**SVEUČILIŠTE/UNIVERZITET "VITEZ"**

**TRAVNIK**

**M A T E M A T I K A**

**S A D R Ž A J**

**I GLAVA** str.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **ISKAZNA ALGEBRA. SKUPOVI. ALGEBARSKE STRUKTURE** | 15 |
| **1.** | ***Iskazna algebra*** | 15 |
|  | 1.1. Pojam iskaza | 15 |
|  | 1.2. Osnovne operacije sa iskazima | 16 |
|  | 1.2.1. Negacija | 16 |
|  | 1.2.2. Disjunkcija | 16 |
|  | 1.2.3. Konjukcija | 17 |
|  | 1.2.4. Implikacija | 17 |
|  | 1.2.5. Ekvivalencija | 18 |
|  | 1.3. Iskazna algebra (1,0) | 19 |
|  | 1.3.1. Tautologija | 20 |
|  | 1.4. Zadaci za vježbu | 22 |
| **2.** | ***Skupovi*** | 25 |
|  | 2.1. Pojam skupa | 25 |
|  | 2.2. Jednakost skupova. Univerzalni skup | 26 |
|  | 2.3. Operacije sa skupovima | 28 |
|  | 2.3.1. Unija skupova | 28 |
|  | 2.3.2. Presjek skupova | 29 |
|  | 2.3.3. Razlika skupova | 30 |
|  | 2.3.4. Komplement skupova | 31 |
|  | 2.4. Partitivni skup | 31 |
|  | 2.4.1. Algebra skupova | 32 |
|  | 2.5. Pojam uređenog skupa | 34 |
|  | 2.6. Direktni proizvod skupova | 35 |
|  | 2.7. Zadaci za vježbu | 37 |
| **3.** | ***Relacije*. *Funkcija*** | 39 |
|  | 3.1. Relacije | 39 |
|  | 3.1.1. Binarna relacija | 39 |
|  | 3.1.2. Relacija ekvivalencije | 40 |
|  | 3.1.3. Relacija poreka | 41 |
|  | 3.2. Funkcije | 42 |
|  | 3.3. Zadaci za vježbu | 44 |
| **4.** | ***Binarna operacija*** | 45 |
|  | 4.1. Grupa. Prsten. Polje | 46 |
|  | 4.2. Skup realnih brojeva | 49 |
|  | 4.2.1. Skup prirodnih brojeva | 50 |
|  | 4.2.1.1. Matematička indukcija | 51 |
|  | 4.2.1.2. Binomna formula | 54 |
|  | 4.2.2. Skup cijelih brojeva | 56 |
|  | 4.2.3. Skup racionalnih brojeva | 57 |
|  | 4.2.4. Skup iracionalnih brojeva | 57 |
|  | 4.2.5. Brojna prava | 58 |
|  | 4.2.6. Apsolutna vrijednost realnog broja | 59 |
|  | 4.2.7. Interval. Okolina i tačka nagomilavanja | 63 |
|  | 4.2.8. Još o skupovima | 64 |
|  | 4.3. Skup kompleksnih brojeva | 65 |
|  | 4.3.1. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja | 69 |
|  | 4.3.2. Množenje kompl. brojeva u trigonom. obliku | 70 |
|  | 4.3.3. Korjenovanje kompleksnih brojeva | 71 |
|  | 4.3.4. Inverzni element kompleksnog broja | 72 |
|  | 4.4. Zadaci za vježbu | 73 |

**II GLAVA**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **ELEMENTI LINEARNE ALGEBRE** | 76 |
| **1.** | ***Vektorski prostor*** | 76 |
|  | 1.1. Linearna kombinacija vektora | 78 |
|  | 1.2. Baza vektorskog prostora | 80 |
|  | 1.3. Euklidov vektorski prostor | 82 |
|  | 1.4. Normirani i metrički prostori | 83 |
|  | 1.5. Zadaci za vježbu | 88 |
| **2.** | ***Linearna transformacija*. *Matrica*** | 89 |
|  | 2.1. Linearna transformacija | 89 |
|  | 2.2. Matrica | 90 |
|  | 2.2.1. Definicija matrice | 90 |
|  | 2.2.2. Operacije sa matricama | 93 |
|  | 2.2.3. Kvadratna matrica i njena determinanta | 96 |
|  | 2.2.4. Minori i kofaktori determinante | 101 |
|  | 2.2.5. Adjungovana matrica. Inverzna matrica | 103 |
|  | 2.2.6. Elementarne transformacije matrica. Rang matrice | 106 |
|  | 2.2.7. Zadaci za vježbu | 110 |
| **3.** | ***Sistemi linearnih algebarskih jednačina*** | 113 |
|  | 3.1. Definicija i osnovni pojmovi | 113 |
|  | 3.2. Rješavanje sistema od *n* jednačina sa *n* nepoznatih | 114 |
|  | 3.3. Sistem od *m* jednačina sa *n* nepoznatih | 116 |
|  | 3.4. Gaussov metod rješavanja sistema linearnih jednačina | 121 |
|  | 3.5. Bazna rješenja | 124 |
|  | 3.6. Zadaci za vježbu | 125 |

**III GLAVA**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **FUNKCIJE JEDNE PROMJENLJIVE** | 127 |
| **1.** | ***Definicija i osnovni pojmovi*** | 127 |
|  | 1.1. Zadavanje funkcije | 127 |
|  | 1.2. Klasifikacija funkcija u donosu na grafik | 130 |
|  | 1.2.1. Ograničene i neograničene funkcije | 130 |
|  | 1.2.2. Parne i neparne funkcije | 132 |
|  | 1.2.3. Periodične funkcije | 133 |
|  | 1.2.4. Monotone funkcije | 134 |
|  | 1.2.5. Lokalni ekstremi | 134 |
|  | 1.3. Elementarne funkcije | 135 |
|  | 1.3.1. Algebarske funkcije | 135 |
|  | 1.3.1.1. Osnovne teoreme cijelih racionalnih funkcija | 136 |
|  | 1.3.1.2. Rastavljanje razlomljenih racionalnih funkcija  na zbir elementarnih razlomaka | 139 |
|  | 1.3.1.3. Iracionalne funkcije | 146 |
|  | 1.3.2. Transcedentne funkcije | 146 |
|  | 1.3.2.1. Eksponencijalna i logaritamska funkcija | 146 |
|  | 1.3.2.2. Trigonometrijske funkcije | 149 |
|  | 1.3.2.3. Ciklometrijske funkcije | 154 |
|  | 1.4. Zadaci za vježbu | 155 |
| **2.** | ***Niz*. *Granična vrijednost niza*** | 156 |
|  | 2.1. Pojam niza | 156 |
|  | 2.2. Pojam granične vrijednosti | 158 |
|  | 2.3. Neke osobine konvergentnih nizova | 159 |
|  | 2.4. Primjeri konvergentnih i divergentnih nizova | 162 |
|  | 2.5. Algebra konvergentnih nizova | 164 |
|  | 2.6. Jedan kriterij konvergencije nizova | 169 |
|  | 2.7. Broj *e* | 171 |
|  | 2.8. Primjeri graničnih vrijednosti nizova | 177 |
|  | 2.9. Zadaci za vježbu | 179 |
| **3.** | ***Diferencijalni račun*** | 180 |
|  | 3.1. Granična vrijednost funkcija | 180 |
|  | 3.1.1. Pojam granične vrijednosti | 180 |
|  | 3.1.2. Lijeva i desna granična vrijednost | 184 |
|  | 3.1.3. Beskonačna granična vrijednost | 186 |
|  | 3.1.4. Osnovne teoreme o graničnim vrijednostima | 186 |
|  | 3.1.5. Neke važnije granične vrijednosti | 190 |
|  | 3.1.6. Beskonačno male i beskonačno velike funkcije | 193 |
|  | 3.1.7. Zadaci za vježbu | 195 |
|  | 3.2. Neprekidnost funkcija | 196 |
|  | 3.2.1. Računanje sa neprekidnim funkcijama | 200 |
|  | 3.2.2. Osobine neprekidnih funkcija | 201 |
|  | 3.2.3. Zadaci za vježbu | 203 |
|  | 3.3. Izvodi i diferencijali | 204 |
|  | 3.3.1. Izvod funkcije | 204 |
|  | 3.3.1.1. Geometrijsko značenje izvoda | 205 |
|  | 3.3.1.2. Osobine diferencijabilnih funkcija | 206 |
|  | 3.3.1.3. Pravila diferenciranja | 207 |
|  | 3.3.1.4. Izvodi nekih elementarnih funkcija | 209 |
|  | 3.3.1.5. Tablica osnovnih izvoda | 213 |
|  | 3.3.1.6. Neki primjeri izvoda | 214 |
|  | 3.3.1.7. Izvod složene funkcije | 215 |
|  | 3.3.1.8. Izvod funkcije u parametarskom obliku | 216 |
|  | 3.3.1.9. Logaritamski izvod | 218 |
|  | 3.3.2. Izvodi višeg reda | 219 |
|  | 3.3.2.1. Formula za izračunavanje *n-*tog izvoda | 220 |
|  | 3.3.2.2. Viši izvodi funkcija u parametarskom obliku | 221 |
|  | 3.3.3. Diferencijal funkcija | 222 |
|  | 3.3.3.1. Geometrijsko značenje diferencijala | 224 |
|  | 3.3.4. Zadaci za vježbu | 225 |
|  | 3.4. Osnovne teoreme diferencijalnog računa | 227 |
|  | 3.4.1. Teoreme o srednjim vrijednostima | 227 |
|  | 3.4.2. L'Hospitalove teoreme | 232 |
|  | 3.4.3. Taylorova formula | 237 |
|  | 3.4.4. Zadaci za vježbu | 241 |
|  | 3.5. Ispitivanje funkcija pomoću izvoda | 242 |
|  | 3.5.1. Monotone funkcije | 242 |
|  | 3.5.2. Lokalni ekstremi funkcije | 243 |
|  | 3.5.3. Konveksne funkcije | 245 |
|  | 3.5.4. Asimptote funkcije | 248 |
|  | 3.5.5. Plan ispitivanja toka funkcija | 251 |
|  | 3.5.6. Zadaci za vježbu | 254 |

**IV GLAVA**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **INTEGRALI** | 256 |
| **1.** | ***Neodređeni integrali*** | 256 |
|  | 1.1. Pojam neodređenog integrala | 256 |
|  | 1.2. Neke osobine neodređenog integrala | 257 |
|  | 1.3. Jednostavnija pravila integriranja | 258 |
|  | 1.4. Tablica osnovnih integrala | 259 |
|  | 1.5. Integracija metodom smjene | 261 |
|  | 1.6. Metoda parcijalne integracije | 262 |
|  | 1.7. Integracija racionalnih funkcija | 266 |
|  | 1.8. Integracija nekih iracionalnih funkcija | 269 |
|  | 1.8.1. Integral funkcija oblika | 269 |
|  | 1.8.2. Integral binomnog diferencijala | 271 |
|  | 1.8.3. Integral funkcija oblika | 274 |
|  | 1.9. Integracija nekih trigonometrijskih funkcija | 278 |
|  | 1.10. Zadaci za vježbu | 281 |
| **2.** | ***Određeni integrali*** | 283 |
|  | 2.1. Rimanov integral | 283 |
|  | 2.2. Uslovi postojanja *R-*integrala | 287 |
|  | 2.3. Klase *R-*integrabilnih funkcija | 288 |
|  | 2.4. Osobine *R-*integrala | 289 |
|  | 2.5. Teorema o srednjim vrijednostima | 292 |
|  | 2.6. Primjeri *R-*integrala | 294 |
|  | 2.7. Određeni integral kao funkcija gornje međe | 295 |
|  | 2.8. Osnovna formula integralnog računa | 296 |
|  | 2.9. Integracija metodom smjene kod *R-*integrala | 297 |
|  | 2.10. Parcijalna integracija *R-*integrala | 298 |
|  | 2.11. Nepravi integrali | 299 |
|  | 2.11.1. Integral sa beskonačnim granicama | 300 |
|  | 2.11.2. Integral neograničene funkcije | 302 |
|  | 2.12. Neke primjene *R-*integrala | 304 |
|  | 2.12.1. Izračunavanje površina | 304 |
|  | 2.12.2. Izračunavanje zapremine tijela | 308 |
|  | 2.12.3. Izračunavanje površi tijela | 310 |
|  | 2.13. Zadaci za vježbu | 311 |

**V GLAVA**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **FUNKCIJE VIŠE PROMJENLJIVIH** | 313 |
| **1.** | ***Diferencijalni račun funkcije više promjenljivih*** | 313 |
|  | 1.1. Osnovni pojmovi funkcija više promjenljivih | 313 |
|  | 1.2. Granična vrijednost funkcije | 316 |
|  | 1.3. Neprekidnost funkcije | 319 |
|  | 1.4. Parcijalni izvodi | 320 |
|  | 1.4.1. Definicija parcijalnog izvoda | 320 |
|  | 1.4.2. Geometrijsko značenje parcijalnih izvoda | 321 |
|  | 1.4.3. Pojam diferencijabilnosti funkcija | 323 |
|  | 1.4.4. Parcijalni izvodi složene funkcije | 325 |
|  | 1.4.5. Parcijalni izvodi višeg reda | 328 |
|  | 1.4.6. Totalni diferencijali. Izvod implicitne funkcije | 330 |
| **2.** | ***Taylorova formula*. *Ekstremi*** | 333 |
|  | 2.1. Taylorova formula | 333 |
|  | 2.2. Ekstremi funkcije | 335 |
|  | 2.3. Vezani ekstremi | 338 |
|  | 2.4. Zadaci za vježbu | 341 |

**VI GLAVA**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE** | 343 |
| **1.** | ***Opšti pojmovi diferencijalnih jednačina*** | 343 |
|  | 1.1. Definicija diferencijalne jednačine | 343 |
|  | 1.2. Klasifikacija i red diferencijalnih jednačina | 343 |
|  | 1.3. Formiranje obične diferencijalne jednačine | 344 |
|  | 1.4. Rješenje diferencijalne jednačine | 346 |
| **2.** | ***Diferencijalne jednačine prvog reda*** | 347 |
|  | 2.1. Integralne krive diferencijalne jednačine | 347 |
|  | 2.2. Rješavanje nekih oblika diferencijalnih jednačina | 347 |
|  | 2.2.1. Jednačina sa razdvojenim promjenljivim | 348 |
|  | 2.2.2. Jednačina sa razdvojivim promjenljivim | 348 |
|  | 2.2.3. Homogena jednačina | 349 |
|  | 2.2.4. Linearna jednačina | 353 |
|  | 2.2.5. Bernulijeva jednačina | 356 |
|  | 2.3. Zadaci za vježbu | 357 |
| **3.** | ***Linearne diferencijalne jednačine višeg reda*** | 358 |
|  | 3.1. Neke nepotpune jednačine | 358 |
|  | 3.2. Opšta teorija linearnih diferencijalnih jednačina reda *n* | 360 |
|  | 3.2.1. Definicija linearne diferencijalne jednačine | 360 |
|  | 3.2.2. Transformacija linearne jednačine | 361 |
|  | 3.2.3. Opšta teorija linearnih homogenih diferencijalnih  jednačina | 361 |
|  | 3.2.4. Wronski-jeva determinanta | 362 |
| **4.** | ***Rješavanje linearnih diferencijalnih jednačina reda n*** | 363 |
|  | 4.1. Homogena jednačina drugog reda sa konstantnim  koeficijentima | 363 |
|  | 4.2. Nehomogena jednačina sa konstantnim koeficijentima | 366 |
|  | 4.3. Zadaci za vježbu | 372 |
| **5.** | ***Indeks pojmova*** | 373 |
| **6.** | ***Literatura*** | 376 |

**I G L A V A**

**ISKAZNA ALGEBRA. SKUPOVI.   
ALGEBARSKE STRUKTURE**

**1. ISKAZNA ALGEBRA**

**1.1. Pojam iskaza**

Iskaz je ona rečenica koja može da ima jednu i samo jednu istini-tosnu vrijednost: TAČAN, NETAČAN (odnosno istinit, neistinit). Tačan iskaz zovemo TVRĐENJE (STAV).

Navedimo nekoliko primjera iskaza:

1. Broj 10 je jednak razlici brojeva 15 i 5.

2. Broj 8 je veći od broja 1.

3. Broj 7 je manji od broja 2.

4. Postoji realan broj takav da je .



5. Postoji realan broj *x* takav da je .



6. Broj 10 je djeljiv brojem 3.

Među ovim iskazima tačni su 1. 2. 5. dok su 3. 4. i 6. netačni.

Znak za istinitosnu vrijednost iskaza *p* je , i istinitosnu vri-jednost TAČAN označavamo brojem 1, a istinitosnu vrijednost NETAČAN brojem 0. Često se istinitosna vrijednost tačan označava i znakom **,** a istinitosna vrijednost netačan sa ⊥ što se čita "te" odnosno "nete".



Sa iskazima se pomoću LOGIČKIH OPERACIJA mogu praviti novi iskazi. Osnovne logičke operacije su: *negacija, disjunkcija, konjukcija, implikacija i ekvivalencija.*

**1.2. Osnovne operacije sa iskazima**

**1.2.1. Negacija**

**Definicija 1.1.** *Negacija iskaza* *x* *je* "*ne x*" *i označavamo ga sa* .



Navedimo nekoliko primjera negacije iskaza.

1. Za *x*:"Kiša pada" je "Kiša pada " : " Nije istina da kiša pada" ili "Kiša ne pada".



2. Za je "nije .



3. Za je .



Negacija tačnog iskaza je netačan iskaz, a negacija netačnog iskaza je tačan iskaz.

Istinitosna vrijednost negacije iskaza može se dati tabelama 1.1.



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 1 | 0 | ili | 1 | 0 |
|  | 0 | 1 |  | 0 | 1 |

Tabela 1.1.

**1.2.2. Disjunkcija**

**Definicija 1.2.** *Disjunkcija dva iskaza* *i q*  *je* *iskaz* , *što se simbolički zapisuje* .



*Disjunkcija iskaza* *je tačna ako je*:



1. *tačan i*  *tačan*,



2. *tačan*, *a* *netačan*,



3. *netačan*, *a* *tačan*,



*a netačan ako je* *netačan i* *netačan iskaz*.



Istinitosna vrijednost disjunkcije iskaza može se dati tabelama 1.2.



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | 1 | 0 |
|  | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |
|  | 1 | 0 | 1 | ili | 0 | 1 | 0 |
|  | 0 | 1 | 1 |  |  |  |  |
|  | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |

Tabele 1.2.

Za disjunkciju iskaza se često kaže da je tačna ako je bar jedan od tih iskaza tačan.



Naprimjer, ako su redom iskazi tada je disjunkcija tačan iskaz jer je tačan iskaz . Tačan je i iskaz , jer su tačni iskazi i .



**1.2.3. Konjukcija**

**Definicija 1.3.** *Konjukcija iskaza* *p i q* *je iskaz* "*p i q*", *što se označava sa* , *i ona je tačna ako su* *p i q* *tačni, a netačna ako* *p i q* *imaju druge istinitosne vrijednosti*.



Istinitosna tablica za konjukciju iskaza , prema definiciji 1.3. je data tabelama 1.3.



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | 1 | 0 |
|  | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 0 |
|  | 1 | 0 | 0 | ili | 0 | 0 | 0 |
|  | 0 | 1 | 0 |  |  |  |  |
|  | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |

Tabele 1.3.

**1.2.4. Implikacija**

**Definicija 1.4.** *Implikacija iskaza* *p i q* *je iskaz "Ako* *p* *onda je* *q*", *što se označava sa* "". *Ona je netačan iskaz samo u slučaju da je* *p* *tačan a* *q* *netačan iskaz. U svim ostalim slučajevima ona je tačan iskaz*.



Prema tome istinitosne vrijednosti implikacije izgledaju kao u tabe-lama 1.4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | 1 | 0 |
|  | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 0 |
|  | 1 | 0 | 0 | ili | 0 | 1 | 1 |
|  | 0 | 1 | 1 |  |  |  |  |
|  | 0 | 0 | 1 |  |  |  |  |

Tabele 1.4.

Za rečenicu "Ako je *p* onda je *q*" ima više rečenica sa istim značenjima, kao na primjer:

1. Ako *p* onda *q*.

2. Iz *p* slijedi *q*.

3. *p* povlači *q*.

4. *p* je pretpostavka, a *q* je posljedica.

5. *p* je dovoljan uslov za *q*.

6. *q* je potreban uslov za *p*.

Tako, naprimjer, isto značenje imaju sljedeće rečenice:

1. Ako je , onda jednačina ima rješenje po .



2. Iz , slijedi da jednačina ima rješenje po .



3. , povlači da jednačina ima rješenje po .



4. je dovoljan uslov da jednačina ima rješenje po .



**1.2.5. Ekvivalencija**

**Definicija 1.5.** *Ekvivalencija iskaza* *p i q* *je iskaz* " *je ako i samo ako je* ". *Ona je istinita ako* *p i q* *imaju jednake istinitosne vrijednosti, a netačna ako* *p i q* *imaju različite istinitosne vrijednosti*.



Ekvivalenciju iskaza označavamo sa . Prema defi-niciji ekvivalencije iskaza njene istinitosne vrijednosti su date tabe-lama 1.5.



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | 1 | 0 |
|  | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 0 |
|  | 1 | 0 | 0 | ili | 0 | 0 | 1 |
|  | 0 | 1 | 0 |  |  |  |  |
|  | 0 | 0 | 1 |  |  |  |  |

Tabele 1.5.

Pored rečenice "*p* je ako i samo ako je *q*" isto značenje imaju i rečenice:

1. Ako je *p* onda je *q* i ako je *q* onda je *p*.

2. *p* je ekvivalentno sa *q*.

3. je potreban i dovoljan uslov za .



Tako naprimjer, isto značenje imaju rečenice:

1. Prirodan broj *n* je djeljiv sa tri ako i samo ako je zbir cifara broja *n* djeljiv sa tri. 2. Ako je zbir cifara prirodnog broja *n* djeljiv sa tri onda je i broj djeljiv sa tri i ako je prirodan broj *n* djeljiv sa tri onda je zbir cifara djeljiv sa tri.

3. Da bi prirodan broj *n* bio djeljiv sa tri potrebno je i dovoljno da mu je zbir cifara djeljiv sa tri.

**1.3. Iskazna algebra (1,0)**

U dosadašnjem radu smo iskaze označavali simbolima koji se nazivaju iskazna slova. U matematičkoj logici se pored iskaznih slova uvodi i pojam iskazne formule.



**Definicija 1.6.** 1. *Iskazna slova su iskazne formule* (*Iskazne formule ćemo označavati velikim štampanim latinskim slovima*, )



2. *Ako su* *A i B* *iskazne formule, tada su i* , *iskazne formule*.



3. *Iskazne formule mogu se obrazovati jedino pomoću konačnog broja logičkh operacija*.

Svaka iskazna formula ima i svoju istinitosnu vrijednost koja se mo-že predstaviti tablicom istinitosti za datu formulu. Tako, naprimjer, iskazna formula: ima sljedeću tablicu istinitosti, tabela 1.6.



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *A* | *B* |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Tabela 1.6.

Ili, naprimjer, tablica istinitosti za iskaznu formulu:

, je



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Tabela 1.7.

Vidimo, iz prethodna dva primjera, da se istinitosna vrijednost iskaza formule od dva iskazna slova dobija kao rezultat kombinacija istinitosnih vrijednosti ta dva iskaza. U slučaju da se iskazna formula sastoji od tri iskazna slova tada bi tablica imala kombinacija istinitosnih vrijednosti iskaznih slova. Tako, naprimjer, iskazna formula



ima tabelu istinitosnih vrijednosti; (tabela 1.8.)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *A* | *B* | *C* |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 1.8.

Na sličan način se obrazuju tabele istinitosnih vrijednosti iskaznih formula koje sadrže četiri ili više iskaznih slova.

**1.3.1. Tautologija**

**Definicija 1.7.** *Iskazna formula je tautologija ako za sve istinitosne vrijednosti svojih iskaznih slova dobija vrijednost*  1.

***Primjer* 1.1.** Pokazati da iskazna formula



predstavlja tautologiju.

Tabela istinitosne vrijednosti iskazne formule *Y* glasi:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela 1.9.

Kao što se vidi iz tabele iskazna formula ima uvijek istinitosnu vrijednost 1za sve kombinacije istinitosnih vrijednosti iskaznih slova , pa jepre-ma definiciji 1.7. formula *Y*  tautologija.

Navedimo neke važnije tautologije sa njihovim imenima:

1. , (Zakon reflektivnosti za implikaciju)

2. , (Zakon isključenja trećeg)

3. , (Zakon neprotivrječnosti)

4. , (Zakon dvojne negacije)

5. , (Pircerov zakon)

6. , (Zakon tranzitivnosti za implikaciju)

7. , (Zakon kontrapozicije)

8. , (Zakon tranzitivnosti

ekvivalencije)

9. , (Zakon negacije premise)

10. , (Zakon idenpotencije za )

11. , (Zakon komutativnosti za )

12. , (Zakon asocijativnosti za )

13. , (Zakon asocijativnosti za )

14. , (Zakon distributivnosti 

prema )

15. , (Zakon distributivnosti 

prema )

16. , (Zakon apsorpcije  prema )

17. , (Zakon apsorpcije  prema )

 (De Morganovi zakoni)

Da su navedene iskazne formule zaista tautologije, lahko se može do-kazati pomoću istinitosnih tablica za svaku formulu posebno. Ti dokazi čita-ocu mogu poslužiti kao primjeri za dokazivanje da je data iskazna formula tautologija.

Tautologije od 1 do 19 mogu poslužiti za dokazivanje drugih tauto-logija, a da se pri tome ne koriste tablice istinitosnih vrijednosti. Tako, na pri-mjer, pokažimo da je iskazna formula



tautologija.

Ako se pođe od lijeve strane date ekvivalencije i ako se ova formula zamjenjuje ekvivalentnim formulama, datim u prethodnom spisku ekvivale-ncija, dobiće se desna strana date ekvivalencije.Taj postupak bi izgledao ovako:

















.

Dakle, dobili smo desnu stranu iskazne formule, što znači da je ta formula tautologija.

**1.4. Zadaci za vježbu**

**1.** Koji su od datih iskaza tačni? Broj 1 zadovoljava:

a) jednačinu ,

b) jednačinu ,

c) jednačinu ,

d) nejednačinu .

**2.** Odrediti istinitosnu vrijednost iskaza:

a) Zbir dvije stranice trougla je veći od treće.

b) Uglovi pravougaonika su jednaki.

c) Simetrale stranica trougla sijeku se u jednoj tački.

d) Jednakokraki trougao ima tri ose simetrije.

**3.** Obrazovati negaciju date rečenice i odrediti njenu istinitosnu vrijednost:

a) Broj 2 je prirodan broj.

b) 3 je rješenje jednačine .

c) Simetrala duži ne prolazi kroz njeno središte.

d) Trougao ima dva prava ugla.

**4.** Napisati tablice istinitosti za sljedeće iskazne formule:

a) 

b) 

c) .

**5.** Pokazati da su date iskazne formule tautologije, a da se ne formiraju tablice istinitosti:

a) ,

b) ,

c) ,

d) .

**6.** Riješiti sistem jednačina

a: 

b: 

c: .

***Rješenje.*** Iz sistema jednačina slijede tautologije





.

Označimo iskaze  sa  respektivno. Dati sistem će glasiti:

a: 

b: 

c: ,

pa je

.

Kako je



tautologija, (vidjeti primjer ispred zadataka za vježbu) to je



odnosno

.

**7.** Četiri studenta A, B, C i D učestvovala su u takmičenju i zauzela prva četiri mjesta. Kad su ih pitali za redoslijed, dobili su tri različita odgovora:

1. C-prvi, B-drugi,

2. C-drugi, D-treći,

3. B-drugi, D-četvrti.

Usvakom odgovoru bar jedan je tačan. Odrediti pobjednika.

***Rješenje*.** Uvedimo oznake  i  koje ozna-čavaju da su igrači A, B, C i D zauzeli *i*-to mjesto. Odgovori 1, 2 i 3 treba da daju tačan odgovor, tj. treba da je

,

što nakon sređivanja daje:



Iskazna formula  je netačna za sve moguće kombinacije iskaznih slova, jer je nemoguće da je *C* prvi i da je drugi, a da je *B* drugi. Na isti način se zaključuje da su iskazne formule , 

 ,

netačne. Znači ostaje



odnosno

.

Znači mogući redosljedi su: C-prvi, B-drugi, D-treći, A-četvrti ili B-drugi, D-treći.

**8.** Četiri studenta se takmiče i nakon toga su odgovorili da su postigli sljedeći plasman:

A: nisam bio ni prvi ni posljednji

B: nisam bio posljednji

C: bio sam prvi

D: bio sam posljednji.

Tri data odgovora su tačna, a jedan je lažan. Odrediti poredak i ko nije govorio istinu.

**2. Skupovi**

**2.1. Pojam skupa**

Skup je osnovni pojam u matematici i ne definiše se. On se samo može opisati. Naime, pojam skupa se najlakše može shvatiti na primjerima. Tako, govorimo o skupu učenika jednog razreda ili odjeljenja neke škole, o skupu preduzeća koja se bave proizvodnjom određenog artikla, o skupu tačaka jedne ravni koje su jednako udaljene od jedne stalne tačke te ravni, o skupu prirodnih brojeva, itd.

U prethodnim primjerima posmatrano je više objekata zajedno, objekata koji imaju zajedničku osobinu, koji predstavljaju određenu cjelinu, koja se naziva skup ili množina.

Da bi se simbolično označilo da skup predstavlja određenu cjelinu skupovi se označavaju jednim simbolom, jednim slovom, i oni se obično označavaju velikim latinskim štampanim slovima. Tako, na primjer, skupovi se označavaju sa:. Skup je, dakle, neka cjelina sastavljena od nekih za tu cjelinu osnovnih djelova, koji se nazivaju elementi skupa, i oni se obično označavaju malim latinskim slovima. Činjenicu da je *a* element skupa *A* simbolično se označava sa



i čita "*a* je element skupa *A*" ili "*a* pripada skupu *A*". Činjenica da *b* nije element skupa *A* se simbolično označava sa

.

Za skup se smatra da je poznat ili zadan ako se za bilo koji objekat može jednoznačno reći da li pripada ili ne pripada tom skupu. Zadati skup  znači dati zakon, ograničenje, propis, specifikaciju osobina prema kojima se potpuno određuju svi elementi toga skupa[[1]](#footnote-2).

U nekim slučajevima skup  može biti zadan jednostavnim nabra-janjem svih elemenata koji pripadaju tome skupu. Tako, naprimjer, kažemo "Skup *A* svih cifara dekadnkg brojnog sistema. Jasno je da su to cifre: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 elementi toga skupa i da nema drugih. Činjenicu da cifre: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 čine skup *A* pišemo

,

tj. sve elemente pišemo u veliku zagradu.

Skup može biti zadan i nabrajanjem osobina koje moraju imati objekti da bi bili elementi skupa *A*. Tako, naprimjer, skup *A* je skup svih prirodnih brojeva većih od 10 i manjih od 16. Očigledno je da su to brojevi 11,12,13,14,15 i da nema drugih. Dakle,

.

Ako se sa ***N*** označi skup prirodnih brojeva tada se skup *A* skraćeno označava sa:

(2.1) .

Dvije tačke ":" iza kojih su dati uslovi koje moraju ispunjavati članovi skupa *A* se čitaju: "takvih da", "za koje je", "sa osobinom". Prema tome, izraz (2.1) se može pročitati: "*A* je skup elemenata *x* takvih da *x* pripada skupu prirodnih brojeva i *x* ima vrijednost između 10 i 16".

Postoje slučajevi kada se ne mogu nabrojati svi elementi skupa iako se mogu opisati. Tako, na primjer, *A* je skup svih parnih prirodnih brojeva. Jasno je da su 2,4,6,8, itd. elementi skupa. Svi parni prirodni brojevi se ne mogu napisati, iako je potpuno jasno koji elementi čine skup *A*. Skup *A* se

simbolično zapisuje u obliku

,

gdje tri tačke označavaju sve ostale brojeve koji nisu navedeni.

**2.2. Jednakost skupova. Univerzalni skup**

Neka su  skupovi. Ako je svaki element skupa *A* isto-vremeno i element skupa *B*, tj. ako je  onda je , onda se kaže da je *A* podskup skupa *B*, što se simbolično zapisuje



i čita "*A* je sadržan u *B*". Kaže se i da skup *B* sadrži skup *A*, što se piše



i čita "*B* sadrži *A*".

Umjesto "ako je , onda je ", piše se simbolično

,

što se čita "iz  slijedi ", ili " implicira ", ili "ako je  onda je ".

Naglasimo da  znači da je svaki element skupa *A* ujedno i element skupa *B*, što se kratko zapisuje sa

(2.2) ,

gdje znak  znači "svaki".

Ako je svaki element skupa *A* ujedno i element skupa *B* i svaki element skupa *B* ujedno i element skupa *A*, onda su  identični (jednaki) skupovi, što se kratko zapisuje sa



i čita "skup *A* je jednak skupu *B*".

Dakle, dva skupa  su jednaka ako i samo ako se sastoje od istih elemenata.

Ako je  i skup *A* nije jednak skupu *B* tada postoji  takav , što se kratko zapisuje " takvo da ". Za skup *A* se kaže da je pravi dio skupa *B*, što se simbolično zapisuje

.

***Primjer* 2.1.** Skup  je pravi dio skupa , tj. , jer je  i . Takođe i .

***Primjer* 2.2.** Skupovi  su jednaki jer se sastoje od istih elemenata, tj. od elemenata .

Činjenica da skupovi  nisu jednaki zapisuje se simbolično sa



i čita se "skup *A* nije jednak skupu *B*".

Svi skupovi se posmatraju kao dijelovi nekog skupa, kao podskupovi skupa *E*, i tada se shvata da ne postoje skupovi koji nisu podskupovi skupa *E*. Ovako shvaćen skup *E* ima univerzalno značenje i naziva se *univerzalni skup*.

Jasno je da univerzalni skup *E* ima relativno značenje i da varira od slučaja do slučaja. Tako, naprimjer, univerzalni skup može biti skup realnih brojeva, skup kompleksnih brojeva, skup studenata ekonomskog fakulteta, skup preduzeća jedne regije, skup tačaka, itd.

Iz praktičnih razloga dobro je univerzalni skup *E* predstaviti pra-vougaonikom, a njegove podskupove kao dijelove površine tog pravo-ugaonika, Sl.2.1 (Veneov dijagram).



Sl. 2.1.

.**2.3. Operacije sa skupovima**

**2.3.1. Unija skupova**

Neka su  podskupovi univerzalnog skupa *E*. Tada se pod unijom skupova  podrazumijeva skup svih elemenata  koji pripadaju bar jednom od skupova *A* ili *B*.

Ako se sa *C* označi unija skupova , tada se kratko zapisuje

(2.3) ,

gdje je  početno slovo riječi "unija".

***Primjer* 2.3.** Neka je , tada je

.

Ako se, kako je već rečeno, univerzalni skup *E* šematski prikaže pravougaonikom, a skupovi  zatvorenim linijama zajedno sa unu-trašnjim tačkama (Sl.2.2), tada će shematski prikaz unije skupova  biti površina ograničena tačkastom linijom.



Sl. 2.2.

Neka su  podskupovi univerzalnog skupa *E*. Tada uniju skupova  predstavlja skup elemenata koji pripadaju bar jednom od skupova  i označava se sa\*)



ili kratko sa

\*) Ovo slijedi na osnovu asocijativnosti unije skupova, što æe kasnije biti dokazano.

.

Dakle, ako se sa *C* označi ova unija, vrijedi jednakost

(2.4) .

***Primjer* 2.4.** Neka je , tada je

.

**2.3.2. Presjek skupova**

Neka su  podskupovi univerzalnog skupa *E*, tada se skup *C*, koga čine svi elementi koji pripadaju istovremeno i skupu *A* i skupu *B*, tj. skup

(2.5) ,

naziva *presjek skupova* .

Presjek skupova  se simbolično označava sa .

Presjek skupova  univerzalnog skupa *E* shematski je prika-zan dijelom ravni omeđenom tačkastim linijama (Sl.2.3).

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Primjer* 2.5.** Neka je  ,  tada je:  . |

Sl. 2.3.

Može se desiti da presjek skupova  univerzalnog skupa  nema ni jednog elementa, odnosno da podskupovi  nemaju zajedničkih elemenata. Za takve skupove se kaže da su *dijunktni.* Skup bez ijednog elementa naziva se *prazan skup* i obično se označava sa .

Neka su  podskupovi univerzalnog skupa , tada se za skup koji je sastavljen od svih elemenata koji pripadaju istovreme-no svim skupovima  kaže da je presjek skupova  i označava se sa

.

Dakle,

.

**2.3.3. Razlika skupova**

Neka su  podskupovi univerzalnog skupa . Pod razlikom skupova  podrazumijeva se skup svih elemenata skupa  koji nisu istovremeno elementi skupa . Razlika skupova  se simbolično zapisuje sa **** što se čita: " isključeno " ili " bez ".

Definicija razlike skupova  se kratko zapisuje sa:

(2.6) .

***Primjer* 2.6.** Neka je .Tada je

,

jer je .

|  |  |
| --- | --- |
|  | Razlika  šematski je pred-stavljena dijelom ravni ograničene isprekidanom linijom (Sl.2.4). |

Sl. 2.4.

**2.3.4. Komplement skupa**

Neka su  podskupovi univerzalnog skupa  i neka je . Tada je skup svih elemenata skupa  koji nisu elementi skupa  naziva komplement skupa  u odnosu na skup . To se simbolično zapi-suje sa: . Ova definicija se kratko zapisuje sa

(2.7) .

|  |  |
| --- | --- |
|  | Komplement skupa *A* shematski je predstavljen iscrtanim dijelom ravni (Sl.2.5). |

Sl. 2.5.

***Primjer* 2.7.** Neka je  a .

Očigledno je  i tada je  jer je , a .

**2.4. Partitivni skup**

Neka je  podskup univerzalnog skupa  (Sl.2.6). Očigledno je da se skup *X* može razložiti na dva skupa , koji ne moraju biti disjunktni, tj. skup  se može dati kao unija skupova  ili simbolično .

|  |  |
| --- | --- |
| Sl. 2.6. | ***Primjer* 2.8.** Skup  može se razložiti na skupove  i . Skupovi  su se mogli formirati i od drugih elemenata. Naravno, mora se voditi računa da svaki od elementa skupa *X* pripada bar jednom skupu, skupu  ili skupu *B*. |

Od elementa skupa  mogu se formirati: jednočlani skupovi:

, , ;

dvočlani skupovi:

;

tročlani skupovi

, , ;

četvoročlani skupovi:

;

petočlani skup .

Od svih jednočlanih, dvočlanih, tročlanih, četvoročlanih, petočlanog i praznog skupa može se formirati novi skup. Taj skup se naziva *partitivni* skup skupa *X*.

**Definicija. 2.1.** *Skup čiji su elementi svi podskupovi skupa*  *naziva se* ***partitivni skup*** *skupa*  *i obično se obilježava sa*  *i čita* "*partitivni skup skupa* ".

**2.4.1. Algebra skupova**

Neka su  podskupovi univerzalnog skupa . Obrazovanje unije, presjeka i razlike skupova  su osnovne operacije sa skupovima. Za ove operacije vrijede sljedeće osobine:

**1.**  (Zakon identiteta)

**2.**  (Zakon idempotencije)

**3.** , (Zakon komplementacije)

**4.** , (Zakon komutacije)

**5.**  (Zakon asocijacije )

**6.** 

(Zakon distribucije unije u odnosu na presjek odnosno presjeka u odnosu na uniju)

**7.** , (Zakon apsorpcije)

**8.** , (De Morganovi zakoni).

Ove osobine nije teško dokazati. Tako, naprimjer, dokaz za osobinu asocijativnost bi izgledao ovako:









,

(gdje smo koristili odgovarajuće osobine za operaciju "", u 1.3.1.).

Ili, dokaz da je



bi izgledao ovako:







.

Dokažimo i osobinu .







.

Na isti način dokazuju se i ostale osobine, i ti dokazi mogu poslužiti kao primjeri za vježbanje.

Prethodne osobine mogu poslužiti za dokazivanje složenijih jednakosti. Tako, naprimjer, dokazati da je

.

*Dokaz:* 













.

**2.5. Pojam uređenog skupa**

Pored elemenata skupa *A* često se posmatraju podskupovi od dva elementa, npr. podskupovi , ili skupa . Po definiciji jednakosti skupova slijedi da je

,

jer su sastavljeni od istih elemenata. To znači da redoslijed elemenata u skupu nije bitan. Ponekad je bitno precizirati redoslijed elemenata *a* i *b*, i takav skup se naziva *uređeni par* ili *uređena dvojka*. Ako je jedan od elemenata, recimo *a* prvi, tada se skup označava sa . Element "*a*" se naziva prva koordinata, ili prva komponenta, a "*b*" druga koordinata ili druga komponenta.

Dakle, za skup od dva elementa *a* i *b* se kaže da čini uređeni par ili uređenu dvojku ako je određeno koji je od njih prvi, a koji drugi.

Dva uređena para  i  su jednaka, što se piše

,

ako vrijedi

.

Slično se definiše i uređena trojka. Skup od tri elementa *a*, *b* i *c* se naziva uređena trojka, ako se zna koji je od njih prvi, koji je drugi i koji je treći. Ako je "*a*" prvi, "*b*" drugi i "*c*" treći, onda se uređeni skup piše ovako

.

Elementi  se respektivno nazivaju prva, druga i treća komponenta ili koordinata.

Ako su  i  dvije uređene trojke tada je

.

Skup od *n* elemenata  naziva se uređena *n-*torka ako se zna koji je od njh prvi, koji drugi, i tako dalje, koji je *n*-ti, i označava se sa

.

**2.6. Direktni proizvod skupova**

Direktni proizvod (Descartesov\*) ili Kartezijev proizvod) nepraznih skupova  je skup svih uređenih parova  čija je prva kordinata *x* element skupa *A*, a druga komponenta *y* element skupa *B*, i označava se sa . Znak  se čita "*A* puta *B*".

Direktan proizvod skupova *A* i *B* se kratko zapisuje

(2.8) 

***Primjer* 2.9.** Neka je .

Tada je



Formiranje uređenih parova se shematski može prikazati na sljedeći način:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Iz definicije direktnog proizvoda lahko se može zaključiti da on nije komutativan, tj. da u opštem slučaju ne vrijedi jednakost

.

***Primjer* 2.10.** Za skupove  je



\*) R. Descartes (1596-1650), francuski matematièar.

.

Očigledno je, po definiciji jednakosti uređenog para i jednakosti skupova,



U dosadašnjem objašnjenju direktnog proizvoda skupova pretpo-stavljeno je da su skupovi  neprazni. Ovaj proizvod se definiše i za prazne skupove na sljedeći način:

(2.9.) .

Ako je  tada se direktni proizvod



naziva kvadrat skupa *A*.

***Primjer* 2.11.** Neka je , tada je

.

Direktni proizvod skupova , tj. , može se grafički pri-kazati na sljedeći način:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Neka su elementi skupa *A* predstav-ljeni tačkama na horizontalnoj osi, a elementi skupa *B* tačkama na verti-kalnoj osi pravouglog koordinatnog sistema . Tada će tačka  biti tačka u koordi-natnom sistemu  koja se nalazi na presjeku vertikalne i horizontalne linije povučene kroz tačke *a* i *b* (Sl. 2.7). Na isti način se predstavljaju svi ostali elementi skupa . |

Sl. 2.7.

***Primjer* 2.11.** Neka je . Tada je grafički prikaz Dekartovog proizvoda  dat na Sl.2.8.



Sl. 2.8.

Analogno direktnom proizvodu dva skupa se definiše i direktni pro-izvod proizvoljnog broja skupova.

Neka su  neprazni podskupovi. Tada se skup



zove direktni proizvod skupova .

Specijalno, za  dobijamo

.

***Primjer* 2.12.** Neka su , 

***Primjer* 2.13.** Neka je  tada je



**2.7. Zadaci za vježbu**

**1.** Dati su skupovi .

Naći skupove: a) , b) , c) , d) , e) .

**2.** Dati su skupovi .

Naći .

Provjeriti da li je .

**3.** Dati su skupovi kao i u predhodnom primjeru. Pokazati da je .

**4.** Dati su skupovi . Da li se može tražiti

 i ako je moguće naći ga.

**5.** Da li je moguća jednadžba po ?

**6.** Neka je *X* podskup skupa . Riješiti po *X* jednadžbe:

a), b) , c) .

**7.** Odrediti  ako je:

a) ,

b) .

**8.** Dati su skupovi . Odrediti

skup *X*, podskup skupa *E*, koji zadovoljava uslove:

.

**9.** Odrediti komplemente skupova:

a) , b) , c)  u odnosu na skup .

**10.** Odrediti partitivan skup skupa: a) , b) , c) .

**11.** Odrediti direktni proizvod skupova: .

**12.** Neka je . Odrediti: .

**13.** Neka je . Odrediti:

a) , b)  c)  d)  e) .

**14.** Dokazati tačnost sljedećih iskaza: a) ,

b) , c) .

**3. Relacije. Funkcija**

**3.1. Relacije**

**Definicija. 3.1.** *Bilo koji neprazan podskup*  *Dekartovog proizvoda*  *nazivamo* ***n-arna******relacija*** *u tom proizvodu. Za elemente*  *kažemo da su u relaciji* , *ako i samo ako* .

**3.1.1. Binarna relacija**

Ako je u definiciji 3.1.  tada dobijamo relaciju  koja se zove *binarna relacija* u . Specijalno, neprazan podskup  skupa  zove se binarna relacija u *X*. Ako je , tada se kaže da je *x* u relaciji  sa  i piše se  ili .

Skup uređenih parova  koji su u relaciji  piše se

(3.1) .

***Primjer* 3.1.** Neka je , tada je

.

Neka je, naprimjer, relacija

.

Relacija će predstavljati i bilo koji drugi podskup  kao naprimjer



ili neki drugi podskup.

***Primjer* 3.2.** Dat je skup . Napisati relaciju  definisanu sa:

.

Tada je

.

**Definicija 3.2.** *Neka su* *X i Y* *neprazni skupovi i neka je*  *binarna relacija u* . *Tada se*

(3.2) 

*naziva* ***oblast definisanosti*** *ili* ***domena relacije*** , *a*

(3.3) 

***područje vrijednosti*** *ili* ***kodomena relacije*** .

Neka je  binarna relacija, tada se skup



naziva *inverzna relacija* relacije .

**Definicija 3.3.** *Ako je*  *binarna relacija u* , *a*  *binarna relacija u*  *tada se skup*

(3.4) 

*zove proizvod relacije* .

**Definicija 3.4.** *Ako za binarnu relaciju*  *vrijedi*



(3.5) 



*za relaciju se kaže da je* ***refleksivna, simetrična, tranzitivna* *i* *asimetrična***, *respektivno*.

**3.1.2. Relacija ekvivalencije**

**Definicija 3.5.** *Za binarnu relaciju*  *u nepraznom skupu*  *kažemo da je relacija ekvivalencije ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj. ako vrijedi*:



(3.6) 

,

*i označava se sa* "~". *Ako je*  *relacija ekvivalencije i ako je* , *onda kažemo da su* *x i y*  *ekvivalentni i označavamo sa* ~.

***Primjer* 3.3.** Relacija "" u skupu realnih brojeva je relacija ekvivalencije. Relacija "biti sličan" i "biti podudaran" u skupu trouglova su relacije ekvi-valencije.

Neka je u skupu  definisana relacija ekvivalencije ~ i neka je *z* proizvoljan element iz *X*. Neka je  skup svih elemenata iz  ekvivalent-nih sa *z*. Za skup  se kaže da čini klasu ekvivalencije koja odgovara ele-mentu *z*. Neka su  dvije klase koje odgovaraju elementima , tada su skupovi  jednaki ili su disjunktni. Znači skup *X* je podi-jeljen na disjunktne klase koje se zovu *klase ekvivalencije*.

Klasu ekvivalencije skupa *X* koje odgovaraju elementu *x* kratko zapisujemo

(3.7) ~.

Skup svih klasa ekvivalencije skupa *X* se označava sa *X /*~ i naziva količnikom skupa *X* u odnosu na relaciju ~ (odnosno kvocijentnim skupom).

**3.1.3. Relacija poretka**

**Definicija 3.6.** *Za relaciju*



*kažemo da je relacija poretka* (*uređenja*) *ako je ona refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, tj. ako vrijedi*



(3.8) 

.

Relacija uređenja  u skupu *X* označavamo sa "" i umjesto  piše-mo . Ako je  tada pišemo .

Ako za dva elementa  vrijedi  ili  za elemente  se kaže da su uporedivi. Ako su svaka dva elementa skupa *X* uporediva, za skup *X* se kaže da je potpuno ili totalno uređen.

Za skup *X* se kaže da je dobro uređen ako svaki njegov neprazan podskup ima svoj početni element.

Neka je *A* uređen skup i . Ako za neko  vrijedi  tada se za  kaže da je donje ograničenje ili minoranta skupa *X*. Ako za neko  vrijedi  tada se za *b* kaže da je gornje ograničenje ili majoranta skupa *X*.

Ako minoranta *a* (majoranta *b*) skupa *X* pripada skupu *X* onda kažemo da je *a* minimum ( *b* maksimum) skupa *X*. To pišemo

,

odnosno

.

Ako skup svih minoranata skupa *X* ima maksimum *a*, tada se za *a* kaže da je infimum skupa *X*  i piše se

.

Ako skup svih majoranata skupa *X* ima minimum *b*, tada se za *b* kaže da je supremum skupa *X* i piše se

.

Za skup *X* se kaže da je ograničen ako ima minorantu i majorantu.

**3.2. Funkcije**

**Definicija 3.7.** *Neka su* *E i F* *neprazni skupovi. Tada binarnu relaciju*  *koja zadovoljava uslove*

(3.9) 

*nazivamo funkcijom ili preslikavanjem iz* *E*  *u* *F*, *i*  *označavamo sa*

.

Skupove  nazivamo oblast definisanosti ili domenom odnosno područje vrijednosti ili kodomenom funkcije, respektivno.

Funkciju  nazivamo *surjekcija* ili *na* ako je .

Funkciju  nazivamo *injekcija* ili *jedan-jedan* ako vrijedi

.

Funkciju  koja je surjekcija i injekcija nazivamo *bijekcija*.

Neka su  tri neprazna skupa i neka su  funkcije takve da , (Sl. 3.1)



Sl. 3.1.

Funkcijom *f* se svakom elementu  prvo pridružuje element , a zatim funkcijom *g* se svakom elementu  pridru-žuje element . Na taj način se svakom elementu  pridru-žuje potpuno određen element , dakle zadana je funkcija sa . Tu funkciju nazivamo *kompozicijom* funkcija (posrednom funkcijom)  i označavamo je sa . Dakle,

.

***Primjer* 3.4.** Neka je ***R*** (***R*** je skup realnih brojeva) i neka je

,

tada je



.

Za funkcije  kažemo da su jednake ako imaju jednake domene i kodomene i ako je



što pišemo .

***Primjer* 3.5.** Neka su  funkcije ***R*** u ***R*** definisane sa

, 

tada je .

Neka je  injekcija i neka je

,

tj. kodomena funkcije . Tada svakom elementu  odgo-vara jedan i samo jedan element  takav da je .

Funkciju  zovemo *inverzna funkcija* funkcije .

Sada je

; ,

tj. slika  funkcije *f* je domena funkcije , a slika  je domena funkcije *f*.

Dalje je



i



a to su *identična preslikavanja*.

**3.3. Zadaci za vježbu**

**1.** U skupu  definisana je relacija  na sljedeći način: ako i samo ako je .

1) Koja je od formula:  tačna?

2) Riješiti po *x* formule: .

**2.** Definicijom:  ako i samo ako je  je određena relacija skupa . Dokazati da je relacija  refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija. Odrediti klase ekvivalencije.

**3.** U skupu  data je relacija "završava se istom cif-rom". Ispitati da li je  relacija ekvivalencije na *E*.

**4.** Da li je relacija "biti djeljiv" relacija ekvivalencije u skupu prirodnih brojeva?

**5.** Dati su skupovi  Relacija  definisana je ovako: . Ispitati da li je *f* funkcija i ako jeste odrediti kodomenu funkcije.

**6.** Zadana je funkcija . Naći: .

**7.** Funkcije  su definisane na skupu realnih brojeva formulama:  i . Naći: .

**8.** Funkcija  gdje je *X* skup realnih brojeva, zadana je formu-lom . Naći inverznu funkciju funkcije *f*.

**9.** Neka je . Odrediti: , .

**4. Binarna operacija**

Postupak kojim se elementima skupa  jednoznačno pridružuje element skupa *E* naziva se binarna operacija.

Znak koji pokazuje da nad elementima  treba izvršiti binar-nu operaciju naziva se operator i obično se označava sa  . Tako, na primjer, ako se uređenom paru  pridružuje  to se sim-bolično zapisuje sa



i čita "*a* operacija *b* jednako *c*".

Za binarnu operaciju se često razmatraju sljedeće osobine.

**1.**  *Zatvorenost*. Binarna operacija je zatvorena ako je za bilo koja dva elementa  i rezultat binarne operacije , ili kratko, binarna operacija je zatvorena ako vrijedi

(4.1) .

**2.**  *Asocijativnost*. Binarna operacija je asocijativna ako vrijedi

(4.2) .

**3.** *Komutativnost*. Binarna operacija je komutativna ako je

(4.3) .

**4.** *Jedinični element*. Ako postoji  tako da je

(4.4) 

tada se *e* naziva jedinični ili neutralni element.

**5.** *Inverzni element*. Ako binarna operacija ima jedinični element *e* i ako za svako  postoji  takav da je

(4.5) 

tada se  naziva inverzni element elementa *a* za tu binarnu operaciju.

**4.1. Grupa, prsten, polje**

**Definicija 4.1.** *Neka je zadan neprazan skup*  *i u njemu zadana zatvorena binarna operacijav . Skup* *G* *je grupa u odnosu na za-danu binarnu operaciju ako su ispunjeni slijedeći uslovi*:

(4.6)  (***asocijativnost***),

(4.7) *za svako*  *postoji*  ***jedinični******element***  *sa osobinom*

,

(4.8) *za svako*  *postoji* ***inverzni element***  *sa osobinom*

.

*Ako je*, *pored ovih*, *ispunjen i uslov*

(4.9) 

*za grupu* *G* *se kaže da je* ***komutativna*** *ili* ***Abelova grupa***\*).

\*) N. Abel (1802-1829), norveški matematièar

***Primjer* 4.1.** Skup prirodnih brojeva ***N*** u odnosu na operaciju sabiranja ne čini grupu jer nema jediničnog (neutralnog) elementa *e* tj. takvog elementa da je  za svako ***N***.

***Primjer* 4.2.** Skup ***N*** ne čini grupu ni u odnosu na operaciju množenja, jer nema inverznog elementa za svako ***N***.

***Primjer* 4.3.** Skup cijelih brojeva ***Z*** čini Abelovu grupu u odnosu na ope-raciju sabiranja. Nula je jedinični element a suprotan broj je inverzni element. Skup ***Z*** nije grupa u odnosu na operaciju množenja jer nema inverznog ele-menta.

Binarna operacija u Abelovoj grupi obično se označava aditivno, tj. umjesto  obično se piše . Tada se umjesto neutralnog elementa *e* piše 0 (nula element), a umjesto inverznog elementa  piše se  (suprotni element).

**Definicija 4.2.** *Abelova grupa* *R* *za koju je definisana još jedna unutra-šnja operacija, asocijativna i distributivna u odnosu na operaciju grupe naziva se, prsten.*

Ako drugu operaciju nazovemo množenje i označimo sa "" ili pro-sto stavljajući dva elementa jedan pored drugog bez ikakvog znaka tada se osobine koje su date u definiciji (4.2) mogu izraziti sa:

(4.10)  je Abelova grupa

(4.11) 

(4.12) 

(4.13) 

**Definicija 4.3.** *Prsten*   *sa najmanje dva elementa naziva se* ***polje*** *ako čini grupu u odnosu na drugu operaciju*.

To znači da bi skup  bio polje potrebno je da pored uslova (4.10)--(4.13) budu ispunjeni i uslovi:

- za svako  postoji jedinični element u  koga ćemo označavati sa 1 (jedan), tj.

(4.14) ,

- za svako  postoji jedan i samo jedan broj  takav da je

(4.15) .

Ako je ispunjen i uslov

(4.16) 

za polje se kaže da je *komutativno*.

***Primjer* 4.4.** Skup cijelih brojeva je prsten u odnosu na sabiranje i množenje jer je:

1. 

2. ****

3. ****

4. ****

5. ****

6. ****

7. ****

8. ****.

***Primjer* 4.5.** Neka je dat dvočlani skup  i u njemu operacije + i  definisane sljedećim tabelama:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *+* | *n* | *p* |  |  | *n* | *p* |
| *n* | *p* | *n* |  | *n* | *n* | *p* |
| *p* | *n* | *p* |  | *p* | *p* | *p* |

Skup  čini polje u odnosu na ovako definisanu prvu operaciju *+* i drugu operaciju , što nije teško provjeriti.

Naime, skup  čini Abelovu grupu u odnosu na operaciju +, jer je:

1. operacija zatvorena,

2. operacija asocijativna,

3.  je nulti ili neutralni element,

4.  su inverzni elementi od *n* odnosno *p*,

5. , operacija je komutativna.

Na sličan način se provjeravaju ostali uslovi polja, i to može poslužiti kao primjer za vježbu.

**4.2. Skup realnih brojeva**

**Definicija 4.4.** *Neka su u skupu*  *definisane operacije sabi-ranja* +, *množenja*  *i binarna relacija* . *Ako su za svako* ***R***  *ispunjeni uslovi*:

1. ,

2. ,

3. ,

4. ,

5. ,

6. ,

7. ,

8. ,

9. ,

10. ,

11. ,

12. ,

13. ,

14. ,

15. *svaki odozgo ograničen neprazan skup u* ***R*** *ima supremum u* ***R***. *Tada za* *skup* ***R*** *kažemo da je skup realnih brojeva i označavaćemo ga sa* ***R***.

Uređenu četvorku  zovemo *polje realnih brojeva*. Često se umjesto  piše samo ***R***. Uslovi 1 do 15 zovu se *aksiomi sku-pa* *realnih brojeva*.

**Teorema 4.1.** *Za svako* ***R*** *vrijedi*:

1. ,

2. ,

3. ,

4. ,

5. ,

6. ,

7. ,

8. ,

9. ,

10. .

***Dokaz*:**

1. 

,

2. ,

.

3. 

.

4. 

.

5. 

.

6. .

7. .

8. .

9. .

10. Na osnovu aksiome 7. je . Prepostavimo da je , tada bi bilo , odnosno  što je u kontradikciji sa pretpostav-kom. Dakle, mora biti .

**4.2.1. Skup prirodnih brojeva**

Neka je  familija podskupova skupa\*) ***R*** sa osobi-nama:

1. ***N****a*,

2. ***N****a*,

\*) Elementi nekog skupa mogu biti i sami skupovi. U tom

sluèaju govorimo o skupu skupova ili o familiji skupova.

tada se skup ***N*** zove *skup prirodnih brojeva*.

Jasno je da je , što znači da familija *A* nije prazan skup.

Ako za svako ***N*** stavimo  tada se bitne osobine skupa ***N*** mogu dati sljedećom teoremom:

**Teorema 4.2.** (*Peanovi*\*) *aksiomi*)

P1. ***N*** (1 (*jedan*) *je prirodan broj*),

P2. ***N******N*** ( *broj*  *se naziva sljedbenik broja n*),

P3. ,

P4.  (*jedan nije sljedbenik ni jednog prirodnog broja*),

P5. *Ako neki podskup* *M* *skupa prirodnih brojeva* ***N*** *ima osobine*:

1. 

2. *ako skup* *M* *sadrži prirodan broj* *n* *i ako sadrži njegovog sljedbenika* , *onda taj skup sadrži sve prirodne brojeve*, *tj*. ***N***.

*Dokaz* ove teoreme nećemo izvoditi, a čitalac ga može naći npr. u Matematici I, Dimitrije Hajduković, Glas Banjaluke, 1989. str 15.

Prema . slijedi ***N***, a prema  slijedi  i um-jesto  pišemo 2. Dalje je ***N*** i umjesto  pišemo 3, itd. Ovaj postupak se misaono može nastaviti u beskonačnost. Tako se dobija skup  koji ispunjava Peanove aksiome, što nije teško provjeriti, pa se može pisati

***N***.

**4.2.1.1. Matematička indukcija**

Peti Peanov aksiom, koji je poznat i kao princip matematičke induk-cije, upotrebljava se pri dokazivanju iskaza čija formulacija implicira pri-rodne brojeve.

Princip matematičke indukcije može se iskazati i na sljedeći način: Zadan iskaz *P* je istinit za svaki prirodan broj:

1. ako je istinit za prirodan broj 1 (vrijedi za )

2. ako iz pretpostavke da je istinit za prirodan broj  slijedi da je istinit za broj .

Može se desiti da jedan iskaz važi počev od prirodnog broja . Tada se princip matematičke indukcije iskazuje na sljedeći način.

\*) G. Peano (1858-1935), italijanski matematièar.

Ako je neki iskaz istinit za prirodan broj  i ako iz pretpostavke da je istinit za prirodan broj  slijedi da je istinit za , tada je ovaj iskaz istinit za svaki prirodan broj .

***Primjer* 4.5.** Matematičkom indukcijom dokazati da je jednakost



zadovoljena za svako ***N***.

***Rješenje.***

1. Prvo provjerimo tačnost tvrdnje za . Tada je

.

Očigledno je jednakost zadovoljena.

2. Pretpostavimo da je jednakost zadovoljena za  tj. da vrijedi

.

3. Na osnovu 2. i osobina realnih brojeva slijedi da vrijedi jednakost









Dakle jednakost je zadovoljena za  a onda i za svako ***N***.

***Primjer* 4.6.** Dokazati da za svako  i svako ***N*** vrijedi jednakost

.

***Dokaz*.** Za  data jednakost se svodi na , što nakon skraćivanja sa  daje , tj. data jednakost vrijedi za .

Iz pretpostavke da data jednakost vrijedi za  slijedi jednakost



,

što pokazuje da jednakost vrijedi za . Dakle jednakost vrijedi za svako ***N*** .

***Primjer* 4.7.** Dokazati da je za svako ***N***

 djeljivo sa 196 (a)

1. Provjerimo tačnost tvrdnje (a) za ,

.

Time je tvrdnja dokazana.

2. Pretpostavimo da je tvrdnja (a) tačna za  tj. da vrijedi

 (b)

3. Dokažimo tačnost tvrdnje za ,









***Z***.

Kako je faktor *B* proizvoda  cijeli broj, to je taj proizvod djeljiv sa . Dakle, tvrdnja (a) vrijedi za ***N***.

***Primjer* 4.8.** Dokazati:

***N***.

1. Provjerimo tačnost tvrdnje za .

,

što je ispravno.

2. Neka je tvrdnja tačna za , tj. neka vrijedi

.

Tada je

,

što je i trebalo dokazati.

***Primjer* 4.9.** Dokazati nejednakost (Bernulijeva)

***N***.

1. Za  je

.

2. Neka vrijedi, za neko 

.

Pomnožimo li obje strane prethodne nejednakosti sa  dobićemo



.

što je i trebalo dokazati.

**4.2.1.2. Binomna formula**

Razmotrimo značenje sljedećih izraza. Izraz , se čita "*r* faktorijel" i ima vrijednost

(4.17) .

Na primjer, .

Izraz  se čita "" i definiše se sa

(4.18) .

Naprimjer, , .

Napomenimo da je po konvenciji

, .

Dokažimo da vrijede sljedeći identiteti:

(4.19) ,

(4.20) .

***Dokaz*.**









Time je dokazana relacija (4.19).

Za dokaz relacije (4.20) pođimo od jednakosti

(4.21) ,

(4.22) .

Ako se razlomak na desnoj strani relacije (4.21) proširi sa , a razlomak na desnoj strani relacije (4.22) proširi sa  dobiće se

,

,

odakle slijedi tačnost relacije (4.20.)

**Teorema 4.2.** (***Newtonova***\*) ***formula***) *Neka je* ***R***, ***N***. *Tada vrijedi*



*ili kratko*

(4.23) .

***Dokaz*.** Teorema se može dokazati primjenom matematičke induk-cije.

1. Za  je

.

2. Neka formula (4.23) vrijedi za , tj. neka je

(4.24) .

Pomnožimo relaciju (4.24) sa  dobićemo

\*) I. Newton (1643-1727), engleski fizièar i matematièar.





odnosno



odakle na osnovu relacije (4.19) slijedi



ili kratko

.

Na osnovu principa matematičke indukcije, slijedi tačnost tvrdnje.

Napomenimo da se izraz  u relaciji (4.23) naziva -vi bi-nomni koeficijent.

**4.2.2. Skup cijelih brojeva**

Kao što je poznato operacija oduzimanja u skupu prirodnih brojeva nije općenito izvodiva. Razlika  postoji samo u slučaju kada je . Da bi se to ograničenje otklonilo potrebno je skup ***N*** proširiti nulom i skupom −***N***.

Skup

***Z***=−***N******N***

se naziva skup cijelih brojeva. Skup −***N*** se naziva skup cijelih negativnih brojeva.

Skup cijelih brojeva se označava i na sljedeći način:

***Z***

Ovom prilikom nećemo definisati operacije u skupu ***Z*** jer se smatra da su one čitaocu dovoljno poznate.

**4.2.3. Skup racionalnih brojeva**

Skup

***Q*** 

naziva se skup racionalnih brojeva.

Ako je  tada je  za svako ***Z***, dakle skup cijelih brojeva je podskup skupa racionalnih brojeva.

U skupu racionalnih brojeva operacije sabiranja, množenja i oduzi-manja se definišu na sljedeći način:

Neka su  racionalni brojevi, tada je

,

,

.

U skupu racionalnih brojeva se operacija dijeljenja definiše na slje-deći način:

Neka su  racionalni brojevi i neka je , tada je

.

**4.2.4. Skup iracionalnih brojeva**

Skup svih brojeva koji se ne mogu napisati u obliku količnika dva ci-jela broja naziva se skup iracionalnih brojeva i označava se sa *I*.

Skup *I* nije prazan, tj. on ima bar jedan element, što ćemo dokazati. Dokazat ćemo da je  iracionalan broj.

Pretpostavićemo suprotno, tj. da je  racionalan broj. Tada bi po-stojali relativno prosti brojevi ***Z*** i ***N*** takvi da je . Kvadri-ranjem ove jednakosti dobijamo

(a) .

Iz (a) slijedi da je  paran broj, odnosno da je *m* paran broj. Tada se može pisati da je

(b) ***Z***.

Zamjenom *m* iz (b) dobijamo jednakost  ili . To znači da je *n* paran broj. Dakle brojevi  su djeljivi sa 2, što znači da oni nisu relativno prosti. To je u suprotnosti s pretpostavkom. Ta kontradikcija obara pretpostavku da je  racionalan broj.

**4.2.5. Brojna prava**

Neka je data prava *p*. Odredimo proizvoljnu tačku , i tačku  desno od tačke . Smjer slijeva na desno označimo kao pozitivan. Tačku  nazivamo ishodište a duž  jediničnu duž. Pravu *p* sa ovako definisanim tačkama  nazivamo brojna prava (sl.4.1).



Sl. 4.1.

Proizvoljnom racionalnom broju ***N*** odgovara jedna i samo jedna tačka *A* na brojnoj pravoj *p*. Tačku *A* ćemo dobiti ako duž  nanosimo *x* puta desno od tačke . Tačka  koja odgovara broju  je simetrična, u odnosu na tačku , tački *A*.

***Primjer* 4.10.** Broju  odgovara tačka *A* (Sl. 1.4.2),



Sl. 4.2.

a dobija se na sljedeći način:

,

znači  nanosimo 5 puta desno od tačke .

Iracionalnom broju  odgovara jedna i samo jedna tačka na brojnoj pravoj *p* i ona se može odrediti primjenom Pitagorine teoreme (Sl.4.2-a).



Sl. 4.2-a

Takođe primjenom te teoreme možemo odrediti položaj tačke na brojnoj pravoj *p* koja odgovara broju . Određivanje po-ložaja tačke koja odgovara kvadratnom korijenu racionalnog broja, racionali-sanjem imenioca, svodi se na određivanje položaja tačke na način koji je već objašnjen. Npr.

.

Svim ostalim iracionalnim brojevima odgovaraju tačke brojne prave. Međutim, one se ne mogu tačno dobiti elementarnim konstrukcijama (ne mogu se dobiti upotrebom samo šestara i lenjira).

Na osnovu prethodnog može se zaključiti:

"*Svakom realnom broju odgovara jedna tačka brojne prave, i obratno*, *svakoj tački brojne prave odgovara jedan realan broj*"*.*

**4.2.6. Apsolutna vrijednost realnog broja**

Apsolutna vrijednost realnog broja *x*, koja se označava sa , definiše se sa

(4.24) 

Tako je naprimjer: , .

Iz definicije apsolutne vrijednosti realnog broja neposredno slijedi nejednakost

(4.25) .

Navedimo neke osnovne osobine apsolutne vrijednosti realnog broja

(4.26) ,

(4.27) ,

(4.27-a) ,

(4.27-b) .

**Teorema** **4.3.** *Apsolutna vrijednost zbira realnih brojeva manja je ili jednaka zbiru apsolutnih vrijednosti sabiraka, tj*.

(4.28)  ***R***

***Dokaz*.** Iz





sabiranjem dobijamo

,

odakle prema (4.27-a) slijedi

.

**Teorema 4.4.** *Apsolutna vrijednost proizvoda dva realna broja jednaka je proizvodu apsolutnih vrijednosti faktora, tj*.

(4.29)  ***R***.

***Dokaz*.** Ako je , tada je  ili , tj. . Istovremeno je , tj. vrijedi .

Ako je , tada , . Dalje je  pa je . Iz ovog slijedi da je

.

Ako je , tada je

 i .

Na osnovu toga slijedi

.

Ako je , tada je

, .

Na osnovu toga je

.

Analogno se dokazuje da je jednakost (4.29) tačna za . To znači da je jednakost (4.29) dokazana za svaki par realnih brojeva.

***Posljedica* *teoreme* 4.3.** Ako su  realni brojevi, tada je

.

Zaista, na osnovu teoreme 4.3. je

.

Primjenom principa matematičke indukcije nije teško dokazati da vrijedi nejednakost

 za svako ***N***.

Iz teoreme 4.3. slijedi i sljedeća nejednakost

(4.30) ,

u šta se nije teško uvjeriti.

Ako se pođe od jednakosti  dobija se

,

odnosno

.

**Teorema 4.5.** *Apsolutna vrijednost količnika dva realna broja, uz pretpostavku da je imenilac različit od nule*, *jednaka je količniku apsolutnih vrijednosti brojnika i nazivnika*, *tj*.

(4.31) .

*Dokaz* ove teoreme je sličan dokazu teoreme (4.4) i čitaocu može poslužiti kao primjer za vježbu.

***Primjer* 4.11.** Riješiti jednačinu

.

***Rješenje*:** Iz sljedeće tabele

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | − ∞ | − 3 |  | −1 |  | 1 | + ∞ |
| *x* +3 | − | 0 | *+* |  | *+* |  | *+* |
| 2*x*+2 | − |  | − | 0 | *+* |  | *+* |
| 1 − *x* | + |  | *+* |  | *+* | 0 | − |

u kojoj su dati znakovi pojedinih izraza, slijedi:

1. Za  po definiciji apsolutne vrijednosti je

,

,

,

pa data jednačina glasi

,

čije je rješenje . Kako  ne ispunjava uslov 1. to  neće biti rješenje date jednačine.

2. Za  je

,

,

,

pa jednačina glasi



ili , što znači da je svako *x* iz posmatranog intervala rješenje date jednačine.

3. Za  je



,

,

pa jednačina glasi

,

odakle je , tj. ovo je rješenje jednačine.

4. Za  je

,

,

,

i jednačina glasi



čije je rješenje . Kako  ne ispunjava uslove 4. to nije rješenje jednačine.

Rezultat: .

**4.2.7. Interval. Okolina i tačka nagomilavanja**

Neka su  realni brojevi i neka je  (Sl. 4.3).

|  |  |
| --- | --- |
|  | Skup svih realnih brojeva *x* koji su između brojeva  zove se *otvoreni interval* i označava se sa  . Ova definicija se pomoću skupovnih simbola zapisuje sa |

Sl. 4.3.

(4.32) .

Brojevi  su rubovi ili krajevi intervala.

Skup svih realnih brojeva koji su između  uključujući i broje-ve , zove se *zatvoreni interval* ili *segment* i označava se sa , tj.

(4.33) .

Skup svih realnih brojeva koji su između  uključivši i broj *a* zove se poluotvoreni odnosno poluzatvoreni interval i označava se sa , tj.

(4.34) .

Ovaj interval je zatvoren slijeva, otvoren sdesna. Analogno se definiše i interval otvoren slijeva, a zatvoren sdesna, tj.

(4.35) .

Okolina realnog broja *a* je svaki (proizvoljno mali) otvoreni interval koji sadrži broj *a*. Za broj *x* se kaže da se nalazi u blizini broja *a* ako pripada intervalu  za proizvoljno malo . Interval  se naziva i  okolina broja *a*.

*Tačka nagomilavanja* beskonačnog skupa realnih brojeva naziva se tačka u čijoj se  okolini nalazi beskonačno mnogo brojeva tog skupa.

**4.2.8. Još o skupovima**

**Definicija. 4.5.** *Za skupove* *A i B* *kažemo da su ekvivalentni*, *da imaju istu moć ili isti kardinalni broj*, *ako postoji bijekcija skupa*  *na skup* , *što pišemo* .

Ekvivalentnost skupova  označavaćemo sa  (ili *A*~*B*).

***Primjer* 4.12.** Skup prirodnih brojeva ***N*** ekvivalentan je skupu cijelih ne-gativnih brojeva −***N***, jer je funkcija  bijekcija.

***Primjer* 4.13.** Skup prirodnih brojeva ekvivalentan je skupu parnih pozi-tivnih brojeva, jer je funkcija  bijekcija.

**Definicija 4.6.** *Za skup*  *kažemo da je konačan ako nije ekvivalentan ni sa jednim svojim pravim podskupom. Za skup koji nije konačan kažemo da* *je beskonačan. Kardinalnim brojem konačnog skupa nazivamo broj ele-menta toga skupa*.

Na primjeru 4.13. zapažamo da skup može biti ekvivalentan svom pravom podskupu, i na osnovu definicije 4.6. to se odnosi samo na bes-konačne skupove.

**Definicija 4.7.** *Kažemo da je skup A* ***prebrojiv***, *ako je konačan ili ako je* . *U protivnom kažemo da je skup A neprebrojiv*.

**4.3. Skup kompleksnih brojeva**

Neka je ***R*** polje realnih brojeva. Formirajmo ***R******R******R***2, tj. Descartesov proizvod skupa ***R*** sa samim sobom. U ***R***2 uvedimo sabiranje i množenje na sljedeći način.

**Definicija 4.8.** *Neka je*  ***R*** *polje realnih brojeva. Za bilo koja dva elementa*  ***R***2 *neka je*

(4.36) 

*Skup* ***R***2 *koji ima osobine* (4.36) *nazivamo skup kompleksnih brojeva i ubuduće ćemo ga označavati sa* ***C***.

Kako se svakom paru  ***R***2 može pridružiti tačka *A* pra-vouglog Descartesovog) koordinatnog sistema, pri čemu se paru  pri-družuje tačka  sa apscicom *a* i ordinatom *b*, to kompleksne brojeve mo-žemo predstaviti tačkama ravni. Ovakva ravan se zove kompleksna ili Gaussova\*) ravan (Sl. 4.4).



Sl. 4.4.

Skup ***R***2 uz definisane operacije sabiranja i množenja sa (4.36), tj. skup kompleksnih brojeva, ima algebarsku strukturu polja, što ćemo i doka-zati, koristeći se činjenicom da je skup ***R*** polje u odnosu na operacije  i  definisane u ***R***..

\*) K. F. Gauss (1777-1855), njemaèki matematièar.

1. Sabiranje u ***C*** je asocijativno. Neka su ,  proizvoljni elementi iz ***C***,tada je



2.  tako da je

.

3.  tako da je

.

4. 

.

Na osnovu 1,2,3, i 4 slijedi da je  Abelova grupa.

5. 







.

6. 









.

7.  tako da je

.

Broj  je jedinica u ***C***.

8.  tako da je

,

odakle je



Rješavanje ovog sistema jednačina po  dobijamo

, .

Dakle, inverzni element za  je komplesan broj

.

9. 

.

Na osnovu osibina 1 do 9 i definicije polja slijedi da je  polje.

Neka je ***R*** polje realnih brojeva i neka je

.

Tada za svako  na osnovu relacije (4.36) dobijamo

.

Znači skup  je zatvoren u odnosu na sabiranje i množenje defi-nisane sa (4.36). Dalje, nije teško provjeriti da  ispunjava aksiome skupa realnih brojeva. Zbog toga je skup realnih brojeva jednak skupu kompleksnih brojeva oblika  pa se piše . Tada je po konvenciji  i .

**Definicija 4.9.** *Kompleksan broj*  *zovemo imaginarna jedinica i označavamo ga sa* ***i***, *dakle* ***i***.

Bilo koji broj ***C*** sada se može izraziti u obliku

,

dakle

(4.37) .

Kompleksan broj oblika  naziva se standardni oblik kompleksnog broja (ili algebarski oblik).

Operacije (4.36) za standardni oblik kompleksnog broja prelaze u

,

.

Ako se stavi  tada se realan broj *a* naziva realan dio kompleksnog broja *z* i označava se sa , a realan broj *b* se zove imaginarni dio kompleksnog broja *z* i označava se sa .

Broj  je konjugovano kompleksan broj broja .

Tačke ***R*** kompleksne ravni leže na *x*-osi, zbog toga tu osu zovemo realna osa. Tačke  leže na *y*-osi zbog čega je nazi-vamo imaginarna osa i označavamo sa  (Sl.4.5).

Zapažamo da su brojevi *z* i  simetrični u odnosu na *x*-osu. Dalje je za 

.





Sl. 4.5.

Realan broj  zovemo *modul*, *norma* ili *apsolutna vrijednost* kompleksnog broja *z*.

Treba zapaziti da je



i to je rastojanje tačke  od kordinatnog početka.

Iz trougla  (Sl.4.5) neposredno slijedi da je

, za svako ***C***.

**Teorema 4.6.** *Za kompleksne brojeve* ***C*** *vrijedi*:

a) ,

b) ,

c) ,

d) .

***Dokazi*** su jednostavni i primjera radi dokažimo samo a).

Ako je  tada je



.

Ostali dokazi se izvode na sličan način.

**Teorema 4.7.** *Za svako* ***C*** *vrijedi*:

a) ,

b) .

***Dokaz*.** a) ,

dakle

.

b)  



, tj.

.

**4.3.1. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja**

Kompleksan broj  određen je poluprečnikom  centralne kružnice koja prolazi tačkom *z* i uglom  koji duž  zaklapa sa poluosom , (Sl.4.5). Ugao  se zove argument ili glavna vrijednost argumenta kompleksnog broja , i označava se sa .

Kako je  to je

(4.38) .

Iz ; , se dijeljenjem dobija

.

Znači argument kompleksnog broja *z*  je

.

Kompleksan broj



zovemo *trigonometrijski oblik kompleksnog broja* *z*.

***Primjer* 4.14.** Napisati u trigonometrijskom obliku kompleksan broj .

***Rješenje*.** Apsolutna vrijednost datog kompleksnog broja je

.

Iz  dobijamo . Uvrštavanjem vri-jednosti za  u (4.38) dobijamo

.

**4.3.2. Množenje kompleksnih brojeva**

**u trigonometrijskom obliku**

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja je vrlo pogodan za neke računske operacije.

Neka su ,

tada je

(4.39) .

***Dokaz*.** Za  imamo



, tj.

.

Dalje se primjenom matematičke indukcije pokazuje da jednakost (4.39) vrijedi za svako ***N***.

***Primjer* 4.15.** Naći proizvod brojeva: ,

 i .

***Rješenje*.** Prema relaciji (4.39) je



.

Ako je  tada se na osnovu relacije (4.39) dobija

(4.40) 

tj. dobija se formula za stepenovanje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku. Za  a na osnovu relacije (4.40) dobijamo relaciju

(4.41) , 

koja je poznata pod imenom Moavreova\*) formula.

U prethodnom dijelu smo razmotrili kako se množe i stepenuju kom-pleksni brojevi dati u trigonometrijskom obliku, a sada razmotrimo način korjenovanja tih brojeva.

**4.3.3. Korjenovanje kompleksnih brojeva**

Kompleksan broj  nazivamo ***n****-ti korijen kompleksnog broja* , i pišemo , ako je . Ovdje, na osnovu formule za stepenovanje kompleksnih brojeva, dobijamo

,

odakle je , gdje se pod  podrazumijeva aritmetički korijen, a , ili . Iz  slijedi da će sinusi, odnosno kosinusi ugla,  , biti različiti za , pa će



imati *n* različitih vrijednosti i označavaćemo ih sa , dakle

(4.42) .

Ova formula se zove formula za korjenovanje kompleksnih brojeva.

\*) A. Moavro (1667-1754), engleski matematièar.

***Primjer* 4.16.** Naći .

***Rješenje*.** Broj  u trigonometrijskom obliku glasi

,

pa je

.

U ovom slučaju je

,

,

,

.

**4.3.4. Inverzni element kompleksnog broja**

Inverzni element kompleksnog broja , za operaciju množenja je



.

Iz prethodnog slijedi da je količnik brojeva:

 i ,

jednak



,

(4.43) .

**4.4. Zadaci za vježbu**

**1.** U skupu ***N*** definisana je operacija sa

.

Izračunati: a) , b) , c) .

**2.** Tablicama

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *a* | *b* | *c* |  |  | *a* | *b* | *c* |  |  | *a* | *b* | *c* |
| *a* | *a* | *b* | *c* |  | *a* | *a* | *b* | *c* |  | *a* | *c* | *c* | *a* |
| *b* | *b* | *c* | *a* |  | *b* | *b* | *c* | *c* |  | *b* | *b* | *c* | *a* |
| *c* | *c* | *a* | *b* |  | *c* | *c* | *a* | *b* |  | *c* | *a* | *b* | *c* |

definisane su tri operacije u skupu . U svakom slučaju:

a) izračunati .

b) Riješiti jednačine: .

**3.** Obrazovati tablicu operacije  skupa  koja je definisana sa:

a)  b) , c) .

**4.** Neka je  operacija u skupu ***R*** definisana sa . Izračunati . Da li je operacija asocijativna operacija?

**5.** Da li je 0 jedinični element operacije  skupa ***R***, određena formulom

 ?

**6.** Dokazati da je  grupa gdje je:

a) ,  je množenje,

b)  je skup cijelih brojeva,  je određena formulom ,

c)  je skup realnih brojeva,  je određena formulom .

**7.** Dokazati da je tablicom

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *a* | *b* | *c* |
| a | *a* | *b* | *c* |
| b | *b* | *c* | *a* |
| c | *c* | *a* | *b* |

definisana grupa.

U zadacima od 8. do 11. dokazati matematičkom indukcijom da je za :

**8.** .

**9.** .

**10.** .

**11.** .

U zadacima od 12. do 15. dokazati djeljivost izraza:

**12.** .

**13.** .

**14.** .

**15.** .

**16.**  Dokazati jednakost za ***R***:

a)  b) 

**17.** Dokazati jednakosti, ***R***:

,

.

**18.** Dokazati jednakost, ***R***,

.

**19.** Riješiti jednačinu

, ***R***.

**20.**  Riješiti nejednačine:

a) ,

b) ,

c) , ***R***.

**21.** Odrediti komleksan broj koji zadovoljava jednačinu

.

**22.** Izračunati  ako je .

**23.** Izračunati  ako je .

**24.** Izračunati: a) , b) .

**25.** Izračunati: a) , b) .

**26.** Riješiti jednačinu .

**II G L A V A**

**ELEMENTI LINEARNE ALGEBRE**

**1. Vektorski prostor**

**Definicija 1.1.** *Abelova grupa*  *sa unutrašnjom* *operacijom* "*+*" *čini vektorski prostor ako je između njenih elemenata i elemenata polja*  *definisana spoljašnja operacija* "" *tako da važi*:

1. ,

2. ,

(1.1) ,

3. ,

4. ,

*gdje*  *označava jedinicu polja* .

Elemente  vektorskog prostora ***V*** nazivamo vektorima, a elemente  polja  nazivamo skalarima.

Ako je  skup realnih brojeva ***R***, odnosno ako je  skup kom-pleksnih brojeva ***C***, onda govorimo o realnom odnosno kompleksnom vektor-skom prostoru. Mi ćemo ubuduće, ako ne bude drugačije naglašeno, govoriti o realnom vektorskom prostoru.

Nije teško provjeriti da u bilo kojem vektorskom prostoru ***V*** vrijedi jednakost

; ,

gdje je lijevo nula element polja , desno nula element prostora ***V***. Za do-kaz ove jednakosti iskoristimo zbir . Iz definicije vektorskog prosto-ra slijedi

,

tj.

.

***Primjer* 1.1.** Označimo sa ***V*** skup slobodnih vektora, a sa  skup realnih brojeva. Poznato je da je u skupu ***V*** definisana unutrašnja operacija sabi-ranja po "pravilu paralelograma", Sl.1.1, i spoljašnja operacija množenja vektora realnim brojem, Sl.1.2, gdje je .

Nije teško provjeriti da ***V*** čini Abelovu grupu u odnosu na operaciju sabiranja. Također, od ranije je poznato da skup realnih brojeva čini polje u odnosu na operacije sabiranja i množenja. Pored toga vrijede nejednakosti:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Sl. 1.2.

Sl. 1.1.

1. ,

2. ,

, (Sl. 1.3)



Sl. 1.3.

3. ,

4. ,

što znači da skup običnih vektora čini vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

***Primjer* 1.2.** Neka je  polje realnih brojeva, a ***R*** skup uređenih -torki. Za  ***R*** kažemo da su jednaki ako i samo ako vrijedi

(1.2) .

Sabiranje u ***R***definišimo sa

(1.3) .

Proizvod  definišimo sa

(1.4) .

Ovako definisan skup ***R*** je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Da bi to dokazali moramo ispitati da li vrijede uslovi definicije 1.1. Mi ćemo ovom prilikom provjeriti samo uslove (1.1).

Neka je  a . Tada je

1. 



.

2. 





.

3. 



.

4. .

**1.1. Linearna kombinacija vektora**

**Definicija 1.2.** *Neka je* . *Izraz oblika*

(1.5) 

*naziva se linearna kombinacija vektora*  *sa koeficijentima* .

**Definicija 1.3.** *Konačan skup vektora* *različitih od nula- vektora* *je linearno zavisan ako i samo ako postoje*  *od kojih je bar jedan različit od nule takvi da je*

(1.6) .

Ako iz



slijedi



tada za vektore  kažemo da su linearno nezavisni.

***Primjer* 1.3.** Neka su dati vektori  i neka su operacije definisane kao u primjeru 1.2. pri čemu je

,

tada su vektori  linearno nezavisni. Dokazati.

***Rješenje*.** Iz

,

tj.



dobijamo

.

Na osnovu definicije jednakosti vektora, u datom primjeru, dobijamo sistem jednačina





,

čije je rješenje . To znači da su vektori  linearno nezavisni.

***Primjer* 1.4.** Za vektore , definisane kao u primjeru 1.3. je



ili





.

Rješenje ovog sistema je -proizvoljno, što znači da su vektori  linearno zavisni.

**1.2. Baza vektorskog prostora**

Za vektor  kažemo da je izražen kao linearna kombinacija vektora  ako postoje  takvi da je

.

Za skup vektora  vektorskog prostora ***V*** kažemo da generišu vektorski prostor ***V*** ako se svako  može izraziti kao linearna kombinacija tih vektora. Skup vektora *a* nazivamo generator vektorskog prostora.

***Primjer* 1.5.** Vektor  izraziti kao lineralnu kombinaciju vektora .

***Rješenje*.** Treba odrediti, ako postoje, brojeve  za koje vrijedi jednakost:

.

Na osnovu definicije množenja je



a na osnovu definicije sabiranja u  je

.

Na osnovu definicije jednakosti vektora slijedi:





.

Rješenje ovog sistema je , pa je

.

**Definicija 1.4.** *Za podskup linearno nezavisnih vektora*  *koji generišu vektorski prostor* ***V*** *kažemo da čine* *bazu vektorskog prostora* ***V*** *i u tom slučaju kažemo da je prostor* ***V******n****-dimenzionalni vektorski prostor*.

**Teorema 1.1.** *Ako vektori*  *čine bazu -dimenzionalnog vektorskog prostora* ***V***, *tada se svaki vektor*  *može jednoznačno prikazati kao linearna kombinacija vektora baze.*

***Dokaz.*** Pretpostavimo da se vektor  može izraziti na dva načina kao linearna kombinacija vektora baze i neka je

.

Tada je



odakle je

.

Kako su vektori  linearno nezavisni to je

.

Ova teorema nam olakšava operacije u posmatranom vektorskom prostoru  ***V***. Umjesto da se svaki vektor  posmatra zasebno posma-traju se samo vektori baze, a od slučaja do slučaja mijenjaju se samo koefi-cijenti u linearnoj kombinaciji vektora baze.

**Teorema 1.2.** *Ako je skup vektora*  *linearno zavisan*,  *za svako* , *onda je vektor*  *za neko*  *jednak linearnoj kombinaciji vektora* .

***Dokaz.*** U teoremi je pretpostavljeno da među datim vektorima nije nula-vektor, jer je svaki skup vektora u kojem je i nula-vektor linearno zavisan. Kako je  to iz  slijedi , to znači da je jed-nočlan skup vektora linearno nezavisan. Iz jednakosti  slijedi: a) ona je moguća za neko  tada je i  pa je , za  dokaz je završen; b) za  je i  a to znači da su vektori  linearno nezavisni (i tada se mora preći na ispitivanje linearne kombinacije ) a taj nas slučaj ne zanima.

Jednakost  je moguća za neko , a tada je  ili , pa je



i teorema je dokazana za . Ako jednakost nije moguća tada je . Taj postupak se nastavlja i u jednom koraku posljednji

koeficijent od



mora biti različit od nule, jer ukoliko se to nebi desilo sve do kraja onda bi vektori  bili linearno nezavisni, što se protivi pretpostavci teoreme.

**Teorema 1.3.** *Svaki konačan skup linearno nezavisnih vektora*  *ili je baza konačnog vektorskog prostora*  *ili se može nadopuniti novim vektorima*   *sa kojim zajedno čini bazu*.

*Dokaz* ove teoreme nećemo izvoditi.

**Definicija 1.5.** *Za vektorske prostore*  *X* *i* *Y* *nad istim poljem*  *kažemo da su izomorfni ako postoji bijektivno preslikavanje*  *sa osobinama*





*za svako*  *i svako* . *Preslikavanje*  *nazivamo* ***izomorfizam vektorskih prostora*.**

**1.3. Euklidov**\*) **vektorski prostor**

**Definicija 1.6.**  *Neka je* ***V*** *vektorski prostor nad poljem realnih brojeva* ***R***. *Unutrašnji ili skalarni proizvod na* ***V*** *je preslikavanje koje svakom uređeom paru*  *pridružuje realan broj*  *ili*  *takav da važi*:

1. 

2. 

3. 

4. .

Konačnodimenzionalni vektorski prostor ****** nad poljem realnih brojeva u kome je definisan skalarni proizvod obično se zove Euklidov vektorski prostor.

***Primjer* 1.6.** U primjeru 1.2. smo definisali skup uređenih -torki  i u njemu smo operacije "" i "" definisali na sljedeći način:

\*) Euklid (3. vijek prije n.e), antièki matematièar.



.

Vidjeli smo da je  vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

Neka je u  "proizvod" definisan sa:

(1.7)  .

Ovako definisan proizvod je skalarni, što ćemo dokazati.

1. 

.

2. 



 

.

3. 



.

4. .

Proizvod definisan sa (1.7) se naziva standardni skalarni proizvod. Vektorski prostor  sa definisanim standardnim skalarnim proizvodom mi ćemo označavati sa .

Vektorski prostor  u kojem je skalarni proizvod dat u definiciji 1.6 zove se -dimenzionalni Euklidov prostor.

**1.4. Normirani i metrički prostori**

**Definicija 1.7.** *Neka je* ***V*** *vektorski prostor. Norma vektora*  *naziva se svaka funkcija* ***R***,***R***  *koja ima osobine*:

1. 

2. 

3. .

Dvojka  zove se *normirani prostor*.

U Euklidovom vektorskom prostoru se norma vektora *x* definiše sa

(1.8) .

***Primjer* 1.7.** Neka je vektor . Tada je

.

***Primjer* 1.8.** U za vektor  je

.

Nije teško provjeriti da relacija (1.8) zadovoljava sve uslove definicije 1.7.

Uslov 1. definicije 1.7. neposredno slijedi iz uslova 4. definicije 1.6. Dalje je



čime je dokazano da je ispunjen uslov 2 definicije 1.7.

Da bismo dokazali uslov 3 definicije 1.7 dokažimo prvo nejed-nakost (Shwarzova\*) nejednakost)

(1.9) .

Ako je bar jedan od vektora  jednak nuli onda vrijedi jednakost. Zato pretpostavimo da je . Iz relacije



,

ako zamijenimo  dobijamo



ili



odnosno



jer je . Dalje je

.

\*) K. H. Shwarz (1845-1921), njemaèki matematièar.

Na osnovu prethodne dvije nejednakosti je

.

Kako je



,

to je na osnovu relacije (1.9)



tj.

.

**Definicija 1.8.** *Za dva vektora*  *Euklidovog vektorskog prostora* ***V*** *kažemo da su uzajamno normalni* (*ortogonalni*) *ako je* . *Za vektor* *x* *se kaže da je normiran ako je* .

**Teorema 1.4.** *Neka je* ***V*** *Euklidov vektorski prostor i neka su vektori*  *ortogonalni, tada je*

.

***Dokaz*.**

jer je po pretpostavci teoreme . Ovo je poznata Pitagorina\*) teo-rema.

***Primjer* 1.9.** Vektori  su ortogonalni jer je

,

a nisu ortonormirani jer je .

**Definicija 1.9.** *Za skup vektora*  *se kaže da je* ***normiran*** *ako je svaki vektor iz* *A* *normiran. Za normiran i ortogonalizovan skup vektora* *A* *se kaže da je* ***ortonormiran****.*

Neka je  ***V*** Euklidov vektorski prostor i neka ortonormirani vektori  čine bazu prostora ***V***. U tom slučaju vrijedi teorema.

**Teorema 1.5.** *Koordinate*  *vektora* *x* *u ortonormiranoj bazi*   *jednaka je skalarnom proizvodu vektora* *x* *i*  .

***Dokaz*.** Svaki vektor  može se na jedinstven način prikazati u obliku

\*) Pitagora (IV-III vijek prije n.e), antièki matematièar

.

Ako se jednakost pomnoži skalarno sa  dobiće se



jer je  za .

**Teorema 1.6.** *Svaka baza Euklidovog vektorskog prostora može se ortonormirati.*

*Dokaz* ove teoreme nećemo izvoditi, a umjesto toga pokazaćemo ka-ko se izvodi ortogonalizacija posmatranog skupa vektora koji čine bazu vek-torskog prostora ***V***. Neka vektori  čine bazu vektorskog pro-stora ***V*** i neka na osnovu ove baze treba odrediti bazu koju čine međusobno ortogonalni vektori  .

Uzmimo ma koji vektor, npr. vektor , za  tj.

.

Vektor  ćemo izabrati u obliku

,

gdje je  nepoznat koeficijent i odredićemo ga iz uslova da je .

Iz



je

,

pa je

.

Za treći vektor uzimamo



gdje se  i  mogu odrediti iz uslova da vektor  bude ortogonalan na vektore . Na osnovu toga je





odakle je

, ,

pa je

.

Ako se ovaj postupak nastavi dobija se

(1.10) .

Ako svaki vektor  podijelimo sa njegovom nor-mom dobićemo ortonormiranu bazu.

***Primjer* 1.10.** U  sa standardnim unutrašnjim proizvodom ortonormirati bazu .

***Rješenje*.** Nije teško pokazati da su vektori  linearno nezavisni, što znači da oni čine bazu prostora. Neka je

.

Na osnovu relacije (1.4) je



,



.

Ortonormirana baza je

,

,

.

**Definicija 1.10.** *Neka je* *X* *neprazan skup. Preslikavanje* ***R***  *za koje* *vrijedi*:

1. , 

2. , 

3. , 

4. , 

*zove se* ***metrika*** *na X*. *Uređeni par*   *zove se metrički prostor*, *a broj*  *rastojanje tačaka* .

Pokazuje se da rastojanje tačaka *x* i *y* predstavlja jednu metriku u normi-ranom vektorskom prostoru *X*.

***Primjer* 1.11.** Par  je metrički prostor i pri tome je



gdje je .

**1.5. Zadaci za vježbu**

**1.** Neka je  skup pozitivnih realnih brojeva u kojem je operacija "" de-finisana kao obično množenje realnih brojeva a množenje broja  sa realnim brojem  iz ***R*** kao . Dokazati da je  vektorski prostor nad poljem ***R***.

**2.** Dati su vektori . Izraziti vektor  kao linearnu kombinaciju vektora .

**3.** Ispitati linearnu zavisnost vektora

.

**4.** Za koje vrijednosti *a* vektori  čine bazu vektorkog prostora .

**5.** Dokazati da vektori  čine bazu vek-torskog prostora . Naći koordinate vektora  u odnosu na tu bazu.

**6.** U  sa standardnim skalarnim proizvodom odrediti skalarni proizvod vektora . Naći njihove norme i normirati ih.

**7.** Dati su vektori  u vektorskom prostoru  sa standardnim skalarnim proizvodom. Pokazati da su oni ortogonalni i dopuniti ih do ortogonalne baze.

**8.** U  sa standardnim skalarnim proizvodom ortonormirati bazu .

**9.** U  za  i  definisano je preslikavanje

.

Dokazati da je ovim preslikavanjem definisan skalarni proizvod na .

**2. Linearna transformacija. Matrica**

**2.1. Linearna transformacija**

**Definicija 2.1.**  *Neka su* *X i Y* *vektorski prostori nad istim poljem skalara* . *Svako preslikavanje*  *koje zadovoljava uslove*

1. ,

2. ,

*za sve vrijednosti*  *i sve*  *nazivamo linearnom transfor-macijom vektorskog prostora* *X* *u vektorski prostor Y*.

Umjesto  često se piše i  pa se uslovi 1. i 2. definicije 2.1. mogu pisati

,

.

***Primjer* 2.1.** Ako je  onda transformacija data sa



je linearna transformacija jer je za svako  i svako 







,

dalje je





.

**2.2. Matrica**

**2.2.1. Definicija matrice**

Neka su  baze vektorskih prostora , respektivno. Tada se  može izraziti kao

 ,

gdje su  koordinate vektora *x* u odnosu na bazu . Neka je *A* linearna transformacija prostora  u prostor , a , tada je

(2.1)  .

Prema tome linearna transformacija vektora  biće poznata ako su poznate linearne transformacije vektora baze prostora . Vektori  se mogu izraziti kao linearna kombinacija vektora baze prostora *Y*, dakle

(2.2) .

Na osnovu relacija (2.1) i (2.2) slijedi



,

što znači da su koordinate 

(2.3) .

Iz relacije (2.3) slijedi da linearnoj transformaciji  vektorskog prostora  u vektorski prostor  odgovara jedinstvena pravougaona uređena tabela određena bazama  vektorskih prostora , oblika

(2.4) .

Tabela (2.4) zove se matrica reda  linearne transformacije *A* i ozna-čava se sa  , mada treba razlikovati linearnu transformaciju od njene matrice. Brojevi  zovu se elementi matrice . Brojevi  čine *i*-tu vrstu, a brojevi  *k*-tu kolonu matrice . Matricu sa jednom vrstom nazivamo matrica vrsta, a matricu sa jednom kolonom nazivamo matrica kolona.

Treba uočiti, vidjeti relacije (2.2) i (2.4), da su elementi u *k*-toj koloni matrice  koordinate transformanta *k*-tog vektora baze linearnom transformacijom *A*.

Ako u matrici  vrste zamijenimo odgovarajućim kolonama dobiće se matrica reda  i za nju kažemo da je transponovana matrica matrice *A*, i označavat ćemo je sa , tj.

.

***Primjer* 2.2.** Neka su vektori:  vektori baze Euklidovog vektorskog prostora , i neka su  baza prostora *Y*. Neka je linearna transformacija prostora  u prostor *Y* data sa

(a) .

Odrediti matricu transformacije *A*.

***Rješenje*.** Prema definiciji linearne transformacije  je

.

Na osnovu relacije (2.2) slijede sistemi jednačina





,

ili sistem jednačina





.

Rješenja prethodnih sistema su

,

.

Matrica (2.4) za datu linearnu transformaciju *A* glasi:

.

Na osnovu dobijenih rezultata i relacije (2.3) vektor 

se transformiše u vektor , koji po bazi  ima koordinate:

,

,

tj.

.

**2.2.2. Operacije sa matricama**

Neka su  baze vektorskih prostora , respektivno. Neka su  linearne transformacije . Ako je  za svako , tada je

 

ili

 

odakle je

(2.5) .

Znači jednake transformacije u odnosu na iste baze imaju jednake matrice.

Neka su  baze vektorskih prostora , respektivno, i neka su  linearne transformacije sa *X* na *Y*. Tada zbirom linearnih transformacija  zovemo linearnu transformaciju , a proizvodom linearne transformacije *A* i broja ***R*** zovemo linearnu transformaciju , gdje su  defi-nisane sa

.

Kako je  to na osnovu (2.3) je

(2.6) .

Znači da matrici  odgovara matrica

(2.7) 

i zove se suma matrica . Dakle, matrice istog reda sabiraju se tako da im se saberu odgovarajući elementi.

***Primjer* 2.3.** Neka je

,

tada je

.

Kako je , to je



odakle je

(2.8)  .

Matrica  se zove proizvod matrice  i broja *a*. Dakle, matrica se množi brojem tako da se svaki element matrice pomnoži tim brojem.

***Primjer* 2.4.** Neka je

,

tada je

.

Neka su  baze vek-torskih prostora  respektivno. Neka je *B* linearna transformacija , a *A* linearna transformacija . Neka linearnoj transformaciji *B* odgovara matrica  a linearnoj transformaciji *A* matrica . Linearnoj transformaciji , neka odgovara matrica *C*. Tada je

,

.

Kako je *C* linearna transformacija  to postoje  ***R***  takvih da je

.

Budući da je



,

dalje je



ili

.

Kako su vektori  linearno nezavisni to je

(2.9) .

Znači linearnoj transformaciji *C* odgovara matrica  reda  i naziva se proizvod matrica . Treba zapaziti da proizvod  postoji samo ako je broj kolona matrice *A* jednak broju vrsta matrice *B*. Dalje treba zapaziti da je element  matrice *C* jednak skalarnom pro-izvodu vektora *i*-te vrste matrice *A* i *j*-kolone matrice *B*.

***Primjer* 2.5.** Neka je



tada je

.

**2.2.3. Kvadratna matrica i njena determinanta**

Matrica kod koje je broj vrsta jednak broju kolona i jednak *n* naziva se kvadratna matrica reda *n*, tj. kvadratna matrica reda *n* je matrica oblika

.

Elementi  obrazuju glavnu dijagonalu, a elementi  sporednu dijagonalu matrice.

Kvadratna matrica kod koje su svi elementi van glavne dijagonale jednaki nuli naziva se dijagonalna matrica, dakle dijagonalna matrica ima oblik

.

Dijagonalnu matricu kod koje je  nazivamo skalarna matrica, dakle skalarna matrica ima oblik

.

Skalarna matrica kod koje je  naziva se jedinična matrica, dakle jedi-nična matrica je matrica

.

Svakoj kvadratnoj matrici



pridružujemo jedan broj, takozvanu determinantu matrice, koga označa-vamo sa  ili



Prije nego definišemo determinantu kvadratne matrice *A* razmotrimo neke pojmove koji se pojavljuju u definiciji.

Neka je zadan skup od *n* različitih elemenata. Kompleksije svih elemenata toga skupa, ako se one razlikuju jedna od druge po različitom položaju elemenata, čine permutacije bez ponavljanja.

U nekoj permutaciji dva elementa čine inverziju ili transpoziciju ako nisu u svom prirodnom poredku. Ako je broj transpozicija paran za permutaciju se kaže da je parna, a ako je neparan i za permutaciju se kaže da je neparna.

**Definicija 2.2.** *Neka je* *A* *kvadratna matrica*

.

*Tada broj*

(2.10) 

*gdje se sumiranje vrši po svim permutacijama*   *broj inverzija*, *nazivamo determinanta matrice* *A*.

Brojevi  su elementi determinante. Vrste, kolone, glavna i spo-redna dijagonala se definišu kao i kod matrice.

***Primjer* 2.6.** Ako je



tada je

.

Pored osnovne permutacije 1 2 postoji i permutacija 2 1. Permutacija 2 1 je neparna pa je

.

Dakle

.

***Primjer* 2.7.** Ako je

,

tada je

.

Permutacije elemenata 1,2,3 sa brojem inverzija su









.

Na osnovu definicije determinante je

 Determinanta trećeg reda (i samo trećeg reda) se izračunava po tzv. Sarussovom\*) pravilu, koje se sastoji u sljedećem.

Uz tablicu determinante trećeg reda sa desne strane dopišemo prvu pa drugu kolonu date determinante. Pomnožimo elemente na glavnoj dijagonali, zatim elemente na jednoj pa na drugoj dijagonali "paralelnoj" sa glavnom. Isto se radi i sa elementima sporednih dijagonala. Dobijeni proiz-vodi se saberu uzimajući znak "+" za proizvode elemenata glavnih dijagonala a znak "−" za proizvod elemenata sporednih dijagonala.

Pravilo se može prikazati sljedećom shemom

 

\*) Saruss, francuski matematièar.

Ako se ovaj rezultat uporedi sa rezultatom primjera 3.2. zapaža se da su oni jednaki.

***Primjer* 2.8 .**



.

Drugo pravilo za izračunavanje determinanti trećeg reda je dato sljedećom shemom



Naprave se proizvodi od tri elementa, kako je prikazano na shemi. Nađe se zbir proizvoda elemenata sa prve sheme i proizvoda elemenata sa druge she-me uz prethodnu promjenu predznaka.

***Primjer* 2.9.**



.

Važnije osobine determinanata su date teoremama 3.1. do 3.7.

**Teorema 2.1.** *Ako je*  *transponovana matrica kvadratne matrice* *A* *tada je*

.

**Teorema 2.2.** *Determinanta mijenja znak ako dvije vrste* (*kolone*) *među-sobno zamijene mjesta.*

**Teorema 2.3.** *Determinanta se množi brojem tako da se tim brojem po-množe svi elementi jedne vrste* (*kolone*).

***Dokaz*.** Prema definiciji determinanti zapaža se da u svaki sabirak ulazi samo po jedan element *i*-te vrste. Kako je





to će se u svakom sabirku pojaviti po jedan element *i*-te vrste pomnožen sa *a*.

**Teorema 2.4.** *Ako se determinante matrica*   *i*  *razli-kuju* *samo u i-toj vrsti tada je*  *jednaka determinanti u kojoj je i-ta vrsta jednaka zbiru odgovarajućih elemenata i-te vrste determi-nante* *A* *i determinante B*, *dok su ostale vrste nepromijenjene. Isto vrijedi i za kolone*.

***Dokaz*.** Neka je





tada je

.

***Primjer* 2.10.**

.

**Teorema 2.5.** *Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi jedne vrste* (*kolone*) *jednaki nuli.*

***Dokaz*.** Neka su elementi *i*-te vrste jednaki nuli. Kako se u svakom sabirku



nalazi po jedan faktor *i*-te vrste to će svi oni biti jednaki nuli.

**Teorema 2.6.** *Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi jedne vrste* (*kolone*) *jednaki odgovarajućim elementima druge vrste* (*kolone*).

***Dokaz*.** Neka su elementi *i*-te vrste jednaki odgovarajućim elemen-tima *k*-te vrste. Ako u determinanti zamijenimo mjesta *i*-toj i *k*-toj vrsti dobićemo

,

odakle dobijamo  (Vidjeti teoremu 2.2.).

**Teorema 2.7.** *Determinanta ne mijenja vrijednost ako elementima jedne vrste* (*kolone*) *dodamo odgovarajuće elemente druge vrste* (*kolone*) *pomno-žene istim brojem.*

*Dokaz* slijedi neposredno na osnovu teorema 2.4, 2.3 i 2.6.

**2.2.4. Minori i kofaktori determinante**

Ako u determinanti matrice  reda *n* izostavimo *i*-tu vrstu i *k*-tu kolonu dobićemo determinantu -og reda , koju nazi-vamo minor . Minoru  odgovara jedan element  koji se nalazi na presjeku *i*-te vrste i *k*-te kolone, pa govorimo o minoru  ele-menata .

Ako je  minor -reda  reda *n*, tada

(2.11) 

nazivamo kofaktor ili algebarski komplement elementa  determinante *A*.

Vratimo se definiciji determinante kvadratne matrice  re-da *n*, (definicija 2.2.).

Svaki član  sadrži po jedan faktor iz *i*-te vrste determinante . Grupišimo sve sabirke koji sadrže elemenat  i iz-vucimo ga kao zajednički faktor. Izraz u zagradi ima oblik

(2.12) 

gdje je ***s*** borj inverzija  . Može se zapaziti da je (2.12) kofaktor elementa  tj. . Dalje, ako grupišemo sve sabirke koji sadrže faktor  i izvučemo taj zajednički faktor, dobićemo



gdje je ***s*** broj inverzija  . Prethodna suma je kofaktor elementa , tj. . Ako postupak dalje nastavimo za  dobićemo da je

(2.13) .

Jednakost (2.13) definiše razvijanje determinante po *i*-toj vrsti .

Kako je  to se jednakost (2.13) može izraziti u obliku

(2.14) .

Na sličan način se može dobiti i jednakost

(2.15) ,

koja definiše razvijanje determinante po *k*-toj koloni, .

***Primjer* 2.11.** Izračunati vrijednost determinante



a) razvijanjem po drugoj vrsti; b) po četvrtoj koloni.

***Rješenje.*** a) Izračunavanje determinante je najjednostavnije po drugoj vrsti jer je . Pri tome je



.

b) .

**2.2.4. Adjungovana matrica. Inverzna matrica**

Neka je data kvadratna matrica reda *n*. Transponovanjem

matrice *A* dobićemo matricu

.

Ako elemente matrice  zamijenimo odgovarajućim kofaktorima dobi-ćemo matricu

.

Za matricu  kažemo da je adjungovana matrica matrice  i označavamo je sa , što se čita "adjungovano ".

***Primjer* 2.12.** Naći  ako je



***Rješenje*.** Iz date matrice slijedi da je



a odgovarajući kofaktori su:









.

Iz definicije  slijedi da je

.

Za kvadratnu matricu *A* kažemo da je regularna ako je .

**Definicija 2.3.** *Neka su* *X i A* *kvadratne matrice reda n. Za matricu* *X* *kažemo da je* ***inverzna matrica*** *matrice* *A*  *ako je*

 .

*Inverznu matricu matrice*  *ćemo označavati sa* .

**Teorema 2.8.** *Ako je*  *regularna matrica reda*  *tada je*

.

***Dokaz*.** Prema definiciji inverzne matrice treba dokazati da je

.

Neka je  matrica reda . Tada je na osnovu relacije (2.15)

(2.16) 

Iz relacije

,

a na osnovu (2.16) je



,

čime je teorema dokazana.

***Primjer* 2.13.** Naći inverznu matricu: a) po teoremi (2.8); b) po definiciji 2.3. matrice

.

***Rješenje*.** a) Kako je , a



to je

.

b) Neka je



inverzna matrica matrice *A*. Tada je po definiciji (2.3.)

.

Prema definiciji množenja i jednakosti matrica slijede sistemi jednačina:







Rješenja prethodnih sistema su:





.

**2.2.6. Elementarne transformacije matrica.**

**Rang matrice**

Elementarnim transformacijama matrica nazivamo:

1. promjenu mjesta dvije vrste (kolone),

2. množenje jedne vrste (kolone) brojem različitim od nule,

3. dodavanjem elemenata jedne vrste (kolone) pomnoženih nekim brojem različitim od nule odgovarajućim elementima druge vrste (kolone).

Elementarne matrice su matrice dobijene vršenjem jedne od elemen-tarnih transformacija na jediničnoj matrici, i označavamo ih sa:

1. *i*-ta i *j*-ta vrsta zamijene mjesta  ,

2. *i*-ta vrsta pomnožena sa *a* ,

3. *i*-ta vrsta pomnožena sa *a*, dodata *j*-toj vrsti .

Elementarne matrice kod kojih su odgovarajuće promjene izvršene na kolo-nama su: .

Za izvršenje elementarnih transformacija na vrstama matrice *A* do-voljno je tu transformaciju izvesti na jediničnoj matrici , a zatim matricu *A* pomnožiti slijeva dobivenom elementarnom matricom. Uzastopnim mno-ženjem slijeva matrice  elementarnim matricama može se postići da ona dobije gornji trougaoni oblik. Ako je potrebno matricu  množiti slijeva matricama  da bi se ona svela na gornju trougaonu matricu, onda se može naći proizvod  i matricu *A* množiti slijeva matricom *P*.

***Primjer*** **2.14.** Matricu 

možemo svesti na gornju trougaonu matricu sljedećim elementarnim transfor-macijama:

1. prvu vrstu pomnoženu sa -2 dodati drugoj vrsti,

2. prvu vrstu pomnoženu sa -3 dodati trećoj vrsti,

3. drugu vrstu dobivene matrice pomnoženu sa -4 dodati trećoj vrsti.

Dobijena trougaona matrica je

.

Odgovarajuće elementarne matrice  su:

, , ,

a odgovarajuća matrica *P* je

,

pa je gornja trougaona matrica

.

Elementarne transformacije na kolonama matrice *A* ekvivalentne su množenju matrice *A* sdesna odgovarajućim elementarnim matricama.

**Teorema 2.9.** *Elementarnim transformaijama ne mijenja se broj linearno nezavisnih vrsta* (*kolona*) *matrice*.

**Definicija 2.4.** *Maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta matrice* *A* *zove se* ***rang matrice*** *A*  *i označava se sa* .

Matrica, koja nije nula matrica,



primjenom elementarnih transformacija može se svesti na gornju trougaonu matricu, tj. matricu oblika

,

gdje je . Prvih *p* vrsta matrice *B* su linearno nezavisne, što nije teško dokazati.

Iz linearne kombinacije





ili

 

slijedi

.

Kako je  to je , što znači da su prvih *p* vrsta matrice *B* linearno nezavisne. Odavde, na osnovu teoreme 2.9, slijedi da je .

***Primjer* 2.15.** Odrediti rang matrice .

***Rješenje*.** Kako je , elementima druge vrste možemo dodati odgovarajuće elemente prve vrste pomnožene sa 2, a elementima treće vrste elemente prve vrste. Na taj način ćemo dobiti matricu

.

Dalje, ako elementima treće vrste dodamo odgovarajuće elemente druge vrste pomnožene sa -1 dobićemo matricu

.

Matrica  je gornja trougaona matrica i prve njene dvije vrste su linearno nezavisne, pa je .

Elementarne transformacije na vrstama matrice mogu poslužiti kao praktičan postupak za određivanje inverzne matrice. Regularnoj matrici *A* dopišemo jediničnu matricu, istog reda kao i matrica *A*, a zatim na dobijenoj matrici vršimo elementarne transformacije na vrstama sve dotle dok matrica *A* ne pređe u jediničnu matricu. Matrica u koju je prevedena jedinična matrica je inverzna matrica matrice*A*.

***Primjer* 2.16.** Naći inverznu matricu matrice

.

***Rješenje*.** Prema opisanom postupku određivanja inverzne matrice je:





,

pa je

.

**2.3.6. Zadaci za vježbu**

**1.** Neka je . Ispitati da li je transformacija data sa:

a) ,

b) ,

c) ,

linearna transformacija.

**2.** Linearna transformacija *A* u odnosu na bazu  ima matricu

.

Naći njenu matricu u odnosu na bazu

,

,

.

**3.** Linearna transformacija vektorskog prostora  određena je sa:

.

Naći matricu te transformacije u odnosu na bazu .

**4.** Za matrice

,

naći: .

**5.** Izračunati  ako je .

**6.** Izračunati  tako da vrijedi jednakost

.

**7.** Neka je . Naći po definiciji .

**8.** Izračunati:

a) , b) , c) .

**9.** Izračunati:

a) , b) , c) .

**10.**  Ne rješavajući determinantu dokazati da je

.

**11.** Izračunati vrijednost determinante:

a) , b) .

**12.** Za matricu 

naći  i uvjeriti se da je

.

**13.** Naći  ako je .

**14.** Za matricu 

naći . Zadatak uraditi i po definiciji inverzne matrice.

**15.** Izračunati:  ako je

.

**16.** Izračunati  ako je

.

**17.** Matricu



svesti na gornju trougaonu i dijagonalnu matricu.

**18.** Odrediti rang matrice

.

**3. Sistemi linearnih algebarskih jednačina**

**3.1. Definicija i osnovni pojmovi**

Sistem od *m* linearnih jednačina sa *n* nepoznatih  je







 ,

ili oblika

(3.1) .

Brojevi  zovu se koeficijenti, a  slobodni članovi sistema. Ako je  za sistem se kaže da je homogen. Svaka uređena *n*-torka  real-nih brojeva koja zadovoljava sistem (3.1), tj. za koju važi:



je rješenje sistema.

**Definicija 3.1.** *Za sistem linearnih algebarskih jednačina* (3.1) *se kaže da je nesaglasan* (*nemoguć ili protivrječan*) *ako nema rješenja, u protivnom ćemo reći da je saglasan* (*moguć ili neprotivrječan*). *Ako sistem* (3.1) *ima samo jedno rješenje, onda kažemo da ima jednistveno rješenje*.

Na osnovu definicije množenja i jednakosti matrica sistem linearnih algebarskih jednačina (3.1) se može napisati u obliku

(3.2) 

ili u obliku

(3.3) ,

gdje je

, , .

**3.2. Rješavanje sistema od *n* jednačina sa *n*** **nepoznatih**

Za  sistem jednačina (3.2) ili (3.3) ima oblik

(3.4) ,

gdje je

, , .

**Teorema 3.1.** *Ako je matrica*  *regularna sis-tem* (3.4) *ima jedinstveno rješenje*.

***Dokaz.*** Ako je matrica *A* regularna, , tada postoji . Množenjem jednakosti (3.4) slijeva sa  dobija se , odnosno

(3.5) 

što predstavlja jedinstveno rješenje sistema (3.4).

***Primjer*** **3.1.** Riješiti sistem jednačina





.

***Rješenje*.** Kako je , to je .

Inverzna matrica matrice *A* je

,

pa je

,

odakle je .

Kako za regularnu matricu *A* vrijedi



to se relacija (3.5) može izraziti u obliku

(3.6) .

**Teorema 3.2.** *Ako je*  *sistem* (3.4) *ima rješenje*  *dato sa*

(3.7) , 

*gdje se matrica*   *dobija zamjenom* *k*-*te kolone matrice* *A* *kolonom slobodnih članova, matricom B*.

***Dokaz*.** Na osnovu teorema (3.1) i (2.8) je

(3.6) ,

gdje su  algebarski komplementi elemenata , ili



odakle na osnovu definicije jednakosti matrica slijedi

.

Ova formula je *Kramerova*\*) formula za rješavanje sistema linearnih alge-barskih jednačina.

***Primjer* 3.2.** Riješiti sistem jednačina





.

***Rješenje*.** Matrica sistema je

, a .

Dalje je

, ,

,

pa je

.

**3.3. Sistem od *m* jednačina sa *n* nepoznatih**

Za sistem (3.2) korisno je pored matrice  posmatati i matricu

(3.8) 

koju nazivamo proširena matrica sistema.

\*) G. Kramer (1704-1752), švajcarski matematièar

**Teorema 3.3.** *Sistem* ( 3.2) *je saglasan ako i samo ako je*

.

***Dokaz*.** Ako je sistem saglasan onda postoji bar jedna uređena *n*-torka realnih brojeva  tako da je



odakle je

(3.9) .

Ako elemente prve, druge,..., *n*-te kolone matrice (3.8) pomnožimo brojevima respektivno, i sve proizvode oduzmemo od odgovarajućih ele-menata kolone slobodnih članova dobićemo matricu



koja na osnovu teoreme (2.9) ima isti rang kao i matrica  . Kako su na osnovu relacije (3.9) svi elementi posljednje kolone jednaki nuli to je njen rang jednak rangu matrice *A*. Znači  čime je dokazan potre-ban uslov.

Dokažimo da je uslov teoreme i dovoljan. Ako je  tada se matrica *A* (matrica ) primjenom elementarnih transformacija na vrsta-ma može svesti na gornju trougaonu matricu. Prvih *s* vrsta su linearno neza-visne. Ostale vrste  se mogu izraziti kao linearne kombi-nacije prvih *s* nezavisnih vrsta. To znači da rješenje sistema prvih *s* jedna-čina zadovoljava i ostale jednačine. Jednačine -ta se mogu izostaviti pa se rješavanje sistema (3.1) svodi na rješavanje sistema

(3.10) ,

i razlikujemo dva slučaja:

**1.** Za  sistem (3.10) ima jedinstveno rješenje koje se dobija po Kramerovim formulama ili matričnim računom;

**2.** Za  sistem (3.10) se može pisati u obliku

(3.11) ,

gdje nepoznate  nazivamo slobodnim i možemo im pridružiti proizvoljne vrijednosti  , gdje je***R***. Sistem (3.11) se može riješiti pomoću već poznatih Kramerovih formula.

Sistem (3.11) se u razvijenom obliku može zapisati kao







.

Ako označimo sa

, , ,

tada je



odakle je rješenje sistema (3.11)

 .

***Primjer* 3.3.** Ispitati da li je sistem







saglasan, i ako jeste riješiti ga.

***Rješenje*.** Za 

slijedi da je , a za



je , tj.  što znači da je sistem saglasan. Kako je  rješavanje datog sistema se svodi na rješavanje sistema od dvije jednačine sa dvije nepoznate, a ostale dvije nepoznate su nezavisno slobodne. Elementarnim transformacijama matrice  dobićemo matricu



što znači da je treća jednačina linearna kombinacija prve dvije jednačine i ona se može izostaviti. Dati sistem jednačina se svodi na sistem





ili



.

Prema teoremi 3.2 (Kramerova formula) je

,

.

Dakle rješenje je  proizvoljno, naprimjer za .

Ako se zamijeni

, , 

sistem se može napisati u matričnom obliku



odakle je

 .

Kako je



to je

.

Iz teoreme 3.3. neposredno slijede teoreme:

**Teorema 3.4.** *Ako je rang matrice* *A* *homogenog sistema*



*jednak* ***n*** *tada sistem ima samo trivijalno rješenje*.

**Teorema 3.5.** *Da bi homogen sistem jednačina*



*imao netrivijalno rješenje potrebno je i dovoljno da je* .

***Primjer* 3.4.** Odrediti parametar *m* tako da sistem







ima netrivijalna rješenja.

***Rješenje.*** Sistem će imati netrivijalna rješenja ako je rang matrice



manji od tri, tj. ako je . Iz



slijedi . To znači da će sistem imati netrivijalna rješenja samo ako je . Ako je  sistem će imati rješenje samo .

**3.4. Gaussov metod rješavanja sistema linearnih** **jednačina**

Neka je dat sistem jednačina

(3.12) 

i neka je . Ukoliko je  onda bi za prvu jednačinu uzeli neku od jednačina za koju je koeficijent uz  različit od nule. Očigledno bar jedan od koeficijenata  mora biti različit od nule, jer u protivnom sistem ne bi sadržavao nepoznatu . Prva jednačina sistema nakon dijeljenja sa  će glasiti

. 

Množenjem ove jednačine sa  i oduzimanjem tako pomnožene od *i*-te jed-načine, , uzimajući i ovu jednačinu, dobijamo sistem

(3.13.) 

ekvivalentan sistemu (3.12). Ako se u sistem (3.13) uvedu oznake



on će glasiti



(3.14) 

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

 .

Ako je  bar za jedno  tada se istim pos-tupkom sistem (3.14) svodi na njemu ekvivalentan sistem







. . . . . . . . . . . . . . . . .

 .

Ako je , tada ćemo u prvoj jednačini sabirak  pisati na posljednjem mjestu lijeve strane jednakosti, i opisani postupak raditi sa koeficijentima uz nepoznatu . Opisani postupak se nastavlja, i nakon najviše *n-*1 koraka dobiće se sistem ekvivalentan datom sistemu u trougaonom obliku





. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .



ili





. . . . . . . . . . . . .





. . . . .

.

U prvom slučaju sistem je saglasan, a u drugom slučaju je saglasan samo ako je .

Način rješavanja sistema linearnih algebarskih jednačina objašnjen je u ovom dijelu poznat je pod imenom *Gaussov metod* *eliminacije*.

Može se zapaziti da je Gaussov postupak rješavanja sistema linearnih algebarskih jednačina sličan svođenju matrica na gornji trougaoni oblik, što će biti pokazano na sljedećim primjerima.

***Primjer* 3.5.** Gaussovim postukom riješiti sistem jednačina





.

***Rješenje.*** Ako prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo drugoj jednačini, a prvu jednačinu pomnoženu sa -1 dodamo trećoj jednačini dobićemo sistem







koji je ekvivalentan datom sistemu jednačina. Ako sada trećoj jednačini dodamo drugu jednačinu pomnoženu sa -1 dobićemo sistem





.

Nakon dijeljenja treće jednačine sa 4 dobićemo . Uvrštava-njem ove vrijednosti u drugu jednačinu dobijamo . Dalje, uvrštavanjem vrijednosti za  u prvu jednačinu dobijamo . Dobijene vrijednosti  proizvoljno su rješenje datog sistema.

Ako na proširenoj matrici



datog sistema vršimo iste elementarne transformacije na vrstama matrice kao i na jednačinama dobićemo gornju trougaonu matricu



na osnovu čega dobijamo sistem







koji je ekvivalentan datom sistemu jednačina.

***Primjer* 3.6.** Gaussovim postupkom riješiti sistem jednačina









.

***Rješenje*.** Elementarnim transformacijama matrice  dobiće se matrica



odakle se dobija rješenje sistema .

**3.5. Bazna rješenja**

Ako kolone matrice *A* saglasnog sistema (3.3) za  označimo redom sa  tada se on može zapisati u obliku



ili

(3.15) .

Dakle, vektor -dimenzionalnog vektorskog prostora  je izražen kao linearna kombinacija vektora , gdje su  koeficijenti te linearne kombinacije. Ako je  i ako su vektori  linearno nezavisni tada postoji samo jedan skup brojeva  koji zadovoljava jednačinu (3.15). Ako je  tada postoji najmanje toliko različitih rješenja koliko postoji različitih podskupova od *m* linearno nezavisnih vektora . Svaki poskup od *m* linearno nezavisnih vektora  čini jednu bazu prostora . Ako se uzme da su koeficijenti  uz vektore koji ne pripadaju toj bazi jednaki nuli, tada se vektor *B* može jednoznačno izraziti kao linearna kombinacija vektora te baze, tj. može se izraziti u obliku

(3.16) .

Dakle, rješenje sistema (3.16) je  . Skup  naziva se bazno rješenje sistema (3.15). Maksimalan broj baznih rješenja je .

***Primjer* 3.7.** Naći sva bazna rješenja sistema



.

***Rješenje.*** Ovdje imamo dvodimenzionalne vektore

.

Parovi vektora  su linearno nezavisni, dakle imamo pet baza, odnosno baznih rješenja. Prvo bazno rješenje se dobija kada se u dati sistem jednačina stavi . Tada je





ili



odakle je . Dakle prvo bazno rješenje je .

Slično se nalaze i ostala bazna rješenja.

**3.6. Zadaci za vježbu**

**1.** Sistem jednačina







napisati u matričnom obliku a zatim ga riješiti.

**2.** Ispitati da li je sistem









saglasan i ako jeste riješiti ga primjenom matričnog računa.

**3.** Sistem jednačina







riješiti pomoću Kramerovih formula.

**4.** Ispitati saglasnost i prirodu rješenja sistema







.

Riješiti sistem jednačina.

**5.** Naći opšta i bazna rješenja sistema





.

**6.** Gaussovim postupkom riješiti sistem jednačina iz zadatka 5.

**III G L A V A**

**FUNKCIJE JEDNE PROMJENLJIVE**

**1. Definicija i osnovni pojmovi**

Funkcija  ili  se naziva numerička funkcija jedne promjenljive, ako su  podskupovi skupa brojeva. Ako su  podskupovi skupa realnih brojeva za funkciju se kaže da je realna funkcija realne promjenljive, i mi ćemo u daljem radu razmatrati samo te funkcije.

**1.1. Zadavanje funkcije**

Funkcije se najčešće zadaju analitički, grafički i tabelarno.

Analitički se funkcije zadaju pomoću formula koje izražavaju funkcionalnu zavisnost između . U tom slučaju se ne zadaje . Domena funkcije  je skup svih vrijednosti  za koje je .

***Primjer* 1.1.** Odrediti , ako je .

***Rješenje.*** Prema aksiomima skupa realnih brojeva (vidjeti Def.4.4-(8)) inverzni element za množenje definisan je u skupu . To znači da funkcija nije definisana za ***R*** za koje je . Znači funkcija nije definisana za  odnosno da je definisana za svako .

***Primjer* 1.2.** Odrediti  funkcije .

***Rješenje.*** Korijen sa parnim izložiocem je realan ako je potkorjena veličina nenegativna, što znači da je data funkcija definisana za ,

ili . To znači da je .

Funkcija može biti zadana i sa više formula i u tom slučaju se daje i . Tako naprimjer



Funkcije u analitičkom obliku mogu se zadati u eksplicitnom, impli-citnom ili parametarskom obliku.

Kažemo da je funkcija zadana u *eksplicitnom obliku* ako je izražena u obliku . Znači, kod eksplicitno zadane funkcije direktno se može izračunati vrijednost funkcije za datu vrijednost argumenta. Naprimjer:

.

Kažemo da je funkcija zadana u *implicitnom obliku* ako funkcija i njen argument nisu tako odvojeni da se, pomoću date vrijednosti argumenta, može direktno izračunati odgovarajuća vrijednost funkcije. Tako, naprimjer

,

su implicitno zadane funkcije. Prema tome



je opšti oblik implicitno zadane funkcije.

Ako se zavisna i nezavisna promjenljiva funkcije  odnosno  može izraziti kao funkcija nekog argumenta u obliku

,

tada se za te analitičke izraze kaže da predstavlja funkciju u parametarskom obliku. Naprimjer funkcija

,

je funkcija zadana u parametarskom obliku.

*Tabelarni način prikazivanja funkcija* sastoji se u ispisivanju niza vrijednosti nezavisne promjenljive i odgovarajućih vrijednosti funkcije. Ovi podaci se upisuju u tabelu oblika

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | *x*1 | *x*2 | *x*3 | … | *xn* |
| *y* | *y*1 | *y*2 | *y*3 | … | *yn* |

po čemu je ovaj način prikazivanja i dobio ime. Zapaža se da je vrijednost funkcije poznata samo za one vrijednosti argumenta koji se nalazi u tablicama, zbog čega je ovaj način prikazivanja funkcija nepraktičan. No i pored toga on je neizbježan u eksperimentalnim i statističkim istraživanjima funkcionalnih zavisnosti posmatranih veličina. Ukoliko je poznat dovoljno veliki broj podataka funkcionalne zavisnosti posmatranih veličina tada postoje načini da se odredi i analitički izraz koji bi dosta dobro opisao te zavisnosti.

*Grafičko predstavljanje funkcija*. Neka je data funkcija  i neka je  domena funkcije. Ako određenu vrijednost  nezavisno promjenljive  uzmemo za apcisu, a odgovarajuću vrijednost  za ordinatu, onda će paru brojeva  odgovarati tačka  u Dekartovom koordinatnom sistemu, Sl.1.1. Isto se može uraditi za svaku vrijednost  i svaku vrijednost  i tako dobiti skup . Ovaj skup tačaka se naziva grafik funkcije , a način predstavljanja funkcije naziva se grafičko predstavljanje funkcije *f*.



Sl. 1.1.

S druge strane ako je poznat grafik funkcije, tada se približno može odrediti vrijednost funkcije za svako . Vrijednost funkcije se dobije mjerenjem ordinate za datu vrijednost argumenta, što znači da se tra-žena vrijednost može odrediti sa "dovoljnom" tačnošću.

U praksi se često kombinuju sva tri načina predstavljanja funkcija. Tako naprimjer za funkciju čiji je analitički izraz



može se formirati tabela

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | -3 | 0 | 5 | ... |
| *y* | -2 | 1 | 6 | ... |

a grafički prikaz je dat na Slici 1.2.



(0,1)

(-3,2)

*y*

(5,6)

5

*x*

Sl. 1.2.

**1.2. Klasifikacija funkcija u odnosu na grafik**

**1.2.1. Ograničene i neograničene funkcije**

Ranije smo definisali infimum i supremum skupa  (Vidjeti, I, 3.1.3). Te definicije vrijede i za skup vrijednosti funkcije , i ozna-čavaju se sa



odnosno

.

**Definicija 1.1.** *Za funkciju*  *se kaže da je ograničena na* *X* *odozdo*,(*odozgo*) *ako je*

.

*Ako je*  *za funkciju*  *se kaže da je ograničena*.

Ako se uzme  tada imamo da je

ili

(1.1) .

Odakle slijedi da je funkcija *f* ograničena na *X* ako i samo ako je ispunjen uslov (1.1).

Ako ne postoji realan broj *K* takav da su ispunjene nejednakosti (1.1) za svako , za funkciju se kaže da je neograničena.

Iz definicije ograničene funkcije slijedi da se grafik ograničene funkcije  nalazi u pojasu ograničenom pravim , i ,  što je prikazano na Sl.1.3.



Sl. 1.3.

***Primjer* 1.3.** Funkcija  je ograničena u intervalu  jer je ***R***.

***Primjer* 1.4.** Funkcija  je ograničena na ***R***, jer je

***R***.

***Primjer* 1.5.** Funkcija  je ograničena na svakom intervalu . Ona je neograničena na ***R***, a ograničena je odozdo, vidjeti sliku 1.4.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Sl. 1.5.

Sl. 1.4.

***Primjer* 1.6.** Funkcija  je ograničena na svakom intervalu , ali je neograničena na ***R*** odozdo i odozgo, vidjeti Sl.1.5.

**1.2.2. Parne i neparne funkcije**

**Definicija 1.2.** *Za funkciju*  *definisanu na intervalu*  *kažemo da je parna*, *odnosno neparna*, *ako je*

,

*odnosno*

.

Može se zapazati da je grafik parne funkcije simetričan u odnosu na -osu, a da je grafik neparne funkcije simetričan u odnosu na koordinatni početak. Ove osobine olakšavaju crtanje grafika funkcije. Dovoljno je na-crtati grafik funkcije u jednom od intervala  ili , naprimjer u intervalu . Potom, kod parnih funkcija naći osno simetričnu krivu u odnosu na -osu kao osu simetrije, a kod neparnih funkcija centralno sime-tričnu krivu sa centrom simetrije .

***Primjer* 1.7.** Funkcija  je parna funkcija na intervalu , jer je

.

***Primjer* 1.8.** Funkcija  je neparna funkcija na intervalu , jer je definisana za  i

,

tj.

.

**1.2.3. Periodične funkcije**

**Definicija 1.3.** *Za funkciju*  *kažemo da je periodična i da ima period*  *ako*  *povlači*  *i ako je* . *Najmanji broj* *T* *za koji je*  *je osnovni period funkcije*.

To znači, ako su poznate vrijednosti periodične funkcije sa osnovnim periodom *T* za sve vrijednosti *x* iz intervala dužine *T*, tada su poznate vri-jednosti funkcije za svako . To olakšava crtanje grafika periodične funkcije. Nacrta se grafik u intervalu dužine *T* pa se onda translatira u oba smjera, duž ose *x* za .

**Teorema 1.1.** *Ako je funkcija*  *periodična sa osnovnim periodom* , *tada su brojevi*  , *takođe periodi funkcije*.

***Dokaz*.** Za je

.

Uz pretpostavku da tvrdnja vrijedi za prirodni broj *k*, tada je

.

To znači, na osnovu principa matematičke indukcije, da tvrdnja vrijedi za svako ***N***. Sa druge strane je  i

; .

***Primjer* 1.8.** Dokazati da je funkcija  periodična sa osnovnim periodom .

***Rješenje.*** Iz , tj.

,

na osnovu formule o razlici funkcija  i , slijedi



ili

.

Prethodna jednakost će biti zadovoljena za svako *x*, ako je, odakle je .

**1.2.4. Monotone funkcije**

**Definicija 1.4.** Neka je  *neprazan skup. Za funkciju*  *se kaže da raste, odnosno opada, u intervalu*  *ako za bilo koje dvije vrijednosti*  *vrijedi*

, *odnosno* .

Kada umjesto , odnosno , stoji , odnosno  za funkciju  se kaže da strogo raste, odnosno strogo opada, na *X*. Za funkciju  koja raste, opada, na *X* kažemo da je monotona na *X*.

***Primjer* 1.9.** Funkcija  je strogo rastuća na ***R***, jer je



za svako .

***Primjer* 1.10.** Funkcija  je strogo rastuća na , jer je



za .

**1.2.5. Lokalni ekstremi funkcije**

**Definicija 1.5.** *Za funkciju*  *se kaže da u tački*  *ima lokalni minimum, odnosno lokalni maksimum, ako postoji*  *tako da za*  *vrijedi* ,  (vidjeti sliku 1.6) *odnosno*, ,  (vidjeti sliku 1.7).

Minimum i maksimum funkcije zovu se *ekstremi* funkcije.

|  |  |
| --- | --- |
| Sl. 1.7.  Sl. 1.6.        *c*    *x*  *O*  *y*  *O*  *y*  *x*    *c* |  |

**1.3. Elementarne funkcije**

U zavisnosti od operacija koje treba izvršiti na argumentu da bi se dobila odgovarajuća vrijednost funkcije, funkcije se dijele na algebarske i trascedentne.

**1.3.1. Algebarske funkcije**

Algebarske funkcije su takve funkcije čiji analitički izraz sadrži konačan broj operacija sabiranja, oduzimanja, množenja, dijeljenja (osim dijeljenja nulom) i stepenovanja racionalnim brojem.

Najjednostavnija algebarska funkcija je funkcija polinoma ili cijela racionalna funkcija.

Za ***N***, ***R*** funkcija

(1.2) 

sa ***R*** u ***R*** se zove polinom ili cijela racionalna funkcija nad ***R***. Brojevi  zovu se koeficijenti polinoma. Ako je , za polinom  se kaže da je reda  *n*, a ako je  za polinom se kaže da je nor-miran.

Prema tome, pod polinomom ili cijelom racionalnom funkcijom se podrazumijeva funkcija koja nastaje vršenjem na argumentu i konačnom broju konstanti konačanog broja operacija sabiranja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i stepenovanja prirodnim brojem.

Funkcija oblika

(1.3) ,

gdje su  polinomi , nazivamo razlomljena racionalna funk-cija. Ako je  za funkciju  kažemo da je prava razlomljena funk-cija, a ako je  kažemo da je neprava razlomljena funkcija.

Cijele racionalne i razlomljene racionalne funkcije zovemo racio-nalnim funkcijama.

Za algebarske funkcije koje nisu racionalne kaže se da su iracionalne algebarske funkcije.

Algebarske funkcije su naprimjer:

a) , b) ,

c) , d) ,

e) , f .

Funkcije a), b), d) i f su racionalne funkcije, a funkcije c) i e) su ira-cionalne funkcije. Funkcije a) i d) su cijele racionalne funkcije, a funkcije b) i fsu razlomljene racionalne funkcije. Funkcija b) je prava a f neprava raz-lomljena racionalna funkcija.

**1.3.1.1. Osnovne teoreme cijelih racionalnih funkcija**

**Teorema 1.2.** *Ako se cijela racionalna funkcija*  *podijeli sa* , *dobija se ostatak jednak* .

***Dokaz*.** Neka se pri dijeljenju  sa  dobije rezultat  kao ostatak dijeljenja, gdje je  cijela racionalna funkci-ja reda , a  cijela racionalna funkcija reda manjeg od 1. Znači ostatak  je konstanta . Tada je



odnosno

 .

Znači, vrijedi relacija

.

***Primjer* 1.11.** Neka je . Tada se dijeljenjem date funkcije sa  dobija rezultat  i ostatak 4. Očigledno je

.

Neka su date bilo koje dvije cijele racionalne funkcije  i . Tada postoje cijele racionalne funkcije  i , pri čemu je red funkcije  jednak razlici reda polinoma  i , a red polinoma  je manji od reda polinoma  za koji vrijedi

(1.4) .

Za polinom  se kaže da je djeljiv polinomom  akko je u relaciji (1.4) , gdje "akko" znači "ako i samo ako".

**Teorema 1.3.** (***Osnovna teorema algebre***) *Svaka cijela racionalna funkcija* , *ima bar jedan realan ili kompleksan korijen*.

**Lema 1.1.** *Cijela racionalna funkcija* , *djeljiva je binomom* , *akko je* .

***Dokaz*.** Potreban uslov ove leme je dokazan u teoremi 1.2, a dovo-ljan uslov slijedi neposredno iz definicije o djeljivosti.

**Teorema 1.4.** *Svaka cijela racionalna funkcija*  *može se razložiti na*  *linearnih faktora oblika*  *i faktora koji je jednak koeficijentu uz* .

***Dokaz*.** Neka je



cijela racionalna funkcija , na osnovu teoreme 1.3, ima bar jedan korijen , pa se na osnovu leme 1.1 može pisati

,

gdje je  cijela racionalna funkcija reda . Cijela racionalna funkcija  ima takođe jedan korijen, i neka je to . Tada je

,

gdje je  cijela racionalna funkcija reda . Analogno se dobija

,

gdje je  cijela racionalna funkcija reda . Nastavljajući taj proces dobićemo

,

gdje je  cijela racionalna funkcija nultog reda, tj. neki konstantan broj. Taj broj je očigledno jednak koeficijentu uz , tj.  Na osnovu prethodnih jednakosti slijedi da je

(1.5) ,

gdje su  korijeni polinoma .

***Primjer* 1.12.** Cijela racionalna funkcija



ima korijene: , pa je

.

**Teorema 1.5.** *Cijela racionalna funkcija*



*identički je jednaka nuli*, *akko je* .

***Dokaz*.** Neka su  korijeni datog polinoma. Tada je

(1.5) .

Ako je polinom  identički jednak nuli, tj. jednak nuli za svako *x*, to je on jednak nuli i za neko *x* različito od  . Na osnovu toga iz jednakosti (1.5) slijedi da je . Analogno se dokazuje da je

.

**Teorema 1.6.** *Za polinome*  *i*  *vrijedi*

.

***Dokaz*** ove teoreme neposredno slijedi iz teoreme 1.5.

Ako su u razloženom obliku polinoma  na linearne faktore,

,

neki faktori jednaki, tada se oni mogu objediniti i pisati u obliku stepena, tj. u obliku

,

gdje je . Prirodne brojeve  nazivamo višestrukost ili mnogostrukost korijena .

**Teorema 1.7.** *Ako cijela racionalna funkcija*  *sa realnim koeficijentima ima korijen* , *gdje je* ***i*** *imaginarna jedinica*, *tada je njen korijen i* .

***Dokaz*.** Ako u cijeloj racionalnoj funkciji  umjesto *x* zami-jenimo , izvršimo naznačena stepenovanja, grupišemo sabirke koji nemaju faktor *i*, odnosno sabirke koji sadrže faktor *i*, dobićemo jednakost

.

Kako je , to je i , što znači da je  i .

Na osnovu definicije zbira kompleksnih brojeva neposredno slijedi da je

,

što znači da je  korijen cijele racionalne funkcije . Time je dokaz završen.

Na osnovu teoreme 1.7. slijedi da u razloženom obliku cijele racio-nalne funkcije



svakom kompleksnom korijenu odgovara i konjugovano kompleksan korijen. Neka su  i  korijeni cijele racionalne funkcije  mnogostrukosti *k*. Tada za taj par u razvijenom obliku vrijedi

,

gdje je

.

Dalje je , ili

(1.6) 

gdje je: .

**1.3.1.2. Rastavljanje razlomljenih racionalnih funkcija**

**na zbir elementarnih razlomaka**

Neka je data neprava razlomljena racionalna funkcija . Tada se ona može izraziti u obliku

(1.7) ,

gdje je  cijela racionalna funkcija reda , a  prava razlomljena racionalna funkcija. Funkcija  se dobije dijeljenjem 

sa , a  je ostatak koji se dobije pri tom dijeljenju.

***Primjer* 1.13.** Funkciju  napisati u obliku zbira cijele i prave razlomljenje racionalne funkcije.

***Rješenje.*** Dijeljenjem  sa  dobija se  i ostatak . Znači, može se pisati

.

Ubuduće ćemo razmatrati samo prave razlomljene racionalne funkcije . Pored toga, pretpostavićemo da je cijela racionalna funkcija  normirana, što ne umanjuje opštost zadatka.

Izrazee oblika



gdje je  i  nazivamo *elementarni* razlomci.

**Teorema 1.8.** *Neka je*  *prava razlomljena racionalna funkcija* *i* *neka je* , *k*-*struki realni korijen nazivnika*, *tj*. , *gdje je* . *Tada vrijedi*

(1.8) ,

*gdje je* *A* *konstanta različita od nule*, *a*  *cijela racionalna funkcija nižeg reda od reda cijele racionalne funkcije* .

***Dokaz*.** Kako je jednakost

(1.9) 

zadovoljena za svako *A*, odredimo *A* tako da je  djeljivo sa . Prema lemi 1.1. to je ispunjeno ako i samo ako je

.

Kako je , to je

.

Pri tom je

(1.10) ,

gdje je  cijela racionalna funkcija reda nižeg od reda funkcije .

Na osnovu relacija (1.10) i (1.9) slijedi

.

Time je teorema dokazana..

Primjenjujući istu teoremu na pravu racionalnu funkciju  uzastopno *k*-puta dobićemo jednakost

(1.11) ,

gdje je  prava razlomljena funkcija koja se ne može skratiti.

Prethodna teorema razmatra razlaganje pravih razlomljenih racionalnih funkcija u slučaju da su korijeni nazivnika realni. Sljedeća teorema razmatra razlaganje prave razlomljene racionalne funkcije kada su korijeni nazivnika konjugovano kompleksni, mnogostrukosti *r*.

**Teorema 1.9.** *Neka je* , *gdje je*  *cijela racionalna funkcija nedjeljiva sa* . *Tada se prava razlomljena funkcija*  *može izraziti u obliku*

(1.12) ,

*gdje je*  *cijela racionalna funkcija nižeg reda od* .

***Dokaz*.** Iz uslova teoreme slijedi da je

,

a to se može napisati u obliku

(1.13) .

Jednakost (1.13) je zadovoljena za svako realno *M* i *N* odredimo ih tako da je



djeljivo sa . To će biti ako i samo ako su  i  korijeni jednačine

.

To znači da, naprimjer, za  vrijedi jednakost



ili

.

Kako je  određen kompleksan broj to ga možemo izraziti u obliku , gdje su *K* i *L* realni brojevi. Na osnovu toga prethodna jednakost će glasiti

,

odakle je

,

ili

.

Za ove vrijednosti *M* i *N* izraz  ima korijen , a takođe i , što znači da je djeljiv sa  i , odnosno sa . Neka je rezultat dijeljenja . Tada je

.

Na osnovu toga se iz relacije (1.13) dobija



.

Time je teorema dokazana.

Ako se na drugi sabirak desne strane prethodne jednakosti primijeni teorema (1.9) uzastopno -puta dobiće se jednakost

,

gdje je  prava razlomljena funkcija koja se ne može skratiti.

Neka je  prava razlomljena racionalna funkcija i neka je

,

gdje je

, ***N***.

Ako se na funkciju  primijene teoreme 1.8. i 1.9. za odgovarajuće ko-rijene, tada se ona može pisati u obliku





(1.14) 

. Nepoznati koeficijenti 

 se mogu odrediti na osnovu sljedećih uslova. Jednakost (1.14) je identičnost. Množenjem identičnosti sa najmanjim zajedničkim sadržaocem nazivnika identičnost će se svesti na identičnost polinoma, pa će se izjednačavanjem koeficijenata odgovarajućih stepena dobiti sistem linearnih jednačina sa nepoznatim koeficijentima. Rješavanjem tog sistema dobiće se vrijednosti nepoznatih koeficijenata.

***Primjer* 1.14.** Razlomak  razložiti na elementarne razlomke.

***Rješenje.*** Kako su  realne nule nazivnika to se može pisati



odakle se množenjem sa  dobija



ili

.

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata sa lijeve i desne strane pret-hodne jednakosti dobijamo sistem jednačina



čije je rješenje . Dakle

.

***Primjer* 1.15.** Neka je . Pravu razlomljenu racio-nalnu funkciju  napisati u obliku zbira elementarnih razlomaka.

a) Kao u primjeru 1.14; b) primjenom teoreme 1.8.

***Rješenje*.** Funkcija  ima trostruku nulu  i jednostruku nulu . Prema relaciji (1.14) je

(a) .

Množenjem prethodne jednakosti sa  dobićemo



ili



,

odakle se dobija sistem jednačina



Rješavanjem prethodnog sistema jednačina dobijamo

.

Zamjenom ovih vrijednosti u relaciju (a) dobijamo

.

b) Prema relaciji (1.8) je

,

gdje je konstanta *A* i funkcija  nepoznata, koje treba odrediti. Na os-novu teoreme 1.8. je

.

Relacija (1.10), za date vrijednosti, ima oblik



odakle slijedi

.

Sada se primjenjuje isti postupak na razlomljenu racionalnu funkciju

,

odakle je .

Iz



slijedi .

Dalje je

,

.

Dobijeni rezultati su isti kao i u slučaju a).

**1.3.1.3. Iracionalne funkcije**

Algebarske funkcije kod kojih se pojavljuje argument stepenovan racionalnim brojem nazivamo iracionalne funkcije.

Naprimjer:

,

.

**1.3.2. Transcedentne funkcije**

Funkcije koje nisu algebarske nazivamo transcedentnim funkcijama.

Elementarne transcedentne funkcije su eksponencijalna i njena in-verzna (logaritamska) funkcija, trigonometrijske ili cirkularne i njihove inver-zne funkcije (arkus ili ciklometrijske funkcije).

Pomoću eksponencijalne funkcije definišu se i hiperbolične funkcije i (njihove inverzne funkcije) area funkcije.

**1.3.2.1. Eksponencijalna i logaritamska funkcija**

Funkciju  nazivamo eksponencijalne funkcija. Ona ima sljedeće osobine:

a) domena funkcije je , a kodomena skup ,

b) sve krive sijeku -osu u tački ,

c) za  funkcija je strogo rastuća, a za  strogo opadajuća, što neposredno slijedi iz definicije monotonih funkcija i nejedna-

kosti stepena.

Naprimjer, funkcije:  date su tabelarnim prika-zom. Nacrtati njihove grafike .

|  |  |
| --- | --- |
| *x* -2 -1 0 1 2 3  2*x*    1 2 4 8  *x* -2 -1 0 1 2 3  2-*x* 4 2 1 |  |

Sl. 1.8.

Iz tabelarnog prikaza i sa Sl.1.8. zapažamo da je funkcija  strogo rastuća i da je funkcija  strogo opadajuća.

Razmotrimo funkciju oblika . Kako je

,

to vrijedi

.

Znači grafik funkcije  se dobije translacijom grafika funkcije

 u pravcu *x*-ose za . Ako je  translacija se vrši u ne-gativnom smjeru, u protivnom translacija se vrše u pozitivnom smjeru.

***Primjer* 1.17.** U istom koordinatnom sistemu nacrtati grafike funkcija

.

***Rješenje.*** Grafik funkcije  je nacrtan na Slici 1.8 i dat odgovarajući tabelarni prikaz. Funkciju  možemo izraziti u obliku , znači grafik te funkcije se može dobiti translacijom

grafika funkcije  za  u negativnom smjeru.

|  |  |
| --- | --- |
|  | *x*  -2 -1 0 1 2  *g*(*x*) 0,75 1,50 3,00 6,00 12,00  Iz  slijedi: grafik funkcije  je simetričan u odnosu na *x*-osu grafiku funkci-je , sl.1.9. |

Sl. 1.9.

Eksponencijalna funkcija  se zapisuje i u obliku , gdje je *x* zavisna a  nezavisna varijabla. Ako  zamijene mjesta do-bićemo relaciju , koju nazivamo logaritamska funkcija. Logari-tamska funkcija, kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije ima domenu  a kodomenu .

Dakle, funkcija



je logaritamska funkcija.

***Primjer* 1.18.** Na istom koordinatnom sistemu nacrtati grafik funkcije

.





log2 *x*

-2

-1

0

1

2

*x*





1

2

4





Sl. 1.10.



**1.3.2.2. Trigonometrijske funkcije**

Kružnica jediničnog polumjera sa centrom u ishodištu pravouglog koordninatnog sistema je trigonometrijska kružnica (Sl.1.11).

|  |  |
| --- | --- |
| *y*  1  *x*  *A*  *M*  *O*  α | Svakoj tački *M* trigonometrijske kružnice odgovara jedan i samo jedan orijentisani ugao  , ,  čiji je prvi krak pozitivna poluosa , a drugi krak promjenljivi krak određen polupravom . |

Sl. 1. 11.

**Definicija 1.4.** *Sinius* (*cosinus*) *ugla*  (*ili luka* ) *je ordinata* (*apcisa*) *tačke u kojoj promjenljivi krak ugla*  (*ili luka* ) *siječe tri-gonometrijsku kružnicu*.

**Definicija 1.5.** *Tangens* (*kotangens*) *ugla*  *ili luka*  *je ordinata* (*apcisa*) *tačke u kojoj promjenljivi krak siječe tangentnu osu*, *tj*. *pravu*  (*kotangentnu osu*, *tj*. *pravu* ).

Trigonometrijske funkcije su funkcije:

.

Kod ovih funkcija argument, kako je dato u definicijama, se izražava kao mjera ugla u stepenima ili kao mjera ugla u lučnim jedinicama (radijanima).

Vrijednost trigonometrijskih funkcija za , za intervale:



je prikazana na slici 1.12. a), b), c) i d) respektivno.

|  |  |
| --- | --- |
| *x*  a) | b) |
| c) | d) |

Sl. 1.12.

Na osnovu definicija trigonometrijskih funkcija (ili sa slike 1.12) mo-že se odrediti znak tih funkcija za interval  i vrijednosti za  u obliku tabele 1.1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 |  | π / 2 |  | π |  | 3π / 2 |  | 2 π |
| sin*x* | 0 | + | 1 | + | 0 | - | -1 | - | 0 |
| cos*x* | 1 | + | 0 | - | -1 | - | 0 | + | 1 |
| *tg x* | 0 | + | ± ∞ | - | 0 | + | ± ∞ | - | 0 |
| *ctg x* | ± ∞ | + | 0 | - | ± ∞ | + | 0 | - | ± ∞ |

Tabela 1.1.

Do sada smo razmatrali vrijednost trigonemetrijskih funkcija za . Pretpostavili smo da se tačka *M* kreće u pozitivnom smjeru po trigonometrijskoj kružnici od tačke *A*. Kada tačka *M* obiđe cijelu kružnicu doći će ponovo u tačku *A*, biće . Ona može dalje nastaviti kretanje, ugao će biti veći od . Kada tačka  po drugi put obiđe kružnicu i dođe u tačku *A*, poluprečnik  opiše ugao , itd. Na isti način tačka *M* se može kretati i u negativnom smjeru. Tada vrijedi:

(1.15) 

Može se zapaziti da vrijedi:

(1.16) 

tj. vidi se da su  neparne funkcije, a  parna funkcija.

Ako se u relacijama (1.15) *x* zamijeni sa  tada na osnovu rela-cija (1.16) slijede relacije:

(1.17) 

Takođe se mogu provjeriti i relacije:

(1.18) 

(1.19) 

(1.20) 

Prema relacijama (1.15), ako je poznat tok i grafik trigonometrijskih funkcija  za  biće poznat i za svako ***R***. Za funkcije  dovoljno je poznavati tok i grafik za in-terval .

Luk kružnice



podijelimo na *n* jednakih dijelova. Izvršimo istu podjelu i segmenata na osi . Neka lukovima, polazeći od tačke  odgovaraju tačke ; respektivno. Ordinate tačaka  su . Ako u tački *k* konstruišemo paralelu sa osom , a u tački  pravu paralelnu osi *y* dobićemo tačku   grafika funkcije  (Sl.1.13). Prema relacijama (1.19) i (1.20) je



što znači da je grafik funkcije  simetričan u odnosu na pravu . Ta osobina se može iskoristiti za



Sl. 1.13.

crtanje grafika na intervalu  na osnovu poznatog grafika na intervalu

. Slično, na osnovu relacije (1.18) može se konstruisati grafik na in-tervalu . Grafik funkcije  na intervalu  se dobija translacijom grafika te funkcije na intervalu  za ,  u pravcu apcisne ose.

Kako je  to se grafik funkcije 

može dobiti translacijom grafika  za  u negativnom pravcu apcisne ose (Sl.1.14).



Sl. 1.14.

Tok funkcije  najlakše je pratiti na intervalu . Grafik funkcije  na intervalu  je dat slikom 1.15. Za vrijednost argumenta  grafik se može nacrtati na osnovu relacije (1.16).

|  |  |
| --- | --- |
| Sl. 1.16.  Sl. 1.15. |  |

Prema definiciji funkcije  može se konstruisati njen grafik (Sl.1.16). Taj postupak ovom prilikom nećemo razmatrati jer je i taj postu-pak, kao i prethodna tri razmatran u srednjoj školi.

**1.3.2.3. Ciklometrijske funkcije**

Funkcija  za  je bijekcija, što znači da ona na tom intervalu ima inverznu funkciju, koju označavamo sa , i čitamo " jednako arkus sinus ".



Sl. 1.17.

Grafik funkcije  je simetričan grafiku funkcije  u odnosu na pravu . Ta osobina se može iskoristiti za konstrukciju grafika funkcije . Na osnovu te osobine može se konstruisati grafik inverzne funkcije ,  (Sl.1.17). Translacijom tog grafika za  dobijamo grafik fun-kcije, koju ćemo označavati sa

.

Inverzne funkcije ostalih trigonometrijskih funkcija i njihove grafike ovom prilikom nećemo objašnjavati. Taj problem je razmatran skoro u svim matematičkim analizama. On može poslužiti i kao primjer za vježbu.

**1.4. Zadaci za vježbu**

**1.** Ispitati ograničenost funkcija:

a) ; b) ; c) ;

d) ; e) .

Ako za te funkcije postoji  odrediti ih.

**2.** Odrediti oblast definisanosti funkcija:

a) ; b) ;

c) ; d) ;

e) ; f) ;

g) ; h) .

**3.** Ispitati parnost funkcije

a) ; b) ;

c) ; d) .

**4.** Odrediti period funkcija

a) ; b) .

**5.** Odrediti intervale u kojima funkcija monotono (strogo) raste odnoso opada:

a) ; b) ;

c) ; d)  ;

e) ; f .

**6.** Odrediti ekstreme funkcija:

a) ; b) ;

c) ; d) .

**7.** Razlomljenu racionalnu funkciju izraziti u obliku zbira cijele i prave raz-lomljene racionalne funkcije:

a) ; b) ;

c) ; d) .

**8.** Razlomljene racionalne funkcije izraziti u obliku zbira elementarnih raz-lomaka:

a) ; b) ;

c) ; d) ;

e) ; f .

**9.** Konstruisati grafik funkcije:

a) ; b) ;

c) ; d) .

**10.** Konstruisati grafik funkcije:

a) ; b) .

**2. Niz. Granična vrijednost niza**

**2.1. Pojam niza**

**Definicija 2.1.** *Neka je* ***N***1 *neprazan skup skupa* ***N***. *Funkcija* , ***N***1  *zove se niz u* ***N***1.

Niz se obilježava i sa , gdje je  vrijednost , . Izrazi  ili  su članovi niza, i nazivaju se: prvim, drugim, ... , *n*-tim ili opštim članom niza, respektivno.

Ako je domena niza konačan skup, za niz se kaže da je konačan. Ako je domena niza skup prirodnih brojeva za niz se kaže da je beskonačan. Ubuduće ćemo, ako ne bude drugačije naglašeno, govoriti samo o beskonačnim nizovima i označavati ih sa . Umjesto termina "besko-načni niz" koristićemo termin "niz".

Da bi niz bio poznat dovoljno je poznavati opšti član niza, tj. zakon ostvarenja opšteg člana niza . Tako naprimjer za niz



opšti član je , ili za niz



opšti član je

.

Ako je poznat opšti član niza onda se zamjenom vrijednosti  iz opšteg člana mogu odrediti članovi niza.

***Primjer* 2.1.** Za niz  odrediti prvih nekoliko članova.

***Rješenje.*** Ako se u opšti član niza umjesto *n* zamijeni 1,2,3 i 4 dobiće se

2, 3 / 4, 4 / 9, 5 / 16, respektivno.

**Definicija 2.2.** *Za niz*  *se kaže da raste*, *odnosno opada*, *ako je*

(2.1) ***N***

*odnosno*

(2.2) ***N***.

Ako umjesto , odnosno , stoji <, odnosno >, za niz se kaže da strogo raste, odnosno strogo opada.

Rastuće i opadajuće nizove zovemo *monotonim nizovima*.

***Primjer* 2.2.** Niz  je strogo opadajući niz. Zaista je , , jer je

***N***, .

**Definicija 2.3.** *Za niz*   *se kaže da je ograničen*, *ograničen odozdo*, *ograničen odozgo ako je skup* *ograničen*, *ograničen odozdo*, *ograničen odozgo*, *respektivno*.

**Definicija 2.4.** *Za niz*  *kažemo da ima infimum*, *odnosno supremum*, *ako postoji infinum*, *odnosno supremum skupa*  *i označavamo* *ih sa*

 , odnosno  .

**2.2. Pojam granične vrijednosti niza**

**Definicija 2.5.** *Za niz*  *se kaže da teži ili konvergira broju* ***a***, *ako za svaki proizvoljno mali broj* , *postoji* ***N*** *takav da je*

(2.3) .

Broj *a* je granična vrijednost ili limes niza . Da niz  konvergira ka *a* označava se sa

 kad  ili kraće ,

odnosno

 ili kraće .

Za niz koji ima graničnu vrijednost kaže se da je konvergentan, a za niz koji nije konvergentan kaže se da je *divergentan*.

Definicija granične vrijednosti niza može se dati kraće i razumljivije nakon uvođenja sljedećih pojmova:

1) Od niza  izostavljanjem konačnog broja prvih  članova dobiće se "krajnji dio" niza .

2) Kažemo da skoro svi članovi niza  pripadaju skupu *M*, ako je , a za konačno *n* vrijedi .

Tada bi se definicija 2.5 mogla dati u obliku:

*Niz*  *konvergira ka* ***a*** *ako svaka*  *okolina broja* , *sadrži skoro sve članove niza* . (Sl.2.1).

*a*





Sl. 2.1.

, tj. interval  sadrži skoro sve članove niza . Tada je .

***Primjer* 2.3.** Niz  ima graničnu vrijednost 1, jer je

\*),

gdje je

 ili 

pa je

.

Za  je .

***Primjer* 2.4.**  jer je



za  ili , . Za  slijedi

.

**2.3. Neke osobine konvergentnih nizova**

**Teorema 2.1.** *Konvergentan niz*  *ima samo jednu* *graničnu vri-jednost*.

***Dokaz*.** Pretpostavimo da  konvergira ka *a* i ka *b*,  tj. , . Tada postoje prirodni brojevi  i  takvi da vri-jedi:

\*) Prema Arhimedovom aksiomu koji glasi:"Neka su *a* (*a*>0) i *b* bilo koji realni brojevi tada postoji prirodan broj *n* sa osobinom *na*≤*b*", slijedi: *n*⋅ε ≥1⇔1/*n* <ε za svako *n*>*n*0(ε).

 za svako ,

 za svako .

Neka je . Tada vrijedi

 ,

odnosno

(\*) .

Pošto je  proizvoljan broj , to možemo uzeti da je  pa zamjenom u nejednačinu (\*) dobijamo



što je kontradikcija, pa je, dakle, i naša pretpostavka da je  nemoguća.

Neka je dat niz . Ako se na bilo koji način izdvoji beskonačan broj elemenata

, gdje je 

niza , za taj niz se kaže da je *djelimični* ili *parcijalni niz* niza .

**Teorema 2.2.** *Djelimičan niz konvergentnog niza je konvergentan i ima istu graničnu vrijednost kao i dati niz*.

***Dokaz*.** Ako se iz konvergentnog niza  čija je granična vrijed-nost *a*, na bilo koji način, izdvoji beskonačan broj članova

(2.4) ,

tada za niz (2.4) postoji ***N*** za koje vrijedi

(2.5)  za svako .

To je očigledno, jer je nejednakost sadržana u nejednakosti (2.3).

**Teorema 2.3.** *Konvergentan niz* *je ograničen*.

***Dokaz*.** Neka je *a* granična vrijednost niza . Tada prema definiciji granične vrijednosti niza interval  sadrži skoro sve članove niza . Izvan tog intervala postoji samo konačan broj članova toga niza. Zbog toga se interval  može proširiti tako da sadrži

sve članove niza . To znači da postoje brojevi *m* i *M* takvi da je

 za ***N***,

odnosno da je niz  ograničen.

**Teorema 2.4.** *Monoton i ograničen niz je konvergentan*.

***Dokaz*.** Neka je



strogo rastući niz i neka njegovi članovi zadovoljavaju nejednakosti



gdje je *M* supremum niza, tj.  niza . Tada za proizvoljno  postoji ***N*** za koje se članovi  za  nalaze u intervalu

.

To, na osnovu definicije granične vrijednosti, znači da je

.

Slično se dokazuje da je strogo opadajući ograničen niz konvergentan. Neka za članove niza  vrijedi relacija



gdje je *m*  niza. Tada je .

**Definicija 2.6.** *Konvergentan niz*  *čija je granična vrijednost nula je nula niz*. *Za veličinu*  *kažemo da je beskonačno mala veličina*.

Iz definicije granične vrijednosti niza slijedi:"granična vrijednost niza je jedna jedina tačka nagomilavanja tog niza".

Neka niz  ima više tačaka nagomilavanja. Tada postoje naj-manja, odnosno, najveća tačka nagomilavanja koje se zovu donji limes ili limes inferior, što se označava sa

,

odnosno gornji limes ili limes superior, što se označava sa

, respektivno.

Ako je niz ograničem tada uvijek postoji

 ,

a ako je neograničen sa donje odnosno sa gornje strane, onda se uzima

 odnosno ,

respektivno.

Za niz  kažemo da je stvarno divergentan, ako je



a da je divergentan ili da oscilira između  ako je

.

**2.4. Primjeri konvergentnih i divergentnih nizova**

**1.** Konstantan niz  je konvergentan i ima graničnu vri-jednost *a*.

Zaista, za svako  i svako  je , što znači da je .

**2.** . To slijedi iz

.

**3.** , za konstantno ***N***.

Neka je  proizvoljno mali dati broj. Kako  za pozitivan broj  postoji broj ***N*** takav da za svako  vrijedi nejednakost

.

Tada za svako *n* vrijedi

,

tj.

 za svako .

**4.** .

Neka niz  ima graničnu vrijednost *a*. Tada je niz



nula niz, tj.

.

Tada slijedi iz definicije granične vrijednosti niza i definicije nula niza

.

Neka je \*). Tada je . Stepenovanjem ove jednakosti sa *n* dobija se





ili



odnosno

 ili .

Na osnovu primjera 3. postoji broj  za  takav da je

,

odnosno za ,

.

Znači niz  je nula niz. Time je granična vrijednost



dokazana.

**5.** , ako je .

Za  tvrdnja vrijedi na osnovu primjera 1. Za 

,

gdje je . Na osnovu Bernulijeve\*\*) nejednakosti  slijedi

\*) Matematièkom indukcijom se može dokazati da je  za .

\*\*) D. Bernuli (1654-1705), švajcarski matematièar.

,

za  je , ***N*** pa se može uzeti .

**6.** Niz  je divergentan, odnosno oscilira između -1 i 1, jer je

,

.

**2.5. Algebra konvergentnih nizova**

U ovom dijelu ćemo objasniti neke osnovne osobine konvergentnih nizova, koje će nam poslužiti za izračunavanje graničnih vrijednosti.

**Teorema** **(poredbe) 2.5.** *Neka su nizovi*  *konvergentni i neka* . *Ako je*  *za skoro sve članove tih nizova*, *tada je* .

***Dokaz*.** Pretpostavimo da je . Tada bi postojala  okolina ta- čaka , respektivno, takva da okolina  sadrži skoro sve članove niza , a okolina  sadrži skoro sve članove niza . Ako se uzme  to znači da bi za skoro sve članove nizova  i  vrijedila nejednakost  , što je suprotno pretpo-stavci teoreme.



*b*



*a*



Sl. 2.2.

**Teorema 2.6.** *Neka su nizovi*  *i*  *konvergentni i neka je*

.

*Ako je* ***N*** *tada je* .

**Teorema 2.7.** *Neka je*  *ograničen niz*. *Tada* .

***Dokaz*.** Po definiciji granične vrijednosti i pretpostavci teoreme je  za svako  i proizvoljno . Niz  je ograničen niz, što znači da postoji konačan broj ***R*** takav da je  za svako . Dalje je

, .

Time je teorema dokazana.

**Teorema 2.8.** *Neka su nizovi*  i  *konvergentni i neka* , . Tada vrijedi

1. ,

2. ,

3. ,

4. ***R***.

*Ako je* , *tada je*

5. .

***Dokaz*.** 1) Za proizvoljno  postoje brojevi  takvi da je

 i .

Neka je . Očigledno tada obje prethodne nejednakosti vri-jede za . Koristeći to, vidimo da vrijedi



za svako . To znači da je

(2.6)  .

Slično ovom dokazu provjerava se tačnost i relacije 2.

3. Na osnovu pretpostavke teoreme i teoreme 2.3 nizovi  i  su nula nizovi i niz  je ograničen. Tada su, po teoremi 2.7, i nizovi  i  nula nizovi. Iz



slijedi

, tj. .

To znači

(2.7)  .

Time je relacija 3. dokazana.

Matematičkom indukcijom se dokazuje da relacija (2.7) vrijedi i za proizvod konačnog broja, ***N***, konvergentnih nizova, tj.

(2.8) ,

gdje su nizovi , konvergentni nizovi.

Neka je



i ako je

.

Tada na osnovu (2.8) neposredno slijedi

(2.9) ***N***.

Pokažimo da za konvergentan niz  sa nenegativnim članovima koji ima graničnu vrijednost *a* vrijedi relacija

(2.10) ***N***.

Neka je ***N***, za svako ***N***. Tada je



odakle je

,

odnosno

.

5. Prije nego razmotrimo dokaz relacije 5. dokažimo da vrijedi:

**Lema.** *Ako je niz*  *konvergentan i ima graničnu vrijednost* *a* *tada je i niz*  *konvergentan i vrijedi*

(2.11) .

***Dokaz*.** Na osnovu definicije granične vrijednosti niza  za pro-izvoljno  postoji broj  takav da vrijedi

.

Kako je



za svako ***N***,  to vrijedi relacija (2.11).

Provjerimo sada tačnost relacije 5. Kako je prema relaciji 2.11. i pretpostavci teoreme

, tj. ,

to za proizvoljno  postoji broj  za koje je

 za svako ***N***,

ili

(2.12)  za svako ***N***,

odakle slijedi nejednakost

(2.13) .

Neka je . Tada nejednakost (2.13) glasi:  odnosno,  . Dalje je



što znači da  konvergira ka , ili u oznaci

.

Na osnovu dokazane relacije 3. vrijedi:

.

Time je relacija 5. dokazana.

Ukoliko nisu ispunjeni uvjeti teoreme 2.8 tada dolazimo do prividno neodređenih izraza oblika:

1. ,

2. ,

3. ,

4. .

Transformacijama prethodnih izraza u njima identične izraze oni se mogu svesti na oblike na koje se može primijeniti teorema 2.8.

***Primjer* 2.4.**

 .

***Primjer* 2.5.**

.

***Primjer* 2.6.** ,

jer je

,

a na osnovu (2.9) je

.

***Primjer* 2.7.** .



***Primjer* 2.8.**



.



**2.6. Jedan kriterij konvergencije nizova**

U prethodnom dijelu je razmatran način određivanja granične vri-jednosti niza, ne znajući da li je dati niz konvergentan ili divergentan. U ovom dijelu razmotrićemo neke kriterije konvergencije nizova.

**Teorema 2.9. (Bolzano**\*)**-Weierstraussov stav**\*\*)**)** *Svaki ograničeni niz ima bar jednu tačku nagomilavanja*.

***Dokaz*.** Neka je niz ograničen, tada postoji kona-čan interval u kome se nalaze svi članovi niza. Ako se interval podi-jeli na dva jednaka dijela tada se u jednom dijelu nalazi beskonačno mnogo članova tog niza. Neka je taj interval . Ako se, dalje, interval podijeli na dva jednaka dijela tada u jednom dijelu postoji beskonačno mnogo članova niza. Neka je taj interval . Ako se postupak nastavi *n*-puta dobićemo interval u kome se nalazi beskonačno mnogo članova tog niza. Ovim postupkom dobija se jedna tačka iz u čijoj -okolini se nalazi beskonačno mnogo članova niza, što znači da je ona tačka nagomilavanja. Pri tome, naravno veličina broja *n* direktno zavisi od izbora broja .



**Teorema 2.10.** (**Cauchyev**\*\*\*) ***kriterij konvergencije***) *Niz*  *je konver-gentan ako i samo ako za svaki* *proizvoljan broj* *postoji*  *takav da vrijedi*



\*) B. Bolzano (1781-1848), èeski matematièar.

\*\*) K. Weierstrauss (1815-1897), njemaèki matematièar.

\*\*\*) A. L. Cauchy (1789-1857), francuski matematièar.

(2.14) *za svako* *i svako* .



***Dokaz*.** Dokažimo da je uslov potreban. Neka je niz konver-gentan i neka . Tada, po definiciji granične vrijednosti niza, za pro-izvoljno postoji za koje vrijedi



(2.15) za svako



za svako i svako .



Iz relacije (2.15) slijedi

.



Time je dokaz završen.

Dokažimo da je uslov dovoljan. Relacija (2.14) za glasi



(2.16) za svako ,



odakle slijedi

,



ili

(2.17) za svako .



To znači da je niz ograničen, odnosno, prema teoremi 2.9, da ima bar jednu tačku nagomilavanja. Neka je *a* tačka nagomilavanja i neka je jedan član niza takav da vrijedi



za svako .



Tada, na osnovu relacije (2.14), vrijedi

,



ili

za svako .



To znači da , gdje je .



***Primjer* 2.9.** Niz sa opštim članom



je konvergentan, što se može dokazati primjenom Cauchyev kriterija konvergencije.

Neka je . Tada je



(2.18) .



Izraz u zagradi relacije (2.18) se može pisati u obliku

.



Kako je



to se može zaključiti da vrijedi

za .



Time je dokazana konvergencija datog niza.

**2.7. Broj e**

**Teorema 2.11.** *Niz* *je strogo rastući i ograničen*.



***Dokaz*.** Za svako je



(2.19)



.



Slično se dobija



.



Upoređujući zapažamo da su sabirci na drugoj strani člana manji od odgovarajućih sabiraka člana . Pored toga broj sabiraka člana je manji od broja sabiraka člana , a u oba slučaja svi sabirci su pozitivni. Na osnovu toga slijedi da je niz strogo rastući, tj.



za svako .



Iz (2.19) slijedi



, za .



Iz prethodnog slijedi da je

, za svako ,



što znači da je niz ograničen.

Kako je niz rastući i ograničen on je konvergentan i njegova granična vrijednost se označava sa "", tj.



(2.20) .



Zapažamo da je i može se dokazati da je



.



Broj se uzima kao baza logaritama i takav logaritam se naziva prirodni logaritam realnog broja i označava se sa , tj.



.



***Primjer* 2.10.** Naći .



***Rješenje*.**



.



***Primjer* 2.11.** Naći .



***Rješenje*.** .



**Teorema 2.12.** *Neka su članovi niza* *racionalni brojevi i neka je* . *Tada za svako vrijedi*



.



***Dokaz*.** Pretpostavimo da je i dokažimo da je tvrdnja tačna u slučaju da je nula-niz, tj. vrijedi



,



tj.

.



Iz

za \*),



to je

.



Na osnovu definicije granične vrijednosti niza, znači da za proizvoljno postoji određen broj za koji je



.



Tada postoji za koje je za svako



.



Za ovako odabrano , , potencija je "između" i \*\*) i zbog toga i one pripadaju intervalu . To znači, po definiciji granične vrijednosti, da je



.



Iz pretpostavke teoreme je , ili . Tada je



.



Teorema tvrdi da je

(2.21)



\*) Ovu osobinu dajemo bez dokaza.

\*\*) Teorema: "Ako je i tada je , odnosno .



a može se dokazati da ona vrijedi i za .



**Teorema 2.13.** *Ako niz* *sa pozitivnim članovima ima graničnu vrijednost a*, *tj*. *ako je*



*tada vrijedi*

(2.22) .



***Dokaz*.** Teoremu ćemo dokazati za slučaj , i na sličan način se dokazuje za slučaj . Dokažimo prvo da je relacija (2.22) tačna za . Neka je za proizvoljno broj takav da je



(2.23) za svako .



To je moguće, s obzirom na pretpostavku da je , jer je , . Logaritmovanjem nejednakosti (2.23) po bazi *c* dobijamo



za svako .



To znači, po definiciji granične vrijednosti niza, da je

,



što je i trebalo dokazati.

Neka je bilo koji broj. Tada je iz uslova teoreme



,



odnosno

.



Znači vrijedi

.



**Teorema 2.14.** *Neka niz* , *ima graničnu vrijednost a*. *Tada je*



(2.24) , .



***Dokaz*.** Iz pretpostavke teoreme slijedi

.



Na osnovu teoreme 2.13 je

.



Znači vrijedi i

,



tj.

,



odakle slijedi dokaz tvrdnje.

***Primjer* 2.12.** Na osnovu prethodne teoreme vrijedi

.



**Teorema 2.15.** *Neka je* *nula niz čiji su svi članovi različiti od nule i veći od* -1. *Tada vrijedi*



(2.25) .



***Dokaz*.** Neka je za svako *n* i neka je indeks *m* takav da je za svako , odnosno . Za takvo *n* postoji ta-kav da je



(2.26)



ili

(2.27) .



Dodavanjem jedinice svim članovima nejednakosti (2.27) dobićemo

.



Tada s obzirom na relaciju (2.26) vrijedi



ili

(2.28) .



Kako su nula nizovi i



, ,



slijedi

.



Na sličan način se dokazuje teorema i za slučaj . Taj dokaz može poslužiti kao primjer za vježbu.



**Teorema 2.16.** *Za svako* *vrijedi*



(2.29) .



***Dokaz*.** Izraz se može transformisati u izraz . Tada na osnovu teorema (2.15) i (2.14) slijedi



.



***Primjer* 2.13.** Neka je nula niz i neka je za svako . Tada je



(2.30) ,



što se može dokazati na sljedeći način:

.



Relacija (2.30) za , tj. ako se radi o prirodnim logaritmima, glasi



(2.31) .



***Primjer* 2.14.** Neka i neka je za svako . Tada vri-jedi



(2.32) ,



što se može provjeriti sljedećim postupkom.

Neka je . Tada je , odakle slijedi



.



Kako je nula niz to na osnovu primjera 2.13 slijedi



.



**2.8. Primjeri graničnih vrijednosti nizova**

**1.** Niz



je konvergentan i vrijedi

. Dokazati.



Iz definicije niza, , slijedi da je:



za svako . Iz za svako slijedi da je dati niz strogo rastući. Kvadriranjem jednakosti , dobijamo



,



tj.

, za svako ,



što znači da je niz ograničen. Kako je niz strogo rastući i ograničen on je i konvergentan (teorema 2.4).



Odredimo sada graničnu vrijednost niza. Kako je i neka , tada i i vrijedi



.



Kvadriranjem prethodne jednakosti i rješavanjem jednačine po *a* dobijamo

.



Znači

.



**2.** Na osnovu granične vrijednosti nizova



naći graničnu vrijednost niza

.



Kako je



.



za svako , vrijedi



.



Obzirom da

, ,



to prema teoremi 2.6 i .



**3.** Dokazati .



Kako je nula niz, to je



.



**2.9. Zadaci za vježbu**

**1.** Dokazati da je .



**2.** Dokazati da je . Naći za .



**3.** Naći .



U zadacima od 4. do 20. naći granične vrijednosti.

**4.** . **5.** .



**6.** . **7.** .



**8.** . **9.** .



**10.** .



**11.** . **12.** .



**13.** .



**14.** .



**15.** . **16.** .



**17.** . **18.** .



**19.** . **20.** .



**21.** Dokazati da niz ima graničnu vrijednost.



**22.** Dokazati da je niz konvergentan.



**23.** Dokazati da



.



**24.** Odrediti .



**3. Diferencijalni račun**

**3.1. Granična vrijednost funkcije**

**3.1.1. Pojam granične vrijednosti**

**Definicija 3.1.1.** *Neka je data funkcija* *i neka je* ***a*** *tačka nagomilavanja* *skupa*  . *Za funkciju se kaže da ima graničnu vri-jednost* ***A*** *u tački* *ako za svako* *postoji* *tako da je*



(3.1.1) , ako je .



Prethodna činjenica se simbolično piše

ili ,



i čita se "limes od je *A* kad *x* teži *a*", ili



kad



i čita " teži *A* kada *x* teži *a*".



Definicija 3.1.1 je geometrijski interpetirana na slici 3.1.1. Vidi se da za broj postoji broj takav da grafik date krive leži u pra-vougaoniku čije su jednačine stranica:



.



Sl. 3.1.1.

Kada se smanjuje smanjuje se i , ali tako da kriva u oblasti leži u datom pravougaoniku. Nejednakost isključuje tačku , tj. tačka *a* nemora pripadati .



***Primjer* 3.1.1.** Ako je tada je . Dokazati.



Prema definiciji granične vrijednosti funkcije treba dokazati da je

, ako je .



Zaista, za proizvoljno postoji tako da je



uvijek kada je i . U ovom primjeru je .



***Primjer* 3.1.2.** Neka je i neka . Tada je . Očigledno,



,



kad god je . Ovdje je .



Tačka je tačka nagomilavanja skupa .



Zapažamo da prethodna funkcija nije definisana u tački , ali postoji granična vrijednost funkcije u toj tački.



***Primjer* 3.1.3.** .



Iz slijedi da je



, ili



za sve vrijednosti *x* kada je . U ovom slučaju je .



**Definicija 3.1.2.** *Za funkciju* *čija je oblast definisanosti* *kaže se da ima graničnu vrijednost* ***A*** *kada* , *ako za svaki broj* *postoji* *takav da*



.



Prethodna činjenica se simbolično zapisuje sa

, ili .



Geometrijska interpretacija definicije 3.1.2. je data na crtežu 3.1.2.



Sl. 3.1.2.

Za grafik funkcije se nalazi u pojasu ograničenom pra- vim za proizvoljno malo .



***Primjer* 3.1.4.** .



Iz definicije 3.1.2 imamo da je

.



Ova nejednakost će biti ispunjena za , tj. za . Ako se uzme da je , tada će biti



, za .



U ovom primjeru za proizvoljno biće



.



***Primjer* 3.1.5.** Dokazati da je

.



***Rješenje.*** Kao i u prethodnom primjeru je

,



i vrijedi, za , odnosno . U ovom pri-mjeru je , pa imamo da je



.



***Primjer* 3.1.6.** Dokazati da je .



***Rješenje.*** Nejednakost



je zadovoljena za svako . To znači da za vrijedi nejednakost



, za svako ,



odnosno da je

.



***Primjer* 3.1.7.** Dokazati da je .



***Rješenje.*** Nejednakost



je zadovoljena za svako *x* uz uslov . Dakle, ako je , tada je , pa je za .



U definiciji 3.1.2 vidjeli smo kako se definiše . Na sličan način se definiše i



, ili .



**3.1.2. Lijeva i desna granična vrijednost**

Funkcija je definisana u intervalu , što znači da se *x* može približavati broju 0 samo preko brojeva većih od nule. U tom slučaju se kaže da sdesna ili opadajući, što se simbolički piše , ili , a granična vrijednost



se naziva *desna granična vrijednost*.

U opštem slučaju definicija desne granične vrijednosti bi glasila:

**Definicija 3.1.3.** *Broj* *A* *je desna granična vrijednost funkcije* *u tački* *ako za svaki broj* *postoji broj* *takav da je*



, *kada je*



*što se simbolično piše*

.



Na sličan način se definiše i lijeva granična vrijednost *A* funkcije u tački i obilježava se sa



.



***Primjer* 3.1.8.** Data je funkcija



Dokazati da je

.



***Rješenje.*** U intervalu funkcija je definisana sa , odakle slijedi



ako je , gdje je , čime je dokazano da je



.



Analogno je

za



gdje je .



**Teorema 3.1.1.** *Ako funkcija* *ima graničnu vrijednost* *A* *u tački* , *onda ona ima i lijevu i desnu graničnu vrijednost u toj tački*, *i one su međusobno jednake i jednake* *A*.



***Dokaz*.** Iz pretpostavke teoreme slijede nejednakosti:



kada je

, ili kada je , .



Na osnovu čega slijede nejednakosti

kada je



ili

kada je ,



što znači da je

.



**Teorema 3.1.2.** *Ako funkcija* *ima lijevu i desnu graničnu vrijednost u tački* *i ako su one jednake*, *i jednake* *A*, *tada funkcija* *ima graničnu vrijednost u tački* *a* *i jednaka je* .



*Dokaz* ove teoreme je jednostavan i ovdje ga nećemo izvoditi. Dokaz može poslužiti kao primjer za vježbu.

**3.1.3. Beskonačna granična vrijednost**

**Definicija 3.1.4.** *Funkcija* *ima beskonačnu graničnu vrijednost u tački* , *gdje je* ***a*** *tačka nagomilavanja oblasti definisanosti date funkcije*, *ako za svaki proizvoljno veliki broj* *postoji broj* *takav da je*



*kada je* ,



*što se kratko označava sa*

, ili .



Na sličan način se definiše i

,



tako da se u prethodnoj definiciji zamijeni sa , a sa .



**Definicija 3.1.5.** *Funkcija* *čija je oblast definisanosti* *ima graničnu vrijednost* *kada* *ako za svaki proizvoljno ve-liki broj* *postoji broj* *takav da je*



*za svako* ,



*što se simbolično zapisuje*

, ili .



**3.1.4. Osnovne teoreme o graničnim vrijednostima**

**Teorema 3.1.3.** *Ako funkcije* *imaju graničnu vrijednost u tački* , *onda u tački* ***a*** *imaju graničnu vrijednost i funkcije*  ; ; , *i pri tome vrijedi*:



(3.1.3) ,



(3.1.4) ,



(3.1.5) ,



(3.1.6) .



(3.1.7) .



***Dokaz*.** Neka je . Tada iz definicije granične vrijednosti funkcije izražene pomoću logičkih simbola slijedi



,



.



Na osnovu toga vrijedi



.



Ako je tada



,



znači



čime je dokazana relacija (3.1.3).

Da bi dokazali relaciju (3.1.4) pođimo od implikacija



.



Formirajmo izraz



.



Za , za , slijedi



za ,



gdje je , što znači da je



.



Dokaz ostalih relacija je sličan i mogu poslužiti za vježbu.

**Teorema 3.1.4.** *Ako za funkcije* *vrijede nejednakosti*



*za svako* *i ako na tom skupu funkcije* *i* *imaju jednake granične vrijednosti* ***A*** *u tački* ***a***, *tada i funkcija* *ima graničnu vrijednost* ***A*** *u tački* ***a***.



***Dokaz*.** Prema pretpostavci teoreme za proizvoljno postoje i takvi da je



,



.



Ako je tada vrijedi



,



.



Iz



slijedi



što znači da je .



**Teorema 3.1.5.** *Funkcija* *ima graničnu vrijednost* *A* *u tački* *na-gomilavanja* *a* *ako i samo ako vrijedi*



.



*Dokaz* ove teoreme nećemo izvoditi, a umjesto toga korisno je dati sljedeći komentar. Ako promjenljiva *x* konvergira broju *a* na proizvoljan način, tj. preko proizvoljnog niza i ako odgovarajući niz uvijek konvergira istom broju *A*, tada funkcija ima graničnu vrijednost u tač-ki . Ako svaki od nizova ne konvergira istom broju *A* tada funkcija nema graničnu vrijednost u tački .



***Primjer* 3.1.9.** Funkcija nema graničnu vrijednost u tački . Zaista, ako se posmatraju nizovi sa opštim članovima:



i ,



tada je

.



Vrijednosti funkcija su:

, a



.



Kako je , a , to na osnovu teoreme 3.1.5 ne postoji .



***Primjer* 3.1.10.** Na sličan način se može dokazati da ne postoji .



U tom dokazu može se uzeti niz , a za niz .



***Primjer* 3.1.11.**



.



***Primjer* 3.1.12.**

.



***Primjer* 3.1.13.**

.



***Primjer* 3.1.14.**

.



***Primjer* 3.1.15.**



.



***Primjer* 3.1.16.**



***Primjer* 3.1.17.** Da bi se riješila neodređenost oblika



treba brojnik i nazivnik podijeliti sa . Kako je za brojnik i na-zivnik razlomka jednak nuli slijedi da su oni djeljivi sa . Pri dijeljenju sa se dobija ostatak jednak nuli.



***Primjer* 3.1.18.** Naći .



***Rješenje.*** Kako je



to je

,



pa je

.



**3.1.5. Neke važnije granične vrijednosti**

**Teorema 3.1.6.** .



***Dokaz*.** Nacrtajmo trigonometrijsku kružnicu, i posmatrajmo neki ugao *x*. Pošto možemo uzeti da je , Sl.3.1.3. Posma-trajmo slijedeće površine: a) površinu trougla , b) površinu kružnog isječka i c) površinu trougla .



|  |  |
| --- | --- |
| Sl. 3.1.3. | Može se zapaziti da je , ili .  Dalje je .  Kako je , to je  ,  ili  . |

Budući da je , to je prema teoremi 3.1.4.



.



***Primjer* 3.1.19.**

.



***Primjer* 3.1.20.**

.



**Teorema 3.1.7.** .



***Dokaz*.** Neka je *x* realan broj veći od jedan, tada se on nalazi izme-đu dva susjedna prirodna broja *n* i , tj. . Tada je



,



ili

,



odnosno

.



Kako je



to je i

.



Ako se uvede smjena , dobijamo



(3.1.8) .



***Primjer* 3.1.21.**



.



***Primjer* 3.1.22.**



.



***Primjer* 3.1.23.**

.



***Primjer* 3.1.24.** Dokazati da je

(3.1.9) .



***Rješenje.***

.



***Primjer* 3.1.25.** Dokazati da je

(3.1.10) .



***Rješenje.***

.



**Primjer 3.1.26.** Dokazati da je

(3.1.11) .



***Rješenje.*** Neka je , tada je , pa je



.



**3.1.6. Beskonačno male i beskonačno velike funkcije**

**Definicija 3.1.6.** *Funkcija* *je beskonačno mala funkcija kada* *ako je*



.



***Primjer* 3.1.27.** Funkcija je beskonačno mala funkcija kada , jer je



.



**Teorema 3.1.8.** *Svaka funkcija* , *koja ima graničnu vrijednost* ***A*** *kada* , *može se izraziti u obliku zbira njene granične vrijednosti u toj tački i beskonačno male funkcije*, *tj*. *u obliku*



,



*gdje je*

.



***Dokaz*.** Po pretpostavci teoreme je . Ako stavimo da je , tada je



.



**Definicija 3.1.7.** *Funkcija* *je beskonačno velika funkcija kada* , *ako je*



.



***Primjer* 3.1.28.** Funkcija kada je beskonačno velika funk-cija, jer je



.



**Definicija 3.1.8.** *Ako su* *beskonačno male funkcije kada* , *tada se za te funkcije kaže da su beskonačno male funkcije istog reda*, *ako je*



.



Ako je tada se kaže da su ekvivalentne beskonačno male funkcije i simbolično se piše



~ kada .



Ako je kaže se da je beskonačno mala funkcija višeg reda nego kada .



***Primjer* 3.1.29.** ~*x* kada , jer je



.



Ekvivalentno beskonačno male funkcije se mogu iskoristiti za prak-tično izračunavanje graničnih vrijednosti. Složeni izrazi u graničnim vrijed-nostima mogu se zamijeniti ekvivalentnim beskonačno malim izrazima.

***Primjer* 3.1.30.** Izračunati .



***Rješenje.*** Iz slijedi da je ~*x* kada . Ako tada . Može se napisati da je



i tada kada . To znači da je



~,



pa je

.



***Primjer*** **3.1.31.** Dokazati da je

.



***Rješenje.*** Kako je

~



kada , to je



.



**3.1.7. Zadaci za vježbu**

U zadacima od 1 do 6 dokazati da su tačne date granične vrijednosti.

**1.** . **2.** .



**3.** . **4.** .



**5.** . **6.** , .



U zadacima od 7 do 28 naći date granične vrijednosti.

**7.** . **8.** .



**9.** . **10.** .



**11.** . **12.** .



**13.** . **14.** .



**15.** . **16.** .



**17.** . **18.** .



**19.** . **20.** .



**21.** . **22.** .



**23.** . **24.** .



**25.** . **26.** .



**27.** . **28.** .



**29.** Date su funkcije i . Dokazati da su date funkcije beskonačno male funkcije kada . Koja je od njih beskonačno mala funkcija višeg reda?



**30.** Da li su funkcije i ekvivalentne funkcije kada ?



**3.2. Neprekidnost funkcija**

**Definicija 3.2.1.** *Za funkciju* *kažemo da je neprekidna u tački* , *ako vrijedi*:



(3.2.1) *postoji* ,



(3.2.2) .



Ako je funkcija neprekidna u svakoj tački intervala tada se za tu funkciju kaže da je neprekidna u intervalu *I*.



Neka se vrijednost argumenta funkcije promijeni sa *a* na proizvoljno . Razlika se naziva *priraštaj argumenta*  *x* i označava se sa . Dakle,



,



odakle slijedi da je

.



Sl. 3.2.1.

Razlika se naziva priraštaj funkcije koji odgovara priraštaju argumenta i označava se sa . Zapažamo (vidjeti sl.3.2.1) da je



ili

.



Relacija (3.2.2) se može izraziti u obliku

,



a ako se zamijeni *x* sa tada prethodna jednakost glasi



ili

(3.2.3) .



To drugim riječima znači da je funkcija neprekidna u tački ako beskonačno malom priraštaju argumenta odgovara beskonačno mali priraštaj funkcije.



***Primjer* 3.2.1.** Dokazati da je funkcija neprekidna u inter-valu .



***Rješenje.*** Data funkcija je definisana u intervalu i



.



***Primjer* 3.2.2.** Funkcija je neprekidna za svako .



***Dokaz*.**



,



za .



***Primjer* 3.2.3.** Data je funkcija



Nacrtati grafik funkcije i ispitati neprekidnost u tačkama .



***Rješenje.*** Grafik funkcije je dat na Slici 3.2.2. Kako je

|  |  |
| --- | --- |
| , a  ,  tj.    to znači da data funkcija nema graničnu vrijednost u tački , odnosno da je funkcija u toj tački prekidna. Analogno se pokazuje da je tačka tačka prekida. | Sl. 3.2.2. |

To se vidi i sa grafika date funkcije. Beskonačno malom priraštaju argu-menta *x* u okolini tačaka odgovara priraštaj funkcije koji nije bes-konačno mali, .



***Primjer* 3.2.4.** Data je funkcija



Nacrtati grafik funkcije i ispitati neprekidnost funkcije u tački .



***Rješenje.*** Grafik funkcije je dat na slici 3.2.3. U ovom slučaju je

,



, tj.



.



|  |  |
| --- | --- |
| Znači funkcija ima graničnu vri-jednost u tački . Obzirom da je    to je funkcija u tački    prekidna. | Sl. 3.2.3. |

Za funkciju koja je definisana u tački i u njenoj desnoj okolini tačke *a* kaže se da je u tački neprekidna sdesna ako je



.



Slično se definiše i neprekidnost funkcije slijeve strane tačke .



**3.2.1. Računanje s neprekidnim funkcijama**

**Teorema 3.2.1.** *Neka su* *i* *neprekidne funkcije u tački* . *Tada su u tački* ***a*** *neprekidne i funkcije*: .



***Dokaz*.** Na osnovu pretpostavke teoreme je

,



pa je



što znači da je funkcija neprekidna u tački .



Ostali dio teoreme se dokazuje na sličan način, i dokazi mogu pos-lužiti kao primjeri za vježbu.

***Primjer* 3.2.7.** Funkcija



je neprekidna u intervalu .



***Dokaz*.** Za funkcija glasi i ona je neprekidna za svako , jer je



,



tj.

.



Za je



i ona je na osnovu teoreme 3.2.1 neprekidna u intervalu .



Ako pretpostavimo da je funkcija neprekidna u intervalu tada je i funkcija neprekidna na istom intervalu, zbog teoreme 3.21. Po principu matematičke indukcije funkcija je neprekidna u intervalu za svako .



***Primjer* 3.2.8.** Na osnovu primjera 3.2.7 i teoreme 3.2.1 slijedi da je svaki polinom



neprekidna funkcija u intervalu .



***Primjer* 3.2.9.** Svaka funkcija oblika



je neprekidna za svako *x* za koje je .



**3.2.2. Osobine neprekidnih funkcija**

**Teorema 3.2.2.** *Neka su* *i* *otvoreni intervali i* , *odnosno* , *neprekidne funkcije u tački* , *odnosno u* . *Tada je kompozicija* *funkcija* *neprekidna u tački* .



**Teorema 3.2.3.** *Ako je funkcija* *neprekidna na intervalu* *i ako je* *tada postoji bar jedna tačka* *takva da je* .



Ova teorema ima sljedeće geometrijsko značenje. Ako grafik nepre-kidne funkcije prelazi sa jedne na drugu stranu *x*-ose, onda je on mora sjeći bar u jednoj tački, Sl.3.2.4.



Sl. 3.2.4.

***Dokaz*.** Pretpostavimo da je . Interval podijelimo tačkom . Može se desiti da je i tada je teo-rema dokazana. U tom slučaju je . Ako je tada će funkcija u jednom od intervala na krajevima imati različite znakove. Recimo da funkcija ima različite znakove na krajevima drugog intervala i označimo taj interval sa , gdje je , . Dakle, sada je . Interval podijelimo tačkom . Ako je teorema je dokazana, a ako je postupak se nastavlja kao i u prethodnom slučaju. Ako se postupak nastavlja *n*-puta tako da je tada je



.



Ako tada i



,



pa je

.



Kako je funkcija neprekidna u tački za koju vrijedi



,



slijedi da je .



**Teorema 3.2.3.** **(*Weierstrassova teorema*)** *Ako je funkcija* *neprekidna na intervalu*  , *tada je ona na tom intervalu ogra-ničena odozdo i odozgo*, *tj*. *postoje* ***m*** *i* ***M*** *takvi da je*



*za svako* .



**Teorema 3.2.4.** *Ako je funkcija* *neprekidna na intervalu* *tada na tom intervalu postoji maksimum i minimum funkcij*e.



***Dokaz*.** Ako je tada je na osnovu teoreme 3.2.3 *M* konačan broj. Pretpostavimo da *M* nije maksimum date funkcije, tada je funkcija



neprekidna a time i ograničena na intervalu *I*. To znači da postoji ta-ko da je odakle se lahko dobija da je



,



što znači da je broj , manji od *M*, supremum funkcije što je nemoguće.



Sličan dokaz je i za infimum funkcije.

**3.2.3. Zadaci za vježbu**

**1.** Naći priraštaj funkcije za .



**2.** Dokazati da je funkcija

,



neprekidna u svakoj tački.

**3.** Nacrtati grafik funkcije



Ispitati neprekidnost funkcije u tački .



**4.** Za koje vrijednosti *a* je neprekidna funkcija



**5.** Ispitati neprekidnost funkcije



u tački .



**3.3. Izvodi i diferencijali**

**3.3.1. Izvod funkcije**

**Definicija 3.3.1.** *Neka je funkcija* *definisana u intervalu* *i neka je* . *Ako postoji konačna i određena gra-nična vrijednost*



(3.3.1)



*za funkciju*  *se kaže da ima izvod u tački* *x* *ili da je diferencija-bilna* *u tački* *x*.



Pored oznake za izvod funkcije se upotrebljavaju i druge oznake, kao naprimjer: .



Na osnovu (3.3.1) izvod funkcije se može izraziti u obliku



(3.3.2) ,



odakle slijedi da je izvod funkcije granična vrijednost količnika priraštaja funkcije i priraštaja argumenta kada priraštaj argumenta teži nuli.



U definiciji izvoda pretpostavili smo da može imati proizvoljan znak, + ili −. Ako je tada ćemo izraz



zvati desni izvod i označavati sa . Slično se definiše i lijevi izvod i označava sa .



***Primjer* 3.3.1.** Data je funkcija . Naći za .



***Rješenje.*** Za je . Za je



,



odakle je

.



Po definiciji izvoda je

.



***Primjer* 3.3.2.** Za funkciju naći .



***Rješenje*.** , odakle je



,



pa je

.



**3.3.1.1. Geometrijsko značenje izvoda**

Neka je funkcija diferencijabilna funkcija u intervalu . Neka je ; tada je



.



Δ*x*



Sl. 3.3.1.

Pored stalne tačke sa grafika funkcije posmatrajmo još jednu tačku , Sl.3.3.1 i postavimo sječicu *s* određenu tačkama *M* i *N*. Ako se tačka *N*, klizući po krivoj, neograničeno približava tački *M* tada će sječica *s* težiti pravoj *t* koja se naziva tangenta krive u tački *M*.



Tački *c* odgovara vrijednost funkcije . Novoj vrijednosti argu-menta odgovara vrijednost funkcije pa tačka *N* ima koordinate . Neka je ugao koga sječica *s* zatvara sa pozitivnim smjerom ose označen sa . Iz slike se neposredno zapaža da je . Ako tad će se tačka *N* klizući po krivoj približavati tački *M*. Ugao će se mijenjati i težiće uglu , gdje je ugao ugao koga zatvara tangenta *t* sa pozitivnim smjerom ose . Zapaža se da je



, tj



(3.3.3)



što znači da je geometrijska interpretacija izvoda sljedeća:"izvod pri datoj vrijednosti argumenta *x* jednak je tangensu ugla koji obrazuje tangenta na grafik funkcije u tački sa pozitivnim smjerom ose .



**Primjer 3.3.3.** Naći koeficijent tangente krive u tački .



***Rješenje.*** Kako je , (vidjeti primjer 3.3.1) to je .



**3.3.1.2. Osobine diferencijabilnih funkcija**

**Teorema 3.3.1.** *Ako je funkcija* *diferencijabilna u tački* , *tada je ona u toj tački i neprekidna*.



***Dokaz*.** Na osnovu pretpostavke date teoreme i teoreme 3.1.8 je

,



gdje kada . Iz prethodne jednakosti se dobija



(3.3.4)



odakle slijedi da kada što znači da je funkcija neprekidna u tački .



**Teorema 3.3.2.** *Ako je funkcija* *injekcija i diferencijabilna u* *tački*  *x*, *pri čemu je* , *tada je i njena inverzna funkcija* *diferencijabilna u tački* *i vrijedi*



(3.3.5) , *ili*  .



***Dokaz.*** Kao i u relaciji (3.3.4) je

(3.3.6) .



Kako je to je



(3.3.7) .



Takođe, iz slijedi jednakost



(3.3.8) .



Zamjenom vrijednosti (3.3.7) i (3.3.8) u (3.3.6) dobijamo



ili

.



Ako tada i , jer je *y* neprekidna funkcija u tački *x*, pa je



.



**3.3.1.3. Pravila diferenciranja**

**Teorema 3.3.3.** *Ako je* *i ako postoji* *tada vrijedi*



(3.3.9) .



***Dokaz.*** Za je



, ili



.



Po definiciji izvoda je



,



tj.

(3.3.10)



**Teorema 3.3.4.** *Izvod zbira konačnog broja diferencijabilnih funkcija jednak je zbiru izvoda pojedinih sabiraka*, *tj*.

(3.3.11) .



***Dokaz*.** Teoremu ćemo dokazati samo za zbir od dva sabirka i . Neka je tada je



,



a



.



Dalje je



,



tj.

(3.3.12) ,



čime je teorema dokazana. Primjenom matematičke indukcije nije teško do-kazati da teorema vrijedi i u opštem slučaju.

**Teorema 3.3.5.** *Ako su funkcije* *i*  *diferencijabilne funkcije u* *tački* *x* *tada je diferencijabilna i funkcija* *i pri tome vrijedi*



(3.3.13) .



***Dokaz*.** Kako je to je



,



pa je

.



Dijeljenjem sa dobićemo



.



Nakon izračunavanja granične vrijednosti se dobija

,



jer je

.



**Teorema 3.3.6.** *Ako su funkcije* *i* *diferencijabilne funkcije u tački* *x* *i ako je* , *tada je diferencijabilna i funkcija*  , *i* *pri tome vrijedi*



(3.3.14) .



***Dokaz*.** Iz slijedi



, ili .



Nakon oduzimanja razlomaka desna strane prethodna jednakost je oblika



odnosno

.



Ako tada po teoremi 3.3.1 i na osnovu pretpostavke date teoreme i , pa je



.



**3.3.1.4. Izvodi nekih elementarnih funkcija**

**1.** ***Izvod konstante***. Neka je , gdje je *c* konstanta, tada je



pa je

,



tj.

(3.3.15) .



**2.** ***Izvod funkcije***. Ako argumentu *x* dodamo prira-štaj tada će vrijednost funkcije u biti



ili

.



Dalje je



ili

.



Ako se stavi , tada je (vidjeti primjer 3.1.31)



pa je

,



tj.

(3.3.16) .



**Primjer 3.3.4.** Naći ako je .



***Rješenje.*** Na osnovu prethodne formule je

.



**3.** ***Izvodi funkcija****i* . Neka je . Vri-jednost funkcije u je



,



odakle je prema formuli za razliku funkcije



.



Po definiciji izvoda je

,



tj.

(3.3.17) .



Slično se dobija i izvod funkcije . Tada je



ili

,



pa je

,



tj.

(3.3.18) .



**4.** ***Izvod funkcija****i* . Kako je



to je prema formuli (3.3.14)

,



tj.

(3.3.19) .



Slično se dobija da je

(3.3.20) .



**5.** *Izvod funkcije* . Kako za  vrijedi



to je



pa je

.



Iz definicije izvoda slijedi da je

,



tj.

(3.3.21) .



Za slijedi da je



(3.3.22) ,



jer je .



**6.** ***Izvod funkcije*** . Ako je tada je



ili

.



Po definiciji izvoda je



,



tj.

(3.3.23) .



Ako je tada , pa je



(3.3.24) ,



jer je .



**6.** ***Izvodi inverznih trigonometrijskih funkcija****.* Funkcija za , pri čemu je , ima inverznu funkciju . Tada je , na osnovu teoreme 3.3.2 postoji i vrijedi



,



tj.

(3.3.25) .



Analogno se dobija

(3.326) ,



(3.3.27) ,



(3.3.28) .



**3.3.1.5. Tablica osnovnih izvoda**

Izvodi elementarnih funkcija, datih u prethodnom dijelu, mogu se izraziti sljedećom tabelom

**1.** ,



**2.** ,



**3.** ,



**4.** ,



**5.** ,



**6.** ,



**7.** ,



,



**8.** ,



,



**9.** ,



**10.** ,



**11.** ,



**12.** .



Pravila diferenciranja se mogu dati sljedećom tabelom.

**1.** ,



**2.** ,



**3.** ,



**4.** .



**3.3.1.6. Neki primjeri izvoda**

***Primjer* 3.3.5.** Naći izvod funkcije

.



***Rješenje.*** Funkcija se može posmatrati kao proizvod dvije elementarne funkcije i , pa je



.



***Primjer* 3.3.6.** Funkcija se može posmatrati kao količnik elemen-tarnih funkcija i , pa je



.



***Primjer* 3.3.7.** Naći ako je .



***Rješenje.***



.



***Primjer* 3.3.8.**  Ako je tada je



.



**3.3.1.7. Izvod složene funkcije**

**Teorema 3.3.7.** *Neka je data funkcija* *gdje je* . *Ako je funkcija* *diferencijabilna u tački* ***x***, *ako je funkcija*  *definisana u intervalu koji sadrži* *i ima izvod u tački* ***u***, *tada funkcija* *ima izvod u tački* ***x*** *i vrijedi*



(3.3.29) .



***Dokaz*.** Neka je priraštaj nezavisno promjenljive *x*, odgo-varajući priraštaj funkcije *u*, a odgovarajući priraštaj funkcije *y*. Tada je



pa je

.



Prema pretpostavci date teoreme funkcije i su diferencijabilne, pa je



.



Time je teorema dokazana.

***Primjer* 3.3.9.** Naći izvod funkcije .



***Rješenje.*** Uzmimo da je , tada je



.



Kako je to je



.



***Primjer* 3.3.10.** U funkciji



ako se uzme da je , dobićemo



, .



Kako je , to je



.



**3.3.1.8. Izvod funkcije u parametarskom obliku**

**Teorema 3.3.8.** *Neka je funkcija* *neprekidna na intervalu* *i neka su* *i* *neprekidne funkcije od* ***t*** *na intervalu* . *Neka su funkcije* *i* *diferencijabilne po* ***t*** *na posmatranom intervalu* . *Tada za* *i funkcija* *ima izvod po* ***x*** *na intervalu* *i vrijedi*



(3.3.30) ,



*gdje je* .



***Dokaz*.** Neka se argument *t* funkcija i promi-jeni za tada će se i funkcije i promijeniti za i , respektivno, i vrijedi:



,



,



,



odakle slijedi da je

.



Na osnovu pretpostavke teoreme, kada tada i i vrijedi



.



**Primjer 3.3.11.** Funkcija



je definisana za i ima parametarski oblik



i definisana je za . Tada vrijedi



pa je prema relaciji (3.3.30)

.



Za je odnosno , pa je , jer je .



***Primjer* 3.3.12.** Za je



,



odnosno

.



**3.3.1.9. Logaritamski izvod**

Neka je data funkcija i , tada je



, ili



za , tj.



(3.3.31) .



Izraz zove se *logaritamski izvod funkcije* .



Logaritamski izvod može se iskoristiti za određivanje izvoda nekih funkcija, kao naprimjer funkcije

.



Logaritmovanjem prethodne jednakosti dobijamo



odakle diferenciranjem slijedi da je

,



ili

.



Kako je , to je



.



***Primjer* 3.3.13.** Naći izvod funkcije .



***Rješenje.*** Logaritmovanjem se dobija



odakle je



odnosno

.



**3.3.2. Izvodi višeg reda**

Ako funkcija ima izvod u nekom intervalu , tada i funkcija predstavlja neku funkciju od *x*. Ako fun-kcija ima izvod u tački tada se taj izvod naziva drugi iz-vod funkcije i označava se sa



.



***Primjer* 3.3.14.** Naći drugi izvod funkcije

.



***Rješenje.*** Kako je



tj.

,



pa je



.



Analogno, ako funkcija ima drugi izvod u nekom intervalu , tada je on ponovo funkcija od *x*. Ako funkcija ima izvod u tački onda ga nazivamo treći izvod funk-cije i označavamo sa



.



Ako funkcija ima izvod u intervalu tada se njegov izvod u tački naziva *n*-ti izvod u tački *a* i označava se sa



.



**3.2.2.1. Formula za izračunavanje *n*-tog izvoda**

**Teorema 3.3.9.**  *Ako funkcije* *i* *imaju izvod tada i* *funkcije*: *imaju* *n*-*ti izvod* *i pri tom vrijedi*



,



,



.



*Dokaz* ove teoreme može poslužiti kao primjer za vježbu.

***Primjer* 3.3.15.** Neka je , tada je



,



,



. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

.



***Primjer* 3.3.16.** Ako je , tada je



,



,



,



. . . . . . . . . . .

.



Za je .



***Primjer* 3.3.17.** Ako je tada je



,



.



Da bi se našao *n*-ti izvod funkcije pođimo od jednakosti



,



,



,



,



,



na osnovu čega se može zaključiti da je

.



Analogno se dobija da je

.



**3.3.2.2. Viši izvodi funkcija u parametarskom obliku**

U dijelu 3.3.1.8 razmatrali smo način određivanja izvoda funkcije date u parametarskom obliku. Konstatovano je da za funkciju , gdje su i funkcije od *t*, vrijedi da je



.



Razmotrimo način izračunavanja drugog i viših izvoda funkcije u parame-tarskom obliku.

Na osnovu definicije izvoda funkcije u parametarskom obliku slijedi

,



ili

(3.3.32) .



Na isti način se dobije i treći i viši izvod od trećeg izvoda funkcije u parame-tarskom obliku.

***Primjer* 3.3.18.** Neka je , . Izračunati .



Iz

,



,



na osnovu relacije (3.3.32) slijedi

.



**3.3.3. Diferencijali funkcija**

Neka je funkcija diferencijabilna funkcija na intervalu . Izvod funkcije u tački je definisan sa



.



Kako kada to je na osnovu teoreme 3.1.8



gdje , kada , beskonačno mala funkcija. Množenjem prethodne jednakosti sa dobijamo



(3.3.33) .



Kako je u opštem slučaju za neko , to će brže težiti nuli nego . Proizvod je uvijek beskonačno mala funkcija višeg reda u odnosu na , jer je



.



Prema tome, kada je a dovoljno malo, tada je



.



**Definicija 3.3.2.** *Neka je funkcija* *diferencijabilna u tački* . *Diferencijalom funkcije u tački* ***x*** *naziva se proizvod izvoda funkcije u toj tački i proizvoljnog priraštaja argumenta* , *i označava se sa* *ili* , *tj*.



(3.3.34) .



Ako je tada je odakle na osnovu definicije dife-rencijala slijedi da je



, ili .



To znači da diferencijalu nezavisno promjenljive veličine odgovara njegov priraštaj. Ova činjenica je veoma važna. Iz nje slijedi da se formula (3.3.34) može izraziti u obliku

(3.3.35) .



***Primjer* 3.3.19.** Neka je . Izračunati priraštaj funkcije *y* i diferencijal , ako je: i .



***Rješenje.*** Iz slijedi



.



Po definiciji diferencijala je

.



***Primjer* 3.3.20.** Naći diferencijal funkcije

.



***Rješenje.*** Kako je , to je



.



**Teorema 3.3.10.** **(*Pravila za određivanje diferencijala*)** *Neka su funkcije* *i* *diferencijabilne i* . *Tada vrijedi*:



(3.3.36) ,



(3.3.37) ,



(3.3.38) ,



(3.3.39) .



***Dokaz*.** Dokaz je jednostavan i primjera radi dokažimo samo rela-ciju (3.3.38). Iz definicije diferencijala slijedi



.



**Definicija 3.3.3.** *Neka je funkcija* *diferencijabilna* ***n***-*puta i neka je* *priraštaj argumenta* *x*. *Izraz* *nazivamo dife-rencijal* ***n***-*tog reda funkcije* *i označavamo sa*



(3.3.40) .



Iz prethodne definicije slijedi da se *n*-ti izvod funkcije može izraziti kao



.



**3.3.3.1. Geometrijsko značenje diferencijala**

Neka je diferencijabilna funkcija u tački *x* i neka je . Neka je tačka *M* dodirna tačka tangente *t* krive u tački *x*, Sl.3.3.2. Ako se argument funkcije promijeni od *x* na , tada se vrijednost funkcije promijeni od na . Priraštaju



Sl. 3.3.2.

argumenta od odgovara priraštaj funkcije . Zapaža se da je



.



Od ranije je poznato da je , pa je



.



Prema tome, diferencijal predstavlja priraštaj na odgo-varajućoj tangenti kada se vrijednost argumenta promijeni od *x* na .



**3.3.4. Zadaci za vježbu**

**1.** Naći po definiciji , ako je



a) , b) , c) .



U zadacima od 2. do 37. koristeći pravila naći izvod funkcija:

**2.** . **3.** .



**4.** . **5.** .



**6.** . **7.** .



**8.** . **9.** .



**10.** . **11.** .



**12.** . **13.** .



**14.** . **15.** .



**16.** . **17.** .



**18.** . **19.** .



**20.** . **21.** .



**22.** . **23.** .



**24.** . **25.** .



**26.** . **27.** .



**28.** . **29.** .



**30.** . **31.** .



**32.** . **33.** .



**34.** . **35.** .



**36.** . **37.** .



**38.** Data je kriva . Naći jednačinu tangente i normale u tački .



**39.** Odrediti parametar *n* tako da prava bude tangenta krive .



**40.** Iz tačke postaviti tangentu na krivu i naći tačku dodira.



U zadacima od 41. do 46. naći *n*-ti izvod date funkcije.

**41.** . **42.** .



**43.** . **44.** .



**45.** . **46.** .



U zadacima od 47. do 52. naći *n*-ti izvod date funkcije.

**47.** . **48.** .



**49.** . **50.** .



**51.** . **52.** .



U zadacima od 53. do 56. naći diferencijal date funkcije.

**53.** . **54.** .



**55.** . **56.** .



**57.** Izračunati približnu vrijednost izraza:

a) , b) , c) .



**3.4. Osnovne teoreme diferencijalnog računa**

**3.4.1. Teoreme o srednjim vrijednostima**

**Teorema 3.4.1.** **(*Fermatov***\*) ***teorem*)** *Neka funkcija* *definisana na intervalu* *ima lokalni ekstrem u tački* . *Ako je* *funkcija diferencijabilna u tački* ***c***, *tada je* .



***Dokaz*.** Neka funkcija ima maksimum u tački *c*. Tada je



za svako , ili za



.



Prethodna nejednakost za se može napisati u obliku



odakle je

.



Za je



,



odakle je

.



Kako je funkcija diferencijabilna u tački *c*, to je

,



odakle na osnovu prethodnih nejednakosti slijedi

\*) P. Fermat (1601-1665), francuski matematičar.

, ,



tj.

.



**Teorema 3.4.2. (*Rolleova***\*) ***teorema*)** *Neka funkcija* *ispunjava sljedeće uslove*:



**1.** *funkcija je diferencijabilna u intervalu* ,



**2.** *funkcija je neprekidna na intervalu* ,



**3.** .



*Tada postoji tačka*  *takva da vrijedi* .



***Dokaz*.** Kako je po prvom uslovu teoreme funkcija neprekidna u intervalu , to na osnovu teoreme 3.2.4 slijedi da u tom intervalu postoji tačka u kojoj funkcija dostiže maksimum *M* i tačka u kojoj funkcija dostiže minimum *m*.



Ako je , tada iz nejednakosti



, ,



slijedi da je funkcija konstantna, ili , pa je



.



Neka je . Odatle, na osnovu trećeg uslova teoreme, slijedi da funkcija ne može dostići maksimum i minimum na krajevima intervala , i jedan od ekstrema dostiže u nekoj tački . U tom slučaju, na osnovu teoreme 3.4.1 slijedi da je .



Rolleova teorema ima sljedeće geometrijsko značenje. Ako su vrijednosti funkcije na krajevima intervala jednake, tada uz ispunjenje ostalih uslova, u intervalu postoji tačka u kojoj je tangenta krive date sa paralelna sa osi , Sl.3.4.1.



|  |  |
| --- | --- |
| \*) M. Rolle (1652-1719), francuski matematičar.  Sl. 3.4.1. | ***Primjer*** **3.4.1.** Funkcija    ispunjava uslove Rolove teoreme na intervalu i vrijedi:  **1.** funkcija je neprekidna na intervalu ,  **2.** funkcija je diferencijabilna na intervalu i vrijedi  ,  **3.** . |

Prema Rolleovoj teoremi u intervalu postoji bar jedna tačka za koju je . Kako je , to je



odakle je: .



**Teorema 3.4.3. (*Lagrangeova***\*) ***teorema*)** *Neka funkcija ispu-njava sljedeće uslove*:



**1.** *funkcija je diferencijabilna na intervalu* , *i*



**2.** *funkcija je neprekidna na intervalu* .



*Tada postoji tačka takva da vrijedi*



.



***Dokaz*.** Da bismo dokazali teoremu formirajmo funkciju

(3.4.1) .



Funkcija je definisana na intervalu i neprekidna na intervalu . U intervalu funkcija ima izvod jednak



(3.4.2) .



To znači da su za funkciju ispunjena prva dva uslova Rolleove teoreme na intervalu . Nije teško pokazati da je ispunjen i treći uslov teoreme, pri tom je . Na osnovu toga slijedi da postoji tako da vrijedi . Iz (3.4.2) slijedi



tj.

.



***Primjer* 3.4.2.** Ispitati da li funkcija ispunjava uslove Lagran-geove teoreme na intervalu i ako ispunjava naći odgovarajuće *c*.



***Rješenje.*** Nije teško pokazati da su ispunjeni uslovi teoreme, to znači da postoji takvo da vrijedi



.

\*) J. L. Lagrange (1736-1813), francuski matematičar.



Kako je , to je



odakle se dobija .



Geometrijska interpretacija Lagrangeove teoreme je sljedeća. Sa slike 3.4.2 zapaža se da je



Sl. 3.4.2.

i taj količnik je koeficijent pravca sječice . Koeficijent pravca tangente na krivu u tački je . Dakle, Lagrangeova teorema tvrdi, ako su ispunjeni uslovi teoreme, da postoji tačka u kojoj je tangenta na krivu paralelna sječici .



***Primjer* 3.4.3.** Data je parabola i tačke i . Odrediti tačku *P* parabole u kojoj je tangenta paralelna sječici .



***Rješenje.*** Funkcija ispunjava uslove Lagrangeove teoreme na intervalu , što znači da postoji za koje je



,



ili

,



odakle se dobija da je . Kako je , to tačka *P* ima koordina-te .



Lagrangeova formula se često daje i u drugom obliku. Iz slijedi



ili

.



Ako se zamijeni

,



dobija se

(3.4.3) .



Dalje, za , ili formula



glasi



ili

(3.4.4) .



Ako se zamijeni , prethodna formula glasi



(3.4.5) .



**Teorema 3.4.4. (*Cauchyeva teorema*)** *Neka funkcije*  *i ispu-njavaju sljedeće uslove*:



**1.** *funkcije su diferencijabilne u intervalu* ,



**2.** *funkcije su neprekidne na intervalu* , *i*



**3.** .



*Tada postoji tačka takva da je*



.



***Dokaz*.** Treba zapaziti da je . Ako bi bilo, tada bi funkcija ispunjavala uslove Rolleove teoreme, a to bi značilo da postoji tačka takva da je . To je u suprotnosti sa trećim uslovom Cauchyeve teoreme.



Da bismo dokazali teoremu formirajmo pomoćnu funkciju

(3.4.6) .



Funkcija (3.4.6) ispunjava uslove Rolleove teoreme na intervalu što nije teško provjeriti. To znači da postoji za koje je . Kako je



,



to je

,



odakle slijedi da je

,



čime je teorema dokazana.

Ako se zamijeni tada prethodna formula glasi



(3.4.7) .



**3.4.2. L'Hospitalove**\*) **teoreme**

U 3.1.3 smo razmatrali prividno neodređene izraze, a sada ćemo raz-matrati mogućnost njihovog rješavanja primjenom diferencijalnog računa.

**Teorema 3.4.5.** *Neka funkcije* *i* *ispunjavaju sljedeće uslove*:



**1.** *funkcije su definisane u intervalu* ,



**2.** ,



**3.** *funkcije su diferencijabilne na intervalu*  ,



**4.** *postoji* .



*Tada postoji i* *i pri tome vrijedi*



.

\*) G. L'Hospital (1661-1704), francuski matematičar.



***Dokaz*.** Iz uslova 3. teoreme slijedi da su ispunjeni uslovi teoreme (3.4.4) na intervalu , . Iz toga na osnovu relacije (3.4.7) i drugog uslova teoreme slijedi



,



gdje je . Prethodne jednakosti su moguće, jer je , tj. , što slijedi iz uslova .



Kada tada i , pa je



što je i trebalo dokazati.

Može se zapaziti da je teorema dokazana samo za slučaj desne gra-nične vrijednosti. Teorema važi i u slučaju lijeve granične vrijednosti, a tako-đe i kada sa obje strane.



***Primjer* 3.4.4.** Naći .



***Rješenje.*** U ovom primjeru je , , , pa je , . Funkcije i su dife-rencijabilne u okolini tačke . Dalje, je , , a



.



Na osnovu teoreme (3.4.5) slijedi

.



***Primjer* 3.4.5.** Naći .



***Rješenje.*** Kao i u prethodnom primjeru izraz kada je prividno neodređen izraz oblika . Funkcije i ispunjavaju uslove teoreme 3.4.5, pa je



.



Izraz kada je ponovo neodređen izraz oblika . Za funkcije i ponovo vrijede uslovi teoreme 3.4.5, pa je



.



To znači da je

.



Neka se u prethodnoj teoremi zamijeni interval sa , a sa . Tada neposredno slijedi da je



.



Zaista, ako se uvede smjena slijedi i tada je



,



,



što znači da u slučaju vrijede uslovi teoreme 3.4.5, pa je



.



**Teorema 3.4.6.** *Neka funkcije* *i* *ispunjavaju sljedeće uslove*:



**1.** ,



**2.** *funkcije su diferencijabilne na intervalu* *i*



**3.** *postoji* .



*Tada postoji i* , *i pri tom vrijedi*



.



*Dokaz* ove teoreme nećemo izvoditi.

Prethodne L'Hospitalove teoreme se odnose na prividno neodređene izraze oblika i . Prividno neodređeni izrazi oblika: , , svode se identičnim transformacijama na prividno neodređene izraze oblika i .



Ako je tada je prividno neodređeni izraz oblika . Transformacijom



, ili



neodređeni izraz se svodi na prividnu neodređenost oblika



, odnosno .



***Primjer* 3.4.6.** Naći .



***Rješenje.*** Izraz je neodređen izraz oblika i on se može transformisati u izraz oblika



neodređenosti oblika . Na osnovu teoreme 3.4.6 je



.



Neka je , , tada je



prividna neodređenost oblika . Transformacijom



ova neodređenost se svodi na neodređenost oblika .



***Primjer* 3.4.7.**



.



Prividno neodređeni izrazi oblika: i pomoću identiteta



,



svode se na prividno neodređene izraze oblika .



***Primjer* 3.4.8.**

,



gdje je



.



Dakle,

.



**3.4.3. Taylorova formula**

Neka je dat polinom *n*-tog reda oblika

(3.4.8) .



Postepenim diferenciranjem *n*-puta polinoma dobija se



,



,



. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

.



Za je



,



,



,



. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

.



Ako se za izražene pomoću odgovarajućih izvoda uvrste u (3.4.8) dobija se



(3.4.9) .



Formula (3.4.9) se naziva *Taylorova*\*) formula za polinom (3.4.8). Ako se u (3.4.9) zamijeni dobija se formula



(3.4.10)



koja se obično naziva *Maclaurinova*\*\*) formula za polinom .



Uspostavimo analognu formulu formuli (3.4.9) za proizvoljnu fun-kciju .



Neka je funkcija definisana u intervalu i neka na tom intervalu ima sve izvode do reda *n*. Tada se za može for-mirati polinom oblika



\*) B. Taylor (1685-1731), engleski matematičar.

\*\*) K. Maclaurin (1698-1746), škotski matematičar.

(3.4.11)



koji se naziva Taylorov polinom funkcije *f* u okolini tačke *c*. Taylorov polinom ima osobinu da je

(3.4.12) .



Iz jednakosti



na osnovu teoreme 3.1.8 slijedi

,



gdje kada . Kako je to se prethodna jednakost može izraziti u obliku



,



što znači, obzirom da kada , da se i mo-gu učiniti približno jednakim, tj. .



**Teorema 3.4.7.** **(*Taylorova teorema*)** *Neka za neko*  *funkcija* , *definisana na intervalu* , *ima neprekidan* *iz-vod na tom intervalu*. *Tada za svake dvije tačke* *postoji tačka* *takva da je*



(3.4.13) .



***Dokaz*.** Iz (3.4.11) slijedi da se prethodna jednakost može izraziti u obliku

.



Neka je

(3.4.14)



gdje je nepoznata funkcija. Formirajmo funkciju oblika



;



tada je

.



Kako je to je



(3.4.15) .



Ako se za funkciju nađu svi izvodi do reda *n*, vodeći računa da je



,



pokazaće se da je

.



Iz definicije funkcije zapaža se da je izabrano tako da je i da ona ispunjava uslove Lagrangeove teoreme na intervalu . To znači da postoji za koje je



.



Kako je to je i . Slično se zaključuje da je



.



Nakon koraka dobija se



za neko .



Dakle, postoji između *c* i *x* takvo da je . Na osnovu toga iz (3.4.15) slijedi



ili



čime je teorema dokazana.

Formula (3.4.13) se zove Taylorova formula funkcije u okolini tačke *c*, a izraz



(3.4.16)



zove se *n*-ti ostatak Lagrangeova oblika Taylorove formule.

Iz formule (3.4.13) zapaža se da se član koji predstavlja ostatak raz-likuje od prethodnih članova samo po tome što se izvod funkcije traži u nekoj tački između *x* i *c*, umjesto u tački *c*.



Ako se stavi da je , ili , , dobija se izraz za ostatak oblika



(3.4.17) .



***Primjer* 3.4.9.** Za funkciju svi izvodi do reda jednaki su , pa Tejlorova formula u okolini tačke , glasi



,



tj.

(3.4.18) .



Ako se u prethodnu formulu umjesto *x* stavi dobiće se



(3.4.19) .



***Primjer* 3.4.10.** Za funkciju je



,



pa je , a .



Tejlorova formula za u ovom slučaju za , glasi



(3.4.20) .



Analogno se dobija za



(3.4.21) .



**3.4.4. Zadaci za vježbu**

**1.** Ispitati da li funkcija ispunjava uslove Rolleove teoreme, i ako ispunjava naći odgovarajuće *c*.



**2.** Funkcija ima jednake vrijednosti na krajevima intervala . Objasniti zašto ni u jednoj tački tog intervala prvi izvod nije jednak nuli.



**3.** Pokazati da se između korijena funkcije

, , nalazi korijen jednačine .



**4.** Ako je , pokazati da jednačina ima tri realna korijena i naći intervale u kojima se nalaze.



**5.** Napisati Lagrangeovu formulu za funkciju na intervalu .



**6.** Primjenom Lagrangeove formule dokazati nejednakosti

.



**7.** Napisati Lagrangeovu formulu za funkciju na intervalu i naći odgovarajuće *c*.



**8.** Primjenom Lagrangeove formule naći .



U zadacima od 9 do 14 naći odgovarajuće granične vrijednosti.

**9.** . **10.** .



**11.** . **12.** .



**13.** . **14.** .



**3.5. Ispitivanje funkcija pomoću izvoda**

**3.5.1. Monotone funkcije**

**Teorema 3.5.1.** *Neka je funkcija* *definisana na intervalu* *i neka je diferencijabilna na intervalu* . *Ako je* , *odnosno* *na* , *tada*  *strogo raste odnosno strogo opada na* .



***Dokaz*.** Neka je na . Za svako prema Lagrangeovoj teoremi postoji takav da je



odnosno

.



Kako je



za svako to je funkcija strogo rastuća na . Ostali dio teoreme se dokazuje na sličan način.



***Primjer* 3.5.1.** Naći intervale monotonosti funkcije .



***Rješenje.*** Funkcija je definisana na i ima prvi izvod . Prema teoremi 3.5.1 monotonost funkcije je određena znakom njenog prvog izvoda i on je određen tabelom 3.5.1.



*x* -3 0 3



+ + + 0 + + +



0 + + + + 0



+ + 0 + + 0 + +



+ + + +



Tabela 3.5.1.

Znači, funkcija je strogo opadajuća na , a strogo ras-tuća na .



**3.5.2. Lokalni ekstremi funkcije**

**Teorema 3.5.2.** *Neka je funkcija* *diferencijabilna u intervalu* , *izuzev eventualno u tački* . *Ako postoji* *proizvoljno mali broj*  *takav da vrijedi*



*i* ,



*odnosno*

*i* ,



*onda funkcija* *ima u tački* ***c*** *lokalni maksimum*, *odnosno lokalni mi-nimum*.



***Dokaz*.** Neka je . Onda za , na osnovu Lagrangeove teoreme, vrijedi



,



odnosno .



Slično se dobija za nejednakost



,



što znači da je lokalni maksimum.



Drugi dio teoreme se dokazuje na sličan način.

Na osnovu teoreme slijedi da će funkcija u tački neprekid-nosti *c* imati lokalni ekstrem ako je ili , i da u toj tački prvi izvod mijenja znak, što je predstavljeno tabelom 3.5.2.



*x* *c* finkcija u *c* ima

+ max



+ min



Tabela 3.5.2.

***Primjer* 3.5.2.** Naći lokalne ekstreme funkcije

.



***Rješenje***. Izvod date funkcije *y* je



i njegove nule su: . Znak izvoda je dat u tabeli 3.5.3.



*x*  0 1



0 + + +



+ 0 + + + + +



+ + 0 0 + +



0 − 0 + 0 0 + 0 +



*y* min max min

Tabela 3.5.3.

Na osnovu teoreme 3.5.2 slijedi da funkcija ima lokalne minimume u tačkama , a maksimum u tački .



**Teorema 3.5.3.** *Neka funkcija* , *definisana na intervalu* *ima neprekidan* ***m***-*ti izvod i neka je za neko*



.



*Ako je* ***m***-*paran broj*, *onda funkcija* *ima maksimum ako je* , *a minimum ako je* . *Za neparno* ***m*** *funkcija nema ekstrema*.



*Dokaz* ove teoreme nećemo izvoditi.

Za prethodna teorema se može iskazati u sljedećem obliku.



Neka funkcija definisana na intervalu ima nepreki-dan drugi izvod i neka za neko je . Tada za funkcija ima ekstrem u tački *c* i to minimum za , a maksimum za .



***Primjer* 3.5.3.** Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije

.



***Rješenje.*** Izvod date funkcije je

,



a njegove nule su: . Dalje je



.



Kako je to će funkcija u tački imati minimum. Za je . To znači da će u tačkama funkcija imati maksimume.



**3.5.3. Konveksne funkcije**

**Definicija 3.5.1.** *Za funkciju* *kažemo da je strogo konveksna*, *odnosno strogo konkavna*, *na intervalu* *ako za svako* *tetiva* (Sl. 3.5.4) *leži iznad odgovarajućeg luka krive*, *odnosno ispod odgovarajućeg luka krive*.



Sl. 3.5.4.

**Definicija 3.5.2.** *Za funkciju* *kažemo da ima prevojnu tačku ili tačku infleksije* *ako postoji* *takvo da je funkcija strogo konveksna* (*strogo konkavna*) *na* *i strogo konkavna* (*strogo konveksna*) *na* , (Sl. 3.5.5).



Sl. 3.5.5.



**Teorema 3.5.4.** *Neka je funkcija* *definisana na* *i ima drugi izvod na* . *Ako je* , *odnosno* , *na* *onda je funkcija strogo konveksna*, *odnosno strogo konkavna na* .



***Dokaz*.** Jednačina sječice , je



,



ili

.



Za svako i je



,



ili

,



vidjeti sljedeću sliku

*x*

*a*

*x*1

*x*

*b*

ε

*c*

η

*x*2

Zadnja jednakost se može transformisati u jednakost oblika

(3.5.1) .



U intervalu postoji tako da je



,



ili

(3.5.2) .



U intervalu postoji takvo da je



(3.5.3) .



Ako se (3.5.2) i (3.5.3) uvrste u (3.5.1) dobijamo

,



ili

(3.5.4) .



U intervalu postoji *c* takvo da je



,



pa će (3.5.4) glasiti

(3.5.5) ,



gdje je . Iz (3.5.5) se zapaža da je za



,



znači da je sječica iznad grafika funkcije na intervalu , što znači da je funkcija strogo konkavna. Ako je , tada je



,



pa je na intervalu funkcija strogo konveksna.



**Teorema 3.5.5.** *Neka funkcija* , *definisana na intervalu* , *ima neprekidan drugi izvod na intervalu* . *Ako je* ***c*** *prevoj-na tačka tada je* .



***Primjer* 3.5.4.** Odrediti intervale konkavnosti, konveksnosti i prevojne tačke funkcije

.



***Rješenje.*** Drugi izvod funkcije je

.



Nule drugog izvoda su , a to su prevojne tačke date funkcije što se vidi iz tabele 3.5.6.



*x*



+



+ + +



+

*PT*

*PT*

*y*



Tabela 3.5.6.

Na osnovu teoreme 3.5.5 i prethodne tabele slijedi da je funkcija strogo konveksna u intervalu a strogo konkavna u .



**3.5.4. Asimptote funkcije**

**Definicija 3.5.3.** *Prava* *naziva se asimptota krive ako rasto-janje* *od promjenljive tačke* *M* *krive do te prave teži nuli kada tačka* *M* *teži beskonačnosti* (Sl.3.5.7).



Ako je , odnosno za asimptotu se kaže da je kosa, odnosno ho-rizontalna.



Sl. 3.5.7.

***Kosa asimptota.*** Neka kriva ima kosu asimoptotu oblika



gdje su i *l* nepoznati brojevi. Neka tačka pripada krivoj, a tač-ka asimptoti. Rastojanje tačke *M* i asimptote je . Neka je ugao koji obrazuje asimptota i pozitivan smjer ose . Tada iz tro-ugla slijedi



,



ili

(3.5.6) .



Kako, po definiciji asimptote kada iz (3.5.6) slijedi da i kada , ako je . Kako je



to je

(3.5.7) .



Odredimo sada konačne i određene brojeve *k* i *l* tako da prava bude asimptota krive date izrazom . Iz



slijedi

.



Za konstantno *l* je , što znači da je



(3.5.8) .



Poznavajući *k*, iz relacije (3.5.7) dobijamo

(3.5.9) .



U prethodnom dijelu smo posmatrali određivanje asimptota kada . Na taj način se rezonuje i kada i dobijaju se iste formule za *k* i *l*.



***Primjer* 3.5.5.** Odrediti kosu asimptotu grafika funkcije

.



***Rješenje.*** Prema relaciji (3.5.8) je

,



a prema relaciji (3.5.7) je

.



Dakle, kosa asimptota grafika funkcije je .



Treba zapaziti, ako funkcija ima horizontalnu asimptotu tada je nje-na jednačina

.



Ako neka od graničnih vrijednosti (3.5.8) ili (3.5.9) ne postoje tada funkcija nema kosu asimptotu.

***Vertikalna asimptota*.** Neka je za neko funkcija definisana na intervalima i ili bar na jednom od tih in-tervala. Ako je



(3.5.10) , ili ,



ili i jedno i drugo, onda je prava vertikalna asimptota funkcije .



To drugim riječima znači da će funkcija imati vertikalnu asimptotu ako funkcija nije definisana u toj tački, a definisana je u li-jevoj ili desnoj okolini tačke *a*, i ako je ispunjen jedna od uslova (3.5.10).



***Primjer* 3.5.6.** Naći vertikalnu asimptotu funkcije

.



***Rješenje.*** Funkcija nije definisana za , definisana je u okolini tačke , i tada je



,



što znači da je vertikalna asimptota.



***Primjer* 3.5.7.** Ispitati da li funkcija



ima vertikalne asimptote.

***Rješenje.*** Data funkcija nije definisana za i . Kako je



, a



to će funkcija imati vertikalnu asimptotu u tački .



**3.5.5. Plan ispitivanja toka funkcija**

Pod "*ispitivanjem toka funkcija*" obično se podrazumijeva određiva-nje:

1. *oblasti definisanosti funkcije i ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti*,

2. *parnosti ili neparnosti*, *periodičnosti*,

3. *tačaka prekida i intervala neprekidnosti*,

4. *nula i znaka funkcije*,

5. *intervala monotonosti*,

6. *ekstrema funkcije*,

7. *prevojnih tačaka i intervala konveksnosti*,

8. *asimptota grafika funkcije*.

Na osnovu izvršenog ispitivanja funkcije može se dosta dobro na-crtati grafik posmatrane funkcije.

***Primjer* 3.5.8.** Ispitati tok funkcije

,



i nacrtati njen grafik.

***Rješenje.***

1. *Oblast definisanosti*. .



2. Kako je ,



funkcija je neparna. Funkcija nije periodična.

3. *Tačke prekida i intervali neprekidnosti funkcije*. Na osnovu teo-rije o neprekidnosti slijedi da je *f* neprekidna za svako .



4. *Nule i znak funkcije*. za . Znak funkcije je dat u ta-beli 3.5.5.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | − ∞ | 0 | − ∞ |
| *x* | − | 0 | + |
| 1 + *x*2 | + |  | + |
| *y* | − | 0 | + |

Tabela 3.5.8.

Prema tome je za , a za .



5. *Intervali monotonosti funkcije.* Kako je ,



to je za , i . Znak prvog izvoda je dat u tabeli (3.5.9).



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | − ∞ | -1 |  | 1 | + ∞ |
|  | − | 0 | + | 0 | − |
|  | + |  | + |  | + |
|  | − | 0 | + | 0 | − |
|  |  |  |  |  |  |

Tabela 3.5.9.

To znači da funkcija opada u intervalu , a raste u inter-valu .



6. *Ekstremi funkcije*. Kako je



i za i , to je



,



,



to funkcija za ima lokalni minimum, a za lokalni maksimum. Ordinate ekstrema su:



i ,



pa su tačke ekstrema i .



7. *Prevojne tačke i intervali konveksnosti funkcije.* Kako je za i , to su tačke: , i prevojne tačke (vidi tabelu 3.5.10).



Znak drugog izvoda je dat tabelom 3.5.10.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | − ∞ |  |  | 0 |  |  | + ∞ |
|  | − |  | − | 0 | + |  | + |
|  | + | 0 | − |  | − | 0 | + |
|  | + |  | + |  | + |  | + |
|  | − | PT | + | PT | − | PT | + |
|  |  |  |  | 0 |  |  |  |

Tabela 3.5.10.

To znači da je funkcija strogo konveksna u intervalima: i , a strogo konkavna u intervalima i .



8. *Asimptote funkcije.* Funkcija ima horizontalnu asimptotu , jer je



.



Na osnovu izvršenog ispitivanja može se nacrtati grafik date funkcije, Sl.3.5.11.



Sl. 3.5.11.

**3.5.6. Zadaci za vježbu**

U zadacima od 1 do 4 odrediti intervale monotonosti datih funkcija.

**1.** . **2.** .



**3.** . **4.** .



U zadacima od 5 do 10 odrediti ekstreme date funkcije.

**5.** . **6.** .



**7.** . **8.** .



**9.** . **10.** .



**11.** Silos ima oblik valjka koji se završava poluloptom. Izgradnja jednog kvadratnog metra spoljne površine sfernog dijela silosa dva puta je skuplja nego izgradnja jednog kvadratnog metra spoljne površine cilindričnog dijela. Odrediti poluprečnik silosa date zapremine *V* tako da troškovi njegove izgradnje budu minimalni.

U zadacima 12 do 15 odrediti najmanje i najveće vrijednosti funkcije u datom intervalu.

**12.** , na . **13.** , na .



**14.** , na .



**15.** , na .



U zadacima 16 do 21 odrediti intervale konveksnosti, konkavnosti i prevojne tačke date funkcije.

**16.** . **17.** .



**18.** . **19.** .



**20.** . **21.** .



**22.** Za koje vrijednosti *a* i *b* je tačka prevojna tačka funkcije



.



U zadacima 23 do 30 naći asimptote datih funkcija.

**23.** . **24.** .



**25.** . **26.** .



**27.** . **28.** .



**29.** . **30.** .



Ispitati tok i nacrtati grafik funkcija datih u zadacima 31 do 40.

**31.** . **32.** .



**33.** . **34.** .



**35.** . **36.** .



**37.** . **38.** .



**39.** . **40.** .



**IV G L A V A**

**INTEGRALI**

**1. Neodređeni integral**

**1.1. Pojam neodređenog integrala**

Problemima određivanja izvoda i diferencijala date funkcije bavi se diferencijalni račun. Obrnut problem, tj. problem određi-vanja funkcije čiji je izvod ili diferencijal poznat rješava integralni račun. Zbog toga se integralni račun može shvatiti kao inverzna operacija diferencijalnog računa.



**Definicija 1.1.** *Funkciju* , *definisanu na intervalu I*, *nazivamo primitivnom funkcijom ili prim funkcijom funkcije*  *ili integralom od* , *ako je na tom intervalu*  *izvod funkcije* , *tj*. *ako vrijedi relacija*



(1.1.1) .



Definicija 1.1. se može formulisati tako da se umjesto termina "iz-vod" koristi termin "diferencijal" i tada vrijedi

(1.1.2) .



**Teorema 1.1.** *Neka je*  , *na intervalu I*, *primitivna funkcija funkcije* . *Tada je i funkcija* , *gdje je C proizvoljna konstanta*, *primitivna funkcija funkcije* .



***Dokaz*.** Tvrdnja slijedi na osnovu toga da funkcije i imaju izvod , tj. da vrijedi



.



**Teorema 1.2.** *Neka su i*  *različite primitivne funkcije funkcije na intervalu I*. *Tada je*



(1.1.3) ***R***.



***Dokaz*.** Na osnovu pretpostavke teoreme je

,



odakle slijedi

,



odnosno, vrijedi

.



Izraz , gdje je ***R*** proizvoljna konstanta, predstavlja opšti oblik funkcije koja ima kao izvod funkciju ili diferencijal . Funkciju nazivamo neodređeni integral funkcije i označavamo sa



*C*-proizvoljna konstanta.



Proizvod nazivamo podintegralni izraz, a podintegralna funkcija.



***Primjer* 1.1.1.** Provjeriti da li je .



Kako je , to je prema definiciji neodređenog integrala familija funkcija upravo neodređeni integral funkcije .



**1.2. Neke osobine neodređenog integrala**

Iz definicije neodređenog integrala neposredno slijedi

(1.1.4) ,



(1.1.5) ,



(1.1.6) ,



(1.1.7) .



**1.3. Jednostavnija pravila integriranja**

***Pravilo 1.*** *Neka je* *konstanta*. *Tada vrijedi*



(1.1.8) .



***Dokaz*.** Kako je



to je primitivna funkcija funkcije ,



što je i trebalo dokazati.

***Pravilo2.*** *Ako postoje* , *tada vrijedi*



(1.1.9) .



***Dokaz*.** Tvrdnju ćemo dokazati za zbir od dva sabirka a dokaz za proizvoljan broj sabiraka može se izvesti primjenom matematičke indukcije.

Neka su i primitivne funkcije funkcija i ,



respektivno. Tada je po definiciji primitivne funkcije i neodređenog integrala

,



odnosno



.



***Pravilo 3.*** *Neka je* . Tada je



(1.1.10) .



***Dokaz*.** Kako je

,



odnosno

,



to je

.



Znači, funkcija je primitivna funkcija funkcije . Time je na osnovu definicije neodređenog integrala pravilo dokazano.



**1.4. Tablica osnovnih integrala**

Na osnovu definicije neodređenog integrala i tablice izvoda odnosno diferencijala može se napisati osnovna tablica integrala.

**1.** ; ,



**2.** ,



**3.** ,



**4.** ; ,



**5.** ; ,



**6.** ; ,



**7.** ; ,



**8.** ; ,



**9.** .



Pomoću osnovne tablice i jednostavnijih pravila uradimo nekoliko zadataka.

**1.** Izračunati

.



***Rješenje.*** Na osnovu relacija (1.1.8) i (1.1.9) slijedi jednakost



odakle je prema tablici osnovnih integrala (relacija 1.)

.



**2.** Izračunati .



***Rješenje.*** .



**3.** Izračunati .



***Rješenje.*** Na osnovu pravila 3 (relacija (1.1.10)) integracije slijedi

.



**4.** .



**5.** .



**6.**



.



**7.** .



**8.** .



**9.** .



**10.** .



**1.5. Integracija metodom smjene**

U dosadašnjim primjerima integrala koristili smo samo osnovna pravila i tablice integrala. Takvi slučajevi su veoma rijetki. Podintegralna funkcija je uglavnom složenija funkcija od podintegralnih funkcija datih u tabličnim integralima. Tada se, u nekim slučajevima, uvođenjem smjene nezavisne promjenljive podintegralne funkcije dati integral može svesti na tablični integral.

Neka treba izračunati

(1.1.11) .



Umjesto nezavisne promjenljive *x* uvedimo novu promjenljivu *t* i neka je

(1.1.12)



tada integral (1.1.11) glasi

(1.1.13) .



Ako je integral (1.1.13) takav da se može izračunati, njegov rezultat će biti funkcija promjenljive *t*. Tu promjenljivu treba zamijeniti promjenljivom *x*.

**Teorema 1.2.** *Neka su* *i* *otvoreni intervali u skupu* ***R***. *Neka je* , *neprekidna funkcija na*  *i neka funkcija* , *ima neprekidne izvode na* . *Tada za svako i svako*  *vrijedi*



(1.1.14) .



Tačnost tvrdnje slijedi na osnovu definicije izvoda posredne funkcije i definicije neodređenog integrala.

***Primjeri*:** Integracija metodom smjene:

**1.** Izračunati

.



Uvodimo smjenu , . Tada posmatrani integral glasi:



.



**2.** .



**3.**



.



**4.**



.



**5.**



.



**6.**



.



**1.6. Metoda parcijalne integracije**

Neka su i funkcije od *x* i neka imaju izvode i . Tada je po pravilu diferenciranja proizvoda



,



odakle slijedi



odnosno

.



Iz prethodnih jednakosti integracijom dobijamo

(1.1.15)



odnosno

(1.1.16) .



Relacije (1.1.15) ili (1.1.16) daju pravila parcijalne (djelimične) integracije.

***Primjeri*:** parcijalne integracije

**1.** Neka treba naći . Uzmimo da je



.



Tada je prema relaciji (1.1.15)

.



**2.**



.



**3.** Izračunati

.



Označimo dati integral sa *J* i neka je

, .



Tada je prema relaciji (1.1.15)



.



Ako se za izračunavanje uzme



,



tada slijedi

,



ili

.



Rješavanjem prethodne jednačine po *J* dobijamo

,



ili

.



**4.** Izračunati

(a) .



Označimo dati integral sa , tj. neka je



,



gdje je *n* potencija imenioca. Primjenom metoda parcijalne integracije za

,



,



prema relaciji (1.1.15) dobijamo



(b) .



Zapazimo da je integral



istog oblika kao i integral (a), i označimo ga sa . Tada se relacija (b) može izračunati u obliku



(c) .



Rješavanjem jednačine (c) po je



(1.1.17) .



Na taj način smo dobili formulu, i zove se rekurentna formula, po kojoj je integral izražen preko integrala . Time se potencija imenioca datog integrala umanjuje za jedan. Taj postupak se nastavlja sve dotle dok se posmatrani integral ne svede na tablični integral oblika .



**5.** Izračunati integral

.



Neka je odnosno i , odnosno . Tada je prema relaciji (1.1.15)



,



.



Rješavanjem prethodne jednačine po *J* i vodeći računa o oznaci *J* slijedi

(1.1.18) .



**1.7. Integracija racionalnih funkcija**

Ranije smo dokazali (III, 1.3.1.2) da se svaka prava razlomljena racionalana funkcija može izraziti kao zbir elementarnih razlomaka oblika:

**1.** , **2.**



**3.** , **4.**



gdje su *A*, *M*, *N* konstante, a ***R*** za koje vrijedi: . Na os-novu toga i pravila integracije slijedi da se integracija pravih racionalnih fun-kcija svodi na izračunavanje integrala oblika 1,2,3 i 4. Zbog toga ćemo raz-motriti načine izračunavanja tih integrala.



Integrali oblika 1 i 2 su jednostavniji pa se mogu izračunati direktno prema tabličnim integralima.

(1.1.19) ,



(1.1.20) .



Razmotrimo način izračunavanja integrala funkcije

(1.1.21) , .



U kvadratnom trinomu konstantu označimo sa , tj. . Uvedimo smjenu , . Tada je



.



Vodeći računa da je prethodna jednakost se može izraziti u obliku



(1.1.22)



.



Za izračunavanje integrala funkcije

(1.1.23)



koristimo istu smjenu kao i za integral funkcije (1.1.21) i dobijamo



.



Za izračunavanje prvog integrala na desnoj strani prethodne jednakosti može se koristiti smjena

.



Tada je

,



odnosno

.



Za izračunavanje integrala funkcije koristi se rekurentna formula (1.1.17).



***Primjer* 1.1.3.** Izračunati integral

.



***Rješenje.*** Dati integral izračunajmo prema datom postupku.



.



***Primjer* 1.1.4.** Izračunati integral

.



***Rješenje.*** Kako je



to je na osnovu relacija (1.1.19), (1.1.20) i (1.1.21)



.



**1.8. Integracija nekih iracionalnih funkcija**

U dijelu 1.1.7 smo pokazali da se izračunavanje integrala bilo kojeg racionalnog izraza svodi na izračunavanje integrala elementarnih razlomaka. U ovom dijelu ćemo razmotriti neke smjene promjenljive *x*, , kojim se iracionalna funkcija može svesti na razlomljenu racionalnu funkciju, odnosno na elementarne razlomke.



**1.8.1. Integral funkcija oblika**



Neka treba izračunati

(1.1.24)



gdje su ***R*** proizvoljne konstante, , i *R* razlomljena racio-nalna funkcija po *x* i . Nakon smjene



slijedi

(1.1.25)



Odakle, dalje, slijedi



.



Dakle, smjenom , integral (1.1.24) se svodi na integral razlo-mljene racionalne funkcije.



***Primjer* 1.1.5.** Izračunati

.



***Rješenje.*** Neka je . Tada



.



Na osnovu date smjene vrijedi



.



Kada se u integralu tipa (1.1.24) javlja veći broj korijena izraza , tj. ako je integral oblika



(1.1.26)



tada se uvodi smjena , gdje je *m* najmanji zajednički sadržalac od *r*, ... , *l*. Daljni postupak je potpuno isti kao za integrale oblika (1.1.24).



***Primjer* 1.1.6.** Za integral



koristimo smjenu

.



Tada je



.



**1.8.2. Integral binomnog diferencijala**

Diferencijal oblika

(1.1.27) ,



gdje su *a* i *b* realni brojevi različiti od nule, a *m*,*n* i *p* racionalni brojevi, zovemo binomni diferencijal.

Razmotrimo mogućnost svođenja integrala binomnog diferencijala, tj. integrala

(1.1.28)



na integral razlomljene racionalne funkcije.

**1.** Neka je *p* cijeli broj. Tada se smjenom , gdje je  *r* naj-manji zajednički sadržalac imenitelja racionalnih brojeva *m* i *n*, integral (1.1.28) svodi se na integral racionalne funkcije.



**Primjer 1.1.7.** Neka treba izračunati

.



Tada je

,



pa se dati integral svodi na



.



**2.** Neka je cijeli broj. Tada smjenom , ili ,



integral (1.1.28) ima oblik



,



ili

(1.1.29) ,



gdje je cijeli broj.



Neka je . Tada je funkcija iracionalna funkcija oblika . Tada se smjenom, kako je ranije objašnjeno, integral (1.1.29) svodi na integral racionalne funkcije.



Dakle, ako je u podintegralnoj funkciji (1.1.29) cijeli broj za izračunavanje tog integrala uvodimo smjenu



, *s* -imenilac od *p*.



**Primjer 1.1.8.** Izračunati

.



***Rješenje*.** Dati integral je binomni, gdje je . Kako je ***Z***, možemo uvesti smjenu



.



Tada vrijedi



.



**3.** Integral (1.1.29) se može izraziti u obliku



.



.



Neka je , odnosno cijeli broj. Tada je podintegralna funkcija iracionalna funkcija oblika



,



gdje je *s* imenilac od *p*, koja se može racionalizirati smjenom

(1.1.30) .



**Primjer 1.1.9.** Izračunati .



***Rješenje*.** U ovom zadatku je . Kako je



***Z***



koristimo smjenu

,



odakle je diferencijal

, to je



.



Nakon razlaganja podintegralne funkcije na elementarne razlomke, slijedi



.



Slučajevi 1,2 i 3 su jedini slučajevi kada integral binomnog diferencijala se može elementarno izračunati.

**1.8.3. Integral funkcija oblika**



Neka treba izračunati integral funkcije , gdje je *R* racionalna funkcija po *x* i . Razmotrićemo tri smjene (Eulerove\*) smjene) kojim se funkcija može transfo-rmisati u racionalnu funkciju, odnosno integral



(1.1.31)



u integral racionalne funkcije.

**1.** Neka je u relaciji (1.1.31) . Tada možemo uvesti smjenu



(1.1.32) ,



gdje je *t* nova promjenljiva od *x*. Mi ćemo postupak izračunavanja integrala objasniti sa jednim znakom. Kvadriranjem jednakosti (1.1.32) dobijamo

.



Rješavanjem prethodne jednačine po *x* dobijamo

(1.1.33) .



Ako se vrijednost *x* iz relacije (1.1.33) zamijeni na desnoj strani relacije (1.1.32), dobijamo

(1.1.34) .

\*) L. Euler (1707-1783), švajcarski matematičar.



Diferenciranjem (1.1.33), dobijamo

(1.1.35) .



Ako se umjesto *x*, , njihove vrijednosti date relacijama (1.1.33), (1.1.34) i (1.1.35), respektivno, zamijene u integral (1.1.31) tada se taj integral svodi na integral racionalne funkcije.



**Primjer 1.1.10.** Izračunati

.



***Rješenje*.** Neka je . Tada kvadriranjem te jednakosti dobijamo jednačinu



,



čije je rješenje, po *x*

.



Diferenciranjem prethodnog izraza dobijamo

.



Tada je



.



**2.** Neka je . Uvodimo novu promjenljivu *t* tako da vrijedi



(1.1.36) .



Tada kvadriranjem relacije (1.1.36) dobijamo

,



odnosno



odakle se dobija

(1.1.37) .



Zamjenom vrijednosti *x* (relacija (1.1.37)) na desnoj strani relacije (1.1.36) dobijamo

.



Diferenciranjem relacije (1.1.37) dobijamo

(1.1.38) .



Iz (1.1.36) odnosno (1.1.37) i (1.1.38) integral (1.1.31) se svodi na integral racionalne funkcije i vrijedi



gdje je

.



***Primjer* 1.1.11.** Izračunati

.



***Rješenje*.** Neka je

.



Tada je

,



odakle je

,



.



Na osnovu dobijenih izraza slijedi



.



Kako je

,



to je



.



**3.** Neka su realne i različite nule trinoma . Tada je . Neka je



(1.1.39) ,



gdje je *t* nova funkcija od *x*. Kvadriranjem relacije (1.1.39) dobijamo

,



odnosno

.



Nakon dijeljenja prethodne jednakosti sa , dobijamo jednačinu po *x* oblika



čije je rješenje

,



odakle diferenciranjem dobijamo

.



Smjene date relacijama (1.1.32), (1.1.36) i (1.1.39) su poznate kao *Eulerove smjene*.

**1.9. Integracija nekih trigonometrijskih funkcija**

Neka je data funkcija , gdje je *R* racionalna funkcija od . Tada se izraz može racionalizirati smjenom



(1.1.40) , .



Kako je

(1.1.41) ,



(1.1.42) ,



i iz relacije (1.1.40)

,



odnosno

,



to vrijedi

.



***Primjer* 1.1.12.** Izračunati

.



***Rješenje*.** Neka je

, .



Tada je prema relaciji (1.1.41)



.



Smjena (1.1.40) je univerzalna i koristi se za integraciju funkcija oblika . Često se racionalisanjem dobija dosta složen integral. Nekad postoji mogućnost da se postupak izračunavanja integrala uprosti i u ovom dijelu ćemo razmotriti neke od tih mogućnosti.



**1.** Za ***N***, primjenjujemo metodu parcijalne integracije. Tada je



.



Rješavanjem prethodne jednačine po *J* dobijamo *rekurentnu* formulu

(1.143) .



Istim postupkom dobijamo formulu

(1.1.44) .



Uzastopnim primjenama (1.1.43) odnosno (1.1.44), ako je *n* paran prirodan broj, izračunavanje tih integrala se svodi na izračunavanje

.



Neka je u izrazu *n* neparan prirodan broj, tj. . Tada je



.



Smjenom



se dobija

.



Na isti način se izračunava i .



***Primjer* 1.1.13.** Izračunati .



***Rješenje*.** ,



,



.



Parcijalnom integracijom se mogu za ***N*** i dokazati i sljedeće rekurentne formule:



(1.1.45) ,



(1.1.46) .



Primjera radi dokažimo relaciju (1.1.45). Uzmimo da je ,odnosno, , i . Tada je



,



,



ili

,



odnosno, nakon dijeljenja jednakosti sa slijedi



.



Napomenimo još da se za izračunavanje integrala funkcija oblika

i ,



gdje su *p* i *q* realne konstante, koriste trigonometrijske identičnosti:

(1.1.47)



**1.10. Zadaci za vježbu**

Koristeći jednostavnija pravila integriranja i tabelu osnovnih inte-grala izračunati

**1.** ; **2.** ;



**3.** ; **4.** ;



**5.** ; **6.** ;



**7.** ; **8.** ;



**9.** ; **10.** .



Metodom smjene promjenljivih izračunati:

**11.** ; **12.** ;



**13.** ; **14.** ;



**15.** ; **16.** ;



**17.** ; **18.** .



Metodom parcijalne integracije izračunati:

**19.** ; **20.** ;



**21.** ; **22.** ;



**23.** ; **24.** .



Izračunati integrale:

**25.** ; **26.** ;



**27.** ; **28.** ;



**29.** ; **30.** ;



**31.** ; **32.** ;



**33.** ; **34.** .



Izračunati sljedeće integrale (racionalnih funkcija)

**35.**  ; **36.** ;



**37.** ; **38.** ;



**39.** ; **40.** ;



**41.** ; **42.** .



Izračunati sljedeće integrale (iracionalnih funkcija):

**43.** ; **44.** ;



**45.** ; **46.** ;



**47.** ; **48.** ;



**49.** ; **50.** .



Izračunati integrale:

**51.** ; **52.** ;



**53.** ; **54.** ;



**55.** ; **56.** .



**2. Određeni integral**

**2.1. Reimanov[[2]](#footnote-3) integral**

Neka je funkcija ograničena na segmentu ***R***, i neka su *m* i *M* infimum, odnosno supremum, funkcije *f* na segmentu *I*. Interval podijelimo na proizvoljan način tačkama



, gdje je



(2.1.1) ,



na podintervale

(2.1.2) .



Skup zovemo *subdivizija* intervala *I*. Najveći među brojevima zovemo *dijametar subdivizije* *P* i označavamo sa .



Interval smo podijelili na *n* podintervala i dijametar ove podjele označimo sa . Ako sada svaki podinterval (2.1.2) podijelimo novim tačkama, dobićemo podjelu sa dijametrom . Nastavljajući tako postupak podjele dobićemo niz dijametara , koga ćemo označiti sa .



Za podjelu intervala kažemo da je osnovna ili normalna ako niz dijametara tih podjela teži nuli kada , tj. ako



kada .



Ako je funkcija ograničena na intervalu tada za svako vrijedi



(2.1.3) .



Neka su i infimum i supremum funkcije na inter-valu i neka je proizvoljna tačka intervala . Formirajmo sume



(2.1.4)



(2.1.5)



(2.1.6) .



Kako je



to se množenjem tih nejednačina sa dobija



ili nakon sumiranja po *i*



(2.1.7) .



Iz (2.1.7) prema (2.1.4), (2.1.5) i (2.1.6) slijede nejednakosti

(2.1.8) .



Sume *s* i *S*, definisane sa (2.1.4) i (2.1.5), zovemo donja i gornja *Darbuoxova[[3]](#footnote-4) suma*, respektivno, funkcije *f* na intervalu *I*. Suma μ zove se integralna suma funkcije *f* na intervalu *I*.

Razmotrimo neke osobine Darbouxovih suma.

**Teorema 2.1.1.** *Neka je funkcija* *ograničena na intervalu* . *Tada je donji Darbuoxov zbir monotono rastući a gornji monotono opada-jući*.



***Dokaz*.** Neka je , . Tada tačka dijeli interval na podintervale i . Neka je infimum a supremum funkcije *f* na intervalu , i infimum a supremum funkcije *f* na intervalu . Tada za , vrijedi



(2.1.9)



gdje su infimum a supremum funkcije *f* na intervalu , i vrijedi



,



odnosno



.



Time je teorema dokazana.

Kako su nizovi *s* i *S* monotoni i ograničeni to su oni i konver-gentni, tj. postoji i .



**Teorema 2.1.2.** *Ma koja donja Darbuoxova suma nije veća od bilo koje gornje Darbuoxove sume*.

***Dokaz*.** Interval podijelimo tačkama i neka toj podjeli odgovaraju Darbouxove sume i . Obrazujmo sada bilo koju podjelu tačkama koje ne zavise od prve podjele, intervala . Neka toj podjeli odgovaraju Darbouxove sume i . Treba dokazati da je .



Formirajmo skup i interval podijelimo tačkama . Neka toj podjeli odgovaraju Darbouxove sume i . Prema teoremi 2.1.1 slijedi da je



.



Kako je , vrijedi , što je i trebalo dokazati.



Neka je skup svih donjih i skup svih gornjih Darbouxovih suma za skup datih subdivizija P. Neka je *C* skup svih integralnih suma pri zadanoj subdiviziji *P*, kada se vrijednosti uzimaju na sve moguće načine. Tada je



, ,



što ovom prilikom nećemo dokazivati.

Označimo za funkciju na intervalu sa i sa ili kratko i . Brojevi i su donji i gornji Reimanovi integral funkcije *f* na intervalu , respektivno.



**Definicija 2.1.1.** *Za broj J kažemo da je granična vrijednost integralne sume*

(2.1.10)



*kada niz dijametara* , *ako i samo ako za bilo koji broj* *postoji broj*  *takav da za bilo koju podjelu intervala* *i*  *vrijedi*



*za bilo koji izbor brojeva* .



To se piše

(2.1.11) .



Ako postoji konačna i određena granična vrijednost (2.1.11) tada *J* nazivamo određenim integralom funkcije na intervalu i ozna-čavamo ga sa



.



U tom slučaju za funkciju kažemo da je integrabilna u Reimanovom smislu ili *R-*integrabilna na intervalu . Funkciju nazivamo podintegralna funkcija ili integrand, *x* je integraciona promjenljiva, interval je područje integracije. Granice intervala su međe ili granice integracije i to *a* donja i *b* gornja međa integracije.



**2.2. Uslovi postojanja *R*-integrala**

**Teorema 2.2.1.** *Funkcija* *definisana na intervalu* *je R-integrabilan na tom istom intervalu ako i samo ako vrijedi*



(2.2.1) ,



*gdje su* *S* *i*  *s* *Darbouxove sume.*

***Dokaz*.** Granična vrijednost (2.2.1) se može iskazati na sljedeći na-čin: za svako postoji broj za koji je tako da vrijedi ne-jednakost



(2.2.2) .



Preptostavimo da postoji . Tada za bilo koje postoji broj , za koje vrijedi



, .



Ako umjesto proizvoljno uzmemo one vrijednosti za koje funkcija ima infimum odnosno supremum na tom intervalu, tj.



, , ,



tada je



i vrijede nejednakosti

(2.2.3) .



Iz (2.2.3) slijedi nejedakost ili , odnosno , ili



. Time je dokazan potreban uslov teoreme.



Dokažimo i dovoljan uslov. Neka vrijedi relacija (2.2.1). Tada iz



slijedi i tu vrijednost označimo sa *J*. Znači vrijede nejednakosti



(2.2.4) .



Neka se integralna suma shvati kao jedna od Darbouxovih suma, koje odgovaraju datoj podjeli. Tada vrijede nejednakosti

(2.2.5) .



Na osnovu relacije (2.2.2) za dovoljno malo razlika odnosno dužina intervala je manja nego proizvoljno malo . Tada iz (2.2.4) i (2.2.5) slijedi nejednakost



što znači da je *J* granična vrijednost kada , odnosno da je



.



Time je teorema dokazana.

Neka je , -oscilacije funkcije *f* na intervalu , . Tada je



,



i relacija (2.2.1) se može izraziti u obliku

(2.2.6) .



**2.3. Klase *R*-integrabilnih funkcija**

**Teorema 2.3.1.** *Svaka neprekidna funkcija*  *na intervalu*  *je na tom intervalu i R-integrabilna*.



**Teorema 2.3.2.** *Svaka ograničena funkcija sa konačnim brojem prekida na intervalu*  *je na tom intervalu i R-integrabilna*.



**2.4. Osobine *R*-integrala**

Pri definisanju određenog integrala u Reimanovom smislu podjelu intervala , , izvršili smo slijeva na desno (uslovi (2.1.1)).



Posmatrajmo sada interval i taj interval podijelimo na proizvoljan način tačkama tako da vrijedi



(2.4.1) .



U intervalu izaberimo proizvoljnu tačku i formirajmo sumu



(2.4.2)



gdje je , . Granična vrijednost sume kada maksimalna dužina teži nuli je, po definiciji, integral funkcije na intervalu , tj.



.



Ako interval , , podijelimo tačkama gdje je



i uzmimo istu vrijednost kao i u prethodnom slučaju, pa formirajmo sumu



,



tada će se sume i razlikovati samo u znaku. Na osnovu toga slijedi tvrdnja:



Ako je funkcija integrabilna na intervalu , tada je ona integrabilna i na intervalu i vrijedi



(2.4.3) .



Na osnovu relacije (2.4.3) neposredno slijedi jednakost

(2.4.4) .



**Teorema 2.4.1.** *Neka je funkcija*  *integrabilna na intervalu*  *i neka je* . *Tada je i funkcija* *integrabilna na intervalu i vrijedi*



(2.4.5) .



***Dokaz*.** Neka je . Za funkciju formirajmo sumu na intervalu



.



Tada je

,



ili

.



**Teorema 2.4.2.** *Neka su funkcije* *i*  *R-integrabilne na intervalu* . *Tada je i funkcija*  *integrabilna na tom intervalu i vrije-di*



(2.4.6) .



***Dokaz*.** Za bilo koju podjelu intervala i bilo koji izbor za integralne sume vrijedi relacija



što znači da je integrabilna funkcija i da vrijedi relacija (2.4.6).



**Teorema 2.4.3.** *Neka je funkcija*  *integrabilna na intervalima* , *i* . *tada je*



(2.4.7) .



***Dokaz*.** Pretpostavimo da vrijedi . Kako je po pretpostavci teoreme funkcija integrabilna na intervalima i to prema teoremi 2.2.1 postoje podjele intervala za koje vrijedi



, .



Ako se sume objedine dobićemo

,



tj.

,



što znači da je funkcija integrabilna na intervalu .



Za integralne sume vrijedi

.



Ako se prijeđe na graničnu vrijednost, kada , prethodne jednakosti dobićemo relaciju (2.4.7).



Neka tačka *c* ne pripada intervalu i neka je, na primjer, . Tada je funkcija integrabilna na intervalu kao pod-intervalu intervala i vrijedi



,



ili

.



Na osnovu relacije (2.4.3) i prethodne jednakosti slijedi relacija (2.4.7).

Slično se dokazuje da relacija (2.4.7) vrijedi i u slučaju da je .



**Teorema 2.4.4.** *Neka je funkcija*  *nenegativna na intervalu*  , . *Tada vrijedi*



.



Istinitost tvrdnje slijedi neposredno iz definicije određenog integrala. Svi članovi integralne sume su nenegativni pa je i .



**Teorema 2.4.5.** *Neka su funkcije* *i* *integrabilne na intervalu* , , *i neka je* *za svako*  . *Tada vrijedi*



.



***Dokaz*.** Iz uslova , ili za svako i teoreme 2.4.4 slijedi nejednakost



.



Prema teoremi 2.4.2 slijedi

,



ili

.



**Teorema 2.4.6.** *Neka je funkcija* *R-integrabilna na intervalu* , *i neka je*



*za svako*  .



*Tada vrijedi*

(2.4.8) .



***Dokaz*.** Za funkciju na intervalu relacija (2.1.8) glasi



(2.4.9) .



Ako se prijeđe na graničnu vrijednost kada , prema definiciji *R-*integrala, dobiće se relacija (2.4.8).



**2.5. Teorema o srednjim vrijednostima**

**Teorema 2.5.1.**  *Neka je funkcija*  *R-integrabilna na intervalu* *i neka za svako svako*   *vrijedi* . *Tada vrijedi relacija*



(2.5.1) , .



***Dokaz*.** Za , , dijeljenjem relacije (2.4.8) sa dobijamo nejednakosti



.



Relacija (2.5.1) vrijedi za

.



Time je teorema dokazana.

Neka je funkcija neprekidna na intervalu . Tada postoji tačka takva da vrijedi



(2.1.28) .



Sl. 2.5.1.

To neposredno slijedi iz teorema (III) 3.24 i 2.51.

**2.6. Primjeri *R-*integrala**

U ovom dijelu ćemo posmatrati mogućnost izračunavanja *R-*integra-la po definiciji.

**1.** . Dati integral postoji jer je funkcija neprekidna na intervalu . Interval podijelimo na *n-*jednakih podintegrala, tada je . Neka je , . Tada je integralna suma



.



Dakle,

.



**2.** , . Inteval podijelimo na *n* jednakih dijelova, tada je . Neka je maksimalna vrijednost funkcije na intervalu , dakle . Integralna suma je



,



.



**2.7. Određeni integral kao funkcija gornje međe**

Neka je funkcija integrabilna na intervalu i neka je stalna tačka. Tada je funkcijaintegrabilna na intervalu , za svako . Zbog toga je na intervalu definisana funkcija



koju nazivamo integralom s promjenljivom gornjom međom.

**Teorema 2.7.1.** *Ako je funkcija* *integrabilna na intervalu* , *ta-da je funkcija*



*neprekidna funkcija od x na intervalu* .



***Dokaz*.** Neka argumentu *x* odgovara priraštaj

, , tada je



.



Priraštaj funkcije *F*, koji odgovara priraštaju argumenta *h*, je



ili na osnovu relacije (2.5.2)

(2.7.1) ,



gdje je . Kako je konačan broj to kada . Time je teorema dokazana.



**Teorema 2.7.2.** *Ako je funkcija*  *neprekidna u tački* , *tada je funkcija*



(2.7.2)



*diferencijabilna u toj tački i vrijedi*

.



***Dokaz*.** Iz relacija (2.7.1) slijedi , gdje je i . Ako je funkcija neprekidna u tački *x*, tada za . Zbog toga je



.



Time je teorema dokazana.

**2.8. Osnovna formula integralnog računa**

Teorema 2.7.2 se može interpretirati i na drugi način. Za neprekidnu funkciju na intervalu postoji uvijek primitivna funkcija definisana kao određeni integral funkcije gornje međe. Neka je bilo koja primitivna funkcija funkcije . Tada je prema teoremi 2.1.1



gdje je *C* konstanta koju treba odrediti. Neka je , tada je



,



i



odakle je



i

.



Za je



(2.8.1) .



Relacija (2.8.1) (Newton-Leibnizova formula) označava da je određeni integral funkcije na intervalu jednak razlici bilo koje primitivne funkcije date funkcije za vrijednosti i . Razlika se označava sa , znači



.



Primjeri 1 i 2 određenog integrala po osnovnoj formuli određenog integrala mogu se jednostavno uraditi

1. ,



2. .



**2.9. Integracija metodom smjene kod *R-*integrala**

**Teorema 2.9.1.** *Neka je funkcija*  *neprekidna na intervalu* *i funkcija*  *ima neprekidan izvod na intervalu* . *Tada za* , *vrijedi relacija*



.



***Dokaz*.** Prema osnovnoj formuli diferencijalnog računa je



odnosno



čime je teorema dokazana.

Vidjeli smo da kod neodređenih integrala nakon integracije metodom smjene moramo da vratimo početnu promjenljivu, što kod određenih integrala nije slučaj. Ako vratimo početnu promjenljivu onda u osnovnu formulu integracije uvrštavamo početne granice.

Neka je funkcija injekcija i neka je . Tada iz i dobijamo , i vrijedi



.



***Primjer* 3.** Izračunati .



Smjenom , ili odakle je , pa dati integral ima oblik



.



U ovom slučaju smo zadržali novu promjenljivu, a nove granice smo dobili iz , . Ako se vratimo na promjenljivu *x* imaćemo



.



***Primjer* 4.**



.



**2.10. Parcijalna integracija *R-*integrala**

**Teorema 2.10.1.** *Neka su* *u*  *i v* *diferencijabilne funkcije na intervalu* *i neka na tom intervalu postoje neprekidni izvodi i* . *Tada vrijedi*



(2.10.1) .



***Dokaz*.** Funkcija je primitivna funkcija funkcije , pa je prema osnovnoj teoremi *R-*integrala



, tj.



odakle slijedi (2.10.1).

***Primjer* 5.** .



Na osnovu relacije (2.10.1) je

*e*

1



.



***Primjer* 6.**

0

0

*π*

*π*

*π*

0



.



**2.11. Nepravi integral**

Pri definisanju određemog integrala pretpostavljeno je da je funkcija ograničena na intervalu , gdje su *a* i *b* konačni brojevi. Pojam određenog integrala može se proširiti i na intervale , , kao i za slučaj kada je funkcija neograničena u tački . Ove integrale zovemo nepravi, nesvojstveni, prošireni, generalisani, itd. Ovi nazivi dati su zbog toga što definicija *R-*integrala ne ispunjava novopostavljene uslove.



**2.11.1 Integrali sa beskonačnim granicama**

Neka je funkcija definisana na intervalu i inte-grabilna na intervalu za svako , tj. postoji integral



(2.11.1)



za svako .



Ako postoji , tada pišemo



(2.11.2)



i kažemo da nesvojstveni (nepravi) integral (2.11.1) konvergira.

Slično se definiše i nesvojstveni (nepravi) integral na intervalu sa



(2.11.3)



i nepravi integral na intervalu sa



, ili



(2.11.4) .



Neka je primitivna funkcija funkcije . Tada se nepravi integrali (2.11.2), (2.11.3) i (2.11.4) koji imaju bar jednu beskonačnu grani-cu mogu izraziti u obliku



(2.1.2') ,



(2.1.3') .



(2.1.4')



.



***Primjer* 6.**



.



***Primjer* 7.** .



***Primjer* 8.** , tj. ne postoji jer ne postoji granična vrijednost .



***Primjer* 9.** Posmatrajmo integral

.



Za integral je konvergentan i vrijedi .



Za integral je divergentan i vrijedi .



Za je .



**Teorema 2.11.1.** *Neka je* *i neka funkcije* *i u intervalu*  *ispunjavaju uslove*



1. ,



2. *i* *integrabilne na* , .



*Tada konvergencija*

(2.11.5)



*implicira konvergenciju integrala*

(2.11.6)



*i divergencija integrala* (2.11.6) *implicira divergenciju integrala* (2.11.5).

***Dokaz*.** Funkcija je rastuća, što se može jed-nostavno provjeriti, pa je na osnovu teoreme (2.4.5)



,



što znači da konvergencija integrala (2.11.6) implicira konvergenciju integra-la (2.11.5). Drugi dio teoreme se slično dokazuje.

**2.11.2. Integral neograničene funkcije**

Neka je funkcija ograničena na intervalu , tada pos-toji



(2.11.7)



za proizvoljno malo i neka je funkcija neograničena na intervalu . Ako postoji konačna i određena granična vrijednost



,



tada se piše



i kažemo da integral (2.11.7) konvergira ili postoji. Ako limes (2.11.7) ne po-stoji tada za tačku *b* kažemo da je singularna tačka.

Neka je funkcija ograničena na intervalu i nije ogra-ničena na intervalu , gdje je . Tada se definiše



ako integral na desnoj strani prethodne jednakosti postoji.

Ako je funkcija ograničena na intervalu a neograničena na intervalima i tada integral funkcije definiše sa



(2.11.8)



ako postoji granična vrijednost u relaciji (2.11.8).

Ako je tada se relacija (2.11.8) može napisati u obliku



(2.11.9) .



Neka je funkcija ograničena u intervalima i a nije ograničena u intervalu , gdje je i proizvoljno mali brojevi. Tada se definiše



(2.11.10)



pod uslovom da granične vrijednosti postoje.

***Primjer* 10.** Izračunati .



***Rješenje*.** Primitivna funkcija funkcije je . Funkcija je neograničena u intervalu , gdje je proizvoljno mali broj. Znači



.



***Primjer* 11.** . Funkcija je neograničena u intervalu . Primitivna funkcija date funkcije je .



što znači da je dati integral divergentan.

***Primjer* 12.** . Funkcija je neograničena u intervalu . Primitivna funkcija je .



.



**2.12. Neke primjene *R-*integrala**

**2.12.1. Izračunavanje površina**

Neka je funkcija nenegativna i ograničena na intervalu . Tada skup tačaka *Q* ravni Descartesovog koordinatnog sistema za koje je



nazivamo krivolinijski trapez (Sl.2.12.1)

Sl.2.12.2

Sl.2.12.1

*C*

*D*

2

*i-*1

(*i-*1)'

*i*

2'

1

*B*

*A*

*x*0=*a* *x*1 *x*2 ... *xi-*1 *xi* ... *xn-*1 *b=xn*



To drugim riječima znači da je krivolinijski trapez *Q* dio ravni Dekar-tovog koordinatnog sistema koji je ograničen intervalom ose , ordinatama i grafikom funkcije za .



Za izračunavanje mjernog broja površine krivolinijskog trapeza *Q*, , može se iskoristiti integral u Rimanovom smislu.



Neka je *P* proizvoljna podjela intervala , sl.2.12.2. Podjela *P* dijeli interval *I* na podintervale dužine , gdje je . Neka je na intervalu minimum, odnosno maksi-mum funkcije , odnosno . Dakle, podjela *P* intervala odgovara podjeli krivolinijskog trapeza *Q* na , , trapeza čije su osnovice . Neka je , odnosno , mjerni broj površine upisanog odnosno opisanog pravougaonika u krivolinijski tra-pez , . Pravougaonici i imaju iste osnovice , pa je



, .



Tada je suma mjernih brojeva svih upisanih, odnosno opisanih, pravougaoni-ka

,



,



gdje su i Darbuovi zbirovu funkcije za datu podjelu *P* intervala . Tada je



.



Ako je funkcija integrabilna na intervalu , tada je za osnovnu podjelu intervala (vidjeti Teoremu 2.1.9)



,



odnosno

(2.12.1) .



Ako je funkcija nepozitivna na intervalu , tada je



(2.12.2)



što nije teško provjeriti.

Ako je krivolinijski trapez (slika 2.12.1) ograničen odozdo i odozgo funkcijama i respektivno, na intervalu tada je



*B*

*A*

*D*

*C*

*a b*



Sl. 2.12.3.

U relaciji (2.12.1) data je formula za izračunavanje mjernog broja površine kada se integriranje vrši po promjenljivoj *x*. Može se desiti da je jednostavni-je integraliti po promjenljivoj *y* i tada vrijedi

,



ili

.



***Primjer* 13.** Izračunati mjerni broj površine *Q* ograničene grafikom funkcije , *x-*osom, i . Integriranje vršiti po promjenljivoj *x*.



***Rješenje*.**

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Sl. 2.12.4.

***Primjer* 14.** Izračunati mjerni broj površine koju obrazuju grafici funkcija , . Integriranje vršiti po promjenljivoj *x*.



***Rješenje*.** Grafici datih funkcija i njihove zajedničke tačke su date na Sl.2.12.5.

|  |  |
| --- | --- |
| *y*2=2*x*  *O*  *A*  *x*2=2*y*  Sl. 2.12.5. | Zajedničke tačke, koje su rješenje sis-tema jednačina    su: i .  . |

Formula (2.12.1) se može primjeniti i u slučaju da je površina ogra-ničena grafikom funkcije date u parametarskom obliku.

Neka je , i . Tada je , pa je



(2.12.3) .



***Primjer* 15.** Izračunati mjerni broj površine omeđene sa

, .



***Rješenje*.** Grafik date funkcije je kružnica poluprečnika *r*, čiji je centar tačka . Neka je mjerni broj dijela površine kružnice koji se nalazi u prvom kvadrantu koordinatnog sistema. Tada je



.



**2.12.2. Izračunavanje zapremine tijela**

Neka je u trodimenzionalnom prostoru sa Dekartovim koordinatama zadano geometrijsko tijelo *V*. Presijecanjem ovog tijela ravninama koje su ortogonalne na osu dobićemo paralelne presjeke, tj. paralelne površi (Sl.2.12.6)



Sl. 2.12.6.

Mjerni brojevi površina tih presjeka je funkcija argumenta *x*, označimo je sa , ili sa . Neka su i jednačine ravni između kojih se nalazi tijelo *V*, s tim da , i tijelo *V* imaju zajedničkih tačaka.



Interval podijelimo tačkama



na proizvoljan način. Neka je proizvoljna tačka iz intervala , . Tada je



mjerni broj zapremine cilindra čija je osnovica i visina , koga zovemo elementarni cilindar. Zbir svih mjernih brojeva zapremina elementar-nih cilindara za datu podjelu intervala i izbor tačke je



,



što predstavlja integralnu sumu funkcije za datu podjelu i izbor tačke . Neka tako da data podjela bude osnovna, tada se sa defi-niše mjerni broj zapremine tijela *V*, ako taj limes postoji. Dakle



.



Neka je tijelo *V* nastalo rotacijom površi ograničene grafikom funkci-je na intervalu , , i *x-*osom oko *x-*ose za pun ugao. Tada je površina kružnica poluprečnika , čiji je mje-rni broj površine , pa će relacija (2.12.3) glasiti



(2.12.4) .



***Primjer* 16.**  Napisati formulu za izračunavanje zapremine lopte.

***Rješenje*.** Lopta poluprečnika *r* može se dobiti rotacijom kružnog luka , , oko *x-*ose za pun ugao. tada je prema (2.12.4)



.



***Primjer* 17.** Izračunati zapreminu tijela koja nastaje rotacijom površi ograni-čene sa , za pun ugao oko *x-*ose.



|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Rješenje*.**  . |

Sl.2.12.7.

**2.12.3. Izračunavanje površine rotacionog tijela**

Neka je funkcija neprekidna na intervalu . Ako se grafik te funkcije rotira za pun ugao oko *x-*ose, tada će on opisati neku površ *P*. Razmotrimo mogućnost izračunavanja mjernog broja površine te površi, .



Interval podijelimo tačkama



.



Neka su tačke grafa funkcije koje odgovaraju tačkama , respektivno (Sl.2.12.8).



Sl.2.12.8.

Pri rotaciji poligonalne linije oko *x-*ose



za pun ugao nastaje površ sastavljena od omotača zarubljenih kupa. Mjerni

broj površine površi koju opisuje duž neka je . Tada je



.



Formirajmo sumu

Na osnovu Lagranžove teoreme i relacije ( ) vrijedi



,



na osnovu čega se prethodna jednakost može napisati u obliku

,



, ili



Prva suma prethodne jednakosti predstavlja integralnu sumu funkcije



za datu podjelu na intervalu . Može se dokazati da druga suma teži nuli kada , pa je



.



**2.13. Zadaci za vježbu**

**1.** Po definiciji *R-*integrala naći:

a) , b) .



**2.** Primjenom Njutn-Lajbnicove formule izračunati:

a) , b) , c) ,



d) , e) , f) .



**3.** Metodom smjene promjenljivih izračunati:

a) , b) ,



c) , d) ,



e) , f) .



**4.** Metodom parcijalne integracije izračunati:

a) , b) ,



c) , d) .



**5.** Izračunati površinu figura ograničenih linijama:

a) .



b) .



c) .



**6.** Izračunati:

a) , b) ,



c) , d) ,



**V GLAVA**

**FUNKCIJE VIŠE PROMJENLJIVIH**

**1. Diferencijalni račun funkcije više promjenljivih**

**1.1. Osnovni pojmovi funkcija više promjenljivih**

Za veličinu *u* se kaže da je funkcija od ako svakom skupu vrijednosti iz određenog skupa po nekom zakonu *f*, odgovara samo jedna vrijednost . To se označava sa



(1.1)



i čita "*u* je funkcija od ". Vrijednosti su neza-visne promjenjive ili argumenti ili varijable funkcije *u*. Za funkciju *u* kaže-mo da je funkcija od *n* promjenjivih ili varijabli.



Ako svakoj tački nekog skupa tačaka *D* odgovara po propisu *f* neka vrijednost *u*, tada kažemo da je funkcija *u* zadana na skupu *D*. Skup *D* nazivamo oblast definisanosti ili domena funkcije *f* i ubuduće ćemo je označavati sa . Skup svih vrijednosti *u* je kodome-na, , funkcije *f*.



Zbog jednostavnosti izlaganja teorije o funkcijama sa *n*-nezavisnih promjenjivih mi ćemo ubuduće posmatrati uglavnom funkcije sa dvije nezavisne promjenjive, tj. funkciju



koju ćemo označiti sa

(1.2) ,



gdje zamjenjujem sa *x*, a sa *y*.



Funkcija , ako se radi o realnoj funkciji realnih pro-mjenljivih, za domenu ima skup uređenih parova čiji su ele- menti realni brojevi. Skup je skup svih pridruženih vrijednosti , gdje je .



***Primjer*** **1.1.** Odrediti domenu i kodomenu funkcije

.



***Rješenje*.** Pošto je *z* realna funkcija realnih promjenjivih *x* i *y* to je funkcija definisana za , odnosno .



|  |  |
| --- | --- |
| Sl. 1.1. | Znači domena funkcije je skup svih tačaka (*x*,*y*) za koje je . Ta oblast je krug sa centrom u koor- dinatnom početku i poluprečnika je- dan. Kodomena funkcije je skup  . |

***Primjer* 1.2.** Odrediti domenu funkcije

.



**Rješenje.** U ovom slučaju domenu određujemo iz uslova

.



|  |  |
| --- | --- |
| Sl. 1.2. | Znači domena date funkcije je skup svih tačaka iz prvog kvadranta Eukli-dove ravni uključujući i *x-*osu za i *y-*osu za i bez tačaka . |

***Primjer* 1.3.** Odrediti domenu funkcije

.



***Rješenje*.** Iz , odnosno , dobijamo oblast definisanosti koja je predstavljena u Euklidovoj ravni (Sl.1.3.).



Sl. 1.3.

Ranije smo razmatrali interval skupa realnih brojeva (I). Naime, skup



se naziva interval. To je na brojnoj pravoj skup svih tačaka između tačaka *a* i *b*, ne uključujući i tačke *a* i *b*. Ovaj interval nazivamo i jednodimenzionalni interval.

Dvodimenzionalni interval ili dvodimenzionalna oblast se definiše sa

(1.3)



i to je u Euklidovoj ravni skup svih tačaka u unutrašnjosti pravougaonika čije stranice imaju jednačine

(1.4) .



Interval definisan relacijom (1.3) nazivamo otvoreni. Ako zamijenimo sa tada za interval kažemo da je zatvoren. Stranice pravougaonika (1.3) nazivamo međe intervala .



Dvodimenzionalna oblast se može definisati i na druge načine. Naprimjer, oblast može biti i skup svih tačaka takav da vrijedi



(1.5) (ili )



i predstavlja skup svih unutrašnjih tačaka kružnice sa centrom i polu- prečnika *r*.



Nejednakost (1.5) nazivamo i okolina tačake . Ako je proizvoljno mala veličina koju označavamo sa , tada je , okolina tačke , skup svih tačaka za koje vrijedi



.



Neka su i opšti članovi nizova, tada se naziva opšti član dvodimenzionalnog niza ili niza tačaka dvodimenzionalnog prostora. Osobine nizova prenose se na osobine nizova tačaka u .



Tako, naprimjer, niz tačaka ima graničnu vrijednost u tački ako vrijedi



gdje je rastojanje tačke od tačke *A*, što se piše



ili kada .



Tačka težiće tački ako je



i za svako



i tada je

.



**1.2. Granična vrijednost funkcije**

**Definicija 1.1.** *Za funkciju* *definisanu u okolini tačke* *kažemo da teži ili konvergira graničnoj vrijednosti l* *kada* *na proizvoljan način*, *teži tački* *ako za svako* *postoji broj* *takav da vrijedi*



*za svako* ,



*što se piše*

(1.6) ili kada , .



U relaciji (1.6) pretpostavljamo da *x* i *y* teže istovremeno svojim graničnim vrijednostima. Ako *x* i *y* uzastopno teže svojim graničnim vri-jednostima tada govorimo o uzastopnom ili iteriranim graničnim vrijed-nostima ili limesima. Jasno je da prvo može *y* težiti *b* a potom *x* ka *a* i obrnuto, i ti uzastopni limesi se označavaju sa

(1.7) i ,



respektivno.

Pojam granične vrijednosti funkcije u tački , date u definiciji 11, može se dati i na sljedeći način.



Neka je funkcija definisana u okolini tačke i neka je , niz uređenih dvojki nezavisno promjenjivih *x* i *y* u oblasti i neka je



i .



Nizu odgovaraće niz vrijednosti funkcije , , tj. niz



(1.8) .



Neka je niz (1.8) konvergentan i neka je

,



za *svaki* par uređenih nizova za koji je



tj. ako je

.



Tada se kaže da funkcija ima graničnu vrijednost *l* u tački .



***Primjer* 1.4.** Pokazati da ne postoji i naći uzastopne limese.



***Rješenje*.** Posmatrajmo nizove i koji teže tački (0,0) kada . Tada je



,



tj.

.



To znači da ne postoji granična vrijednost izraza .



Uzastopni limesi su:



.



***Primjer* 1.5.** Funkcija



ima uzastopne granične vrijednosti kada .



,



.



Znači, funkcija ima jednake uzastopne granične vrijednosti u tački (0,0). Ako se uzmu nizovi i koji teže tački (0,0) tada se može provjeriti da ne postoji granična vrijednost u tački (0,0).



**1.3. Neprekidnost funkcije**

**Definicija 1.2.** *Za funkciju* *definisanu u oblasti* *kažemo da je neprekidna u tački* *ako je*



(1.9) .



Ako nije zadovoljena jednakost u relaciji (1.9) za funkciju kaže-mo da je u tački prekidna ili da je tačka tačka prekida funkcije .



Ako u relaciji (1.9) *x* i *y* zamijenimo sa , , tada je



i



(1.10)



Ako priraštaj funkcije , koji odgovara priraštaju argumenata *x* i *y* za *h* i *k*, respektivno, označimo sa tada se relacija (1.10) može izraziti u obliku



(1.11) .



Kao kod funkcija sa jednom promjenjivom i ovdje vrijede tvrdnje:

1. Algebarski zbir konačnog broja neprekidnih funkcija na oblasti je neprekidna funkcija u toj oblasti.



2. Proizvod konačnog broja neprekidnih funkcija u oblasti je nep-rekidna funkcija u toj oblasti.



3. Količnik dvije neprekidne funkcije u oblasti , pod uslovom da je imenilac različit od nule, je neprekidna funkcija u toj oblasti.



***Primjer* 6.** Funkcija



je neprekidna u tački (0,0), jer je

.



***Primjer* 7.** Funkcija



je prekidna na pravoj , jer na toj pravoj nije definisana.



**1.4. Parcijalni izvodi**

**1.4.1. Definicija parcijalnog izvoda**

Neka je funkcija definisana i neprekidna u oblasti . Tada su izrazi



,



odnosno

,



relativni priraštaji funkcije *z* po *x* odnosno *y*, respektivno, u tački .



Neka je (konstanta). Tada je funkcija



funkcija jedne promjenjive, *x*. Prema definiciji prvog izvoda je

(1.12) , .



Izvod (1.12) nazivamo prvi parcijalni izvod funkcije po *x* i označavamo sa



što se čita:"ef prim od *x*, *y* po *x*", "delta ef od *x*, *y* po delta *x*", "delta *z* po delta *x*".

Prema prethodnom je

(1.13) ,



Na isti način, smatrajući definišemo i parcijalne izvode date funkcije po promjenjivoj *y*. Tada je



(1.14) , .



***Primjer* 1.8.** Naći parcijalne izvode funkcije

.



***Rješenje*.** Pretpostavimo da je *y* konstantno. Tada je

.



Ako pretpostavimo da je *x* konstanta, tada je

.



***Primjer* 1.9.** Parcijalni izvodi funkcije su:



;



.



**1.4.2. Geometrijsko značenje parcijalnih izvoda**

Funkcija je jednačina površi u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu (Sl.1.4)



Sl. 1.4.

Pri definisanju parcijalnog izvoda pretpostavili smo da je *y* constanta, i neka je . U trodimenzionalnom Dekartovom koordinat-nom sistemu funkcija je jednačine ravni paralelne koordinatnoj ravni . Presjek površi datih sa i je kriva, označimo je sa . Tangenta krive u tački neka sa pozitivnim smjerom *x*-ose obrazuje ugao . Tada je prema geometrijskom značenju izvoda fun-kcije sa jednom promjenjivom .



Na isti način slijedi da je , gdje je ugao koga obrazuju tangenta , krive (date sa , ) u tački sa pozitivnim smjerom ose .



***Primjer* 1.10.** Neka je data funkcija i tačka sa površi čija je jednačina data funkcija. Izračunati uglove koje obrazuju tangente date površi u datoj tački koje su paralelne ravninama i .



***Rješenje*.** Kako je ; , to je



; ,



što znači, na osnovu prethodnog objašnjenja, da je

odnosno ; , odnosno .



**1.4.3. Pojam diferencijabilnosti funkcije**

**Definicija 1.3.** *Za funkciju* *definisanu u oblasti* *kažemo da je diferencijabilna u tački* *ako se njen priraštaj u toj tački može izraziti u obliku*



(1.15) ,



*gdje su* *i* *konstantni brojevi a* *beskonačno male funkcije* *kada*  *teže nuli i jednake nuli ako je* .



Razmotrimo funkciju



koja je beskonačno mala kada , a jednaka nuli ako i samo ako je .



Za je



;



što znači da je



,



gdje znači da, veličina kada , je beskonačno mala funkcija višeg reda od . Na osnovu toga slijedi da se us-lov (1.15) može izraziti u obliku



(1.16) .



Da bismo dokazali da su uslovi (1.15) i (1.16) ekvivalentni dokažimo da iz uslova (1.16) slijedi uslov (1.15).

Izrazimo u obliku



.



Neka je ; . Tada je



,



gdje kada .



**Teorema 1.1.** *Neka je funkcija* *diferencijabilna u tački* . *Tada u toj tački postoje parcijalni izvodi* .



***Dokaz*.** Po pretpostavci teoreme funkcija je diferencija-bilna u tački i tada vrijedi relacija (1.15). Iz te relacije za parci-jalni priraštaj vrijedi jednakost



(1.17)



gdje je konstanta, a kada . Dijeljenjem jednakosti (1.17) sa dobijamo



,



odnosno

.



Na isti način dokazujemo jednakost

.



Na osnovu teoreme 1.1 neposredno slijedi da se relacija (1.16), za diferenci-jabilnu funkciju u tački može izraziti u obliku



(1.18) , ili



(1.19) .



**Teorema 2.** *Neka funkcija* *ima parcijalne izvode po* *x i* *po* *y u okolini tačke* *i neka su ti izvodi neprekidni u toj tački*. *Tada je* *funkcija* *diferencijabilna u tački* .



**1.4.4. Parcijalni izvodi složene funkcije**

U ovom dijelu razmatraćemo parcijalne izvode funkcije gdje je , , ili i .



**Teorema 1.3.** *Neka funkcija* *ima neprekidne parcijalne izvode* *u oblasti* . *Neka funkcije x i y*, *promjenjive t*, , *i* *imaju izvode* . *Tada vrijedi*



(1.20) .



***Dokaz*.** Izrazimo priraštaj funkcije u obliku (1.19)



,



gdje kada . Podijelimo prethodnu jednakost sa



(1.21) .



Neka . Tada i s obzirom da su *x* i *y* neprekidne funkcije od *t*. Budući da i , to



, .



Ako u relaciji (1.21) , vodeći računa da je



, ,



dobićemo

.



Time je teorema dokazana.

***Primjer* 1.11.**  Za funkciju , gdje je , je



,



,



, .



Znači

.



Neka je funkcija diferencijabilna funkcija po *u* i *v* i neka su funkcije diferencijabilne funkcije po *x* i *y*.



Ako u funkcijama i shvatimo *y* kao konstantu, ta-da će složena funkcija biti funkcija samo promjenjive *x* preko *u* i *v* i vrijedi



(1.22) , , .



Na isti način se zaključuje, ako se shvati da je *x* konstanta, da je

(1.23) .



***Primjer* 1.12.** Naći parcijalne izvode funkcije

, , .



***Rješenje*.** Kako je

, , ,



, , ,



to je prema relaciji (1.22), vodeći računa o vrijednostima *u* i *v*, dobijamo



,



odnosno prema relaciji (1.23) slijedi



.



**Teorema 1.4.** *Neka je funkcija* *definisana u oblasti* *i homogena stepena homogenosti* *p i diferencijabilna u oblasti* . *Ta-da* *za svako* *vrijedi*



.



***Dokaz*.** Prije nego počnemo dokaz teoreme napomenimo da je funk-cija homogena u oblasti *D* sa stepenom homogenosti *p* ako je za svaku tačku i za bilo koje



.



Neka je proizvoljna tačka oblasti *D*. Složena funkcija gdje je , odnosno funkcija za ima izvod po *t*



(1.24) .



Iz



slijedi

,



i za je



(1.25) .



Iz (1.24) i (1.25) slijedi

.



**1.4.5. Parcijalni izvodi višeg reda**

Neka je data funkcija koja ima parcijalne izvode



i



koje nazivamo prvim parcijalnim izvodima. Prvi parcijalni izvodi su u op-štem slučaju funkcije od *x* i *y* i oni mogu imati svoje prve parcijalne izvode, za koje kažemo da su drugi parcijalni izvodi, i označavamo ih sa:



.



Izvode i nazivamo drugi mješoviti izvodi.



**Teorema 1.5.** *Neka funkcija* *definisana* *na intervalu* *ima* *parcijalne izvode prvog reda i neprekidne izvode* *i* *u* *posmatranom intervalu*. *Tada vrijedi*



.



***Dokaz*.** Priraštaju *h* argumenta *x* funkcije odgovara priraštaj



(1.25) .



Priraštaju *k* argumenta *y* funkcije date u prethodnoj jednakosti, od-govara priraštaj



(1.26)



.



Posmatrajmo iste priraštaje argumenata *x* i *y* ali obrnutim redoslijedom, u odnosu na prethodni slučaj. Tada je

(1.26')



ili

(1.27) .



Desne strane jednakosti (1.26) i (1.27) su jednake,što znači da su jednake i lijeve strane jednakosti. Znači vrijedi jednakost

(1.28) .



Funkcije i ispunjavaju uslove Lagranžove teoreme na intervalima i , respektivno, i vrijede jednakosti:



.



Iz prethodnih jednakosti i relacije (1.28) slijedi jednakost

,



ili prema relacijama (1.25) i (1.26') dobijamo

ili



Primjenom Lagranžove formule na lijevu i na desnu stranu prethodne jedna-kosti dobijamo

.



Dijeljenjem ove jednakosti sa i kada pustimo da dobija-mo



,



time je teorema dokazana.

Drugi parcijalni izvodi funkcije su u opštem slučaju, ta-kođe, funkcije od *x* i *y* koji mogu imati svoje prve parcijalne izvode po *x* i *y*. Svaka funkcija koja je parcijalni izvod drugog reda funkcije ima po dva parcijalna izvoda, i označavamo ih sa:



,



,



, itd.



Slično se definišu i parcijalni izvodi *n*-tog reda.

Parcijalni izvodi *n*-tog reda su prvi parcijalni izvodi parcijalnih izvoda reda . Naprimjer



je parcijalni izvod reda *n* funkcije dobijen diferenciranjem *k* puta po *x* a zatim puta po *y*.



***Primjer* 1.13.** Za funkciju naći druge parcijalne izvode



***Rješenje*.** Prvi parcijalni izvodi su:

,



to je



.



**1.4.6. Totalni diferencijali. Izvod implicitne funkcije**

Parcijalne diferencijale diferencijabilne funkcije defini-šemo kao proizvod parcijalnih izvoda i odgovarajućih priraštaja i obilježa-vamo ih sa



, ,



ili

, .



Neka je funkcija diferencijabilna u oblasti . Tada u okolini tačke vrijedi relacija (relacija 1.18)



gdje kada . Izraz



nazivamo totalni diferencijal funkcije i označavamo sa



(1.29) .



Neka je . Tada je i relacija (1.29) glasi



.



Analogno iz funkcije dobijamo



.



Na osnovu toga slijedi da totalni diferencijal (1.29) možemo izraziti u obliku

(1.30) .



Posmatrajmo funkciju, datu u implicitnom obliku . Ako je funkcija diferencijabilna u oblasti i , tada je njen totalni diferencijal , odakle je



;



i to je izvod implicitne funkcije .



Totalni diferencijal (1.30) nazivamo prvi totalni diferencijal ili diferencijal prvog reda funkcije .



Prvi totalni diferencijal funkcije je u opštem slučaju funkcija od *x* i *y* i od diferencijala i . Ako je ovaj diferencijal dife-rencijabilan onda on ima svoj prvi totalni diferencijal



i nazivamo ga drugi totalni diferencijal ili diferencijal drugog reda funkcije .



Prema pravilima diferenciranja, vodeći računa da su i kon-stante, vrijedi



.



Ako je , tada je



što se zapisuje u obliku

.



Treći totalni diferencijal funkcije definišemo kao prvi totalni diferencijal drugog totalnog diferencijala i tada je



što se skraćeno zapisuje u obliku

.



Diferencijal *n*-tog reda u predhodnim oznakama je

.



***Primjer* 1.14.** Naći prvi totalni diferencijal funkcije .



***Rješenje*.** Kako je:

,



,



to je .



***Primjer* 1.15.** Drugi totalni diferencijal funkcije (vidjeti primjer 1.13) je



.



**2. Taylorova formula. Ekstremi**

**2.1. Taylorova formula**

Ranije smo pokazali (III) kako se Taylorova formula primjenjuje za funkciju sa jednom nezavisnom promjenjivom. Sada ćemo pokazati da se formula može primijeniti i na funkciju sa dvije nezavisne promjenjive.

**Teorema 1.6.** *Neka je funkcija* *neprekidna i ima neprekidne* *parcijalne izvode do reda* *u tački* . *Neka je tačka* . *Tada vrijedi Taylorova formula*



(1.31)



gdje je *n*-ti ostatak u Lagrangeovom obliku dat sa



.



***Dokaz*.** Neka su *h* i *k* konstante za koje je . Tada sve tačke za pripadaju duži čije su krajnje tačke i i one pripadaju -okolini tačke



. Formirajmo funkciju



(1.32)



koja je definisana na intervalu . Funkcija ima neprekidne izvo-



de do reda na intervalu i može se za nju primjeniti Tejlorova formula sa ostatkom reda *n* u Lagrangeovom obliku u okolini tačke , i glasi



(1.33)



gdje je . Iz relacije (1.32), na osnovu definicije složene funkcije, sli-jedi



(1.34) ,



(1.35) , .



Za , ako se *t* zamijeni sa , vrijedi jednakost



(1.36) .



Iz relacije (1.32) slijedi ; što znači da je



(1.37) .



Ako se u relaciji (1.33) *t* zamijeni sa 1, tada je

.



Iz ove relacije, s obzirom na relacije (1.37), (1.35), i (1.36), slijedi



.



Dobijena jednakost je jednakost data relacijom (1.31).

**2.2. Ekstremi funkcije**

**Definicija 1.3.** *Neka je funkcija* *definisana u oblasti* . *Tačku* *nazivamo lokalni maksimum*, *lokalni minimum*, *ako postoji takva okolina* *U* *tačke* *za koju vrijedi*: *za svako*



*je* ,



*ili* .



Tačke lokalnog minimuma i maksimuma su lokalni ekstremi.

**Teorema 1.6.** *Neka funkcija* *ima lokalni ekstrem u tački* . *Ako postoje* *i* *tada je*



; .



***Dokaz*.** Ako funkcija ima ekstrem u tački ta-da je ekstrem funkcije promjenjive *x*. Tada je



.



Slično se zaključuje da je .



Tačke za koje je su stacionarne tačke fun-kcije i one se dobijaju rješavanjem sistema jednačina



.



Iz definicije totalnog diferencijala i teoreme 1.6 neposredno slijedi da je u tački ekstrema funkcije



.



***Primjer* 2.1.** Za funkciju je



.



Stacionarna tačka je (0,0) i . Kako je za svako ili to je prema definiciji 1.3 tačka (0,0) minimum date funkcije.



***Primjer* 2.2.** Funkcija ima prvi totalni diferencijal



i jednak je nuli za . Vrijedi i . Za i je , a za i je . Znači, tačka (0,0) nije ekstrem funkcije .



Neka je funkcija definisana na otvorenoj oblasti i neka ona na toj oblasti ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda. Da li funkcija ima ekstreme u tački zavisi, prema defi-niciji 1.3, od toga mijenjali priraštaj funkcije u okolini te tačke znak ili ne.



Ako funkcija ima ekstrem u tački tada se pre-ma teoremi 1.6 Tejlorova formula sa ostatkom reda 2 može napisati u obliku



odnosno

(1.38) .



Neka je

(1.39) ; ; .



Može se zapaziti da je ponašanje priraštaja u dovoljno maloj okolini tačke određeno osobinama kvadratnog trinoma



koji se za može izraziti u obliku



(1.40) .



Za funkciju (1.40) vrijedi

1. Ako je , tada je, za svako , ako je , a ako je .



2. Ako je tada može imati različite znakove za različite vrijednosti *h* i *k*.



3. može biti nula i za neke vrijednosti a za preostale vrijednosti ima isti znak.



**Teorema 1.7.** *Neka funkcija* *na otvorenoj oblasti* *ima druge parcijalne izvode na* . *Ako je*



; ;



; ; ,



*tada vrijedi*:

1. *ako je* *funkcija*  *ima ekstrem u tački* *i to maksimum ako je* , *a minimum ako je* ,



2. *ako je* *funkcija nema ekstrema u tački* .



***Primjer* 2.3.** Naći ekstreme funkcije .



***Rješenje*.** Moguće tačke ekstrema date funkcije su rješenja sistema jednačina

, .



Rješenja sistema jednačina su

.



Znači, stacionarne tačke funkcije su (0,0); (0,1); (1,0); .



Drugi parcijalni izvodi su

; ; .



Razmotrimo znak izraza u tački (0,0).



.



To znači da stacionarna tačka (0,0) nije ekstrem date funkcije.

U tački je , , , što znači da je



odnosno da je stacionarna tačka tačka ekstrema date funkcije. Kako je to funkcija ima minimum i vrijednost minimuma je .



Za ostale stacionarne tačke se postojanje ekstrema provjerava na isti način.

**2.3. Vezani ekstremi**

Neka je funkcija definisana u oblasti , gdje su nezavisne promjenjive vezane relacijom . Funkcija je tada funkcija jedne nezavisne promjenjive. Neka se iz napri-mjer, može izraziti promjenjiva *y* kao funkcija od *x* i neka je . Tada je



.



Prema tome problem određivanja ekstrema svodi se na problem određivanja ekstrema funkcije sa jednom promjenjivom.

Ekstrem funkcije pod uslovom da je nazi-vamo vezani ili uslovni ekstreme date funkcije.



Ako se iz ne može izraziti *y* kao funkcija od *x*,tada znajući da je *y* funkcija od *x* možemo smatrati da je složena funkcija od *x*. Neka je tačka tačka uslovnog ekstrema funkcije



(1.41)



uz uslov

(1.42) .



Tada je



a iz relacije (1.42) je



odnosno

(1.43) ,



(1.44) .



Ako (1.44) pomnožimo sa , gdje je nepoznat broj, i dodamo rela-ciji (1.43) dobićemo



odnosno

(1.45) .



Broj odredimo tako da je



na osnovu čega iz (1.45) slijedi i

.



Znači u tački ekstrema funkcije uz uslov vrijedi



(1.46)



.



Uslovi (1.46) su potrebni uslovi da bi postojao vezani ekstrem funkcije (1.41) uz uslov (1.42) iz kojih se rješavanjem sistema jednačina po *x*, *y* i dolazi do mogućih tačaka ekstrema.



Formirajmo funkciju

(1.47)



gdje je nepoznati broj. Funkciju nazivamo Lagrangeova funkcija, a množioc nazivamo Lagrangeov množitelj ili multiplikator. Ako parcijalne izvode funkcije (1.47) izjednačimo sa nulom dobićemo sistem jednačina (1.46). Na taj način se traženja uslovnih ekstrema funkcije (1.41) svodi na traženja bezuslovnih ekstrema funkcije (1.47).



***Primjer*.** Naći ekstreme funkcije



pod uslovom da *x* i *y* zadovoljavaju jednakost

.



***Rešenje*.** Funkcija Lagrangea za dati primjer glasi

.



Njeni parcijalni izvodi po *x*, *y* i se, odnosno odgovarajući sistem jedna-čina (1.46), glasi:



(a)



.



Rješenje sistema (a) po *x*, *y* i je



,



.



Kako je

; ; ,



to je za



.



Znači stacionarne tačka funkcije je tačka ekstre-ma te funkcije. To je lokalni minimun, jer je



.



Vrijednost mininuma je

.



Analogno se pokazuje da za funkcija *z* ima maksimum .



**2.4. Zadaci za vježbu**

**1.** Odrediti oblast definisanosti funkcija

a) ; b) ;



c) ; d) .



**2.** Naći iterirane granične vrijednosti funkcija

a) u tački (0,0),



b) u tački (0,0).



**3.** Dokazati da ne postoji

a) , b) .



**4.** Naći granične vrijednosti

a) , b) ,



c) , d) .



**5.** Ispitati neprekidnost funkcije



u tački (0,0).

**6.** Naći prve parcijalne izvode funkcija:

a) ; b) ;



c) ; d) ;



e) , f) ,



g) , h) .



**7.** Dokazati da je:

a) za ,



b) za ,



c) , za .



**8.** Naći totalne diferencijale funkcija:

a) , b) ,



c) , d) .



**9.** Izračunati približno vrijednosti izraza

a) , b) .



**10.** Naći prve parcijalne izvode funkcije po *x* i *y* funkcije , ako je , .



**11.** Naći druge parcijalne izvode funkcija:

a) , b) .



**12.** Za date funkcije naći tražene totalne diferencijale

a) , ; b) , i .



**13.** Naći ekstreme funkcija:

a) ,



b) .



**14.** Naći ekstreme funkcije pod uslovom da *x* i *y* zadovoljavaju je-dnakost .



**VI GLAVA**

**DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

**1. Opšti pojmovi diferencijalnih jednačina**

**1.1. Definicija diferencijalne jednačine**

Diferencijalna jednačina je jednačina u kojoj se kao nepoznate pojav-ljuju, pored argumenta funkcije, i njeni izvodi ili diferencijali.

***Primjer*** **1.1.** 1. , gdje je *x* argument funkcije , je diferencijalna jednačina.



2. , gdje su *x* i *y* argumenti funkcije , je takođe diferencijalna jednačina.



**1.2. Klasifikacija i red diferencijalnih jednačina**

Prema vrsti izvoda, obični ili parcijalni, diferencijalne jednačine dije-limo na obične i parcijalne diferencijalne jednačine.

Neka se u diferencijalnoj jednačini kao nepoznate pojavljuje funkcija sa svojim izvodima ili diferencijalima, samo jedne promjenjive. Tada za jed-načinu kažemo da je obična diferencijalna jednačina.

Ako se u diferencijalnoj jednačini pojavljuje funkcija sa dvije ili više promjenjivih zajedno sa svojim parcijalnim izvodima, za jednačinu kažemo da je parcijalna diferencijalna jednačina

Red diferencijalne jednačine je najviši red izvoda koji data diferenci-

jalna jednačina sadrži. Prema redu diferencijalne jednačine one se dijele na diferencijalne jednačine prvog, drugog, ... , *n*-tog reda.

Obična diferencijalna jednačina reda *n* ima opšti oblik

(1.1.) .



***Primjer* 1.2.** Diferencijalne jednačine

1) ; 2) ;



3) ; 4) ,



su diferencijalne jednačine reda 1; 2; 3; 3, respektivno.

Ako nepoznatih funkcija jedne promjenjive ima više tada govorimo o sistemu diferencijalnih jednačina, u protivnom govorimo o pojedinačnoj jed-načini.

Ako pojedinačna diferencijalna jednačina, sistem diferencijalnih jed-načina ili parcijalne diferencijalne jednačine, sadrže: konstante, nezavisne članove, promjenjive, funkcije i sve uzastopne izvode do reda *n*; tada se kaže da su one potpune. U protivnom kažemo da su jednačine nepotpune.

Prema eksponentu izvoda nepoznate funkcije u diferencijalnoj jedna-čini one se dijele na linearne, kvadratne, ... , *n*-tog eksponenta.

**1.3. Formiranje obične diferencijalne jednačine**

Neka je data funkcija krivih linija u ravni definisana implicitnom funkcijom



(1.2.)



koja zavisi od *n* proizvoljnih parametara . Pod pretpostavkom da je *y* funkcija od *x* nađimo *n*-uzastopnih izvoda funkcije (1.2) po *x*, ako oni postoje. Dobićemo *n* jednačina oblika



(1.3)



Ako iz jednačina (1.2) i (1.3.) eliminišemo parametre dobi-ćemo relaciju oblika



(1.4)



koja prestavlja diferencijalnu jednačinu *n*-tog reda.

***Primjer* 1.3.** Za familiju kružnica



formirati diferencijalnu jednačinu\*).

***Rješenje*.** Jednačina familije kružnica se može napisati u obliku

(a) .



Prvi izvod ove funkcije po *x* je

(b) , ili .



Iz (a) dobijamo

(c) .



Uvrštavanjem vrijednosti *C* iz (c) u (b), tj. eliminacijom parametra *C* iz (a) i (b) dobijamo diferencijalnu jednačinu

,



ili

.



***Primjer* 1.4.** Za familiju funkcija

,



su proizvoljne konstante, formirati diferencijalnu jednačinu.



***Rješenje*.** Eliminacijom parametra i iz sistema jednačina



dobićemo diferencijalnu jednačinu

.



\*) Red diferencijalne jednačine jednak je broju nezavisnih konstanti koje se nalaze u rješenju.

**1.4. Rješenje diferencijalne jednačine**

Prema načinu formiranja funkcije (1.4) zapažamo da ta jednakost vrijedi ako vrijedi jednakost (1.2.). Funkciju (1.2.) nazivamo opšte rješenje ili opšti integral diferencijalne jednačine (1.4). Ako u jednačini (1.4.) proizvolj-nim konstantama pridružimo određene vrijednosti onda će ona predstavljati partikularni integral diferencijalne jednačine (1.2).



Proizvoljne konstante u jednačini (1.4) mogu se odrediti tako da funkcija *y* i njeni izvodi dobijaju određene vrijednosti



za .



Ove vrijednosti za nazivamo početne vrijednosti ili početni ili Košijevi uslovi.



***Primjer* 1.5.**  Provjeriti da li je

(a)



rješenje jednačine



i ako jeste odrediti vrijednost proizvoljnih konstanti i uz početne uslo-ve: za .



***Rješenje*.** Iz diferenciranjem dobijamo



(b) ; .



Zamjenom ovih vrijednosti (a) i (b) u datu diferencijalnu jednačinu, dobijamo

.



Kako je prethodna jednakost zadovoljena za svako *x* dati izraz će biti rješenje diferencijalne jednačine.

Iz početnih uslova: za i (a) i (b) dobijamo sistem jednačina



čije je rješenje: . To znači da je partikularni integral



.



**2. Diferencijalne jednačine prvog reda**

**2.1. Integralne krive diferencijalne jednačine**

Neka je data diferencijalna jednačina

(2.1) ,



ili u eksplicitnom obliku

(2.2)



i neka je njen opšti integral

(2.3) ,



gdje je proizvoljna konstanta. Funkcija (2.3) predstavlja familiju kri-vih u ravni . Te krive nazivamo integralne krive jednačine (2.1) odno-sno (2.2).



**2.2. Rješavanje nekih oblika diferencijalnih jednačina**

Neka je data diferencijalna jednačina oblika

(2.4) , ili



gdje je *y* proizvoljna funkcija od *x* ili *x* funkcija od *y*. Neka je

; .



Uz pretpostavku da se ili može izraziti u obliku tada jednačina (2.4) ima oblik



odnosno, oblik

(2.5) .



Iz jednačine (2.5) se mogu definisati razne diferencijalne jednačine prvog re-da čije se rješenje može naći.

**2.2.1. Jednačina sa razdvojenim promjenljivim**

Neka u jednačini (2.5) funkcija ne zavisi od *y*, a funkcija ne zavisi od *x*. Tada se ta jednačina može zapisati u obliku



(2.6) .



Diferencijalnu jednačinu (2.6) nazivamo jednačina sa razdvojenim promjen-ljivim. Opšti integral jednačine (2.6) je

(2.7) ,



gdje je *C* proizvoljna konstanta.

***Primjer* 2.1.** Jednačina



je jednačina sa razdvojenim promjenljivim i prema relaciji (2.7) njen opšti integral je

,



odnosno

.



**2.2.2. Jednačina sa razdvojivim promjenljivim**

Neka se i iz jednačine (2.5) mogu izraziti u obliku



; .



Tada jednačina (2.5) glasi

(2.8) .



Jednačinu (2.8) nazivamo jednačinom sa razdvojivim promjenljivim.

Ako jednakost (2.8) podijelimo sa dobićemo jednačinu



(2.9) ,



koja je jednačina sa razdvojenim promjenljivim. Opšti integral jednačine (2.9) je

.



***Primjer* 2.2.** Jednačina



se može izraziti u obliku

,



ili

.



Dijeljenjem prethodne jednakosti sa dobijamo jednačinu



,



koja je jednačina sa razdvojenim promjenljivim; njen opšti integral je

,



odnosno



odakle dobijamo da je

,



gdje je .



**2.2.3. Homogena jednačina**

Diferencijalnu jednačinu (2.5) možemo izraziti u obliku

(2.10) , ili



gdje je . Ako su funkcije i homogene istog stepena homogenosti, odnosno funkcija homogena sa stepe-nom homogenosti nula, tada za jednačinu (2.5) kažemo da je homogena.



Neka je . Tada smjenom dobijamo



,



i jednačina (2.10) ima oblik

(2.11) .



Neka je , gdje je *u* nepoznata funkcija promjenljive *x*. tada je



.



Zamjenom vrijednosti i *y* u jednačini (2.11) dobijamo jednačinu



,



odnosno

(2.12) .



Jednačina (2.12) je jednačina sa razdvojenim promjenljivim i njen integral se određuje kao integral jednačine (2.9).

Neka je , tada vrijedi



.



Nakon integracije dobijamo

.



Neka je . Tada je , odnosno, s obzirom na smjenu



što predstavlja opšti integral jednačine (2.11).

Ako je , tada je



, odnosno



i opšti integral glasi

.



***Primjer* 2.3.** Naći opšte rješenje jednačine

.



***Rješenje*.** Data jednačina se može izraziti u obliku

, ili .



Zadana jednačina je homogena i smjenom , odakle je



; ,



se svodi na jednačinu

,



odnosno

.



Razdvajanjem promjenljivih dobijamo jednačinu



odakle integriranjem dobijamo

,



odnosno

.



Uvođenjem smjene dobićemo opšte rješenje



.



Razmotrimo jednačinu oblika

(2.13) .



Neka je , tada je



(2.14) .



Jednačina (2.14) je homogena i rješava se smjenom

; .



Tada je

,



odnosno

; .



Neka je

.



Tada je

, ili .



Neka je najviše jedan od *c* ili *f* različit od nule. Uvedimo smjenu

(2.15)



gdje su *h* i *k* nepoznate konstante, a *u* i *v* nove promjenljive. Konstante *h* i *k* odaberimo tako da je:

(2.16)



Tada je

.



(2.17) .



Neka je , ili . Tad je jednačina (2.17) jednačina tipa (2.14) i ona se rješava po već objašnjenom postupku.



***Primjer* 2.4.** Naći opšte rješenje jednačine

.



***Rješenje*.** Kako je , to se zadana jednačina



rješava smjenama

,



gdje su *h* i *k* rješenje sistema jednačina

(a)



Rješenje sistema jednačina (a) je

,



i uvedimo smjenu

.



Nakon uvođenja smjene u datu diferencijalnu jednačinu dobićemo jednačinu

.



Ova jednačina je homogena diferencijalna jednačina i nakon uvođenja smjene , gdje je *z* nova nepoznata funkcija od *u*, dobićemo jednačinu



koja ima opšte rješenje

.



Nakon smjene , gdje je , dobijamo opšte rje-šenje oblika



.



**2.2.4. Linearna jednačina**

Ako se jednačina (2.5) može izraziti u obliku

(2.18) ,



gdje su i date funkcije od *x*, tada za jednačinu kažemo da je li-nearna diferencijalna jednačina prvog reda.



Ako je u jednačini (2.18) , tada ona glasi



(2.19)



i za tu jednačinu kažemo da je linearna homogena jednačina.

Ako je za jednačinu (2.18) kažemo da je linearna nehomo-gena jednačina.



Razmotrimo rješavanje linearne homogene jednačine, tj. jednačine (2.19). Datu jednačinu možemo napisati u obliku

,



odakle se integriranjem dobija

,



gdje je konstanta *C* napisana u obliku , ili



(2.20) .



Nehomogena jednačina (2.18) se može riješiti, naprimjer metodom varijacije proizvoljne konstante *C*, koja se sastoji u sljedećem.

Pretpostavimo da je proizvoljna konstanta *C*u (2.20) nepoznata funkcija od *x*, tj.

(2.21) .



Diferenciranjem (2.21) dobijamo

(2.22) .



Zamjenom (2.21) i ( 2.22) u (2.18) dobijamo

,



ili

,



odnosno

(2.23) .



Zamjenom vrijednosti iz (2.23) u (2.21) dobićemo opšte rješenje jednačine (2.18), i ono glasi



(2.24) .



Relacija (2.24) se može izraziti u obliku

,



ili u obliku

(2.25) ,



gdje je: , .



Izraz je opšte rješenje homogenog diferencijala jednačine (2.18), a je partikularno rješenje nehomogenog dijela te jednačine, što ćemo i dokazati.



Izvod funkcije



je

,



.



Zamjenom vrijednosti i u jednačinu (2.18) dobićemo jednakost



,



odnosno

.



Time je dokazano da je rješenje jednačine (2.18). Kako ne sadrži proizvoljnu konstantu to će biti partikularno rješenje date dife-rencijalne jednačine. Relacija (2.25) znači da je opšte rješenje jednačine (2.18) jednako zbiru opšteg homogenog i partikularnog rješenja nehomo-genog dijela jednačine.



***Primjer* 2.5.** Riješiti jednačinu .



***Rješenje*.** Data jednačina se može napisati u obliku

,



što znači da je ona jednačina oblika (2.18). Opšte rješenje homogenog dijela je:

, ili



, tj.



(a) .



Neka je . Tada je



(b) .



Uvrštavanjem vrijednosti *y* i iz (a) i (b) u datu jednačinu dobijamo jedna-činu



odakle je

.



Uvrštavanjem ove vrijednosti *C* u (a) dobićemo opšte rješenje date jednačine

.



**2.2.5. Bernulijeva jednačina**

Jednačinu oblika

(2.26)



nazivamo Bernulijeva diferencijalna jednačina.

Bernulijeva diferencijalna jednačina se rješava na sljedeći način:

Dijeljenjem jednačine (2.26) sa dobićemo jednačinu



(2.27) .



Neka je

(2.28) , odnosno ,



gdje je *z* nepoznata funkcija promjenljive *x*. Iz (2.28) je



i jednačina (2.26) sa funkcijom ima oblik



,



ili

(2.29) .



Jednačina (2.29) je linearna jednačina, i njeno rješenje se traži na već poznati način.

***Primjer* 2.6.** Jednačina je Bernulijeva diferencijalna jednačina. Ona se dijeljenjem sa i uvođenjem smjene svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu. Rješenje date jednačine je



.



**2.3. Zadaci za vježbu**

**1.** Riješiti diferencijalne jednačine:

a) ; b) ;



c) ; d) .



**2.** Riješiti homogene jednačine:

a) ; b) ;



c) ; d) .



**3.** Riješiti jednačine:

a) ; b) .



**4.** Riješiti diferencijalne jednačine:

a) ; b) ;



c) ; d) .



**5.** Riješiti diferencijalnu jednačinu

a) ; b) ;



c) ; d) .



**3. Linearne diferencijalne jednačine višeg reda**

**3.1. Neke nepotpune jednačine**

Razmotrimo mogućnost rješavanja jednačine oblika

(3.1) .



Neka je , odnosno . Tada do-bijamo jednačinu



(3.2)



koja je diferencijalna jednačina reda . Ako je moguće riješiti ovu jedna-činu dobićemo relaciju



(3.3) ,



gdje su proizvoljne konstante.



Ako se jednačina (3.3) može riješiti po *p*, tj. ako se može napisati

(3.4)



tada je

,



odakle je opšte rješenje jednačine (3.1)

(3.5) .



***Primjer* 3.1.** Jednačina se smjenom , odnosno svodi na jednačinu



čije je rješenje

,



pa relacija (3.5) za ovaj primjer glasi

.



Dobiveni izraz je opšte rješenje zadane diferencijalne jednačine.

Neka u jednačini (3.1) pored *y* nedostaju i svi uzastopni izvodi do reda , tj. neka je jednačina oblika



(3.6) .



Smjenom , gdje je *z* nepoznata funkcija od *x*, jednačina (3.6) se svodi na jednačinu



(3.7) .



Neka je opšte rješenje jednačine (3.7)

,



ili

.



Tada je zbog smjene



,



.



Produžavajući integraciju *k*-puta dobićemo opšte rješenje date jednačine.

***Primjer* 3.2.** Jednačina se smjenom



svodi na jednačinu oblika

,



koje je linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Njeno rješenje je

,



i vrijedi

,



odnosno

.



***Primjer* 3.3.** Jednačina smjenom , postaje



, odakle je .



Prema datoj smjeni, nakon integriranja, slijedi

.



**3.2. Opšta teorija linearnih diferencijalnih**

**jednačina reda *n***

**3.2.1. Definicija linearne diferencijalne jednačine**

Jednačinu oblika

(3.8) ,



gdje su poznate funkcije i nazivamo line-arna diferencijalna jednačina reda *n*.



Jednačinu (3.8) možemo podijeliti sa i tada ona glasi



(3.9) ,



gdje je .



Ako je , odnosno za jednačinu (3.8) odnosno (3.9) kažemo da je homogena, a ako ti uslovi nisu ispunjeni za jednačinu se kaže da je nehomogena.



**3.2.2. Transformacija linearne jednačine**

Jednačina (3.9) ne mijenja oblik ako umjesto nezavisne promjenljive *x* uvedemo novu nezavisnu promjenljivu smjenom



(3.10) ,



gdje je proizvoljna, *n*-puta diferencijabilna funkcija.



Druga važna osobina linearne jednačina (3.9) je da jednačina (3.9) ne mijenja oblik pri linearnoj transformaciji nepoznate funkcije *y*, tj. pri uvo-đenju smjene

,



gdje su funkcije i poznate, neprekidne, *n-*puta diferencijabilne i na intervalu .



**3.2.3. Opšta teorija linearnih homogenih difererncijalnih jednačina *n-*tog reda**

Razmotrimo jednačinu

(3.11) ,



gdje su poznate funkcije definisane i neprekidne za .



**Teorema 3.1.** *Neka je* *parcijalno rješenje jednačine* (3.11). *Tada je i* , *gdje je* *proizvoljna konstanta*, *također rješenje jednačine*.



***Dokaz*.** Na osnovu pretpostavke teoreme je

.



Tada je

,



što znači da je rješenje jednačine (3.11).



**Teorema 3.2.** *Neka su*  *i* *partikularna rješenja jednačine* (3.11). *Ta-da je i* , *gdje su*  *i* *proizvoljne konstante*, *rješenje* *jednačine* (3.11).



***Dokaz*.** Na osnovu pretpostavke teoreme i teoreme 3.1 je

.



Zamjenimo *y* sa u relaciji (3.11). Tada je



.



Time je teorema dokazana.

Teorema 3.2 se može poopštiti i ona tada glasi: *Neka su* *partikularna rješenja jednačine* (3.11). *Tada je rješenje te jednačine i*



,



*gdje su* *proizvoljne konstante*.



**3.2.4. Wronski-jeva determinanta**

Neka su date funkcije koje su funkcije jedne nezavisne promjenljive *x* definisane na intervalu i koje imaju uzastop-ne izvode do reda . Determinantu definisanu sa



(3.12)



naziva Wronski-jeva determinanta.

**Teorema 3.3.** *Neka su funkcije* *linearno zavisne na inter-valu* . *Tada je Wronski-jeva determinanta* (3.12) *jednaka nuli za* *sve vrijednosti* *x* *iz posmatranog intervala* .



***Dokaz*.** Neka su funkcije linearno zavisne za svako . Tada je



(3.13) ,



gdje su konstante od kojih je bar jedna različita od nule. Za uzastopne izvode jednačine (3.13) do reda vrijedi



(3.14)



Jednačine (3.13) i (3.14) predstavljaju homogeni sistem od *n* linernih jedna-čina sa *n* nepoznatih . Ovaj sistem jednačina ima rješenje različito od nule ako je determinanta



za svako , što je i trebalo dokazati.



Ako je determinanta (3.12) za sistem linearnih jednačina (3.13) i (3.14) različita od nule, tada sistem ima jedinstveno rješenje .



Znači, funkcije iz relacije (3.13) su linearno nezavisne.



Navedimo bez dokaza sljedeću tvrdnju.

**Teorema 3.4.** *Maksimalan broj linearno nezavisnih partikularnih rješenja* *jednačine* (3.11) *sa koeficijentima* *jednak je*  *n*.



**4. Rješavanje linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda**

**4.1. Homogena jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima**

Opšti oblik linearne homogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima je

(4.1) .



Rješenje jednačine (4.1) možemo tražiti u obliku

(4.2) ,



gdje je *r* nepoznata konstanta. Odluka za izbor rješenja jednačine u obliku (4.2) zasniva se na tome da je funkcija definisana za svako i da je za svako *x* iz oblasti definisanosti. Diferenci-ranjem funkcije dva puta i uvrštavanjem vrijednosti i u jednačinu (4.1) dobićemo jednačinu



(4.3) .



Kako je , to će jednakost (4.3) biti zadovoljena ako je



(4.4) .



Jednačinu (4.4) nazivamo *karakteristična jednačina* jednačine (4.1). Korijeni karakteristične jednačine su



i oni mogu biti realni i različiti, konjugovano kompleksni, i realni i jednaki.

**1.** Neka su i . Tada su prema relaciji (4.2), parti-kularna rješenja



(4.5) .



Determinanta (3.12) u ovom slučaju glasi

.



Kako je to je za , što znači da su i line-arno nezavisna rješenja jednačine (4.1). Na osnovu toga slijedi da je opšte rješenje date jednačine dato sa



(4.5) .



***Primjer* 4.1.** Jednačina ima karakterističnu jednačinu



.



Korijeni karakteristične jednačine su: . Znači korijeni su realni i različiti, pa je prema (4.5)



opšte rješenje date diferencijalne jednačine.

**2.** Neka su korijeni karakteristične jednačine jednaki, i neka je . Tada je jedno partikularno rješenje jednačine (4.1) , a drugo ćemo tražiti u obliku



(4.6) ,



gdje je nepoznata funkcija. Iz (4.6) slijedi



(4.7)



Zamjenom vrijednosti (4.6) i (4.7) u jednačinu (4.1) dobićemo jednačinu

.



Budući da je , to se prethodna jednačina svodi na jednačinu



(4.8) .



Kako je, prema Vietovim formulama, , jednačina (4.8) glasi i ima rješenje .



Za dobićemo drugo partikularno rješenje oblika .



Funkcije i su linearno nezavisne, što se može provjeriti, a to znači da je opšte rješenje jednačine (4.1) dato sa



(4.9) .



***Primjer* 4.2.** Jednačina ima korijene karakteristične jed-načine . Tada je, prema relaciji (4.9), opšte rješenje date diferenci-jalne jednačine



.



**3.** Neka su i konjugovano kompleksni brojevi jednačine (4.4) i neka je



, ,



gdje je , . Tada je



, .



Kako je, prema Eulerovoj formuli

;



to je

,



.



Za formulisanje opšteg rješenja jednačine (4.4) u slučaju da su korijeni te karakteristične jednačine konjugovano kompleksni korisno je da se razmotri sljedeća teorema.

**Teorema 4.1.** *Neka je* *rješenje linearne homogene jed-načine reda* *n*. *Tada su*  *i* *rješenja te jednačine*.



***Dokaz*.**  Po pretpostavci teoreme je . Tada je



.



Prethodna jednakost je ekvivalentna sa

.



Time je teorema dokazana.

Na osnovu teoreme 4.1. su

;



partikularna rješenja jednačine 84.4). Može se provjeriti da su rješenja i linearno nezavisna, što znači da je opšte rješenje oblika



.



***Primjer* 4.3.** Jendačina ima korijene karakteristične jednačine , . Znači korijeni su konjugovano kompleksni, pa je opšte rješe-nje dato sa



.



**4.2. Nehomogena jednačina sa konstantnim koeficijentima**

Razmotrimo linearnu nehomogenu diferencijalnu jednačinu

(4.10) ,



gdje je , konstante.



Da bi objasnili način rješavanja jednačine (4.10) daćemo bez dokaza sljedeću teoremu.

**Teorema 4.2.** *Neka je* *bilo koje partikularno rješenje jednačine* (4.10) *i neka je opšte rješenje*



*jednačine*

.



*Tada je opšte rješenje jednačine* (4.10) *dato sa*

(4.11) .



Na osnovu teoreme 4.2 slijedi da se problem određivanja opšteg rje-šenja jednačine (4.10), pored onoga što je rečeno za rješavanje jednačine (4.1), svodi na problem određivanja jednog partikularnog rješenja te jed-načine.

**1.** Neka je , gdje je polinom reda *n*. Tada jednačina (4.10) glasi



(4.12) .



**a)** Ako nije korijen karakteristične jednačine



parcijalno rješenje treba tražiti u obliku

(4.13) ,



gdje su nepoznati koeficijenti. Diferenciranjem jednačine (4.13) dobijamo



;



.



Ako vrijednosti uvrstimo u relaciju (4.12) i jednakost podi-jelimo sa dobićemo



(4.14) .



U relaciji (4.14) na lijevoj strani su polinomi reda *n*, reda i reda . Polinom je, također, reda *n*. Na osnovu teoreme o identičnosti polinoma iz relacije (4.14) dobićemo sistem od



linearne jednačine sa nepoznatih . Rješavanjem tog sistema dobićemo vrijednosti koeficijenata polinoma (4.13).



**b)** Ako je jednostruki korijen karakteristične jednačine, tada je



,



i tada jednačina (4.14) glasi

(4.15) .



Kako je red polinoma na lijevoj strani reda a na desnoj strani reda *n* to jednakost (4.15) može biti identičnost ako je



(4.16) .



**c)** Neka je dvostruki korijen karakteristične jednačine



.



Tada je i, prema Vietovim formulama, . U opštem slučaju jednačina (4.14) ima oblik



(4.17) .



Slično slučaju b) zaključujemo da partikularni integral ima oblik

(4.18) .



***Primjer* 4.4.** Jednačina ima karakterističnu jednačinu



čiji su korijeni: . Opšte rješenje jednačine



je

(a) .



Kako je u ovom primjeru to je partikularno rješenje jednačine oblika



(b) ,



gdje su i nepoznati koeficijenti. Izvodi i su



,



.



Zamjenom vrijednosti , i u datu diferencijalnu jednačinu dobi-ćemo relaciju (4.14) i ona glasi



,



odakle je

, .



Uvršatavanjem ovih vrijednosti u (b) dobićemo partikularno rješenje

.



Prema teoremi 4.2 opšte rješenje date diferencijalne jednačine je

.



***Primjer* 4.5.** Diferencijalna jednačina



ima korijene karakteristične jednačine: . Kako je to će partikularni integral date jednačine biti oblika



.



Diferenciranjem dobijamo



,



.



Zamjenom ovih vrijednosti u diferencijalnu jednačinu dobijamo jednačinu

,



koja je identitet za: i . Znači partikularno rješenje date jed-načine je



,



a opšte rješenje je

,



ili

.



***Primjer* 4.6.** Jednačina



ima korijene karakteristične jednačine . Tada se partikularno rješenje date jednačine, prema relaciji (4.18) traži u obliku



(a) .



Diferenciranjem relacije (a) dobijamo

(b) ,



(c) .



Zamjenom vrijednosti (a), (b) i (c) u datu diferencijalnu jednačinu dobićemo jednačinu

,



koja je identitet za: , . Znači, na osnovu relacije (a), par-tikularno rješenje date diferencijalne jednačine je



.



Opšte rješenje jednačine je (vidjeti primjer 4.2)



.



Dakle, po teoremi 4.2, opšte rješenje date jednačine je

.



2. Neka je

(4.19) ,



gdje su *A* i *B* konstante. Po Ojlerovoj formuli je

; ,



i tada je



,



tj.

(4.20) ,



gdje je: .



Na osnovu teoreme 4.2 partikularno rješenje jednačine, ako nije ko-rijen karakteristične jednačine, možemo tražiti u obliku



,



gdje su *M* i *N* nepoznate konstante.

Neka je u funkciji (4.19) . Tada je



.



Ako nije korijen karakteristične jednačine tada partikularno rješenje mo-žemo tražiti u obliku



.



Ako je korijen karakteristične jednačine tada odgovarajuća rješenja tra-žimo u obliku



.



**Teorema 4.3.** *Neka je funkcija* *iz* (4.10) *data u obliku*



*tada je parcijalno rješenje jednačine* (4.10) *jednako zbiru rješenja jedna-čina*

;



.



***Dokaz*.** Iz ; , slijedi



.



Tome je teorema dokazana.

***Primjer* 4.7.** Riješiti jednačinu

.



***Rješenje*.** Nađimo rješenja jednačina

(a) ,



(b) .



Opšte rješenje jednačine je



.



Partikularno rješenje jednačine (a) je

,



a partikularno rješenje jednačine (b) je

.



Kako je opšte rješenje jednačine



jednako



to je opšte rješenje date diferencijalne jednačine, prema teoremi 4.3, dato sa

.



**4.3. Zadaci za vježbu**

**1.** Riješiti diferencijalne jednačine:

a) ; b) ;



c) ; d) ;



e) ; f) .



**2.** Riješiti jednačine:

a) ; b) ;



c) ; d) ;



e) ;



f) ;



g) ;



h) .



**3.** Riješiti jednačine

a) ;



b) .



1. Kurepa 5. "Uvod u matematiku", Tehnička knjiga, Zagreb 1970. [↑](#footnote-ref-2)
2. B. Reiman (1826-1866), njemački matematičar. [↑](#footnote-ref-3)
3. G. Darboux (1842-1917), francuski matematičar. [↑](#footnote-ref-4)