)^I a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

nalazi po jedan faktor $i$-te vrste to će svi oni biti jednaki nuli.

**Teorema 2.6.** *Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi jedne vrste* (*kolone*) *jednaki odgovarajućim elementima druge vrste* (*kolone*).

***Dokaz.*** Neka su elementi $i$-te vrste jednaki odgovarajućim elemen-tima $k$-te vrste. Ako u determinanti zamijenimo mjesta $i$-toj i $k$-toj vrsti dobićemo

$$\det A = -\det A,$$

odakle dobijamo $\det A = 0$ (Vidjeti teoremu 2.2.).

**Teorema 2.7.** *Determinanta ne mijenja vrijednost ako elementima jedne vrste* (*kolone*) *dodamo odgovarajuće elemente druge vrste* (*kolone*) *pomno-žene istim brojem.*

*Dokaz* slijedi neposredno na osnovu teorema 2.4, 2.3 i 2.6.

## 2.2.4. Minori i kofaktori determinante

Ako u determinanti matrice $A = (a_{ik})$ reda $n$ izostavimo $i$-tu vrstu i $k$-tu kolonu dobićemo determinantu $(n-1)$-og reda $(M_{ik})$, koju nazi-vamo minor $\det A$. Minoru $M_{ik}$ odgovara jedan element $a_{ik}$ koji se nalazi na presjeku $i$-te vrste i $k$-te kolone, pa govorimo o minoru $M_{ik}$ ele-menata $a_{ik}$ $(i,k = 1,2,\dots,n)$.

Ako je $M_{ik}$ minor $(n-1)$-reda $\det A$ reda $n$, tada

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \tag{2.11}$$

nazivamo kofaktor ili algebarski komplement elementa $a_{ik}$ determinante $A$.

Vratimo se definiciji determinante kvadratne matrice $A = (a_{ik})$ re-da $n$, (definicija 2.2.).

Svaki član $(-1)^I a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$ sadrži po jedan faktor iz $i$-te vrste determinante $A$. Grupišimo sve sabirke koji sadrže elemenat $a_{i1}$ i iz-vucimo ga kao zajednički faktor. Izraz u zagradi ima oblik

$$a_{i1} \sum_{\pi} (-1)^s a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{i-1\,k_{i-1}} a_{i+1\,k_{i+1}} \cdots a_{nk_n} \tag{2.12}$$

gdje je $s$ borj inverzija $k_2\, k_3 \dots k_n$. Može se zapaziti da je (2.12) kofaktor elementa $a_{i1}$ tj. $A_{i1}$. Dalje, ako grupišemo sve sabirke koji sadrže faktor $a_{i2}$ i izvučemo taj zajednički faktor, dobićemo

$$a_{i2} \sum_{\pi} (-1)^s a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{i-1\,k_{i-1}} a_{i+1\,k_{i+1}} \cdots a_{nk_n}$$

gdje je **s** broj inverzija $k_1 k_3 \ldots k_n$. Prethodna suma je kofaktor elementa $a_{i2}$, tj. $A_{i2}$. Ako postupak dalje nastavimo za $k = 3,4,\ldots,n$ dobićemo da je

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad (2.13)$$

Jednakost (2.13) definiše razvijanje determinante po *i*-toj vrsti $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Kako je $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ to se jednakost (2.13) može izraziti u obliku

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1,2,\ldots,n \quad (2.14)$$

Na sličan način se može dobiti i jednakost

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}, \quad k = 1,2,\ldots,n \quad (2.15)$$

koja definiše razvijanje determinante po *k*-toj koloni, $k = 1,2,\ldots,n$.

***Primjer* 2.11.** Izračunati vrijednost determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) razvijanjem po drugoj vrsti; b) po četvrtoj koloni.

***Rješenje.*** a) Izračunavanje determinante je najjednostavnije po drugoj vrsti jer je $a_{21} = a_{22} = a_{23} = 0$. Pri tome je

$$\det A = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{2+k} a_{2k} A_{2k} = (-1)^{2+4} a_{24} A_{24} =$$

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5(46-11) = 175.$$

b)

$$\det A = 3 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 175.$$

## 2.2.4. Adjungovana matrica. Inverzna matrica

Neka je data kvadratna matrica $A = (a_{ik})$ reda *n*. Transponovanjem matrice $A$ dobićemo matricu

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ako elemente matrice $A^T$ zamijenimo odgovarajućim kofaktorima dobi-ćemo matricu

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Za matricu $B$ kažemo da je adjungovana matrica matrice $A$ i označavamo je sa $adjA$, što se čita "adjungovano $A$ ".

***Primjer* 2.12.** Naći $adjA$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

***Rješenje.*** Iz date matrice slijedi da je

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a odgovarajući kofaktori su:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Iz definicije $adjA$ slijedi da je

$$adjA = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 4 \\ -7 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -5 \end{bmatrix}.$$

Za kvadratnu matricu $A$ kažemo da je regularna ako je $\det A \neq 0$.

**Definicija 2.3.** *Neka su X i A kvadratne matrice reda n. Za matricu X kažemo da je* ***inverzna matrica*** *matrice A ako je*

$$A \cdot X = X \cdot A = E_{n \times n}.$$

*Inverznu matricu matrice* $A$ *ćemo označavati sa* $A^{-1}$.

**Teorema 2.8.** *Ako je* $A$ *regularna matrica reda* $n$ *tada je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA.$$

***Dokaz.*** Prema definiciji inverzne matrice treba dokazati da je

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot adjA = E.$$

Neka je $A = (a_{ik})$ matrica reda $n$. Tada je na osnovu relacije (2.15)

$$\begin{cases} \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, A_{ik}, \quad i = 1,2,\ldots,n \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, A_{jk} = 0, \quad i \neq j. \end{cases} \tag{2.16}$$

Iz relacije

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots A_{nn} \end{bmatrix},$$

a na osnovu (2.16) je

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \det A \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix},$$

čime je teorema dokazana.

***Primjer*** **2.13.** Naći inverznu matricu: a) po teoremi (2.8); b) po definiciji 2.3. matrice

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

***Rješenje.*** a) Kako je $\det A = 3$, a

$$adjA=\begin{bmatrix}3 & -6 & 5\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

to je

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot adjA=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & -6 & 5\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & \frac{5}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{4}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

b) Neka je

$$X=A^{-1}=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix}$$

inverzna matrica matrice $A$. Tada je po definiciji (2.3.)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Prema definiciji množenja i jednakosti matrica slijede sistemi jednačina:

$$\begin{aligned}x_{11}+2x_{21}+3x_{31}&=1\\ x_{21}+4x_{31}&=0\\ 3x_{31}&=0\\ x_{12}+2x_{22}+3x_{32}&=0\\ x_{22}+4x_{32}&=1\\ 3x_{32}&=0\\ x_{13}+2x_{23}+3x_{33}&=0\\ x_{23}+4x_{33}&=0\\ 3x_{33}&=1.\end{aligned}$$

Rješenja prethodnih sistema su:

$$x_{11}=1,\quad x_{21}=0,\quad x_{31}=0,$$
$$x_{12}=-2,\quad x_{22}=1,\quad x_{32}=0,$$
$$x_{13}=\frac{5}{3},\quad x_{23}=-\frac{4}{3},\quad x_{33}=\frac{1}{3}.$$

### 2.2.6. Elementarne transformacije matrica.

## Rang matrice

Elementarnim transformacijama matrica nazivamo:

1. promjenu mjesta dvije vrste (kolone),
2. množenje jedne vrste (kolone) brojem različitim od nule,
3. dodavanjem elemenata jedne vrste (kolone) pomnoženih nekim brojem različitim od nule odgovarajućim elementima druge vrste (kolone).

Elementarne matrice su matrice dobijene vršenjem jedne od elemen-tarnih transformacija na jediničnoj matrici, i označavamo ih sa:

1. $i$-ta i $j$-ta vrsta zamijene mjesta $E_{ij}$,
2. $i$-ta vrsta pomnožena sa $a$ $E_i(a)$,
3. $i$-ta vrsta pomnožena sa $a$, dodata $j$-toj vrsti $E_{ij}(a)$.

Elementarne matrice kod kojih su odgovarajuće promjene izvršene na kolo-nama su: $E'_{ij}, \quad E'_i(a), \quad E'_{ij}(a)$.

Za izvršenje elementarnih transformacija na vrstama matrice $A$ do-voljno je tu transformaciju izvesti na jediničnoj matrici $E$, a zatim matricu $A$ pomnožiti slijeva dobivenom elementarnom matricom. Uzastopnim mno-ženjem slijeva matrice $A$ elementarnim matricama može se postići da ona dobije gornji trougaoni oblik. Ako je potrebno matricu $A$ množiti slijeva matricama $E_1, E_2, \ldots, E_k$ da bi se ona svela na gornju trougaonu matricu, onda se može naći proizvod $E_1 E_2 \ldots E_k = P$ i matricu $A$ množiti slijeva matricom $P$.

***Primjer* 2.14.** Matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

možemo svesti na gornju trougaonu matricu sljedećim elementarnim transfor-macijama:

1. prvu vrstu pomnoženu sa -2 dodati drugoj vrsti,
2. prvu vrstu pomnoženu sa -3 dodati trećoj vrsti,
3. drugu vrstu dobivene matrice pomnoženu sa -4 dodati trećoj vrsti.

Dobijena trougaona matrica je

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Odgovarajuće elementarne matrice $E_{12}(-2), \quad E_{13}(-3), \quad E_{23}(-4)$ su:

$$E_{12}(-2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{13}(-3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix},$$

$$E_{23}(-4)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{bmatrix},$$

a odgovarajuća matrica $P$ je

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\5&-4&1\end{bmatrix},$$

pa je gornja trougaona matrica

$$P\cdot A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\5&-4&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&0\\3&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-6\\0&0&16\end{bmatrix}.$$

Elementarne transformacije na kolonama matrice $A$ ekvivalentne su množenju matrice $A$ sdesna odgovarajućim elementarnim matricama.

**Teorema 2.9.** *Elementarnim transformaijama ne mijenja se broj linearno nezavisnih vrsta (kolona) matrice.*

**Definicija 2.4.** *Maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta matrice $A$ zove se **rang matrice** $A$ i označava se sa $r(A)$.*

Matrica, koja nije nula matrica,

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\ \dots\ a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\ \dots\ a_{2n}\\ \dots\dots&\dots\dots\dots\\a_{n1}&a_{n2}\ \dots.\ a_{nn}\end{bmatrix}$$

primjenom elementarnih transformacija može se svesti na gornju trougaonu matricu, tj. matricu oblika

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\ldots b_{1p}\ldots b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23}\ldots b_{2p}\ldots b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33}\ldots b_{3p}\ldots b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\ldots b_{pp}\ldots b_{pn} \\ 0 & 0 & 0\ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\quad 0\quad 0 \end{bmatrix},$$

gdje je $b_{ii}\neq 0,\quad i=1,2,\ldots,p$. Prvih $p$ vrsta matrice $B$ su linearno nezavisne, što nije teško dokazati.

Iz linearne kombinacije

$$\alpha_1\left(b_{11},b_{12},b_{13},\ldots,b_{1p},\ldots,b_{1n}\right)+\alpha_2\left(0,b_{22},\ldots,b_{2p},\ldots,b_{2n}\right)+$$
$$+\cdots+\alpha_p\left(0,0,\ldots,b_{pp},\ldots.,b_{pn}\right)=0$$

ili

$$(\alpha_1 b_{11},\alpha_1 b_{12}+\alpha_2 b_{22},\alpha_1 b_{13}+\alpha_2 b_{23}+\alpha_3 b_{33},\ldots,$$
$$,\alpha_1 b_{1p}+\alpha_2 b_{2p}+\cdots+\alpha_p b_{pp},\ \alpha_1 b_{1n}+\alpha_2 b_{2n}+\cdots+\alpha_p b_{pn})=0$$

slijedi

$$\sum_{i=1}^{1}\alpha_i\, b_{i1}=0,\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\, b_{i2}=0,\ldots,\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\, b_{ip}=0,\ldots,\sum_{i=1}^{p}\alpha_i b_{in}=0.$$

Kako je $b_{ii}\neq 0\ (i=1,2,\ldots,p)$ to je $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p=0$, što znači da su prvih $p$ vrsta matrice $B$ linearno nezavisne. Odavde, na osnovu teoreme 2.9, slijedi da je $r(A)=r(B)=p$.

***Primjer* 2.15.** Odrediti rang matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 4 & 2 & 5\end{bmatrix}$.

***Rješenje.*** Kako je $a_{11}\neq 0$, elementima druge vrste možemo dodati odgovarajuće elemente prve vrste pomnožene sa 2, a elementima treće vrste elemente prve vrste. Na taj način ćemo dobiti matricu

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 6 & 5 & 9\\ 0 & 6 & 5 & 9\end{bmatrix}.$$

Dalje, ako elementima treće vrste dodamo odgovarajuće elemente druge vrste pomnožene sa -1 dobićemo matricu

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&6&5&9\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Matrica $B$ je gornja trougaona matrica i prve njene dvije vrste su linearno nezavisne, pa je $r(A)=r(B)=2$.

Elementarne transformacije na vrstama matrice mogu poslužiti kao praktičan postupak za određivanje inverzne matrice. Regularnoj matrici $A$ dopišemo jediničnu matricu, istog reda kao i matrica $A$, a zatim na dobijenoj matrici vršimo elementarne transformacije na vrstama sve dotle dok matrica $A$ ne pređe u jediničnu matricu. Matrica u koju je prevedena jedinična matrica je inverzna matrica matrice $A$.

***Primjer* 2.16.** Naći inverznu matricu matrice

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\3&-1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}.$$

***Rješenje.*** Prema opisanom postupku određivanja inverzne matrice je:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&0&0\\3&-1&0&0&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&2&0&-3&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{-3}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&\frac{-3}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1&\frac{3}{2}&\frac{-1}{2}&0\end{array}\right]\to$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&\frac{-3}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{-3}{2}&\frac{1}{2}&-1\end{array}\right],$$

pa je

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{-3}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{-3}{2}&\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix}.$$

### 2.3.6. Zadaci za vježbu

**1.** Neka je $(a,b,c)\in\boldsymbol{R}^3$. Ispitati da li je transformacija data sa:

a) $A(a,b,c)=(1,a+b,2c)$,

b) $A(a,b,c)=(a+2b,a+2b+c,a-b)$,

c) $A(a,b,c)=((a+b)^2,a-b,a+b+c)$,

linearna transformacija.

**2.** Linearna transformacija $A$ u odnosu na bazu $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ ima matricu

$$A=\begin{bmatrix}15 & -11 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -7 & 6\end{bmatrix}.$$

Naći njenu matricu u odnosu na bazu

$$f_1=2e_1+3e_2+e_3,$$
$$f_2=3e_1+4e_2+e_3,$$
$$f_3=e_1+2e_2+2e_3.$$

**3.** Linearna transformacija vektorskog prostora $\boldsymbol{R}^3$ određena je sa:

$$A(1,0,0)=(2,1,1),\ A(0,1,0)=(0,2,1),\ A(0,0,1)=(1,0,3).$$

Naći matricu te transformacije u odnosu na bazu $(0,1,1),\ (1,1,1),\ (1,1,0)$.

**4.** Za matrice

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 6 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 5 & 4 & 0\\ 0 & 8 & 1\end{bmatrix},$$

naći: $A+B,\ 2A,\ 3A-2B,\ A\cdot B,\ B\cdot A,\ A^2,\ A\cdot B^2$.

**5.** Izračunati $f(A)=A^2-3A+E$ ako je $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

**6.** Izračunati $a,b$ i $c$ tako da vrijedi jednakost

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ a & 3 & 5\\ b & c & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 3 & 5\\ 8 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

**7.** Neka je $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$. Naći po definiciji $\det A$.

**8.** Izračunati:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ \cos a & \sin a \end{vmatrix}$.

**9.** Izračunati:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

**10.** Ne rješavajući determinantu dokazati da je

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**11.** Izračunati vrijednost determinante:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

**12.** Za matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

naći $adjA$ i uvjeriti se da je

$$A \cdot adjA = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix}.$$

**13.** Naći $adjA$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

**14.** Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

naći $A^{-1}$. Zadatak uraditi i po definiciji inverzne matrice.

**15.** Izračunati: $A^{-1}$, $A^{-2}$, $A^{-3}$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**16.** Izračunati $f(A) = A^2 + A + E + A^{-1} + A^{-2}$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**17.** Matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

svesti na gornju trougaonu i dijagonalnu matricu.

**18.** Odrediti rang matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

# 3. Sistemi linearnih algebarskih jednačina

## 3.1. Definicija i osnovni pojmovi

Sistem od $m$ linearnih jednačina sa $n$ nepoznatih $x_1, x_2, \dots, x_n$ je

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m\,1} x_1 + a_{m\,2} x_2 + \cdots + a_{m\,n} x_n &= b_m \end{aligned},$$

ili oblika

(3.1) $$\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}\, x_k = b_i \quad (i = 1,2,\dots,m).$$

Brojevi $a_{ik}$ $(i=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,n)$ zovu se koeficijenti, a $b_i$ $(i=1,2,\dots,m)$ slobodni članovi sistema. Ako je $b_i=0$ $(i=1,2,\dots,m)$ za sistem se kaže da je homogen. Svaka uređena $n$-torka $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ real-nih brojeva koja zadovoljava sistem (3.1), tj. za koju važi:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_k = b_i\,,\quad i=1,2,\dots,m$$

je rješenje sistema.

**Definicija 3.1.** *Za sistem linearnih algebarskih jednačina* (3.1) *se kaže da je nesaglasan* (*nemoguć ili protivrječan*) *ako nema rješenja, u protivnom ćemo reći da je saglasan* (*moguć ili neprotivrječan*). *Ako sistem* (3.1) *ima samo jedno rješenje, onda kažemo da ima jednistveno rješenje*.

Na osnovu definicije množenja i jednakosti matrica sistem linearnih algebarskih jednačina (3.1) se može napisati u obliku

(3.2)
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\dots a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ili u obliku

(3.3)
$$A\cdot X = B\,,$$

gdje je

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\dots a_{mn} \end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

## 3.2. Rješavanje sistema od $n$ jednačina sa $n$ nepoznatih

Za $m=n$ sistem jednačina (3.2) ili (3.3) ima oblik

(3.4)
$$A\cdot X = B\,,$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

**Teorema 3.1.** *Ako je matrica* $A = \left(a_{ij}\right)$, $(i, j = 1,2,\dots,n)$ *regularna sis-tem* (3.4) *ima jedinstveno rješenje*.

***Dokaz.*** Ako je matrica $A$ regularna, $\det A \neq 0$, tada postoji $A^{-1}$. Množenjem jednakosti (3.4) slijeva sa $A^{-1}$ dobija se $A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B$, odnosno

(3.5) $$X = A^{-1}B$$

što predstavlja jedinstveno rješenje sistema (3.4).

***Primjer*** **3.1.** Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - y - z &= -2 \\ 2x - 3y + z &= -4 \end{aligned}.$$

***Rješenje.*** Kako je $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, to je

$$X = A^{-1}B.$$

Inverzna matrica matrice $A$ je

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix},$$

pa je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

odakle je $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$.

Kako za regularnu matricu $A$ vrijedi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$$

to se relacija (3.5) može izraziti u obliku

(3.6) $$X = \frac{adjA}{\det A}B.$$

**Teorema 3.2.** *Ako je* $\det A \neq 0$ *sistem* (3.4) *ima rješenje* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *dato sa*

(3.7) $$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \quad k = 1,2,\dots,n$$

*gdje se matrica* $A_k \ (k = 1,2,\dots,n)$ *dobija zamjenom k-te kolone matrice A kolonom slobodnih članova, matricom B.*

***Dokaz.*** Na osnovu teorema (3.1) i (2.8) je

(3.6) $$X = A^{-1}B = \frac{adjA}{\det A}B = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} \dots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_4 \end{bmatrix},$$

gdje su $A_{ij}$ algebarski komplementi elemenata $a_{ji}, \quad i,j = 1,2,\dots,n$, ili

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + A_{3n}b_3 + \dots + A_{nn}b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{bmatrix}$$

odakle na osnovu definicije jednakosti matrica slijedi

$$x_k = \frac{1}{\det A}\det A_k.$$

Ova formula je *Kramerova**) formula za rješavanje sistema linearnih alge-barskih jednačina.

***Primjer* 3.2.** Riješiti sistem jednačina

$$x + y + z = 6$$
$$x - y - z = -2$$
$$2x - 3y + z = -4.$$

***Rješenje.*** Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ a } \det A = -8.$$

Dalje je

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -24,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -8,$$

pa je

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-16}{-8} = 2,\;\; y = \frac{\det A_2}{\det A} = 3,\;\; z = \frac{\det A_3}{\det A} = 1 \;.$$

## 3.3. Sistem od *m* jednačina sa *n* nepoznatih

Za sistem (3.2) korisno je pored matrice $A$ posmatati i matricu

$$A_p = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{3.8}$$

koju nazivamo proširena matrica sistema.

*) G. Kramer (1704-1752), švajcarski matematièar

**Teorema 3.3.** *Sistem (3.2) je saglasan ako i samo ako je*

$$r(A) = r(A_p) \;.$$

***Dokaz.*** Ako je sistem saglasan onda postoji bar jedna uređena $n$-torka realnih brojeva $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tako da je

$$\begin{aligned} a_{11}\, a_1 + a_{12}\, a_2 + \cdots + a_{1n}\, a_n &= b_1 \\ a_{21}\, a_1 + a_{22}\, a_2 + \cdots + a_{2n}\, a_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1} a_1 + a_{m2} a_2 + \cdots + a_{mn}\, a_n &= b_m \end{aligned}$$

odakle je

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, a_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \;. \tag{3.9}$$

Ako elemente prve, druge,..., $n$-te kolone matrice (3.8) pomnožimo brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respektivno, i sve proizvode oduzmemo od odgovarajućih ele-menata kolone slobodnih članova dobićemo matricu

$$B' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 - \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\, a_i \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 - \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\, a_i \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m - \sum_{i=1}^{n} a_{mi}\, a_i \end{bmatrix}$$

koja na osnovu teoreme (2.9) ima isti rang kao i matrica $A_p$. Kako su na osnovu relacije (3.9) svi elementi posljednje kolone jednaki nuli to je njen rang jednak rangu matrice $A$. Znači $r(A) = r(A_p)$ čime je dokazan potre-ban uslov.

Dokažimo da je uslov teoreme i dovoljan. Ako je $r(A) = s > 0$ tada se matrica $A$ (matrica $A_p$) primjenom elementarnih transformacija na vrsta-ma može svesti na gornju trougaonu matricu. Prvih $s$ vrsta su linearno neza-visne. Ostale vrste $(s+1, s+2, \dots, m)$ se mogu izraziti kao linearne kombi-nacije prvih $s$ nezavisnih vrsta. To znači da rješenje sistema prvih $s$ jedna-čina zadovoljava i ostale jednačine. Jednačine $s+1, s+2, \dots, m$-ta se mogu izostaviti pa se rješavanje sistema (3.1) svodi na rješavanje sistema

(3.10) $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k = b_i\,, \quad i = 1,2,\dots,s\,,$$

i razlikujemo dva slučaja:

**1.** Za $s = n$ sistem (3.10) ima jedinstveno rješenje koje se dobija po Kramerovim formulama ili matričnim računom;

**2.** Za $s < n$ sistem (3.10) se može pisati u obliku

(3.11) $$\sum_{k=1}^{s} a_{ik}\, x_k = b_i'\,, \quad b_i' = b_i - \sum_{k=s+1}^{n} a_{ik}\, x_k\,, \quad i = 1,2,\dots,s\,,$$

gdje nepoznate $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n$ nazivamo slobodnim i možemo im pridružiti proizvoljne vrijednosti $x_{s+1} = a_{s+1}, x_{s+2} = a_{s+2}, \dots, x_n = a_n$, gdje je $a_{s+1}, a_{s+2}, \dots, a_n \in$ ***R***. Sistem (3.11) se može riješiti pomoću već poznatih Kramerovih formula.

Sistem (3.11) se u razvijenom obliku može zapisati kao

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1s}\, x_s &= b_1 - a_{1\,s+1}\, x_{s+1} - \cdots - a_{1n}\, x_n \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2s}\, x_s &= b_2 - a_{2\,s+1}\, x_{s+1} - \cdots - a_{2n}\, x_n \\ &\dots \end{aligned}$$

$$a_{s1} x_1 + a_{s2} x_2 + \cdots + a_{ss} x_s = b_s - a_{s\,s+1} x_{s+1} - \cdots - a_{sn} x_n \, .$$

Ako označimo sa

$$A_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2s} \\ \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} \dots a_{ss} \end{bmatrix}, \quad X_s = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} b_1 - \sum\limits_{i=s+1}^{n} a_{1i} x_i \\ \vdots \\ b_s - \sum\limits_{i=s+1}^{n} a_{si} x_i \end{bmatrix},$$

tada je

$$A_s X_s = B_s$$

odakle je rješenje sistema (3.11)

$$X_s = A_s^{-1} B_s \, .$$

***Primjer* 3.3.** Ispitati da li je sistem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

saglasan, i ako jeste riješiti ga.

***Rješenje.*** Za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \text{-}1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

slijedi da je $r(A) = 2$, a za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & \text{-}1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

je $r(A_p) = 2$, tj. $r(A) = r(A_p)$ što znači da je sistem saglasan. Kako je $r(A) = 2 < n = 4$ rješavanje datog sistema se svodi na rješavanje sistema od dvije jednačine sa dvije nepoznate, a ostale dvije nepoznate su nezavisno slobodne. Elementarnim transformacijama matrice $A_p$ dobićemo matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

što znači da je treća jednačina linearna kombinacija prve dvije jednačine i ona se može izostaviti. Dati sistem jednačina se svodi na sistem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

ili

$$x_1 + x_2 = 4 - x_3 - x_4$$

$$2x_1 + x_2 = 4 + x_3 - 2x_4 .$$

Prema teoremi 3.2 (Kramerova formula) je

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 - x_3 - x_4 & 1 \\ 4 + x_3 - 2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4 - x_3 - x_4 - 4 - x_3 + 2x_4}{-1} = 2x_3 - x_4 ,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 - x_3 - x_4 \\ 2 & 4 + x_3 - 2x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4 + x_3 - 2x_4 - 8 + 2x_3 + 2x_4}{-1} = 4 - 3x_3 .$$

Dakle rješenje je $x_1 = 2x_3 - x_4,\ x_2 = 4 - 3x_3,\ x_3, x_4$ proizvoljno, naprimjer za $x_3 = 1,\ \ x_4 = 0$ je $x_1 = 2,\ \ x_2 = 1$.

Ako se zamijeni

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\quad X_s = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\quad B_s = \begin{bmatrix} 4 - x_3 - x_4 \\ 4 + x_3 - 2x_4 \end{bmatrix}$$

sistem se može napisati u matričnom obliku

$$A_s\, X_s = B_s$$

odakle je

$$X_s = A_s^{-1}\, B_s .$$

Kako je

$$A_s^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

to je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 - x_3 - x_4 \\ 4 + x_3 - 2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 - x_4 \\ 4 - 3x_3 \end{bmatrix} .$$

Iz teoreme 3.3. neposredno slijede teoreme:

**Teorema 3.4.** *Ako je rang matrice A homogenog sistema*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k = 0, \quad i = 1,2,\dots,n$$

*jednak* ***n*** *tada sistem ima samo trivijalno rješenje.*

**Teorema 3.5.** *Da bi homogen sistem jednačina*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k = 0, \quad i = 1,2,\dots,n$$

*imao netrivijalno rješenje potrebno je i dovoljno da je* $r(A) < n$.

***Primjer*** **3.4.** Odrediti parametar $m$ tako da sistem

$$x + 2y - z = 0$$

$$3x - y + 2z = 0$$
$$4x + y + mz = 0$$

ima netrivijalna rješenja.

***Rješenje.*** Sistem će imati netrivijalna rješenja ako je rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & m \end{bmatrix}$$

manji od tri, tj. ako je $\det A = 0$. Iz

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix} = 7 - 7m = 0$$

slijedi $m = 1$. To znači da će sistem imati netrivijalna rješenja samo ako je $m = 1$. Ako je $m \neq 1$ sistem će imati rješenje samo $x = y = z = 0$.

## 3.4. Gaussov metod rješavanja sistema linearnih jednačina

Neka je dat sistem jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3.12}$$

i neka je $a_{11} \neq 0$. Ukoliko je $a_{11} = 0$ onda bi za prvu jednačinu uzeli neku od jednačina za koju je koeficijent uz $x_1$ različit od nule. Očigledno bar jedan od koeficijenata $a_{i1}$, $i = 1,2,\dots,n$ mora biti različit od nule, jer u protivnom sistem ne bi sadržavao nepoznatu $x_1$. Prva jednačina sistema nakon dijeljenja sa $a_{11} \neq 0$ će glasiti

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{1}{a_{11}}b_1 .$$

Množenjem ove jednačine sa $a_{i1}$ i oduzimanjem tako pomnožene od $i$-te jed-načine, $i = 1,2,\dots,n$, uzimajući i ovu jednačinu, dobijamo sistem

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \quad \cdots \quad + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n &= \frac{1}{a_{11}} b_1 \\
\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}\right) x_2 + \cdots + \left(a_{2n} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} a_{21}\right) x_n &= b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left(a_{m\,2} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{m\,1}\right) x_2 + \cdots + \left(a_{m\,n} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} a_{m\,1}\right) x_n &= b_m - \frac{a_{m\,1}}{a_{11}} b_1
\end{aligned}
\tag{3.13.}
$$

ekvivalentan sistemu (3.12). Ako se u sistem (3.13) uvedu oznake

$$
a'_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j = 1,2,\ldots,n; \quad b'_1 = \frac{1}{a_{11}} b_1
$$

$$
a'_{i\,j} = a_{i\,j} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i\,1}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{i\,1}}{a_{11}} b_1
$$

$$
i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 2,3,\ldots,n
$$

on će glasiti

$$
\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a'_{m\,2}x_2 + \cdots + a'_{m\,n}x_n &= b'_m
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

.

Ako je $a'_{22} \neq 0$, ili $a'_{i2} \neq 0$ bar za jedno $i = 1,2,\ldots,n$ tada se istim pos-tupkom sistem (3.14) svodi na njemu ekvivalentan sistem

$$
\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
x_2 + a''_{23}x_3 + \cdots + a''_{2n}x_n &= b''_2 \\
a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a''_{m\,3}x_3 + \cdots + a''_{m\,n}x_n &= b''_m
\end{aligned}
$$

.

Ako je $a'_{i2} = 0$ za $i = 1,2,\ldots,m$, tada ćemo u prvoj jednačini sabirak $a'_{12}x_2$ pisati na posljednjem mjestu lijeve strane jednakosti, i opisani postupak raditi sa koeficijentima uz nepoznatu $x_3$. Opisani postupak se nastavlja, i nakon najviše $n$-1 koraka dobiće se sistem ekvivalentan datom sistemu u trougaonom obliku

$$
\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1s}\,x_s + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
x_2 + a''_{23}x_3 + \cdots + a''_{2s}\,x_s + \cdots + a''_{2n}x_n &= b''_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_s + \cdots + a^{(s)}_{sn}x_n &= b^{(s)}_s
\end{aligned}
$$

ili

$$
\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
x_2 + a''_{23}x_3 + \cdots + a''_{2n}x_n &= b''_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x &= b^{(n)}_n
\end{aligned}
$$

$$0 = b_{n+1}^{(n+1)}$$
$$.....$$
$$0 = b_m^{(m)}.$$

U prvom slučaju sistem je saglasan, a u drugom slučaju je saglasan samo ako je $b_{n+1}^{(n+1)} = b_{n+2}^{(n+2)} = \cdots = b_m^{(m)} = 0$.

Način rješavanja sistema linearnih algebarskih jednačina objašnjen je u ovom dijelu poznat je pod imenom *Gaussov metod eliminacije*.

Može se zapaziti da je Gaussov postupak rješavanja sistema linearnih algebarskih jednačina sličan svođenju matrica na gornji trougaoni oblik, što će biti pokazano na sljedećim primjerima.

***Primjer* 3.5.** Gaussovim postukom riješiti sistem jednačina
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &= 1 . \end{aligned}$$

***Rješenje.*** Ako prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo drugoj jednačini, a prvu jednačinu pomnoženu sa -1 dodamo trećoj jednačini dobićemo sistem
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_2 - 6x_3 + 3x_4 &= -7 \\ x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$
koji je ekvivalentan datom sistemu jednačina. Ako sada trećoj jednačini dodamo drugu jednačinu pomnoženu sa -1 dobićemo sistem
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_2 - 6x_3 + 3x_4 &= -7 \\ 4x_3 - 5x_4 &= 4 . \end{aligned}$$

Nakon dijeljenja treće jednačine sa 4 dobićemo $x_3 = 1 + 5/4\, x_4$. Uvrštava-njem ove vrijednosti u drugu jednačinu dobijamo $x_2 = -1 + 9/2\, x_4$. Dalje, uvrštavanjem vrijednosti za $x_2$ i $x_3$ u prvu jednačinu dobijamo $x_1 = 1 + 35/4\, x_4$. Dobijene vrijednosti $x_1, x_2, x_3$ i $x_4$ proizvoljno su rješenje datog sistema.

Ako na proširenoj matrici
$$A_p = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$
datog sistema vršimo iste elementarne transformacije na vrstama matrice kao i na jednačinama dobićemo gornju trougaonu matricu
$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 1 \end{array}\right]$$
na osnovu čega dobijamo sistem

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\
x_2 - 6x_3 + 3x_4 &= -7 \\
x_3 - \frac{5}{4}x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

koji je ekvivalentan datom sistemu jednačina.

***Primjer* 3.6.** Gaussovim postupkom riješiti sistem jednačina

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7 \\
x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\
x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\
2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0
\end{aligned}.
$$

***Rješenje.*** Elementarnim transformacijama matrice $A_p$ dobiće se matrica

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

odakle se dobija rješenje sistema $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

## 3.5. Bazna rješenja

Ako kolone matrice $A$ saglasnog sistema (3.3) za $m \le n$ označimo redom sa $A_1, A_2, \dots, A_n$ tada se on može zapisati u obliku

$$[A_1 \quad A_2 \ \cdots \ A_n]\, X = B$$

ili

(3.15) $$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n = B.$$

Dakle, vektor $B$ $m$-dimenzionalnog vektorskog prostora $\boldsymbol{R}^m$ je izražen kao linearna kombinacija vektora $A_j$, $j = 1,2,\dots,n$, gdje su $x_1, x_2, \dots, x_n$ koeficijenti te linearne kombinacije. Ako je $m = n$ i ako su vektori $A_1, A_2, \dots, A_n$ linearno nezavisni tada postoji samo jedan skup brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n$ koji zadovoljava jednačinu (3.15). Ako je $m < n$ tada postoji najmanje toliko različitih rješenja koliko postoji različitih podskupova od $m$ linearno nezavisnih vektora $A_j$, $j = 1,2,\dots,n$. Svaki poskup od $m$ linearno nezavisnih vektora $A_1', A_2', \dots, A_m'$ čini jednu bazu prostora $\boldsymbol{R}^m$. Ako se uzme da su koeficijenti $x_j$ uz vektore koji ne pripadaju toj bazi jednaki nuli, tada se vektor $B$ može jednoznačno izraziti kao linearna kombinacija vektora te baze, tj. može se izraziti u obliku

(3.16) $$A_1'x_1' + A_2'x_2' + \cdots + A_m'x_m' = B.$$

Dakle, rješenje sistema (3.16) je $x_1', x_2', \dots, x_m'$. Skup $\{x_1', x_2', \dots, x_m', 0, \dots, 0\}$ naziva se bazno rješenje sistema (3.15). Maksimalan broj baznih rješenja je $\binom{n}{m}$.

***Primjer* 3.7.** Naći sva bazna rješenja sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}.$$

***Rješenje.*** Ovdje imamo dvodimenzionalne vektore

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Parovi vektora $A_1, A_2$, $A_1, A_4$, $A_2, A_3$, $A_2, A_4$, $A_3, A_4$ su linearno nezavisni, dakle imamo pet baza, odnosno baznih rješenja. Prvo bazno rješenje se dobija kada se u dati sistem jednačina stavi $x_3 = x_4 = 0$. Tada je

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

ili

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

odakle je $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3}$. Dakle prvo bazno rješenje je

$$x_1 = \frac{7}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{3}, \quad x_3 = x_4 = 0.$$

Slično se nalaze i ostala bazna rješenja.

## 3.6. Zadaci za vježbu

**1.** Sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 9 \\ 3x - 5y + z &= -4 \\ 4x - 7y + z &= 5 \end{aligned}$$

napisati u matričnom obliku a zatim ga riješiti.

**2.** Ispitati da li je sistem

$$
\begin{aligned}
2x + y + 4z + 8t &= -1\\
x + 3y - 6z + 2t &= 3\\
3x - 2y + 2z - 2t &= 8\\
2x - y + 2z \quad &= 4
\end{aligned}
$$

saglasan i ako jeste riješiti ga primjenom matričnog računa.

**3.** Sistem jednačina

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 6\\
2x + y - z &= 1\\
x + 2y + z &= 8
\end{aligned}
$$

riješiti pomoću Kramerovih formula.

**4.** Ispitati saglasnost i prirodu rješenja sistema

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8\\
4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9\\
2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7\\
x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12 .
\end{aligned}
$$

Riješiti sistem jednačina.

**5.** Naći opšta i bazna rješenja sistema

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 4\\
x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= -3\\
x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 .
\end{aligned}
$$

**6.** Gaussovim postupkom riješiti sistem jednačina iz zadatka 5.

**III G L A V A**

# FUNKCIJE JEDNE PROMJENLJIVE

## 1. Definicija i osnovni pojmovi

Funkcija $f : E \to F$ ili $y = f(x)$ $(x \in E, y \in F)$ se naziva numerička funkcija jedne promjenljive, ako su $E$ i $F$ podskupovi skupa brojeva. Ako su

$E$ i $F$ podskupovi skupa realnih brojeva za funkciju se kaže da je realna funkcija realne promjenljive, i mi ćemo u daljem radu razmatrati samo te funkcije.

## 1.1. Zadavanje funkcije

Funkcije se najčešće zadaju analitički, grafički i tabelarno.

Analitički se funkcije zadaju pomoću formula koje izražavaju funkcionalnu zavisnost između $x$ i $y$. U tom slučaju se ne zadaje $D(f)$. Domena funkcije $y = f(x)$ je skup svih vrijednosti $x \in \boldsymbol{R}$ za koje je $f(x) \in \boldsymbol{R}$.

***Primjer* 1.1.** Odrediti $D(f)$, ako je $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 1}$.

***Rješenje.*** Prema aksiomima skupa realnih brojeva (vidjeti Def.4.4-(8)) inverzni element za množenje definisan je u skupu $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$. To znači da funkcija nije definisana za $x \in \boldsymbol{R}$ za koje je $x^3 - 1 = 0$. Znači funkcija nije definisana za $x = 1$ odnosno da je definisana za svako $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{1\}$.

***Primjer* 1.2.** Odrediti $D(f)$ funkcije $y = \sqrt{1 - x^2}$.

***Rješenje.*** Korijen sa parnim izložiocem je realan ako je potkorjena veličina nenegativna, što znači da je data funkcija definisana za $1 - x^2 \quad 0$,
ili $x \in [-1,1]$. To znači da je $D(f) = [-1,1]$.

Funkcija može biti zadana i sa više formula i u tom slučaju se daje i $D(f)$. Tako naprimjer

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2, & za \ x > 0 \\ 0, & za \ x = 0 \\ -x^2, & za \ x < 0. \end{cases}$$

Funkcije u analitičkom obliku mogu se zadati u eksplicitnom, impli-citnom ili parametarskom obliku.

Kažemo da je funkcija zadana u *eksplicitnom obliku* ako je izražena u obliku $y = f(x)$. Znači, kod eksplicitno zadane funkcije direktno se može izračunati vrijednost funkcije za datu vrijednost argumenta. Naprimjer:

$$y = x^2 + 3, \quad y = \log x, \quad y = \frac{x}{x+1}.$$

Kažemo da je funkcija zadana u *implicitnom obliku* ako funkcija i njen argument nisu tako odvojeni da se, pomoću date vrijednosti argumenta, može direktno izračunati odgovarajuća vrijednost funkcije. Tako, naprimjer

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0,$$

su implicitno zadane funkcije. Prema tome

$$F(x,y)=0$$

je opšti oblik implicitno zadane funkcije.

Ako se zavisna i nezavisna promjenljiva funkcije $F(x,y)=0$ odnosno $y=f(x)$ može izraziti kao funkcija nekog argumenta $t$ u obliku

$$x=x(t), \quad y=y(t),$$

tada se za te analitičke izraze kaže da predstavlja funkciju u parametarskom obliku. Naprimjer funkcija

$$x=r\cos t, \quad y=r\sin t,$$

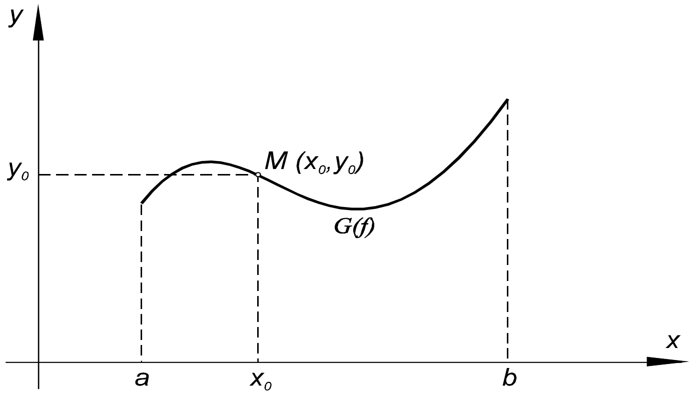
je funkcija zadana u parametarskom obliku.

*Tabelarni način prikazivanja funkcija* sastoji se u ispisivanju niza vrijednosti nezavisne promjenljive i odgovarajućih vrijednosti funkcije. Ovi podaci se upisuju u tabelu oblika

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\cdots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $\cdots$ | $y_n$ |

po čemu je ovaj način prikazivanja i dobio ime. Zapaža se da je vrijednost funkcije poznata samo za one vrijednosti argumenta koji se nalazi u tablicama, zbog čega je ovaj način prikazivanja funkcija nepraktičan. No i pored toga on je neizbježan u eksperimentalnim i statističkim istraživanjima funkcionalnih zavisnosti posmatranih veličina. Ukoliko je poznat dovoljno veliki broj podataka funkcionalne zavisnosti posmatranih veličina tada postoje načini da se odredi i analitički izraz koji bi dosta dobro opisao te zavisnosti.

*Grafičko predstavljanje funkcija*. Neka je data funkcija $y=f(x)$ i neka je $D(f)=[a,b]$ domena funkcije. Ako određenu vrijednost $x_0\in D(f)$ nezavisno promjenljive $x$ uzmemo za apcisu, a odgovarajuću vrijednost $y_0=f(x_0)\in V(f)$ za ordinatu, onda će paru brojeva $(x_0,y_0)$ odgovarati tačka $M(x_0,y_0)$ u Dekartovom koordinatnom sistemu, Sl.1.1. Isto se može uraditi za svaku vrijednost $x\in D(f)$ i svaku vrijednost $y\in V(f)$ i tako dobiti skup $G(f)=\{(x,y):x\in D(f)\wedge y\in V(f)\}$. Ovaj skup tačaka se naziva grafik funkcije $y=f(x)$, a način predstavljanja funkcije naziva se grafičko predstavljanje funkcije *f*.




Sl. 1.1.

S druge strane ako je poznat grafik funkcije, tada se približno može odrediti vrijednost funkcije za svako $x \in D(f)$. Vrijednost funkcije se dobije mjerenjem ordinate za datu vrijednost argumenta, što znači da se tra-žena vrijednost može odrediti sa "dovoljnom" tačnošću.

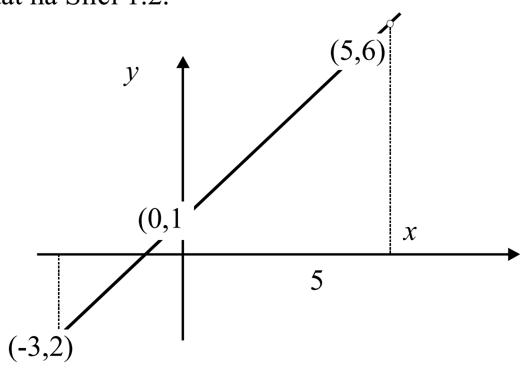
U praksi se često kombinuju sva tri načina predstavljanja funkcija. Tako naprimjer za funkciju čiji je analitički izraz

$$y = x + 1$$

može se formirati tabela

| $x$ | -3 | 0 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | 1 | 6 | ... |

a grafički prikaz je dat na Slici 1.2.




Sl. 1.2.

## 1.2. Klasifikacija funkcija u odnosu na grafik

### 1.2.1. Ograničene i neograničene funkcije

Ranije smo definisali infimum i supremum skupa $X$ (Vidjeti, I, 3.1.3). Te definicije vrijede i za skup vrijednosti funkcije $V(f)$, i ozna-čavaju se sa

$$\inf V(f) = \inf_X f(x) = \inf_X f$$

odnosno

$$\sup V(f) = \sup_X f(x) = \sup_X f, \quad X = D(f).$$

**Definicija 1.1.** *Za funkciju* $y = f(x)$ *se kaže da je ograničena na* $X$ *odozdo*, (*odozgo*) *ako je*

$$\inf_X f(x) = a > -\infty, \quad \left(\sup_X f(x) = b < \infty\right).$$

*Ako je* $a \le f(x) \le b, \ \forall x \in X$ *za funkciju* $y = f(x)$ *se kaže da je ograničena.*

Ako se uzme $K = \max(|a|,|b|)$ tada imamo da je

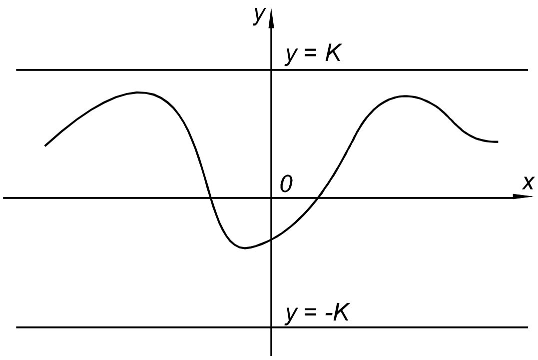
$$-K \le f(x) \le K, \quad \forall x \in X \text{ ili}$$

(1.1) $$|f(x)| \le K, \quad \forall x \in X.$$

Odakle slijedi da je funkcija $f$ ograničena na $X$ ako i samo ako je ispunjen uslov (1.1).

Ako ne postoji realan broj $K$ takav da su ispunjene nejednakosti (1.1) za svako $x \in X$, za funkciju se kaže da je neograničena.

Iz definicije ograničene funkcije slijedi da se grafik ograničene funkcije $y = f(x)$ nalazi u pojasu ograničenom pravim $y = -K$, i $y = K$, $\forall x \in X$ što je prikazano na Sl.1.3.



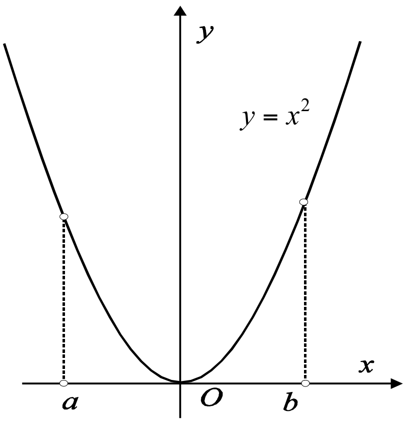

Sl. 1.3.

***Primjer*** **1.3.** Funkcija $y = \cos x$ je ograničena u intervalu $\langle -\infty, +\infty \rangle$ jer je $|\cos x| \le 1, \quad \forall x \in \boldsymbol{R}$.

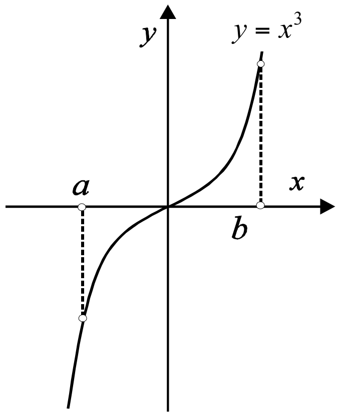
***Primjer*** **1.4.** Funkcija $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ je ograničena na ***R***, jer je

$$\left|\frac{1}{1+x^2}\right|<1, \quad \forall x\in \boldsymbol{R}.$$

***Primjer* 1.5.** Funkcija $y=x^2$ je ograničena na svakom intervalu $[a,b]$. Ona je neograničena na ***R***, a ograničena je odozdo, vidjeti sliku 1.4.




Sl. 1.4.




Sl. 1.5.

***Primjer* 1.6.** Funkcija $y=x^3$ je ograničena na svakom intervalu $[a,b]$, ali je neograničena na ***R*** odozdo i odozgo, vidjeti Sl.1.5.

## 1.2.2. Parne i neparne funkcije

**Definicija 1.2.** *Za funkciju* $y=f(x)$ *definisanu na intervalu* $D=[-a,a]$ *kažemo da je parna*, *odnosno neparna*, *ako je*

$$(\forall x\in D) \quad f(-x)=f(x),$$

*odnosno*

$$(\forall x\in D) \quad f(-x)=-f(x).$$

Može se zapazati da je grafik parne funkcije simetričan u odnosu na $y$-osu, a da je grafik neparne funkcije simetričan u odnosu na koordinatni početak. Ove osobine olakšavaju crtanje grafika funkcije. Dovoljno je na-crtati grafik funkcije u jednom od intervala $[-a,0]$ ili $[0,a]$, naprimjer u intervalu $[0,a]$. Potom, kod parnih funkcija naći osno simetričnu krivu u odnosu na $y$-osu kao osu simetrije, a kod neparnih funkcija centralno sime-tričnu krivu sa centrom simetrije $O(0,0)$.

***Primjer* 1.7.** Funkcija $f(x)=x^2+1$ je parna funkcija na intervalu $\langle-\infty,+\infty\rangle$, jer je

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x).$$

***Primjer* 1.8.** Funkcija $f(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$ je neparna funkcija na intervalu $\langle -1,1\rangle$, jer je definisana za $x\in\langle -1,1\rangle$ i

$$f(-x)=\log\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\log\frac{1+x}{1-x}=-\log\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

tj.

$$f(-x)=f(x),\quad \forall x\in\langle -1,1\rangle.$$

### 1.2.3. Periodične funkcije

**Definicija 1.3.** *Za funkciju* $y=f(x)$ *kažemo da je periodična i da ima period* $p\neq 0$ *ako* $\forall x\in D(f)$ *povlači* $(x+p)\in D(f)$ *i ako je* $f(x+p)=f(x)$. *Najmanji broj T za koji je* $f(x+T)=f(x)$ *je osnovni period funkcije*.

To znači, ako su poznate vrijednosti periodične funkcije sa osnovnim periodom *T* za sve vrijednosti $x$ iz intervala dužine *T*, tada su poznate vri-jednosti funkcije za svako $x\in D(f)$. To olakšava crtanje grafika periodične funkcije. Nacrta se grafik u intervalu dužine *T* pa se onda translatira u oba smjera, duž ose $x$ za $T,\ 2T,\ 3T,\dots$.

**Teorema 1.1.** *Ako je funkcija* $y=f(x)$ *periodična sa osnovnim periodom* $T$, *tada su brojevi* $kT,\ k=\pm 1,\pm 2,\dots$, *takođe periodi funkcije*.

***Dokaz.*** Za $k=2$ je

$$f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x).$$

Uz pretpostavku da tvrdnja vrijedi za prirodni broj $k$, tada je

$$f(x+(k+1)T)=f((x+kT)+T)=f(x+kT)=f(x).$$

To znači, na osnovu principa matematičke indukcije, da tvrdnja vrijedi za svako $k\in\boldsymbol{N}$.
Sa druge strane je $f(x+0)=f(x)$ i

$$f(x)=f(x-T+T)=f(x-T);\quad f(x-kT+kT)=f(x)=f(x-kT).$$

***Primjer* 1.8.** Dokazati da je funkcija $y=\sin(ax+b)$ periodična sa osnovnim periodom $\frac{2\pi}{a}$.

***Rješenje.*** Iz $\sin(a(x+T)+b)=\sin(ax+b)$, tj.

$$\sin(a(x+T)+b)-\sin(ax+b)=0,$$

na osnovu formule o razlici funkcija $\sin\alpha$ i $\sin\beta$, slijedi

$$2\sin\frac{ax+aT+b-ax-b}{2}\cos\frac{ax+aT+b+ax+b}{2}=0$$

ili

$$2\sin\frac{aT}{2}\cos\left(ax+b+\frac{aT}{2}\right)=0.$$

Prethodna jednakost će biti zadovoljena za svako $x$, ako je $\frac{aT}{2}=\pi$, odakle je $T=\frac{2\pi}{a}$.

### 1.2.4. Monotone funkcije

**Definicija 1.4.** Neka je $X\subset D(f)$ *neprazan skup. Za funkciju* $y=f(x)$ *se kaže da raste, odnosno opada, u intervalu* $X$ *ako za bilo koje dvije vrijednosti* $x_1,x_2\in X$ $(x_1<x_2)$ *vrijedi*

$$f(x_1)\le f(x_2)\text{, odnosno } f(x_1)\quad f(x_2).$$

Kada umjesto $\le$, odnosno , stoji $<$, odnosno $>$ za funkciju $y=f(x)$ se kaže da strogo raste, odnosno strogo opada, na $X$. Za funkciju $y=f(x)$ koja raste, opada, na $X$ kažemo da je monotona na $X$.

***Primjer* 1.9.** Funkcija $y=3x+2$ je strogo rastuća na $\boldsymbol{R}$, jer je

$$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1+2)-(3x_2+2)=3(x_1-x_2)<0$$

za svako $x_1<x_2$ $(x_1,x_2\in\boldsymbol{R})$.

***Primjer* 1.10.** Funkcija $y=\log x$ je strogo rastuća na $\boldsymbol{R}^+$, jer je

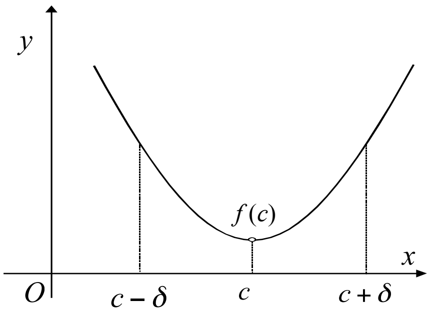
$$f(x_1)-f(x_2)=\log x_1-\log x_2=\log\frac{x_1}{x_2}<0$$

za $x_1<x_2$ $(x_1,x_2\in\boldsymbol{R})$.

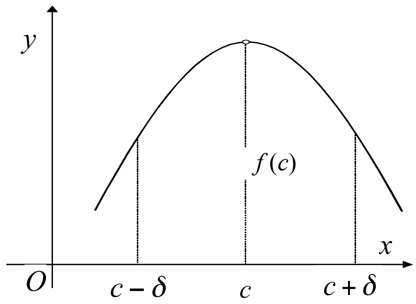
### 1.2.5. Lokalni ekstremi funkcije

**Definicija 1.5.** *Za funkciju* $y=f(x)$ *se kaže da u tački* $c\in D(f)$ *ima lokalni minimum, odnosno lokalni maksimum, ako postoji* $\delta>0$ *tako da za* $\forall x\in\langle c-\delta,c+\delta\rangle\subset D(f)$ *vrijedi* $f(c)<f(x)$, $x\ne c$ (vidjeti sliku 1.6) *odnosno*, $f(c)>f(x)$, $x\ne c$ (vidjeti sliku 1.7).

Minimum i maksimum funkcije zovu se *ekstremi* funkcije.




Sl. 1.6.




Sl. 1.7.

# 1.3. Elementarne funkcije

U zavisnosti od operacija koje treba izvršiti na argumentu da bi se dobila odgovarajuća vrijednost funkcije, funkcije se dijele na algebarske i trascedentne.

## 1.3.1. Algebarske funkcije

Algebarske funkcije su takve funkcije čiji analitički izraz sadrži konačan broj operacija sabiranja, oduzimanja, množenja, dijeljenja (osim dijeljenja nulom) i stepenovanja racionalnim brojem.

Najjednostavnija algebarska funkcija je funkcija polinoma ili cijela racionalna funkcija.

Za $n \in \boldsymbol{N}$, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \boldsymbol{R}$ funkcija

(1.2) $$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

sa $\boldsymbol{R}$ u $\boldsymbol{R}$ se zove polinom ili cijela racionalna funkcija nad $\boldsymbol{R}$. Brojevi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ zovu se koeficijenti polinoma. Ako je $a_n \neq 0$, za polinom $P_n(x)$ se kaže da je reda $n$, a ako je $a_n = 1$ za polinom se kaže da je nor-miran.

Prema tome, pod polinomom ili cijelom racionalnom funkcijom se podrazumijeva funkcija koja nastaje vršenjem na argumentu i konačnom broju konstanti konačanog broja operacija sabiranja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i stepenovanja prirodnim brojem.

Funkcija oblika

(1.3) $$Q(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi , nazivamo razlomljena racionalna funk-cija. Ako je $n < m$ za funkciju $Q(x)$ kažemo da je prava razlomljena funk-cija, a ako je $n \quad m$ kažemo da je neprava razlomljena funkcija.

Cijele racionalne i razlomljene racionalne funkcije zovemo racio-nalnim funkcijama.

Za algebarske funkcije koje nisu racionalne kaže se da su iracionalne algebarske funkcije.

Algebarske funkcije su naprimjer:

a) $y = 3x^2 + x + 1$, b) $y = \frac{3x^2 + 2x + 5}{x^3 + x + 1}$,

c) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x + 2}$, d) $y = \frac{2}{3}x^4 + 2x + 8$,

e) $y = \frac{\left(\sqrt{x} + 2\right)^3}{x}$, f) $y = \frac{x^4 + 2x + 5}{x + 1}$.

Funkcije a), b), d) i f) su racionalne funkcije, a funkcije c) i e) su ira-cionalne funkcije. Funkcije a) i d) su cijele racionalne funkcije, a funkcije b) i f) su razlomljene racionalne funkcije. Funkcija b) je prava a f) neprava raz-lomljena racionalna funkcija.

### 1.3.1.1. Osnovne teoreme cijelih racionalnih funkcija

**Teorema 1.2.** *Ako se cijela racionalna funkcija* $P_n(x)$ *podijeli sa* $x - a,\ x \neq a$, *dobija se ostatak jednak* $P_n(a)$.

***Dokaz.*** Neka se pri dijeljenju $P_n(x)$ sa $x - a$ dobije rezultat $Q(x)$ i $R(x)$ kao ostatak dijeljenja, gdje je $Q(x)$ cijela racionalna funkci-ja reda $n - 1$, a $R(x)$ cijela racionalna funkcija reda manjeg od 1. Znači ostatak $R(x)$ je konstanta $R$. Tada je

$$P_n(x) = Q(x)(x - a) + R$$

odnosno

$$P_n(a) = Q(a)(a - a) + R = R.$$

Znači, vrijedi relacija

$$P_n(x) = Q(x)(x - a) + P_n(a).$$

***Primjer* 1.11.** Neka je $P_3(x) = x^3 + 2x + 1$. Tada se dijeljenjem date funkcije sa $x - 1$ dobija rezultat $x^2 + x + 3$ i ostatak 4. Očigledno je

$$P_3(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 + 1 = 4.$$

Neka su date bilo koje dvije cijele racionalne funkcije $P_n(x)$ i $\varphi_k(x),\ n \le k$. Tada postoje cijele racionalne funkcije $Q(x)$ i $R(x)$, pri čemu je red funkcije $Q(x)$ jednak razlici reda polinoma $P_n(x)$ i $\varphi_k(x)$, a red polinoma $R(x)$ je manji od reda polinoma $\varphi_k(x)$ za koji vrijedi

(1.4) $$P_n(x) = \varphi_k(x) Q(x) + R(x).$$

Za polinom $P_n(x)$ se kaže da je djeljiv polinomom $\varphi_k(x)$ akko je u relaciji (1.4) $R(x) = 0$, gdje "akko" znači "ako i samo ako".

**Teorema 1.3.** (***Osnovna teorema algebre***) *Svaka cijela racionalna funkcija* $P_n(x),\ n \quad 1$, *ima bar jedan realan ili kompleksan korijen.*

**Lema 1.1.** *Cijela racionalna funkcija* $P_n(z),\ n \quad 1$, *djeljiva je binomom* $z - a,\ z \in Z$, *akko je* $P_n(a) = 0$.

***Dokaz.*** Potreban uslov ove leme je dokazan u teoremi 1.2, a dovo-ljan uslov slijedi neposredno iz definicije o djeljivosti.

**Teorema 1.4.** *Svaka cijela racionalna funkcija* $P_n(x)$ *može se razložiti na* $n$ *linearnih faktora oblika* $x - a$ *i faktora koji je jednak koeficijentu uz* $x^n$.

***Dokaz.*** Neka je

$$P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$$

cijela racionalna funkcija $P_n(x)$, na osnovu teoreme 1.3, ima bar jedan korijen $a_1$, pa se na osnovu leme 1.1 može pisati

$$P_n(x) = (x - a_1)\, P_{n-1}(x),$$

gdje je $P_{n-1}(x)$ cijela racionalna funkcija reda $n-1$. Cijela racionalna funkcija $P_{n-1}(x)$ ima takođe jedan korijen, i neka je to $a_2$. Tada je

$$P_{n-1}(x) = (x - a_2)\, P_{n-2}(x),$$

gdje je $P_{n-2}(x)$ cijela racionalna funkcija reda $n-2$. Analogno se dobija

$$P_{n-2}(x) = (x - a_3)\, P_{n-3}(x),$$

gdje je $P_{n-3}(x)$ cijela racionalna funkcija reda $n-3$. Nastavljajući taj proces dobićemo

$$P_1(x) = (x - a_n) \cdot P_0(x),$$

gdje je $P_0(x)$ cijela racionalna funkcija nultog reda, tj. neki konstantan broj. Taj broj je očigledno jednak koeficijentu uz $x^n$, tj. $P_0(x) = A_n$. Na osnovu prethodnih jednakosti slijedi da je

(1.5) $$P_n(x) = A_n (x - a_1)(x - a_2) \cdot \cdots \cdot (x - a_n),$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ korijeni polinoma $P_n(x)$.

***Primjer*** **1.12.** Cijela racionalna funkcija

$$P_3(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$$

ima korijene: $x = -1, \quad x = 1, \quad x = 2$, pa je

$$P_3(x) = 2(x+1)(x-1)(x-2).$$

**Teorema 1.5.** *Cijela racionalna funkcija*

$$P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$$

*identički je jednaka nuli, akko je* $A_n = A_{n-1} = \cdots = A_1 = A_0$.

***Dokaz.*** Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ korijeni datog polinoma. Tada je

$$P_n(x) = A_n(x - a_1)(x - a_2) \cdot \cdots \cdot (x - a_n). \tag{1.5}$$

Ako je polinom $P_n(x)$ identički jednak nuli, tj. jednak nuli za svako *x*, to je on jednak nuli i za neko *x* različito od $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Na osnovu toga iz jednakosti (1.5) slijedi da je $A_n = 0$. Analogno se dokazuje da je

$$A_n = A_{n-1} = \cdots = A_1 = A_0.$$

**Teorema 1.6.** *Za polinome* $P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$ *i* $B_n(x) = B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0$ *vrijedi*

$$P_n(x) = Q_n(x) \Leftrightarrow A_i = B_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

***Dokaz*** ove teoreme neposredno slijedi iz teoreme 1.5.

Ako su u razloženom obliku polinoma $P_n(x)$ na linearne faktore,

$$P_n(x) = A_n(x - a_1)(x - a_2) \cdot \cdots \cdot (x - a_n),$$

neki faktori jednaki, tada se oni mogu objediniti i pisati u obliku stepena, tj. u obliku

$$P_n(x) = A_n(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdot \cdots \cdot (x - a_m)^{k_m},$$

gdje je $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Prirodne brojeve $k_i$ nazivamo višestrukost ili mnogostrukost korijena $a_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

**Teorema 1.7.** *Ako cijela racionalna funkcija* $P_n(x)$ *sa realnim koeficijentima ima korijen* $a + bi$, *gdje je **i** imaginarna jedinica, tada je njen korijen i* $a - bi$.

***Dokaz.*** Ako u cijeloj racionalnoj funkciji $P_n(x)$ umjesto *x* zami-jenimo $a + bi$, izvršimo naznačena stepenovanja, grupišemo sabirke koji nemaju faktor *i*, odnosno sabirke koji sadrže faktor *i*, dobićemo jednakost

$$P_n(a+bi) = M + iN.$$

Kako je $P_n(a+bi)=0$, to je i $M+iN=0$, što znači da je $M=0$ i $N=0$.

Na osnovu definicije zbira kompleksnih brojeva neposredno slijedi da je

$$P_n(a-bi) = M - iN = 0,$$

što znači da je $a-bi$ korijen cijele racionalne funkcije $P_n(x)$. Time je dokaz završen.

Na osnovu teoreme 1.7. slijedi da u razloženom obliku cijele racio-nalne funkcije

$$P_n(x) = A_n(x-a_1)(x-a_2)\cdot\dots\cdot(x-a_n)$$

svakom kompleksnom korijenu odgovara i konjugovano kompleksan korijen. Neka su $a+bi$ i $a-bi$ korijeni cijele racionalne funkcije $P_n(x)$ mnogostrukosti *k*. Tada za taj par u razvijenom obliku vrijedi

$$P_n(x) = [x-(a+bi)]^k[x-(a-bi)]^k \varphi_{n-2k}(x),$$

gdje je

$$\varphi_{n-2k}(a+bi) \neq 0, \quad \varphi_{n-2k}(a-bi) \neq 0.$$

Dalje je $P_n(x) = \left[(x-a)^2 + b^2\right]^k \varphi_{n-2k}(x)$, ili

$$P_n(x) = \left(x^2 + px + q\right)^k \varphi_{n-2k}(x) \tag{1.6}$$

gdje je: $p=-2a,\ q=a^2+b^2$.

## 1.3.1.2. Rastavljanje razlomljenih racionalnih funkcija na zbir elementarnih razlomaka

Neka je data neprava razlomljena racionalna funkcija $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Tada se ona može izraziti u obliku

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lambda(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}, \tag{1.7}$$

gdje je $\lambda(x)$ cijela racionalna funkcija reda $n-m$, a $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ prava razlomljena racionalna funkcija. Funkcija $\lambda(x)$ se dobije dijeljenjem $P_n(x)$ sa $Q_m(x)$, a $R(x)$ je ostatak koji se dobije pri tom dijeljenju.

***Primjer* 1.13.** Funkciju $\dfrac{2x^4+3x+5}{x^2+x+1}$ napisati u obliku zbira cijele i prave razlomljenje racionalne funkcije.

***Rješenje.*** Dijeljenjem $2x^4+3x+5$ sa $x^2+x+1$ dobija se $2x^2-2x$ i ostatak $5x+5$. Znači, može se pisati

$$\frac{2x^4+3x+5}{x^2+x+1}=2x^2-2x+\frac{5x+5}{x^2+x+1}.$$

Ubuduće ćemo razmatrati samo prave razlomljene racionalne funkcije $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Pored toga, pretpostavićemo da je cijela racionalna funkcija $Q_m(x)$ normirana, što ne umanjuje opštost zadatka.

Izrazee oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k}\ \boldsymbol{i}\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},\quad k\in\mathbf{N}$$

gdje je $a,p,q,A,M,N\in\mathbf{R}$ i $p^2-4q<0$ nazivamo *elementarni* razlomci.

**Teorema 1.8.** *Neka je* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *prava razlomljena racionalna funkcija i neka je* $x=a$, *k-struki realni korijen nazivnika, tj.* $Q(x)=(x-a)^k Q_1(x)$, *gdje je* $Q_1(a)\neq 0$. *Tada vrijedi*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)},\tag{1.8}$$

*gdje je A konstanta različita od nule, a* $P_1(x)$ *cijela racionalna funkcija nižeg reda od reda cijele racionalne funkcije* $(x-a)^{k-1}Q_1(x)$.

***Dokaz.*** Kako je jednakost

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P(x)-AQ_1(x)}{(x-a)^kQ_1(x)}\tag{1.9}$$

zadovoljena za svako $A$, odredimo $A$ tako da je $P(x)-AQ_1(x)$ djeljivo sa $x-a$. Prema lemi 1.1. to je ispunjeno ako i samo ako je

$$P(a)-AQ_1(a)=0.$$

Kako je $Q_1(a)\neq 0,\ \ P(a)\neq 0$, to je

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

Pri tom je

(1.10) $$P(x) - A\,Q_1(x) = (x-a)\,P_1(x),$$

gdje je $P_1(x)$ cijela racionalna funkcija reda nižeg od reda funkcije $(x-a)^{k-1}Q_1(x)$.
Na osnovu relacija (1.10) i (1.9) slijedi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{(x-a)\,P_1(x)}{(x-a)^k\,Q_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}.$$

Time je teorema dokazana..

Primjenjujući istu teoremu na pravu racionalnu funkciju $\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ uzastopno $k$-puta dobićemo jednakost

(1.11) $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-2}} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)},$$

gdje je $\dfrac{P_k(x)}{Q_k(x)}$ prava razlomljena funkcija koja se ne može skratiti.

Prethodna teorema razmatra razlaganje pravih razlomljenih racionalnih funkcija u slučaju da su korijeni nazivnika realni. Sljedeća teorema razmatra razlaganje prave razlomljene racionalne funkcije kada su korijeni nazivnika konjugovano kompleksni, mnogostrukosti $r$.

**Teorema 1.9.** *Neka je* $Q(x) = \left(x^2 + px + q\right)^r Q_1(x),\ \ p^2 - 4q < 0$*, gdje je* $Q_1(x)$ *cijela racionalna funkcija nedjeljiva sa* $x^2 + px + q$*. Tada se prava razlomljena funkcija* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *može izraziti u obliku*

(1.12) $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^r} + \frac{P_1(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{r-1}Q_1(x)},$$

*gdje je* $P_1(x)$ *cijela racionalna funkcija nižeg reda od*

$$\left(x^2+px+q\right)^{r-1}Q_1(x).$$

***Dokaz.*** Iz uslova teoreme slijedi da je

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\left(x^2+px+q\right)^r Q_1(x)},$$

a to se može napisati u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^r} + \frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{\left(x^2+px+q\right)^r Q_1(x)} \qquad (1.13)$$

Jednakost (1.13) je zadovoljena za svako realno $M$ i $N$ odredimo ih tako da je

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$$

djeljivo sa $x^2+px+q$. To će biti ako i samo ako su $a+bi$ i $a-bi$ korijeni jednačine

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x)=0.$$

To znači da, naprimjer, za $x=a+bi$ vrijedi jednakost

$$P(a+bi)-[M(a+bi)+N]Q_1(a+bi)=0$$

ili

$$M(a+bi)+N=\frac{P(a+bi)}{Q_1(a+bi)}.$$

Kako je $\frac{P(a+bi)}{Q_1(a+bi)}$ određen kompleksan broj to ga možemo izraziti u obliku $K+iL$, gdje su $K$ i $L$ realni brojevi. Na osnovu toga prethodna jednakost će glasiti

$$Ma+N+Mbi=K+iL,$$

odakle je

$$Mb=L, \quad Ma+N=K,$$

ili

$$M=\frac{L}{b}, \quad N=K-Ma=\frac{Kb-La}{b}.$$

Za ove vrijednosti $M$ i $N$ izraz $P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$ ima korijen $a+bi$, a takođe i $a-bi$, što znači da je djeljiv sa $x-(a+bi)$ i $x-(a-bi)$, odnosno sa $x^2+px+q$. Neka je rezultat dijeljenja $P_1(x)$. Tada je

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x)=\left(x^2+px+q\right)P_1(x).$$

Na osnovu toga se iz relacije (1.13) dobija

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^r} + \frac{\left(x^2+px+q\right)P_1(x)}{\left(x^2+px+q\right)^r Q_1(x)} =$$

$$= \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^r} + \frac{P_1(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{r-1} Q_1(x)}.$$

Time je teorema dokazana.

Ako se na drugi sabirak desne strane prethodne jednakosti primijeni teorema (1.9) uzastopno $(r-1)$-puta dobiće se jednakost

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^r}+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^{r-1}}+\cdots+\frac{M_{r-1}x+N_{r-1}}{x^2+px+q}+\frac{P_r(x)}{Q_r(x)},$$

gdje je $\dfrac{P_r\ (x)}{Q_r\ (x)}$ prava razlomljena funkcija koja se ne može skratiti.

Neka je $\dfrac{P\,(x)}{Q\,(x)}$ prava razlomljena racionalna funkcija i neka je

$$Q(x)=(x-a)^n\cdot\dots\cdot(x-b)^m\left(x^2+px+q\right)^r\cdot\dots\cdot\left(x^2+1\cdot x+t\right)^s,$$

gdje je

$$a,\dots,b,p,\dots,1,q,\dots,t\in\boldsymbol{R}\ ;\ p^2-4q<0;\ \dots\ ,1^2-4t<0,$$
$$n,\dots,m,r,\dots,s\in\boldsymbol{N}.$$

Ako se na funkciju $\dfrac{P\,(x)}{Q\,(x)}$ primijene teoreme 1.8. i 1.9. za odgovarajuće ko-rijene, tada se ona može pisati u obliku

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\frac{A}{\left(x-a\right)^n}+\frac{A_1}{\left(x-a\right)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_{n-1}}{x-a}+\cdots+\frac{B}{(x-b)^m}+\\&+\frac{B_1}{(x-b)^{m-1}}+\cdots+\frac{B_{m-1}}{x-b}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^r}+\\&+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^{r-1}}+\cdots+\ +\frac{M_{r-1}x+N_{r-1}}{x^2+px+q}+\cdots+\\&+\frac{Px+Q}{\left(x^2+px+q\right)^s}+\frac{P_1x+Q_1}{\left(x^2+px+q\right)^{s-1}}+\cdots+\frac{P_{s-1}x+Q_{s-1}}{x^2+1\cdot x+t}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Nepoznati koeficijenti $A,A_1,\dots,A_{n-1},B,B_1,\dots,B_{m-1},M,M_1,\dots,$ $N,N_1,\dots,N_{r-1},P,P_1,\dots,P_{s-1},Q,Q_1,\dots,Q_{s-1}$ se mogu odrediti na osnovu sljedećih uslova. Jednakost (1.14) je identičnost. Množenjem identičnosti sa najmanjim zajedničkim sadržaocem nazivnika identičnost će se svesti na identičnost polinoma, pa će se izjednačavanjem koeficijenata odgovarajućih stepena dobiti sistem linearnih jednačina sa nepoznatim koeficijentima. Rješavanjem tog sistema dobiće se vrijednosti nepoznatih koeficijenata.

***Primjer* 1.14.** Razlomak $\dfrac{x^2+5}{(x+1)^2(x-2)}$ razložiti na elementarne razlomke.

***Rješenje.*** Kako su $x=-1$ i $x=2$ realne nule nazivnika to se može pisati

$$\frac{x^2+5}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

odakle se množenjem sa $(x+1)^2(x-2)$ dobija

$$x^2+5=A(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)^2$$

ili

$$x^2+5=(B+C)x^2+(A-B+2C)x-2A-2B+C\,.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata sa lijeve i desne strane pret-hodne jednakosti dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} B+C&=1\\ A-B+2C&=0\\ -2A-2B+C&=5 \end{aligned}$$

čije je rješenje $A=-2,\ B=0,\ C=1$. Dakle

$$\frac{x^2+5}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{-2}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-2}\,.$$

***Primjer* 1.15.** Neka je $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{2x^2+3x-1}{(x-1)^3(x+2)}$. Pravu razlomljenu racio-nalnu funkciju $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ napisati u obliku zbira elementarnih razlomaka.
a) Kao u primjeru 1.14; b) primjenom teoreme 1.8.

***Rješenje.*** Funkcija $Q(x)$ ima trostruku nulu $x=1$ i jednostruku nulu $x=2$. Prema relaciji (1.14) je

(a)
$$\frac{2x^2+3x-1}{(x-1)^3(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+2}\,.$$

Množenjem prethodne jednakosti sa $(x-1)^3(x+2)$ dobićemo

$$2x^3+3x-1=A(x+2)+A_1(x-1)(x+2)+A_2(x-1)^2(x+2)+B(x-1)^3$$

ili

$$\begin{aligned} 2x^3+3x-1=(A_2+B)x^3+(A_1-3B)x^2+\\ +(A+A_1-3A_2+3B)x+2A-2A_1+2A_2-B\,, \end{aligned}$$

odakle se dobija sistem jednačina

$$\begin{aligned} A_2+B&=0\\ A_1-3B&=2\\ A+A_1-3A_2+3B&=3\\ 2A-2A_1+2A_2-B&=1. \end{aligned}$$

Rješavanjem prethodnog sistema jednačina dobijamo

$$A=\frac{4}{3};\quad A_1=\frac{17}{9};\quad A_2=\frac{1}{27};\quad B=-\frac{1}{27}\,.$$

Zamjenom ovih vrijednosti u relaciju (a) dobijamo

$$\frac{2x^2+3x-1}{(x-1)^3(x+2)}=\frac{4}{3}\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{17}{9}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{27}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{27}\frac{1}{x+2}.$$

b) Prema relaciji (1.8) je

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2x^2+3x-1}{(x-1)^3(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{P_1(x)}{(x-1)^2Q_1(x)},$$

gdje je konstanta $A$ i funkcija $P_1(x)$ nepoznata, koje treba odrediti. Na os-novu teoreme 1.8. je

$$A=\frac{P_1(1)}{Q_1(1)}=\frac{2\cdot 1^2+3\cdot 1-1}{1+2}=\frac{4}{3}.$$

Relacija (1.10), za date vrijednosti, ima oblik

$$2x^3+3x-1-\frac{4}{3}\left(x+2\right)=(x-1)\,P_1(x)$$

odakle slijedi

$$P_1(x)=\frac{6x+11}{3}.$$

Sada se primjenjuje isti postupak na razlomljenu racionalnu funkciju

$$\frac{6x+11}{3(x-1)^2(x+2)}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{P_2(x)}{(x-1)(x+2)},$$

odakle je $\dfrac{P_1(1)}{Q_2(1)}=\dfrac{17}{9}=A_1$.

Iz

$$\frac{6x+11}{3}-\frac{17}{9}(x+2)=(x-1)\,P_2(x)$$

slijedi $P_2(x)=\dfrac{1}{9}$.

Dalje je

$$\frac{P_2(x)}{Q_3(x)}=\frac{1}{9(x-1)(x+2)}=\frac{A_2}{x-1}+\frac{P_3}{x+2},$$

$$A_2=\frac{1}{27};\quad \frac{1}{9}-\frac{1}{27}(x+2)=(x-1)\,P_3\Rightarrow P_3=-\frac{1}{27}.$$

Dobijeni rezultati su isti kao i u slučaju a).

#### 1.3.1.3. Iracionalne funkcije

Algebarske funkcije kod kojih se pojavljuje argument stepenovan racionalnim brojem nazivamo iracionalne funkcije.

Naprimjer:

$$y = x + \sqrt[3]{x}; \quad y = \sqrt{x},$$

$$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + 2x + 1}; \quad y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}.$$

## 1.3.2. Transcedentne funkcije

Funkcije koje nisu algebarske nazivamo transcedentnim funkcijama.

Elementarne transcedentne funkcije su eksponencijalna i njena in-verzna (logaritamska) funkcija, trigonometrijske ili cirkularne i njihove inver-zne funkcije (arkus ili ciklometrijske funkcije).

Pomoću eksponencijalne funkcije definišu se i hiperbolične funkcije i (njihove inverzne funkcije) area funkcije.

### 1.3.2.1. Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Funkciju $y = a^x,\ a \neq 1,\ a > 0$ nazivamo eksponencijalne funkcija. Ona ima sljedeće osobine:

a) domena funkcije je $D = R$, a kodomena skup

$$V = \{\, y : y > 0, y \in \boldsymbol{R} \},$$

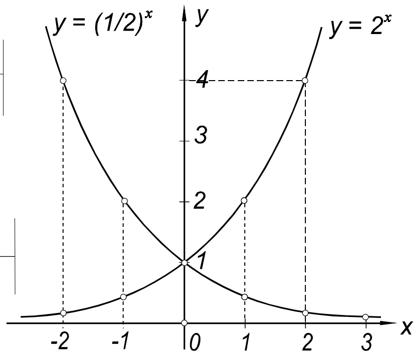
b) sve krive sijeku $y$-osu u tački $(0,1)$,

c) za $a > 1$ funkcija je strogo rastuća, a za $0 < a < 1$ strogo opadajuća, što neposredno slijedi iz definicije monotonih funkcija i nejedna-
kosti stepena.

Naprimjer, funkcije: $y = 2^x$ i $y = 2^{-x}$ date su tabelarnim prika-zom. Nacrtati njihove grafike .

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 |

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^{-x}$ | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |




Sl. 1.8.

Iz tabelarnog prikaza i sa Sl.1.8. zapažamo da je funkcija $y = 2^x$ strogo rastuća i da je funkcija $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ strogo opadajuća.

Razmotrimo funkciju oblika $y = b\,a^x$. Kako je

$$b = a^{\log_a b} = a^{\frac{\log b}{\log a}},$$

to vrijedi

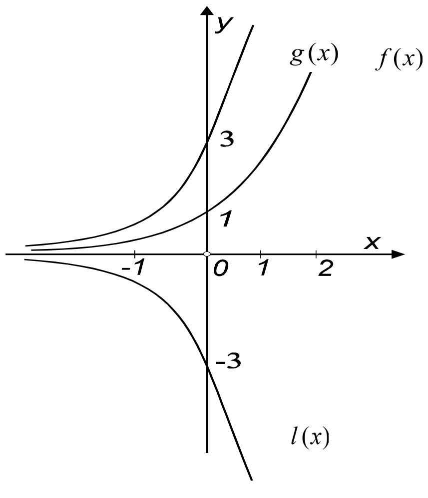
$$y = b \cdot a^x = a^{x + \frac{\log b}{\log a}}.$$

Znači grafik funkcije $y = b\,a^x$ se dobije translacijom grafika funkcije $y = a^x$ u pravcu $x$-ose za $\frac{\log b}{\log a}$. Ako je $\frac{\log b}{\log a} > 0$ translacija se vrši u ne-gativnom smjeru, u protivnom translacija se vrše u pozitivnom smjeru.

***Primjer* 1.17.** U istom koordinatnom sistemu nacrtati grafike funkcija

$$f(x) = 2^x, \;\; g(x) = 3 \cdot 2^x, \;\; l(x) = -3 \cdot 2^x .$$

***Rješenje.*** Grafik funkcije $f(x) = 2^x$ je nacrtan na Slici 1.8 i dat odgovarajući tabelarni prikaz. Funkciju $g(x) = 3 \cdot 2^x$ možemo izraziti u obliku $g(x) = 2^{x + \frac{\log 3}{\log 2}}$, znači grafik te funkcije se može dobiti translacijom grafika funkcije $f(x) = 2^x$ za $\frac{\log 3}{\log 2}$ u negativnom smjeru.




Sl. 1.9.

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0,75 | 1,50 | 3,00 | 6,00 | 12,00 |

Iz $l(x) = -g(x)$ slijedi: grafik funkcije $l(x)$ je simetričan u odnosu na $x$-osu grafiku funkci-je $g(x)$, sl.1.9.

Eksponencijalna funkcija $y = a^x$ se zapisuje i u obliku $x = \log_a y$, gdje je $x$ zavisna a $y$ nezavisna varijabla. Ako $x$ i $y$ zamijene mjesta do-bićemo relaciju $y = \log_a x$, koju nazivamo logaritamska funkcija. Logari-tamska funkcija, kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije ima domenu $D = \langle 0, +\infty \rangle$ a kodomenu $V = \langle -\infty, +\infty \rangle$.

Dakle, funkcija

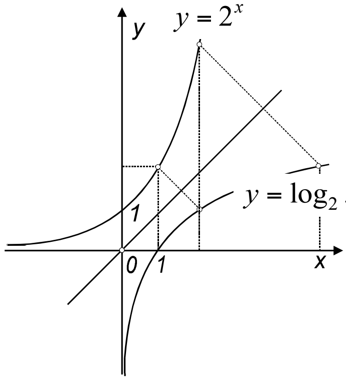
$$y = \log_a x, \quad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$$

je logaritamska funkcija.

***Primjer* 1.18.** Na istom koordinatnom sistemu nacrtati grafik funkcije

$$y = 2^x \text{ i } y = \log_2 x.$$

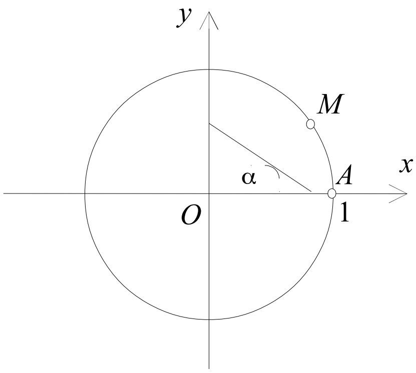
| x | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| log2 x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | $\cdots$ |




Sl. 1.10.

### 1.3.2.2. Trigonometrijske funkcije

Kružnica jediničnog polumjera sa centrom u ishodištu pravouglog koordninatnog sistema je trigonometrijska kružnica (Sl.1.11).




Svakoj tački $M$ trigonometrijske kružnice odgovara jedan i samo jedan orijentisani ugao

$$\alpha, \quad 0 < \alpha < 360^0,$$

čiji je prvi krak pozitivna poluosa $Ox$, a drugi krak promjenljivi krak određen polupravom $OM$.

Sl. 1. 11.

**Definicija 1.4.** *Sinius* (*cosinus*) *ugla* $\alpha$ (*ili luka* $\overset{\frown}{AM}$ ) *je ordinata* (*apcisa*) *tačke u kojoj promjenljivi krak ugla* $\alpha$ (*ili luka* $\overset{\frown}{AM}$ ) *siječe tri-gonometrijsku kružnicu.*

**Definicija 1.5.** *Tangens* (*kotangens*) *ugla* $\alpha$ *ili luka* $\overset{\frown}{AM}$ *je ordinata* (*apcisa*) *tačke u kojoj promjenljivi krak siječe tangentnu osu*, *tj. pravu* $x=1$ (*kotangentnu osu*, *tj. pravu* $y=1$).

Trigonometrijske funkcije su funkcije:

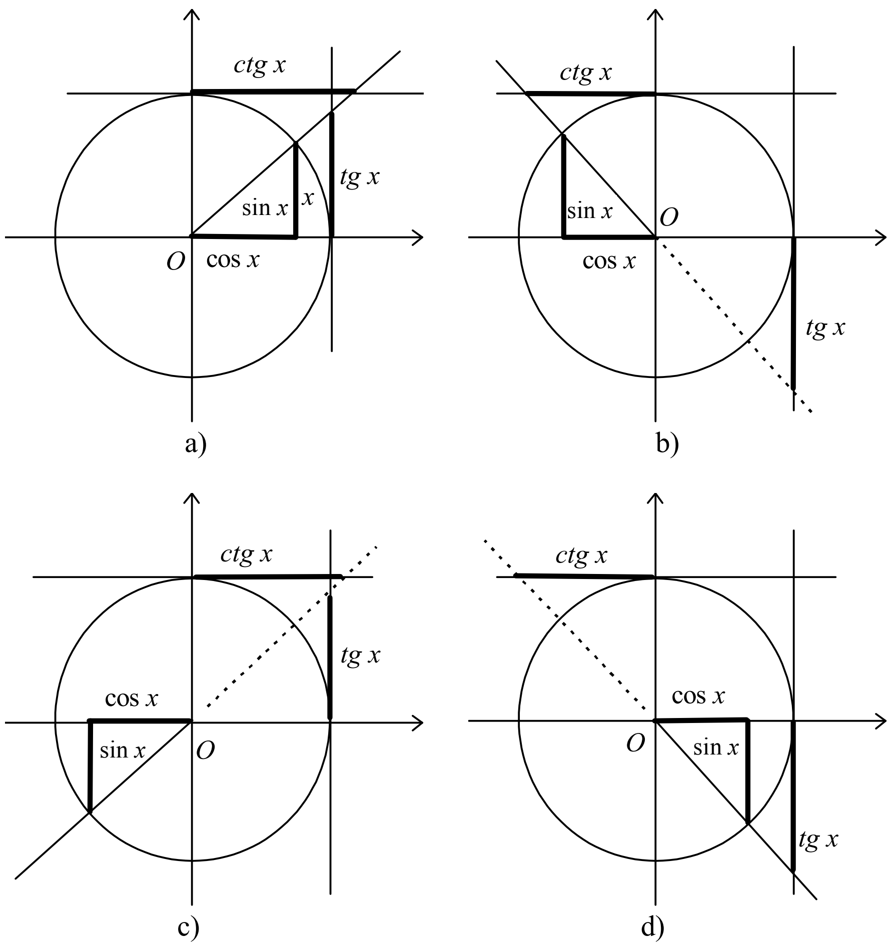
$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=tg\,x \text{ i } y=ctg\,x\,.$$

Kod ovih funkcija argument, kako je dato u definicijama, se izražava kao mjera ugla u stepenima ili kao mjera ugla u lučnim jedinicama (radijanima).

Vrijednost trigonometrijskih funkcija za $x\in\langle 0,2\pi\rangle$, za intervale:

$$x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle,\quad x\in\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle,\quad x\in\left\langle\pi,\frac{3\pi}{2}\right\rangle,\quad x\in\left\langle\frac{3\pi}{2};2\pi\right\rangle$$

je prikazana na slici 1.12. a), b), c) i d) respektivno.




Sl. 1.12.

Na osnovu definicija trigonometrijskih funkcija (ili sa slike 1.12) mo-že se odrediti znak tih funkcija za interval $\langle 0,2\pi\rangle$ i vrijednosti za $x=0;\frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2};2\pi$ u obliku tabele 1.1.

| $x$ | 0 | | $\pi/2$ | | $\pi$ | | $3\pi/2$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | + | 1 | + | 0 | - | -1 | - | 0 |
| $\cos x$ | 1 | + | 0 | - | -1 | - | 0 | + | 1 |
| $tg\,x$ | 0 | + | $\pm\infty$ | - | 0 | + | $\pm\infty$ | - | 0 |
| $ctg\,x$ | $\pm\infty$ | + | 0 | - | $\pm\infty$ | + | 0 | - | $\pm\infty$ |

Tabela 1.1.

Do sada smo razmatrali vrijednost trigonemetrijskih funkcija za $x\in[0,2\pi]$. Pretpostavili smo da se tačka $M$ kreće u pozitivnom smjeru po trigonometrijskoj kružnici od tačke $A$. Kada tačka $M$ obiđe cijelu kružnicu doći će ponovo u tačku $A$, biće $x=2\pi$. Ona može dalje nastaviti kretanje, ugao će biti veći od $2\pi$. Kada tačka $M$ po drugi put obiđe kružnicu i dođe u tačku $A$, poluprečnik $OM$ opiše ugao $4\pi$, itd. Na isti način tačka $M$ se može kretati i u negativnom smjeru. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}&\sin(2\pi+x)=\sin x,\\&\cos(2\pi+x)=\cos x,\\&tg(\pi+x)=tg\,x,\\&ctg(\pi+x)=ctg\,x.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Može se zapaziti da vrijedi:

$$\begin{aligned}&\sin(-x)=-\sin x,\quad \cos(-x)=\cos x,\\&tg(-x)=-tg\,x,\quad ctg(-x)=-ctg\,x,\end{aligned}\tag{1.16}$$

tj. vidi se da su $\sin x,\ tg\,x$ i $ctg\,x$ neparne funkcije, a $\cos x$ parna funkcija.

Ako se u relacijama (1.15) $x$ zamijeni sa $-x$ tada na osnovu rela-cija (1.16) slijede relacije:

$$\begin{aligned}&\sin(2\pi-x)=-\sin x,\quad \cos(2\pi-x)=\cos x,\\&tg(2\pi-x)=-tg\,x,\quad ctg(2\pi-x)=-ctg\,x.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Takođe se mogu provjeriti i relacije:

$$\sin(\pi+x)=-\sin x,\quad \cos(\pi+x)=-\cos x.\tag{1.18}$$

$$(1.19)\qquad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos x; \quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x; \\ tg\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-ctg\,x; \quad ctg\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-tg\,x. \end{cases}$$

$$(1.20)\qquad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x; \quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x; \\ tg\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=ctg\,x; \quad ctg\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=tg\,x. \end{cases}$$

Prema relacijama (1.15), ako je poznat tok i grafik trigonometrijskih funkcija $y=\sin x$ i $y=\cos x$ za $x\in[0,2\pi]$ biće poznat i za svako $x\in\boldsymbol{R}$. Za funkcije $y=tg\,x$ i $y=ctg\,x$ dovoljno je poznavati tok i grafik za in-terval $[0,\pi]$.

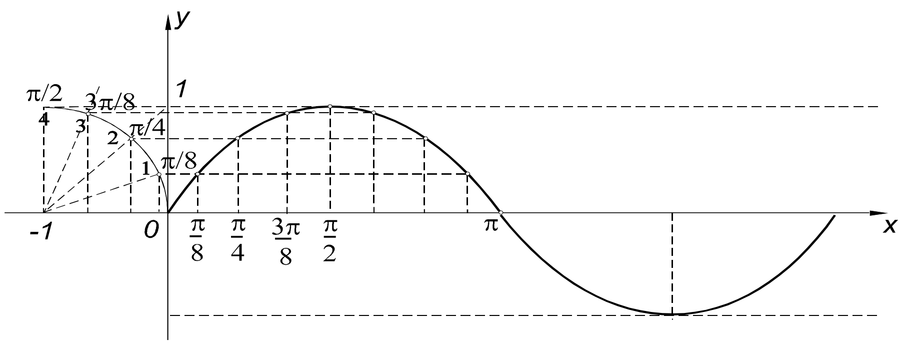
Luk kružnice

$$x-1=\cos t;\quad y=\sin t;\quad t\in[0;\pi/2]$$

podijelimo na $n$ jednakih dijelova. Izvršimo istu podjelu i segmenata na osi $Ox$. Neka lukovima, polazeći od tačke $(0,0);0;\pi/2n;\cdots;k\pi/2n;\cdots;n\pi/2n$ odgovaraju tačke $0,1,2,\dots,k,\dots,n$; respektivno. Ordinate tačaka $0,1,2,\dots,k,\dots,n$ su $\sin 0,\sin\pi/2n,\dots,\sin k\pi/2n,\dots,\sin n\pi/2n$. Ako u tački $k$ konstruišemo paralelu sa osom $Ox$, a u tački $k\pi/2n\in[0,\pi/2]$ pravu paralelnu osi $y$ dobićemo tačku $(k\pi/2n;\sin k\pi/2n)$ $(k=0,1,\dots,n)$ grafika funkcije $y=\sin x$ (Sl.1.13). Prema relacijama (1.19) i (1.20) je

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

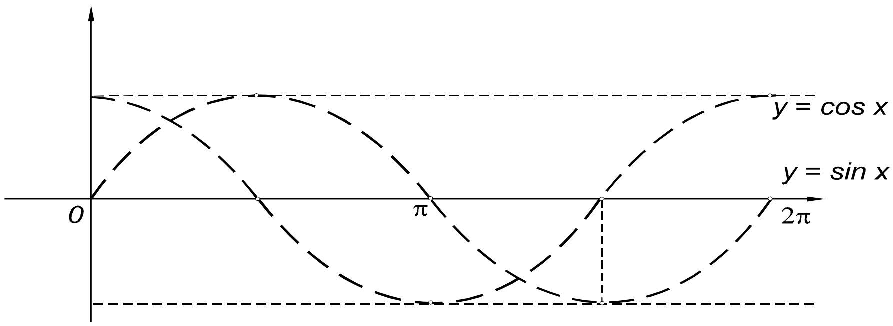
što znači da je grafik funkcije $y=\sin x$ $x\in[0,2\pi]$ simetričan u odnosu na pravu $x=\dfrac{\pi}{2}$. Ta osobina se može iskoristiti za




Sl. 1.13.

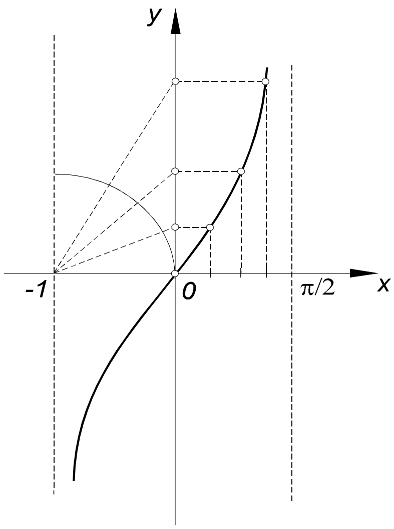
crtanje grafika na intervalu $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ na osnovu poznatog grafika na intervalu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Slično, na osnovu relacije (1.18) može se konstruisati grafik na in-tervalu $[\pi,2\pi]$. Grafik funkcije $y=\sin x$ na intervalu $\langle -\infty,+\infty\rangle$ se dobija translacijom grafika te funkcije na intervalu $[0,2\pi]$ za $2k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\cdots$ u pravcu apcisne ose.

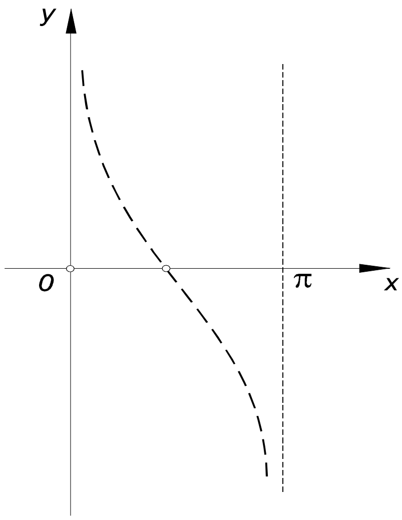
Kako je $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ to se grafik funkcije $y=\cos x$ može dobiti translacijom grafika $y=\sin x$ za $\pi/2$ u negativnom pravcu apcisne ose (Sl.1.14).




Sl. 1.14.

Tok funkcije $y=tg\,x$ najlakše je pratiti na intervalu $[-\pi/2;\pi/2]$. Grafik funkcije $y=tg\,x$ na intervalu $[0;\pi/2]$ je dat slikom 1.15. Za vrijednost argumenta $x\in[-\pi/2;0]$ grafik se može nacrtati na osnovu relacije (1.16).



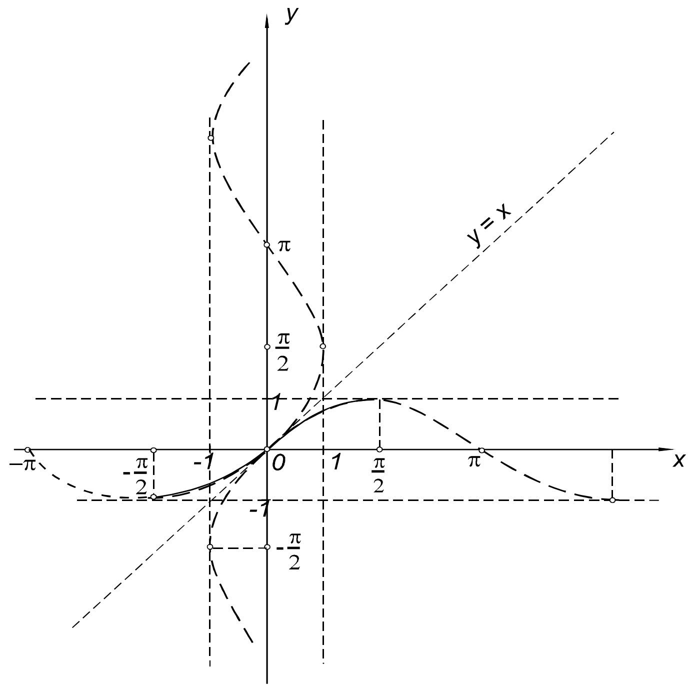




Sl. 1.15. Sl. 1.16.

Prema definiciji funkcije $y = tg\,x$ može se konstruisati njen grafik (Sl.1.16). Taj postupak ovom prilikom nećemo razmatrati jer je i taj postu-pak, kao i prethodna tri razmatran u srednjoj školi.

### 1.3.2.3. Ciklometrijske funkcije

Funkcija $y = \sin x$ za $x \in \langle -\pi/2\,; \pi/2 \rangle$ je bijekcija, što znači da ona na tom intervalu ima inverznu funkciju, koju označavamo sa $y = \arcsin x$, i čitamo " $y$ jednako arkus sinus $x$ ".




Sl. 1.17.

Grafik funkcije $y = \arcsin x$ je simetričan grafiku funkcije $y = \sin x$ u odnosu na pravu $y = x$. Ta osobina se može iskoristiti za konstrukciju grafika funkcije $y = \arcsin x$. Na osnovu te osobine može se konstruisati grafik inverzne funkcije $y = \sin x$, $x \in [-\pi/2\,; \pi/2]$ (Sl.1.17). Translacijom tog grafika za $2k\pi,\ k = \pm 1, \pm 2, \pm \cdots$ dobijamo grafik fun-kcije, koju ćemo označavati sa

$$y = Arc\sin x\,.$$

Inverzne funkcije ostalih trigonometrijskih funkcija i njihove grafike ovom prilikom nećemo objašnjavati. Taj problem je razmatran skoro u svim matematičkim analizama. On može poslužiti i kao primjer za vježbu.

## 1.4. Zadaci za vježbu

**1.** Ispitati ograničenost funkcija:

a) $y = 3\sin(2x+3)$; b) $y = tg(2x+1)$; c) $y = x^2$;

d) $y = \sqrt{x}$; e) $y = \frac{\sin x}{x}, \ x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right\rangle$.

Ako za te funkcije postoji $\inf y$ ili $\sup y$ odrediti ih.

**2.** Odrediti oblast definisanosti funkcija:

a) $y = \frac{x^2+x}{x+1}$; b) $y = \frac{1}{x} + \sin x$;

c) $y = \sqrt{x^2-1}$; d) $y = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{x}$;

e) $y = \arcsin(2x-1)$; f) $y = artg(3x-1)$;

g) $x^2 + y^2 = a$; h) $x \cdot y = 1$.

**3.** Ispitati parnost funkcije

a) $y = x^3 + 3x$; b) $y = x^4 + \frac{x^2}{2} + 1$;

c) $y = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$; d) $y = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right)$.

**4.** Odrediti period funkcija

a) $y = 5 + 2\sin(1-x)$; b) $y = 3 + \sin \pi x$.

**5.** Odrediti intervale u kojima funkcija monotono (strogo) raste odnoso opada:

a) $y = 2x - 3$; b) $y = x^2 - 3x + 2$;

c) $y = \cos x$; d) $y = 3^x$;

e) $y = \log x$; f) $y = \frac{1}{x}$.

**6.** Odrediti ekstreme funkcija:

a) $y = x^2$; b) $y = x^2 - 3x + 2$;

c) $y = -x^2 + 5x - 6$; d) $y = \sin x$.

**7.** Razlomljenu racionalnu funkciju izraziti u obliku zbira cijele i prave raz-lomljene racionalne funkcije:

a) $y = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3}$; b) $y = \dfrac{x^5}{x^4 + 3}$;

c) $y = \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x + 1}$; d) $y = \dfrac{2x^2 + 5x + 1}{x + 1}$.

**8.** Razlomljene racionalne funkcije izraziti u obliku zbira elementarnih raz-lomaka:

a) $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$; b) $y = \dfrac{x}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 4)}$;

c) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 + x + 1}$; d) $y = \dfrac{3x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)}$;

e) $y = \dfrac{x^2 + 3}{(x^2 + 4x + 4)(x^2 - 1)}$; f) $y = \dfrac{x^3 + 5}{(x^3 + 1)^2 (x - 4)}$.

**9.** Konstruisati grafik funkcije:

a) $y = ctg\, x$; b) $y = \sin(2x + 1)$;

c) $y = tg\,(2x + 1)$; d) $y = \cos(2x + 1)$.

**10.** Konstruisati grafik funkcije:

a) $y = \dfrac{1}{\sin x}$; b) $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

# 2. Niz. Granična vrijednost niza

## 2.1. Pojam niza

**Definicija 2.1.** *Neka je* $\boldsymbol{N}_1$ *neprazan skup skupa* $\boldsymbol{N}$. *Funkcija* $y = f(n)$, $n \in \boldsymbol{N}_1$ *zove se niz u* $\boldsymbol{N}_1$.

Niz se obilježava i sa $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, gdje je $a_n$ vrijednost $f(n)$, $n = 1,2,\dots$. Izrazi $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$ ili $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ su članovi niza, i nazivaju se: prvim, drugim, ... , $n$-tim ili opštim članom niza, respektivno.

Ako je domena niza konačan skup, za niz se kaže da je konačan. Ako je domena niza skup prirodnih brojeva za niz se kaže da je beskonačan. Ubuduće ćemo, ako ne bude drugačije naglašeno, govoriti samo o beskonačnim nizovima i označavati ih sa $\{a_n\}$. Umjesto termina "besko-načni niz" koristićemo termin "niz".

Da bi niz bio poznat dovoljno je poznavati opšti član niza, tj. zakon ostvarenja opšteg člana niza $\{a_n\}$. Tako naprimjer za niz

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

opšti član je $a_n = n^2$, ili za niz

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$$

opšti član je

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Ako je poznat opšti član niza onda se zamjenom vrijednosti $n = 1, 2, \ldots$ iz opšteg člana mogu odrediti članovi niza.

***Primjer* 2.1.** Za niz $\left\{\frac{n+1}{n^2}\right\}$ odrediti prvih nekoliko članova.

***Rješenje.*** Ako se u opšti član niza umjesto $n$ zamijeni 1,2,3 i 4 dobiće se 2, 3 / 4, 4 / 9, 5 / 16, respektivno.

**Definicija 2.2.** *Za niz* $\{a_n\}$ *se kaže da raste*, *odnosno opada*, *ako je*

(2.1) $$a_n \le a_{n+1}, \quad \forall n \in \boldsymbol{N}$$

*odnosno*

(2.2) $$a_n \quad a_{n+1}, \quad \forall n \in \boldsymbol{N}.$$

Ako umjesto $\le$, odnosno   , stoji $<$, odnosno $>$, za niz se kaže da strogo raste, odnosno strogo opada.

Rastuće i opadajuće nizove zovemo *monotonim nizovima*.

***Primjer* 2.2.** Niz $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ je strogo opadajući niz. Zaista je $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, jer je

$$\forall n \in \boldsymbol{N}, \quad \frac{n+1}{n} > \frac{(n+1)+1}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 > n^2 + 2n.$$

**Definicija 2.3.** *Za niz* $\{a_n\}$ *se kaže da je ograničen*, *ograničen odozdo*, *ograničen odozgo ako je skup* $\{a_n \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ *ograničen*, *ograničen odozdo*, *ograničen odozgo*, *respektivno*.

**Definicija 2.4.** *Za niz* $\{a_n\}$ *kažemo da ima infimum*, *odnosno supremum*, *ako postoji infinum*, *odnosno supremum skupa* $\{a_n \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ *i označavamo ih sa*

$$\inf_n a_n, \text{ odnosno } \sup_n a_n.$$

## 2.2. Pojam granične vrijednosti niza

**Definicija 2.5.** *Za niz* $\{a_n\}$ *se kaže da teži ili konvergira broju* ***a***, *ako za svaki proizvoljno mali broj* $\varepsilon > 0$, *postoji* $n_0(\varepsilon) \in$ ***N*** *takav da je*

(2.3) $$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0(\varepsilon).$$

Broj $a$ je granična vrijednost ili limes niza $\{a_n\}$. Da niz $\{a_n\}$ konvergira ka $a$ označava se sa

$$a_n \to a \text{ kad } n \to \infty \text{ ili kraće } a_n \to a,$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ ili kraće } \lim a_n = a.$$

Za niz koji ima graničnu vrijednost kaže se da je konvergentan, a za niz koji nije konvergentan kaže se da je *divergentan*.

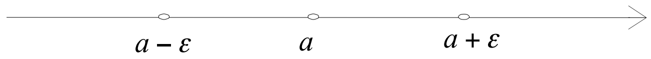
Definicija granične vrijednosti niza može se dati kraće i razumljivije nakon uvođenja sljedećih pojmova:

1) Od niza $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ izostavljanjem konačnog broja prvih $(m-1)$ članova dobiće se "krajnji dio" niza $\{a_n\}$.

2) Kažemo da skoro svi članovi niza $\{a_n\}$ pripadaju skupu $M$, ako je $a_n \in M$, a za konačno $n$ vrijedi $a_n \notin M$.

Tada bi se definicija 2.5 mogla dati u obliku:

*Niz* $\{a_n\}$ *konvergira ka* ***a*** *ako svaka* $\varepsilon$ *okolina broja* $a$, $U_\varepsilon(a)$, *sadrži skoro sve članove niza* $\{a_n\}$. (Sl.2.1).




Sl. 2.1.

$U_\varepsilon(a)$, tj. interval $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$ sadrži skoro sve članove niza $\{a_n\}$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

***Primjer* 2.3.** Niz $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ ima graničnu vrijednost 1, jer je

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ *)},$$

gdje je

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \text{ili} \quad n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

pa je

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 .$$

Za $\varepsilon = 10^{-5}$ je $n_0 = \left[\dfrac{1}{10^{-5}}\right] + 1 = 10^5 + 1$ .

***Primjer* 2.4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{n} = 2$ jer je

$$\left|\frac{2n-3}{n} - 2\right| = \left|\frac{2n-3-2n}{n}\right| = \frac{3}{n} < \varepsilon$$

za $\dfrac{3}{n_0} < \varepsilon$ ili $n_0 > \dfrac{3}{\varepsilon}$, $n_0 = \left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right] + 1$. Za $\varepsilon = 0{,}016$ slijedi

$$n_0 = \left[\frac{3}{0{,}016}\right] + 1 = [187{,}5] + 1 = 188 .$$

## 2.3. Neke osobine konvergentnih nizova

**Teorema 2.1.** *Konvergentan niz* $\{a_n\}$ *ima samo jednu graničnu vri-jednost.*

***Dokaz.*** Pretpostavimo da $a_n$ konvergira ka $a$ i ka $b$, $a \neq b$ tj. $a_n \to a$, $a_n \to b$. Tada postoje prirodni brojevi $n_0(\varepsilon)$ i $n_1(\varepsilon)$ takvi da vri-jedi:

$\varepsilon$

*) Prema Arhimedovom aksiomu koji glasi:"Neka su $a$ ($a$>0) i $b$ bilo koji realni brojevi tada postoji prirodan broj $n$ sa osobinom $na \leq b$", slijedi: $n\cdot\varepsilon$ 1⇔1/$n$ <ε za svako $n>n_0(\varepsilon)$.

$$|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za svako} \quad n > n_1(\varepsilon) .$$

Neka je $n' = \max(n_0, n_1)$ . Tada vrijedi

$$|a-b| = |a_n - a - b + a_n| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n > n'),$$

odnosno

(*) $$|a-b| < \varepsilon .$$

Pošto je $\varepsilon$ proizvoljan broj $> 0$, to možemo uzeti da je $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$ pa zamjenom u nejednačinu (*) dobijamo

$$|a-b| < \frac{|a-b|}{2} \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{2}$$

što je kontradikcija, pa je, dakle, i naša pretpostavka da je $a \neq b$ nemoguća.

Neka je dat niz $\{a_n\}$. Ako se na bilo koji način izdvoji beskonačan broj elemenata

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}, \dots \quad \text{, gdje je} \quad n_1 < n_2 < \cdots < n_p < \cdots,$$

niza $\{a_n\}$, za taj niz se kaže da je *djelimični* ili *parcijalni niz* niza $\{a_n\}$.

**Teorema 2.2.** *Djelimičan niz konvergentnog niza je konvergentan i ima istu graničnu vrijednost kao i dati niz.*

***Dokaz.*** Ako se iz konvergentnog niza $\{a_n\}$ čija je granična vrijed-nost $a$, na bilo koji način, izdvoji beskonačan broj članova

(2.4) $$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}, \dots,$$

tada za niz (2.4) postoji $n_0(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$ za koje vrijedi

(2.5) $$\left|a_{n_p} - a\right| < \varepsilon \quad \text{za svako} \quad n_p > n_0(\varepsilon).$$

To je očigledno, jer je nejednakost sadržana u nejednakosti (2.3).

**Teorema 2.3.** *Konvergentan niz* $\{a_n\}$ *je ograničen.*

***Dokaz.*** Neka je $a$ granična vrijednost niza $\{a_n\}$. Tada prema definiciji granične vrijednosti niza interval $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle$ sadrži skoro sve članove niza $\{a_n\}$. Izvan tog intervala postoji samo konačan broj članova toga niza. Zbog toga se interval $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle$ može proširiti tako da sadrži
sve članove niza $\{a_n\}$. To znači da postoje brojevi $m$ i $M$ takvi da je

$$m \le a_n \le M \quad \text{za} \quad \forall n \in \boldsymbol{N},$$

odnosno da je niz $\{a_n\}$ ograničen.

**Teorema 2.4.** *Monoton i ograničen niz je konvergentan.*

***Dokaz.*** Neka je

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

strogo rastući niz i neka njegovi članovi zadovoljavaju nejednakosti

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < M$$

gdje je $M$ supremum niza, tj. $\sup a_n$ niza $\{a_n\}$. Tada za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$ za koje se članovi $a_n$ za $\forall n > n_0$ nalaze u intervalu

$$\langle M - \varepsilon, M\rangle.$$

To, na osnovu definicije granične vrijednosti, znači da je

$$\lim a_n = M.$$

Slično se dokazuje da je strogo opadajući ograničen niz konvergentan. Neka za članove niza $\{a_n\}$ vrijedi relacija

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots > m$$

gdje je $m$ $\inf a_n$ niza. Tada je $\lim a_n = m$.

**Definicija 2.6.** *Konvergentan niz* $\{a_n\}$ *čija je granična vrijednost nula je nula niz. Za veličinu* $a_n$ *kažemo da je beskonačno mala veličina.*

Iz definicije granične vrijednosti niza slijedi:"granična vrijednost niza je jedna jedina tačka nagomilavanja tog niza".

Neka niz $\{a_n\}$ ima više tačaka nagomilavanja. Tada postoje naj-manja, odnosno, najveća tačka nagomilavanja koje se zovu donji limes ili limes inferior, što se označava sa

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = l \text{ ili } \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = l,$$

odnosno gornji limes ili limes superior, što se označava sa

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = L \text{ ili } \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = L$$, respektivno.

Ako je niz ograničem tada uvijek postoji

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \text{ i } \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n,$$

a ako je neograničen sa donje odnosno sa gornje strane, onda se uzima

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{odnosno} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

respektivno.

Za niz $\{a_n\}$ kažemo da je stvarno divergentan, ako je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$

a da je divergentan ili da oscilira između $l$ i $L$ ako je

$$l = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \neq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = L.$$

## 2.4. Primjeri konvergentnih i divergentnih nizova

**1.** Konstantan niz $(a, a, \dots, a, \dots)$ je konvergentan i ima graničnu vri-jednost $a$.

Zaista, za svako $\varepsilon > 0$ i svako $n$ 1 je $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$, što znači da je $\lim a_n = a$.

**2.** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. To slijedi iz

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

**3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0$, za konstantno $p \in \boldsymbol{N}$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno mali dati broj. Kako $\frac{1}{n} \to 0$ za pozitivan broj $\varepsilon^p$ postoji broj $n_0 \in \boldsymbol{N}$ takav da za svako $n > n_0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{n} < \varepsilon^p .$$

Tada za svako $n$ vrijedi

$$\left|\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt[p]{n}} < \frac{1}{\sqrt[p]{\frac{1}{\varepsilon^p}}} = \varepsilon ,$$

tj.

$$\left|\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{za svako} \quad n > \frac{1}{\varepsilon^p} .$$

**4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Neka niz $\{a_n\}$ ima graničnu vrijednost $a$. Tada je niz

$$\alpha_n = a_n - a$$

nula niz, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 .$$

Tada slijedi iz definicije granične vrijednosti niza i definicije nula niza

$$|\alpha_n| = |a_n - a| < \varepsilon .$$

Neka je $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$ *). Tada je $\sqrt[n]{n} = a_n + 1$. Stepenovanjem ove jednakosti sa $n$ dobija se

$$n = (a_n + 1)^n = 1 + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \cdots + \binom{n}{n} a_n^n$$

$$1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

ili

$$n - 1 \quad \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

odnosno

$$a_n^2 \le \frac{2}{n} \quad \text{ili} \quad a_n \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} .$$

Na osnovu primjera 3. postoji broj $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ za $n \quad 2$ takav da je

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

odnosno za $n \quad 2$,

$$a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{2}\,\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon .$$

Znači niz $\left\{ \sqrt[n]{n} - 1 \right\}$ je nula niz. Time je granična vrijednost

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

dokazana.

**5.** $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, ako je $|q| < 1$.

Za $q = 0$ tvrdnja vrijedi na osnovu primjera 1. Za $0 < |q| < 1$

$$\frac{1}{|q|} = 1 + h,$$

gdje je $h > 0$. Na osnovu Bernulijeve**) nejednakosti $\left( (1+h)^n \quad 1 + nh \right)$ slijedi

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{\ldots} < \frac{1}{\ldots} < \frac{1}{\ldots} < \varepsilon$$

*) Matematièkom indukcijom se može dokazati da je $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ za $\forall n \in \mathbf{N}$.
**) D. Bernuli (1654-1705), švajcarski matematièar.

za $\frac{1}{nh} < \varepsilon$ je $n > \frac{1}{\varepsilon h}$, $n \in \mathbf{N}$ pa se može uzeti $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon h} \right\rfloor + 1$.

**6.** Niz $\left\{ (-1)^n \right\}$ je divergentan, odnosno oscilira između -1 i 1, jer je

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} (-1)^{2n} = 1,$$

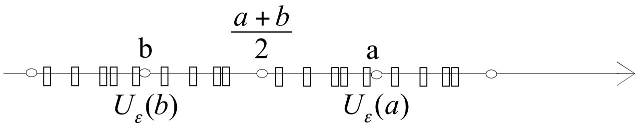
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} = \underline{\lim_{n\to\infty}} (-1)^{2n+1} = -1 .$$

## 2.5. Algebra konvergentnih nizova

U ovom dijelu ćemo objasniti neke osnovne osobine konvergentnih nizova, koje će nam poslužiti za izračunavanje graničnih vrijednosti.

**Teorema (poredbe) 2.5.** *Neka su nizovi* $a_n$ *i* $b_n$ *konvergentni i neka* $a_n \to a,\ b_n \to b$. *Ako je* $a_n \leq b_n$ *za skoro sve članove tih nizova, tada je* $a \leq b$.

***Dokaz.*** Pretpostavimo da je $a > b$. Tada bi postojala $\varepsilon$ okolina ta- čaka $b$ i $a$, $U_\varepsilon(b)$ i $U_\varepsilon(a)$, respektivno, takva da okolina $U_\varepsilon(b)$ sadrži skoro sve članove niza $\{b_n\}$, a okolina $U_\varepsilon(a)$ sadrži skoro sve članove niza $\{a_n\}$. Ako se uzme $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$ to znači da bi za skoro sve članove nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ vrijedila nejednakost $b_n < a_n$, što je suprotno pretpo-stavci teoreme.




Sl. 2.2.

**Teorema 2.6.** *Neka su nizovi* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *konvergentni i neka je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

*Ako je* $a_n \le c_n \le b_n$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$ *tada je* $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

**Teorema 2.7.** *Neka je* $a_n \to 0$ i $\{b_n\}$ *ograničen niz. Tada* $a_n b_n \to 0$.

***Dokaz.*** Po definiciji granične vrijednosti i pretpostavci teoreme je $|a_n| < \varepsilon$ za svako $n > n_0(\varepsilon)$ i proizvoljno $\varepsilon > 0$. Niz $\{b_n\}$ je ograničen niz, što znači da postoji konačan broj $k \in \boldsymbol{R}$ takav da je $|b_n| \le k$ za svako $n \in \boldsymbol{N}$. Dalje je

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon \cdot k = \varepsilon_1, \quad n > n_0(\varepsilon).$$

Time je teorema dokazana.

**Teorema 2.8.** *Neka su nizovi* $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ *konvergentni i neka* $a_n \to a$, $b_n \to b$. Tada vrijedi

1. $a_n + b_n \to a + b$,
2. $a_n - b_n \to a - b$,
3. $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$,
4. $\alpha a_n \to \alpha a, \quad \alpha \in \boldsymbol{R}$.

*Ako je* $b \neq 0$, *tada je*

5. $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$.

***Dokaz.*** 1) Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoje brojevi $n_0(\varepsilon)$ i $n_1(\varepsilon)$ takvi da je

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ za } \forall n > n_0(\varepsilon) \text{ i } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ za } \forall n > n_1(\varepsilon).$$

Neka je $n' = \max(n_0, n_1)$. Očigledno tada obje prethodne nejednakosti vri-jede za $\forall n > n'$. Koristeći to, vidimo da vrijedi

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

za svako $n > n'$. To znači da je

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \tag{2.6}$$

Slično ovom dokazu provjerava se tačnost i relacije 2.

3. Na osnovu pretpostavke teoreme i teoreme 2.3 nizovi $\{a_n - a\}$ i $\{b_n - b\}$ su nula nizovi i niz $\{b_n\}$ je ograničen. Tada su, po teoremi 2.7, i nizovi $\{(a_n - a)\, b_n\}$ i $\{(b_n - b)\, a\}$ nula nizovi. Iz

$$a_n b_n - a b = (a_n - a)\, b_n + (b_n - b)\, a \to 0$$

slijedi

$$a_n b_n - a b \to 0, \text{ tj. } a_n b_n \to a b.$$

To znači

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = a b = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \tag{2.7}$$

Time je relacija 3. dokazana.

Matematičkom indukcijom se dokazuje da relacija (2.7) vrijedi i za proizvod konačnog broja, $k \in \boldsymbol{N}$, konvergentnih nizova, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n^{(1)} \cdot a_n^{(2)} \cdot \dots \cdot a_n^{(k)}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n^{(1)} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n^{(2)} \cdot \dots \cdot \lim_{n\to\infty} a_n^{(k)}, \tag{2.8}$$

gdje su nizovi $\left\{a_n^{(i)}\right\}$ $i = 1,2,\dots,k$, konvergentni nizovi.

Neka je

$$a_n^{(1)} = a_n^{(2)} = \dots = a_n^{(k)} = a_n$$

i ako je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Tada na osnovu (2.8) neposredno slijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k, \quad k \in \boldsymbol{N}. \tag{2.9}$$

Pokažimo da za konvergentan niz $\{a_n\}$ sa nenegativnim članovima koji ima graničnu vrijednost $a$ vrijedi relacija

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}, \quad k \in \boldsymbol{N}. \tag{2.10}$$

Neka je $\sqrt[k]{a_n} = b_n$ ili $a_n = b_n^k$, $k \in \boldsymbol{N}$, za svako $n \in \boldsymbol{N}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)^k$$

odakle je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n},$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

5. Prije nego razmotrimo dokaz relacije 5. dokažimo da vrijedi:

**Lema.** *Ako je niz* $\{a_n\}$ *konvergentan i ima graničnu vrijednost a tada je i niz* $\{|a_n|\}$ *konvergentan i vrijedi*

(2.11) $$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|.$$

***Dokaz.*** Na osnovu definicije granične vrijednosti niza $\{a_n\}$ za pro-izvoljno $\varepsilon > 0$ postoji broj $n_0(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$ takav da vrijedi

$$(\forall n \in \boldsymbol{N})(n > n_0) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon).$$

Kako je

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$$

za svako $n \in \boldsymbol{N}$, $n > n_0$ to vrijedi relacija (2.11).

Provjerimo sada tačnost relacije 5. Kako je prema relaciji 2.11. i pretpostavci teoreme

$$\lim|b_n| = |\lim b_n| = b \text{, tj. } |b_n| \to |b|,$$

to za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji broj $n_0(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$ za koje je

$$||b_n| - |b|| < \varepsilon \text{ za svako } n > n_0(\varepsilon) \in \boldsymbol{N},$$

ili

(2.12) $$-\varepsilon < |b_n| - |b| < \varepsilon \text{ za svako } n > n_0(\varepsilon) \in \boldsymbol{N},$$

odakle slijedi nejednakost

(2.13) $$|b_n| > |b| - \varepsilon.$$

Neka je $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$. Tada nejednakost (2.13) glasi: $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ odnosno, $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$. Dalje je

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b| \cdot |b_n|} < \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| < \varepsilon_1$$

što znači da $\frac{1}{b_n}$ konvergira ka $\frac{1}{b}$, ili u oznaci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}.$$

Na osnovu dokazane relacije 3. vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\cdot a_n=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}.$$

Time je relacija 5. dokazana.

Ukoliko nisu ispunjeni uvjeti teoreme 2.8 tada dolazimo do prividno neodređenih izraza oblika:

1. $(a_n\to\infty;\ b_n\to-\infty)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty-\infty$,
2. $(a_n\to 0;\ b_n\to\infty)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n b_n=0\cdot\infty$,
3. $(a_n\to\infty;\ b_n\to\infty)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\infty}{\infty}$,
4. $(a_n\to 0;\ b_n\to 0)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{0}{0}$.

Transformacijama prethodnih izraza u njima identične izraze oni se mogu svesti na oblike na koje se može primijeniti teorema 2.8.

***Primjer* 2.4.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}==\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

***Primjer* 2.5.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n^2-1}{n^3+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}=3.$$

***Primjer* 2.6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+n^2}{1+2n^2}\right)^3=\frac{1}{8}$,

jer je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+n^2}{1+2n^2}=\frac{1}{2},$$

a na osnovu (2.9) je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+n^2}{1+2n^2}\right)^3=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+n^2}{1+2n^2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}.$$

***Primjer* 2.7.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{8n^2+3n}{n^2+1}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+3n}{n^2+1}}=\sqrt[3]{8}=2$.

***Primjer* 2.8.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}.$$

## 2.6. Jedan kriterij konvergencije nizova

U prethodnom dijelu je razmatran način određivanja granične vri-jednosti niza, ne znajući da li je dati niz konvergentan ili divergentan. U ovom dijelu razmotrićemo neke kriterije konvergencije nizova.

**Teorema 2.9. (Bolzano*)-Weierstraussov stav**))** *Svaki ograničeni niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.*

***Dokaz.*** Neka je niz $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ograničen, tada postoji kona-čan interval $I_0$ u kome se nalaze svi članovi niza. Ako se interval $I_0$ podi-jeli na dva jednaka dijela tada se u jednom dijelu nalazi beskonačno mnogo članova tog niza. Neka je taj interval $I_1=\frac{I_0}{2}$. Ako se, dalje, interval $I_1$ podijeli na dva jednaka dijela tada u jednom dijelu postoji beskonačno mnogo članova niza. Neka je taj interval $I_2=\frac{I_1}{2}=\frac{I_0}{2^2}$. Ako se postupak nastavi $n$-puta dobićemo interval $I_n=\frac{I_0}{2^n}$ u kome se nalazi beskonačno mnogo članova tog niza. Ovim postupkom dobija se jedna tačka iz $I_n$ u čijoj $\varepsilon$-okolini se nalazi beskonačno mnogo članova niza, što znači da je ona tačka nagomilavanja. Pri tome, naravno veličina broja $n$ direktno zavisi od izbora broja $\varepsilon>0$.

**Teorema 2.10.** (**Cauchyev**[**]*) ***kriterij konvergencije***) *Niz* $\{a_n\}$ *je konver-gentan ako i samo ako za svaki proizvoljan broj* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$ *takav da vrijedi*

$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ *za svako* $n \in \boldsymbol{N}$, $n > n_0$ *i svako* $p \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$.

***Dokaz.*** Dokažimo da je uslov potreban. Neka je niz $\{a_n\}$ konver-gentan i neka $a_n \to a$. Tada, po definiciji granične vrijednosti niza, za pro-izvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$ za koje vrijedi

(2.15) $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ za svako $n > n_0$

$|a_{n+p} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ za svako $n > n_0$ i svako $p \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$.

Iz relacije (2.15) slijedi

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a) + (a - a_n)| \le |a_{n+p} - a| + |a_n - a| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Time je dokaz završen.

Dokažimo da je uslov dovoljan. Relacija (2.14) za $n = 1$ glasi

(2.16) $|a_{1+p} - a_1| < \varepsilon_1$ za svako $p \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$,

odakle slijedi

$$|a_{1+p}| - |a_1| \le |a_{1+p} - a_1| < \varepsilon_1 ,$$

ili

(2.17) $|a_{1+p}| < |a_1| + \varepsilon_1$ za svako $p \in \boldsymbol{N}$.

To znači da je niz $\{a_n\}$ ograničen, odnosno, prema teoremi 2.9, da ima bar jednu tačku nagomilavanja. Neka je $a$ tačka nagomilavanja i neka je $a_m$ jedan član niza $\{a_n\}$ takav da vrijedi

$$|a_m - a| < \varepsilon \text{ za svako } m > n_0(\varepsilon).$$

Tada, na osnovu relacije (2.14), vrijedi

$$|a_{m+p} - a| = |(a_{m+p} - a_m) + (a_m - a)| \le |a_{m+p} - a_m| + |a_m - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon ,$$

ili

$$|a_{m+p} - a| < 2\varepsilon \text{ za svako } p \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}.$$

To znači da $a_n \to a$, gdje je $n = m + p$.

***Primjer* 2.9.** Niz sa opštim članom

*) B. Bolzano (1781-1848), èeski matematièar.
**) K. Weierstrauss (1815-1897), njemaèki matematièar.
***) A. L. Cauchy (1789-1857), francuski matematièar.

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

je konvergentan, što se može dokazati primjenom Cauchyev kriterija konvergencije.

Neka je $m, n \in \boldsymbol{N},\ m > n,\ m = n + p$. Tada je

$$a_{n+p} - a_n = (-1)^n \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} \right). \tag{2.18}$$

Izraz u zagradi relacije (2.18) se može pisati u obliku

$$\frac{1}{n+1} - \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \left( \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) - \cdots.$$

Kako je

$$\left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \left( \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) + \cdots > 0$$

to se može zaključiti da vrijedi

$$\left| a_{m+p} - a_n \right| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{za} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Time je dokazana konvergencija datog niza.

## 2.7. Broj e

**Teorema 2.11.** *Niz* $\left\{ a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ *je strogo rastući i ograničen.*

***Dokaz.*** Za svako $n \in \boldsymbol{N}$ je

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot[n-(k-1)]}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Slično se dobija

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \\ &+ \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Upoređujući $a_n$ i $a_{n+1}$ zapažamo da su sabirci na drugoj strani člana $a_n$ manji od odgovarajućih sabiraka člana $a_{n+1}$. Pored toga broj sabiraka člana $a_n$ je manji od broja sabiraka člana $a_{n+1}$, a u oba slučaja svi sabirci su pozitivni. Na osnovu toga slijedi da je niz $\{a_n\}$ strogo rastući, tj.

$$a_n < a_{n+1} \text{ za svako } n \in \boldsymbol{N}.$$

Iz (2.19) slijedi

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3, \text{ za } n > 1.$$

Iz prethodnog slijedi da je

$$2 < a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \text{ za svako } n \in \boldsymbol{N},$$

što znači da je niz ograničen.

Kako je niz $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ rastući i ograničen on je konvergentan i njegova granična vrijednost se označava sa "$e$", tj.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{2.20}$$

Zapažamo da je $e \in \langle 2, 3\rangle$ i može se dokazati da je

$$2{,}71828 < e < 2{,}71829.$$

Broj $e$ se uzima kao baza logaritama i takav logaritam se naziva prirodni logaritam realnog broja i označava se sa $\ln x$, tj.

$$\log_e x = \ln x.$$

***Primjer* 2.10.** Naći $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$.

***Rješenje.*** $$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \left\| \begin{matrix} n = 3k \\ n \to \infty \Rightarrow k \to \infty \end{matrix} \right\| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{3k} = \left[\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^3 = e^3.$$

***Primjer* 2.11.** Naći $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2}$.

***Rješenje.*** $$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = e \cdot 1 = e.$$

**Teorema 2.12.** *Neka su članovi niza* $\{r_n\}$ *racionalni brojevi i neka je* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r \in \boldsymbol{Q}$. *Tada za svako* $a > 0$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r.$$

***Dokaz.*** Pretpostavimo da je $0 < a \neq 1$ i dokažimo da je tvrdnja tačna u slučaju da je $\{r_n\}$ nula-niz, tj. vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^0 = 1.$$

Iz

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{za } a > 0 \text{ *)},$$

to je

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \lim_{n\to\infty} (1/a)^{1/n} = 1.$$

Na osnovu definicije granične vrijednosti niza, znači da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji određen broj $m \in \boldsymbol{N}$ za koji je

$$a^{1/m},\ a^{-1/m} \in \langle 1-\varepsilon, 1+\varepsilon \rangle = U_\varepsilon(1).$$

Tada postoji $n_0 \in \boldsymbol{N}$ za koje je za svako $n > n_0$

$$-\frac{1}{m} < r_n < \frac{1}{m}.$$

Za ovako odabrano $n \in \boldsymbol{N}$, $n > n_0$, potencija $a^{r_n}$ je "između" $a^{-1/m}$ i $a^{-1/m}$ **) i zbog toga i one pripadaju intervalu $\langle 1-\varepsilon, 1+\varepsilon \rangle$. To znači, po definiciji granične vrijednosti, da je

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = 1 = a^0.$$

Iz pretpostavke teoreme je $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, ili $\lim\limits_{n\to\infty} (r_n - r) = 0$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n - r} \cdot a^r = a^r \lim_{n\to\infty} a^{r_n - r} = a^r \cdot a^0 = a^r.$$

Teorema tvrdi da je

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} r_n} \quad (r_n \in \boldsymbol{Q}, a > 1) \tag{2.21}$$

---

*) Ovu osobinu dajemo bez dokaza.

**) Teorema: "Ako je $a > 0$ i $r < s$ tada je $a^r < a^s \Leftrightarrow a > 1$, odnosno $a^r > a^s \Leftrightarrow a < 1$. $r_n \in \boldsymbol{R}$

**Teorema 2.13.** *Ako niz* $\{a_n\}$ *sa pozitivnim članovima ima graničnu vrijednost* $a$, *tj. ako je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

*tada vrijedi*

(2.22) $$\lim_{n\to\infty}\log_c a_n = \log_c a = \log_c \lim_{n\to\infty} a_n \quad .$$

***Dokaz.*** Teoremu ćemo dokazati za slučaj $c>1$, i na sličan način se dokazuje za slučaj $0<c<1$. Dokažimo prvo da je relacija (2.22) tačna za $a=1$. Neka je za proizvoljno $\varepsilon>0$ broj $n_0=n_0(\varepsilon)$ takav da je

(2.23) $$c^{-\varepsilon} < a_n < c^{\varepsilon} \text{ za svako } n>n_0(\varepsilon).$$

To je moguće, s obzirom na pretpostavku da je $c>0$, jer je $c^{-\varepsilon}<1$, $c^{\varepsilon}>1$. Logaritmovanjem nejednakosti (2.23) po bazi $c$ dobijamo

$$-\varepsilon < \log a_n < \varepsilon \text{ za svako } n>n_0(\varepsilon).$$

To znači, po definiciji granične vrijednosti niza, da je

$$\lim_{n\to\infty}\log_c a_n = 0 = \log_c 1 \quad ,$$

što je i trebalo dokazati.

Neka je $a\in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ bilo koji broj. Tada je iz uslova teoreme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a} = 1 \quad ,$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty}\log\frac{a_n}{a} = \lim_{n\to\infty}\log_c a_n - \log a = 0 \quad .$$

Znači vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\log_c a_n = \log_c a = \log_c \lim_{n\to\infty} a_n \quad .$$

**Teorema 2.14.** *Neka niz* $\{a_n\}$, $a_n>0$, *ima graničnu vrijednost* $a$. *Tada je*

(2.24) $$\lim_{n\to\infty} a_n^{\rho} = a^{\rho}, \quad \rho\in\boldsymbol{R}.$$

***Dokaz.*** Iz pretpostavke teoreme slijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad .$$

Na osnovu teoreme 2.13 je

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n = \log a = \log_c \lim_{n\to\infty} a_n = \log a \quad .$$

Znači vrijedi i

$$\rho\lim_{n\to\infty}\log a_n = \rho\log a \quad ,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n^{\rho} = \log a^{\rho} \quad ,$$

odakle slijedi dokaz tvrdnje.

***Primjer* 2.12.** Na osnovu prethodne teoreme vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{2n^2+3}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{2n^2+3}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

**Teorema 2.15.** *Neka je* $\{a_n\}$ *nula niz čiji su svi članovi različiti od nule i veći od* -1. *Tada vrijedi*

(2.25)
$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}=e.$$

***Dokaz.*** Neka je $a_n>0$ za svako $n$ i neka je indeks $m$ takav da je za svako $n \quad m$, $a_n \le 1$ odnosno $\frac{1}{a_n} \quad 1$. Za takvo $n$ postoji $k_n \in \boldsymbol{N}$ ta-kav da je

(2.26)
$$k_n<\frac{1}{a_n}\le k_n+1$$

ili

(2.27)
$$\frac{1}{k_n+1}\le a_n<\frac{1}{k_n}.$$

Dodavanjem jedinice svim članovima nejednakosti (2.27) dobićemo

$$1+\frac{1}{k_n+1}\le 1+a_n<1+\frac{1}{k_n}.$$

Tada s obzirom na relaciju (2.26) vrijedi

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}<(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}$$

ili

(2.28)
$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}<(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right).$$

Kako su $\frac{1}{k_n+1}$ i $\frac{1}{k_n}$ nula nizovi i

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\to e,\quad \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\to e,$$

slijedi

$$(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}\to e,\quad a_n\to 0,\ a_n>0.$$

Na sličan način se dokazuje teorema i za slučaj $-1<a_n<0$. Taj dokaz može poslužiti kao primjer za vježbu.

**Teorema 2.16.** *Za svako* $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{2.29}$$

***Dokaz.*** Izraz $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ se može transformisati u izraz $\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x$. Tada na osnovu teorema (2.15) i (2.14) slijedi

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x \to e^x .$$

***Primjer* 2.13.** Neka je $\{a_n\}$ nula niz i neka je $a_n \neq 0,\ a_n > -1$ za svako $n \in \boldsymbol{N}$. Tada je

$$\lim_{a_n\to 0}\frac{\log_a(1+a_n)}{a_n} = \log_a e , \tag{2.30}$$

što se može dokazati na sljedeći način:

$$\frac{\log_a(1+a_n)}{a_n} = \log_a(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to \log_a e .$$

Relacija (2.30) za $a = e$, tj. ako se radi o prirodnim logaritmima, glasi

$$\lim_{a_n\to 0}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1 . \tag{2.31}$$

***Primjer* 2.14.** Neka $a_n \to 0$ i neka je $a_n \neq 0$ za svako $n \in \boldsymbol{N}$. Tada vri-jedi

$$\lim_{a_n\to 0}\frac{a^{a_n}-1}{a_n} = \ln a , \tag{2.32}$$

što se može provjeriti sljedećim postupkom.

Neka je $a^{a_n}-1=t_n$. Tada je $a_n = \frac{\ln(1+t_n)}{\ln a}$, odakle slijedi

$$\frac{a^{a_n}-1}{a_n} = \frac{t_n}{\ln(1+t_n)}\ln a = \frac{1}{\frac{\ln(1+t_n)}{t_n}}\ln a .$$

Kako je $t_n$ nula niz to na osnovu primjera 2.13 slijedi

$$\lim_{a_n\to 0}\frac{a^{a_n}-1}{a_n} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a .$$

## 2.8. Primjeri graničnih vrijednosti nizova

**1.** Niz

$$\sqrt{c}, \sqrt{c+\sqrt{c}}, \sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}}, \ldots, \sqrt{c+\sqrt{c+\cdots\sqrt{c}}}, \quad c>0$$

je konvergentan i vrijedi

$$a_n = \sqrt{c+\sqrt{c+\cdots\sqrt{c}}} \to \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$$

. Dokazati.

Iz definicije niza, $a_n = \sqrt{c+\sqrt{c+\cdots\sqrt{c}}}$, slijedi da je:

$$a_n \quad \sqrt{c}, \quad a_n = \sqrt{c+a_{n-1}}, \quad a_{n-1} < a_n$$

za svako $n \in \boldsymbol{N}$. Iz $a_{n-1} < a_n$ za svako $n \in \boldsymbol{N}$ slijedi da je dati niz strogo rastući. Kvadriranjem jednakosti $a_n = \sqrt{c+a_{n-1}}$, dobijamo

$$a_n = \frac{c}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{c}{a_n} + 1 < \frac{c}{\sqrt{c}} + 1,$$

tj.

$$a_n < \sqrt{c}+1, \text{ za svako } n \in \boldsymbol{N},$$

što znači da je niz $\{a_n\}$ ograničen. Kako je niz $\{a_n\}$ strogo rastući i ograničen on je i konvergentan (teorema 2.4).

Odredimo sada graničnu vrijednost niza. Kako je $a_n = \sqrt{c+a_{n-1}}$ i neka $a_n \to a$, tada i $a_{n-1} \to a$ i vrijedi

$$a = \sqrt{c+a}.$$

Kvadriranjem prethodne jednakosti i rješavanjem jednačine po $a$ dobijamo

$$a = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}.$$

Znači

$$\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots\sqrt{c}}} \to \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}.$$

**2.** Na osnovu granične vrijednosti nizova

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}; \quad b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

naći graničnu vrijednost niza

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Kako je

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = c_n .$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = b_n$$

za svako $n \in \boldsymbol{N}$, vrijedi

$$a_n < c_n < b_n .$$

Obzirom da

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \to 1 , \quad b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \to 1 ,$$

to prema teoremi 2.6 i $c_n \to 1$.

**3.** Dokazati $\left(1+\frac{3}{2^n}\right)^{2^n} \to e^3$.

Kako je $\frac{3}{2^n}$ nula niz, to je

$$\left(1+\frac{3}{2^n}\right)^{2^n} = \left[\left(1+\frac{3}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{3}}\right]^3 \to e^3 .$$

# 2.9. Zadaci za vježbu

**1.** Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2} = 1$.

**2.** Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$. Naći $n_0$ za $\varepsilon = 10^{-8}$.

**3.** Naći $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-3n^2+2n-1}{3n^4-5}$.

U zadacima od 4. do 20. naći granične vrijednosti.

**4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

**5.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+3n+1}}{n+5}$.

**6.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n^2+5}+2n\right)^2}{\sqrt[4]{n^8+n+1}}$.

**7.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

**8.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

**9.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

**10.** $l\,im_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right]$.

**11.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0{,}8n^3+2n+1}{n^4+3n+1}$.

**12.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0{,}8n^3+2n+1}{n^2+3n+1}$.

**13.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

**14.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

**15.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n^2}\right)^3$.

**16.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{\sqrt{n}+4n}{n}}$.

**17.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{a^2}{n}\right)^{b^2 n}$.

**18.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

**19.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n\ln(n+1)-\ln n\right]$.

**20.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{n^2+n+5}$.

**21.** Dokazati da niz $\left\{a_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+n}\right\}$ ima graničnu vrijednost.

**22.** Dokazati da je niz $\left\{a_n=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right\}$ konvergentan.

**23.** Dokazati da

$$\frac{a_0+a_1 n+a_2 n^2+\cdots+a_k n^k}{b_0+b_1 n+b_2 n+\cdots b_l n^l} \to \begin{cases} a_k/b_l\,, & \text{za } k=l, \\ 0 & \text{za } k<l, \end{cases}$$

$a_k \neq 0,\ b_l \neq 0,\ k,l \in \boldsymbol{N}$.

**24.** Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)\right]^{2^n}$.

# 3. Diferencijalni račun

## 3.1. Granična vrijednost funkcije

### 3.1.1. Pojam granične vrijednosti

**Definicija 3.1.1.** *Neka je data funkcija* $y = f(x)$ *i neka je* ***a*** *tačka nagomilavanja skupa* $D(f)$. *Za funkciju se kaže da ima graničnu vri-jednost* ***A*** *u tački* $x = a$ *ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tako da je*

(3.1.1) $\quad |f(x) - A| < \varepsilon$ , ako je $0 < |x - a| < \delta, \quad x \in D(f)$.

Prethodna činjenica se simbolično piše

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \text{ili} \quad \lim_{a} f(x) = A,$$

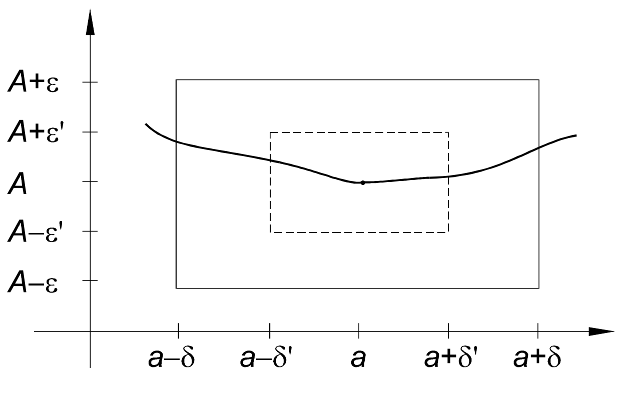
i čita se "limes od $f(x)$ je $A$ kad $x$ teži $a$", ili

$$f(x) \to A \text{ kad } x \to a$$

i čita " $f(x)$ teži $A$ kada $x$ teži $a$".

Definicija 3.1.1 je geometrijski interpetirana na slici 3.1.1. Vidi se da za broj $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$ takav da grafik date krive leži u pra-vougaoniku čije su jednačine stranica:

$$x = a - \delta, \quad x = a + \delta, \quad y = A - \varepsilon, \quad y = A + \varepsilon.$$




Sl. 3.1.1.

Kada se smanjuje $\varepsilon$ smanjuje se i $\delta$, ali tako da kriva u oblasti $\langle a-\delta\ ,\ a+\delta\ \rangle$ leži u datom pravougaoniku. Nejednakost $0<|\,x-a\,|<\delta$ isključuje tačku $x=a$, tj. tačka *a* nemora pripadati $D(f)$.

***Primjer*** **3.1.1.** Ako je $f(x)=x+3$ tada je $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5$. Dokazati.

Prema definiciji granične vrijednosti funkcije treba dokazati da je

$$|\,x+3-5\,|<\varepsilon \text{, ako je } 0<|\,x-2\,|<\delta .$$

Zaista, za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ tako da je

$$|\,x+3-5\,|=|\,x-2\,|<\varepsilon$$

uvijek kada je $|\,x-2\,|<\delta$ i $x\neq 2$. U ovom primjeru je $\delta=\varepsilon$.

***Primjer*** **3.1.2.** Neka je $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ i neka $x\to 1$. Tada je $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=4$. Očigledno,

$$|\,f(x)-A\,|=\left|\frac{x^2+2x-3}{x-1}-4\right|=\left|\frac{x^2+2x-3-4x+4}{x-1}\right|=$$

$$=\left|\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right|=|\,x-1\,|<\varepsilon ,$$

kad god je $|\,x-1\,|<\varepsilon$. Ovdje je $\delta=\varepsilon$.

Tačka $x=1$ je tačka nagomilavanja skupa $D(f)=\langle-\infty,1\rangle\cup\langle 1,+\infty\rangle$.

Zapažamo da prethodna funkcija nije definisana u tački $x=1$, ali postoji granična vrijednost funkcije u toj tački.

***Primjer*** **3.1.3.** $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$.

Iz $|\,f(x)-5\,|=|\,3x-1-5\,|=3|\,x-2\,|$ slijedi da je

$$3|\,x-2\,|<\varepsilon \text{, ili } |\,x-2\,|<\frac{\varepsilon}{3}$$

za sve vrijednosti *x* kada je $|\,x-2\,|<\delta$. U ovom slučaju je $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$.

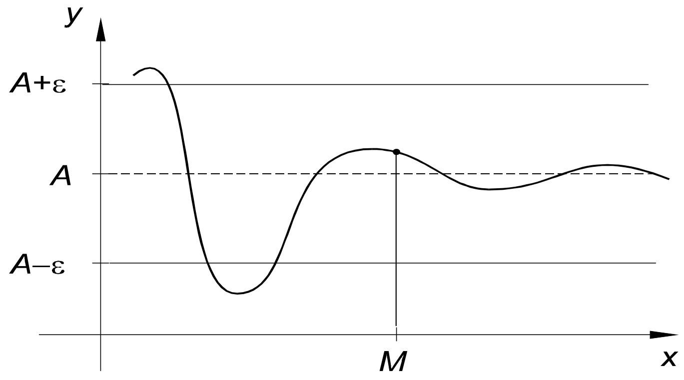
**Definicija 3.1.2.** *Za funkciju* $y=f(x)$ *čija je oblast definisanosti* $D(f)=\langle\, a,+\infty\,\rangle$ *kaže se da ima graničnu vrijednost* ***A*** *kada* $x\to+\infty$, *ako za svaki broj* $\varepsilon>0$ *postoji* $M>0$ *takav da*

$$(\ \forall x>M\ )\Rightarrow|\,f(x)-A\,|<\varepsilon .$$

Prethodna činjenica se simbolično zapisuje sa

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{, ili } \lim_{+\infty} f(x) = A.$$

Geometrijska interpretacija definicije 3.1.2. je data na crtežu 3.1.2.




Sl. 3.1.2.

Za $x > M$ grafik funkcije $y = f(x)$ se nalazi u pojasu ograničenom pra- vim $y = A - \varepsilon$ i $y = A + \varepsilon$ za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$.

***Primjer* 3.1.4.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{x-1} = 3$.

Iz definicije 3.1.2 imamo da je

$$|f(x) - A| = \left|\frac{3x+2}{x-1} - 3\right| = \left|\frac{3x+2-3x+3}{x-1}\right| = \frac{5}{|x-1|} < \varepsilon.$$

Ova nejednakost će biti ispunjena za $|x-1| > \dfrac{5}{\varepsilon}$, tj. za $x > \dfrac{5}{\varepsilon} + 1$. Ako se uzme da je $M = \dfrac{5}{\varepsilon} + 1$, tada će biti

$$\left|\frac{3x+2}{x-1} - 3\right| < \varepsilon \text{, za } \forall x > M.$$

U ovom primjeru za proizvoljno $\varepsilon = 10^{-3}$ biće

$$M = 5 \cdot 10^3 + 1 = 5001.$$

***Primjer* 3.1.5.** Dokazati da je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x+1}{2x-1} = \frac{5}{2}.$$

***Rješenje.*** Kao i u prethodnom primjeru je

$$|f(x) - A| = \left|\frac{5x+1}{2x-1} - \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{10x+2-10x+5}{2(2x-1)}\right| = \frac{7}{2|2x-1|},$$

i vrijedi $\frac{7}{2|2x-1|}<\varepsilon$, za $2x-1>\frac{2\varepsilon}{7}$, odnosno $x>\frac{\varepsilon}{7}+\frac{1}{2}$. U ovom pri-mjeru je $M=\frac{\varepsilon}{7}+\frac{1}{2}$, pa imamo da je

$$|f(x)-A|<\varepsilon \text{ za } \forall x>M.$$

***Primjer* 3.1.6.** Dokazati da je $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

***Rješenje.*** Nejednakost

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{x}<\varepsilon$$

je zadovoljena za svako $x>\frac{1}{\varepsilon}$. To znači da za $x=\frac{1}{\varepsilon}$ vrijedi nejednakost

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon, \text{ za svako } M>\frac{1}{\varepsilon},$$

odnosno da je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

***Primjer* 3.1.7.** Dokazati da je $\lim\limits_{x\to\infty}x^{-n}=0,\quad n\in\boldsymbol{N}$.

***Rješenje.*** Nejednakost

$$\left|x^{-n}-0\right|=\left|x^{-n}\right|<\varepsilon$$

je zadovoljena za svako $x$ uz uslov $x>\sqrt[n]{\varepsilon}=M$. Dakle, ako je $x>M$, tada je $\left|x^{-n}\right|<\varepsilon$, pa je $\lim\limits_{x\to\infty}x^{-n}=0$ za $n\in\boldsymbol{N}$.

U definiciji 3.1.2 vidjeli smo kako se definiše $\lim\limits_{+\infty}f(x)$. Na sličan način se definiše i

$$\lim_{x\to-\infty}f(x), \text{ ili } \lim_{-\infty}f(x).$$

## 3.1.2. Lijeva i desna granična vrijednost

Funkcija $y=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$ je definisana u intervalu $\langle 0,+\infty\rangle$, što znači da se $x$ može približavati broju 0 samo preko brojeva većih od nule. U tom slučaju se kaže da $x\to 0$ sdesna ili opadajući, što se simbolički piše $x\to 0^{+}$, ili $x\downarrow 0$, a granična vrijednost

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

se naziva *desna granična vrijednost*.

U opštem slučaju definicija desne granične vrijednosti bi glasila:

**Definicija 3.1.3.** *Broj* $A$ *je desna granična vrijednost funkcije* $y = f(x)$ *u tački* $x = a$ *ako za svaki broj* $\varepsilon > 0$ *postoji broj* $\delta > 0$ *takav da je*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{, kada je } a < x < a + \delta$$

*što se simbolično piše*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A \text{ ili } \lim_{x\downarrow a} f(x) = A.$$

Na sličan način se definiše i lijeva granična vrijednost $A$ funkcije $f(x)$ u tački $x = a$ i obilježava se sa

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A \text{ ili } \lim_{x\uparrow a} f(x) = A.$$

***Primjer*** **3.1.8.** Data je funkcija
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \;\; za \;\; x < 0 \\ x + 2 \;\; za \;\; x \quad 0. \end{cases}$$
Dokazati da je

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2.$$

***Rješenje.*** U intervalu $[0, +\infty\rangle$ funkcija je definisana sa $f(x) = x + 2$, odakle slijedi

$$|f(x) - A| = |x + 2 - 2| = |x| < \varepsilon$$

ako je $0 < x < 0 + \delta$, gdje je $\delta = \varepsilon$, čime je dokazano da je

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2.$$

Analogno je

$$\left|x^2 + 1 - 1\right| = x^2 < \varepsilon \text{ za } 0 - \delta < x < 0$$

gdje je $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

**Teorema 3.1.1.** *Ako funkcija* $y = f(x)$ *ima graničnu vrijednost* $A$ *u tački* $x = a$, *onda ona ima i lijevu i desnu graničnu vrijednost u toj tački, i one su međusobno jednake i jednake* $A$.

***Dokaz.*** Iz pretpostavke teoreme slijede nejednakosti:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

kada je

$$0 < |x - a| < \delta \text{, ili kada je } a - \delta < x < a + \delta, \;\; x \neq a.$$

Na osnovu čega slijede nejednakosti

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ kada je } a < x < a + \delta$$

ili

$$|f(x)-A|<\varepsilon \text{ kada je } a-\delta<x<a,$$

što znači da je

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=A.$$

**Teorema 3.1.2.** *Ako funkcija* $y=f(x)$ *ima lijevu i desnu graničnu vrijednost u tački* $x=a$ *i ako su one jednake, i jednake* $A$*, tada funkcija* $y=f(x)$ *ima graničnu vrijednost u tački a i jednaka je* $A$.

*Dokaz* ove teoreme je jednostavan i ovdje ga nećemo izvoditi. Dokaz može poslužiti kao primjer za vježbu.

### 3.1.3. Beskonačna granična vrijednost

**Definicija 3.1.4.** *Funkcija* $y=f(x)$ *ima beskonačnu graničnu vrijednost u tački* $x=a$, *gdje je **a** tačka nagomilavanja oblasti definisanosti date funkcije, ako za svaki proizvoljno veliki broj* $M>0$ *postoji broj* $\delta>0$ *takav da je*

$$f(x)>M \textit{ kada je } 0<|x-a|<\delta,$$

*što se kratko označava sa*

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty, \text{ ili } \lim_{a} f(x)=+\infty.$$

Na sličan način se definiše i

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty,$$

tako da se u prethodnoj definiciji zamijeni $M>0$ sa $M<0$, a $f(x)>M$ sa $f(x)<M$.

**Definicija 3.1.5.** *Funkcija* $y=f(x)$ *čija je oblast definisanosti* $\langle a,+\infty\rangle$ *ima graničnu vrijednost* $+\infty$ *kada* $x\to+\infty$ *ako za svaki proizvoljno ve-liki broj* $M>0$ *postoji broj* $P>0$ *takav da je*

$$f(x)>M \textit{ za svako } x>P,$$

*što se simbolično zapisuje*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \text{ ili } \lim_{+\infty} f(x)=+\infty.$$

### 3.1.4. Osnovne teoreme o graničnim vrijednostima

**Teorema 3.1.3.** *Ako funkcije* $f(x)$ i $g(x)$ *imaju graničnu vrijednost u tački* $x=a$, *onda u tački **a** imaju graničnu vrijednost i funkcije*

$$f(x)+g(x);\ f(x)\,g(x);\ c\,f(x)\ (c\in\boldsymbol{R})\ \frac{f(x)}{g(x)}\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0;\ [f(x)]^r\quad r\in\boldsymbol{R}$$

$f(x)+g(x)$; $f(x)\,g(x)$; $c\,f(x)$ $(c\in\boldsymbol{R})$; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$; $\left[f(x)\right]^r$, $r\in\boldsymbol{R}$ *i pri tome vrijedi*:

(3.1.3) $$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x),$$

(3.1.4) $$\lim_{x\to a}\left[f(x)\,g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

(3.1.5) $$\lim_{x\to a} c\,f(x)=c\cdot\lim_{x\to a} f(x),$$

(3.1.6) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\quad \lim_{a} g(x)\neq 0 .$$

(3.1.7) $$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^r=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^r,\quad r\in\boldsymbol{R} .$$

***Dokaz.*** Neka je $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$. Tada iz definicije granične vrijednosti funkcije izražene pomoću logičkih simbola slijedi

$$\left(\forall\,\frac{\varepsilon}{2}>0\right)\left(\exists\,\delta_1>0\right)\left(\forall x\in D(f)\right)\left(0<|x-a|<\delta_1\right)\Rightarrow\left(|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\left(\forall\,\frac{\varepsilon}{2}>0\right)\left(\exists\,\delta_2>0\right)\left(\forall x\in D(g)\right)\left(0<|x-a|<\delta_2\right)\Rightarrow\left(|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Na osnovu toga vrijedi

$$|f(x)+g(x)-A-B|=|\left(f(x)-A\right)+\left(g(x)-B\right)|\leq$$
$$\leq|f(x)-A|+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .$$

Ako je $\delta=\min\left(\delta_1,\delta_2\right)$ tada

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta>0\right)\left(\forall x\in D(f)\cap D(g)\right)\left(0<|x-a|<\delta\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\,|f(x)+g(x)-(A+B)|<\varepsilon\,\right),$$

znači

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=A+B=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

čime je dokazana relacija (3.1.3).

Da bi dokazali relaciju (3.1.4) pođimo od implikacija

$$\left(\forall\,\varepsilon_1>0\right)\left(\exists\,\delta_1>0\right)\left(\forall x\in D(f)\right)\left(0<|x-a|<\delta_1\right)\Rightarrow\left(|f(x)-A|<\varepsilon_1\right)$$
$$\left(\forall\,\varepsilon_1>0\right)\left(\exists\,\delta_2>0\right)\left(\forall x\in D(g)\right)\left(0<|x-a|<\delta_2\right)\Rightarrow\left(|g(x)-B|<\varepsilon_1\right).$$

Formirajmo izraz

$$|f(x)\,g(x)-A\,B|=|f(x)\,g(x)-B\,f(x)+B\,f(x)-A\,B|=$$
$$=|f(x)\left(g(x)-B\right)+\left(f(x)-A\right)B|\leq$$
$$\leq|f(x)|\cdot|g(x)-B|+|f(x)-A|\cdot B\leq$$

$$\leq |\, f(x)\,|\, \varepsilon_1 + |B|\, \varepsilon_1 = \left(\,|\, f(x)| + |B|\right) \varepsilon_1 .$$

Za $\delta = \min\left(\delta_1, \delta_2\right)$, $M = \max|\, f(x)\,|$ za $0 < |\, x - a\,| < \delta$, slijedi

$$|\, f(x)\, g(x) - A\, B\,| < \varepsilon \quad \text{za} \quad 0 < |\, x - a\,| < \delta ,$$

gdje je $\varepsilon = \left(\, M + |B|\right) \varepsilon_1$, što znači da je

$$\lim_{x \to a}\left[\, f(x)\, g(x)\right] = A\, B = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) .$$

Dokaz ostalih relacija je sličan i mogu poslužiti za vježbu.

**Teorema 3.1.4.** *Ako za funkcije* $f(x),\ g(x)\ i\ h(x)$ *vrijede nejednakosti*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

*za svako* $x \in D(f) \cap D(g) \cap D(h)$ *i ako na tom skupu funkcije* $f(x)$ *i* $h(x)$ *imaju jednake granične vrijednosti* ***A*** *u tački* ***a****, tada i funkcija* $g(x)$ *ima graničnu vrijednost* ***A*** *u tački* ***a****.*

***Dokaz.*** Prema pretpostavci teoreme za proizvoljno $\varepsilon$ postoje $\delta_1$ i $\delta_2$ takvi da je

$$\left(0 < |\, x - a\,| < \delta_1\right) \Rightarrow |\, f(x) - A\,| < \varepsilon ,$$

$$\left(0 < |\, x - a\,| < \delta_2\right) \Rightarrow |\, h(x) - A\,| < \varepsilon .$$

Ako je $\delta = \min\left(\delta_1, \delta_2\right)$ tada vrijedi

$$\left(0 < |\, x - a\,| < \delta\,\right) \Rightarrow \left(|\, f(x) - A\,| < \varepsilon\,\right) ,$$

$$\left(0 < |\, x - a\,| < \delta\,\right) \Rightarrow \left(|\, h(x) - A\,| < \varepsilon\,\right) .$$

Iz

$$|\, g(x) - A\,| \leq \max\left(|\, f(x) - A\,|,\ |\, h(x) - A\,|\right)$$

slijedi

$$\left(0 < |\, x - a\,| < \delta\,\right) \Rightarrow \left(|\, g(x) - A\,| < \varepsilon\,\right)$$

što znači da je $\lim_{x \to a} g(x) = A$.

**Teorema 3.1.5.** *Funkcija* $y = f(x)$ *ima graničnu vrijednost* $A$ *u tački nagomilavanja* $a \in D(f)$ *ako i samo ako vrijedi*

$$\left(\forall \left\{\, x_n \right\},\, x_n \in D(f)\right) \left(\, x_n \to a\right) \Rightarrow \left(\, f(x_n) \to A\,\right) .$$

*Dokaz* ove teoreme nećemo izvoditi, a umjesto toga korisno je dati sljedeći komentar. Ako promjenljiva $x$ konvergira broju $a$ na proizvoljan način, tj. preko proizvoljnog niza $\left\{\, x_n \right\}$ i ako odgovarajući niz $\left\{\, f(x_n)\right\}$ uvijek konvergira istom broju $A$, tada funkcija ima graničnu vrijednost u tač-ki $x = a$. Ako svaki od nizova $\left\{\, f(x_n)\right\}$ ne konvergira istom broju $A$ tada funkcija $f(x)$ nema graničnu vrijednost u tački $x = a$.

***Primjer* 3.1.9.** Funkcija $y=\sin\frac{1}{x}$ nema graničnu vrijednost u tački $x=0$.

Zaista, ako se posmatraju nizovi sa opštim članovima:

$$x_n=\frac{1}{\pi/2+2n\pi} \text{ i } x_n'=\frac{1}{\pi/3+2n\pi},$$

tada je

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_n'=0.$$

Vrijednosti funkcija su:

$$f(x_n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1, \text{ a}$$

$$f(x_n')=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kako je $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=1$, a $\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\frac{\sqrt{3}}{2}$, to na osnovu teoreme 3.1.5 ne postoji $\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$.

***Primjer* 3.1.10.** Na sličan način se može dokazati da ne postoji $\lim_{x\to\infty}\sin x$. U tom dokazu može se uzeti niz $x_n=n\pi$, a za niz $x_n'=\pi/2+2n\pi$.

***Primjer* 3.1.11.**

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0\right)=\lim_{x\to\infty}a_n x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}a_n x^n\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)=\infty\cdot1=\infty.$$

***Primjer* 3.1.12.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2+1}{2x^3+x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{5}{2}.$$

***Primjer* 3.1.13.**

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+6x-16}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to2}\frac{(x+8)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x+8}{x+2}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}.$$

***Primjer* 3.1.14.**

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^3-27}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to3}\frac{x-2}{x^2+3x+9}=\frac{1}{27}.$$

*Primjer* **3.1.15.**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=24.$$

*Primjer* **3.1.16.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0}=\begin{cases}\infty & \text{za } n>m,\\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{za } n=m,\\ 0 & \text{za } n<m.\end{cases}$$

*Primjer* **3.1.17.** Da bi se riješila neodređenost $\left(\frac{0}{0}\right)$ oblika

$$\lim_{x\to a}\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0}$$

treba brojnik i nazivnik podijeliti sa $x-a$. Kako je za $x-a$ brojnik i na-zivnik razlomka jednak nuli slijedi da su oni djeljivi sa $x-a$. Pri dijeljenju sa $x-a$ se dobija ostatak jednak nuli.

*Primjer* **3.1.18.** Naći $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-3x^2-x+2}{x^3-1}$.

***Rješenje.*** Kako je

$$\left(2x^3-3x^2-x+2\right):(x-1)=2x^2-x-2$$

to je

$$2x^3-3x^2-x+2=\left(2x^2-x-2\right)(x-1),$$

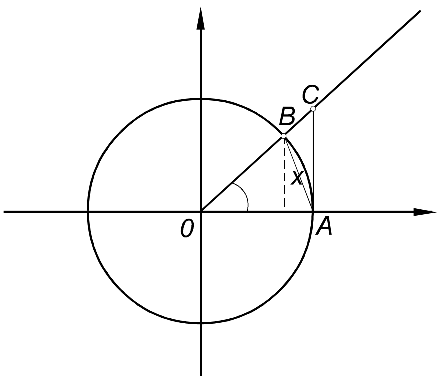
pa je

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-3x^2-x+2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(2x^2-x-2\right)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=-\frac{1}{3}.$$

## 3.1.5. Neke važnije granične vrijednosti

**Teorema 3.1.6.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

***Dokaz.*** Nacrtajmo trigonometrijsku kružnicu, i posmatrajmo neki ugao $x$. Pošto $x\to 0$ možemo uzeti da je $0<x<\frac{\pi}{2}$, Sl.3.1.3. Posma-trajmo slijedeće površine: a) površinu $P_1$ trougla $OAB$, b) površinu $P_2$ kružnog isječka $OAB$ i c) površinu $P_3$ trougla $OAC$.




Sl. 3.1.3.

Može se zapaziti da je $P_1 < P_2 < P_3$, ili $\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} tg\, x$.

Dalje je $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$.

Kako je $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to je

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

ili

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Budući da je $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1,\quad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, to je prema teoremi 3.1.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

***Primjer* 3.1.19.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right) = 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3.$$

***Primjer* 3.1.20.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(4\cdot\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\right) = 4\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 = 4\cdot 1^2 = 4.$$

**Teorema 3.1.7.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

***Dokaz.*** Neka je $x$ realan broj veći od jedan, tada se on nalazi izme-đu dva susjedna prirodna broja $n$ i $n+1$, tj. $n < x \le n+1$. Tada je

$$\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} < \frac{1}{n},$$

ili

$$1+\frac{1}{n+1} \le 1+\frac{1}{x} < 1+\frac{1}{n},$$

odnosno

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

to je i

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Ako se uvede smjena $\frac{1}{x} = t$, dobijamo

(3.1.8) $$\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

***Primjer* 3.1.21.**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{4x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)^{4x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)^{(3x+1)\cdot\frac{4x}{3x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)^{3x+1}\right]^{\frac{4x}{3x+1}} = e^{\frac{4}{3}}.$$

***Primjer* 3.1.22.**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+7}\right)^{6x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-4}{x^2+3x+7}\right)^{6x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x-4}{x^2+3x+7}\right)^{\frac{x^2+3x+7}{2x-4}}\right]^{\frac{6x(2x-4)}{x^2+3x+7}} = e^{12}.$$

***Primjer* 3.1.23.**

$$\lim_{x\to 0}(1+10x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+10x)^{\frac{1}{10x}}\right]^{20} = e^{20}.$$

***Primjer* 3.1.24.** Dokazati da je

(3.1.9) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

***Rješenje.***

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

***Primjer* 3.1.25.** Dokazati da je

(3.1.10)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\quad a>0 .$$

***Rješenje.***
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e .$$

**Primjer 3.1.26.** Dokazati da je

(3.1.11)
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad a>0,\ a\neq 1 .$$

***Rješenje.*** Neka je $a^x-1=t$, tada je $x=\dfrac{\ln(1+t)}{\ln a}$, pa je

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}}=\ln a\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=$$
$$=\ln a\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\ln a\cdot 1=\ln a .$$

## 3.1.6. Beskonačno male i beskonačno velike funkcije

**Definicija 3.1.6.** *Funkcija* $y=\alpha(x)$ *je beskonačno mala funkcija kada* $x\to a$ $(x\to\infty)$ *ako je*
$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0,\quad \left(\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0\right).$$

***Primjer* 3.1.27.** Funkcija $y=\sin x$ je beskonačno mala funkcija kada $x\to 0$, jer je
$$\lim_{x\to 0}\sin x=0 .$$

**Teorema 3.1.8.** *Svaka funkcija* $y=f(x)$, *koja ima graničnu vrijednost* $A$ *kada* $x\to a$, *može se izraziti u obliku zbira njene granične vrijednosti u toj tački i beskonačno male funkcije, tj. u obliku*
$$f(x)=A+\alpha(x),$$
*gdje je*
$$A=\lim_{x\to a}f(x),\quad \lim_{x\to a}\alpha(x)=0 .$$

***Dokaz.*** Po pretpostavci teoreme je $\lim_{x\to a}f(x)=A$. Ako stavimo da je $\alpha(x)=f(x)-A$, tada je

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{x\to a}\left(f(x)-A\right)=A-A=0$$
.

**Definicija 3.1.7.** *Funkcija* $y=f(x)$ *je beskonačno velika funkcija kada* $x\to a$ $(x\to\infty)$, *ako je*

$$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty,\quad\left(\lim_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty\right).$$

***Primjer*** **3.1.28.** Funkcija $y=x^2$ kada $x\to\infty$ je beskonačno velika funk-cija, jer je

$$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$$
.

**Definicija 3.1.8.** *Ako su* $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ *beskonačno male funkcije kada* $x\to a$, *tada se za te funkcije kaže da su beskonačno male funkcije istog reda*, *ako je*

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k\neq 0$$
.

Ako je $k=1$ tada se kaže da su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ ekvivalentne beskonačno male funkcije i simbolično se piše

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\text{ kada }x\to a.$$

Ako je $k=0$ kaže se da je $\alpha(x)$ beskonačno mala funkcija višeg reda nego $\beta(x)$ kada $x\to a$.

***Primjer*** **3.1.29.** $\sin x\sim x$ kada $x\to 0$, jer je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
.

Ekvivalentno beskonačno male funkcije se mogu iskoristiti za prak-tično izračunavanje graničnih vrijednosti. Složeni izrazi u graničnim vrijed-nostima mogu se zamijeniti ekvivalentnim beskonačno malim izrazima.

***Primjer*** **3.1.30.** Izračunati $\lim_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x^2-7x+11\right)}{x-2}$.

***Rješenje.*** Iz $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ slijedi da je $\ln(1+x)\sim x$ kada $x\to 0$. Ako $x\to 2$ tada $x^2-7x+11\to 1$. Može se napisati da je

$$x^2-7x+11=1+\left(x^2-7x+10\right)$$

i tada $x^2-7x+10\to 0$ kada $x\to 2$. To znači da je

$$\ln\left(x^2-7x+11\right)\sim x^2-7x+10,$$

pa je

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-7x+11\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-5)}{x-2}=-3.$$

***Primjer* 3.1.31.** Dokazati da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^q-1}{x}=q,\quad q\in\boldsymbol{R}.$$

***Rješenje.*** Kako je

$$(1+x)^q-1\sim\ln\left\{1+\left[(1+x)^q-1\right]\right\}=\ln(1+x)^q=q\cdot\ln(1+x)$$

kada $x\to 0$, to je

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^q-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{q\cdot\ln(1+x)}{x}=q,\quad q\in\boldsymbol{R}.$$

### 3.1.7. Zadaci za vježbu

U zadacima od 1 do 6 dokazati da su tačne date granične vrijednosti.

**1.** $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin x=0$.

**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{3x^2+1}=\dfrac{1}{3}$.

**3.** $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

**4.** $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

**5.** $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$.

**6.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\dfrac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}$, $n\in\boldsymbol{N}$.

U zadacima od 7 do 28 naći date granične vrijednosti.

**7.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8x^3+3}{x-1}$.

**8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

**9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5}{x^2-8}$.

**10.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x}{x^4+x+1}$.

**11.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

**13.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

**14.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right)$.

**15.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

**16.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

**17.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$.

**18.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$.

**19.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos a x-\cos bx}{x^2}$.

**20.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{tg\, x}$.

**21.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

**22.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a x-4}{a x+2}\right)^x$.

**23.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

**24.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^{-2}\right)^x$.

**25.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

**26.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

**27.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$.

**28.** $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

**29.** Date su funkcije $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ i $g(x)=1-\sqrt{x}$. Dokazati da su date funkcije beskonačno male funkcije kada $x\to 1$. Koja je od njih beskonačno mala funkcija višeg reda?

**30.** Da li su funkcije $f(x)=1-x$ i $g(x)=1-\sqrt[3]{x}$ ekvivalentne funkcije kada $x\to 1$ ?

## 3.2. Neprekidnost funkcija

**Definicija 3.2.1.** *Za funkciju* $y=f(x)$ *kažemo da je neprekidna u tački* $x=a\in D(f)$, *ako vrijedi*:

(3.2.1) *postoji* $\lim\limits_{x\to a}f(x)$,

(3.2.2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

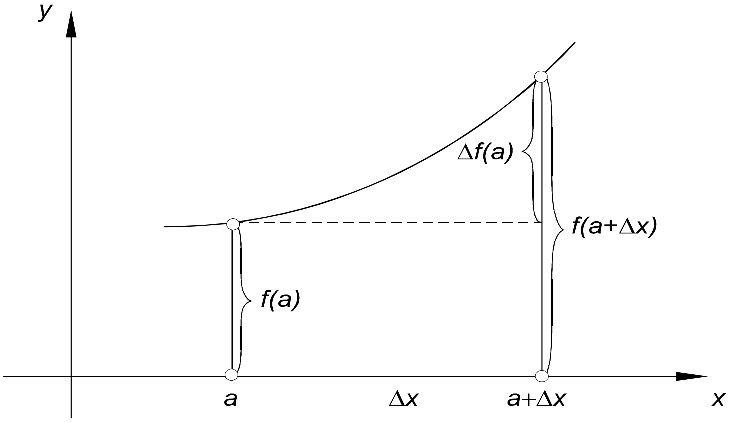
Ako je funkcija $y=f(x)$ neprekidna u svakoj tački intervala $I\subseteq D(f)$ tada se za tu funkciju kaže da je neprekidna u intervalu *I*.

Neka se vrijednost argumenta funkcije $y=f(x)$ promijeni sa $a$ na proizvoljno $x\in D(f)$. Razlika $x-a$ se naziva *priraštaj argumenta* $x$ i označava se sa $\Delta x$. Dakle,

$$\Delta x=x-a,$$

odakle slijedi da je

$$x=a+\Delta x.$$




Sl. 3.2.1.

Razlika $f(a+\Delta x)-f(a)$ se naziva priraštaj funkcije $f(x)$ koji odgovara priraštaju argumenta $\Delta x$ i označava se sa $\Delta f(a)$. Zapažamo (vidjeti sl.3.2.1) da je

$$f(a)+\Delta f(a)=f(a+\Delta x)$$

ili

$$\Delta f(a)=f(a+\Delta x)-f(a).$$

Relacija (3.2.2) se može izraziti u obliku

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=0,$$

a ako se zamijeni $x$ sa $a+\Delta x$ tada prethodna jednakost glasi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(a+\Delta x)-f(a)\right]=0$$

ili

(3.2.3) $$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(a)=0.$$

To drugim riječima znači da je funkcija $y=f(x)$ neprekidna u tački $x=a\in D(f)$ ako beskonačno malom priraštaju argumenta odgovara beskonačno mali priraštaj funkcije.

***Primjer* 3.2.1.** Dokazati da je funkcija $y=x^2+3x+2$ neprekidna u inter-valu $\langle-\infty,+\infty\rangle$.

***Rješenje.*** Data funkcija je definisana u intervalu $\langle-\infty,+\infty\rangle$ i

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+2-\left(x^2+3x+2\right)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+3x+3\Delta x+2-x^2-3x-2\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x(2x+\Delta x+3)=0.$$

***Primjer* 3.2.2.** Funkcija $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ je neprekidna za svako $x \neq -1,\ x \neq 1$.

***Dokaz.*** $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[ \dfrac{1}{(x + \Delta x)^2 - 1} - \dfrac{1}{x^2 - 1} \right] =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 - 1 - (x + \Delta x)^2 + 1}{\left[(x + \Delta x)^2 - 1\right]\left(x^2 - 1\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x (2x + \Delta x)}{\left[(x + \Delta x)^2 - 1\right]\left(x^2 - 1\right)} = 0,$$

za $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1, 1\}$.

***Primjer* 3.2.3.** Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 5, & |x| > 2 \\ x^2 - 1, & |x| < 2 \\ 4, & |x| = 2. \end{cases}$$

Nacrtati grafik funkcije i ispitati neprekidnost u tačkama $|x| = 2$.

***Rješenje.*** Grafik funkcije je dat na Slici 3.2.2. Kako je

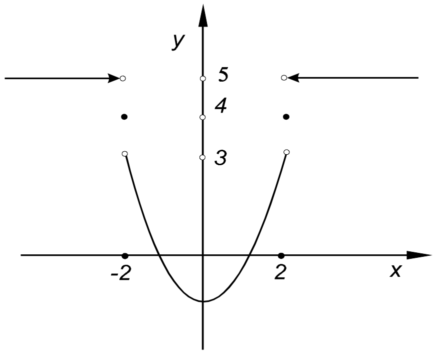
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 5 = 5$, a

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(x^2 - 1\right) = 3$,

tj.

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

to znači da data funkcija nema graničnu vrijednost u tački $x = 2$, odnosno da je funkcija u toj tački prekidna. Analogno se pokazuje da je tačka $x = -2$ tačka prekida.



Sl. 3.2.2.

To se vidi i sa grafika date funkcije. Beskonačno malom priraštaju argu-menta $x$ u okolini tačaka $|x| = 2$ odgovara priraštaj funkcije koji nije bes-konačno mali, $|\Delta y| > 1$.

***Primjer* 3.2.4.** Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2 \\ 4, & x = 2 \\ 3, & x > 2. \end{cases}$$

Nacrtati grafik funkcije i ispitati neprekidnost funkcije u tački $x = 2$.

***Rješenje.*** Grafik funkcije je dat na slici 3.2.3. U ovom slučaju je

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 3 = 3$,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(x^2 - 1\right) = 3$$
, tj.
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$
.

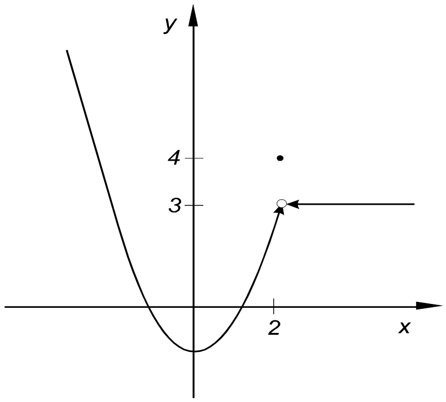
Znači funkcija ima graničnu vrijednost u tački $x = 2$. Obzirom da je

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3 \neq f(2) = 4$$

to je funkcija u tački

$$x = 2$$

prekidna.



Sl. 3.2.3.

Za funkciju $y = f(x)$ koja je definisana u tački $x = a$ i u njenoj desnoj okolini tačke $a$ kaže se da je u tački $x = a$ neprekidna sdesna ako je

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$
.

Slično se definiše i neprekidnost funkcije slijeve strane tačke $x = a$ .

## 3.2.1. Računanje s neprekidnim funkcijama

**Teorema 3.2.1.** *Neka su* $f(x)$ *i* $g(x)$ *neprekidne funkcije u tački* $a \in D(f) \cap D(g)$. *Tada su u tački* ***a*** *neprekidne i funkcije*: $f(x) + g(x)$; $f(x)\,g(x)$; $c \cdot f(x)$, $c \in \boldsymbol{R}$; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ .

***Dokaz.*** Na osnovu pretpostavke teoreme je

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$
,

pa je

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a)$$

što znači da je funkcija $f(x) + g(x)$ neprekidna u tački $x = a$ .

Ostali dio teoreme se dokazuje na sličan način, i dokazi mogu pos-lužiti kao primjeri za vježbu.

***Primjer* 3.2.7.** Funkcija

$$y = x^n,\ n \in \boldsymbol{N}$$

je neprekidna u intervalu $\langle -\infty, +\infty \rangle$.

***Dokaz.*** Za $n = 1$ funkcija glasi $f(x) = x$ i ona je neprekidna za svako $x \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, jer je

$$|\, f(x + \Delta x) - f(x)\,| = |\, x + \Delta x - x\,| = |\,\Delta x| < \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{x \to 0} \Delta y = 0.$$

Za $n = 2$ je

$$f(x) = x^2 = x \cdot x$$

i ona je na osnovu teoreme 3.2.1 neprekidna u intervalu $\langle -\infty, +\infty \rangle$.

Ako pretpostavimo da je funkcija $y = x^k$ neprekidna u intervalu $\langle -\infty, +\infty \rangle$ tada je i funkcija $f(x) = x^{k+1} = x^k \cdot x$ neprekidna na istom intervalu, zbog teoreme 3.21. Po principu matematičke indukcije funkcija $y = x^n$ je neprekidna u intervalu $\langle -\infty, +\infty \rangle$ za svako $n \in \boldsymbol{N}$.

***Primjer* 3.2.8.** Na osnovu primjera 3.2.7 i teoreme 3.2.1 slijedi da je svaki polinom

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

neprekidna funkcija u intervalu $\langle -\infty, +\infty \rangle$.

***Primjer* 3.2.9.** Svaka funkcija oblika

$$Q(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

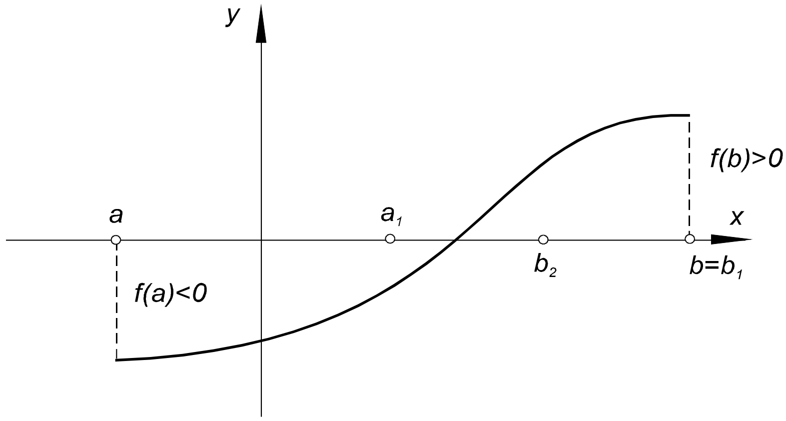
je neprekidna za svako $x$ za koje je $Q_m(x) \neq 0$.

### 3.2.2. Osobine neprekidnih funkcija

**Teorema 3.2.2.** *Neka su* $I$ *i* $I_1$ *otvoreni intervali i* $f : I \to I_1$, *odnosno* $g : I_1 \to R$, *neprekidne funkcije u tački* $c \in I$, *odnosno u* $f(c) \in I_1$. *Tada je kompozicija funkcija* $g \circ f$ *neprekidna u tački* $c$.

**Teorema 3.2.3.** *Ako je funkcija* $y = f(x)$ *neprekidna na intervalu* $I = [a, b]$ *i ako je* $f(a) \cdot f(b) < 0$ *tada postoji bar jedna tačka* $c \in \langle a, b \rangle$ *takva da je* $f(c) = 0$.

Ova teorema ima sljedeće geometrijsko značenje. Ako grafik nepre-kidne funkcije prelazi sa jedne na drugu stranu $x$-ose, onda je on mora sjeći bar u jednoj tački, Sl.3.2.4.




Sl. 3.2.4.

***Dokaz.*** Pretpostavimo da je $f(a)<0,\ f(b)>0$. Interval $[a,b]$ podijelimo tačkom $\frac{a+b}{2}$. Može se desiti da je $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ i tada je teo-rema dokazana. U tom slučaju je $c=\frac{a+b}{2}$. Ako je $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$ tada će funkcija u jednom od intervala $\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\ \left[\frac{a+b}{2},b\right]$ na krajevima imati različite znakove. Recimo da funkcija ima različite znakove na krajevima drugog intervala i označimo taj interval sa $[a_1,b_1]$, gdje je $a_1=\frac{a+b}{2}$, $b_1=b$. Dakle, sada je $f(a_1)<0,\ f(b_1)>0$. Interval $[a_1,b_1]$ podijelimo tačkom $\frac{a_1+b_1}{2}$. Ako je $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$ teorema je dokazana, a ako je $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$ postupak se nastavlja kao i u prethodnom slučaju. Ako se postupak nastavlja $n$-puta tako da je $f(a_n)<0,\ f(b_n)>0$ tada je

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}.$$

Ako $n\to\infty$ tada i

$$\frac{b-a}{2^n}\to 0,$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 .$$

Kako je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački $c \in [a_n, b_n]$ za koju vrijedi

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0, \quad f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \quad 0 ,$$

slijedi da je $f(c) = 0$.

**Teorema 3.2.3.** (***Weierstrassova teorema***) *Ako je funkcija* $y = f(x)$ *neprekidna na intervalu* $I = [a,b]$, *tada je ona na tom intervalu ogra-ničena odozdo i odozgo*, *tj. postoje* ***m*** *i* ***M*** *takvi da je*

$$m \le f(x) \le M$$

*za svako* $x \in I$ .

**Teorema 3.2.4.** *Ako je funkcija* $y = f(x)$ *neprekidna na intervalu* $I = [a,b]$ *tada na tom intervalu postoji maksimum i minimum funkcij*e.

***Dokaz.*** Ako je $M = \sup_{x\in I} f(x)$ tada je na osnovu teoreme 3.2.3 $M$ konačan broj. Pretpostavimo da $M$ nije maksimum date funkcije, tada je funkcija

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

neprekidna a time i ograničena na intervalu *I*. To znači da postoji $\varepsilon > 0$ ta-ko da je $g(x) \le \varepsilon$ odakle se lahko dobija da je

$$f(x) \le M - \frac{1}{\varepsilon} ,$$

što znači da je broj $M - \frac{1}{\varepsilon}$, manji od *M*, supremum funkcije $f(x)$ što je nemoguće.

Sličan dokaz je i za infimum funkcije.

## 3.2.3. Zadaci za vježbu

**1.** Naći priraštaj funkcije $y = 2x^3 + x^2 - 1$ za $x = 1, \ \Delta x = 0{,}1$.

**2.** Dokazati da je funkcija

$$y = a^x, \ a > 0 ,$$

neprekidna u svakoj tački.

**3.** Nacrtati grafik funkcije

$$y = \begin{cases} 2^x, & x < 0 \\ 3, & x = 0 \\ 2 - x, & x > 0. \end{cases}$$

Ispitati neprekidnost funkcije u tački $x = 0$.

**4.** Za koje vrijednosti $a$ je neprekidna funkcija

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2. \end{cases}$$

**5.** Ispitati neprekidnost funkcije

$$y = \begin{cases} \dfrac{x - a}{\ln x - 1}, & x > e \\ 2, & x = e \\ x, & x < e \end{cases}$$

u tački $x = 2$.

# 3.3. Izvodi i diferencijali

## 3.3.1. Izvod funkcije

**Definicija 3.3.1.** *Neka je funkcija* $y = f(x)$ *definisana u intervalu* $I = \langle a, b \rangle$ *i neka je* $[x, x + \Delta x] \in I$ *. Ako postoji konačna i određena gra-nična vrijednost*

(3.3.1)
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

*za funkciju* $y = f(x)$ *se kaže da ima izvod u tački x ili da je diferencija-bilna u tački x.*

Pored oznake $f'(x)$ za izvod funkcije $y = f(x)$ se upotrebljavaju i druge oznake, kao naprimjer: $f'_x;\ y';\ y'_x;\ \dfrac{dy}{dx}$.

Na osnovu (3.3.1) izvod funkcije $y = f(x)$ se može izraziti u obliku

(3.3.2)
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

odakle slijedi da je izvod funkcije $y = f(x)$ granična vrijednost količnika priraštaja funkcije i priraštaja argumenta kada priraštaj argumenta teži nuli.

U definiciji izvoda pretpostavili smo da $\Delta x$ može imati proizvoljan znak, + ili –. Ako je $\Delta x > 0$ tada ćemo izraz

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

zvati desni izvod i označavati sa $f'_+(x)$. Slično se definiše i lijevi izvod i označava sa $f'_-(x)$.

***Primjer*** **3.3.1.** Data je funkcija $y = 2x^2$. Naći $y'$ za $x = 1$.

***Rješenje.*** Za $x = 1$ je $f(1) = 2 \cdot 1^2 = 2$. Za $x = 1 + \Delta x$ je

$$f(1) + \Delta f(1) = 2(1+\Delta x)^2,$$

odakle je

$$\Delta y = \Delta f = 2(1+\Delta x)^2 - 2 = (4 + \Delta x)\Delta x.$$

Po definiciji izvoda je

$$y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4+\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 4.$$

***Primjer*** **3.3.2.** Za funkciju $y = x^3$ naći $y'$.

***Rješenje.*** $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$, odakle je

$$y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 =$$
$$= \left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2\right)\Delta x,$$

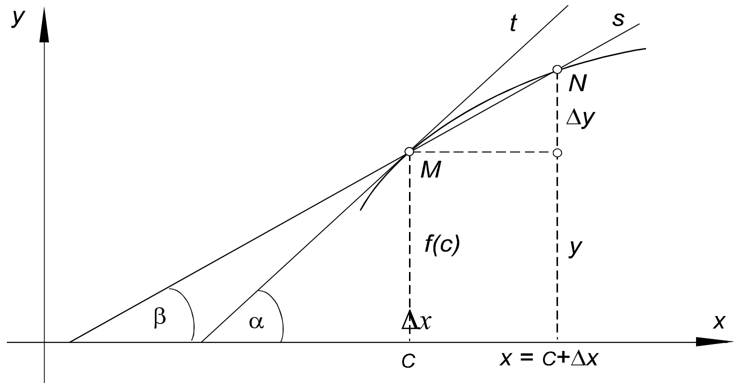
pa je

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2\right)\Delta x}{\Delta x} = 3x^2.$$

### 3.3.1.1. Geometrijsko značenje izvoda

Neka je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna funkcija u intervalu $I = \langle a, b \rangle$. Neka je $c \in I$; tada je

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$




Sl. 3.3.1.

Pored stalne tačke $M(c, f(c))$ sa grafika funkcije $y = f(x)$ posmatrajmo još jednu tačku $N(x, f(x))$, Sl.3.3.1 i postavimo sječicu *s* određenu tačkama *M* i *N*. Ako se tačka *N*, klizući po krivoj, neograničeno približava tački *M* tada će sječica *s* težiti pravoj *t* koja se naziva tangenta krive u tački *M*.

Tački *c* odgovara vrijednost funkcije $f(c)$. Novoj vrijednosti argu-menta $c+\Delta x$ odgovara vrijednost funkcije $y + \Delta y = f(c+\Delta x)$ pa tačka *N* ima koordinate $(c+\Delta x, y+\Delta y)$. Neka je ugao koga sječica *s* zatvara sa pozitivnim smjerom ose $Ox$ označen sa $\beta$. Iz slike se neposredno zapaža da je $tg\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Ako $\Delta x \to 0$ tad će se tačka *N* klizući po krivoj približavati tački *M*. Ugao $\beta$ će se mijenjati i težiće uglu $\alpha$, gdje je ugao $\alpha$ ugao koga zatvara tangenta *t* sa pozitivnim smjerom ose $Ox$. Zapaža se da je

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c)$$, tj

(3.3.3) $$tg\alpha = f'(c)$$

što znači da je geometrijska interpretacija izvoda sljedeća:"izvod $f'(x)$ pri datoj vrijednosti argumenta $x$ jednak je tangensu ugla koji obrazuje tangenta na grafik funkcije $f(x)$ u tački $M(x, y)$ sa pozitivnim smjerom ose $Ox$.

**Primjer 3.3.3.** Naći koeficijent tangente krive $y = 2x^2$ u tački $M(1,2)$.

***Rješenje.*** Kako je $y' = 4$, (vidjeti primjer 3.3.1) to je $tg\alpha = k = 4$.

### 3.3.1.2. Osobine diferencijabilnih funkcija

**Teorema 3.3.1.** *Ako je funkcija* $y = f(x)$ *diferencijabilna u tački* $x = c$, *tada je ona u toj tački i neprekidna.*

***Dokaz.*** Na osnovu pretpostavke date teoreme i teoreme 3.1.8 je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) + \alpha(c + \Delta x),$$

gdje $\alpha(c + \Delta x) \to 0$ kada $\Delta x \to 0$. Iz prethodne jednakosti se dobija

$$\Delta y = f'(c) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(c + \Delta x) \tag{3.3.4}$$

odakle slijedi da $\Delta y \to 0$ kada $\Delta x \to 0$ što znači da je funkcija neprekidna u tački $x = c$.

**Teorema 3.3.2.** *Ako je funkcija* $y = f(x)$ *injekcija i diferencijabilna u tački* $x$, *pri čemu je* $f'(x) \neq 0$, *tada je i njena inverzna funkcija* $f^{-1}$ *diferencijabilna u tački* $f(x)$ *i vrijedi*

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = \frac{1}{f'(x)}, \text{ ili } \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{3.3.5}$$

***Dokaz.*** Kao i u relaciji (3.3.4) je

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \left[f'(x) + \alpha(x + \Delta x)\right]\Delta x. \tag{3.3.6}$$

Kako je $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ to je

$$x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y). \tag{3.3.7}$$

Takođe, iz $y = f(x)$ slijedi jednakost

$$x = f^{-1}(y). \tag{3.3.8}$$

Zamjenom vrijednosti (3.3.7) i (3.3.8) u (3.3.6) dobijamo

$$\Delta y = \left[f'(x) + \alpha(x + \Delta x)\right] \cdot \left[f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)\right]$$

ili

$$\frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x) + \alpha(x + \Delta x)}.$$

Ako $\Delta x \to 0$ tada i $\Delta y \to 0$, jer je $y$ neprekidna funkcija u tački $x$, pa je

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = \left(f^{-1}(f(x))\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

### 3.3.1.3. Pravila diferenciranja

**Teorema 3.3.3.** *Ako je* $y = c \cdot u(x)$, $c = const$, *i ako postoji* $u'(x)$ *tada vrijedi*

(3.3.9) $$y' = c \cdot u'(x).$$

***Dokaz.*** Za $y = c \cdot u(x)$ je

$$y + \Delta y = c \cdot u(x + \Delta x),$$ ili

$$\Delta y = c \cdot u(x + \Delta x) - c \cdot u(x) = c\left[u(x + \Delta x) - u(x)\right].$$

Po definiciji izvoda je

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\left[u(x + \Delta x) - u(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = c \cdot u'(x),$$

tj.

(3.3.10) $$\left[c \cdot u(x)\right]' = c \cdot u'(x), \quad c = const.$$

**Teorema 3.3.4.** *Izvod zbira konačnog broja diferencijabilnih funkcija jednak je zbiru izvoda pojedinih sabiraka*, *tj.*

(3.3.11) $$\left[u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)\right]' = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x).$$

***Dokaz.*** Teoremu ćemo dokazati samo za zbir od dva sabirka $u(x)$ i $v(x)$. Neka je $y = u(x) + v(x)$ tada je

$$y + \Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x),$$

a

$$\Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x) =$$
$$= \left[u(x + \Delta) - u(x)\right] + \left[v(x + \Delta x) - v(x)\right].$$

Dalje je

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[u(x + \Delta x) - u(x)\right] + \left[v(x + \Delta x) - v(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[u(x + \Delta x) - u(x)\right]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[v(x + \Delta x) - v(x)\right]}{\Delta x} = u'(x) + v'(x),$$

tj.

(3.3.12) $$\left[u(x) + v(x)\right]' = u'(x) + v'(x),$$

čime je teorema dokazana. Primjenom matematičke indukcije nije teško do-kazati da teorema vrijedi i u opštem slučaju.

**Teorema 3.3.5.** *Ako su funkcije* $u(x)$ *i* $v(x)$ *diferencijabilne funkcije u tački x tada je diferencijabilna i funkcija* $y = u(x) \cdot v(x)$ *i pri tome vrijedi*

(3.3.13) $$y' = \left[u(x)\cdot v(x)\right]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

***Dokaz.*** Kako je $y = u(x)\cdot v(x)$ to je

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\cdot(v + \Delta v),$$

pa je

$$\Delta y = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv.$$

Dijeljenjem sa $\Delta x$ dobićemo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta u}.$$

Nakon izračunavanja granične vrijednosti se dobija

$$y' = u'v + uv',$$

jer je

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = 0.$$

**Teorema 3.3.6.** *Ako su funkcije* $u(x)$ *i* $v(x)$ *diferencijabilne funkcije u tački* $x$ *i ako je* $v(x)\neq 0$*, tada je diferencijabilna i funkcija* $y = \frac{u(x)}{v(x)}$*, i pri tome vrijedi*

(3.3.14) $$y' = \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

***Dokaz.*** Iz $y = \frac{u}{v}$ slijedi

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}, \text{ ili } \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}.$$

Nakon oduzimanja razlomaka desna strane prethodna jednakost je oblika

$$\Delta y = \frac{v\cdot\Delta u - u\cdot\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

odnosno

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Ako $\Delta x \to 0$ tada po teoremi 3.3.1 i na osnovu pretpostavke date teoreme i $\Delta v \to 0$, pa je

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

### 3.3.1.4. Izvodi nekih elementarnih funkcija

**1.** ***Izvod konstante***. Neka je $f(x)=c$, gdje je $c$ konstanta, tada je

$$f(x)+\Delta f(x)=f(x+\Delta x)=c$$

pa je

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

tj.

(3.3.15) $$(c)'=0.$$

**2.** ***Izvod funkcije*** $y=x^q,\ q\in\boldsymbol{R}$. Ako argumentu $x$ dodamo prira-štaj $\Delta x$ tada će vrijednost funkcije u $x+\Delta x$ biti

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^q$$

ili

$$\Delta y=(x+\Delta x)^q-x^q.$$

Dalje je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^q\,\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^q-1}{\Delta x}$$

ili

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{q-1}\,\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^q-1}{\dfrac{\Delta x}{x}}.$$

Ako se stavi $u=\dfrac{\Delta x}{x}$, tada je (vidjeti primjer 3.1.31)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^q-1}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^q-1}{u}=q$$

pa je

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{q\to 0}x^{q-1}\cdot\frac{(1+u)^q-1}{u}=q\cdot x^{q-1},$$

tj.

(3.3.16) $$\left(x^q\right)'=q\cdot x^{q-1},\quad q\in\boldsymbol{R}.$$

**Primjer 3.3.4.** Naći $y'$ ako je $y=x^4$.

***Rješenje.*** Na osnovu prethodne formule je

$$y' = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3 .$$

**3.** ***Izvodi funkcija*** $y = \sin x$ *i* $y = \cos x$. Neka je $y = \sin x$. Vri-jednost funkcije u $x + \Delta x$ je

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),$$

odakle je prema formuli za razliku funkcije $\sin x$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Po definiciji izvoda je

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x,$$

tj.

(3.3.17) $$(\sin x)' = \cos x .$$

Slično se dobija i izvod funkcije $y = \cos x$. Tada je

$$y + \Delta y = \cos\,(x + \Delta x)$$

ili

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

pa je

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x,$$

tj.

(3.3.18) $$(\cos x)' = -\sin x .$$

**4.** ***Izvod funkcija*** $y = tg\,x$ *i* $y = ctg\,x$. Kako je

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

to je prema formuli (3.3.14)

$$y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

tj.

(3.3.19) $$(\,tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Slično se dobija da je

(3.3.20) $$\left(ctg\,x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

**5.** *Izvod funkcije* $y = a^x,\ a \in \boldsymbol{R}^+$. Kako za $y = a^x$ vrijedi

$$y + \Delta y = a^{x+\Delta x} = a^x \cdot a^{\Delta x}$$

to je

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)$$

pa je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Iz definicije izvoda slijedi da je

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a,$$

tj.

(3.3.21) $$\left(a^x\right)' = a^x \ln a.$$

Za $a = e$ slijedi da je

(3.3.22) $$\left(e^x\right)' = e^x,$$

jer je $\ln e = 1$.

**6.** ***Izvod funkcije*** $y = \log_a x$. Ako je $y = \log_a x$ tada je

$$y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x)$$

ili

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Po definiciji izvoda je

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a e,$$

tj.

(3.3.23) $$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\log_a e.$$

Ako je $a = e$ tada $\log_a x = \ln x$, pa je

(3.3.24) $$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x},$$

jer je $\ln e = 1$.

**6.** ***Izvodi inverznih trigonometrijskih funkcija***. Funkcija $y = \arcsin x$ za $-1 < x < 1$, pri čemu je $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, ima inverznu funkciju $x = \sin y$. Tada je $x'_y = \cos y$, na osnovu teoreme 3.3.2 postoji $y'$ i vrijedi

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

tj.

(3.3.25) $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Analogno se dobija

(3.326) $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

(3.3.27) $$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

(3.3.28) $$(arc\, ctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

### 3.3.1.5. Tablica osnovnih izvoda

Izvodi elementarnih funkcija, datih u prethodnom dijelu, mogu se izraziti sljedećom tabelom

**1.** $y = c \quad \Rightarrow y' = 0$,

**2.** $y = x^q \quad \Rightarrow y' = q \cdot x^{q-1}$,

**3.** $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$,

**4.** $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$,

**5.** $y = tg\, x \quad \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

**6.** $y = ctg\,x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

**7.** $y = a^x \quad \Rightarrow y' = a^x \ln a$,

$y = e^x \quad \Rightarrow y' = e^x$,

**8.** $y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$,

$y = \ln x \quad \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$,

**9.** $y = \arcsin x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

**10.** $y = \arccos x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

**11.** $y = arctg\,x \quad \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

**12.** $y = arcctg\,x \;\Rightarrow y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Pravila diferenciranja se mogu dati sljedećom tabelom.

**1.** $y = c \cdot u(x) \qquad \Rightarrow y' = c \cdot u'(x)$,

**2.** $y = u(x) + v(x) \Rightarrow y' = u'(x) + v'(x)$,

**3.** $y = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$,

**4.** $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \qquad \Rightarrow y' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$.

### 3.3.1.6. Neki primjeri izvoda

***Primjer* 3.3.5.** Naći izvod funkcije

$$y = x^2 \cos x.$$

***Rješenje.*** Funkcija $y = x^2 \cos x$ se može posmatrati kao proizvod dvije elementarne funkcije $x^2$ i $\cos x$, pa je

$$y' = \left(x^2\right)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x\cos x + x^2(-\sin x) =$$

$$= 2x\cos x - x^2 \sin x = x(2\cos x - x\sin x).$$

***Primjer*** **3.3.6.** Funkcija $y=\dfrac{x^2}{tg\,x}$ se može posmatrati kao količnik elemen-tarnih funkcija $x^2$ i $tg\,x$, pa je

$$y'=\frac{\left(x^2\right)'tg\,x-x^2(tg\,x)'}{tg^2x}=\frac{2x\,tg\,x-x^2\dfrac{1}{\cos^2x}}{tg^2x}=\frac{2x\,tg\,x-\dfrac{x^2}{\cos^2x}}{tg^2x}.$$

***Primjer*** **3.3.7.** Naći $y'$ ako je $y=a^x\ \ln x$.

***Rješenje.***

$$y'=\left(a^x\right)'\ln x+a^x(\ln x)'=a^x\ln a\ln x+\frac{a^x}{x}=$$

$$=a^x\left(\ln a\ln x+\frac{1}{x}\right).$$

***Primjer*** **3.3.8.** Ako je $y=x^4arctg\,x$ tada je

$$y'=\left(x^4\right)'arctg\,x+x^4(arctg\,x)'=4x^3arctg\,x+\frac{x^4}{1+x^2}.$$

### 3.3.1.7. Izvod složene funkcije

**Teorema 3.3.7.** *Neka je data funkcija* $y=f(u)$ *gdje je* $u=\varphi(x)$. *Ako je funkcija* $\varphi(x)$ *diferencijabilna u tački* ***x***, *ako je funkcija* $y=f(u)$ *definisana u intervalu koji sadrži* $\varphi(x)$ *i ima izvod u tački* ***u***, *tada funkcija* $y=f(\varphi(u))$ *ima izvod u tački* ***x*** *i vrijedi*

(3.3.29) $$\left[f(\varphi(x))\right]_x'=f_u'[\varphi(x)]\cdot\varphi_x'(x).$$

***Dokaz.*** Neka je $\Delta x$ priraštaj nezavisno promjenljive $x$, $\Delta u$ odgo-varajući priraštaj funkcije $u$, a $\Delta y$ odgovarajući priraštaj funkcije $y$. Tada je

$$u+\Delta u=\varphi(x+\Delta x)\Rightarrow\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$$
$$y+\Delta y=f(u+\Delta u)\Rightarrow\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$$

pa je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}.$$

Prema pretpostavci date teoreme funkcije $f(u)$ i $\varphi(x)$ su diferencijabilne, pa je

$$y_x'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

$$y_x'=f_u'\cdot u_x'.$$

Time je teorema dokazana.

***Primjer* 3.3.9.** Naći izvod funkcije $y = \sin\left(3x^2 + 2\right)$.

***Rješenje.*** Uzmimo da je $u = 3x^2 + 2$, tada je

$$y = \sin u, \quad u = 3x^2 + 2.$$

Kako je $y'_u = \cos u, \quad u' = 6x$ to je

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos\left(3x^2 + 2\right) \cdot 6x = 6x \cdot \cos\left(3x^2 + 2\right).$$

***Primjer* 3.3.10.** U funkciji

$$y = a^{x^2 \ln x}$$

ako se uzme da je $u = x^2 \ln x$, dobićemo

$$y = a^u, \quad u = x^2 \ln x.$$

Kako je $y'_u = a^u \ln a, \quad u'_x = 2x \cdot \ln x + x = x(2 \cdot \ln x + 1)$, to je

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = x\left(2 \cdot \ln x + 1\right) a^{x^2 \ln x} \ln a.$$

### 3.3.1.8. Izvod funkcije u parametarskom obliku

**Teorema 3.3.8.** *Neka je funkcija* $y = f(x)$ *neprekidna na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *i neka su* $x = \varphi(t)$ *i* $y = \psi(t)$ *neprekidne funkcije od* ***t*** *na intervalu* $\langle \alpha, \beta\rangle$. *Neka su funkcije* $x = \varphi(t)$ *i* $y = \psi(t)$ *diferencijabilne po* ***t*** *na posmatranom intervalu* $\langle \alpha, \beta\rangle$. *Tada za* $\varphi'_t(t) \neq 0$ *i funkcija* $y = f(x)$ *ima izvod po* ***x*** *na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *i vrijedi*

$$y'_x = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \tag{3.3.30}$$

*gdje je* $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = \psi'_t(t), \; \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \varphi'_t(t)$.

***Dokaz.*** Neka se argument $t$ funkcija $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$ promi-jeni za $\Delta t$ tada će se i funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ promijeniti za $\Delta x$ i $\Delta y$, respektivno, i vrijedi:

$$x + \Delta x = \varphi(t + \Delta t),$$

$$y + \Delta y = \psi(t + \Delta t),$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

odakle slijedi da je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}=\frac{\dfrac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}}{\dfrac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}}.$$

Na osnovu pretpostavke teoreme, kada $\Delta t \to 0$ tada $\Delta y \to 0$ i $\Delta x \to 0$ i vrijedi

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dfrac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}}{\dfrac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}}=\frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}=\frac{\dot y}{\dot x}.$$

**Primjer 3.3.11.** Funkcija

$$y=f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

je definisana za $x\in[-a,a]$ i ima parametarski oblik

$$x=a\cos t, y=b\sin t$$

i definisana je za $t\in[0,\pi]$. Tada vrijedi

$$\dot x=-a\sin t, \dot y=b\cos t$$

pa je prema relaciji (3.3.30)

$$f'_x=\frac{\dot y}{\dot x}=-\frac{b\cos t}{a\sin t}=-\frac{b}{a}\,tg\,t.$$

Za $x=a$ je $f(a)=0, t=0, y=b$ odnosno $\dot y(a)=b, \dot x(a)=0$, pa je $f'(a)=-\infty$, jer je $x'_t(0^+)<0, y'_t(0^+)>0$.

***Primjer* 3.3.12.** Za $x=at\cos t, y=at\sin t$ je

$$\dot x=a(\cos t-t\sin t), \dot y=a(\sin t+t\cos t),$$

odnosno

$$y'=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{a(\sin t+t\cos t)}{a(\cos t-t\sin t)}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}.$$

### 3.3.1.9. Logaritamski izvod

Neka je data funkcija $\ln y, y=y(x)$ i $y(x)>0$, tada je

$$\left(\ln y\right)'=\frac{y'}{y}$$, ili

$$\left(ln\left(-y\right)\right)' = \frac{-y'}{y} = \frac{y'}{y}$$

za $y(x) < 0$, tj.

(3.3.31)
$$\left(ln\left(y(x)\right)\right)' = \frac{y'(x)}{y(x)}.$$

Izraz $\frac{y'}{y}$ zove se *logaritamski izvod funkcije* $y(x)$.

Logaritamski izvod može se iskoristiti za određivanje izvoda nekih funkcija, kao naprimjer funkcije

$$y = \left[u(x)\right]^{v(x)}, u(x) > 0.$$

Logaritmovanjem prethodne jednakosti dobijamo

$$ln\, y = v(x) \cdot ln\, u(x)$$

odakle diferenciranjem slijedi da je

$$\frac{y'}{y} = v'\, ln\, u + v \cdot \frac{u'}{u},$$

ili

$$y' = y\left(v'\, ln\, u + v \cdot \frac{u'}{u}\right).$$

Kako je $y = u^v$, to je

$$y' = u^v\left(v'\, ln\, u + v \cdot \frac{u'}{u}\right).$$

***Primjer* 3.3.13.** Naći izvod funkcije $y = x^{x^2}$.

***Rješenje.*** Logaritmovanjem se dobija

$$ln\, y = x^2\, ln\, x$$

odakle je

$$\frac{y'}{y} = 2x \cdot ln\, x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

odnosno

$$y' = y(2x \cdot ln\, x + x) = x^{x^2}(2x \cdot ln\, x + x) = x^{x^2+1}(2\, ln\, x + 1).$$

## 3.3.2. Izvodi višeg reda

Ako funkcija $y = f(x)$ ima izvod $y' = f'(x)$ u nekom intervalu $I \in D(f)$, tada i funkcija $f'(x)$ predstavlja neku funkciju od $x$. Ako fun-kcija $y' = f'(x)$ ima izvod u tački $a \in I$ tada se taj izvod naziva drugi iz-vod funkcije $y = f(x)$ i označava se sa

$$y''(a), f''(a), \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=a}.$$

***Primjer* 3.3.14.** Naći drugi izvod funkcije

$$y = x^3 \ln x.$$

***Rješenje.*** Kako je

$$y' = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x}$$

tj.

$$y' = 3x^2 \ln x + x^2,$$

pa je

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(3x^2 \ln x + x^2\right)' = 6x \cdot \ln x + 3x^2 \frac{1}{x} + 2x =$$
$$= 6x \cdot \ln x + 3x + 2x = x(6 \ln x + 5).$$

Analogno, ako funkcija $y = f(x)$ ima drugi izvod u nekom intervalu $I \in D(f)$, tada je on ponovo funkcija od $x$. Ako funkcija $y'' = f''(x)$ ima izvod u tački $x = a \in I$ onda ga nazivamo treći izvod funk-cije $y = f(x)$ i označavamo sa

$$y'''(a), f'''(a), f^{(3)}(a).$$

Ako funkcija $y = f(x)$ ima $(n-1)$ izvod u intervalu $I \in D(f)$ tada se njegov izvod u tački $a \in I$ naziva $n$-ti izvod u tački $a$ i označava se sa

$$y^{(n)}(a), f^{(n)}(a).$$

### 3.2.2.1. Formula za izračunavanje *n*-tog izvoda

**Teorema 3.3.9.** *Ako funkcije* $u(x)$ *i* $v(x)$ *imaju izvod tada i funkcije*: $y = c \cdot u(x), y = u(x) + v(x), y = u(x) \cdot v(x)$ *imaju n-ti izvod i pri tom vrijedi*

$$(c \cdot u)^{(n)} = c \cdot u^{(n)},$$
$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)},$$
$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \cdots + u \cdot v^{(n)}.$$

*Dokaz* ove teoreme može poslužiti kao primjer za vježbu.

***Primjer* 3.3.15.** Neka je $y = x^q,\ q \in \mathrm{R}$, tada je

$$y' = q \cdot x^{q-1},$$
$$y'' = q(q-1)x^{q-2},$$
$$y''' = q(q-1)(q-2)x^{q-3}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = q(q-1)(q-2)\cdot \cdots \cdot \left[q-(n-1)\right]x^{q-n}.$$

***Primjer* 3.3.16.** Ako je $y = a^x$, tada je

$$y' = a^x \ln a,$$
$$y'' = a^x \ln^2 a,$$
$$y''' = a^x \ln^3 a,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

Za $a = e$ je $y^{(n)} = \left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.

***Primjer* 3.3.17.** Ako je $y = \sin x$ tada je

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = -\cos x,$$
$$y^{(4)} = \sin x, y^{(5)} = \cos x, \dots.$$

Da bi se našao $n$-ti izvod funkcije $y = \sin x$ pođimo od jednakosti

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(5)} = \cos x = \sin\left(x + 5\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

na osnovu čega se može zaključiti da je

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Analogno se dobija da je

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

### 3.3.2.2. Viši izvodi funkcija u parametarskom obliku

U dijelu 3.3.1.8 razmatrali smo način određivanja izvoda funkcije date u parametarskom obliku. Konstatovano je da za funkciju $y = f(x)$, gdje su $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$ funkcije od $t$, vrijedi da je

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \varphi'(t) \neq 0 .$$

Razmotrimo način izračunavanja drugog i viših izvoda funkcije u parame-tarskom obliku.

Na osnovu definicije izvoda funkcije u parametarskom obliku slijedi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{\frac{d(y'_x)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{\left(x'_x\right)^3} ,$$

ili

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t) - \psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3} . \tag{3.3.32}$$

Na isti način se dobije i treći i viši izvod od trećeg izvoda funkcije u parame-tarskom obliku.

***Primjer* 3.3.18.** Neka je $x = at\cos t$, $y = at\sin t$. Izračunati $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Iz

$$x'(t) = a(\cos t - t\sin t), \quad x''(t) = -a(2\sin t + t\cos t),$$
$$y'(t) = a(\sin t + t\cos t), \quad y''(t) = a(2\cos t - t\sin t),$$

na osnovu relacije (3.3.32) slijedi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2(2\cos t - t\sin t)(\cos t - t\sin t) + a^2(\sin t + t\cos t)(2\sin t + t\cos t)}{a^3(\cos t - t\sin t)^3} =$$

$$= \frac{t^2 + 2}{a(\cos t - t\sin t)^3} .$$

## 3.3.3. Diferencijali funkcija

Neka je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna funkcija na intervalu $I \in D(f)$. Izvod funkcije u tački $x \in I$ je definisan sa

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Kako $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x)$ kada $\Delta x \to 0$ to je na osnovu teoreme 3.1.8

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$$

gdje $\alpha(x) \to 0$, kada $\Delta x \to 0$, beskonačno mala funkcija. Množenjem prethodne jednakosti sa $\Delta x$ dobijamo

(3.3.33) $$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(x).$$

Kako je u opštem slučaju $f'(x) \neq 0$ za neko $x \in D(f)$, to će $\Delta x \cdot \alpha(x)$ brže težiti nuli nego $f'(x) \cdot \Delta x$. Proizvod $\alpha(x)\Delta x$ je uvijek beskonačno mala funkcija višeg reda u odnosu na $\Delta x$, jer je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0.$$

Prema tome, kada je $f'(x) \neq 0$ a $\Delta x$ dovoljno malo, tada je

$$y \approx f'(x) \cdot \Delta x.$$

**Definicija 3.3.2.** *Neka je funkcija* $y = f(x)$ *diferencijabilna u tački* $x \in D(f)$. *Diferencijalom funkcije u tački* ***x*** *naziva se proizvod izvoda funkcije u toj tački i proizvoljnog priraštaja argumenta* $\Delta x$, *i označava se sa* $dy$ *ili* $df$, *tj.*

(3.3.34) $$dy = df = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Ako je $y = x$ tada je $y' = x' = 1$ odakle na osnovu definicije dife-rencijala slijedi da je

$$dy = dx = \Delta x, \text{ ili } \Delta x = dx.$$

To znači da diferencijalu nezavisno promjenljive veličine odgovara njegov priraštaj. Ova činjenica je veoma važna. Iz nje slijedi da se formula (3.3.34) može izraziti u obliku

(3.3.35) $$dy = y'\,dx.$$

***Primjer* 3.3.19.** Neka je $y = x^2 + 2x + 5$. Izračunati priraštaj funkcije $y$ i diferencijal $dy$, ako je: $x = 2$ i $\Delta x = 0{,}001$.

***Rješenje.*** Iz $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ slijedi

$$\begin{aligned}\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) &= \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x + 5 - 2x - 5 = \\ &= (2x + \Delta x + 2)\Delta x = 6{,}001 \cdot 0{,}001 = 0{,}006001\,.\end{aligned}$$

Po definiciji diferencijala je

$$d\,y = f'(x)\cdot \Delta x = (2x+2)\cdot \Delta x = 6\cdot 0{,}001 = 0{,}006\,.$$

***Primjer* 3.3.20.** Naći diferencijal funkcije

$$y = x\cdot \sin x\,.$$

***Rješenje.*** Kako je $y' = \sin x + x\cos x$, to je

$$d\,y = (\sin x + x\cos x)\,d\,x\,.$$

**Teorema 3.3.10.** (***Pravila za određivanje diferencijala***) *Neka su funkcije* $u(x)$ *i* $v(x)$ *diferencijabilne i* $c \in \boldsymbol{R}$*. Tada vrijedi*:

(3.3.36) $$d\,(c\cdot u) = c\cdot d\,u\,,$$

(3.3.37) $$d\,(u+v) = d\,u + d\,v\,,$$

(3.3.38) $$d\,(u\cdot v) = v\cdot d\,u + u\cdot d\,v\,,$$

(3.3.39) $$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot d\,u - u\cdot d\,v}{v^2}\,.$$

***Dokaz.*** Dokaz je jednostavan i primjera radi dokažimo samo rela-ciju (3.3.38). Iz definicije diferencijala slijedi

$$\begin{aligned}d\,(u\cdot v) &= (u\cdot v)'d\,x = (u'v + u\,v')\,d\,x = \\ &= v\cdot u'd\,x + u\cdot v'd\,x = v\cdot d\,u + u\cdot d\,v\,.\end{aligned}$$

**Definicija 3.3.3.** *Neka je funkcija* $y = f(x)$ *diferencijabilna* ***n****-puta i neka je* $d\,x = \Delta x$ *priraštaj argumenta x. Izraz* $y^{(n)}(d\,x)^n$ *nazivamo dife-rencijal* ***n****-tog reda funkcije* $y = f(x)$ *i označavamo sa*

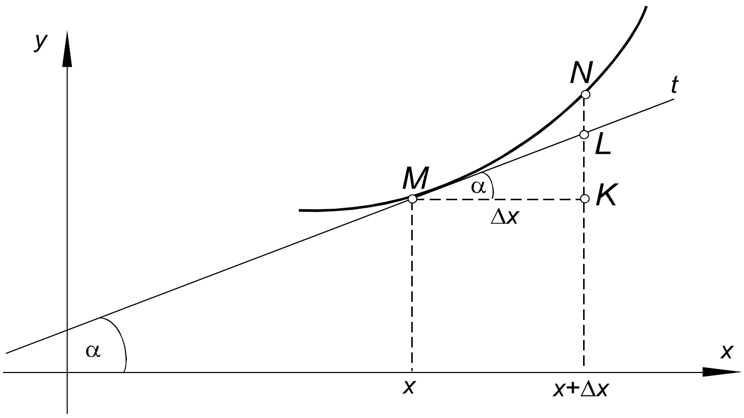
(3.3.40) $$d^n y = f^{(n)}(x)\,d\,x^n\,.$$

Iz prethodne definicije slijedi da se $n$-ti izvod funkcije $y = f(x)$ može izraziti kao

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{d\,x^n}\,.$$

### 3.3.3.1. Geometrijsko značenje diferencijala

Neka je $y = f(x)$ diferencijabilna funkcija u tački $x$ i neka je $x + \Delta x \in D(f)$. Neka je tačka $M$ dodirna tačka tangente $t$ krive $y = f(x)$ u tački $x$, Sl.3.3.2. Ako se argument funkcije promijeni od $x$ na $x + \Delta x$, tada se vrijednost funkcije promijeni od $f(x)$ na $f(x + \Delta x)$. Priraštaju




Sl. 3.3.2.

argumenta od $\Delta x$ odgovara priraštaj funkcije $y = \overline{KN}$. Zapaža se da je

$$\overline{KL} = \overline{MK} \cdot tg\,\alpha .$$

Od ranije je poznato da je $tg\,\alpha = f'(x)$, pa je

$$\overline{KL} = y' \cdot \Delta x = d\,y .$$

Prema tome, diferencijal $d\,y = f'(x)\,\Delta x$ predstavlja priraštaj na odgo-varajućoj tangenti kada se vrijednost argumenta promijeni od $x$ na $x + \Delta x$.

## 3.3.4. Zadaci za vježbu

**1.** Naći po definiciji $y'$, ako je

a) $y = x^2 + 3x + 1$, b) $y = 2\sin 3x$, c) $y = \dfrac{1}{x}$.

U zadacima od 2. do 37. koristeći pravila naći izvod funkcija:

**2.** $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 1$. **3.** $y = \dfrac{3x + 1}{2}$.

**4.** $y = \dfrac{a\,x + b}{c}$. **5.** $y = \dfrac{x}{x + 1}$.

6. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+2}$.

7. $y=3x\left(\sqrt{x}+1\right)$.

8. $y=(x+1)\left(x^3+x+1\right)$.

9. $y=\sin x-\cos x$.

10. $y=x\cdot\sin x$.

11. $y=\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$.

12. $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

13. $y=x\cdot e^x$.

14. $y=x^2\cdot e^{-x}$.

15. $y=3^x+x^3$.

16. $y=3^x\log_3 x$.

17. $y=\dfrac{x\cdot\ln x}{x^2+1}$.

18. $y=\left(x^2+1\right)(x\cdot\ln x)$.

19. $y=x\cdot\arcsin x$.

20. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

21. $y=x+arc\,tg\,x$.

22. $y=\dfrac{arc\,tg\,x}{x}$.

23. $y=\left(x^2+1\right)^{100}$.

24. $y=\sin\left(x^2+x+1\right)$.

25. $y=(2+\ln x)^5$.

26. $y=\ln\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}$.

27. $y=\sin(\sin 3x)$.

28. $y=\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}$.

29. $y=\dfrac{\sin 3x+1}{\cos 3x+1}$.

30. $y=tgx+\dfrac{1}{3}tg^3x+\dfrac{1}{5}tg^5x$.

31. $y=\sqrt{1+\arcsin x}$.

32. $y=arc\,tg\dfrac{1-x}{1+x}$.

33. $y=x\arcsin\ln x$.

34. $y=x^{3x}$.

35. $y=x^{\log x}$.

36. $y=\left(x^2+1\right)^x$.

37. $y=x^{x^2+1}$.

38. Data je kriva $y=x^2+5x$. Naći jednačinu tangente i normale u tački $(-3,-6)$.

**39.** Odrediti parametar $n$ tako da prava $y = x + n$ bude tangenta krive $y = \frac{x}{x+4}$.

**40.** Iz tačke $(4,1)$ postaviti tangentu na krivu $y = \frac{x-1}{x}$ i naći tačku dodira.

U zadacima od 41. do 46. naći $n$-ti izvod date funkcije.

**41.** $y = x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x, \quad n = 2,3$.

**42.** $y = (x-5)\,e^x, \quad n = 4$.

**43.** $y = x^3 \ln x, \quad n = 2,3$.

**44.** $y = \cos^2 x, \quad n = 2,3$.

**45.** $y = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad n = 2,3$.

**46.** $y = x^2 \sin^2 x, \quad n = 2$.

U zadacima od 47. do 52. naći $n$-ti izvod date funkcije.

**47.** $y = e^x$.

**48.** $y = e^{3x}$.

**49.** $y = \ln x$.

**50.** $y = a^x$.

**51.** $y = \frac{1}{1+x}$.

**52.** $y = \sin x$.

U zadacima od 53. do 56. naći diferencijal date funkcije.

**53.** $y = \ln\cos x - \frac{1}{x}$.

**54.** $y = x\ln x + e^{-x+1}$.

**55.** $y = x^2 \sin\frac{1}{x}$.

**56.** $y = x^2 tg\, x$.

**57.** Izračunati približnu vrijednost izraza:

a) $\sqrt[3]{9{,}001}$, b) $(1{,}003)^{10}$, c) $\sqrt{130}$.

## 3.4. Osnovne teoreme diferencijalnog računa

### 3.4.1. Teoreme o srednjim vrijednostima

**Teorema 3.4.1.** (***Fermatov***) **teorem***) *Neka funkcija* $y = f(x)$ *definisana na intervalu* $[a,b] = I$ *ima lokalni ekstrem u tački* $c \in I$. *Ako je funkcija diferencijabilna u tački* ***c***, *tada je* $f'(c) = 0$.

***Dokaz.*** Neka funkcija $y = f(x)$ ima maksimum u tački $c$. Tada je

$$f(x) \le f(c)$$

za svako $x \in I$, ili za $x = c + h$

$$f(c+h) \le f(c).$$

Prethodna nejednakost za $h > 0$ se može napisati u obliku

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \le 0$$

odakle je

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'_+(c) \le 0.$$

Za $h < 0$ je

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad 0,$$

odakle je

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'_-(c) \quad 0.$$

Kako je funkcija diferencijabilna u tački $c$, to je

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(c),$$

odakle na osnovu prethodnih nejednakosti slijedi

$$f'(c) \quad 0 \quad f'(c) \le 0,$$

*) P. Fermat (1601-1665), francuski matematičar.

tj.

$$f'(c) = 0.$$

**Teorema 3.4.2.** (***Rolleova***) **teorema***) *Neka funkcija* $y = f(x)$ *ispunjava sljedeće uslove*:

**1.** *funkcija je diferencijabilna u intervalu* $\langle a,b \rangle$,

**2.** *funkcija je neprekidna na intervalu* $[a,b]$,

**3.** $f(a) = f(b)$.

*Tada postoji tačka* $c \in \langle a,b \rangle$ *takva da vrijedi* $f'(c) = 0$.

***Dokaz.*** Kako je po prvom uslovu teoreme funkcija neprekidna u intervalu $[a,b]$, to na osnovu teoreme 3.2.4 slijedi da u tom intervalu postoji tačka u kojoj funkcija dostiže maksimum $M$ i tačka u kojoj funkcija dostiže minimum $m$.

Ako je $m = M$, tada iz nejednakosti

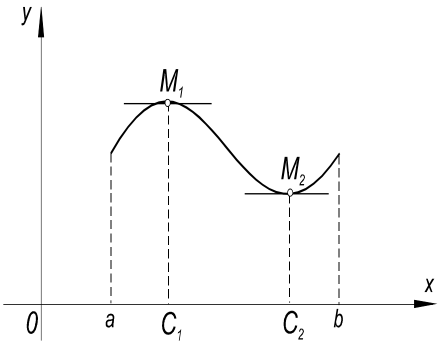
$$m \le f(x) \le M, \quad \forall x \in [a,b],$$

slijedi da je funkcija konstantna, ili $f(x) = m = M$, pa je

$$f'(x) = 0, \quad \forall x \in [a,b].$$

Neka je $M > m$. Odatle, na osnovu trećeg uslova teoreme, slijedi da funkcija $y = f(x)$ ne može dostići maksimum i minimum na krajevima intervala $[a,b]$, i jedan od ekstrema dostiže u nekoj tački $c \in \langle a,b \rangle$. U tom slučaju, na osnovu teoreme 3.4.1 slijedi da je $f'(c) = 0$.

Rolleova teorema ima sljedeće geometrijsko značenje. Ako su vrijednosti funkcije na krajevima intervala $[a,b]$ jednake, tada uz ispunjenje ostalih uslova, u intervalu $\langle a,b \rangle$ postoji tačka u kojoj je tangenta krive date sa $y = f(x)$ paralelna sa osi $Ox$, Sl.3.4.1.



Sl. 3.4.1.

***Primjer* 3.4.1.** Funkcija

$$y = x^4 - 2x^2 + 5$$

ispunjava uslove Rolove teoreme na intervalu $[-2,2]$ i vrijedi:

**1.** funkcija je neprekidna na intervalu $[-2,2]$,

**2.** funkcija je diferencijabilna na intervalu $\langle -2,2 \rangle$ i vrijedi

$$y' = 4x^3 - 4x,$$

**3.** $f(-2) = f(2) = 13$.

$\langle -2,2 \rangle$ postoji bar jedna tačka $c \in \langle -2,2 \rangle$ za koju je $f'(c) = 0$. Kako je $f'(x) = 4x^3 - 4x$, to je

$$f'(c) = 4c^3 - 4c = 0$$

odakle je: $c_1 = 0, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 1$.

**Teorema 3.4.3.** (***Lagrangeova*** *) ***teorema***) *Neka funkcija* $y = f(x)$ *ispu-njava sljedeće uslove*:

**1.** *funkcija je diferencijabilna na intervalu* $\langle a,b \rangle$, *i*

**2.** *funkcija je neprekidna na intervalu* $[a,b]$.

*Tada postoji tačka* $c \in \langle a,b \rangle$ *takva da vrijedi*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c).$$

***Dokaz.*** Da bismo dokazali teoremu formirajmo funkciju

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \tag{3.4.1}$$

Funkcija $F(x)$ je definisana na intervalu $[a,b]$ i neprekidna na intervalu $\langle a,b \rangle$. U intervalu $\langle a,b \rangle$ funkcija ima izvod jednak

*) M. Rolle (1652-1719), francuski matematičar.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3.4.2}$$

To znači da su za funkciju $F(x)$ ispunjena prva dva uslova Rolleove teoreme na intervalu $[a,b]$. Nije teško pokazati da je ispunjen i treći uslov teoreme, pri tom je $F(a) = F(b) = 0$. Na osnovu toga slijedi da postoji $c \in \langle a,b \rangle$ tako da vrijedi $F'(c) = 0$. Iz (3.4.2) slijedi

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

tj.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad c \in \langle a,b \rangle .$$

***Primjer* 3.4.2.** Ispitati da li funkcija $y = x^2 - 4x$ ispunjava uslove Lagran-geove teoreme na intervalu $[0,6]$ i ako ispunjava naći odgovarajuće $c$.

***Rješenje.*** Nije teško pokazati da su ispunjeni uslovi teoreme, to znači da postoji $c \in \langle 0,6 \rangle$ takvo da vrijedi

$$f'(c) = \frac{f(6) - f(0)}{6 - 0} .$$

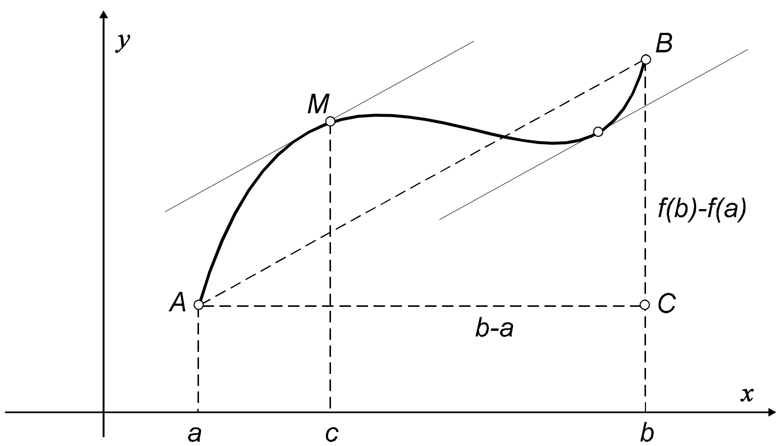
$f'(x) = 2x - 4$

$$2c - 4 = \frac{12 - 0}{6 - 0}$$

odakle se dobija $c = 3 \in \langle 0,6 \rangle$.

Geometrijska interpretacija Lagrangeove teoreme je sljedeća. Sa slike 3.4.2 zapaža se da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$




Sl. 3.4.2.

*) J. L. Lagrange (1736-1813), francuski matematičar.

i taj količnik je koeficijent pravca sječice $AB$. Koeficijent pravca tangente na krivu $y = f(x)$ u tački $M(c, f(c))$ je $f'(c)$. Dakle, Lagrangeova teorema tvrdi, ako su ispunjeni uslovi teoreme, da postoji tačka $c \in \langle a, b \rangle$ u kojoj je tangenta na krivu paralelna sječici $AB$.

***Primjer* 3.4.3.** Data je parabola $y = x^2 - 4x$ i tačke $M(1,-3)$ i $N(5,5)$. Odrediti tačku $P$ parabole u kojoj je tangenta paralelna sječici $MN$.

***Rješenje.*** Funkcija $y = x^2 - 4x$ ispunjava uslove Lagrangeove teoreme na intervalu $[1,5]$, što znači da postoji $c \in \langle 1,5 \rangle$ za koje je

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = f'(c),$$

ili

$$\frac{5 + 3}{5 - 1} = 2c - 4,$$

odakle se dobija da je $c = 3$. Kako je $f(3) = -3$, to tačka $P$ ima koordina-te $(3,-3)$.

Lagrangeova formula se često daje i u drugom obliku. Iz $a < c < b$ slijedi

$$0 < c - a < b - a \,/ : (b - a) > 0$$

ili

$$0 < \frac{c - a}{b - a} < 1.$$

Ako se zamijeni

$$\frac{c - a}{b - a} = \theta,$$

dobija se

(3.4.3) $$c = a + \theta(b - a), \quad 0 < \theta < 1.$$

Dalje, za $b - a = h$, ili $b = a + h$ formula

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

glasi

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h)$$

ili

(3.4.4) $$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Ako se zamijeni $a = x$, prethodna formula glasi

(3.4.5) $$f(x + h) = f(x) + h \cdot f'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

**Teorema 3.4.4.** (***Cauchyeva teorema***) *Neka funkcije* $f(x)$ *i* $g(x)$ *ispu-njavaju sljedeće uslove*:

**1.** *funkcije su diferencijabilne u intervalu* $\langle a,b\rangle$,

**2.** *funkcije su neprekidne na intervalu* $[a,b]$, *i*

**3.** $g'(x)\neq 0,\quad \forall x\in\langle a,b\rangle$.

*Tada postoji tačka* $c\in\langle a,b\rangle$ *takva da je*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

***Dokaz.*** Treba zapaziti da je $g(a)\neq g(b)$. Ako bi bilo, $g(a)=g(b)$ tada bi funkcija $g(x)$ ispunjavala uslove Rolleove teoreme, a to bi značilo da postoji tačka $c\in\langle a,b\rangle$ takva da je $g'(c)=0$. To je u suprotnosti sa trećim uslovom Cauchyeve teoreme.

Da bismo dokazali teoremu formirajmo pomoćnu funkciju

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right]. \tag{3.4.6}$$

Funkcija (3.4.6) ispunjava uslove Rolleove teoreme na intervalu $[a,b]$ što nije teško provjeriti. To znači da postoji $c\in\langle a,b\rangle$ za koje je $F'(c)=0$. Kako je

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x),$$

to je

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0,$$

odakle slijedi da je

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

čime je teorema dokazana.

Ako se zamijeni $b=x$ tada prethodna formula glasi

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3.4.7}$$

## 3.4.2. L'Hospitalove*) teoreme

U 3.1.3 smo razmatrali prividno neodređene izraze, a sada ćemo raz-matrati mogućnost njihovog rješavanja primjenom diferencijalnog računa.

**Teorema 3.4.5.** *Neka funkcije* $f(x)$ *i* $g(x)$ *ispunjavaju sljedeće uslove*:

**1.** *funkcije su definisane u intervalu* $[a,b]$,

**2.** $f(a)=g(a)=0$,

**3.** *funkcije su diferencijabilne na intervalu* $\langle a,b\rangle$, $g'(x)\neq 0$,

**4.** *postoji* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

*Tada postoji i* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i pri tome vrijedi*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

***Dokaz.*** Iz uslova 3. teoreme slijedi da su ispunjeni uslovi teoreme (3.4.4) na intervalu $[a,x]$, $x\in\langle a,b\rangle$. Iz toga na osnovu relacije (3.4.7) i drugog uslova teoreme slijedi

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

gdje je $a<c<x$. Prethodne jednakosti su moguće, jer je $g(x)\neq 0$, tj. $g(x)\neq g(a)$, što slijedi iz uslova $g'(x)\neq 0$.

Kada $x\to a$ tada i $c\to a$, pa je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

što je i trebalo dokazati.

Može se zapaziti da je teorema dokazana samo za slučaj desne gra-nične vrijednosti. Teorema važi i u slučaju lijeve granične vrijednosti, a tako-đe i kada $x\to a$ sa obje strane.

***Primjer*** **3.4.4.** Naći $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$.

***Rješenje.*** U ovom primjeru je $f(x)=e^x-1$, $g(x)=\sin x$, $a=0$, pa je $f(0)=e^0-1=0$, $g(0)=\sin 0=0$. Funkcije $f(x)$ i $g(x)$ su dife-rencijabilne u okolini tačke $x=0$. Dalje, je $f'(x)=e^x$, $g'(x)=\cos x$, a

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=1.$$

Na osnovu teoreme (3.4.5) slijedi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=1.$$

*) G. L'Hospital (1661-1704), francuski matematičar.

***Primjer* 3.4.5.** Naći $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

***Rješenje.*** Kao i u prethodnom primjeru izraz $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ kada $x \to 0$ je prividno neodređen izraz oblika $\frac{0}{0}$. Funkcije $e^x - e^{-x} - 2x$ i $x - \sin x$ ispunjavaju uslove teoreme 3.4.5, pa je

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Izraz $\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ kada $x \to 0$ je ponovo neodređen izraz oblika $\frac{0}{0}$. Za funkcije $e^x + e^{-x} - 2$ i $1 - \cos x$ ponovo vrijede uslovi teoreme 3.4.5, pa je

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

To znači da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2.$$

Neka se u prethodnoj teoremi zamijeni interval $[a,b]$ sa $[a,+\infty\rangle$, a $f(a) = g(a) = 0$ sa $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Tada neposredno slijedi da je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Zaista, ako se uvede smjena $x = \frac{1}{t}$ slijedi $x \to +\infty \Rightarrow t \to 0^+$ i tada je

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{t\to 0^+} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0,$$

što znači da u slučaju $t \to 0^+$ vrijede uslovi teoreme 3.4.5, pa je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Teorema 3.4.6.** *Neka funkcije* $f(x)$ *i* $g(x)$ *ispunjavaju sljedeće uslove*:

**1.** $\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$,

**2.** *funkcije su diferencijabilne na intervalu* $\langle a,b]$, $g'(x) \neq 0$ *i*

**3.** *postoji* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

*Tada postoji i* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *i pri tom vrijedi*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Dokaz* ove teoreme nećemo izvoditi.

Prethodne L'Hospitalove teoreme se odnose na prividno neodređene izraze oblika $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Prividno neodređeni izrazi oblika: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\infty}$, $\infty^0$, $0^0$ svode se identičnim transformacijama na prividno neodređene izraze oblika $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$.

Ako je $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ tada je $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)$ prividno neodređeni izraz oblika $0\cdot\infty$. Transformacijom

$$f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}}, \text{ ili } \quad f\cdot g=\frac{g}{\frac{1}{f}}$$

neodređeni izraz $0\cdot\infty$ se svodi na prividnu neodređenost oblika

$\frac{0}{0}$, odnosno $\frac{\infty}{\infty}$.

***Primjer* 3.4.6.** Naći $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{a}{x}\right)$.

***Rješenje.*** Izraz $x\cdot\sin\frac{a}{x}$ je neodređen izraz oblika $\infty\cdot 0$ i on se može transformisati u izraz oblika

$$\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}$$

neodređenosti oblika $\frac{0}{0}$. Na osnovu teoreme 3.4.6 je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sin\frac{a}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{a}{x^2}\cos\frac{a}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=a.$$

Neka je $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$, tada je

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$

prividna neodređenost oblika $\infty-\infty$. Transformacijom

$$f-g=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{g}}=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}$$

ova neodređenost se svodi na neodređenost oblika $\frac{0}{0}$.

***Primjer*** **3.4.7.**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\frac{1}{\ln x}}-\frac{1}{\frac{x}{x-1}}}{\frac{1}{\frac{x}{x-1}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\ln x}}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

Prividno neodređeni izrazi oblika: $1^{\infty}$, $0^{0}$ i $\infty^{0}$ pomoću identiteta

$$\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)},\quad f(x)>0,$$

svode se na prividno neodređene izraze oblika $0\cdot\infty$.

***Primjer*** **3.4.8.**

$$\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln\left(e^{x}-1\right)}}=\left(0^{0}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln\left(e^{x}-1\right)}\cdot\ln x}=e^{L},$$

gdje je

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\left(e^{x}-1\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^{x}}{e^{x}-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x\cdot e^{x}}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{e^{x}+x\cdot e^{x}}=1.$$

Dakle,

$$\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln\left(e^{x}-1\right)}}=e^{1}=e.$$

## 3.4.3. Taylorova formula

Neka je dat polinom $n$-tog reda oblika

(3.4.8) $$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n .$$

Postepenim diferenciranjem $n$-puta polinoma $P_n(x)$ dobija se

$$P' = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + n a_n(x-a)^{n-1},$$

$$P'' = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + \cdots + (n-1)n a_n(x-a)^{n-2},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$P^{(n)} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-1)n a_n .$$

Za $x = a$ je

$$P(a) = a_0 \Rightarrow a_0 = P(a),$$

$$P'(a) = a_1 \Rightarrow a_1 = P'(a),$$

$$P''(a) = 2!a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2!}P''(a),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$P^{(n)}(a) = n!a_n \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}P^{(n)}(a) .$$

Ako se za $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ izražene pomoću odgovarajućih izvoda uvrste u (3.4.8) dobija se

(3.4.9) $$P_n(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Formula (3.4.9) se naziva *Taylorova**) formula za polinom (3.4.8). Ako se u (3.4.9) zamijeni $a = 0$ dobija se formula

(3.4.10) $$P_n(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

koja se obično naziva *Maclaurinova***) formula za polinom $P_n(x)$.

Uspostavimo analognu formulu formuli (3.4.9) za proizvoljnu fun-kciju $y = f(x)$.

Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana u intervalu $[a,b]$ i neka na tom intervalu ima sve izvode do reda $n$. Tada se za $c \in \langle a,b \rangle$ može for-mirati polinom oblika

*) B. Taylor (1685-1731), engleski matematičar.
**) K. Maclaurin (1698-1746), škotski matematičar.

(3.4.11) $$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

koji se naziva Taylorov polinom funkcije $f$ u okolini tačke $c$. Taylorov polinom ima osobinu da je

(3.4.12) $$T_n(c)=f(c),\quad T_n^{(k)}(c)=f^{(k)}(c),\quad k=1,2,\dots,n.$$

Iz jednakosti

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)$$

na osnovu teoreme 3.1.8 slijedi

$$f(x)=f'(c)(x-c)+f(c)+\alpha(x-c),$$

gdje $\alpha(x-c)\to 0$ kada $x\to c$. Kako je $T_1(c)=f(c)+f'(c)(x-c)$ to se prethodna jednakost može izraziti u obliku

$$f(x)=T_1(c)+\alpha(x-c),$$

što znači, obzirom da $\alpha(x-c)\to 0$ kada $x\to c$, da se $f(x)$ i $T_1(c)$ mo-gu učiniti približno jednakim, tj. $f(x)\approx T_1(c)$.

**Teorema 3.4.7.** (***Taylorova teorema***) *Neka za neko* $n\in \boldsymbol{N}$ *funkcija* $y=f(x)$, *definisana na intervalu* $I=\langle a,b\rangle$, *ima neprekidan* $(n+1)$ *iz-vod na tom intervalu. Tada za svake dvije tačke* $c,x\in I$ *postoji tačka* $\varepsilon=\varepsilon(x)$, $\varepsilon\in\langle c,x\rangle$ *takva da je*

(3.4.13) $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k+\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

***Dokaz.*** Iz (3.4.11) slijedi da se prethodna jednakost može izraziti u obliku

$$f(x)=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Neka je

(3.4.14) $$f(x)=T_n(x)+\lambda(x)(x-c)^{n+1}$$

gdje je $\lambda(x)$ nepoznata funkcija. Formirajmo funkciju oblika

$$g(t)=f(t)-T_n(t)-\lambda(t-c)^{n+1},\quad t\in I;$$

tada je

$$g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-T_n^{(n+1)}(t)-(n+1)!\cdot\lambda.$$

Kako je $T_n^{(n+1)}(t)=0$ to je

(3.4.15) $$g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-(n+1)!\cdot\lambda.$$

Ako se za funkciju $g(t)$ nađu svi izvodi do reda $n$, vodeći računa da je

$$T_n^{(k)}(c)=f^{(k)}(c),\quad k=1,2,\dots,n,$$

pokazaće se da je

$$g(c)=g'(c)=g''(c)=\dots=g^{(n)}(c)=0.$$

Iz definicije funkcije $g(t)$ zapaža se da je $\lambda$ izabrano tako da je $g(x)=0$ i da ona ispunjava uslove Lagrangeove teoreme na intervalu $\langle c, x\rangle$. To znači da postoji $\varepsilon_1 \in\langle c, x\rangle$ za koje je

$$\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=g'(\varepsilon_1).$$

Kako je $g(x)=g(c)=0$ to je i $g'(\varepsilon_1)=0$. Slično se zaključuje da je

$$\frac{g'(\varepsilon_1)-g'(c)}{\varepsilon_1-c}=g''(\varepsilon_2)=0, \quad \varepsilon_2 \in\langle c, \varepsilon_1\rangle.$$

Nakon $n+1$ koraka dobija se

$$g^{(n+1)}(\varepsilon_{n+1})=0 \text{ za neko } \varepsilon_{n+1} \in\langle c, \varepsilon_n\rangle.$$

Dakle, postoji $\varepsilon$ između $c$ i $x$ takvo da je $g^{(n+1)}(\varepsilon)=0$. Na osnovu toga iz (3.4.15) slijedi

$$f^{(n+1)}(\varepsilon)=\lambda(n+1)!$$

ili

$$\lambda=\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$

čime je teorema dokazana.

Formula (3.4.13) se zove Taylorova formula funkcije $y=f(x)$ u okolini tačke $c$, a izraz

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \tag{3.4.16}$$

zove se $n$-ti ostatak Lagrangeova oblika Taylorove formule.

Iz formule (3.4.13) zapaža se da se član koji predstavlja ostatak raz-likuje od prethodnih članova samo po tome što se $(n+1)$ izvod funkcije traži u nekoj tački između $x$ i $c$, umjesto u tački $c$.

Ako se stavi da je $\theta=\dfrac{\varepsilon-c}{x-c}$, ili $\varepsilon=c+\theta(x-c)$, $0<\theta<1$, dobija se izraz za ostatak oblika

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[c+\theta(x-c)]}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \quad 0<\theta<1. \tag{3.4.17}$$

***Primjer* 3.4.9.** Za funkciju $y=e^x$ svi izvodi do reda $n+1$ jednaki su $e^x$, pa Tejlorova formula u okolini tačke $c=0$, glasi

$$e^x=e^0+\frac{e^0}{1!}x+\frac{e^0}{2!}x^2+\cdots+\frac{e^0}{n!}x^n+r_n(x),$$

tj.

(3.4.18) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Ako se u prethodnu formulu umjesto $x$ stavi $-x$ dobiće se

(3.4.19) $$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{e^{-x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

***Primjer* 3.4.10.** Za funkciju $y = \sin x$ je

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), \quad k \in \boldsymbol{N},$$

pa je $f(0) = f^{(2m)}(0) = 0$, a $f^{(2m-1)}(0) = \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{m-1}$.
Tejlorova formula za $c = 0$ u ovom slučaju za $n = 2m$, glasi

(3.4.20) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m}(x).$$

Analogno se dobija za $n = 2m+1$

(3.4.21) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + r_{2m+1}(x).$$

### 3.4.4. Zadaci za vježbu

**1.** Ispitati da li funkcija $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ ispunjava uslove Rolleove teoreme, i ako ispunjava naći odgovarajuće $c$.

**2.** Funkcija $y = \dfrac{2 - x^2}{x^4}$ ima jednake vrijednosti na krajevima intervala $[-1, 1]$. Objasniti zašto ni u jednoj tački tog intervala prvi izvod nije jednak nuli.

**3.** Pokazati da se između korijena funkcije $y = ax^2 + bx + c$, $b^2 - 4ac > 0$, nalazi korijen jednačine $y' = 0$.

**4.** Ako je $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$, pokazati da jednačina $f'(x)=0$ ima tri realna korijena i naći intervale u kojima se nalaze.

**5.** Napisati Lagrangeovu formulu za funkciju $y=x(1-\ln x)$ na intervalu $[a,b]$.

**6.** Primjenom Lagrangeove formule dokazati nejednakosti

$$\frac{a-b}{a}\le \ln\frac{a}{b}\le\frac{a-b}{b},\quad 0<a\le b.$$

**7.** Napisati Lagrangeovu formulu za funkciju $y=1-x^2$ na intervalu $[0,1]$ i naći odgovarajuće $c$.

**8.** Primjenom Lagrangeove formule naći $\log\sqrt[3]{999}$.

U zadacima od 9 do 14 naći odgovarajuće granične vrijednosti.

**9.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$.

**10.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-tg\,x}$.

**12.** $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln x$.

**13.** $\lim\limits_{x\to 0}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

**14.** $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,x}$.

## 3.5. Ispitivanje funkcija pomoću izvoda

### 3.5.1. Monotone funkcije

**Teorema 3.5.1.** *Neka je funkcija $y=f(x)$ definisana na intervalu $[a,b]$ i neka je diferencijabilna na intervalu $\langle a,b\rangle$. Ako je $f'(x)>0$, odnosno $f'(x)<0$ na $\langle a,b\rangle$, tada $f(x)$ strogo raste odnosno strogo opada na $\langle a,b\rangle$.*

***Dokaz.*** Neka je $f'(x)>0$ na $\langle a,b\rangle$. Za svako $x_1,x_2\in\langle a,b\rangle\ (x_1<x_2)$ prema Lagrangeovoj teoremi postoji $c\in\langle a,b\rangle$ takav da je

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

odnosno

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)>0.$$

Kako je

$$f(x_2) > f(x_1), \quad (x_1 < x_2)$$

za svako $x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle$ to je funkcija strogo rastuća na $\langle a,b \rangle$. Ostali dio teoreme se dokazuje na sličan način.

***Primjer* 3.5.1.** Naći intervale monotonosti funkcije $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$.

***Rješenje.*** Funkcija je definisana na $\boldsymbol{R} \setminus \left\{ -\sqrt{3}, \sqrt{3} \right\}$ i ima prvi izvod $y' = \dfrac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}$. Prema teoremi 3.5.1 monotonost funkcije je određena znakom njenog prvog izvoda i on je određen tabelom 3.5.1.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-\sqrt{3}$ | | $0$ | | $\sqrt{3}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | + | | + | | + | 0 | + | | + | | + | |
| $9-x^2$ | | − | 0 | + | | + | | + | | + | 0 | − | |
| $\left(3-x^2\right)^2$ | | + | | + | 0 | + | | + | 0 | + | | + | |
| $y'$ | | − | | + | | + | | + | | + | | − | |

Tabela 3.5.1.

Znači, funkcija je strogo opadajuća na $\langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$, a strogo ras-tuća na $\left\langle -3, -\sqrt{3} \right\rangle \cup \left\langle -\sqrt{3}, 0 \right\rangle \cup \left\langle 0, \sqrt{3} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{3}, 3 \right\rangle$.

## 3.5.2. Lokalni ekstremi funkcije

**Teorema 3.5.2.** *Neka je funkcija* $y = f(x)$ *diferencijabilna u intervalu* $\langle a,b \rangle$, *izuzev eventualno u tački* $c \in \langle a,b \rangle$. *Ako postoji proizvoljno mali broj* $\delta > 0$ *takav da vrijedi*

$$(c-\delta < x < c) \Rightarrow \left( f'(x) > 0 \right) \; i \; (c < x < c+\delta) \Rightarrow \left( f'(x) < 0 \right),$$

*odnosno*

$$(c-\delta < x < c) \Rightarrow \left( f'(x) < 0 \right) \; i \; (c < x < c+\delta) \Rightarrow \left( f'(x) > 0 \right),$$

*onda funkcija* $f(x)$ *ima u tački* ***c*** *lokalni maksimum*, *odnosno lokalni mi-nimum*.

***Dokaz.*** Neka je $f'(x) > 0, \; x \in \langle c-\delta, c \rangle$. Onda za $t \in \langle x, c \rangle$, na osnovu Lagrangeove teoreme, vrijedi

$$f(c) - f(x) = (c-x) f'(t) > 0,$$

odnosno $f(c) > f(x)$.

Slično se dobija za $f'(x) < 0, \; x \in \langle c, c+\delta \rangle$ nejednakost

$$f(c) > f(x),$$

što znači da je $f(c)$ lokalni maksimum.

Drugi dio teoreme se dokazuje na sličan način.

Na osnovu teoreme slijedi da će funkcija $y = f(x)$ u tački neprekid-nosti $c$ imati lokalni ekstrem ako je $f'(c) = 0$ ili $f'(c) = \infty$, i da u toj tački prvi izvod mijenja znak, što je predstavljeno tabelom 3.5.2.

| $x$ | | $c$ | | finkcija u $c$ ima |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0, \infty$ | $-$ | max |
| $f'(x)$ | $-$ | $0, \infty$ | $+$ | min |

Tabela 3.5.2.

***Primjer* 3.5.2.** Naći lokalne ekstreme funkcije

$$y = 32x^2\left(x^2 - 1\right)^3.$$

***Rješenje***. Izvod date funkcije $y$ je

$$y' = 64x\left(x^2 - 1\right)^2\left(4x^2 - 1\right)$$

i njegove nule su: $x = 0,\ x = -1,\ x = 1,\ x = 1/2,\ x = -1/2$. Znak izvoda je dat u tabeli 3.5.3.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $64x$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $\left(x^2-1\right)^2$ | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $\left(4x^2-1\right)$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $y'$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↘ | | ↘ | min | ↘ | max | ↘ | min | ↘ | | ↘ |

Tabela 3.5.3.

Na osnovu teoreme 3.5.2 slijedi da funkcija ima lokalne minimume u tačkama $x = \pm\ 1/2$, a maksimum u tački $x = 0$.

**Teorema 3.5.3.** *Neka funkcija* $y = f(x)$, *definisana na intervalu* $[a,b]$ *ima neprekidan* ***m****-ti izvod i neka je za neko* $c \in \langle a,b \rangle$

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0, \quad f^{(m)}(c) \neq 0.$$

*Ako je* ***m****-paran broj, onda funkcija* $y = f(x)$ *ima maksimum ako je* $f^{(m)}(c) < 0$, *a minimum ako je* $f^{(m)}(c) > 0$. *Za neparno* ***m*** *funkcija nema ekstrema.*

*Dokaz* ove teoreme nećemo izvoditi.

Za $m = 2$ prethodna teorema se može iskazati u sljedećem obliku.

Neka funkcija $y = f(x)$ definisana na intervalu $[a,b]$ ima nepreki-dan drugi izvod i neka za neko $c \in \langle a,b \rangle$ je $f'(c) = 0$. Tada za $f''(c) \neq 0$ funkcija ima ekstrem u tački $c$ i to minimum za $f''(c) > 0$, a maksimum za $f''(c) < 0$.

***Primjer* 3.5.3.** Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije

$$y = x^2 e^{-x^2}.$$

***Rješenje.*** Izvod date funkcije je

$$y' = 2x\left(1 - x^2\right) e^{-x^2},$$

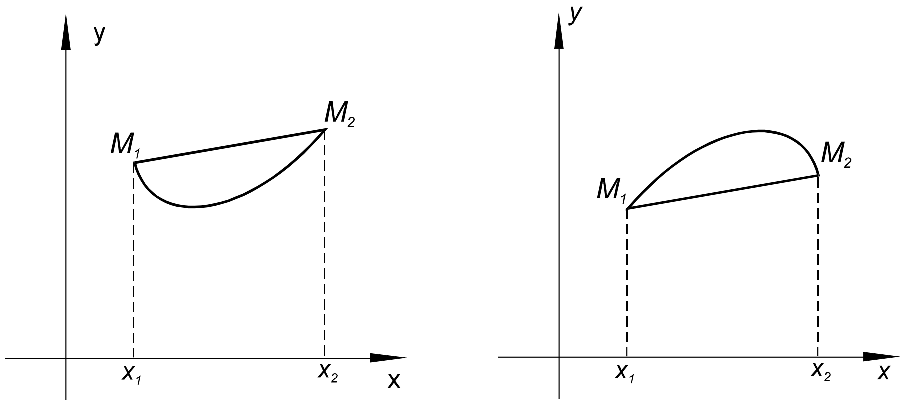
a njegove nule su: $x = 0$, $x = \pm 1$. Dalje je

$$y'' = 2e^{-x^2}\left(1 - 5x + 2x^4\right).$$

Kako je $y''(0) = 2 > 0$ to će funkcija u tački $x = 0$ imati minimum. Za $x = \pm 1$ je $y''(\pm 1) = -\dfrac{4}{e} < 0$. To znači da će u tačkama $x = \pm 1$ funkcija imati maksimume.

### 3.5.3. Konveksne funkcije

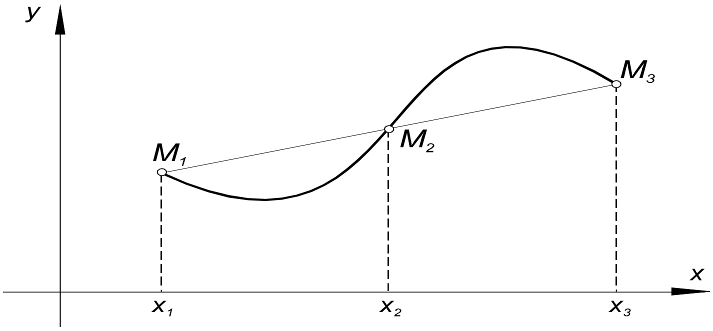
**Definicija 3.5.1.** *Za funkciju* $y = f(x)$ *kažemo da je strogo konveksna, odnosno strogo konkavna, na intervalu* $I = [a,b]$ *ako za svako* $x_1, x_2 \in I$ *tetiva* $\overline{M_1 M_2}$ (Sl. 3.5.4) *leži iznad odgovarajućeg luka krive, odnosno ispod odgovarajućeg luka krive.*




Sl. 3.5.4.

**Definicija 3.5.2.** *Za funkciju* $y = f(x)$ *kažemo da ima prevojnu tačku ili tačku infleksije* $c \in D(f)$ *ako postoji* $\delta > 0$ *takvo da je funkcija strogo konveksna (strogo konkavna) na* $\langle c - \delta, c \rangle$ *i strogo konkavna (strogo konveksna) na* $\langle c, c + \delta \rangle$, (Sl. 3.5.5).

ili




**Teorema 3.5.4.** *Neka je* Sl. 3.5.5. $y = f(x)$ *definisana na* $[a,b]$ *i ima drugi izvod na* $\langle a,b\rangle$. *Ako je* $f''(x) > 0$, *odnosno* $f''(x) < 0$, *na* $\langle a,b\rangle$ *onda je funkcija strogo konveksna, odnosno strogo konkavna na* $\langle a,b\rangle$.

***Dokaz.*** Jednačina sječice $M_1M_2 \equiv l(x)$, je

$$l(x) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

ili

$$l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

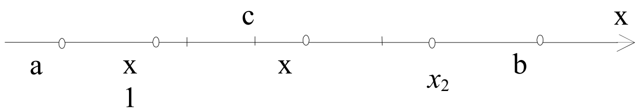
Za svako $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ $(x_1 < x_2)$ i $x \in \langle x_1, x_2\rangle$ je

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x),$$

ili

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x) - f(x)(x_2 - x - x_1 + x)}{x_2 - x_1},$$

vidjeti sljedeću sliku




Zadnja jednakost se može transformisati u jednakost oblika

(3.5.1) $$l(x) - f(x) = \frac{[f(x_2) - f(x_1)](x - x_1) - [f(x) - f(x_1)](x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

U intervalu $\langle x, x_2\rangle$ postoji $\eta$ tako da je

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\eta),$$

ili

(3.5.2) $$f(x_2) - f(x) = f'(\eta)(x_2 - x).$$

U intervalu $\langle x_1, x\rangle$ postoji $\varepsilon$ takvo da je

(3.5.3) $$f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1).$$

Ako se (3.5.2) i (3.5.3) uvrste u (3.5.1) dobijamo

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\varepsilon)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1},$$

ili

(3.5.4) $$l(x) - f(x) = \frac{\left[f'(\eta) - f'(\varepsilon)\right](x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1}.$$

U intervalu $\langle \varepsilon, \eta \rangle$ postoji $c$ takvo da je

$$f'(\eta) - f'(\varepsilon) = f''(c)(\eta - \varepsilon),$$

pa će (3.5.4) glasiti

(3.5.5) $$l(x) - f(x) = \frac{f''(c)(\eta - \varepsilon)(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1},$$

gdje je $x_1 < \varepsilon < c < \eta < x_2$. Iz (3.5.5) se zapaža da je za $f''(c) > 0$

$$l(x) > f(x), \quad x \in \langle x_1, x_2 \rangle,$$

znači da je sječica iznad grafika funkcije na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$, što znači da je funkcija strogo konkavna. Ako je $f''(c) < 0$, tada je

$$l(x) < f(x), \quad x \in \langle x_1, x_2 \rangle,$$

pa je na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ funkcija strogo konveksna.

**Teorema 3.5.5.** *Neka funkcija* $y = f(x)$, *definisana na intervalu* $I = [a, b]$, *ima neprekidan drugi izvod na intervalu* $\langle a, b \rangle$. *Ako je* ***c*** *prevoj-na tačka tada je* $f''(c) = 0$.

***Primjer* 3.5.4.** Odrediti intervale konkavnosti, konveksnosti i prevojne tačke funkcije

$$y = \ln\left(x^2 + 1\right).$$

***Rješenje.*** Drugi izvod funkcije je

$$y'' = \frac{1 - x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}.$$

Nule drugog izvoda su $x = \pm 1$, a to su prevojne tačke date funkcije što se vidi iz tabele 3.5.6.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 - x^2$ | $-$ | | $+$ | | $-$ |
| $\left(1 + x^2\right)^2$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| | | | | | |

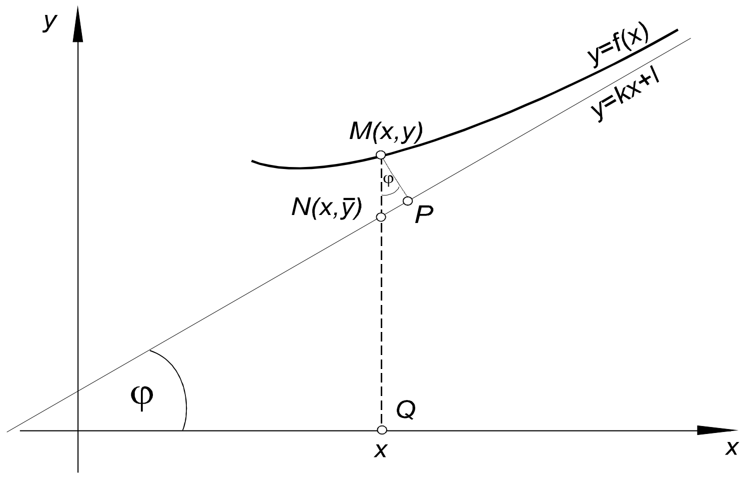
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | | $+$ | | $-$ |
| $y$ | | $PT$ | | $PT$ | |

Na osnovu teoreme 3.5.5 i pret Tabela 3.5.6. slijedi da je funkcija $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$ strogo konveksna u intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a strogo konkavna u $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

## 3.5.4. Asimptote funkcije

**Definicija 3.5.3.** *Prava* $y = kx + l$ *naziva se asimptota krive ako rasto-janje* $\rho$ *od promjenljive tačke* $M$ *krive do te prave teži nuli kada tačka* $M$ *teži beskonačnosti* (Sl.3.5.7).

Ako je $k \neq 0$, odnosno $k_1 = 0$ za asimptotu se kaže da je kosa, odnosno ho-rizontalna.




Sl. 3.5.7.

***Kosa asimptota.*** Neka kriva $y = f(x)$ ima kosu asimoptotu oblika

$$y = kx + l$$

gdje su $k$ i $l$ nepoznati brojevi. Neka tačka $M(x, y)$ pripada krivoj, a tač-ka $N(x, \overline{y})$ asimptoti. Rastojanje tačke $M$ i asimptote je $\overline{MP} = \rho$. Neka je $\varphi$ ugao koji obrazuje asimptota i pozitivan smjer ose $Ox$. Tada iz tro-ugla $NMP$ slijedi

$$\overline{MP} = \overline{MN} \cdot \cos\varphi ,$$

ili

$$\overline{MN} = \frac{\overline{MP}}{\cos\varphi} . \tag{3.5.6}$$

Kako, po definiciji asimptote $\overline{MP} \to 0$ kada $x \to \infty$ iz (3.5.6) slijedi da i $\overline{MN} \to 0$ kada $x \to \infty$, ako je $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$. Kako je

$$\overline{MN} = \left|\overline{QM} - \overline{QN}\right| = |f(x) - (k\,x + l)|$$

to je

$$\lim_{x\to\infty} \overline{MN} = \lim_{x\to\infty}\left[ f(x) - (k\,x + l)\right] = 0 \qquad (3.5.7)$$

Odredimo sada konačne i određene brojeve $k$ i $l$ tako da prava $y = k\,x + l$ bude asimptota krive date izrazom $y = f(x)$. Iz

$$\lim_{x\to\infty}\left[ f(x) - (k\,x + l)\right] = \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{l}{x}\right] = 0$$

slijedi

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{l}{x}\right] = 0 .$$

Za konstantno $l$ je $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{l}{x} = 0$, što znači da je

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} . \qquad (3.5.8)$$

Poznavajući $k$, iz relacije (3.5.7) dobijamo

$$l = \lim_{x\to\infty}\left[ f(x) - k\,x\right] . \qquad (3.5.9)$$

U prethodnom dijelu smo posmatrali određivanje asimptota kada $x \to \infty$. Na taj način se rezonuje i kada $x \to -\infty$ i dobijaju se iste formule za $k$ i $l$.

***Primjer* 3.5.5.** Odrediti kosu asimptotu grafika funkcije

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x} .$$

***Rješenje.*** Prema relaciji (3.5.8) je

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 + x + 1}{x^2} = 1 ,$$

a prema relaciji (3.5.7) je

$$l = \lim_{x\to\infty}\left[ f(x) - k\,x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 + x + 1}{x} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x + 1}{x} = 1 .$$

Dakle, kosa asimptota grafika funkcije $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ je $y = x + 1$.

Treba zapaziti, ako funkcija ima horizontalnu asimptotu tada je nje-na jednačina

$$y = l = \lim_{x \to \infty} f(x)$$
.

Ako neka od graničnih vrijednosti (3.5.8) ili (3.5.9) ne postoje tada funkcija nema kosu asimptotu.

***Vertikalna asimptota.*** Neka je za neko $\delta > 0$ funkcija $y = f(x)$ definisana na intervalima $\langle a - \delta, a \rangle$ i $\langle a, a + \delta \rangle$ ili bar na jednom od tih in-tervala. Ako je

(3.5.10) $$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \text{, ili } \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty,$$

ili i jedno i drugo, onda je prava $x = a$ vertikalna asimptota funkcije $y = f(x)$.

To drugim riječima znači da će funkcija $y = f(x)$ imati vertikalnu asimptotu $x = a$ ako funkcija nije definisana u toj tački, a definisana je u li-jevoj ili desnoj okolini tačke $a$, i ako je ispunjen jedna od uslova (3.5.10).

***Primjer* 3.5.6.** Naći vertikalnu asimptotu funkcije

$$y = \frac{x}{x - 2}.$$

***Rješenje.*** Funkcija nije definisana za $x = 2$, definisana je u okolini tačke $x = 2$, i tada je

$$\lim_{x \to 2} \frac{x}{x - 2} = \infty,$$

što znači da je $x = 2$ vertikalna asimptota.

***Primjer* 3.5.7.** Ispitati da li funkcija

$$y = \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)}$$

ima vertikalne asimptote.

***Rješenje.*** Data funkcija nije definisana za $x = 2$ i $x = -2$. Kako je

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{1}{4} \text{, a } \lim_{x \to -2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)} = \infty$$

to će funkcija imati vertikalnu asimptotu u tački $x = -2$.

### 3.5.5. Plan ispitivanja toka funkcija

Pod "*ispitivanjem toka funkcija*" obično se podrazumijeva određiva-nje:

1. *oblasti definisanosti funkcije i ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti*,
2. *parnosti ili neparnosti*, *periodičnosti*,
3. *tačaka prekida i intervala neprekidnosti*,
4. *nula i znaka funkcije*,

5. *intervala monotonosti*,
6. *ekstrema funkcije*,
7. *prevojnih tačaka i intervala konveksnosti*,
8. *asimptota grafika funkcije*.

Na osnovu izvršenog ispitivanja funkcije može se dosta dobro na-crtati grafik posmatrane funkcije.

***Primjer* 3.5.8.** Ispitati tok funkcije

$$y = \frac{x}{x^2 + 1},$$

i nacrtati njen grafik.

***Rješenje.***

1. *Oblast definisanosti.* $D(f) = \boldsymbol{R}$.

2. Kako je $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\dfrac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$,
funkcija je neparna. Funkcija nije periodična.

3. *Tačke prekida i intervali neprekidnosti funkcije*. Na osnovu teo-rije o neprekidnosti slijedi da je *f* neprekidna za svako $x \in D(f)$.

4. *Nule i znak funkcije.* $y = 0$ za $x = 0$. Znak funkcije je dat u ta-beli 3.5.5.

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $1 + x^2$ | $+$ | | $+$ |
| $y$ | $-$ | 0 | $+$ |

Tabela 3.5.8.

Prema tome je $y < 0$ za $x \in \langle -\infty, 0\rangle$, a $y > 0$ za $x \in \langle 0, +\infty\rangle$.

5. *Intervali monotonosti funkcije.* Kako je $y' = \dfrac{1 - x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}$,
to je $y' = 0$ za $x = -1$, i $x = 1$. Znak prvog izvoda je dat u tabeli (3.5.9).

| $x$ | $-\infty$ | -1 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 - x^2$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $\left(1 + x^2\right)^2$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $y'$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $y$ | ↘ | | ↖ | | ↘ |

Tabela 3.5.9.

To znači da funkcija opada u intervalu $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, a raste u inter-valu $\langle -1, 1\rangle$
.

6. *Ekstremi funkcije*. Kako je

$$y'' = \frac{2x\left(x^2.-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

i $y' = 0$ za $x = -1$ i $x = 1$, to je

$$f''(-1) = \frac{-2\,(1-3)}{(1+1)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0,$$

$$f''(1) = \frac{2\,(1-3)}{(1+1)^3} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} < 0,$$

to funkcija za $x = -1$ ima lokalni minimum, a za $x = 1$ lokalni maksimum. Ordinate ekstrema su:

$$f(-1) = -\frac{1}{2} \text{ i } f(1) = \frac{1}{2},$$

pa su tačke ekstrema $M\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ i $N\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

7. *Prevojne tačke i intervali konveksnosti funkcije.* Kako je $f''(x) = 0$ za $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ i $x = \sqrt{3}$, to su tačke: $P\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $Q(0, 0)$ i $R\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ prevojne tačke (vidi tabelu 3.5.10).

Znak drugog izvoda je dat tabelom 3.5.10.

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | | $0$ | | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x^2-3$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\left(1+x^2\right)^3$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $y''$ | $-$ | PT | $+$ | PT | $-$ | PT | $+$ |
| $y$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | |

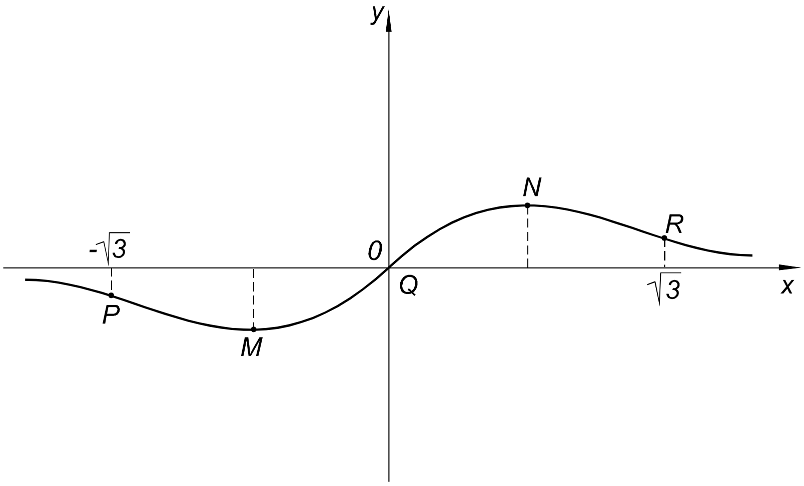
Tabela 3.5.10.

To znači da je funkcija strogo konveksna u intervalima: $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$ i $\langle \sqrt{3}, +\infty\rangle$, a strogo konkavna u intervalima $\langle -\infty, -\sqrt{3}\rangle$ i $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$.

8. *Asimptote funkcije.* Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$, jer je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$
.

Na osnovu izvršenog ispitivanja može se nacrtati grafik date funkcije, Sl.3.5.11.




Sl. 3.5.11.

### 3.5.6. Zadaci za vježbu

U zadacima od 1 do 4 odrediti intervale monotonosti datih funkcija.

**1.** $y = x^3 - 6x^2$.  **2.** $y = x^2 - \ln x^2$.

**3.** $y = 2e^{x^{2-4x}}$.  **4.** $y = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$.

U zadacima od 5 do 10 odrediti ekstreme date funkcije.

**5.** $y = x^2 + 4x + 6$.  **6.** $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

**7.** $y = x\ln^2 x$.  **8.** $y = x^2 e^{-x}$.

**9.** $y = 2x^2 - \ln x$.  **10.** $y = (x-2)^5(2x+1)^4$.

**11.** Silos ima oblik valjka koji se završava poluloptom. Izgradnja jednog kvadratnog metra spoljne površine sfernog dijela silosa dva puta je skuplja nego izgradnja jednog kvadratnog metra spoljne površine cilindričnog dijela. Odrediti poluprečnik silosa date zapremine $V$ tako da troškovi njegove izgradnje budu minimalni.

U zadacima 12 do 15 odrediti najmanje i najveće vrijednosti funkcije u datom intervalu.

**12.** $y = x^3$, na $[-1, 3]$. **13.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, na $[0,4]$.

**14.** $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, na $[-1, 5]$.

**15.** $y = |\ln x|$, na $\left[\dfrac{1}{e}, e\right]$.

U zadacima 16 do 21 odrediti intervale konveksnosti, konkavnosti i prevojne tačke date funkcije.

**16.** $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$. **17.** $y = \ln\left(1 + x^2\right)$.

**18.** $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 12}$. **19.** $y = x^2 \ln x$.

**20.** $y = \left(1 + x^2\right) e^x$. **21.** $y = x^4 (12 \ln x - 7)$.

**22.** Za koje vrijednosti $a$ i $b$ je tačka $(1,3)$ prevojna tačka funkcije

$$y = a x^3 + b x^2.$$

U zadacima 23 do 30 naći asimptote datih funkcija.

**23.** $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$. **24.** $y = \dfrac{x^2 - 5x + 10}{x - 1}$.

**25.** $y = x \cdot e^{-x}$. **26.** $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x}$.

**27.** $y = e^{-x^2} + 1$. **28.** $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

**29.** $y = x e^{\frac{1}{x}}$. **30.** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Ispitati tok i nacrtati grafik funkcija datih u zadacima 31 do 40.

**31.** $y = x\left(x^2 - 1\right)$. **32.** $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

**33.** $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$. **34.** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

**35.** $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$. **36.** $y = \sqrt{x^3 - 3x}$.

**37.** $y = x \cdot e^{-x}$.

**38.** $y = \dfrac{x-1}{x^2-1} e^{-x}$.

**39.** $y = x^2 \ln x$.

**40.** $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$.

**IV G L A V A**

# INTEGRALI

## 1. Neodređeni integral

## 1.1. Pojam neodređenog integrala

Problemima određivanja izvoda i diferencijala date funkcije $y = f(x)$ bavi se diferencijalni račun. Obrnut problem, tj. problem određi-vanja funkcije čiji je izvod ili diferencijal poznat rješava integralni račun. Zbog toga se integralni račun može shvatiti kao inverzna operacija diferencijalnog računa.

**Definicija 1.1.** *Funkciju* $F(x)$, *definisanu na intervalu I, nazivamo primitivnom funkcijom ili prim funkcijom funkcije* $f(x)$ *ili integralom od* $f(x)$, *ako je na tom intervalu* $f(x)$ *izvod funkcije* $F(x)$, *tj. ako vrijedi relacija*

(1.1.1) $$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I .$$

Definicija 1.1. se može formulisati tako da se umjesto termina "iz-vod" koristi termin "diferencijal" i tada vrijedi

(1.1.2) $$d\,F(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx .$$

**Teorema 1.1.** *Neka je* $F(x)$, *na intervalu I, primitivna funkcija funkcije* $f(x)$. *Tada je i funkcija* $F(x) + C$, *gdje je C proizvoljna konstanta, primitivna funkcija funkcije* $f(x)$.

***Dokaz.*** Tvrdnja slijedi na osnovu toga da funkcije $F(x) + C$ i $F(x)$ imaju izvod $f(x)$, tj. da vrijedi

$$\left[F(x) + C\right]' = F'(x) = f(x) .$$

**Teorema 1.2.** *Neka su* $F(x)$ *i* $\Phi(x)$ *različite primitivne funkcije funkcije* $f(x)$ *na intervalu I. Tada je*

(1.1.3) $$\Phi(x) = F(x) + C, \quad C \in \boldsymbol{R}.$$

***Dokaz.*** Na osnovu pretpostavke teoreme je

$$F'(x) = f(x), \quad \Phi'(x) = f(x),$$

odakle slijedi

$$\Phi'(x) - F'(x) = \left[\Phi(x) - F(x)\right]' = 0,$$

odnosno, vrijedi

$$\Phi(x) = F(x) + C .$$

Izraz $F(x)+C$, gdje je $C\in\boldsymbol{R}$ proizvoljna konstanta, predstavlja opšti oblik funkcije koja ima kao izvod funkciju $f(x)$ ili diferencijal $f(x)\,dx$. Funkciju $F(x)+C$ nazivamo neodređeni integral funkcije $f(x)$ i označavamo sa

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \quad C\text{-proizvoljna konstanta.}$$

Proizvod $f(x)\,dx$ nazivamo podintegralni izraz, a $f(x)$ podintegralna funkcija.

***Primjer* 1.1.1.** Provjeriti da li je $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2}+C$.

Kako je $\left(\frac{\ln^2 x}{2}+C\right)' = \frac{\ln x}{x}$, to je prema definiciji neodređenog integrala familija funkcija $\frac{\ln^2 x}{2}+C$ upravo neodređeni integral funkcije $\frac{\ln x}{x}$.

## 1.2. Neke osobine neodređenog integrala

Iz definicije neodređenog integrala neposredno slijedi

(1.1.4) $$\left[\int f(x)\,dx\right]' = \left[F(x)+C\right]' = F'(x) = f(x),$$

(1.1.5) $$d\int f(x)\,dx = d\left[F(x)+C\right] = F'(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

(1.1.6) $$\int d\,F(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

(1.1.7) $$\int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

## 1.3. Jednostavnija pravila integriranja

***Pravilo 1.*** *Neka je $a\in R$ konstanta. Tada vrijedi*

(1.1.8) $$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

***Dokaz.*** Kako je

$$d\left[a\int f(x)\,dx\right] = a\,d\int f(x)\,dx = a\,f(x)\,dx$$

to je $a\int f(x)\,dx$ primitivna funkcija funkcije $a\,f(x)$, što je i trebalo dokazati.

***Pravilo2.*** *Ako postoje* $\int f_i(x)\,dx, \quad i = 1,2,\ldots,n$, *tada vrijedi*

(1.1.9) $$\int (f_1 + f_2 + \cdots + f_n)\,dx = \int f_1\,dx + \int f_2\,dx + \cdots + \int f_n\,dx.$$

***Dokaz.*** Tvrdnju ćemo dokazati za zbir od dva sabirka a dokaz za proizvoljan broj sabiraka može se izvesti primjenom matematičke indukcije.

Neka su $F(x)$ i $G(x)$ primitivne funkcije funkcija $f(x)$ i $g(x)$, respektivno. Tada je po definiciji primitivne funkcije i neodređenog integrala

$$F'(x) = f(x); \quad G'(x) = g(x),$$

odnosno

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x) + 2C =$$

$$= (F(x) + C) + (G(x) + C) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

***Pravilo 3.*** *Neka je* $\int f(t)\,dt = F(t) + C$. Tada je

(1.1.10) $$\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

***Dokaz.*** Kako je

$$\frac{dF(t)}{dt} = F'(t) = f(t),$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}F(ax + b) = a \cdot F'(ax + b) = a \cdot f(ax + b),$$

to je

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{a}F(ax + b)\right] = \frac{1}{a}a \cdot F'(ax + b) = F'(ax + b) = f(ax + b).$$

Znači, funkcija $\frac{1}{a}F(ax + b)$ je primitivna funkcija funkcije $f(ax + b)$. Time je na osnovu definicije neodređenog integrala pravilo dokazano.

## 1.4. Tablica osnovnih integrala

Na osnovu definicije neodređenog integrala i tablice izvoda odnosno diferencijala može se napisati osnovna tablica integrala.

**1.** $\int 0 \cdot dx = C$; $\int dx = x + C$,

**2.** $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \ \alpha \in \boldsymbol{R}$,

**3.** $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$,

**4.** $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = arc\,tgx + C$; $\int \dfrac{-1}{1+x^2} dx = arc\,ctgx + C$,

**5.** $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\sin x + C$; $\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\cos x + C$,

**6.** $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$; $\int e^x dx = e^x + C$,

**7.** $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$; $\int \cos x\, dx = \sin x + C$,

**8.** $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$; $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg\,x + C$,

**9.** $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.

Pomoću osnovne tablice i jednostavnijih pravila uradimo nekoliko zadataka.

**1.** Izračunati

$$\int \left( x^3 + 2x - 5 \right) dx.$$

***Rješenje.*** Na osnovu relacija (1.1.8) i (1.1.9) slijedi jednakost

$$\int \left( x^3 + 2x - 5 \right) dx = \int x^3 dx + 2\int x\, dx - 5\int dx =$$

odakle je prema tablici osnovnih integrala (relacija 1.)

$$= \frac{1}{3+1} x^{3+1} + 2 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} - 5x + C = \frac{1}{4} x^4 + x^2 - 5x + C.$$

**2.** Izračunati $\int \sqrt{x}\, dx$.

***Rješenje.*** $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{2}{3} x\sqrt{x} + C$.

**3.** Izračunati $\int \sin mx\, dx$.

***Rješenje.*** Na osnovu pravila 3 (relacija (1.1.10)) integracije slijedi

$$\int \sin mx\, dx = \frac{1}{m}\int \sin(mx)\, d(mx) = -\frac{1}{m}\cos mx + C.$$

**4.** $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\, dx = \int \frac{d\,(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C.$

**5.** $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+5x+1}\, dx = \int \frac{d\left(x^2+5x+1\right)}{x^2+5x+1} = \ln\left|x^2+5x+1\right| + C.$

**6.** $\displaystyle\int tg^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx =$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int dx = tg\, x - x + C.$$

**7.** $\displaystyle\int x \cdot e^{x^2+1} dx = \int \frac{1}{2} e^{x^2+1} d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2}\int e^{x^2+1} d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C.$

**8.** $\displaystyle\int tg\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{d\,(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + C.$

**9.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d\,(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C.$

**10.** $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{\sin 2x} = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}\, dx = \int \frac{d\,(tg\, x)}{tg\, x} = \ln|tg\, x| + C.$

## 1.5. Integracija metodom smjene

U dosadašnjim primjerima integrala koristili smo samo osnovna pravila i tablice integrala. Takvi slučajevi su veoma rijetki. Podintegralna funkcija je uglavnom složenija funkcija od podintegralnih funkcija datih u tabličnim integralima. Tada se, u nekim slučajevima, uvođenjem smjene nezavisne promjenljive podintegralne funkcije dati integral može svesti na tablični integral.

Neka treba izračunati

(1.1.11) $$\int f(x)\, dx.$$

Umjesto nezavisne promjenljive $x$ uvedimo novu promjenljivu $t$ i neka je

(1.1.12) $$x = g(t), \quad dx = g'(t)\, dt$$

tada integral (1.1.11) glasi

(1.1.13) $$\int f[g(t)]g'(t)\,dt.$$

Ako je integral (1.1.13) takav da se može izračunati, njegov rezultat će biti funkcija promjenljive $t$. Tu promjenljivu treba zamijeniti promjenljivom $x$.

**Teorema 1.2.** *Neka su* $J_1$ *i* $J_2$ *otvoreni intervali u skupu* $\boldsymbol{R}$. *Neka je* $f: J_2 \to \boldsymbol{R}$, $\forall x \in J_2$, *neprekidna funkcija na* $J_2$ *i neka funkcija* $g: J_1 \to J_2$, *ima neprekidne izvode na* $J_1$. *Tada za svako* $t \in J_1$ *i svako* $x = g(t) \in J_2$ *vrijedi*

(1.1.14) $$\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]g'(t)\,dt.$$

Tačnost tvrdnje slijedi na osnovu definicije izvoda posredne funkcije i definicije neodređenog integrala.

***Primjeri*:** Integracija metodom smjene:

**1.** Izračunati
$$\int \sin^3 x \cos x\,dx.$$

Uvodimo smjenu $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$. Tada posmatrani integral glasi:
$$\int \sin^3 x\cos x\,dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

**2.** $$\int x e^{x^2} dx = \left\| x^2 = t \Rightarrow dt = 2x\,dx \right\| = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

**3.** $$\int \frac{dx}{1+4x} = \left\| 1+4x = t \Rightarrow dt = 4\,dx \right\| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln|1+4x| + C.$$

**4.** $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left\| \begin{matrix} \sqrt{1+x} = t \Rightarrow 1+x = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t\,dt \end{matrix} \right\| =$$
$$= \int \frac{2t\,dt}{t} = 2\int dt = 2t + C = 2\sqrt{1+x} + C.$$

**5.** $$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \left\| t = \sin x;\ dt = \cos x\,dx \right\| =$$
$$= \int \frac{dt}{1+t^2} = arc\,tg\,t + C = arc\,tg(\sin x) + C.$$

**6.** $$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)\sin x\,dx =$$
$$= \int \sin x\,dx - \int \cos^2 x \sin x\,dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

## 1.6. Metoda parcijalne integracije

Neka su $u = f(x)$ i $v = g(x)$ funkcije od $x$ i neka imaju izvode $u' = f'(x)$ i $v' = g'(x)$. Tada je po pravilu diferenciranja proizvoda

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du,$$

odakle slijedi

$$u\,dv = d(u \cdot v) - v\,du$$

odnosno

$$v\,du = d(u \cdot v) - u\,dv.$$

Iz prethodnih jednakosti integracijom dobijamo

(1.1.15) $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

odnosno

(1.1.16) $$\int v\,du = uv - \int u\,dv.$$

Relacije (1.1.15) ili (1.1.16) daju pravila parcijalne (djelimične) integracije.

***Primjeri***: parcijalne integracije

**1.** Neka treba naći $\int x e^{2x} dx$. Uzmimo da je

$$u = x,\quad du = dx,\quad dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

Tada je prema relaciji (1.1.15)

$$\int x e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

**2.** $$\int x^2 \ln x\,dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{array} \right\| = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$$

**3.** Izračunati

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx.$$

Označimo dati integral sa $J$ i neka je

$$u = e^{ax},\quad dv = \cos bx\,dx.$$

Tada je prema relaciji (1.1.15)

$$J=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\left\|\begin{array}{l} u=e^{ax}\Rightarrow du=a\,e^{ax}dx \\ dv=\cos bx\,dx\Rightarrow v=\frac{1}{b}\sin bx \end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Ako se za izračunavanje $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ uzme

$$u=e^{ax}\quad\left(du=a\,e^{ax}dx\right),\quad dv=\sin bx\,dx\quad\left(v=-\frac{1}{b}\cos bx\right),$$

tada slijedi

$$J=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\left[-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right],$$

ili

$$J=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}J.$$

Rješavanjem prethodne jednačine po $J$ dobijamo

$$J=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{ax},$$

ili

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}+C.$$

**4.** Izračunati

(a) $$\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n},\quad n\in\boldsymbol{N}.$$

Označimo dati integral sa $J_n$, tj. neka je

$$J_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n},$$

gdje je $n$ potencija imenioca. Primjenom metoda parcijalne integracije za

$$u=\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}\Rightarrow du=-\frac{n\left(x^2+a^2\right)^{n-1}\cdot 2x}{\left(x^2+a^2\right)^{2n}}=-\frac{2nx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}},$$

$$v=x\Rightarrow dv=dx,$$

prema relaciji (1.1.15) dobijamo

$$J_n=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\int\frac{2nx^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx=$$

$$=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx=$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}\,dx =$$

(b)
$$J_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} - 2na^2\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}.$$

Zapazimo da je integral

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$$

istog oblika kao i integral (a), i označimo ga sa $J_{n+1}$. Tada se relacija (b) može izračunati u obliku

(c)
$$J_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}.$$

Rješavanjem jednačine (c) po $J_{n+1}$ je

(1.1.17)
$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}J_n.$$

Na taj način smo dobili formulu, i zove se rekurentna formula, po kojoj je integral $J_{n+1}$ izražen preko integrala $J_n$. Time se potencija imenioca datog integrala umanjuje za jedan. Taj postupak se nastavlja sve dotle dok se posmatrani integral ne svede na tablični integral oblika $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

**5.** Izračunati integral

$$J = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx.$$

Neka je $u=\sqrt{x^2+a^2}$ odnosno $du = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$ i $dv = dx$, odnosno $v = x$. Tada je prema relaciji (1.1.15)

$$J = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx,$$

$$J = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$J = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$J = x\sqrt{x^2+a^2} - J + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$2J = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|.$$

Rješavanjem prethodne jednačine po $J$ i vodeći računa o oznaci $J$ slijedi

(1.1.18) $$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)+C.$$

## 1.7. Integracija racionalnih funkcija

Ranije smo dokazali (III, 1.3.1.2) da se svaka prava razlomljena racionalana funkcija može izraziti kao zbir elementarnih razlomaka oblika:

**1.** $\dfrac{A}{x-a}$, **2.** $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $(k=2,3,4,\dots)$

**3.** $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, **4.** $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $(k=2,3,4,\dots)$

gdje su $A$, $M$, $N$ konstante, a $p,q\in\boldsymbol{R}$ za koje vrijedi: $p^2-4q<0$. Na os-novu toga i pravila integracije slijedi da se integracija pravih racionalnih fun-kcija svodi na izračunavanje integrala oblika 1,2,3 i 4. Zbog toga ćemo raz-motriti načine izračunavanja tih integrala.

Integrali oblika 1 i 2 su jednostavniji pa se mogu izračunati direktno prema tabličnim integralima.

(1.1.19) $$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C,$$

(1.1.20) $$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=-\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$$

Razmotrimo način izračunavanja integrala funkcije

(1.1.21) $$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad q-\frac{p^2}{4}>0.$$

U kvadratnom trinomu $x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}$ konstantu $q-\dfrac{p^2}{4}$ označimo sa $a^2$, tj. $a=+\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$. Uvedimo smjenu $x+\dfrac{p}{2}=t$, $dx=dt$. Tada je

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(x+p/2\right)^2+q-p^2/4}dx=\int\frac{M\left(t-p/2\right)+N}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2 + a^2\right)}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\int \frac{d(t/a)}{(t/a)^2 + 1} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(t^2 + a^2\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\, arc\,tg\,\frac{t}{a} + C \; .$$

Vodeći računa da je $t = x + \frac{p}{2}$ prethodna jednakost se može izraziti u obliku

(1.1.22)
$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2 + px + q\right) + \\ + \frac{2N - Mp}{2\sqrt{q - p^2/4}}\, arc\,tg\,\frac{x + p/2}{\sqrt{q - p^2/4}} + C \; .$$

Za izračunavanje integrala funkcije

(1.1.23)
$$\frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^k}, \quad k \in \{2,3,4,\ldots\}, \quad q - \frac{p^2}{4} > 0$$

koristimo istu smjenu kao i za integral funkcije (1.1.21) i dobijamo

$$\int \frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^k}\,dx = \int \frac{Mt + (N - Mp/2)}{\left(t^2 + a^2\right)^k}\,dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} \; .$$

Za izračunavanje prvog integrala na desnoj strani prethodne jednakosti može se koristiti smjena

$$t^2 + a^2 = u, \quad 2t\,dt = du \; .$$

Tada je

$$\int \frac{2t\,dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} = \int \frac{du}{u^k} = -\frac{1}{k - 1}\cdot\frac{1}{\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}} + C \; ,$$

odnosno

$$\int \frac{2t\,dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} = -\frac{1}{k - 1}\cdot\frac{1}{\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}} + C \; .$$

Za izračunavanje integrala funkcije $\frac{1}{\left(t^2 + a^2\right)^k}$ koristi se rekurentna formula (1.1.17).

***Primjer* 1.1.3.** Izračunati integral

$$\int \frac{3x + 1}{\left(x^2 + 2x + 5\right)^2}\,dx \; .$$

***Rješenje.*** Dati integral izračunajmo prema datom postupku.

$$\int \frac{3x+1}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx = \int \frac{3x+1}{\left[(x+1)^2+4\right]}dx = \left\| \begin{matrix} t = x+1 \Rightarrow dt = dx \\ x = t-1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int \frac{3(t-1)+1}{\left(t^2+2^2\right)^2}dt = \int \frac{3t-2}{\left(t^2+2^2\right)^2}dt =$$

$$= 3\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+2^2\right)^2} - 2\int \frac{dt}{\left(t^2+2^2\right)^2} = \left\| \begin{matrix} t^2+4 = u \\ 2t\,dt = du \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{du}{u^2} - 2\left( \frac{1}{2\cdot 1\cdot 4}\frac{t}{t^2+4} + \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1\cdot 4}\int \frac{dt}{t^2+4} \right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2-1}\frac{1}{t^2+4} - \frac{1}{4}\frac{t}{t^2+4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}arc\,tg\frac{t}{2} + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t^2+4} - \frac{1}{4}\frac{t}{t^2+4} - \frac{1}{8}arc\,tg\frac{t}{2} + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+5} - \frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+2x+5} - \frac{1}{8}arc\,tg\frac{x+1}{2} + C \, .$$

***Primjer* 1.1.4.** Izračunati integral

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x^2+x+1)(x-1)^2}dx \, .$$

***Rješenje.*** Kako je

$$\frac{x^2+2x+3}{(x^2+x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2}{3}\frac{1}{x-1}$$

to je na osnovu relacija (1.1.19), (1.1.20) i (1.1.21)

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x^2+x+1)(x-1)^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{3}\ln|x-1| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + C \, .$$

# 1.8. Integracija nekih iracionalnih funkcija

U dijelu 1.1.7 smo pokazali da se izračunavanje integrala bilo kojeg racionalnog izraza svodi na izračunavanje integrala elementarnih razlomaka. U ovom dijelu ćemo razmotriti neke smjene promjenljive $x$, $t = \psi(x)$, kojim se iracionalna funkcija može svesti na razlomljenu racionalnu funkciju, odnosno na elementarne razlomke.

### 1.8.1. Integral funkcija oblika $R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Neka treba izračunati

(1.1.24) $$J=\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

gdje su $a,b,c,d\in\boldsymbol{R}$ proizvoljne konstante, $ad\neq bc$, i $R$ razlomljena racio-nalna funkcija po $x$ i $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Nakon smjene

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

slijedi

(1.1.25) $$\begin{cases}\left(t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\Leftrightarrow t^n=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Leftrightarrow x=\dfrac{dt^n-b}{a-ct^n}=\psi(t)\\ dx=\dfrac{n(ad-bc)\,t^{n-1}}{\left(a-ct^n\right)^2}dt=\psi'(t).\end{cases}$$

Odakle, dalje, slijedi

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\psi(t),t\right)\psi'(t)\,dt=$$
$$=\int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\frac{(ad-bc)\,n\,t^{n-1}}{\left(a-ct^n\right)^2}dt.$$

Dakle, smjenom $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, integral (1.1.24) se svodi na integral razlo-mljene racionalne funkcije.

***Primjer* 1.1.5.** Izračunati

$$J=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{1-x}dx.$$

***Rješenje.*** Neka je $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Tada

$$t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow t^2=\frac{x+1}{1-x} \Rightarrow x=\frac{t^2-1}{t^2+1} \Rightarrow dx=\frac{4t\,dt}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

Na osnovu date smjene vrijedi

$$J=\int t\cdot\frac{1}{1-\frac{t^2-1}{t^2+1}}\cdot\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}dt=2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=$$

$$=2\int\frac{t^2+1}{t^2+1}dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2t-2\,arctg\,t+C=$$

$$=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\,arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

Kada se u integralu tipa (1.1.24) javlja veći broj korijena izraza $\frac{ax+b}{cx+d}$, tj. ako je integral oblika

$$\int R\left(x,\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}},\cdots,\sqrt[l]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \tag{1.1.26}$$

tada se uvodi smjena $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, gdje je $m$ najmanji zajednički sadržalac od $r, \ldots, l$. Daljni postupak je potpuno isti kao za integrale oblika (1.1.24).

***Primjer* 1.1.6.** Za integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$$

koristimo smjenu

$$t=\sqrt[4]{x+1},\; t^4=x+1,\; dx=4t^3dt.$$

Tada je

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}=\int\frac{4t^3}{t^2+t}dt=4\int\frac{t^2}{t+1}dt=$$

$$=4\left[\int t\,dt-\int dt+\int\frac{dt}{t+1}\right]=2t^2-4t+4\ln|t+1|+C=$$

$$=2\sqrt{x+1}-4\sqrt[4]{x+1}+4\ln\left(\sqrt[4]{x+1}+1\right)+C.$$

## 1.8.2. Integral binomnog diferencijala

Diferencijal oblika

(1.1.27) $$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,$$

gdje su $a$ i $b$ realni brojevi različiti od nule, a $m,n$ i $p$ racionalni brojevi, zovemo binomni diferencijal.

Razmotrimo mogućnost svođenja integrala binomnog diferencijala, tj. integrala

(1.1.28) $$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

na integral razlomljene racionalne funkcije.

**1.** Neka je $p$ cijeli broj. Tada se smjenom $t=\sqrt[r]{x}$, gdje je $r$ naj-manji zajednički sadržalac imenitelja racionalnih brojeva $m$ i $n$, integral (1.1.28) svodi se na integral racionalne funkcije.

**Primjer 1.1.7.** Neka treba izračunati

$$\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+3x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx.$$

Tada je

$$t=\sqrt[6]{x} \Rightarrow x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt,$$

pa se dati integral svodi na

$$\int t^2\left(2+3t^3\right)^2\cdot 6t^5dt=6\int t^7\left(2+3t^3\right)^2dt=6\int t^7\left(4+12t^3+9t^6\right)dt=$$

$$=3t^8+\frac{72}{11}t^{11}+\frac{27}{7}t^{14}+C=3x\sqrt[3]{x}+\frac{72}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{27}{7}x^2\sqrt[3]{x}+C.$$

**2.** Neka je $\frac{m+1}{n}$ cijeli broj. Tada smjenom $z=x^n$, ili $x=z^{\frac{1}{n}}$,

$\left(dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz\right)$ integral (1.1.28) ima oblik

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\int z^{\frac{m}{n}}\left(a+bz\right)^p\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz=\frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}\left(a+bz\right)^p dz,$$

ili

(1.1.29) $$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\frac{1}{n}\int z^q(a+bz)^p dz,$$

gdje je $q=\frac{m+1}{n}-1$ cijeli broj.

Neka je $p = \frac{l}{s}$. Tada je funkcija $z^q (a + bz)^p$ iracionalna funkcija oblika $R\left(z, \sqrt[s]{a + bz}\right)$. Tada se smjenom, kako je ranije objašnjeno, $t = \sqrt[s]{a + bz}$ integral (1.1.29) svodi na integral racionalne funkcije.

Dakle, ako je u podintegralnoj funkciji (1.1.29) $\frac{m + 1}{n}$ cijeli broj za izračunavanje tog integrala uvodimo smjenu

$$t = \sqrt[s]{a + bz^n}, \; s\text{-imenilac od } p.$$

**Primjer 1.1.8.** Izračunati

$$\int x^3 \left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

***Rješenje.*** Dati integral je binomni, gdje je $m = 3,\ n = 2,\ p = -\frac{1}{2}$. Kako je $\frac{m + 1}{n} = \frac{3 + 1}{2} = 2 \in$ ***Z***, možemo uvesti smjenu

$$t = \sqrt{1 - x^2}\ ;\ x = \sqrt{1 - t^2}\ ;\ dx = -\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} dt.$$

Tada vrijedi

$$\int x^3 \left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \int \sqrt{\left(1 - t^2\right)^3} \cdot (t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}} dt = = -\int (1 - t^2)\, dt =$$

$$= -t + \frac{t^3}{3} + C = -\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{3}(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2} + C.$$

**3.** Integral (1.1.29) se može izraziti u obliku

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bz)^p dz;\ \left(z = x^n\right)$$

$$= \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1+p} \left(\frac{a + bz}{z}\right)^p dz.$$

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx = \frac{1}{n}\int z^{q+p} \left(\frac{a + bz}{z}\right)^p dz,\ q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

Neka je $q + p = \frac{m + 1}{n} - 1 + p$, odnosno $\frac{m + 1}{n} + p$ cijeli broj. Tada je podintegralna funkcija iracionalna funkcija oblika

$$R\left(z, \sqrt[s]{\frac{a + bz}{z}}\right),$$

gdje je $s$ imenilac od $p$, koja se može racionalizirati smjenom

(1.1.30) $$t = \sqrt[s]{\frac{a + bz}{z}} = \sqrt[s]{az^{-1} + b} = \sqrt[s]{ax^{-n} + b}.$$

**Primjer 1.1.9.** Izračunati $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}} dx$.

***Rješenje.*** U ovom zadatku je $m=0,\ n=4,\ p=-\frac{1}{4}$. Kako je

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0\in \boldsymbol{Z}$$

koristimo smjenu

$$t=\sqrt[4]{x^{-4}+1} \Rightarrow t^4=x^{-4}+1 \Rightarrow x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}},$$

odakle je diferencijal

$$dx=-t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt$$, to je

$$\int\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}dx=-\int\left(\frac{t^4}{t^4-1}\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt=$$

$$=-\int t^{-1}\cdot\left(t^4-1\right)^{\frac{1}{4}}\cdot t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt=$$

$$=-\int\frac{t^2}{t^4-1}dt=-\int\frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}dt.$$

Nakon razlaganja podintegralne funkcije na elementarne razlomke, slijedi

$$\int\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{2}arc\,tg\,t+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}\right|-\frac{1}{2}arc\,tg\sqrt[4]{x^{-4}+1}+C.$$

Slučajevi 1,2 i 3 su jedini slučajevi kada integral binomnog diferencijala se može elementarno izračunati.

### 1.8.3. Integral funkcija oblika $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Neka treba izračunati integral funkcije $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, gdje je $R$ racionalna funkcija po $x$ i $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Razmotrićemo tri smjene (Eulerove*) smjene) kojim se funkcija $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ može transfo-rmisati u racionalnu funkciju, odnosno integral

(1.1.31) $$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

u integral racionalne funkcije.

**1.** Neka je u relaciji (1.1.31) $a>0$. Tada možemo uvesti smjenu

(1.1.32) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\,x,$$

gdje je $t$ nova promjenljiva od $x$. Mi ćemo postupak izračunavanja integrala objasniti sa jednim znakom. Kvadriranjem jednakosti (1.1.32) dobijamo

$$bx+c=t^2-2tx\sqrt{a}.$$

Rješavanjem prethodne jednačine po $x$ dobijamo

(1.1.33) $$x=\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}.$$

Ako se vrijednost $x$ iz relacije (1.1.33) zamijeni na desnoj strani relacije (1.1.32), dobijamo

(1.1.34) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+c}.$$

*) L. Euler (1707-1783), švajcarski matematičar.

(1.1.35) $$dx=\frac{2\left(\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}\right)}{\left(2\sqrt{a}\,t+b\right)^2}dt.$$

Ako se umjesto $x$, $\sqrt{ax^2+bx+c}$, $dx$ njihove vrijednosti date relacijama (1.1.33), (1.1.34) i (1.1.35), respektivno, zamijene u integral (1.1.31) tada se taj integral svodi na integral racionalne funkcije.

**Primjer 1.1.10.** Izračunati

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+x+1}}.$$

***Rješenje.*** Neka je $\sqrt{9x^2+x+1}=t-3x$. Tada kvadriranjem te jednakosti dobijamo jednačinu

$$9x^2+x+1=t^2-6tx+9x^2,$$

čije je rješenje, po $x$

$$x=\frac{t^2-1}{6t+1}.$$

Diferenciranjem prethodnog izraza dobijamo

$$dx = 2\frac{3t^2 + t + 3}{(6t+1)^2}dt.$$

Tada je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + x + 1}} = 2\int \frac{\frac{3t^2 + t + 3}{(6t+1)^2}}{\frac{3t^2 + t + 3}{6t+1}}dt = 2\int \frac{dt}{6t+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|6t+1| + C = \frac{1}{3}\ln\left|6\left(\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x\right) + 1\right| + C.$$

**2.** Neka je $c > 0$. Uvodimo novu promjenljivu $t$ tako da vrijedi

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}. \tag{1.1.36}$$

Tada kvadriranjem relacije (1.1.36) dobijamo

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c,$$

odnosno

$$ax^2 + bx = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c}$$

odakle se dobija

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t - b}{a - t^2}. \tag{1.1.37}$$

Zamjenom vrijednosti $x$ (relacija (1.1.37)) na desnoj strani relacije (1.1.36) dobijamo

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{2\sqrt{c}\,t - b}{a - t^2}\cdot t + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}\,t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}.$$

Diferenciranjem relacije (1.1.37) dobijamo

$$dx = 2\frac{\sqrt{c}\,t^2 - bt + a\sqrt{c}}{\left(a - t^2\right)^2}dt. \tag{1.1.38}$$

Iz (1.1.36) odnosno (1.1.37) i (1.1.38) integral (1.1.31) se svodi na integral racionalne funkcije i vrijedi

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx = 2\int R\left(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}\right)\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{\left(a - t^2\right)^2}dt$$

gdje je

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x}.$$

***Primjer* 1.1.11.** Izračunati

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

***Rješenje.*** Neka je

$$\sqrt{x^2+x+1} = tx+1.$$

Tada je

$$x^2+x+1 = t^2x^2+2tx+1,$$

odakle je

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2},\quad dx = 2\frac{t^2-t+1}{\left(1-t^2\right)^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{2t+1}{1-t^2}t+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}.$$

Na osnovu dobijenih izraza slijedi

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2\int \frac{1}{\dfrac{2t-1}{1-t^2}+\dfrac{t^2-t+1}{1-t^2}}\cdot\frac{t^2-t+1}{\left(1-t^2\right)^2}dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2-t+1}{t(1+t)^2(1-t)}dt.$$

Kako je

$$\frac{t^2-t+1}{t(1+t)^2(1-t)} = \frac{1}{t}-\frac{3}{2}\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{3}{4}\frac{1}{1+t}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-t},$$

to je

$$2\int \frac{t^2-t+1}{t(1+t)^2(1-t)}dt = 2\ln|t|+3\frac{1}{1+t}-\frac{3}{2}\ln|1+t|+\frac{1}{2}\ln|1-t|+C =$$

$$= 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x-1}{x}\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}+1}{x}\right|+3\frac{x}{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}+C.$$

**3.** Neka su $\alpha$ i $\beta$ realne i različite nule trinoma $ax^2+bx+c$. Tada je $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$. Neka je

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha), \tag{1.1.39}$$

gdje je $t$ nova funkcija od $x$. Kvadriranjem relacije (1.1.39) dobijamo

$$ax^2+bx+c = t^2(x-\alpha)^2,$$

odnosno

$$t^2(x-\alpha)^2 = a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Nakon dijeljenja prethodne jednakosti sa $x-\alpha$, dobijamo jednačinu po $x$ oblika

$$t^2(x-\alpha)=a(x-\beta)$$

čije je rješenje

$$x=\frac{-\beta a+\alpha t^2}{t^2-a},$$

odakle diferenciranjem dobijamo

$$dx=\frac{2a(\beta-\alpha)t}{\left(t^2-a\right)^2}dt.$$

Smjene date relacijama (1.1.32), (1.1.36) i (1.1.39) su poznate kao *Eulerove smjene*.

## 1.9. Integracija nekih trigonometrijskih funkcija

Neka je data funkcija $R(\sin x,\cos x)$, gdje je $R$ racionalna funkcija od $\sin x$ i $\cos x$. Tada se izraz $R(\sin x,\cos x)$ može racionalizirati smjenom

(1.1.40) $$t=tg\frac{x}{2},\quad -\pi<x<\pi.$$

Kako je

(1.1.41) $$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

(1.1.42) $$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

i iz relacije (1.1.40)

$$x=2\,arc\,tg\,t,$$

odnosno

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

to vrijedi

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{dt}{1+t^2}.$$

***Primjer* 1.1.12.** Izračunati

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

***Rješenje.*** Neka je

$$t = tg\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Tada je prema relaciji (1.1.41)

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} =$$

$$= -\frac{2}{1+t} + C = \frac{-2}{1+tg\frac{x}{2}} + C.$$

Smjena (1.1.40) je univerzalna i koristi se za integraciju funkcija oblika $R(\sin x, \cos x)$. Često se racionalisanjem dobija dosta složen integral. Nekad postoji mogućnost da se postupak izračunavanja integrala uprosti i u ovom dijelu ćemo razmotriti neke od tih mogućnosti.

**1.** Za $J = \int \sin^n x\,dx,\ n \in$ ***N***, primjenjujemo metodu parcijalne integracije. Tada je

$$J = \int \sin^n x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx \\ dv = \sin x\,dx \Rightarrow v = -\cos x \end{matrix} \right\|$$

$$J = -\cos x \sin^{n-1} x + \int (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$$

$$J = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$J = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx$$

$$J = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)J.$$

Rješavanjem prethodne jednačine po $J$ dobijamo *rekurentnu* formulu

(1.143) $$J = \int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx.$$

Istim postupkom dobijamo formulu

(1.1.44) $$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

Uzastopnim primjenama (1.1.43) odnosno (1.1.44), ako je $n$ paran prirodan broj, izračunavanje tih integrala se svodi na izračunavanje

$$\int \sin^2 x\,dx \quad \text{i} \quad \int \cos^2 x\,dx.$$

Neka je u izrazu $\sin^n x \ (\cos^n x)$ $n$ neparan prirodan broj, tj. $n = 2k+1$. Tada je

$$\int \sin^{2k+1} x\,dx = \int \sin^{2k} x \cdot \sin x\,dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^k \cdot \sin x\,dx.$$

Smjenom

$$t = \cos x, \quad dt = -\sin x\,dx$$

se dobija

$$\int \sin^{2k+1} x\,dx = -\int \left(1-t^2\right)^k dt.$$

Na isti način se izračunava i $\int \cos^{2k+1} x\,dx$.

***Primjer* 1.1.13.** Izračunati $\int \sin^3 x\,dx$.

***Rješenje.*** $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$,

$$\cos x = t \Rightarrow dt = -\sin x\,dx,$$

$$\int \sin^3 x\,dx = -\int (1-t^2)\,dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

Parcijalnom integracijom se mogu za $n \in \boldsymbol{N}$ i $n > 1$ dokazati i sljedeće rekurentne formule:

(1.1.45) $$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x},$$

(1.1.46) $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

Primjera radi dokažimo relaciju (1.1.45). Uzmimo da je

$u = \dfrac{1}{\sin^{n-2} x}$ ,odnosno, $du = -\dfrac{(n-2)\cos x}{\sin^{n-1} x}dx$, i

$v = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x = -\frac{\cos x}{\sin x}$. Tada je

$$J = \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{1}{\sin^{n-2} x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}dx,$$

$$J = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{dx}{\sin^n x} + (n-2)\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x},$$

ili

$$(n-1)J = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + (n-2)\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x},$$

odnosno, nakon dijeljenja jednakosti sa $n-1$ slijedi

$$J=\int\frac{dx}{\sin^n x}=-\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}.$$

Napomenimo još da se za izračunavanje integrala funkcija oblika

$\sin px\cos qx$, $\sin px\sin qx$ i $\cos px\cos qx$,

gdje su $p$ i $q$ realne konstante, koriste trigonometrijske identičnosti:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]. \tag{1.1.47}$$

## 1.10. Zadaci za vježbu

Koristeći jednostavnija pravila integriranja i tabelu osnovnih inte-grala izračunati

**1.** $\int\sqrt{x}\,dx$; **2.** $\int x\sqrt[3]{x}\,dx$;

**3.** $\int\frac{dx}{x^5}$; **4.** $\int x^2(3-2x)^2\,dx$;

**5.** $\int\left(2^x+3^x\right)^2dx$; **6.** $\int\frac{4^x}{3^x}dx$;

**7.** $\int(3-2x)^8\,dx$; **8.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$;

**9.** $\int\frac{dx}{x^2+4}$; **10.** $\int\frac{dx}{1-x^2}$.

Metodom smjene promjenljivih izračunati:

**11.** $\int\frac{x^2\,dx}{\left(x^3+5\right)^{2/3}}$; **12.** $\int\frac{\ln^3 x}{x}dx$;

**13.** $\int\frac{dx}{x\ln^5 x}$; **14.** $\int\frac{e^x+1}{e^x+x}dx$;

**15.** $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}}dx$; **16.** $\int\frac{dx}{\sin x}$;

17. $\int \frac{dx}{\cos x}$;  18. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$.

Metodom parcijalne integracije izračunati:

19. $\int \ln x\, dx$;  20. $\int x \ln^2 x\, dx$;

21. $\int x^2 e^{-x}\, dx$;  22. $\int x^4 \cos x\, dx$;

23. $\int \arcsin x\, dx$;  24. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\, dx$.

Izračunati integrale:

25. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$;  26. $\int \frac{dx}{3x^2-x-1}$;

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$;  28. $\int \sqrt{4x^2+x}\, dx$;

29. $\int \sqrt{2+x-x^2}\, dx$;  30. $\int \sqrt{2+x+x^2}\, dx$;

31. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\, dx$;  32. $\int \frac{3-2x}{x^2-x-2}\, dx$;

33. $\int \frac{x\, dx}{x^4-2x^2-1}$;  34. $\int \frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^3}\, dx$.

Izračunati sljedeće integrale (racionalnih funkcija)

35. $\int \frac{dx}{x^2+5x}$;  36. $\int \frac{2x-3}{(x-2)^2}\, dx$;

37. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-1}\, dx$;  38. $\int \frac{x^3\, dx}{(x-1)(x-2)^2}$;

39. $\int \frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^2}$;  40. $\int \frac{dx}{(x-1)^2 x^2}$;

41. $\int \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}$;  42. $\int \frac{x^3-1}{x\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}$.

Izračunati sljedeće integrale (iracionalnih funkcija):

**43.** $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

**44.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}dx$;

**45.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$;

**46.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$;

**47.** $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$;

**48.** $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;

**49.** $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$;

**50.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Izračunati integrale:

**51.** $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\cos x}$;

**52.** $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+3}$;

**53.** $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$;

**54.** $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin^3 x-\cos^3 x}dx$;

**55.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^3 x}$;

**56.** $\displaystyle\int\cos^3 x\,dx$.

# 2. Određeni integral

## 2.1. Reimanov[1] integral

Neka je funkcija $y=f(x)$ ograničena na segmentu $I=[a,b]$ $(a,b\in\boldsymbol{R},\ a<b)$ i neka su $m$ i $M$ infimum, odnosno supremum, funkcije $f$ na segmentu $I$. Interval $[a,b]$ podijelimo na proizvoljan način tačkama

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdje je

(2.1.1) $$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots<x_n=b,$$

na podintervale

(2.1.2) $$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ \ldots,[x_{i-1},x_i],\ \ldots,[x_{n-1},x_n].$$

1 B. Reiman (1826-1866), njemački matematičar.

Skup $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ zovemo *subdivizija* intervala *I*. Najveći među brojevima $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = I_i \quad (i = 1,2,\dots,n)$ zovemo *dijametar subdivizije P* i označavamo sa $\lambda(P)$.

Interval $[a,b]$ smo podijelili na $n$ podintervala i dijametar ove podjele označimo sa $\lambda_1$. Ako sada svaki podinterval (2.1.2) podijelimo novim tačkama, dobićemo podjelu sa dijametrom $\lambda_2$. Nastavljajući tako postupak podjele dobićemo niz dijametara $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$, koga ćemo označiti sa $\lambda$.

Za podjelu intervala $[a,b]$ kažemo da je osnovna ili normalna ako niz dijametara tih podjela teži nuli kada $n \to \infty$, tj. ako

$$\lambda_n \to 0 \quad (\lambda \to 0) \text{ kada } n \to \infty .$$

Ako je funkcija $y = f(x)$ ograničena na intervalu $[a,b] = I$ tada za svako $x \in I$ vrijedi

$$m \leq f(x) \leq M . \tag{2.1.3}$$

Neka su $m_i$ i $M_i$ infimum i supremum funkcije $y = f(x)$ na inter-valu $[x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1,2,\dots,n)$ i neka je $t_i$ proizvoljna tačka intervala $[x_{i-1}, x_i]$. Formirajmo sume

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \tag{2.1.4}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \tag{2.1.5}$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i . \tag{2.1.6}$$

Kako je

$$m \leq m_i \leq f(t_i) \leq M_i \leq M$$

to se množenjem tih nejednačina sa $\Delta x_i > 0$ dobija

$$m \Delta x_i \leq m_i \Delta x_i \leq f(t_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \leq M \Delta x_i$$

ili nakon sumiranja po $i \ (i = 1,2,\dots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n} m \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M \Delta x_i . \tag{2.1.7}$$

Iz (2.1.7) prema (2.1.4), (2.1.5) i (2.1.6) slijede nejednakosti

(2.1.8) $$(b-a)\,m \le s \le \mu \le S \le (b-a)\,M \,.$$

Sume $s$ i $S$, definisane sa (2.1.4) i (2.1.5), zovemo donja i gornja *Darbuoxova*[1] *suma*, respektivno, funkcije $f$ na intervalu $I$. Suma $\mu$ zove se integralna suma funkcije $f$ na intervalu $I$.

Razmotrimo neke osobine Darbouxovih suma.

**Teorema 2.1.1.** *Neka je funkcija* $y = f(x)$ *ograničena na intervalu* $[a,b]$. *Tada je donji Darbuoxov zbir monotono rastući a gornji monotono opada-jući.*

***Dokaz.*** Neka je $x_i' \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $(i = 1,2,\dots,n)$. Tada tačka $x_i$ dijeli interval $[x_{i-1}, x_i]$ na podintervale $[x_{i-1}, x_i']$ i $[x_i', x_i]$. Neka je $m_{i-1}'$ infimum a $M_{i-1}'$ supremum funkcije $f$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i']$, i $m_i'$ infimum a $M_i'$ supremum funkcije $f$ na intervalu $[x_i', x_i]$. Tada za $i = 1,2,\dots,n$, vrijedi

$$m_i \le m_{i-1}' \le f(t_i) \le M_{i-1}' \le M_i$$

(2.1.9) $$m_i \le m_i' \le M_i' \le M_i \,,$$

gdje su $m_i$ infimum a $M_i$ supremum funkcije $f$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1,2,\dots,n)$ i vrijedi

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i [(x_i' - x_{i-1}) + (x_i - x_i')] \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} m_{i-1}' (x_i' - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} m_i' (x_i - x_i') \,,$$

odnosno

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i [(x_i' - x_{i-1}) + (x_i - x_i')]$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i-1}' (x_i' - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} M_i' (x_i - x_i') \,.$$

Time je teorema dokazana.

Kako su nizovi $s$ i $S$ monotoni i ograničeni to su oni i konver-gentni, tj. postoji $\lim\limits_{\lambda\to 0} s$ i $\lim\limits_{\lambda\to 0} S$ .

**Teorema 2.1.2.** *Ma koja donja Darbuoxova suma nije veća od bilo koje gornje Darbuoxove sume.*

***Dokaz.*** Interval $[a,b]$ podijelimo tačkama $P_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i neka toj podjeli odgovaraju Darbouxove sume $s_1$ i $S_1$. Obrazujmo sada bilo koju podjelu

1 G. Darboux (1842-1917), francuski matematičar.

tačkama $P_2 = \{ x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0 \}$ koje ne zavise od prve podjele, intervala $[a,b]$. Neka toj podjeli odgovaraju Darbouxove sume $s_2$ i $S_2$. Treba dokazati da je $s_1 \le S_2$. Formirajmo skup $P_3 = P_1 \cup P_2$ i interval $[a,b]$ podijelimo tačkama $P_3$. Neka toj podjeli odgovaraju Darbouxove sume $s_3$ i $S_3$. Prema teoremi 2.1.1 slijedi da je

$$s_1 \le s_3 \,, \quad S_3 \le S_2 .$$

Kako je $s_3 \le S_3$, vrijedi $s_1 \le S_2$, što je i trebalo dokazati.

Neka je $A = \{ s : P \in \mathsf{P} \}$ skup svih donjih i $B = \{ B : P \in \mathsf{P} \}$ skup svih gornjih Darbouxovih suma za skup datih subdivizija $\mathsf{P}$. Neka je $C$ skup svih integralnih suma pri zadanoj subdiviziji $\mathsf{P}$, kada se vrijednosti $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ uzimaju na sve moguće načine. Tada je

$$S = \sup_{\mu \in C} \mu \,, \quad s = \inf_{\mu \in C} \mu \,,$$

što ovom prilikom nećemo dokazivati.

Označimo za funkciju $y = f(x)$ na intervalu $[a,b]$ $\sup A$ sa $J_*(f,a,b)$ i $\inf B$ sa $J^*(f,a,b)$ ili kratko $J_*$ i $J^*$. Brojevi $J_*$ i $J^*$ su donji i gornji Reimanovi integral funkcije $f$ na intervalu $[a,b]$, respektivno.

**Definicija 2.1.1.** *Za broj J kažemo da je granična vrijednost integralne sume*

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i \tag{2.1.10}$$

*kada niz dijametara* $\lambda \to 0$, *ako i samo ako za bilo koji broj* $\varepsilon > 0$ *postoji broj* $\delta > 0$ *takav da za bilo koju podjelu intervala* $[a,b]$ *i* $\lambda < \delta$ *vrijedi*

$$|\mu - J| < \varepsilon$$

*za bilo koji izbor brojeva* $t_i$.

To se piše

$$\lim_{\lambda \to 0} \mu = J \tag{2.1.11}$$

Ako postoji konačna i određena granična vrijednost (2.1.11) tada $J$ nazivamo određenim integralom funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ i ozna-čavamo ga sa

$$J = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx .$$

U tom slučaju za funkciju $f(x)$ kažemo da je integrabilna u Reimanovom smislu ili *R*-integrabilna na intervalu $[a,b]$. Funkciju $f(x)$ nazivamo podintegralna funkcija ili integrand, $x$ je integraciona promjenljiva, interval $[a,b]$ je područje integracije.

Granice intervala $[a,b]$ su međe ili granice integracije i to $a$ donja i $b$ gornja međa integracije.

## 2.2. Uslovi postojanja *R*-integrala

**Teorema 2.2.1.** *Funkcija* $y = f(x)$ *definisana na intervalu* $[a,b]$ *je R-integrabilan na tom istom intervalu ako i samo ako vrijedi*

(2.2.1) $$\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0,$$

*gdje su* $S$ *i* $s$ *Darbouxove sume.*

***Dokaz.*** Granična vrijednost (2.2.1) se može iskazati na sljedeći na-čin: za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$ za koji je $\lambda < \delta$ tako da vrijedi ne-jednakost

(2.2.2) $$S - s < \varepsilon .$$

Preptostavimo da postoji $J = \int_a^b f(x)\,dx$. Tada za bilo koje $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$, $\lambda < \delta$ za koje vrijedi

$$|\mu - J| < \varepsilon, \quad J - \varepsilon < \mu < J + \varepsilon .$$

Ako umjesto proizvoljno $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ uzmemo one vrijednosti $t_i$ za koje funkcija $f(x)$ ima infimum odnosno supremum na tom intervalu, tj.

$$f(t_i) = m_i, \quad f(t_i') = M_i, \quad i = 1,2, \ldots ,n,$$

tada je

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i = s$$

$$\sigma' = \sum_{i=1}^{n} f(t_i')\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i = S$$

i vrijede nejednakosti

(2.2.3) $$J - \varepsilon \le s \le S \le J + \varepsilon .$$

Iz (2.2.3) slijedi nejedakost $J - s < \varepsilon$ ili $\lim_{\lambda\to 0} s = J$, odnosno $S - J < \varepsilon$, ili $\lim_{\lambda\to 0} S = J$. Time je dokazan potreban uslov teoreme.

Dokažimo i dovoljan uslov. Neka vrijedi relacija (2.2.1). Tada iz

$$s \le J_* \le J^* \le S$$

slijedi $J_* = J^*$ i tu vrijednost označimo sa $J$. Znači vrijede nejednakosti

(2.2.4) $$s \le J \le S.$$

Neka se integralna suma shvati kao jedna od Darbouxovih suma, koje odgovaraju datoj podjeli. Tada vrijede nejednakosti

(2.2.5) $$s \le \mu \le S.$$

Na osnovu relacije (2.2.2) za dovoljno malo $\lambda$ razlika $S - s$ odnosno dužina intervala $[s, S]$ je manja nego proizvoljno malo $\varepsilon > 0$. Tada iz (2.2.4) i (2.2.5) slijedi nejednakost

$$|\mu - J| < \varepsilon$$

što znači da je $J$ granična vrijednost $\mu$ kada $\lambda \to 0$, odnosno da je

$$J = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Time je teorema dokazana.

Neka je $\omega_i = M_i - m_i$, $\omega_i$-oscilacije funkcije $f$ na intervalu $\Delta x_i$, $i = 1,2,\dots,n$. Tada je

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,\Delta x_i ,$$

i relacija (2.2.1) se može izraziti u obliku

(2.2.6) $$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,\Delta x_i = 0 .$$

## 2.3. Klase *R*-integrabilnih funkcija

**Teorema 2.3.1.** *Svaka neprekidna funkcija* $y = f(x)$ *na intervalu* $[a,b]$ *je na tom intervalu i R-integrabilna.*

**Teorema 2.3.2.** *Svaka ograničena funkcija sa konačnim brojem prekida na intervalu* $[a,b]$ *je na tom intervalu i R-integrabilna.*

## 2.4. Osobine *R*-integrala

Pri definisanju određenog integrala u Reimanovom smislu podjelu intervala $[a,b]$, $a < b$, izvršili smo slijeva na desno (uslovi (2.1.1)).

Posmatrajmo sada interval $a \quad x \quad b$ i taj interval podijelimo na proizvoljan način tačkama $x_0, x_1, \dots, x_n$ tako da vrijedi

(2.4.1) $$a = x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_{i-1} > x_i > \cdots x_n = b \, .$$

U intervalu $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ izaberimo proizvoljnu tačku $t_i$ i formirajmo sumu

(2.4.2) $$\mu = \sum f(t_i)\,\Delta x_i$$

gdje je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < 0$, $i = 1,2,\dots,n$. Granična vrijednost sume $\mu$ kada maksimalna dužina $\Delta x_i$ teži nuli je, po definiciji, integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$, tj.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \mu \, .$$

Ako interval $[b,a]$, $b < a$, podijelimo tačkama $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0$ gdje je

$$b = x_n < x_{n-1} < \cdots < x_0 = a$$

i uzmimo istu vrijednost $t_i$ kao i u prethodnom slučaju, pa formirajmo sumu

$$\mu' = \sum f(t_i)\,\Delta x_i \, ,$$

tada će se sume $\mu$ i $\mu'$ razlikovati samo u znaku. Na osnovu toga slijedi tvrdnja:

Ako je funkcija $y = f(x)$ integrabilna na intervalu $[a,b]$, tada je ona integrabilna i na intervalu $[b,a]$ i vrijedi

(2.4.3) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \, .$$

Na osnovu relacije (2.4.3) neposredno slijedi jednakost

(2.4.4) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \, .$$

**Teorema 2.4.1.** *Neka je funkcija* $y = f(x)$ *integrabilna na intervalu* $[a,b]$ *i neka je* $k \in \boldsymbol{R}$. *Tada je i funkcija* $k \cdot f(x)$ *integrabilna na intervalu* $[a,b]$ *i vrijedi*

(2.4.5) $$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \, .$$

***Dokaz.*** Neka je $\varphi(x)=k\cdot f(x)$. Za funkciju $\varphi(x)$ formirajmo sumu na intervalu $[a,b]$

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\varphi(t_i)\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}k\cdot f(t_i)\,\Delta x_i=k\sum f(t_i)\,\Delta x_i\,.$$

Tada je

$$\lim_{\lambda\to 0}\mu=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(t_i)\,\Delta x_i=k\lim_{\lambda\to 0}\sum f(t_i)\,\Delta x_i\,,$$

ili

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

**Teorema 2.4.2.** *Neka su funkcije* $f(x)$ *i* $g(x)$ *R-integrabilne na intervalu* $[a,b]$. *Tada je i funkcija* $f(x)\pm g(x)$ *integrabilna na tom intervalu i vrije-di*

(2.4.6) $$\int_a^b\big(f(x)\pm g(x)\big)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

***Dokaz.*** Za bilo koju podjelu intervala $[a,b]$ i bilo koji izbor $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ za integralne sume vrijedi relacija

$$\sum_{i=1}^{n}\big(f(t_i)+g(t_i)\big)\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\,\Delta x_i+\sum g(t_i)\,\Delta x_i$$

što znači da je $f(x)+g(x)$ integrabilna funkcija i da vrijedi relacija (2.4.6).

**Teorema 2.4.3.** *Neka je funkcija* $y=f(x)$ *integrabilna na intervalima* $[a,c]$, *i* $[c,b]$. *tada je*

(2.4.7) $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\,.$$

***Dokaz.*** Pretpostavimo da vrijedi $a<c<b$. Kako je po pretpostavci teoreme funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalima $[a,c]$ i $[c,b]$ to prema teoremi 2.2.1 postoje podjele intervala za koje vrijedi

$$S-s=\sum_{[a,c]}\omega_i\,\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}\,,\quad S-s=\sum_{[c,b]}\omega_i\,\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ako se sume objedine dobićemo

$$S-s=\sum_{[a,b]}\omega_i\,\Delta x_i=\sum_{[a,c]}\omega_i\,\Delta x_i+\sum_{[c,b]}\omega_i\,\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,,$$

tj.

$$S - s < \varepsilon,$$

što znači da je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a,b]$.

Za integralne sume vrijedi

$$\sum_{[a,b]} f(t_i)\,\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(t_i)\,\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(t_i)\,\Delta x_i .$$

Ako se prijeđe na graničnu vrijednost, kada $\lambda \to 0$, prethodne jednakosti dobićemo relaciju (2.4.7).

Neka tačka $c$ ne pripada intervalu $[a,b]$ i neka je, na primjer, $a < b < c$. Tada je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a,b]$ kao pod-intervalu intervala $[a,c]$ i vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx ,$$

ili

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx .$$

Na osnovu relacije (2.4.3) i prethodne jednakosti slijedi relacija (2.4.7).

Slično se dokazuje da relacija (2.4.7) vrijedi i u slučaju da je $c < a < b$.

**Teorema 2.4.4.** *Neka je funkcija* $y = f(x)$ *nenegativna na intervalu* $[a,b]$, $a < b$. *Tada vrijedi*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad 0 .$$

Istinitost tvrdnje slijedi neposredno iz definicije određenog integrala. Svi članovi integralne sume $\mu$ su nenegativni pa je i $\lim\limits_{\lambda \to 0} \mu \quad 0$.

**Teorema 2.4.5.** *Neka su funkcije* $f(x)$ *i* $g(x)$ *integrabilne na intervalu* $[a,b]$, $a < b$, *i neka je* $f(x) \le g(x)$ *za svako* $x \in [a,b]$. *Tada vrijedi*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx .$$

***Dokaz.*** Iz uslova $f(x) \le g(x)$, ili $g(x) - f(x) \quad 0$ za svako $x \in [a,b]$ i teoreme 2.4.4 slijedi nejednakost

$$\int_a^b \left( g(x) - f(x) \right) dx \quad 0 .$$

Prema teoremi 2.4.2 slijedi

$$\int_a^b g(x)\,dx \qquad \int_a^b f(x)\,dx \quad ,$$

ili

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \quad .$$

**Teorema 2.4.6.** *Neka je funkcija* $y = f(x)$ *R-integrabilna na intervalu* $[a,b]$, $a < b$ *i neka je*

$$m \le f(x) \le M \quad \textit{za svako} \quad x \in [a,b] \, .$$

*Tada vrijedi*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad . \tag{2.4.8}$$

***Dokaz.*** Za funkciju $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ relacija (2.1.8) glasi

$$m(b-a) \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i \le M(b-a) \quad . \tag{2.4.9}$$

Ako se prijeđe na graničnu vrijednost kada $\lambda \to 0$, prema definiciji *R*-integrala, dobiće se relacija (2.4.8).

## 2.5. Teorema o srednjim vrijednostima

**Teorema 2.5.1.** *Neka je funkcija* $y = f(x)$ *R-integrabilna na intervalu* $[a,b]$ *i neka za svako svako* $x \in [a,b]$ *vrijedi* $m \le f(x) \le M$. *Tada vrijedi relacija*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a) \quad , \quad m \le \mu \le M \, . \tag{2.5.1}$$

***Dokaz.*** Za $a < b$, $b - a > 0$, dijeljenjem relacije (2.4.8) sa $b - a > 0$ dobijamo nejednakosti

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M \quad .$$

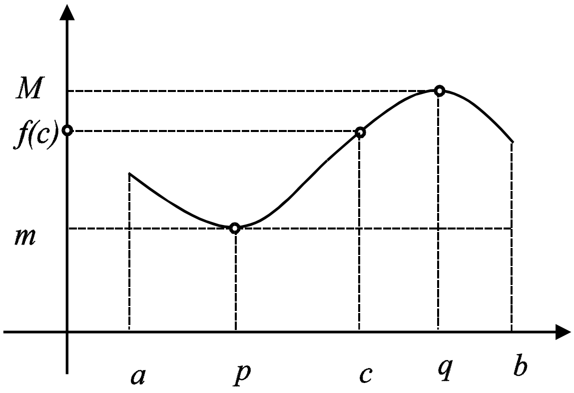
Relacija (2.5.1) vrijedi za

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad .$$

Time je teorema dokazana.

Neka je funkcija $y = f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$. Tada postoji tačka $c \in [a,b]$ takva da vrijedi

(2.1.28) $$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c).$$




Sl. 2.5.1.

To neposredno slijedi iz teorema (III) 3.24 i 2.51.

## 2.6. Primjeri *R*-integrala

U ovom dijelu ćemo posmatrati mogućnost izračunavanja *R*-integra-la po definiciji.

**1.** $\int_0^1 x\,dx$. Dati integral postoji jer je funkcija $f(x) = x$ neprekidna na intervalu $[0,1]$. Interval $[0,1]$ podijelimo na *n*-jednakih podintegrala, tada je $\Delta x_i = \frac{1}{n}$. Neka je $f(t_i) = t_i = \frac{i}{n}$, $i = 1,2,\dots,n$. Tada je integralna suma

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1+n}{2n}.$$

Dakle,

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

**2.** $\int_a^b x^2\,dx$, $b > a > 0$. Inteval $[a,b]$ podijelimo na $n$ jednakih dijelova, tada je $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$. Neka je $f(t_i)$ maksimalna vrijednost funkcije na intervalu $\Delta x_i$, dakle $f(t_i) = t_i^2 = \left(a + i\dfrac{b-a}{n}\right)^2$. Integralna suma je

$$\mu = \sum_{i=1}^{n}\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a^2 + \frac{2a(b-a)}{n}i + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 i^2\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[na^2 + \frac{2a(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i^2\right] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[na^2 + \frac{2a(b-a)}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right],$$

$$\mu = (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\frac{(n+1)}{n} + (b-a)^2\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\mu = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \int_a^b x^2\,dx.$$

## 2.7. Određeni integral kao funkcija gornje međe

Neka je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a,b]$ i neka je $c \in \langle a,b\rangle$ stalna tačka. Tada je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[c,x]$, za svako $x \in [a,b]$. Zbog toga je na intervalu $[c,x]$ definisana funkcija

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

koju nazivamo integralom s promjenljivom gornjom međom.

**Teorema 2.7.1.** *Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a,b]$, ta-da je funkcija*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

*neprekidna funkcija od x na intervalu $[a,b]$.*

***Dokaz.*** Neka argumentu $x$ odgovara priraštaj $\Delta x = h$, $x + h \in [a,b]$, tada je

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \, .$$

Priraštaj funkcije $F$, koji odgovara priraštaju argumenta $h$, je

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

ili na osnovu relacije (2.5.2)

(2.7.1) $$\Delta F = F(x+h) - F(x) = (x+h-x)\,f(c) = h\,f(c) \, ,$$

gdje je $c \in [x, x+h]$. Kako je $f(c)$ konačan broj to $\Delta F \to 0$ kada $h \to 0$. Time je teorema dokazana.

**Teorema 2.7.2.** *Ako je funkcija* $f(t)$ *neprekidna u tački* $t = x$, *tada je funkcija*

(2.7.2) $$F(x) = \int_a^{x} f(t)\,dt$$

*diferencijabilna u toj tački i vrijedi*

$$F'(x) = f(x) \, .$$

***Dokaz.*** Iz relacija (2.7.1) slijedi $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$, gdje je $m' \le f(c) \le M'$ i $x < c < x + h$. Ako je funkcija $f(t)$ neprekidna u tački $x$, tada za $h \to 0 \Rightarrow f(c) \to f(x)$. Zbog toga je

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c) = f(x) \, .$$

Time je teorema dokazana.

## 2.8. Osnovna formula integralnog računa

Teorema 2.7.2 se može interpretirati i na drugi način. Za neprekidnu funkciju $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ postoji uvijek primitivna funkcija $F(x)$ definisana kao određeni integral funkcije gornje međe. Neka je $\phi(x)$ bilo koja primitivna funkcija funkcije $f(x)$. Tada je prema teoremi 2.1.1

$$F(x) = \phi(x) + C$$

gdje je $C$ konstanta koju treba odrediti. Neka je $x = a$, tada je

$$F(a) = \int_a^{a} f(t)\,dt = 0 \, ,$$

i

$$F(a) = \phi(a) + C = 0$$

odakle je

$$C = -\phi(a)$$

i

$$F(x) = \phi(x) - \phi(a).$$

Za $x = b$ je

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a) \tag{2.8.1}$$

Relacija (2.8.1) (Newton-Leibnizova formula) označava da je određeni integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ jednak razlici bilo koje primitivne funkcije $\phi(x)$ date funkcije za vrijednosti $x = b$ i $x = a$. Razlika $\phi(b) - \phi(a)$ se označava sa $\phi(x)\big|_a^b$, znači

$$\int_a^b f(x)\,dx = \phi(x)\Big|_a^b = \phi(b) - \phi(a).$$

Primjeri 1 i 2 određenog integrala po osnovnoj formuli određenog integrala mogu se jednostavno uraditi

1. $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$,
2. $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.

## 2.9. Integracija metodom smjene kod *R*-integrala

**Teorema 2.9.1.** *Neka je funkcija* $f(x)$ *neprekidna na intervalu* $[a,b]$ *i funkcija* $x = \varphi(t)$ *ima neprekidan izvod na intervalu* $[\alpha,\beta]$. *Tada za* $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ *vrijedi relacija*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

***Dokaz.*** Prema osnovnoj formuli diferencijalnog računa je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

odnosno

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt = \phi(\beta) - \phi(\alpha) = F\left[\varphi(\beta)\right] - F\left[\varphi(\alpha)\right] =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

čime je teorema dokazana.

Vidjeli smo da kod neodređenih integrala nakon integracije metodom smjene moramo da vratimo početnu promjenljivu, što kod određenih integrala nije slučaj. Ako vratimo početnu promjenljivu onda u osnovnu formulu integracije uvrštavamo početne granice.

Neka je funkcija $x=\varphi(t)$ injekcija i neka je $g=\varphi^{-1}$. Tada iz $a=\varphi(\alpha)$ i $b=\varphi(\beta)$ dobijamo $\alpha=g(a)$, $\beta=g(b)$ i vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt .$$

***Primjer* 3.** Izračunati $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$.

Smjenom $t=x+1$, ili $x=t-1$ odakle je $dx=dt$, pa dati integral ima oblik

$$\int_1^2 \frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2 .$$

U ovom slučaju smo zadržali novu promjenljivu, a nove granice smo dobili iz $t=0+1=1$, $t=1+1=2$. Ako se vratimo na promjenljivu $x$ imaćemo

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2 .$$

***Primjer* 4.**

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left\|\begin{array}{l} x=a\sin t\Rightarrow dx=a\cos t\\ 0=a\sin t\Rightarrow t=0\\ a=a\sin t\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right\|=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4} .$$

## 2.10. Parcijalna integracija *R*-integrala

**Teorema 2.10.1.** *Neka su $u$ i $v$ diferencijabilne funkcije na intervalu $[a,b]$ i neka na tom intervalu postoje neprekidni izvodi $u'$ i $v'$. Tada vrijedi*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \qquad (2.10.1)$$

***Dokaz.*** Funkcija $u \cdot v$ je primitivna funkcija funkcije $u'v + uv'$, pa je prema osnovnoj teoremi $R$-integrala

$$\int_a^b (uv' + u'v)\,dx = u \cdot v\Big|_a^b,$$

tj.

$$\int_a^b uv'\,dx + \int_a^b u'v\,dx = uv\Big|_a^b$$

odakle slijedi (2.10.1).

***Primjer* 5.** $$\int_1^e x\ln x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 \end{matrix} \right\|.$$

Na osnovu relacije (2.10.1) je

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2}\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right).$$

***Primjer* 6.** $$\int_0^\pi x\sin x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x\,dx \Rightarrow v = \cos x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = x\cos x\Big|_0^\pi + \sin x\Big|_0^\pi =$$

$$= \pi\cos\pi - 0\cos 0 + \sin\pi - \sin 0 = -\pi.$$

## 2.11. Nepravi integral

Pri definisanju određenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ pretpostavljeno je da je funkcija $f(x)$ ograničena na intervalu $[a,b]$, gdje su $a$ i $b$ konačni brojevi. Pojam određenog integrala može se proširiti i na intervale $[a,+\infty\rangle$, $\langle-\infty,a]$, $\langle-\infty,+\infty\rangle$ kao i za slučaj kada je funkcija neograničena u tački $c \in [a,b]$. Ove integrale zovemo nepravi, nesvojstveni, prošireni, generalisani, itd. Ovi nazivi dati su zbog toga što definicija $R$-integrala ne ispunjava novopostavljene uslove.

### 2.11.1 Integrali sa beskonačnim granicama

Neka je funkcija $f(x)$ definisana na intervalu $[a, +\infty\rangle$ i inte-grabilna na intervalu $[a, x]$ za svako $x \in [a, +\infty\rangle$, tj. postoji integral

(2.11.1) $$\int_a^x f(t)\,dt$$

za svako $x \in [a, +\infty\rangle$.

Ako postoji $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(x)\,dx$, tada pišemo

(2.11.2) $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(x)\,dx$$

i kažemo da nesvojstveni (nepravi) integral (2.11.1) konvergira.

Slično se definiše i nesvojstveni (nepravi) integral na intervalu $\langle -\infty, a]$ sa

(2.11.3) $$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{x\to -\infty} \int_x^a f(x)\,dx$$

i nepravi integral na intervalu $\langle -\infty, +\infty\rangle$ sa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{x_1\to -\infty \\ x_2\to +\infty}} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$, ili

(2.11.4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$.

Neka je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$. Tada se nepravi integrali (2.11.2), (2.11.3) i (2.11.4) koji imaju bar jednu beskonačnu grani-cu mogu izraziti u obliku

(2.1.2') $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty}\left[F(x)-F(a)\right] = \lim_{x\to\infty}F(x)-F(a),$$

(2.1.3') $$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty}\left[F(a)-F(x)\right] = F(a)-\lim_{x\to\infty}F(x).$$

(2.1.4') $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx =$$
$$= \lim_{x_1\to\infty}\left[F(c)-F(x)\right] + \lim_{x_2\to\infty}\left[F(x)-F(c)\right] = \lim_{x_2\to\infty}F(x_2) - \lim_{x_1\to\infty}F(x_1).$$

***Primjer* 6.** $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\int_0^{x}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} arc\,tg\,x =$$
$$= \lim_{x\to\infty} arc\,tg\,x - arc\,tg\,0 = \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

***Primjer* 7.** $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} arc\,tg\,x - \lim_{X\to-\infty} arc\,tg\,X = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

***Primjer* 8.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x\,dx = \lim_{x\to\infty}\int_0^{x}\sin x\,dx = \lim_{x\to+\infty}(-\cos x)$, tj. ne postoji jer ne postoji granična vrijednost $-\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$.

***Primjer* 9.** Posmatrajmo integral
$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^n} = \lim_{x\to\infty}\int_a^{x}\frac{dx}{x^n} = \frac{1}{1-n}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n-1}}-\frac{1}{a^{n-1}}\right].$$

Za $n>1$ integral je konvergentan i vrijedi $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{a^{n-1}}$.

Za $n<1$ integral je divergentan i vrijedi $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^n} = +\infty$.

Za $n=1$ je $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln x-\ln a\right] = +\infty$.

**Teorema 2.11.1.** *Neka je* $a>0$ *i neka funkcije* $f(x)$ *i* $g(x)$ *u intervalu* $[a, x\to\infty\rangle$ *ispunjavaju uslove*

1. $0\le f(x)\le g(x)$, $x$ $x_0>a$

2. $f(x)$ *i* $g(x)$ *integrabilne na* $[a,t\rangle$, $0 < t < +\infty$.
*Tada konvergencija*

(2.11.5) $$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

*implicira konvergenciju integrala*

(2.11.6) $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

*i divergencija integrala* (2.11.6) *implicira divergenciju integrala* (2.11.5).

***Dokaz.*** Funkcija $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ je rastuća, što se može jed-nostavno provjeriti, pa je na osnovu teoreme (2.4.5)

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \le \int_a^x g(t)\,dt,$$

što znači da konvergencija integrala (2.11.6) implicira konvergenciju integra-la (2.11.5). Drugi dio teoreme se slično dokazuje.

## 2.11.2. Integral neograničene funkcije

Neka je funkcija $f(x)$ ograničena na intervalu $[a, b-\varepsilon]$, tada pos-toji

(2.11.7) $$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ i neka je funkcija neograničena na intervalu $\langle b-\varepsilon, b]$. Ako postoji konačna i određena granična vrijednost

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \quad (0 < \varepsilon < b-a)$$

tada se piše

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

i kažemo da integral (2.11.7) konvergira ili postoji. Ako limes (2.11.7) ne po-stoji tada za tačku $b$ kažemo da je singularna tačka.

Neka je funkcija $f(x)$ ograničena na intervalu $[a+\varepsilon, b]$ i nije ogra-ničena na intervalu $[a, a+\varepsilon\rangle$, gdje je $0 < \varepsilon < b-a$. Tada se definiše

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

ako integral na desnoj strani prethodne jednakosti postoji.

Ako je funkcija $f(x)$ ograničena na intervalu $[a+\varepsilon_1, b-\varepsilon_2]$ a neograničena na intervalima $[a, a+\varepsilon_1]$ i $[b-\varepsilon_2, b]$ tada integral funkcije $f(x)$ definiše sa

(2.11.8)
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx$$

ako postoji granična vrijednost u relaciji (2.11.8).

Ako je $a<c<b$ tada se relacija (2.11.8) može napisati u obliku

(2.11.9)
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{a+\varepsilon_1}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx$$
.

Neka je funkcija $f(x)$ ograničena u intervalima $[a, c-\varepsilon_1]$ i $[c+\varepsilon_2, b]$ a nije ograničena u intervalu $\langle c-\varepsilon, c+\varepsilon\rangle$, gdje je $a<c<b$ i $\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0$ proizvoljno mali brojevi. Tada se definiše

(2.11.10)
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx$$

pod uslovom da granične vrijednosti postoje.

***Primjer* 10.** Izračunati $\int_0^1 \ln x\,dx$.

***Rješenje.*** Primitivna funkcija funkcije $\ln x$ je $F(x)=x(\ln x-1)$. Funkcija $\ln x$ je neograničena u intervalu $[0,\varepsilon\rangle$, gdje je $\varepsilon>0$ proizvoljno mali broj. Znači

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}[F(1)-F(\varepsilon)] = -1-\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon(\ln\varepsilon-1) = -1$$
.

***Primjer* 11.** $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$. Funkcija $\frac{1}{x\ln x}$ je neograničena u intervalu $[1, 1+\varepsilon\rangle$. Primitivna funkcija date funkcije je $\ln\ln x$.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 1}\left[\ln\ln 2 - \ln\ln\varepsilon\right] = \ln\ln 2 - \lim_{\varepsilon\to 1}\ln\ln\varepsilon = +\infty$$

što znači da je dati integral divergentan.

***Primjer*** **12.** $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$. Funkcija $\frac{1}{x^2}$ je neograničena u intervalu $\langle -\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle$. Primitivna funkcija je $-\frac{1}{x}$.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(-1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \infty$$

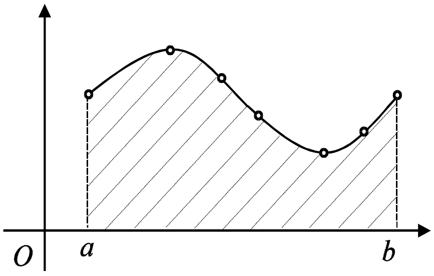
## 2.12. Neke primjene *R*-integrala

### 2.12.1. Izračunavanje površina

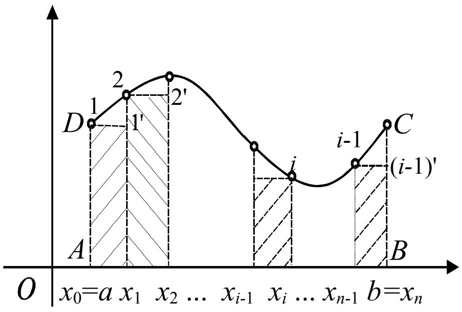
Neka je funkcija $y = f(x)$ nenegativna i ograničena na intervalu $I = [a,b]$. Tada skup tačaka $Q$ ravni $xOy$ Descartesovog koordinatnog sistema za koje je

$$Q = \{(x,y) : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

nazivamo krivolinijski trapez (Sl.2.12.1)




Sl.2.12.1




Sl.2.12.2

To drugim riječima znači da je krivolinijski trapez dio ravni $xOy$ Dekar-tovog koordinatnog sistema koji je ograničen intervalom $I = [a,b]$ ose $Ox$, ordinatama $x = a,\ x = b$ i grafikom funkcije $f(x)$ za $a \le x \le b$.

Za izračunavanje mjernog broja površine krivolinijskog trapeza $Q$, $\mu(Q)$, može se iskoristiti integral u Rimanovom smislu.

Neka je $P$ proizvoljna podjela intervala $I = [a,b]$, sl.2.12.2. Podjela $P$ dijeli interval $I$ na podintervale $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ dužine $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, gdje je $i = 1,2, \dots, n$. Neka je na intervalu $I_i$ minimum, odnosno maksi-mum funkcije $f(x)$, $m_i$ odnosno $M_i$. Dakle, podjela $P$ intervala $[a,b]$ odgovara podjeli krivolinijskog trapeza $Q$ na $Q_i$, $(i = 1,2, \dots, n)$, trapeza čije su osnovice $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Neka je $\mu(p_i)$, odnosno $\mu(P_i)$, mjerni broj površine upisanog odnosno opisanog pravougaonika u krivolinijski tra-pez $Q_i$, $i = 1,2, \dots, n$. Pravougaonici $p_i$ i $P_i$ imaju iste osnovice $\Delta x_i$, pa je

$$\mu(p_i) = m_i \, \Delta x_i, \quad \mu(P_i) = M_i \, \Delta x_i.$$

Tada je suma mjernih brojeva svih upisanih, odnosno opisanih, pravougaoni-ka

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(p_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i = s(P),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(P_i) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i = S(P),$$

gdje su $s(P)$ i $S(P)$ Darbuovi zbirovu funkcije $f(x)$ za datu podjelu $P$ intervala $[a,b]$. Tada je

$$s(P) \le \mu(Q) \le S(P).$$

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $I = [a,b]$, tada je za osnovnu podjelu intervala $[a,b]$ (vidjeti Teoremu 2.1.9)

$$\lim_{\lambda \to 0} s = \lim_{\lambda \to 0} S = \int_a^b f(x)\, dx,$$

odnosno

(2.12.1)
$$\mu(Q) = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx.$$

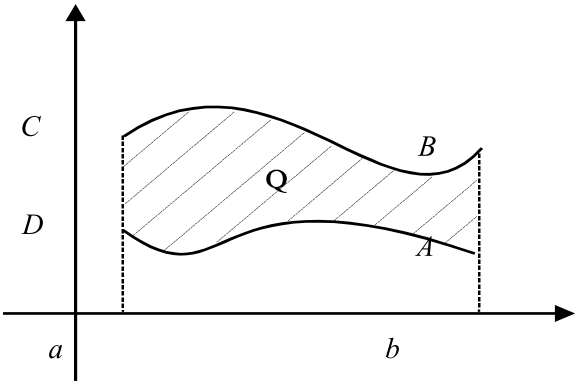
Ako je funkcija $f(x)$ nepozitivna na intervalu $[a,b]$, tada je

(2.12.2)
$$\mu(Q) = -\int_a^b f(x)\, dx = -\int_a^b y\, dx$$

što nije teško provjeriti.

Ako je krivolinijski trapez $Q = ABCD$ (slika 2.12.1) ograničen odozdo i odozgo funkcijama $y_1 = f_1(x) \quad 0$ i $y_2 = f_2(x) \quad 0$ respektivno, na intervalu $[a,b]$ tada je

$$\mu(Q) = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b \left( y_2 - y_1 \right) dx$$




Sl. 2.12.3.

U relaciji (2.12.1) data je formula za izračunavanje mjernog broja površine kada se integriranje vrši po promjenljivoj $x$. Može se desiti da je jednostavni-je integraliti po promjenljivoj $y$ i tada vrijedi

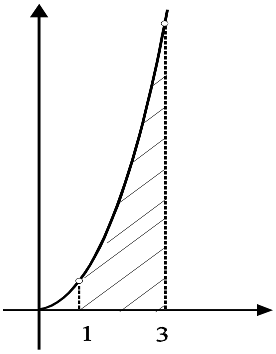
$$\mu(Q) = \int_c^d x\,dy ,$$

ili

$$\mu(Q) = \int_c^d \varphi(y)\,dy .$$

***Primjer* 13.** Izračunati mjerni broj površine $Q$ ograničene grafikom funkcije $y = x^2$, $x$-osom, $x = 1$ i $x = 3$. Integriranje vršiti po promjenljivoj $x$.

***Rješenje.***



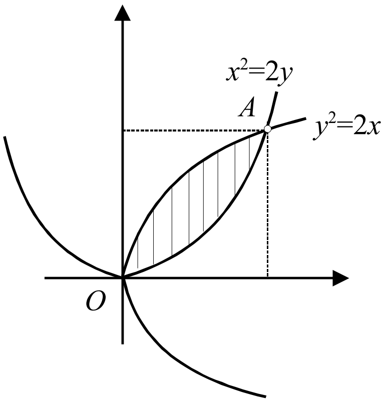

$$\mu(Q) = P = \int_1^3 x^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} .$$

Sl. 2.12.4.

***Primjer*** **14.** Izračunati mjerni broj površine koju obrazuju grafici funkcija $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$. Integriranje vršiti po promjenljivoj *x*.

***Rješenje.*** Grafici datih funkcija i njihove zajedničke tačke su date na Sl.2.12.5.




Sl. 2.12.5.

Zajedničke tačke, koje su rješenje sis-tema jednačina

$$y^2 = 2x \wedge x^2 = 2y$$

su: $O(0{,}0)$ i $A(2{,}2)$.

$$P = \int_0^2 \sqrt{2x}\,dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$P = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$P = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Formula (2.12.1) se može primjeniti i u slučaju da je površina ogra-ničena grafikom funkcije date u parametarskom obliku.

Neka je $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ i $t_1 < t < t_2$. Tada je $dx = \varphi'(t)\,dt$, pa je

$$P = \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt \tag{2.12.3}$$

***Primjer*** **15.** Izračunati mjerni broj površine omeđene sa

$x = r\sin t$, $y = r\cos t$.

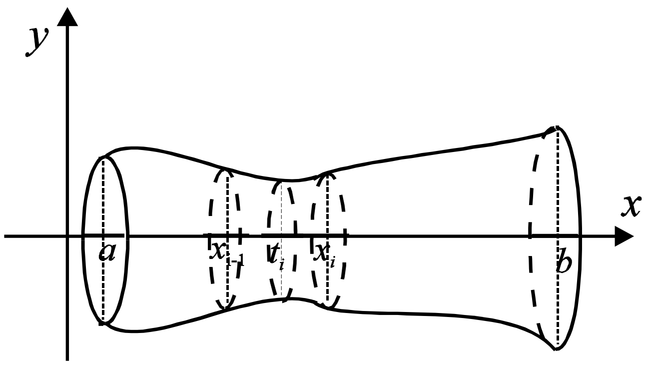
***Rješenje.*** Grafik date funkcije je kružnica poluprečnika *r*, čiji je centar tačka $O(0{,}0)$. Neka je $P_1$ mjerni broj dijela površine kružnice koji se nalazi u prvom kvadrantu koordinatnog sistema. Tada je

$$P = 4P_1 = \int_0^1 y\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos t \cdot r\cos t\,dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt$$

$$P = 4r^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = r^2\pi.$$

## 2.12.2. Izračunavanje zapremine tijela

Neka je u trodimenzionalnom prostoru sa Dekartovim koordinatama $x, y, z$ zadano geometrijsko tijelo $V$. Presijecanjem ovog tijela ravninama koje su ortogonalne na osu $Ox$ dobićemo paralelne presjeke, tj. paralelne površi (Sl.2.12.6)




Sl. 2.12.6.

Mjerni brojevi površina tih presjeka je funkcija argumenta $x$, označimo je sa $\mu P(x)$, ili sa $P(x)$. Neka su $x = a$ i $x = b$ jednačine ravni između kojih se nalazi tijelo $V$, s tim da $x = a$ , $x = b$ i tijelo $V$ imaju zajedničkih tačaka.

Interval $I = [a, b]$ podijelimo tačkama

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

na proizvoljan način. Neka je $t_i$ proizvoljna tačka iz intervala $[x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1,2, \dots ,n)$. Tada je

$$P(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

mjerni broj zapremine cilindra čija je osnovica $P(t_i)$ i visina $x_i - x_{i-1}$, koga zovemo elementarni cilindar. Zbir svih mjernih brojeva zapremina elementar-nih cilindara za datu podjelu intervala $[a,b]$ i izbor tačke $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ je

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} P(t_i)(x_i - x_{i-1}),$$

što predstavlja integralnu sumu funkcije $P(x)$ za datu podjelu i izbor tačke $t_i$. Neka $n \to \infty$ tako da data podjela bude osnovna, tada se sa $\lim\limits_{\lambda \to 0} \mu$ defi-niše mjerni broj zapremine tijela $V$, ako taj limes postoji. Dakle

$$\mu(V) = \int_a^b P(x)\, dx.$$

Neka je tijelo $V$ nastalo rotacijom površi ograničene grafikom funkci-je $y = f(x)$ na intervalu $[a,b]$, $x = a$, $x = b$ i $x$-osom oko $x$-ose za pun ugao. Tada je površina $P(x)$ kružnica poluprečnika $y = f(x)$, čiji je mje-rni broj površine $\pi y^2$, pa će relacija (2.12.3) glasiti

$$\mu(V) = \pi\int_a^b y^2\, dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx \qquad (2.12.4)$$

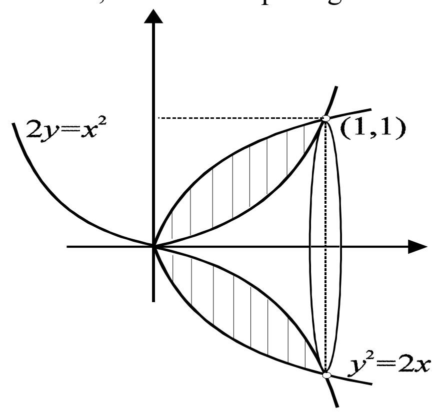
***Primjer* 16.** Napisati formulu za izračunavanje zapremine lopte.

***Rješenje.*** Lopta poluprečnika $r$ može se dobiti rotacijom kružnog luka $x^2 + y^2 = r^2$, $y \quad 0$, oko $x$-ose za pun ugao. tada je prema (2.12.4)

$$V = \pi\int_{-r}^{r} y^2\, dx = \pi\int_{-r}^{r}\left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi\int_0^r\left(r^2 - x^2\right) dx$$

$$V = 2\pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^r = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

***Primjer* 17.** Izračunati zapreminu tijela koja nastaje rotacijom površi ograni-čene sa $x^2 = 2y$, $y^2 = 2x$ za pun ugao oko $x$-ose.



Sl.2.12.7.

***Rješenje.***

$$V = \pi\int_0^1\left(2x - \frac{x^4}{4}\right) dx$$

$$V = \pi\left(x^2 - \frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{19\pi}{20}.$$

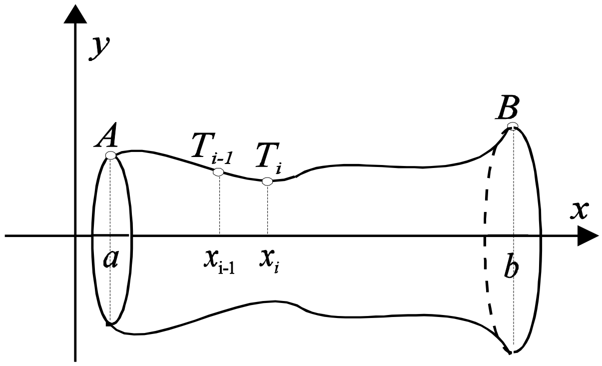
## 2.12.3. Izračunavanje površine rotacionog tijela

Neka je funkcija $y = f(x)$ neprekidna na intervalu $I = [a,b]$. Ako se grafik te funkcije rotira za pun ugao oko $x$-ose, tada će on opisati neku površ $P$. Razmotrimo mogućnost izračunavanja mjernog broja površine te površi, $\mu(P)$.

Interval $[a,b]$ podijelimo tačkama

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Neka su $A = T_0, T_1, \dots, T_{i-1}, T_i, \dots, T_n = B$ tačke grafa funkcije $f(x)$ koje odgovaraju tačkama $x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n$, respektivno (Sl.2.12.8).




Sl.2.12.8.

Pri rotaciji poligonalne linije $A = T_0, T_1, \dots, T_{i-1}, T_i, \dots, T_n = B$ oko $x$-ose za pun ugao nastaje površ sastavljena od omotača zarubljenih kupa. Mjerni broj površine površi koju opisuje duž $T_{i-1}, T_i = l_i$ neka je $\mu(P_i)\ \ i = 1, 2, \dots, n$. Tada je

$$\mu(P_i) = 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right]^2}\ .$$

Formirajmo sumu

$$\mu(P^*) = \sum_{l=1}^{n} \mu(P(l)) = 2\pi \sum_{l=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right]^2}\ .$$

Na osnovu Lagranžove teoreme i relacije ( ) vrijedi

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i)(x_i - x_{i-1}),\quad t_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$$

na osnovu čega se prethodna jednakost može napisati u obliku

$$\mu(P^*) = \sum_{l=1}^{n} \mu(P(l)) = 2\pi \sum_{l=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{1 + \left[f(t_i)\right]^2}\ (x_i - x_{i-1}),$$

$t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, ili

$$\mu(P^*) = 2\pi \sum_{l=1}^{n} \left[ \frac{f(x_{l-1}) - f(t_l) + f(x_i) - f(t_i)}{2} + f(t_l) \right] \cdot \sqrt{1 + f'^2}\ \Delta x_i =$$

$$= 2\pi \sum_{l=1}^{n} f(t_i) \sqrt{1 + f'^2(t_i)}\ \Delta x_i + \pi \sum_{l=1}^{n} \left[f(x_{l-1}) - f(t_i) + f(x_i) - f(t_l)\right] \sqrt{1 + f'^2}\ \Delta x_i\ .$$

Prva suma prethodne jednakosti predstavlja integralnu sumu funkcije

$$f(t) \sqrt{1 + \left[f'(t)\right]^2}$$

za datu podjelu na intervalu $[a, b]$. Može se dokazati da druga suma teži nuli kada $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, pa je

$$\lim_{\lambda \to 0} \mu(P^*) = \mu(P) = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx\ .$$

## 2.13. Zadaci za vježbu

**1.** Po definiciji $R$-integrala naći:

a) $\int\limits_a^b e^x\,dx$, b) $\int\limits_0^{10} 2^x\,dx$.

**2.** Primjenom Njutn-Lajbnicove formule izračunati:

a) $\int\limits_0^1 x^2\,dx$, b) $\int\limits_a^b e^x\,dx$, c) $\int\limits_0^{10} 2^x\,dx$,

d) $\int\limits_1^2 x(3-x)\,dx$, e) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$, f) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$.

**3.** Metodom smjene promjenljivih izračunati:

a) $\int\limits_1^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$, b) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$,

c) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^{-x}-e^x}}\,dx$, d) $\int\limits_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$,

e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$, f) $\int\limits_0^{\pi} \sin^6\frac{x}{2}\,dx$.

**4.** Metodom parcijalne integracije izračunati:

a) $\int\limits_1^{e-1} \ln(x+1)\,dx$, b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$,

c) $\int\limits_1^2 x e^x\,dx$, d) $\int\limits_0^1 arc\,tg\sqrt{x}\,dx$.

**5.** Izračunati površinu figura ograničenih linijama:

a) $y=\frac{1}{x^2};\ y=x,\ x=0,\ x=3$.

b) $y^2=2x+1;\ x-y-1=0$.

c) $y=\sqrt{x};\ y=x^2$.

**6.** Izračunati:

a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, b) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$,

c) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, d) $\int_{1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$,

**V GLAVA**

# FUNKCIJE VIŠE PROMJENLJIVIH

## 1. Diferencijalni račun funkcije više promjenljivih

### 1.1. Osnovni pojmovi funkcija više promjenljivih

Za veličinu *u* se kaže da je funkcija od $x_1, x_2, \dots, x_n$ ako svakom skupu vrijednosti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ iz određenog skupa $D \subset \boldsymbol{R}^n$ po nekom zakonu *f*, odgovara samo jedna vrijednost $u \in \boldsymbol{R}$. To se označava sa

(1.1) $$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

i čita "*u* je funkcija od $x_1, x_2, \dots, x_n$". Vrijednosti $x_1, x_2, \dots, x_n$ su neza-visne promjenjive ili argumenti ili varijable funkcije *u*. Za funkciju *u* kaže-mo da je funkcija od *n* promjenjivih ili varijabli.

Ako svakoj tački $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nekog skupa tačaka *D* odgovara po propisu *f* neka vrijednost *u*, tada kažemo da je funkcija *u* zadana na skupu *D*. Skup *D* nazivamo oblast definisanosti ili domena funkcije *f* i ubuduće ćemo je označavati sa $D(f)$. Skup svih vrijednosti *u* je kodome-na, $V(f)$, funkcije *f*.

Zbog jednostavnosti izlaganja teorije o funkcijama sa *n*-nezavisnih promjenjivih mi ćemo ubuduće posmatrati uglavnom funkcije sa dvije nezavisne promjenjive, tj. funkciju

$$u = f(x_1, x_2)$$

koju ćemo označiti sa

(1.2) $$z = f(x, y),$$

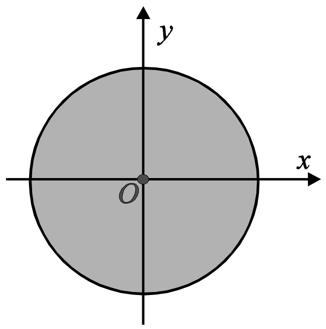
gdje $x_1$ zamjenjujem sa $x$, a $x_2$ sa $y$.

Funkcija $z = f(x_1, x_2)$, ako se radi o realnoj funkciji realnih pro-mjenljivih, za domenu $(D(f))$ ima skup uređenih parova $(x, y)$ čiji su ele- menti realni brojevi. Skup $V(f)$ je skup svih pridruženih vrijednosti $z = f(x, y)$, gdje je $z \in \boldsymbol{R}$.

***Primjer* 1.1.** Odrediti domenu i kodomenu funkcije

$$z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}.$$

***Rješenje.*** Pošto je $z$ realna funkcija realnih promjenjivih $x$ i $y$ to je funkcija definisana za $1 - (x^2 + y^2) \quad 0$, odnosno $x^2 + y^2 \leq 1$.




Sl. 1.1.

Znači domena funkcije je skup svih tačaka $(x,y)$ za koje je $x^2 + y^2 \leq 1$. Ta oblast je krug sa centrom u koor- dinatnom početku i poluprečnika je- dan. Kodomena funkcije je skup

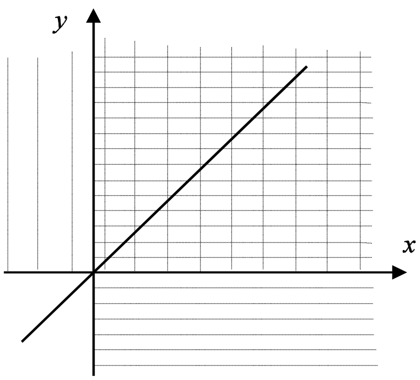
$$V(f) = \{z : 0 \leq z \leq 1\}.$$

***Primjer* 1.2.** Odrediti domenu funkcije

$$z = \frac{1}{x - y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

**Rješenje.** U ovom slučaju domenu određujemo iz uslova

$$x - y \neq 0; \; x \quad 0, \; y \quad 0.$$



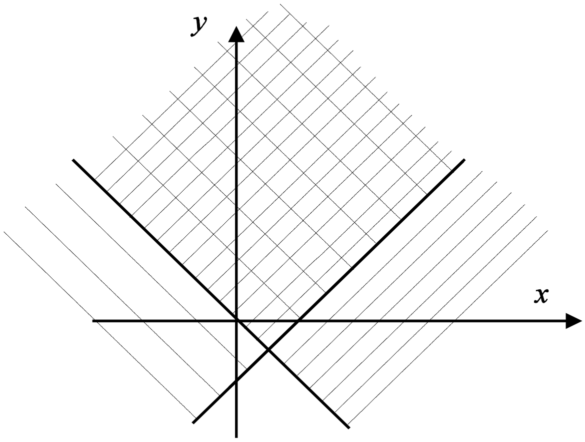

Znači domena date funkcije je skup svih tačaka iz prvog kvadranta Eukli-dove ravni uključujući i $x$-osu za $x > 0$ i $y$-osu za $y > 0$ i bez tačaka $x = y$.

Sl. 1.2.

***Primjer* 1.3.** Odrediti domenu funkcije

$$z = \sqrt{x + y} + \sqrt{1 - x + y}.$$

***Rješenje.*** Iz $x+y \quad 0$, $1-x+y \quad 0$ odnosno $y \quad -x$, $y \quad x-1$ dobijamo oblast definisanosti koja je predstavljena u Euklidovoj ravni (Sl.1.3.).




Sl. 1.3.

Ranije smo razmatrali interval skupa realnih brojeva (I). Naime, skup

$$I_1 = \langle a,b \rangle = \{ x \mid a < x < b \}$$

se naziva interval. To je na brojnoj pravoj skup svih tačaka između tačaka $a$ i $b$, ne uključujući i tačke $a$ i $b$. Ovaj interval nazivamo i jednodimenzionalni interval.

Dvodimenzionalni interval ili dvodimenzionalna oblast se definiše sa

(1.3) $$I_2 = \{ (x,y) \mid x,y \in \boldsymbol{R} \wedge (a < x < b; c < y < d) \}$$

i to je u Euklidovoj ravni skup svih tačaka u unutrašnjosti pravougaonika čije stranice imaju jednačine

(1.4) $$x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d \, .$$

Interval definisan relacijom (1.3) nazivamo otvoreni. Ako "<" zamijenimo sa "≤" tada za interval kažemo da je zatvoren. Stranice pravougaonika (1.3) nazivamo međe intervala $I_2$.

Dvodimenzionalna oblast $I_2$ se može definisati i na druge načine. Naprimjer, oblast $I_2$ može biti i skup svih tačaka $\{ (x,y) : x,y \in \boldsymbol{R} \}$ takav da vrijedi

(1.5) $$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 \quad (\text{ili } \le r^2)$$

i predstavlja skup svih unutrašnjih tačaka kružnice sa centrom $(a,b)$ i polu- prečnika $r$.

Nejednakost (1.5) nazivamo i $r^2$ okolina tačake $(a,b)$. Ako je $r^2$ proizvoljno mala veličina koju označavamo sa $\varepsilon^2$, tada je $\varepsilon,\ \varepsilon > 0$, okolina tačke $(a,b)$, skup svih tačaka $(x,y) \in \boldsymbol{R}$ za koje vrijedi

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\varepsilon .$$

Neka su $x_i$ i $y_i$ opšti članovi nizova, tada se $M_i\left(x_i,y_i\right)$ naziva opšti član dvodimenzionalnog niza ili niza tačaka dvodimenzionalnog prostora. Osobine nizova prenose se na osobine nizova tačaka u $\boldsymbol{R}^2$.

Tako, naprimjer, niz tačaka $\left\{M_i\left(x_i,y_i\right)\right\}$ ima graničnu vrijednost u tački $A(a,b)$ ako vrijedi

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\boldsymbol{N}(\varepsilon)\right)\left(n>\boldsymbol{N}(\varepsilon)\right)\Rightarrow\overline{M_n A}<\varepsilon$$

gdje je $\overline{M_n A}$ rastojanje tačke $M_n$ od tačke $A$, što se piše

$$\lim_{n\to\infty}M_n=A \quad \text{ili} \quad M_n\to A \quad \text{kada} \quad n\to\infty .$$

Tačka $M_n\left(x_n,y_n\right)$ težiće tački $A(a,b)$ ako je

$$|x_n-a|<\varepsilon \quad \text{i} \quad |y_n-b|<\varepsilon \quad \text{za svako} \quad n>N(\varepsilon)$$

i tada je

$$|M_n A|=\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}<\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2}=\varepsilon\sqrt{2} .$$

## 1.2. Granična vrijednost funkcije

**Definicija 1.1.** *Za funkciju* $z=f(x,y)$ *definisanu u okolini tačke* $A(a,b)$ *kažemo da teži ili konvergira graničnoj vrijednosti l kada* $(x,y)$ *na proizvoljan način, teži tački* $A(a,b)$ *ako za svako* $\varepsilon>0$ *postoji broj* $\delta(\varepsilon)$ *takav da vrijedi*

$$|f(x,y)-l|<\varepsilon \quad \textit{za svako} \quad 0<|x-a|<\delta(\varepsilon),\ 0<|y-b|<\delta(\varepsilon)$$

*što se piše*

(1.6) $$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=l \quad \text{ili} \quad f(x,y)\to l \quad \text{kada} \quad x\to a,\ y\to b .$$

U relaciji (1.6) pretpostavljamo da $x$ i $y$ teže istovremeno svojim graničnim vrijednostima. Ako $x$ i $y$ uzastopno teže svojim graničnim vri-jednostima tada govorimo o uzastopnom ili iteriranim graničnim vrijed-nostima ili limesima. Jasno je da prvo može $y$ težiti $b$ a potom $x$ ka $a$ i obrnuto, i ti uzastopni limesi se označavaju sa

(1.7) $$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b}f(x,y)\right] \quad \text{i} \quad \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a}f(x,y)\right],$$

respektivno.

Pojam granične vrijednosti funkcije $z=f(x,y)$ u tački $A(a,b)$, date u definiciji 11, može se dati i na sljedeći način.

Neka je funkcija $z = f(x,y)$ definisana u okolini $I_2$ tačke $A(a,b)$ i neka je $(x_n, y_n)$, $n = 1,2, \dots$ niz uređenih dvojki nezavisno promjenjivih $x$ i $y$ u oblasti $I_2$ i neka je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b .$$

Nizu $(x_n, y_n)$ odgovaraće niz vrijednosti funkcije $z_n = f(x_n, y_n)$, $n = 1,2,\dots$, tj. niz

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots . \tag{1.8}$$

Neka je niz (1.8) konvergentan i neka je

$$\lim_{n\to\infty} z_n = l ,$$

za *svaki* par uređenih nizova $\{(x_n, y_n)\}$ za koji je

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (a,b)$$

tj. ako je

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x_n, y_n) = l .$$

Tada se kaže da funkcija $z = f(x,y)$ ima graničnu vrijednost $l$ u tački $A(a,b)$.

***Primjer* 1.4.** Pokazati da ne postoji $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ i naći uzastopne limese.

***Rješenje.*** Posmatrajmo nizove $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ i $\left\{\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ koji teže tački $(0,0)$ kada $n \to \infty$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{5}$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) .$$

To znači da ne postoji granična vrijednost izraza $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
Uzastopni limesi su:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1 .$$

***Primjer* 1.5.** Funkcija

$$z=f(x,y)=\frac{x\,y}{x^2+y^2}$$

ima uzastopne granične vrijednosti kada $x\to 0,\ y\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x\,y}{x^2+y^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2}=0 ,$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x\,y}{x^2+y^2}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{0\cdot y}{y^2}=0 .$$

Znači, funkcija $f(x,y)$ ima jednake uzastopne granične vrijednosti u tački (0,0). Ako se uzmu nizovi $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$ i $\left\{\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$ koji teže tački (0,0) tada se može provjeriti da ne postoji granična vrijednost u tački (0,0).

## 1.3. Neprekidnost funkcije

**Definicija 1.2.** *Za funkciju* $z=f(x,y)$ *definisanu u oblasti* $I_2$ *kažemo da je neprekidna u tački* $A(a,b)\in I_2$ *ako je*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=f(a,b) . \tag{1.9}$$

Ako nije zadovoljena jednakost u relaciji (1.9) za funkciju $z=f(x,y)$ kaže-mo da je u tački $A(a,b)\in I_2$ prekidna ili da je tačka $A(a,b)$ tačka prekida funkcije $z=f(x,y)$ .

Ako u relaciji (1.9) *x* i *y* zamijenimo sa $x=a+h$, $y=b+k$, tada je

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f(a+h,b+k)$$

i

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f(a+h,b+k) = f(a,b) \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \left[ f(a+h,b+k) - f(a,b) \right] = 0 \tag{1.10}$$

Ako priraštaj funkcije $z = f(x,y)$, koji odgovara priraštaju argumenata $x$ i $y$ za $h$ i $k$, respektivno, označimo sa $\Delta z$ tada se relacija (1.10) može izraziti u obliku

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \Delta z = 0 \tag{1.11}$$

Kao kod funkcija sa jednom promjenjivom i ovdje vrijede tvrdnje:

1. Algebarski zbir konačnog broja neprekidnih funkcija na oblasti $I_2$ je neprekidna funkcija u toj oblasti.

2. Proizvod konačnog broja neprekidnih funkcija u oblasti $I_2$ je nep-rekidna funkcija u toj oblasti.

3. Količnik dvije neprekidne funkcije u oblasti $I_2$, pod uslovom da je imenilac različit od nule, je neprekidna funkcija u toj oblasti.

***Primjer* 6.** Funkcija

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & za \;\; x \neq 0, \;\; y \neq 0, \\ 0 & , \; za \;\; x = y = 0. \end{cases}$$

je neprekidna u tački (0,0), jer je

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0)$$

***Primjer* 7.** Funkcija

$$z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

je prekidna na pravoj $y = x$, jer na toj pravoj nije definisana.

## 1.4. Parcijalni izvodi

### 1.4.1. Definicija parcijalnog izvoda

Neka je funkcija $z = f(x,y) \in \boldsymbol{R}^3$ definisana i neprekidna u oblasti $I_2$. Tada su izrazi

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{\Delta x}, \qquad \begin{array}{l} y = const. \\ (x+h,y) \in I_2 \end{array}$$

odnosno

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta y} = \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{\Delta y}, \qquad \begin{array}{l} x = const. \\ (x,y+k) \in I_2 \end{array}$$

relativni priraštaji funkcije $z$ po $x$ odnosno $y$, respektivno, u tački $M(x,y) \in I_2$.

Neka je $y = c$ (konstanta). Tada je funkcija
$z = f(x,y) = f(x,c) = \varphi(x)$
funkcija jedne promjenjive, $x$. Prema definiciji prvog izvoda je

(1.12) $$\varphi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \quad y = c.$$

Izvod (1.12) nazivamo prvi parcijalni izvod funkcije $z = f(x,y)$ po $x$ i označavamo sa

$$f'_x(x,y); \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}; \ \frac{\partial z}{\partial x}$$

što se čita:"ef prim od $x, y$ po $x$", "delta ef od $x, y$ po delta $x$", "delta $z$ po delta $x$".

Prema prethodnom je

(1.13) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \quad y = const.$$

Na isti način, smatrajući $x = c$ definišemo i parcijalne izvode date funkcije $z = f(x,y)$ po promjenjivoj $y$. Tada je

(1.14) $$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}, \quad x = const.$$

***Primjer* 1.8.** Naći parcijalne izvode funkcije

$$z = f(x,y) = x^2 \cdot e^{y^2+x} + xy^2 + y.$$

***Rješenje.*** Pretpostavimo da je $y$ konstantno. Tada je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot e^{y^2+x} + x^2 e^{y^2+x} + y^2 = x(2+x)e^{y^2+x} + y^2.$$

Ako pretpostavimo da je $x$ konstanta, tada je

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y e^{y^2+x} + 2xy + 1.$$

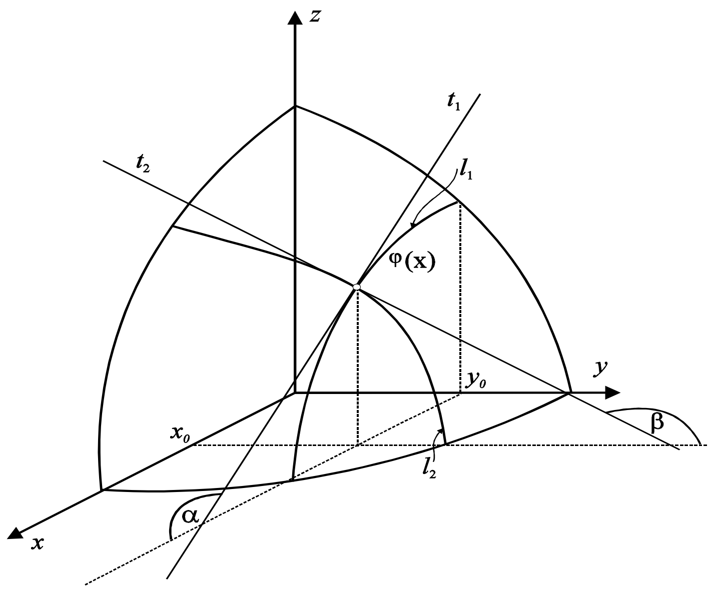
***Primjer* 1.9.** Parcijalni izvodi funkcije $z = x\ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)$ su:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right) + x\frac{1}{x^2 + y^2 + 1}\cdot 2x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{1}{x^2 + y^2 + 1}\cdot 2y = \frac{2xy}{x^2 + y^2 + 1}.$$

## 1.4.2. Geometrijsko značenje parcijalnih izvoda

Funkcija $z = f(x,y)$ je jednačina površi u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu $Oxyz$ (Sl.1.4)




Sl. 1.4.

Pri definisanju parcijalnog izvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ pretpostavili smo da je $y$ constanta, i neka je $y = y_0$. U trodimenzionalnom Dekartovom koordinat-nom sistemu funkcija $y = y_0$ je jednačine ravni paralelne koordinatnoj ravni $xOz$. Presjek površi datih sa $z = f(x,y)$ i $y = y_0$ je kriva, označimo je sa $l_1$. Tangenta $t_1$ krive $l_1$ u tački $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$ neka sa pozitivnim smjerom $x$-ose obrazuje ugao $\alpha$. Tada je prema geometrijskom značenju izvoda fun-kcije sa jednom promjenjivom $\frac{\partial z\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} = tg\alpha$.

Na isti način slijedi da je $\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y} = tg\,\beta$, gdje je $\beta$ ugao koga obrazuju tangenta $t_2$, krive $l_2$ (date sa $z = f(x,y)$, $x = x_0$) u tački $M(x_0,y_0,z_0)$ sa pozitivnim smjerom ose $Oy$.

***Primjer* 1.10.** Neka je data funkcija $z = 2x^2 + y^2$ i tačka $M\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2},z\right)$ sa površi čija je jednačina data funkcija. Izračunati uglove koje obrazuju tangente date površi u datoj tački koje su paralelne ravninama $xOz$ i $yOz$.

***Rješenje.*** Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, to je

$$\frac{\partial z\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\partial x} = 4\cdot\frac{1}{4} = 1 \; ; \quad \frac{\partial z\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\partial y} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \; ,$$

što znači, na osnovu prethodnog objašnjenja, da je

$$tg\alpha = 1 \text{ odnosno } \alpha = \frac{\pi}{4} \; ; \; tg\,\beta = \sqrt{3} \text{, odnosno } \beta = \frac{\pi}{3} \, .$$

## 1.4.3. Pojam diferencijabilnosti funkcije

**Definicija 1.3.** *Za funkciju* $z = f(x,y)$ *definisanu u oblasti* $I_2$ *kažemo da je diferencijabilna u tački* $M(x,y) \in I_2$ *ako se njen priraštaj u toj tački može izraziti u obliku*

$$\Delta z = A_1\,\Delta x + A_2\,\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y \, , \tag{1.15}$$

*gdje su* $A_1$ *i* $A_2$ *konstantni brojevi a* $\alpha$ *i* $\beta$ *beskonačno male funkcije kada* $\Delta x$ *i* $\Delta y$ *teže nuli i jednake nuli ako je* $\Delta x = \Delta y = 0$.

Razmotrimo funkciju

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

koja je beskonačno mala kada $\Delta x,\ \Delta y \to 0$, a jednaka nuli ako i samo ako je $\Delta x = \Delta y = 0$.

Za $\rho \neq 0$ je

$$\frac{|\Delta x|}{\rho} \le 1 \; ; \quad \frac{|\Delta y|}{\rho} \le 1$$

što znači da je

$$|\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y|\le|\alpha|\cdot|\Delta x|+|\beta|\cdot|\Delta y|=\left(|\alpha|\cdot\frac{|\Delta x|}{\rho}+\beta\cdot\frac{|\Delta y|}{\rho}\right)\rho\le$$

$$\le\left(|\alpha|+|\beta|\right)\rho=\vartheta(\rho),$$

gdje $\vartheta(\rho)$ znači da, veličina $\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y$ kada $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$, je beskonačno mala funkcija višeg reda od $\rho$. Na osnovu toga slijedi da se us-lov (1.15) može izraziti u obliku

(1.16) $$\Delta z=A_1\,\Delta x+A_2\,\Delta y+\vartheta(\rho).$$

Da bismo dokazali da su uslovi (1.15) i (1.16) ekvivalentni dokažimo da iz uslova (1.16) slijedi uslov (1.15).

Izrazimo $\vartheta(\rho)$ u obliku

$$\vartheta(\rho)=\frac{\vartheta(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho^2}{\rho}=\frac{\vartheta(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x^2+\Delta y^2}{\rho}=$$

$$=\left(\frac{\vartheta(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x}{\rho}\right)\cdot\Delta x+\left(\frac{\vartheta(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta y}{\rho}\right)\cdot\Delta y.$$

Neka je $\frac{\vartheta(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x}{\rho}=\alpha$ ; $\frac{\vartheta(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta y}{\rho}=\beta$. Tada je

$$\vartheta(\rho)=\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y,$$

gdje $\alpha,\beta\to 0$ kada $\rho\to 0$.

**Teorema 1.1.** *Neka je funkcija* $z=f(x,y)$ *diferencijabilna u tački* $M(x_1,y_1)$. *Tada u toj tački postoje parcijalni izvodi* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}$.

***Dokaz.*** Po pretpostavci teoreme funkcija $z=f(x,y)$ je diferencija-bilna u tački $M(x_1,y_1)$ i tada vrijedi relacija (1.15). Iz te relacije za parci-jalni priraštaj $\Delta_x z$ vrijedi jednakost

(1.17) $$\Delta_x z=A_1\,\Delta x+\alpha\,\Delta x$$

gdje je $A_1$ konstanta, a $\alpha\to 0$ kada $\Delta x\to 0\,(\Delta x\ne 0)$. Dijeljenjem jednakosti (1.17) sa $\Delta x\ne 0$ dobijamo

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A_1+\alpha,$$

odnosno

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A_1.$$

Na isti način dokazujemo jednakost

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = A_2 .$$

Na osnovu teoreme 1.1 neposredno slijedi da se relacija (1.16), za diferenci-jabilnu funkciju $z = f(x,y)$ u tački $M(x,y)$ može izraziti u obliku

(1.18) $$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \vartheta(\rho)$$ , ili

(1.19) $$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y .$$

**Teorema 2.** *Neka funkcija* $z = f(x,y)$ *ima parcijalne izvode po* $x$ *i po* $y$ *u okolini tačke* $M(x_1, y_1)$ *i neka su ti izvodi neprekidni u toj tački. Tada je funkcija* $z = f(x,y)$ *diferencijabilna u tački* $M(x_1, y_1)$.

## 1.4.4. Parcijalni izvodi složene funkcije

U ovom dijelu razmatraćemo parcijalne izvode funkcije $z = f(u,v)$ gdje je $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, ili $u = \varphi(x,y)$ i $v = \psi(x,y)$.

**Teorema 1.3.** *Neka funkcija* $z = f(x,y)$ *ima neprekidne parcijalne izvode* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *u oblasti* $I_2$. *Neka funkcije* $x$ *i* $y$, *promjenjive* $t$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ *i* $(\varphi(t), \psi(t)) \in I_2$ *imaju izvode* $\varphi_t'(t)$ *i* $\psi_t'(t)$. *Tada vrijedi*

(1.20) $$f_t'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} .$$

***Dokaz.*** Izrazimo priraštaj funkcije $z = f(x,y)$ u obliku (1.19)

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y ,$$

gdje $\alpha, \beta \to 0$ kada $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$. Podijelimo prethodnu jednakost sa $\Delta t \neq 0$

(1.21) $$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t} .$$

Neka $\Delta t \to 0$. Tada i $\Delta x, \Delta y \to 0$ s obzirom da su $x$ i $y$ neprekidne funkcije od $t$. Budući da i $\alpha, \beta \to 0$, to

$$\alpha\frac{\Delta x}{\Delta t}\to 0, \quad \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}\to 0.$$

Ako u relaciji (1.21) $\Delta t\to 0$, vodeći računa da je

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}, \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt},$$

dobićemo

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Time je teorema dokazana.

***Primjer* 1.11.** Za funkciju $z=f(x,y)=x\sin y$, gdje je $x=t^2+1$, $y=3t$ je

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\sin y=\sin 3t,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x\sin y)=x\cos y=\left(t^2+1\right)\cos 3t,$$

$$\frac{dx}{dt}=2t, \quad \frac{dy}{dt}=3.$$

Znači

$$\frac{df(x,y)}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=2t\sin 3t+3\left(t^2+1\right)\cos 3t.$$

Neka je funkcija $z=f(u,v)$ diferencijabilna funkcija po $u$ i $v$ i neka su funkcije $u=\varphi(x,y),\ v=\psi(x,y)$ diferencijabilne funkcije po $x$ i $y$.

Ako u funkcijama $u=\varphi(x,y)$ i $v=\psi(x,y)$ shvatimo $y$ kao konstantu, ta-da će složena funkcija $f(u,v)$ biti funkcija samo promjenjive $x$ preko $u$ i $v$ i vrijedi

(1.22) $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \quad z=f(u,v), \quad u=\varphi(x,y),\ v=\psi(x,y).$$

Na isti način se zaključuje, ako se shvati da je $x$ konstanta, da je

(1.23) $$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

***Primjer* 1.12.** Naći parcijalne izvode funkcije

$$z=f(u,v)=ue^{3v}, \quad u=x^2+y^2, \quad v=x\sin y.$$

***Rješenje*.** Kako je

$$\frac{\partial z}{\partial u}=e^{3v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}=3ue^{3v}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}=2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \;, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \sin y \;, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x\cos y \;,$$

to je prema relaciji (1.22), vodeći računa o vrijednostima $u$ i $v$, dobijamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = e^{3x\sin y} \cdot 2x + 3\left(x^2 + y^2\right) e^{3x\sin y} \cdot \sin y =$$

$$= \left[2x + 3\left(x^2 + y^2\right)\sin y\right] e^{3x\sin y} \;,$$

odnosno prema relaciji (1.23) slijedi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{3x\sin y} \cdot 2y + 3\left(x^2 + y^2\right) e^{3x\sin y} \cdot x\cos y =$$

$$= \left[2y + 3x\left(x^2 + y^2\right)\cos y\right] e^{3x\sin y} \;.$$

**Teorema 1.4.** *Neka je funkcija* $z = f(x,y)$ *definisana u oblasti* $I_2$ *i homogena stepena homogenosti* $p$ *i diferencijabilna u oblasti* $D \in I_2$. *Ta-da za svako* $(x,y) \in D$ *vrijedi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y = p \cdot f \;.$$

***Dokaz.*** Prije nego počnemo dokaz teoreme napomenimo da je funk-cija $z = f(x,y)$ homogena u oblasti $D$ sa stepenom homogenosti $p$ ako je za svaku tačku $M(x,y) \in D$ i $N(tx,ty)$ za bilo koje $t \in \boldsymbol{R}$

$$f(tx,ty) = t^p f(x,y) \;.$$

Neka je $M(x',y')$ proizvoljna tačka oblasti $D$. Složena funkcija $z = f(x,y)$ gdje je $x = t\,x'$, $y = t\,y'$ odnosno funkcija $z = f(tx',ty')$ za $t = 1$ ima izvod po $t$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y' \;. \tag{1.24}$$

Iz

$$z = f(x,y) = f(tx',ty') = t^p f(x,y)$$

slijedi

$$\frac{\partial z}{\partial t} = p\,t^{p-1} f(x,y) \;,$$

i za $t = 1$ je

$$\frac{\partial z}{\partial t} = p\,f(x,y) = pf \;. \tag{1.25}$$

Iz (1.24) i (1.25) slijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y=p\cdot f.$$

### 1.4.5. Parcijalni izvodi višeg reda

Neka je data funkcija $z=f(x,y)$ koja ima parcijalne izvode

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x(x,y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=f'_y(x,y)$$

koje nazivamo prvim parcijalnim izvodima. Prvi parcijalni izvodi su u op-štem slučaju funkcije od $x$ i $y$ i oni mogu imati svoje prve parcijalne izvode, za koje kažemo da su drugi parcijalni izvodi, i označavamo ih sa:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Izvode $f''_{xy}(x,y)$ i $f''_{yx}(x,y)$ nazivamo drugi mješoviti izvodi.

**Teorema 1.5.** *Neka funkcija* $z=f(x,y)$ *definisana na intervalu* $I_2$ *ima parcijalne izvode prvog reda i neprekidne izvode* $f''_{xy}(x,y)$ *i* $f''_{yx}(x,y)$ *u posmatranom intervalu. Tada vrijedi*

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

***Dokaz.*** Priraštaju $h$ argumenta $x$ funkcije $z=f(x,y)$ odgovara priraštaj

(1.25) $$\Delta_x z=\varphi(x,y)=f(x+h,y)-f(x,y).$$

Priraštaju $k$ argumenta $y$ funkcije $\varphi(x,y)$ date u prethodnoj jednakosti, od-govara priraštaj

(1.26) $$\begin{aligned}\Delta_x\varphi&=\varphi(x,y+k)-\varphi(x,y)=\\&=f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x,y).\end{aligned}$$

Posmatrajmo iste priraštaje argumenata $x$ i $y$ ali obrnutim redoslijedom, u odnosu na prethodni slučaj. Tada je

(1.26') $\Delta_y z = \psi(x,y) = f(x,y+k) - f(x,y)$

ili

(1.27) $\Delta_x \psi = f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+h,y) + f(x,y)$.

Desne strane jednakosti (1.26) i (1.27) su jednake,što znači da su jednake i lijeve strane jednakosti. Znači vrijedi jednakost

(1.28) $\varphi(x,y+k) - \varphi(x,y) = \psi(x+h,y) - \psi(x,y)$.

Funkcije $\varphi(x,y)$ i $\psi(x,y)$ ispunjavaju uslove Lagranžove teoreme na intervalima $[y,y+k]$ i $[x,x+h]$, $(x+h,y+k) \in I_2$ respektivno, i vrijede jednakosti:

$$\frac{\varphi(x,y+k) - \varphi(x,y)}{k} = \varphi'_y(x,y+\theta_1 k) \quad 0 < \theta_1 < 1$$

$$\frac{\psi(x,y+k) - \psi(x,y)}{h} = \psi'_x(x+\theta_2 h,y) \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Iz prethodnih jednakosti i relacije (1.28) slijedi jednakost

$$k\varphi'_y(x,y+\theta_1 k) = h\psi'_x(x+\theta_2 h,y),$$

ili prema relacijama (1.25) i (1.26') dobijamo

$$k\left[f(x+h,y+\theta_1 k) - f(x,y+\theta_1 k)\right]'_y = h\left[f(x+\theta_2 h,y+k) - f(x+\theta_2 h,y\right]'_x \text{ ili}$$

$$k\left[f'_y(x+h,y+\theta_1 k) - f'_y(x+\theta_1 k,y)\right] = h\left[f'_x(x+\theta_2 h,y+k) - f'_x(x+\theta_2 h,y\right]$$

Primjenom Lagranžove formule na lijevu i na desnu stranu prethodne jedna-kosti dobijamo

$$hkf''_{yx}(x+\theta'_2 h,y+\theta_1 k) = hkf''_{xy}(x+\theta_2 h,y+\theta'_1 k).$$

Dijeljenjem ove jednakosti sa $hk$ i kada pustimo da $h \to 0,\ k \to 0$ dobija-mo

$$f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y),$$

time je teorema dokazana.

Drugi parcijalni izvodi funkcije $z = f(x,y)$ su u opštem slučaju, ta-kođe, funkcije od $x$ i $y$ koji mogu imati svoje prve parcijalne izvode po $x$ i $y$. Svaka funkcija koja je parcijalni izvod drugog reda funkcije $z = f(x,y)$ ima po dva parcijalna izvoda, i označavamo ih sa:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f^3_{xxx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f^3_{xxy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = f^3_{xyx}(x,y), \text{ itd.}$$

Slično se definišu i parcijalni izvodi $n$-tog reda.
Parcijalni izvodi $n$-tog reda su prvi parcijalni izvodi parcijalnih izvoda reda $n-1$. Naprimjer

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^k \,\partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^k \,\partial y^{n-k}}$$

je parcijalni izvod reda $n$ funkcije $z = f(x,y)$ dobijen diferenciranjem $k$ puta po $x$ a zatim $n-k$ puta po $y$.

***Primjer* 1.13.** Za funkciju $z = x^3 y^2 + y^3 + x^2$ naći druge parcijalne izvode

***Rješenje.*** Prvi parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + 3y^2$$

to je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 y^2 + 2x\right) = 6xy^2 + 2 = 2\left(3xy^2 + 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 y^2 + 2x\right) = 6x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3 y + 3y^2\right) = 6x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3 y + 3y^2\right) = 2x^3 + 6y.$$

## 1.4.6. Totalni diferencijali. Izvod implicitne funkcije

Parcijalne diferencijale diferencijabilne funkcije $z = f(x,y)$ defini-šemo kao proizvod parcijalnih izvoda i odgovarajućih priraštaja i obilježa-vamo ih sa

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x, \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y,$$

ili

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx, \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

Neka je funkcija $z = f(x,y)$ diferencijabilna u oblasti $I_2$. Tada u okolini tačke $M(x,y) \in I_2$ vrijedi relacija (relacija 1.18)

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \vartheta(\rho)$$

gdje $\vartheta(\rho) \to 0$ kada $\rho \to 0$. Izraz

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y$$

nazivamo totalni diferencijal funkcije $z=f(x,y)$ i označavamo sa

(1.29) $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y.$$

Neka je $z=f(x,y)=x$. Tada je $\frac{\partial z}{\partial x}=1;\ \frac{\partial z}{\partial y}=0$ i relacija (1.29) glasi

$$dz=\Delta x=dx.$$

Analogno iz funkcije $z=f(x,y)=y$ dobijamo

$$dz=\Delta y=dy.$$

Na osnovu toga slijedi da totalni diferencijal (1.29) možemo izraziti u obliku

(1.30) $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy.$$

Posmatrajmo funkciju, datu u implicitnom obliku $F(x,y)=0$. Ako je funkcija $F(x,y)$ diferencijabilna u oblasti $I_2\in\boldsymbol{R}^2$ i $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$, tada je njen totalni diferencijal $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$, odakle je

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}};$$

i to je izvod implicitne funkcije $F(x,y)=0$.
Totalni diferencijal (1.30) nazivamo prvi totalni diferencijal ili diferencijal prvog reda funkcije $z=f(x,y)$.

Prvi totalni diferencijal funkcije $z=f(x,y)$ je u opštem slučaju funkcija od $x$ i $y$ i od diferencijala $dx$ i $dy$. Ako je ovaj diferencijal dife-rencijabilan onda on ima svoj prvi totalni diferencijal

$$d(dz)=d^2z=d\left[\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy\right]$$

i nazivamo ga drugi totalni diferencijal ili diferencijal drugog reda funkcije $z=f(x,y)$.

Prema pravilima diferenciranja, vodeći računa da su $dx$ i $dy$ kon-stante, vrijedi

$$d^2z=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy\right)dy=$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 .$$

Ako je $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, tada je

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

što se zapisuje u obliku

$$d^2 z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^{(2)} z .$$

Treći totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ definišemo kao prvi totalni diferencijal drugog totalnog diferencijala i tada je

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial^2 y} dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$$

što se skraćeno zapisuje u obliku

$$d^3 z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^{(3)} z .$$

Diferencijal $n$-tog reda u predhodnim oznakama je

$$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^{(n)} z .$$

***Primjer* 1.14.** Naći prvi totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y) = x^2 e^{x \ln y}$.

***Rješenje*.** Kako je:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x e^{x \ln y} + x^2 \ln y\, e^{x \ln y} = x(2 + x \ln y)\, e^{x \ln y} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{x}{y} e^{x \ln y} = \frac{x^3}{y} e^{x \ln y} ,$$

to je $dz = x(2 + x \ln y)\, e^{x \ln y} dx + \frac{x^3}{y} e^{x \ln y} dy$.

***Primjer* 1.15.** Drugi totalni diferencijal funkcije $z = x^3 y^2 + y^3 + x^2$ (vidjeti primjer 1.13) je

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 =$$
$$= 2\left(3x y^2 + 1\right) dx^2 + 12 x^2 y\, dx\,dy + 2\left(x^3 + 3y\right) dy^2 .$$

# 2. Taylorova formula. Ekstremi

## 2.1. Taylorova formula

Ranije smo pokazali (III) kako se Taylorova formula primjenjuje za funkciju sa jednom nezavisnom promjenjivom. Sada ćemo pokazati da se formula može primijeniti i na funkciju sa dvije nezavisne promjenjive.

**Teorema 1.6.** *Neka je funkcija* $z = f(x,y)$ *neprekidna i ima neprekidne parcijalne izvode do reda* $n,\ n>0$ *u tački* $M_1(x_0,y_0) \in I_2$. *Neka je tačka* $M_2(x+h,y+k) \in I_2$. *Tada vrijedi Taylorova formula*

$$f(x+h,y+k) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right) f(x_0,y_0) + \tag{1.31}$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(2)} f(x_0,y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(n)} f(x_0,y_0) + r_n$$

gdje je $r_n$ $n$-ti ostatak u Lagrangeovom obliku dat sa

$$r_n(x,y,h,k) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(n+1)} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \qquad 0<\theta<1.$$

***Dokaz.*** Neka su $h$ i $k$ konstante za koje je $\rho = \sqrt{h^2+k^2} < \delta$. Tada sve tačke $M(x_0+th, y_0+tk)$ za $0 \le t \le 1$ pripadaju duži čije su krajnje tačke $M_1(x_0,y_0)$ i $M_2(x_0+h,y_0+k)$ i one pripadaju $\delta$-okolini tačke $M_1(x_0,y_0)$. Formirajmo funkciju

$$F(t) = f(x_0+th, y_0+tk) \tag{1.32}$$

koja je definisana na intervalu $t \in [0,1]$. Funkcija $F(t)$ ima neprekidne izvode do reda $n$ $1$ na intervalu $[0,1]$ i može se za nju primjeniti Tejlorova formula sa ostatkom reda $n$ u Lagrangeovom obliku u okolini tačke $t=0$, i glasi

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1} \tag{1.33}$$

gdje je $0<\theta<1$. Iz relacije (1.32), na osnovu definicije složene funkcije, sli-jedi

$$F_t^{(m)}(1) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(m)} f(x_0+h, y_0+k), \quad m = 1,2,\ldots,n \tag{1.34}$$

(1.35) $$F_t^{(m)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(m)} f\left(x_0,y_0\right),\quad m=1,2,\dots,n.$$

Za $m=n+1$, ako se $t$ zamijeni sa $\theta t$, vrijedi jednakost

(1.36) $$F_t^{(n+1)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(n+1)} f\left(x_0+\theta t\,h, y_0+\theta t\,k\right).$$

Iz relacije (1.32) slijedi $F(0)=f\left(x_0,y_0\right)$; $F(1)=f\left(x_0+h,y_0+k\right)$ što znači da je

(1.37) $$\Delta z= f\left(x_0+h,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)=F(1)-F(0).$$

Ako se u relaciji (1.33) $t$ zamijeni sa 1, tada je

$$F(1)-F(0)=F'(0)+\frac{1}{2!}F''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta).$$

Iz ove relacije, s obzirom na relacije (1.37), (1.35), i (1.36), slijedi

$$f(x+h,y+k)-f\left(x_0,y_0\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right) f\left(x_0,y_0\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(2)} f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(n)} f\left(x_0,y_0\right)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(n+1)} f\left(x_0+\theta h, y_0+\theta k\right).$$

Dobijena jednakost je jednakost data relacijom (1.31).

## 2.2. Ekstremi funkcije

**Definicija 1.3.** *Neka je funkcija* $z=f(x,y)$ *definisana u oblasti* $I_2\subset R^2$. *Tačku* $(x_0,y_0)$ *nazivamo lokalni maksimum, lokalni minimum, ako postoji takva okolina* $U$ *tačke* $(x_0,y_0)$ *za koju vrijedi: za svako*

$(x,y)\in I_2\cap U,\ (x,y)\neq(x_0,y_0)$ *je* $f(x_0,y_0)>f(x,y)$,

*ili* $f(x_0,y_0)<f(x,y)$.

Tačke lokalnog minimuma i maksimuma su lokalni ekstremi.

**Teorema 1.6.** *Neka funkcija* $z=f(x,y)$ *ima lokalni ekstrem u tački* $(x_0,y_0)$. *Ako postoje* $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ *i* $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ *tada je*

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0 \quad ; \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0 .$$

***Dokaz.*** Ako funkcija $z=f(x,y)$ ima ekstrem u tački $(x_0,y_0)$ ta-da je $x_0$ ekstrem funkcije $z=f(x,y_0)=\varphi(x)$ promjenjive $x$. Tada je

$$\frac{d\varphi(x_0)}{dx}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0 .$$

Slično se zaključuje da je $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$.

Tačke $(x,y)$ za koje je $\frac{\partial z}{\partial x}=0;\ \frac{\partial z}{\partial y}=0$ su stacionarne tačke fun-kcije $z=f(x,y)$ i one se dobijaju rješavanjem sistema jednačina

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0;\ \frac{\partial z}{\partial y}=0 .$$

Iz definicije totalnog diferencijala i teoreme 1.6 neposredno slijedi da je u tački $(x_0,y_0)$ ekstrema funkcije $z=f(x,y)$

$$dz=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy=0 .$$

***Primjer* 2.1.** Za funkciju $z=x^2+y^2$ je

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x=0;\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y=0 .$$

Stacionarna tačka je (0,0) i $f(0,0)=0$. Kako je $z=x^2+y^2>0$ za svako $x\neq 0$ ili $y\neq 0$ to je prema definiciji 1.3 tačka (0,0) minimum date funkcije.

***Primjer* 2.2.** Funkcija $z=x^2-y^2$ ima prvi totalni diferencijal

$$dz=2x\,dx-2y\,dy$$

i jednak je nuli za $x=y=0$. Vrijedi i $z=f(0,0)=0$. Za $x=0$ i $y\neq 0$ je $z=f(x,y)<0$, a za $x\neq 0$ i $y=0$ je $z=f(x,y)>0$. Znači, tačka (0,0) nije ekstrem funkcije $z=x^2-y^2$.

Neka je funkcija $z=f(x,y)$ definisana na otvorenoj oblasti $I_2$ i neka ona na toj oblasti ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda. Da li funkcija $z=f(x,y)$ ima ekstreme u tački $(x_0,y_0)\in I_2$ zavisi, prema defi-niciji 1.3, od toga mijenjali priraštaj funkcije $z=f(x,y)$ u okolini te tačke znak ili ne.

Ako funkcija $z = f(x,y)$ ima ekstrem u tački $(x_0, y_0)$ tada se pre-ma teoremi 1.6 Tejlorova formula sa ostatkom reda 2 može napisati u obliku

$$\Delta z(x_0,y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(2)} f\left(x_0+\theta h, y_0+\theta k\right)$$

odnosno

$$\Delta z(x_0,y_0) = \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} h^2 \dfrac{\partial^2 f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}{\partial x^2} + 2hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \\ k^2 \dfrac{\partial^2 f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad 0<\theta<1 \tag{1.38}$$

Neka je

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}; \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}; \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}. \tag{1.39}$$

Može se zapaziti da je ponašanje priraštaja $\Delta z$ u dovoljno maloj okolini tačke $(x_0, y_0)$ određeno osobinama kvadratnog trinoma

$$q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

koji se za $A \neq 0$ može izraziti u obliku

$$q(h,k) = A\left[\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}k^2\right]. \tag{1.40}$$

Za funkciju (1.40) vrijedi

1. Ako je $AC - B^2 > 0$, tada je, za svako $(h,k) \neq (0,0)$, $q(h,k) > 0$ ako je $A > 0$, a $q(h,k) < 0$ ako je $A < 0$.

2. Ako je $AC - B^2 < 0$ tada $q(h,k)$ može imati različite znakove za različite vrijednosti $h$ i $k$.

3. $q(h,k)$ može biti nula i za neke vrijednosti $(h,k) \neq (0,0)$ a za preostale vrijednosti $(h,k) \neq (0,0)$ ima isti znak.

**Teorema 1.7.** *Neka funkcija* $z = f(x,y)$ *na otvorenoj oblasti* $I_2 \subset \boldsymbol{R}$ *ima druge parcijalne izvode na* $I_2$. *Ako je*

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0;$$

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}; \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}; \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2},$$

*tada vrijedi*:

1. *ako je* $AC - B^2 > 0$ *funkcija* $z = f(x,y)$ *ima ekstrem u tački* $(x_0, y_0)$ *i to maksimum ako je* $A < 0$, *a minimum ako je* $A > 0$,

2. *ako je* $AC - B^2 < 0$ *funkcija nema ekstrema u tački* $(x_0, y_0)$.

***Primjer* 2.3.** Naći ekstreme funkcije $z = xy(x+y-1)$.

***Rješenje.*** Moguće tačke ekstrema date funkcije su rješenja sistema jednačina

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y(x+y-1) + xy = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x(x+y-1) + xy = 0.$$

Rješenja sistema jednačina su

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = 0,\ y_2 = 1,\ x_3 = 1,\ y_3 = 0,\ x_4 = \tfrac{1}{3},\ y_4 = \tfrac{1}{3}.$$

Znači, stacionarne tačke funkcije su (0,0); (0,1); (1,0); $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Drugi parcijalni izvodi su

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x + 2y - 1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x.$$

Razmotrimo znak izraza $AC - B^2$ u tački (0,0).

$$AC - B^2 = \frac{\partial^2 z(0{,}0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z(0{,}0)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 z(0{,}0)}{\partial x \partial y}\right]^2 = 0 \cdot 0 - (-1)^2 = -1 < 0.$$

To znači da stacionarna tačka (0,0) nije ekstrem date funkcije.

U tački $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ je $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{3}$, što znači da je

$$AC - B^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$$

odnosno da je stacionarna tačka $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ tačka ekstrema date funkcije. Kako je $A = \frac{2}{3} > 0$ to funkcija $z = xy(x+y-1)$ ima minimum i vrijednost minimuma je $f\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$.

Za ostale stacionarne tačke se postojanje ekstrema provjerava na isti način.

## 2.3. Vezani ekstremi

Neka je funkcija $z = f(x,y)$ definisana u oblasti $I_2 \subset \boldsymbol{R}^2$, gdje su nezavisne promjenjive vezane relacijom $\varphi(x,y) = 0$. Funkcija $f(x,y)$ je tada funkcija jedne nezavisne promjenjive. Neka se iz $\varphi(x,y) = 0$ napri-mjer, može izraziti promjenjiva $y$ kao funkcija od $x$ i neka je $y = \psi(x)$. Tada je

$$z = f(x,y) = f\left(x, \psi(x)\right) = \alpha(x).$$

Prema tome problem određivanja ekstrema svodi se na problem određivanja ekstrema funkcije sa jednom promjenjivom.

Ekstrem funkcije $z = f(x, y)$ pod uslovom da je $\varphi(x, y) = 0$ nazi-vamo vezani ili uslovni ekstreme date funkcije.

Ako se iz $\varphi(x, y) = 0$ ne može izraziti $y$ kao funkcija od $x$, tada znajući da je $y$ funkcija od $x$ možemo smatrati da je $f(x, y)$ složena funkcija od $x$. Neka je tačka $M(x_0, y_0)$ tačka uslovnog ekstrema funkcije

(1.41) $$z = f(x, y)$$

uz uslov

(1.42) $$\varphi(x, y) = 0.$$

Tada je

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(_0, y_0)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

a iz relacije (1.42) je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

odnosno

(1.43) $$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

(1.44) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0.$$

Ako (1.44) pomnožimo sa $\lambda \in \boldsymbol{R}$, gdje je $\lambda$ nepoznat broj, i dodamo rela-ciji (1.43) dobićemo

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = 0$$

odnosno

(1.45) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx = 0.$$

Broj $\lambda$ odredimo tako da je

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

na osnovu čega iz (1.45) slijedi i

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Znači u tački ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ uz uslov $\varphi(x, y) = 0$ vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

(1.46)
$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$\varphi(x, y) = 0 .$$

Uslovi (1.46) su potrebni uslovi da bi postojao vezani ekstrem funkcije (1.41) uz uslov (1.42) iz kojih se rješavanjem sistema jednačina po $x, y$ i $\lambda$ dolazi do mogućih tačaka ekstrema.

Formirajmo funkciju

(1.47)
$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

gdje je $\lambda \in \boldsymbol{R}$ nepoznati broj. Funkciju $F(x, y, \lambda)$ nazivamo Lagrangeova funkcija, a množioc $\lambda$ nazivamo Lagrangeov množitelj ili multiplikator. Ako parcijalne izvode funkcije (1.47) izjednačimo sa nulom dobićemo sistem jednačina (1.46). Na taj način se traženja uslovnih ekstrema funkcije (1.41) svodi na traženja bezuslovnih ekstrema funkcije (1.47).

***Primjer.*** Naći ekstreme funkcije

$$z = 6 - 4x - 3y$$

pod uslovom da $x$ i $y$ zadovoljavaju jednakost

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 .$$

***Rešenje.*** Funkcija Lagrangea za dati primjer glasi

$$F(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda (x^2 + y^2 - 1) .$$

Njeni parcijalni izvodi po $x, y$ i $\lambda$ se, odnosno odgovarajući sistem jedna-čina (1.46), glasi:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x = 0$$

(a)
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 .$$

Rješenje sistema (a) po $x, y$ i $\lambda$ je

$$\lambda_1 = \frac{5}{2};\ x_1 = \frac{4}{5};\ y_1 = \frac{3}{5},$$

$$\lambda_2 = -\frac{5}{2};\ x_1 = -\frac{4}{5};\ y_1 = -\frac{3}{5} .$$

Kako je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda\ ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0\ ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda\ ,$$

to je za $\lambda = \frac{5}{2};\ x = \frac{4}{5};\ y = \frac{3}{5}$

$$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 = 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} - 0 = 25 > 0\ .$$

Znači stacionarne tačka $\left( \frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right)$ funkcije $z = 6 - 4x - 3y$ je tačka ekstre-ma te funkcije. To je lokalni minimun, jer je

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5 > 0\ .$$

Vrijednost mininuma je

$$z = f\left( \frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right) = 6 - 4 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{3}{5} = 1\ .$$

Analogno se pokazuje da za $\lambda = -\frac{5}{2};\ x = -\frac{4}{5};\ y = -\frac{3}{5}$ funkcija $z$ ima maksimum $z_{\max} = 11$.

## 2.4. Zadaci za vježbu

**1.** Odrediti oblast definisanosti funkcija

a) $z = \ln xy$; b) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 - 4}$;

c) $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$; d) $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$.

**2.** Naći iterirane granične vrijednosti funkcija

a) $z = f(x, y) = \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$ u tački (0,0),

b) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ u tački (0,0).

**3.** Dokazati da ne postoji

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

**4.** Naći granične vrijednosti

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$, b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$,

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin x^2y^2}{x^2}$, d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

**5.** Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & za\;\; x^2+y^2\neq 0\\ 0 & za\;\; x^2+y^2=0\end{cases}$$

u tački (0,0).

**6.** Naći prve parcijalne izvode funkcija:

a) $f(x,y)=x\sqrt{y}+y\sqrt[3]{x}$; b) $z=x-y$;

c) $z=\dfrac{xy}{x+y}$; d) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

e) $z=\left(\sin x+\sin y\right)^2$, f) $z=(1+xy)^3$,

g) $u=f(x,y,z)=xyz$, h) $u=x^3y^2z+2x-3y+z$.

**7.** Dokazati da je:

a) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$ za $z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$,

b) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$ za $z=x+f(xy)$,

c) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=nz$, za $z=x^nf\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$.

**8.** Naći totalne diferencijale funkcija:

a) $z=x^2y$, b) $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

c) $z=\sin x\sin y$, d) $z=xy\sin\left(x^2+y^2\right)$.

**9.** Izračunati približno vrijednosti izraza

a) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$, b) $\sin 29^\circ\, tg46^\circ$.

**10.** Naći prve parcijalne izvode funkcije po $x$ i $y$ funkcije $z(u,v)=u^2v+uv^2$,

ako je $u=x\cos y$, $v=x\sin y$.

**11.** Naći druge parcijalne izvode funkcija:

a) $z=x^4+3x^2y^2-2y^4$, b) $z=x\ln y+3$.

**12.** Za date funkcije naći tražene totalne diferencijale

a) $z=\left(x^2+y^2\right)^2$, $d^2 z$; b) $z=y\ln x$, $d^2 z$ i $d^3 z$.

**13.** Naći ekstreme funkcija:

a) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$,

b) $z=x^2+xy+y^2-2x-2y$.

**14.** Naći ekstreme funkcije $z=xy$ pod uslovom da $x$ i $y$ zadovoljavaju je-dnakost $x^2+y^2=2a^2$.

**VI GLAVA**

# DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

## 1. Opšti pojmovi diferencijalnih jednačina

### 1.1. Definicija diferencijalne jednačine

Diferencijalna jednačina je jednačina u kojoj se kao nepoznate pojav-ljuju, pored argumenta funkcije, i njeni izvodi ili diferencijali.

***Primjer* 1.1.** 1. $2x+3\dfrac{dy}{dx}=0$, gdje je $x$ argument funkcije $y=f(x)$, je diferencijalna jednačina.

2. $2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, gdje su $x$ i $y$ argumenti funkcije $z=f(x,y)$, je takođe diferencijalna jednačina.

### 1.2. Klasifikacija i red diferencijalnih jednačina

Prema vrsti izvoda, obični ili parcijalni, diferencijalne jednačine dije-limo na obične i parcijalne diferencijalne jednačine.

Neka se u diferencijalnoj jednačini kao nepoznate pojavljuje funkcija sa svojim izvodima ili diferencijalima, samo jedne promjenjive. Tada za jed-načinu kažemo da je obična diferencijalna jednačina.

Ako se u diferencijalnoj jednačini pojavljuje funkcija sa dvije ili više promjenjivih zajedno sa svojim parcijalnim izvodima, za jednačinu kažemo da je parcijalna diferencijalna jednačina

Red diferencijalne jednačine je najviši red izvoda koji data diferenci-
jalna jednačina sadrži. Prema redu diferencijalne jednačine one se dijele na diferencijalne jednačine prvog, drugog, ... , $n$-tog reda.

Obična diferencijalna jednačina reda $n$ ima opšti oblik

(1.1.) $$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0.$$

***Primjer* 1.2.** Diferencijalne jednačine

1) $x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$; 2) $y'' + 3y' + y = x$;

3) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2xy - 1 = 0$; 4) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$,

su diferencijalne jednačine reda 1; 2; 3; 3, respektivno.

Ako nepoznatih funkcija jedne promjenjive ima više tada govorimo o sistemu diferencijalnih jednačina, u protivnom govorimo o pojedinačnoj jed-načini.

Ako pojedinačna diferencijalna jednačina, sistem diferencijalnih jed-načina ili parcijalne diferencijalne jednačine, sadrže: konstante, nezavisne članove, promjenjive, funkcije i sve uzastopne izvode do reda $n$; tada se kaže da su one potpune. U protivnom kažemo da su jednačine nepotpune.

Prema eksponentu izvoda nepoznate funkcije u diferencijalnoj jedna-čini one se dijele na linearne, kvadratne, ... , $n$-tog eksponenta.

## 1.3. Formiranje obične diferencijalne jednačine

Neka je data funkcija krivih linija u ravni $xOy$ definisana implicitnom funkcijom

(1.2.) $$f\left(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0$$

koja zavisi od $n$ proizvoljnih parametara $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Pod pretpostavkom da je $y$ funkcija od $x$ nađimo $n$-uzastopnih izvoda funkcije (1.2) po $x$, ako oni postoje. Dobićemo $n$ jednačina oblika

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(1.3)
$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial y} y^{(n)} = 0 .$$

Ako iz jednačina (1.2) i (1.3.) eliminišemo parametre $C_1, C_2, \ldots, C_n$ dobi-ćemo relaciju oblika

(1.4)
$$\varphi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$$

koja prestavlja diferencijalnu jednačinu $n$-tog reda.

***Primjer* 1.3.** Za familiju kružnica

$$(x - C)^2 + y^2 = C^2, \quad C \in \boldsymbol{R}$$

formirati diferencijalnu jednačinu*).

***Rješenje.*** Jednačina familije kružnica se može napisati u obliku

(a)
$$x^2 + y^2 - 2Cx = 0 .$$

Prvi izvod ove funkcije po $x$ je

(b)
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2C = 0 \text{, ili } x + yy' = C .$$

Iz (a) dobijamo

(c)
$$C = \frac{x^2 + y^2}{2x} .$$

Uvrštavanjem vrijednosti $C$ iz (c) u (b), tj. eliminacijom parametra $C$ iz (a) i (b) dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$x + yy' = \frac{x^2 + y^2}{2x} ,$$

ili

$$y^2 - x^2 - 2xyy' = 0 .$$

***Primjer* 1.4.** Za familiju funkcija

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} ,$$

$C_1, C_2$ su proizvoljne konstante, formirati diferencijalnu jednačinu.

***Rješenje.*** Eliminacijom parametra $C_1$ i $C_2$ iz sistema jednačina

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$$

$$y'' = 4\,C_1\,e^{2x} + 9\,C_2\,e^{3x}$$

dobićemo diferencijalnu jednačinu

$$y'' - 5\,y' + 6\,y = 0 .$$

---

*) Red diferencijalne jednačine jednak je broju nezavisnih konstanti koje se nalaze u rješenju.

## 1.4. Rješenje diferencijalne jednačine

Prema načinu formiranja funkcije (1.4) zapažamo da ta jednakost vrijedi ako vrijedi jednakost (1.2.). Funkciju (1.2.) nazivamo opšte rješenje ili opšti integral diferencijalne jednačine (1.4). Ako u jednačini (1.4.) proizvolj-nim konstantama $C_1, C_2, \dots, C_n$ pridružimo određene vrijednosti onda će ona predstavljati partikularni integral diferencijalne jednačine (1.2).

Proizvoljne konstante u jednačini (1.4) mogu se odrediti tako da funkcija $y$ i njeni izvodi $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ dobijaju određene vrijednosti

$$y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)} \quad \text{za} \quad x = x_0 .$$

Ove vrijednosti $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ za $x = x_0$ nazivamo početne vrijednosti ili početni ili Košijevi uslovi.

***Primjer* 1.5.** Provjeriti da li je

(a) $$y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{x}$$

rješenje jednačine

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 0$$

i ako jeste odrediti vrijednost proizvoljnih konstanti $C_1$ i $C_2$ uz početne uslo-ve: $y = 0,\, y' = 1$ za $x = 0$.

***Rješenje.*** Iz $y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{x}$ diferenciranjem dobijamo

(b) $$y' = 2\,C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{x}\ ;\quad y'' = 4\,C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{x} .$$

Zamjenom ovih vrijednosti (a) i (b) u datu diferencijalnu jednačinu, dobijamo

$$4\,C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{x} - 3\left(2\,C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{x}\right) + 2\left(C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{x}\right) \equiv 0 .$$

Kako je prethodna jednakost zadovoljena za svako $x$ dati izraz će biti rješenje diferencijalne jednačine.

Iz početnih uslova: $y = 0,\, y' = 1$ za $x = 0$ i (a) i (b) dobijamo sistem jednačina

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$2\,C_1 + C_2 = 1$$

čije je rješenje: $C_1 = 1, C_2 = -1$. To znači da je partikularni integral

$$y = e^{2x} - e^x .$$

# 2. Diferencijalne jednačine prvog reda

## 2.1. Integralne krive diferencijalne jednačine

Neka je data diferencijalna jednačina

(2.1) $$F(x, y, y') = 0,$$

ili u eksplicitnom obliku

(2.2) $$y' = f(x, y)$$

i neka je njen opšti integral

(2.3) $$\varphi(x, y, C) = 0,$$

gdje je $C \in \boldsymbol{R}$ proizvoljna konstanta. Funkcija (2.3) predstavlja familiju kri-vih u ravni $xOy$. Te krive nazivamo integralne krive jednačine (2.1) odno-sno (2.2).

## 2.2. Rješavanje nekih oblika diferencijalnih jednačina

Neka je data diferencijalna jednačina oblika

(2.4) $$y' = f(x, y), \text{ ili } x' = g(x, y)$$

gdje je $y$ proizvoljna funkcija od $x$ ili $x$ funkcija od $y$. Neka je

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad x' = \frac{dx}{dy}.$$

Uz pretpostavku da se $f(x, y)$ ili $g(x, y)$ može izraziti u obliku $-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ tada jednačina (2.4) ima oblik

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

odnosno, oblik

(2.5) $$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

Iz jednačine (2.5) se mogu definisati razne diferencijalne jednačine prvog re-da čije se rješenje može naći.

### 2.2.1. Jednačina sa razdvojenim promjenljivim

Neka u jednačini (2.5) funkcija $P(x,y)$ ne zavisi od $y$, a funkcija $Q(x,y)$ ne zavisi od $x$. Tada se ta jednačina može zapisati u obliku

(2.6) $$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0\,.$$

Diferencijalnu jednačinu (2.6) nazivamo jednačina sa razdvojenim promjen-ljivim. Opšti integral jednačine (2.6) je

(2.7) $$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C\,,$$

gdje je $C$ proizvoljna konstanta.

***Primjer* 2.1.** Jednačina

$$3x^2\,dx + \sin y\,dy = 0$$

je jednačina sa razdvojenim promjenljivim i prema relaciji (2.7) njen opšti integral je

$$3\int x^2\,dx + \int \sin y\,dy = C\,,$$

odnosno

$$x^3 - \cos y = C\,.$$

### 2.2.2. Jednačina sa razdvojivim promjenljivim

Neka se $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ iz jednačine (2.5) mogu izraziti u obliku

$$P(x,y) = R(x)\cdot S(y)\,;\quad Q(x,y) = M(x)\cdot N(y)\,.$$

Tada jednačina (2.5) glasi

(2.8) $$R(x)\cdot S(y)\,dx + M(x)\cdot N(y)\,dy = 0\,.$$

Jednačinu (2.8) nazivamo jednačinom sa razdvojivim promjenljivim.

Ako jednakost (2.8) podijelimo sa $S(y)\,M(x)$ dobićemo jednačinu

(2.9) $$\frac{R(x)}{M(x)}\,dx + \frac{N(y)}{S(y)}\,dy = 0\,,$$

koja je jednačina sa razdvojenim promjenljivim. Opšti integral jednačine (2.9) je

$$\int \frac{R(x)}{M(x)}\,dx + \int \frac{N(y)}{S(y)}\,dy = C.$$

***Primjer* 2.2.** Jednačina

$$3y'\left(x^2-1\right) - 2xy = 0$$

se može izraziti u obliku

$$3\left(x^2-1\right)dy - 2xy\,dx = 0,$$

ili

$$2xy\,dx - 3\left(x^2-1\right)dy = 0.$$

Dijeljenjem prethodne jednakosti sa $\left(x^2-1\right)y$ dobijamo jednačinu

$$\frac{2x}{x^2-1}\,dx - 3\frac{dy}{y} = 0,$$

koja je jednačina sa razdvojenim promjenljivim; njen opšti integral je

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx - 3\int \frac{dy}{y} = C_1,$$

odnosno

$$\ln\left|x^2-1\right| - 3\ln|y| = C_1$$

odakle dobijamo da je

$$y^3 = C\left(x^2-1\right),$$

gdje je $C = \ln C_1$.

### 2.2.3. Homogena jednačina

Diferencijalnu jednačinu (2.5) možemo izraziti u obliku

(2.10) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \text{ ili } y' = f(x,y)$$

gdje je $f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$. Ako su funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ homogene istog stepena homogenosti, odnosno funkcija $f(x,y)$ homogena sa stepe-nom homogenosti nula, tada za jednačinu (2.5) kažemo da je homogena.

Neka je $f\left(tx,ty\right) = f(x,y)$. Tada smjenom $t = \dfrac{1}{x}$ dobijamo

$$f(x,y) = f\left(1,\frac{y}{x}\right),$$

i jednačina (2.10) ima oblik

(2.11) $$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Neka je $\frac{y}{x} = u$, gdje je $u$ nepoznata funkcija promjenljive $x$. tada je

$$y' = \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

Zamjenom vrijednosti $\frac{y}{x}$ i $y$ u jednačini (2.11) dobijamo jednačinu

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1,u),$$

odnosno

(2.12) $$x\frac{du}{dx} = f(1,u) - u.$$

Jednačina (2.12) je jednačina sa razdvojenim promjenljivim i njen integral se određuje kao integral jednačine (2.9).

Neka je $f(1,u) - u \neq 0$, tada vrijedi

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Nakon integracije dobijamo

$$\ln|x| + \ln C = \int \frac{du}{f(1,u) - u}.$$

Neka je $\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \varphi(u)$. Tada je $\ln|Cx| = \varphi(u)$, odnosno, s obzirom na smjenu $u = \frac{y}{x}$

$$\ln|Cx| = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

što predstavlja opšti integral jednačine (2.11).

Ako je $f(1,u) - u = 0$, tada je

$$\frac{du}{dx} = 0$$, odnosno $u = C$

i opšti integral glasi

$$\frac{y}{x} = C \Rightarrow y = Cx.$$

***Primjer* 2.3.** Naći opšte rješenje jednačine

$$(x - y)y\,dx - x^2 dy = 0.$$

***Rješenje.*** Data jednačina se može izraziti u obliku

$$y' = \frac{(x-y)\,y}{x^2}, \text{ ili } \quad y' = \left(1 - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x}.$$

Zadana jednačina je homogena i smjenom $\frac{y}{x} = u$, odakle je

$$y = u \cdot x; \quad y' = u'x + u,$$

se svodi na jednačinu

$$u'x + u = (1-u) \cdot u,$$

odnosno

$$x\frac{du}{dx} = -u^2.$$

Razdvajanjem promjenljivih dobijamo jednačinu

$$-\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

odakle integriranjem dobijamo

$$\ln C + \frac{1}{u} = \ln|x|,$$

odnosno

$$\frac{x}{C} = e^{\frac{1}{u}}.$$

Uvođenjem smjene $u = \frac{y}{x}$ dobićemo opšte rješenje

$$x = Ce^{\frac{x}{y}}.$$

Razmotrimo jednačinu oblika

(2.13) $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right).$$

Neka je $c = f = 0$, tada je

(2.14) $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by}{dx + ey}\right) = f\left(\frac{a + b\,y/x}{d + e\,y/x}\right).$$

Jednačina (2.14) je homogena i rješava se smjenom

$$y = u \cdot x; \quad y' = x\frac{du}{dx} + u.$$

Tada je

$$x\frac{du}{dx} + u = f\left(\frac{a + bu}{d + eu}\right),$$

odnosno

$$\frac{du}{f\left(\frac{a+bu}{d+eu}\right)-u}=\frac{dx}{x}\ ; \quad \int\frac{du}{f\left(\frac{a+bu}{d+eu}\right)-u}=\ln|Cx| \ .$$

Neka je

$$\int\frac{du}{f\left(\frac{a+bu}{d+eu}\right)-u}=\varphi(u) \ .$$

Tada je

$$\varphi(u)=\ln|Cx|, \text{ ili } \ \varphi(y/x)=\ln|Cx| \ .$$

Neka je najviše jedan od $c$ ili $f$ različit od nule. Uvedimo smjenu

(2.15) $$x=u+h, \quad y=v+k$$

gdje su $h$ i $k$ nepoznate konstante, a $u$ i $v$ nove promjenljive. Konstante $h$ i $k$ odaberimo tako da je:

(2.16) $$\begin{aligned} &ah+bk+c=0, \\ &dh+ek+f=0. \end{aligned}$$

Tada je

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a(u+h)+b(v+k)+c}{d(u+h)+e(v+k)+f}\right)=f\left(\frac{ah+bk+c+au+bv}{dh+ek+f+du+ev}\right) \ .$$

(2.17) $$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{au+bv}{du+ev}\right) \ .$$

Neka je $\frac{a}{d}\neq\frac{b}{e}$, ili $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}\neq 0$. Tad je jednačina (2.17) jednačina tipa (2.14) i ona se rješava po već objašnjenom postupku.

***Primjer* 2.4.** Naći opšte rješenje jednačine

$$y'=\frac{-x+2y-5}{2x-y+4} \ .$$

***Rješenje.*** Kako je $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1-4=-3\neq 0$, to se zadana jednačina rješava smjenama

$$x=u+h, \quad y=v+k \ ,$$

gdje su $h$ i $k$ rješenje sistema jednačina

(a) $$\begin{aligned} &-h+2k-5=0 \\ &2h-k+4=0. \end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina (a) je

$$h=-1; \quad k=2 \ ,$$

i uvedimo smjenu

$$x = u - 1; \quad y = v + 2.$$

Nakon uvođenja smjene u datu diferencijalnu jednačinu dobićemo jednačinu

$$\frac{dv}{du} = \frac{-u + 2v}{2u - v}.$$

Ova jednačina je homogena diferencijalna jednačina i nakon uvođenja smjene $v = u \cdot z$, gdje je $z$ nova nepoznata funkcija od $u$, dobićemo jednačinu

$$u z' + z = \frac{2z - 1}{2 - z}$$

koja ima opšte rješenje

$$u^2 (1 + z)^3 = C(1 - z).$$

Nakon smjene $z = v/u$, gdje je $x = u - 1;\; y = v + 2$, dobijamo opšte rje-šenje oblika

$$(y + x - 1)^3 = C(x - y + 3).$$

### 2.2.4. Linearna jednačina

Ako se jednačina (2.5) može izraziti u obliku

(2.18) $$y' + P(x)\, y = Q(x),$$

gdje su $P(x)$ i $Q(x)$ date funkcije od $x$, tada za jednačinu kažemo da je li-nearna diferencijalna jednačina prvog reda.

Ako je u jednačini (2.18) $Q(x) = 0$, tada ona glasi

(2.19) $$y' + P(x)\, y = 0$$

i za tu jednačinu kažemo da je linearna homogena jednačina.

Ako je $Q(x) \neq 0$ za jednačinu (2.18) kažemo da je linearna nehomo-gena jednačina.

Razmotrimo rješavanje linearne homogene jednačine, tj. jednačine (2.19). Datu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\, dx,$$

odakle se integriranjem dobija

$$\ln|y| = -\int P(x)\, dx + \ln|C|,$$

gdje je konstanta $C$ napisana u obliku $\ln C$, ili

(2.20) $$y = C e^{-\int P(x)\, dx}.$$

Nehomogena jednačina (2.18) se može riješiti, naprimjer metodom varijacije proizvoljne konstante $C$, koja se sastoji u sljedećem.

Pretpostavimo da je proizvoljna konstanta $C$ u (2.20) nepoznata funkcija od $x$, tj.

(2.21) $$y = C(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} .$$

Diferenciranjem (2.21) dobijamo

(2.22) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} e^{-\int P(x)\,dx} - C(x)\, P(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} .$$

Zamjenom (2.21) i ( 2.22) u (2.18) dobijamo

$$\frac{dC}{dx} e^{-\int P(x)\,dx} - C(x)\, P(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)\, P(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x) ,$$

ili

$$dC = Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx ,$$

odnosno

(2.23) $$C = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx + C_1 .$$

Zamjenom vrijednosti $C(x)$ iz (2.23) u (2.21) dobićemo opšte rješenje jednačine (2.18), i ono glasi

(2.24) $$y(x) = \left( \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx + C_1 \right) e^{-\int P(x)\,dx} .$$

Relacija (2.24) se može izraziti u obliku

$$y(x) = C_1 e^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx ,$$

ili u obliku

(2.25) $$y(x) = C_1\, \alpha(x) + \beta(x) ,$$

gdje je: $\alpha(x) = e^{-\int P(x)\,dx}$, $\beta(x) = e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx$.

Izraz $C_1\, \alpha(x)$ je opšte rješenje homogenog diferencijala jednačine (2.18), a $\beta(x)$ je partikularno rješenje nehomogenog dijela te jednačine, što ćemo i dokazati.

Izvod funkcije

$$\beta(x) = e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx$$

je

$$\beta'(x) = -P(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,e^{-\int P(x)\,dx},$$

$$\beta'(x) = -P(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Q(x).$$

Zamjenom vrijednosti $\beta(x)$ i $\beta'(x)$ u jednačinu (2.18) dobićemo jednakost

$$-P(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Q(x) + e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx = Q(x),$$

odnosno

$$Q(x) \equiv Q(x).$$

Time je dokazano da je $\beta(x)$ rješenje jednačine (2.18). Kako $\beta(x)$ ne sadrži proizvoljnu konstantu to će $\beta(x)$ biti partikularno rješenje date dife-rencijalne jednačine. Relacija (2.25) znači da je opšte rješenje jednačine (2.18) jednako zbiru opšteg homogenog i partikularnog rješenja nehomo-genog dijela jednačine.

***Primjer* 2.5.** Riješiti jednačinu $x\,y' - y + \ln x = 0$.

***Rješenje.*** Data jednačina se može napisati u obliku

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{\ln x}{x},$$

što znači da je ona jednačina oblika (2.18). Opšte rješenje homogenog dijela je:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \text{ ili}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|, \text{ tj.}$$

(a) $$y = C \cdot x.$$

Neka je $C = C(x)$. Tada je

(b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}x + C(x).$$

Uvrštavanjem vrijednosti $y$ i $y'$ iz (a) i (b) u datu jednačinu dobijamo jedna-činu

$$\frac{dC}{dx}x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)\cdot x = -\frac{\ln x}{x}$$

odakle je

$$C = -\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx + C_1 = \frac{\ln x + 1}{x} + C_1.$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti $C$ u (a) dobićemo opšte rješenje date jednačine

$$y = C_1\,x + \ln x + 1.$$

### 2.2.5. Bernulijeva jednačina

Jednačinu oblika

(2.26) $$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^p, \quad p \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$$

nazivamo Bernulijeva diferencijalna jednačina.

Bernulijeva diferencijalna jednačina se rješava na sljedeći način: Dijeljenjem jednačine (2.26) sa $y^p$ dobićemo jednačinu

(2.27) $$y^{-p}\,y' + P(x)\,y^{1-p} = Q(x).$$

Neka je

(2.28) $$z = y^{1-p}, \text{ odnosno } \frac{dz}{dx} = (1-p)\,y^{-p} \cdot \frac{dy}{dx},$$

gdje je $z$ nepoznata funkcija promjenljive $x$. Iz (2.28) je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-p}\,y^p \cdot \frac{dz}{dx}$$

i jednačina (2.26) sa funkcijom $z(x)$ ima oblik

$$\frac{1}{1-p}\frac{dz}{dx} + P(x) \cdot z = Q(x),$$

ili

(2.29) $$\frac{dz}{dx} + (1-p)\,P(x) \cdot z = (1-p)\,Q(x).$$

Jednačina (2.29) je linearna jednačina, i njeno rješenje se traži na već poznati način.

***Primjer* 2.6.** Jednačina $y' - \dfrac{xy}{2\left(1-x^2\right)} = xy^2$ je Bernulijeva diferencijalna jednačina. Ona se dijeljenjem sa $y^2$ i uvođenjem smjene $z = y^{-1}$ svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu. Rješenje date jednačine je

$$y = \frac{3}{2\left(1-x^2\right) + 3C\left(1-x^2\right)^{1/4}}.$$

## 2.3. Zadaci za vježbu

**1.** Riješiti diferencijalne jednačine:

a) $3y'\left(x^2-1\right) - 2xy = 0$; b) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$;

c) $yy' = 2x$; d) $yy' + x = 0$.

**2.** Riješiti homogene jednačine:

a) $x + y + (y - x)\,y' = 0$; b) $x\,y' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;

c) $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$; d) $2\,y\,y' = \dfrac{x - y^2}{x + y^2}$.

**3.** Riješiti jednačine:

a) $y' = -\dfrac{2x + 3y + 1}{3x + 4y + 1}$; b) $y' = -\dfrac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}$.

**4.** Riješiti diferencijalne jednačine:

a) $y' + \dfrac{1}{1 + x}\,y + x^2 = 0$; b) $y' - \dfrac{1}{x}\,y = x$;

c) $y' + x\,y = x^3$; d) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$.

**5.** Riješiti diferencijalnu jednačinu

a) $x\,y' - 4\,y = x^2\sqrt{y}$; b) $y' + 2\,x\,y - 2\,a\,x^3 y^3 = 0$;

c) $x\,y' + y - x\,y^2 \ln x = 0$; d) $y' - x\,y^2 - 3\,x\,y = 0$.

# 3. Linearne diferencijalne jednačine višeg reda

## 3.1. Neke nepotpune jednačine

Razmotrimo mogućnost rješavanja jednačine oblika

(3.1) $$F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Neka je $y' = p(x)$, odnosno $y''(x) = p'(x), \ldots, y^{(n)} = p^{(n-1)}(x)$. Tada do-bijamo jednačinu

(3.2) $$F\left(x, p, p', \ldots, p^{(n-1)}\right) = 0$$

koja je diferencijalna jednačina reda $n - 1$. Ako je moguće riješiti ovu jedna-činu dobićemo relaciju

(3.3) $$f\left(x, p, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}\right) = 0,$$

gdje su $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ proizvoljne konstante.

Ako se jednačina (3.3) može riješiti po $p$, tj. ako se može napisati

(3.4) $$p=\varphi(x,C_1,C_2,\ \dots\ ,C_{n-1})$$

tada je

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1,C_2,\ \dots\ ,C_{n-1}),$$

odakle je opšte rješenje jednačine (3.1)

(3.5) $$y=\int\varphi(x,C_1,C_2,\ \dots\ ,C_{n-1})\,dx+C_n.$$

***Primjer* 3.1.** Jednačina $y''+y'=0$ se smjenom $\frac{dy}{dx}=p$, odnosno $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$ svodi na jednačinu

$$\frac{dp}{dx}+p=0$$

čije je rješenje

$$p=C_1\,e^{-x},$$

pa relacija (3.5) za ovaj primjer glasi

$$y=\int C_1\,e^{-x}\,dx+C_2=-\,C_1\,e^{-x}+C_2.$$

Dobiveni izraz je opšte rješenje zadane diferencijalne jednačine.

Neka u jednačini (3.1) pored $y$ nedostaju i svi uzastopni izvodi do reda $k-1$, tj. neka je jednačina oblika

(3.6) $$F\left(x,y^{(k)},\ \dots\ ,y^{(n)}\right)=0.$$

Smjenom $\frac{d^k y}{dx^k}=z$, gdje je $z$ nepoznata funkcija od $x$, jednačina (3.6) se svodi na jednačinu

(3.7) $$F\left(x,z,\frac{dz}{dx},\ \cdots\ ,\frac{d^{n-k}z}{dx^{n-k}}\right)=0.$$

Neka je opšte rješenje jednačine (3.7)

$$f(x,z,C_1,C_2,\ \dots\ ,C_{n-k})=0,$$

ili

$$z=\varphi(x,C_1,C_2,\ \dots\ ,C_{n-k}).$$

Tada je zbog smjene $\frac{d^k y}{dx^k}=z$

$$\frac{d^{k-1}z}{dx^{k-1}}=\int\varphi(x,C_1,C_2,\ \dots\ ,C_{n-k})\,dx+C_{n-k+1},$$

$$\frac{d^{k-2}z}{dx^{k-2}} = \int\left(\int \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})\, dx\right) + C_{n-k+1}\, x + C_{n-k+2}.$$

Produžavajući integraciju $k$-puta dobićemo opšte rješenje date jednačine.

***Primjer* 3.2.** Jednačina $y''' + y'' = -x$ se smjenom

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z$$

svodi na jednačinu oblika

$$\frac{dz}{dx} + z = -x,$$

koje je linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Njeno rješenje je

$$z = 1 - x + C_1 e^{-x},$$

i vrijedi

$$\frac{dy}{dx} = \int\left(1 - x + C_1 e^{-x}\right) dx + C_2 = x - \frac{x^2}{2} - C_1 e^{-x} + C_2,$$

odnosno

$$y = \int\left(x - \frac{x^2}{2} - C_1 e^{-x} + C_2\right) dx + C_3 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 e^{-x} + C_2\, x + C_3.$$

***Primjer* 3.3.** Jednačina $y^{(4)} = \sqrt{y^{(3)}}$ smjenom $y^{(3)} = z$, postaje

$$\frac{dz}{dx} = z^{1/2}, \text{ odakle je } z = \left(\frac{x}{2} + C_1\right)^2.$$

Prema datoj smjeni, nakon integriranja, slijedi

$$y = \frac{2}{15}\left(\frac{x}{2} + C_1\right)^5 + \frac{x^2}{2} C_2 + C_3\, x + C_4.$$

# 3.2. Opšta teorija linearnih diferencijalnih jednačina reda *n*

## 3.2.1. Definicija linearne diferencijalne jednačine

Jednačinu oblika

$$b_0(x)\, y^{(n)} + b_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}(x)\, y' + b_n(x)\, y = Q(x), \tag{3.8}$$

gdje su $b_0(x), b_1(x), \cdots, b_n(x)$ poznate funkcije i $b_0(x) \neq 0$ nazivamo line-arna diferencijalna jednačina reda $n$.

Jednačinu (3.8) možemo podijeliti sa $b_0(x) \neq 0$ i tada ona glasi

(3.9) $$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x),$$

gdje je $a_i(x) = \dfrac{b_i(x)}{b_0(x)}$; $(i = 1,2,\ \ldots\ ,n)$, $\quad f(x) = \dfrac{Q(x)}{b_0(x)}$.

Ako je $Q(x) = 0$, odnosno $f(x) \equiv 0$ za jednačinu (3.8) odnosno (3.9) kažemo da je homogena, a ako ti uslovi nisu ispunjeni za jednačinu se kaže da je nehomogena.

### 3.2.2. Transformacija linearne jednačine

Jednačina (3.9) ne mijenja oblik ako umjesto nezavisne promjenljive $x$ uvedemo novu nezavisnu promjenljivu $\xi$ smjenom

(3.10) $$\frac{d\xi}{dx} = u(x);\ \ \xi = \int u(x)\,dx = v(x);\ \ x = \lambda(\xi),$$

gdje je $u(x)$ proizvoljna, $n$-puta diferencijabilna funkcija.

Druga važna osobina linearne jednačina (3.9) je da jednačina (3.9) ne mijenja oblik pri linearnoj transformaciji nepoznate funkcije $y$, tj. pri uvo-đenju smjene

$$y = v(x)\cdot\eta(x) + \gamma(x),$$

gdje su funkcije $v(x)$ i $\gamma(x)$ poznate, neprekidne, $n$-puta diferencijabilne i $v(x) \neq 0$ na intervalu $\langle a,b\rangle$.

### 3.2.3. Opšta teorija linearnih homogenih difererncijalnih jednačina *n*-tog reda

Razmotrimo jednačinu

(3.11) $$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\,y = 0,$$

gdje su poznate $a_1(x), \cdots ,a_n(x)$ funkcije definisane i neprekidne za $x \in [a,b]$.

**Teorema 3.1.** *Neka je* $y_1$ *parcijalno rješenje jednačine* (3.11). *Tada je i* $C_1 y_1$, *gdje je* $C_1$ *proizvoljna konstanta*, *također rješenje jednačine*.

***Dokaz.*** Na osnovu pretpostavke teoreme je

$$L(y_1) = y_1^{(n)} + a_1(x)\,y_1^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\,y_1 = 0.$$

Tada je

$$L(C_1 y_1) = C_1 \left( y_1^{(n)} + a_1(x) y_1^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y_1 \right) = 0,$$

što znači da je $C_1 y_1$ rješenje jednačine (3.11).

**Teorema 3.2.** *Neka su* $y_1$ *i* $y_2$ *partikularna rješenja jednačine* (3.11). *Ta-da je i* $C_1 y_1 + C_2 y_2$, *gdje su* $C_1$ *i* $C_2$ *proizvoljne konstante*, *rješenje jednačine* (3.11).

***Dokaz.*** Na osnovu pretpostavke teoreme i teoreme 3.1 je

$$L(C_1 y_1) = 0; \; L(C_2 y_2) = 0.$$

Zamjenimo $y$ sa $C_1 y_1 + C_2 y_2$ u relaciji (3.11). Tada je

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = (C_1 y_1 + C_2 y_2)^{(n)} + a_1(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)$$

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 \left( y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + a_n y_1 \right) + C_2 \left( y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + a_n y_1 \right)$$

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) = 0.$$

Time je teorema dokazana.

Teorema 3.2 se može poopštiti i ona tada glasi: *Neka su* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *partikularna rješenja jednačine* (3.11). *Tada je rješenje te jednačine i*

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

*gdje su* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *proizvoljne konstante*.

### 3.2.4. Wronski-jeva determinanta

Neka su date funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ koje su funkcije jedne nezavisne promjenljive $x$ definisane na intervalu $\langle a,b \rangle$ i koje imaju uzastop-ne izvode do reda $n-1$. Determinantu definisanu sa

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

(3.12)

naziva Wronski-jeva determinanta.

**Teorema 3.3.** *Neka su funkcije* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *linearno zavisne na inter-valu* $\langle a,b \rangle$. *Tada je Wronski-jeva determinanta* (3.12) *jednaka nuli za sve vrijednosti* $x$ *iz posmatranog intervala* $\langle a,b \rangle$.

***Dokaz.*** Neka su funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno zavisne za svako $x \in \langle a,b \rangle$. Tada je

(3.13) $$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n = 0,$$

gdje su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ konstante od kojih je bar jedna različita od nule. Za uzastopne izvode jednačine (3.13) do reda $n-1$ vrijedi

$$\begin{aligned} C_1 y_1' + C_2 y_2' + \cdots + C_n y_n' &= 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots &\quad \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n y_n^{(n-1)} &= 0. \end{aligned}$$

(3.14)

Jednačine (3.13) i (3.14) predstavljaju homogeni sistem od $n$ linernih jedna-čina sa $n$ nepoznatih $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Ovaj sistem jednačina ima rješenje različito od nule ako je determinanta

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

za svako $x \in \langle a, b \rangle$, što je i trebalo dokazati.

Ako je determinanta (3.12) za sistem linearnih jednačina (3.13) i (3.14) različita od nule, tada sistem ima jedinstveno rješenje
$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$.

Znači, funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ iz relacije (3.13) su linearno nezavisne.

Navedimo bez dokaza sljedeću tvrdnju.

**Teorema 3.4.** *Maksimalan broj linearno nezavisnih partikularnih rješenja jednačine* (3.11) *sa koeficijentima* $a_i(x);\ i = 1, 2, \ldots, n$ *jednak je* $n$.

# 4. Rješavanje linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda

## 4.1. Homogena jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Opšti oblik linearne homogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima je

(4.1) $$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Rješenje jednačine (4.1) možemo tražiti u obliku

(4.2) $$y = e^{rx},$$

gdje je $r$ nepoznata konstanta. Odluka za izbor rješenja jednačine u obliku (4.2) zasniva se na tome da je funkcija $y = e^{rx}$ definisana za svako $x \in \langle -\infty, +\infty \rangle$ i da je $e^{rx} \neq 0$ za svako $x$ iz oblasti definisanosti. Diferenci-ranjem funkcije $y = e^{rx}$ dva puta i uvrštavanjem vrijednosti $y, y'$ i $y''$ u jednačinu (4.1) dobićemo jednačinu

(4.3) $$\left( r^2 + a_1 r + a_2 \right) e^{rx} = 0 .$$

Kako je $e^{rx} \neq 0$, to će jednakost (4.3) biti zadovoljena ako je

(4.4) $$r^2 + a_1 r + a_2 = 0 .$$

Jednačinu (4.4) nazivamo *karakteristična jednačina* jednačine (4.1). Korijeni karakteristične jednačine su

$$r_{1/2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

i oni mogu biti realni i različiti, konjugovano kompleksni, i realni i jednaki.

**1.** Neka su $r_1, r_2 \in \boldsymbol{R}$ i $r_1 \neq r_2$. Tada su prema relaciji (4.2), parti-kularna rješenja

(4.5) $$y_1 = e^{r_1 x}, \; y_2 = e^{r_2 x} .$$

Determinanta (3.12) u ovom slučaju glasi

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = r_2 e^{(r_1 + r_2)x} - r_1 e^{(r_1 + r_2)x} = (r_2 - r_1)\, e^{(r_1 + r_2)x} .$$

Kako je $r_1 \neq r_2$ to je $W(x) \neq 0$ za $\forall x \in \boldsymbol{R}$, što znači da su $y_1$ i $y_2$ line-arno nezavisna rješenja jednačine (4.1). Na osnovu toga slijedi da je opšte rješenje date jednačine dato sa

(4.5) $$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} .$$

***Primjer* 4.1.** Jednačina $y'' - 3y' + 2y = 0$ ima karakterističnu jednačinu

$$r^2 - 3r + 2 = 0 .$$

Korijeni karakteristične jednačine su: $r_1 = 1, \; r_2 = 2$. Znači korijeni su realni i različiti, pa je prema (4.5)

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

opšte rješenje date diferencijalne jednačine.

**2.** Neka su korijeni karakteristične jednačine jednaki, i neka je $r_1 = r_2 = r$. Tada je jedno partikularno rješenje jednačine (4.1) $y_1 = e^{rx}$, a drugo ćemo tražiti u obliku

(4.6) $$y_2 = u(x)\, e^{rx},$$

gdje je $u(x)$ nepoznata funkcija. Iz (4.6) slijedi

$$y_2' = u' e^{rx} + r u e^{rx} = (u' + r u)\, e^{rx}$$

(4.7) $$y_2'' = \left( u'' + 2 r u' + r^2 u \right) e^{rx}.$$

Zamjenom vrijednosti (4.6) i (4.7) u jednačinu (4.1) dobićemo jednačinu

$$\left( u'' + 2 r u' + r^2 u \right) e^{rx} + a_1 (u' + r u)\, e^{rx} + a_2 u e^{rx} = 0.$$

Budući da je $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$, to se prethodna jednačina svodi na jednačinu

(4.8) $$u'' + (2r + a_1)\, u' = 0.$$

Kako je, prema Vietovim formulama, $a_1 = -2r$, jednačina (4.8) glasi $u'' = 0$ i ima rješenje $u(x) = ax + b$.

Za $a = 1,\ b = 0$ dobićemo drugo partikularno rješenje oblika $y_2 = x e^{rx}$.

Funkcije $e^{rx}$ i $x e^{rx}$ su linearno nezavisne, što se može provjeriti, a to znači da je opšte rješenje jednačine (4.1) dato sa

(4.9) $$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} = \left( C_1 + C_2 x \right) e^{rx}.$$

***Primjer* 4.2.** Jednačina $y'' - 2y' + y = 0$ ima korijene karakteristične jed-načine $r_1 = r_2 = 1$. Tada je, prema relaciji (4.9), opšte rješenje date diferenci-jalne jednačine

$$y = \left( C_1 + C_2 x \right) e^{x}.$$

**3.** Neka su $r_1$ i $r_2$ konjugovano kompleksni brojevi jednačine (4.4) i neka je

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta,$$

gdje je $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, $i = \sqrt{-1}$. Tada je

$$y_1 = e^{\alpha x} e^{i\beta x}, \quad y_2 = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}.$$

Kako je, prema Eulerovoj formuli

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \sin\beta x; \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \sin\beta x$$

to je

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x + i\, e^{\alpha x} \sin\beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos\beta x - i\, e^{\alpha x} \sin\beta x.$$

Za formulisanje opšteg rješenja jednačine (4.4) u slučaju da su korijeni te karakteristične jednačine konjugovano kompleksni korisno je da se razmotri sljedeća teorema.

**Teorema 4.1.** *Neka je* $y = v(x) + i\,u(x)$ *rješenje linearne homogene jed-načine reda n. Tada su* $v(x)$ *i* $u(x)$ *rješenja te jednačine.*

***Dokaz.*** Po pretpostavci teoreme je $L(y) = 0$. Tada je

$$L(y) = L\big(v(x) + i\,u(x)\big) = L(v) + i\,L(u) = 0 .$$

Prethodna jednakost je ekvivalentna sa

$$L(v) = 0; \;\; L(u) = 0 .$$

Time je teorema dokazana.

Na osnovu teoreme 4.1. su

$$z_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x ; \;\; z_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

partikularna rješenja jednačine 84.4). Može se provjeriti da su rješenja $z_1$ i $z_2$ linearno nezavisna, što znači da je opšte rješenje oblika

$$y = e^{\alpha x}\left( C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right) .$$

***Primjer* 4.3.** Jendačina $y'' + y = 0$ ima korijene karakteristične jednačine $r_1 = -i$, $r_2 = i$. Znači korijeni su konjugovano kompleksni, pa je opšte rješe-nje dato sa

$$y = e^{0x}\left( C_1\cos x + C_2\sin x\right) = C_1\cos x + C_2\sin x .$$

## 4.2. Nehomogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Razmotrimo linearnu nehomogenu diferencijalnu jednačinu

(4.10) $$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) ,$$

gdje je $f(x) \neq 0$, $a_1, a_2$ konstante.

Da bi objasnili način rješavanja jednačine (4.10) daćemo bez dokaza sljedeću teoremu.

**Teorema 4.2.** *Neka je* $y_p$ *bilo koje partikularno rješenje jednačine* (4.10) *i neka je opšte rješenje*

$$y_h = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$$

*jednačine*

$$y'' + a_1\,y' + a_2\,y = 0 .$$

*Tada je opšte rješenje jednačine* (4.10) *dato sa*

(4.11) $$y = y_p + y_h.$$

Na osnovu teoreme 4.2 slijedi da se problem određivanja opšteg rje-šenja jednačine (4.10), pored onoga što je rečeno za rješavanje jednačine (4.1), svodi na problem određivanja jednog partikularnog rješenja te jed-načine.

**1.** Neka je $f(x) = P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, gdje je $P_n(x)$ polinom reda $n$. Tada jednačina (4.10) glasi

(4.12) $$y'' + a_1 y' + a_2 y = P_n(x)\cdot e^{\alpha x}.$$

**a)** Ako $\alpha$ nije korijen karakteristične jednačine

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0$$

parcijalno rješenje treba tražiti u obliku

(4.13) $$y_p = \left(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n\right)e^{\alpha x} = Q_n(x)\,e^{\alpha x},$$

gdje su $b_0, b_1, \ldots, b_n$ nepoznati koeficijenti. Diferenciranjem jednačine (4.13) dobijamo

$$\frac{dy_p}{dx} = \left(\frac{dQ_n}{dx} + \alpha Q_n\right)e^{\alpha x};$$

$$\frac{d^2 y_p}{dx^2} = \left(\frac{d^2 Q_n}{dx^2} + 2\alpha\frac{dQ_n}{dx} + \alpha^2 Q_n\right)e^{\alpha x}.$$

Ako vrijednosti $y_p, \dfrac{dy_p}{dx}; \dfrac{d^2 y_p}{dx^2}$ uvrstimo u relaciju (4.12) i jednakost podi-jelimo sa $e^{\alpha x}$ dobićemo

(4.14) $$Q_n''(x) + (2\alpha + a_1)Q_n'(x) + (\alpha^2 + \alpha a_1 + a_2)Q_n(x) = P_n(x).$$

U relaciji (4.14) na lijevoj strani su polinomi $Q_n(x)$ reda $n$, $Q_n'(x)$ reda $n-1$ i $Q_n''(x)$ reda $n-2$. Polinom $P_n(x)$ je, također, reda $n$. Na osnovu teoreme o identičnosti polinoma iz relacije (4.14) dobićemo sistem od $n+1$ linearne jednačine sa $n+1$ nepoznatih $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Rješavanjem tog sistema dobićemo vrijednosti koeficijenata polinoma (4.13).

**b)** Ako je $\alpha$ jednostruki korijen karakteristične jednačine, tada je

$$\alpha^2 + \alpha a_1 + a_2 = 0,$$

i tada jednačina (4.14) glasi

(4.15) $$Q_n''(x) + (2\alpha + a_1)Q_n'(x) = P_n(x).$$

Kako je red polinoma na lijevoj strani reda $n-1$ a na desnoj strani reda $n$ to jednakost (4.15) može biti identičnost ako je

(4.16) $$y_p = x\,Q_n(x)\,e^{\alpha x}.$$

**c)** Neka je $\alpha$ dvostruki korijen karakteristične jednačine

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Tada je $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$ i, prema Vietovim formulama, $2\alpha + a_1 = 0$. U opštem slučaju jednačina (4.14) ima oblik

(4.17) $$Q_n''(x) = P_n(x).$$

Slično slučaju b) zaključujemo da partikularni integral ima oblik

(4.18) $$y_p = x^2 Q_n(x)\,e^{\alpha x}.$$

***Primjer* 4.4.** Jednačina $y'' - 3y' + 2y = x\,e^{3x}$ ima karakterističnu jednačinu

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

čiji su korijeni: $r_1 = 1,\ r_2 = 2$. Opšte rješenje jednačine

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

je

(a) $$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Kako je u ovom primjeru $\alpha = 3,\ \alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq 2$ to je partikularno rješenje jednačine $y'' - 3y' + 2y = x\,e^{3x}$ oblika

(b) $$y_p = (b_0 x + b_1)\,e^{3x},$$

gdje su $b_0$ i $b_1$ nepoznati koeficijenti. Izvodi $y_p'$ i $y_p''$ su

$$y_p' = (3b_0 x + b_o + 3b_1)\,e^{3x},$$

$$y_p'' = (9b_0 x + 6b_o + 9b_1)\,e^{3x}.$$

Zamjenom vrijednosti $y_p$, $y_p'$ i $y_p''$ u datu diferencijalnu jednačinu dobi-ćemo relaciju (4.14) i ona glasi

$$2b_0 x + 3b_0 + 2b_1 = x,$$

odakle je

$$b_0 = 1/2,\quad b_1 = -3/4.$$

Uvršatavanjem ovih vrijednosti u (b) dobićemo partikularno rješenje

$$y_p = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{3x}.$$

Prema teoremi 4.2 opšte rješenje date diferencijalne jednačine je

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) e^{3x}.$$

***Primjer* 4.5.** Diferencijalna jednačina

$$y'' - 3y' + 2y = (x+1)e^x$$

ima korijene karakteristične jednačine: $r_1 = 1,\ r_2 = 2$. Kako je $\alpha = 1 = r_1$ to će partikularni integral date jednačine biti oblika

$$y_p = x(b_0 x + b_1) e^x = \left(b_0 x^2 + b_1 x\right) e^x.$$

Diferenciranjem $y_p$ dobijamo

$$y_p' = \left[b_0 x^2 + (2b_0 + b_1)x + b_1\right] e^x,$$

$$y_p'' = \left[b_0 x^2 + (4b_0 + b_1)x + 2b_0 + 2b_1\right] e^x.$$

Zamjenom ovih vrijednosti u diferencijalnu jednačinu dobijamo jednačinu

$$-2b_0 x + 2b_0 - b_1 = x + 1,$$

koja je identitet za: $b_0 = -1/2$ i $b_1 = -2$. Znači partikularno rješenje date jed-načine je

$$y_p = -x\left(\frac{x}{2} + 2\right) e^x,$$

a opšte rješenje je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) e^x,$$

ili

$$y = C_2 e^{2x} + \left(C_1 - \frac{x^2}{2} - 2x\right) e^x.$$

***Primjer* 4.6.** Jednačina

$$y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$$

ima korijene karakteristične jednačine $r_1 = r_2 = 2 = \alpha$. Tada se partikularno rješenje date jednačine, prema relaciji (4.18) traži u obliku

(a) $$y_p = x^2\left(b_0 x^2 + b_1 x + b_2\right) e^{2x} = \left(b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2\right) e^{2x}.$$

Diferenciranjem relacije (a) dobijamo

(b) $$y_p' = \left(2b_0 x^4 + (4b_0 + 2b_1)x^3 + (3b_1 + 3b_2)x^2 + 2b_2 x\right) e^{2x},$$

(c) $$y_p'' = \left(4b_0 x^4 + (16b_0 + 4b_1)x^3 + (12b_0 + 12b_1 + 4b_2)x^2 + (6b_1 + 8b_2)x + 2b_2\right) e^{2x}.$$

Zamjenom vrijednosti (a), (b) i (c) u datu diferencijalnu jednačinu dobićemo jednačinu

$$12b_0 x^2 + 6b_1 x + 2b_2 = x^2,$$

koja je identitet za: $b_0 = 1/12$, $b_1 = b_2 = 0$. Znači, na osnovu relacije (a), par-tikularno rješenje date diferencijalne jednačine je

$$y_p = \frac{x^4}{12} e^{2x}.$$

Opšte rješenje jednačine $y'' - 4y' + 4y = 0$ je (vidjeti primjer 4.2)

$$y_h = (C_1 + C_2\,x)\,e^{2x}.$$

Dakle, po teoremi 4.2, opšte rješenje date jednačine je

$$y = y_h + y_p = (C_1 + C_2\,x)\,e^{2x} + \frac{x^4}{12}e^{2x} = \left(C_1 + C_2\,x + \frac{x^4}{12}\right)e^{2x}.$$

2. Neka je

$$f(x) = A\,e^{\alpha x}\cos\beta x + B\,e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{4.19}$$

gdje su $A$ i $B$ konstante. Po Ojlerovoj formuli je

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}; \quad \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i},$$

i tada je

$$f(x) = A\,e^{\alpha x}\,\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + B\,e^{\alpha x}\,\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} =$$

$$= A\,e^{\alpha x}\,\frac{e^{i\beta x}}{2} + B\,e^{\alpha x}\,\frac{e^{i\beta x}}{2i} + A\,e^{\alpha x}\,\frac{e^{-i\beta x}}{2} - B\,e^{\alpha x}\,\frac{e^{-i\beta x}}{2i} =$$

$$= \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2i}\right)e^{(\alpha+i\beta)} + \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2i}\right)e^{(\alpha-i\beta)},$$

tj.

$$f(x) = D\,e^{(\alpha+i\beta)} + E\,e^{(\alpha-i\beta)}, \tag{4.20}$$

gdje je: $D = \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2i}\right);\ E = \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2i}\right)$.

Na osnovu teoreme 4.2 partikularno rješenje jednačine, ako $\alpha + \beta i$ nije ko-rijen karakteristične jednačine, možemo tražiti u obliku

$$y_p = M\,e^{\alpha x}\cos\beta x + N\,e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

gdje su $M$ i $N$ nepoznate konstante.

Neka je u funkciji (4.19) $\alpha = 0$. Tada je

$$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x.$$

Ako $\beta i$ nije korijen karakteristične jednačine tada partikularno rješenje mo-žemo tražiti u obliku

$$y_p = M_0\cos\beta x + N_0\sin\beta x.$$

Ako je $\beta i$ korijen karakteristične jednačine tada odgovarajuća rješenja tra-žimo u obliku

$$y_p = x\left(M_0\cos\beta x + N_0\sin\beta x\right).$$

**Teorema 4.3.** *Neka je funkcija* $f(x)$ *iz* (4.10) *data u obliku*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

*tada je parcijalno rješenje jednačine* (4.10) *jednako zbiru rješenja jedna-čina*

$$y_{p_1}:\ y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x);$$

$$y_{p_2}:\ y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x).$$

***Dokaz.*** Iz $L(y_{p_1}) = f_1(x)$; $L(y_{p_2}) = f_2(x)$, slijedi

$$L(y) = L(y_{p_1} + y_{p_2}) = L(p_1) + L(p_2) = f_1(x) + f_2(x).$$

Tome je teorema dokazana.

***Primjer* 4.7.** Riješiti jednačinu

$$y'' - 3y' + 2y = x + e^{3x}.$$

***Rješenje.*** Nađimo rješenja jednačina

(a) $$y'' - 3y' + 2y = x,$$

(b) $$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}.$$

Opšte rješenje jednačine $y'' - 3y' + 2y = 0$ je

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Partikularno rješenje jednačine (a) je

$$y_{p_1} = \frac{x}{2} + \frac{3}{4},$$

a partikularno rješenje jednačine (b) je

$$y_{p_2} = \frac{1}{2} e^{3x}.$$

Kako je opšte rješenje jednačine

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

jednako

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

to je opšte rješenje date diferencijalne jednačine, prema teoremi 4.3, dato sa

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} e^{3x}.$$

## 4.3. Zadaci za vježbu

**1.** Riješiti diferencijalne jednačine:

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$;  b) $3y'' - 4y' + \frac{1}{2} y = 0$;

c) $y'' - 6y' + 9y = 0$;  d) $y'' - 8y' + 16y = 0$;

e) $y'' + y' + y = 0$;  f) $2y'' + 3y' + y = 0$.

**2.** Riješiti jednačine:

a) $y'' - 5y' + 8y = 3x^2 e^{3x}$;  b) $y'' - 7y' + 10y = x e^{2x}$;

c) $y'' - 8y' + 15y = (x+2)e^{3x}$;   d) $y'' - 8y' + 15y = x^2 e^{3x}$;

e) $y'' - 4y' + 3y = 2\sin 3x + 3\cos 3x$;

f) $y'' - 4y' + 3y = 2\sin 2x + 5\cos 2x$;

g) $y'' + y' + y = \sin x + 2\cos x$;

h) $y'' + 3y' - 4y = e^{2x}\sin x$.

**3.** Riješiti jednačine

a) $y'' - 5y' + 6y = x e^{x} + \cos x$;

b) $y'' - 7y' + 10y = x + x^2 e^{2x} + 1$.