1 Elementi matematičke logike

Svaka izjavna rečenica nekog jezika koja ima smisla i koja ima osobinu da je tačna ili netačna naziva se iskaz (sud). Svaki iskaz možemo obilježiti nekim slovom (najčešće slovom latinice), brojem ili nekim drugim simbolom. Takve simbole nazivamo iskazna slova.
Činjenicu da je iskaz p tačan označavaćemo sa $\tau(p) = \top$ ili $\tau(p) = 1$, a činjenicu da je netačan sa $\tau(p) = \perp$ ili $\tau(p) = 0$.
Od dva ili više iskaza možemo sastaviti novi, složeni iskaz. Sa iskazima, kao elementima skupa iskaza, uvodimo sljedeće operacije:

1. **NEGACIJA** iskaza p je novi iskaz $\rceil p$ koji ima suprotnu istinitosnu vrijednost od istinitosne vrijednosti iskaza p.

2. **KONJUNKCIJA** iskaza p i q je novi iskaz $p \wedge q$ koji je tačan ako su iskazi p i q istovremeno tačni a netačan u ostalim slučajevima.

3. **DISJUNKCIJA** iskaza p i q je novi iskaz $p \vee q$ koji je netačan ako su iskazi p i q istvremeno netačni a tačan u ostalim slučajevima.

4. **IMPLIKACIJA** iskaza p i q je novi iskaz $p \implies q$ koji je netačan ako je iskaz p tačan a iskaz q netačan a tačan u ostalim slučajevima.

5. **EKVIVALENCIJA** iskaza p i q je novi iskaz $p \iff q$ koji je tačan ako su iskazi p i q istvremeno iste istinitosne vrijednosti, a netačan u ostalim slučajevima.

Operacije sa iskazima možemo predstaviti u obliku tabele.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(\rceil p)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(p \vee q)$	$\tau(p \implies q)$	$\tau(p \iff q)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Zadatak 1.1 *Provjeriti da li je sljedeća iskazna formula tautologija*

$$\mathcal{F}: \qquad \underbrace{\rceil(p \iff q)}_{L} \iff \underbrace{(p \iff \rceil q)}_{D}.$$

Rješenje:

Posmatrajmo tablicu

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \iff q)$	$\tau(L)$	$\tau(\rceil q)$	$\tau(D)$	$\tau(\mathcal{F})$
1	1	1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	1	**1**
0	0	1	0	1	0	**1**

Formula je tautologija.

Zadatak 1.2 *Provjeriti da li je sljedeća iskazna formula tautologija*

$$\mathcal{F}: \qquad \underbrace{\rceil (p \iff q)}_{L} \iff \underbrace{(p \wedge \rceil q) \vee (\rceil p \wedge q)}_{D}.$$

Rješenje:
Posmatrajmo tablicu

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \iff q)$	$\tau(L)$	$\tau(\rceil p)$	$\tau(\rceil q)$	$\tau(p \wedge \rceil q)$	$\tau(\rceil p \wedge q)$	$\tau(D)$	$\tau(\mathcal{F})$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	**1**
1	0	0	1	0	1	1	0	1	**1**
0	1	0	1	1	0	0	1	1	**1**
0	0	1	0	1	1	0	0	0	**1**

Formula je tautologija.

Zadatak 1.3 *Provjeriti da li je sljedeća iskazna formula tautologija*

$$\mathcal{F}: \qquad \underbrace{p \wedge (q \vee r)}_{L} \iff \underbrace{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)}_{D}.$$

Rješenje:
Posmatrajmo tablicu

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(r)$	$\tau(q \vee r)$	$\tau(L)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(p \wedge r)$	$\tau(D)$	$\tau(\mathcal{F})$
1	1	1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	1	1	0	1	**1**
1	0	1	1	1	0	1	1	**1**
1	0	0	0	0	0	0	0	**1**
0	1	1	1	0	0	0	0	**1**
0	1	0	1	0	0	0	0	**1**
0	0	1	1	0	0	0	0	**1**
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**

Formula je tautologija.

Zadatak 1.4 *Provjeriti da li je sljedeća iskazna formula tautologija*

$$\mathcal{F}: \qquad \underbrace{(p \implies (q \vee r))}_{L} \implies \underbrace{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)}_{D}.$$

Rješenje:

Posmatrajmo tablicu

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(r)$	$\tau(q \vee r)$	$\tau(L)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(p \wedge r)$	$\tau(D)$	$\tau(\mathcal{F})$
1	1	1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	1	1	0	1	**1**
1	0	1	1	1	0	1	1	**1**
1	0	0	0	0	0	0	0	**1**
0	1	1	1	1	0	0	0	**0**
0	1	0	1	1	0	0	0	**0**
0	0	1	1	1	0	0	0	**0**
0	0	0	0	1	0	0	0	**0**

Formula nije tautologija

Zadatak 1.5 *Bez upotrebe tablice dokazati da je sljedeća formula tautologija*

$$\mathcal{F}: \qquad \underbrace{((p \implies q) \wedge \rceil q)}_{L} \implies \underbrace{\rceil p}_{D}.$$

Rješenje:

Pretpostavimo suprotno, tj da je formula nije tautologija. Tada postoje istinitosne vrijednosti iskaza p i q za koje vrijedi $\tau(L \implies D) = 0$. To će se desiti samo onda ako je iskaz L tačan a iskaz D netačan. Međutim, da bi iskaz D bio netačan onda iskaz p mora biti tačan. Da bi iskaz P bio tačan, onda moraju biti tačni iskazi $p \implies q$ i $\rceil q$ a odavdje vidimo da iskaz q mora biti netačan. Ali kako je iskaz p tačan a iskaz q netačan tada je iskaz $p \implies q$ netačan a nama se zahtijeva da bude tačan.

Kontradikcija sa pretpostavkom.

Dakle, iskaz je tautologija.

Zadaci za samostalan rad

Ispitati da li su sljedeće iskazne formule tautologije

1. $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
2. $(p \implies q) \iff \rceil p \vee q$

3. $(p \iff q) \iff (p \land q) \lor (\rceil p \land \rceil q)$

4. $((p \implies q) \land (q \implies r)) \implies (p \implies r)$

5. $((p \implies q) \land (q \land \rceil r)) \implies (\rceil p \implies r)$