

---

## Pravila za limese

---

1. Niz  $a_n \pm b_n$  je konvergentan i vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

2. Niz  $a_n \cdot b_n$  je konvergentan i vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

3. Niz  $|a_n|$  je konvergentan i vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right|$$

4. Ako je  $b_n \neq 0$  za svaki  $n \in N$  i  $b \neq 0$ , onda je niz  $\frac{1}{b_n}$  konvergentan i vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

5. Ako je  $b_n \neq 0$  za svaki  $n \in N$  i  $b \neq 0$ , onda je niz  $\frac{a_n}{b_n}$  konvergentan i vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

6. Ako je  $a_n > 0$  za svaki  $n \in N$  i  $\alpha > 0$  bilo koji realan broj, onda je niz  $a_n^\alpha$  konvergentan i vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^\alpha$$

Limes niza

---

## Neki značajni limesi

---

A.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

C.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$

D.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{n} \right)^{\beta \cdot n} = e^{\alpha \cdot \beta}, \quad \alpha, \beta \in R$

E.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{f(n)} \right)^{\beta \cdot f(n)} = e^{\alpha \cdot \beta}, \quad \alpha, \beta \in R$

- za svaki niz funkcijskih vrijednosti  $f(n)$  koji divergira prema  $\pm\infty$

F.  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & 0 \leq |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \end{cases}$

## Određeni i neodređeni oblici

Određeni oblici su oni koje možemo izračunati:

- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{1}{\infty} = 0, \frac{c}{\infty} = 0$   
( $c$  – konstanta)
- $\frac{1}{0} = \infty, \frac{c}{0} = \infty$   
( $c$  – konstanta)
- $\sqrt{\infty} = \infty$

Kod neodređenih oblika ne dolazimo odmah do rješenja, već određenim postupcima dolazimo do određenog oblika te onda i do rješenja:

- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\infty - \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $1^\infty$

## Derivacije elementarnih funkcija

Red.br.	Funkcija	Derivacija funkcije	Red.br.	Funkcija	Derivacija funkcije
1	$c$	0	8	$\cos x$	$-\sin x$
2	$a \cdot x^n$	$a \cdot n \cdot x^{n-1}$	9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
3	$a^x$	$a^x \cdot \ln a$	10	$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
4	$e^x$	$e^x$	11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	12	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	13	$\arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$
7	$\sin x$	$\cos x$	14	$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$

## Pravila za deriviranje funkcija

1. Derivacija zbroja (razlike) dviju realnih funkcija:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

2. Derivacija umnoška (produkta) dviju realnih funkcija:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

3. Derivacija kvocijenta dviju realnih funkcija:

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} , \quad g(x) \neq 0$$

4. Derivacija kvocijenta  $\frac{1}{g(x)}$  ,  $g(x) \neq 0$ :

$$\left[ \frac{1}{g(x)} \right]' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)} , \quad g(x) \neq 0$$

5. Derivacija umnoška konstante  $c$  i funkcije:  $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

6. Derivacija kvocijenta konstante  $c$  i funkcije:  $\frac{c}{g(x)}$  ,  $g(x) \neq 0$ :

$$\left[ \frac{c}{g(x)} \right]' = \frac{-c \cdot g'(x)}{g^2(x)} , \quad g(x) \neq 0$$

Riješiti limese:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{3x - 2}$$

Rješenje:  $\frac{2}{3}$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x}$$

Rješenje:  $\frac{1}{2}$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 7x}{x^4 - x^3 + 5}$$

Rješenje: 3

4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x + 3}{3x^3 + 2x - 4}$$

Rješenje: 0

5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x + 1}$$

**Rješenje: 1**

6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - x}}{2x + 3}$$

**Rješenje: 1**

7.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{x^2 - 3x + 1}}{2\sqrt{x-4} + \sqrt[4]{x^2 - 5}}$$

**Rješenje:  $\frac{2}{3}$**

8.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^5 - 2x^3 + 4} + (3x - 4)}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 1}}$$

**Rješenje: 2**

9.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + 5n^4 + 11n}{n^7 + n^3 - 3n^2}$$

**Rješenje: 0**

10.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 1}{\sqrt{4n^2 - 2n + 1}}$$

**Rješenje: 3**

11.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n}$$

**Rješenje: 0**

12.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 5}{2n + 10}$$

**Rješenje: 2**

13.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^9 + 2n^6 - 7n}{2n^9 - n^7 - 4n^3}$$

**Rješenje:  $\frac{3}{2}$**

Pronađi prve izvode u narednim zadacima:

14.

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2x - 4$$

**Rješenje:**

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 6x + 2$$

15.

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x + 4}$$

**Rješenje:**

$$f'(x) = \frac{5}{(x + 4)^2}$$

16.

$$f(x) = 3x^8 + e^x - \frac{x}{x^2 - 1}$$

**Rješenje:**

$$f'(x) = 24x^7 + e^x + \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

17.

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{3}{x^4} - \frac{1}{2^5}$$

**Rješenje:**

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^2} - \frac{12}{x^5}$$

18.

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

**Rješenje:**

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

19.

$$f(x) = x \sin x$$

**Rješenje:**

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

20.

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

**Rješenje:**

$$f'(x) = \cos x + \sin x$$