

系泊系统设计的多目标优化模型

摘要

本文针对系泊系统的设计问题,通过对影响系泊系统的各个部分和浮标进行受力分析和力矩分析,建立了使钢桶倾斜角、浮标吃水深度和游动区域半径最小的多目标优化模型,最终得到系泊系统的最优设计。

当海面风速为 12m/s 和 24m/s 时,对于钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域半径的计算问题,基于悬链线方程的推导,首先对锚链线进行微元处理,然后对系泊系统各部分进行受力分析和力矩分析,得到系泊系统平衡时的刚体力学方程组。利用 fsolve 函数求解得到:海面风速为 12m/s 时,钢桶倾角约为 1.14° ,从下至上各节钢管的倾斜角度依次为 1.09° , 1.08° , 1.07° , 1.06° 、锚链形状呈双曲余弦函数型,锚链左侧约 6.7m 贴在海底、浮标的吃水深度为 0.71m,游动区域半径为 14.33m。海面风速为 24m/s 时,钢桶倾角为 4.32° ,浮标的吃水深度为 0.72m,游动区域半径为 17.48m。

针对海面风速为 36m/s 时,系泊系统和浮标系统的参数计算以及重物球质量的优化设计问题。首先基于问题 1 中的刚体力学方程组,求解得到当海面风速为 36m/s,重物球质量为 1200kg 时,钢桶倾角为 8.98° ,从下到上各节钢管的倾斜角度依次为 8.65° , 8.59° , 8.53° , 8.47° 、浮标的吃水深度为 0.75m,游动区域半径为 18.77m。由于其不满足角度约束,故建立以钢桶倾斜角、浮标吃水深度和浮标游动区域半径最小为优化目标的多目标优化模型,对三个目标赋予不同权重。通过多重搜索算法,对重物球质量进行遍历,求解得到三个优化目标权重比值为 0.8:0.1:0.1 时,最优重物球质量为 4090kg 时,锚链左端点与海床夹角为 0° ,钢桶倾角为 1.27° 。

针对考虑水流力和风力作用时,在水深变化的情况下系泊系统的锚链种类、长度、重物球质量的最优设计问题。仍建立多目标优化模型,以锚链种类、长度,重物球质量为决策变量,以钢桶倾斜角、浮标吃水深度和游动区域半径最小为优化目标,约束条件为锚链左侧与海平面夹角不超过 16 度。通过多重搜索算法对三个决策变量进行遍历,求解得到当水流速度与距海底高度成正比时,系泊系统的最优设计为:选取锚链型号 5,长度为 20.9m,重物球质量为 4635.24kg。最终得到水中各点水流速度相同,以及水流速度自上而下线性递减时,水流力与风力同向、反向、垂直的情况下,海水深度为 16m,17m,18m,19m,20m 的系泊和浮标系统的各个参数。其中当水流力与风力同向、水中各点水流速度相同、海水深度为 20m 时,钢桶的倾角为 4.37° ,从下至上各节钢管的倾斜角度依次为 4.28° , 4.22° , 4.16° , 4.10° 、浮标的吃水深度为 1.81m,游动区域半径为 15.86m。

最后本文模型三中通过计算发现优化目标的权重发生一定改变时最优设计的参数不变,并对水流力与风力夹角任意时、对考虑无档链环连接的影响时的模型进行了分析和计算。

关键词:系泊系统设计,刚体力学方程组,多重搜索算法,多目标优化

一、问题重述

系泊系统的设计就是要确定锚链的型号、长度和重物球的质量,使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角尽可能小。基于此要求解决以下问题:

1.某型传输节点选用 II 型电焊锚链 22.05m,选用的重物球的质量为 1200kg。现将该型传输节点布放在水深 18m、海床平坦、海水密度为 $1.025 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 的海域。在海水静止时,分别计算海面风速为 12m/s 和 24m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

2.在问题 1 的假设下,计算海面风速为 36m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的游动区域。需调节重物球的质量,使得钢桶的倾斜角度不超过 5 度,锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。

3.水深介于 16m~20m 之间,布放点海水速度最大可达到 1.5m/s、风速最大可达到 36m/s。在考虑风力、水流力和水深情况下进行系泊系统设计,并分析所设计的系泊系统在不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

二、问题分析

系泊系统的设计问题首先要求在给定设计参数下,求解钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。然后要根据不同风速和水速的数据,设计系泊系统的参数,使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角尽可能小,且应该满足锚链左侧与海平面夹角 16 度。

2.1 基于力学分析的系泊系统参数计算

当海面风速一定且海水静止时,钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域,与锚链线的方程、系泊系统各部分之间的受力平衡和力矩平衡的约束密切相关。由于传输节点各部分相互影响,根据力学相关知识,可以按照锚链→钢桶和重物球→钢管→浮标的顺序依次进行受力分析,从而得到各部分受力平衡时的定量解析式,通过这些表达式可以确定钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状。由于吃水深度与浮标受力直接相关,还可以确定浮标的吃水深度。对于浮标的游动区域,可以由稳定后系泊系统各个部分在水平方向投影的总长度来计算游动区域的最大半径。

考虑将给定参数数据代入解析式,利用 Matlab 求解方程组的数值解,能够得到受力平衡时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

2.2 海水静止时系泊系统的设计分析

系泊系统的设计就是要确定重物球的质量,使得浮标的吃水深度、游动区域、钢桶的倾斜角尽可能小,因此问题 2 可以看做是一个优化问题。首先应在问题 1 的假设下,即利用问题 1 提供的系泊系统数据和各部分受力平衡时的定量解析式,求解风速为 36m/s 时的钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域。需要调节重物球的质量时,应先分析重物球质量对方程组中其他变量的影响,然后将重物球视为决策变量,使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角都尽可能地小。对所建立的优化模型,在满足钢桶的倾斜角度不超过 5 度、锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度的情况下,考虑进行遍历搜索,找出尽可能小的浮标的吃水深度、游动区域及钢桶倾斜角度所对应的的重物球质量,即为最优的设计。

2.3 考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计

问题 3 与问题 2 的不同之处在于：锚链型号和长度未知、增加了水速的影响、且外界条件变化为水深 16m~20m、海水流速最大 1.5m/s、风速最大 36m/s，即锚链型号，长度，重物球质量三个值均未知，这在很大程度上增加了优化模型的求解难度。

问题 3 模型可建立在问题 2 模型之上，难点在于：由于锚链型号和长度未知，使得优化模型的决策变量会增加两个，但优化目标仍然可以为浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角尽可能小。由于此问增加了水速的影响，而水速和风速的夹角会直接影响系泊系统各部分的受力，可以分别讨论二力夹角分别为同向、反向、相互垂直的情况。此外，考虑到海面下各点的水速未必相同，还需要对各点水速不同时，以及海水高度 16m 到 20m 分别进行讨论。

基于以上分析，可以将此问分为两个部分：第一部分求解并找到在最坏情况下，设计锚链的型号、长度和选择的重物球长度；第二部分基于第一部分的设计，利用问题 1 中系泊系统的受力方程组和问题三中需要考虑的优化目标，对于确定的最优的锚链型号、长度和重物球质量，求解相应的钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

三、模型假设

1. 假设锚链质量均匀，整体视为一条可微的曲线且不考虑锚链自身的弹性伸长。
2. 风力和水流力均视为水平方向的力，且不考虑浮标倾斜的情况。
3. 不考虑锚链与海底平面的摩擦力。

四、符号说明

4.1 名词解释

1. 锚链线密度：即某种锚链单位长度的质量。
2. 钢管两侧拉力角度：钢管两侧拉力与竖直方向的夹角。
3. 钢管倾斜角度：由于钢管属于刚体，所以钢管倾斜角度与钢管两侧拉力角度可能不同。
4. 钢桶倾斜角度：钢桶中心轴线与竖直方向的夹角。
5. 锚链线方程：由于锚链线近似认为可微，故在所建立的直角坐标系下锚链线方程可以得到。
6. 水流力：即水流对物体的作用力。

4.2 变量说明

变量名称	含义	单位
α_1	锚链左侧与海床的夹角	°
α_2	锚链右端点与海床的夹角	°
T	锚链两侧所受力	N
f	各物体所受浮力	N
$y(x)$	锚链线方程	/
σ_{kind}	某一种型号的锚链线密度	kg/m
s	锚链线长度	m
F_i	每根钢管两侧的拉力	N
γ_i	钢管两侧拉力角度	°
θ_i	钢管倾斜角度	°

β_i	钢桶倾斜角度	°
R	浮标游动区域半径	m
d	浮标吃水深度	m
H	海水深度	m

五、模型建立与求解

5.1 基于刚体力学分析的系泊系统参数计算方程组

当海面风速一定且海水静止时，钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域与锚链线的方程、系泊系统各部分之间的受力平衡和力矩平衡的约束密切相关，因此需要对锚链的曲线，钢桶、钢管、浮标进行系统的力学分析，进而得出各部分受力平衡时的定量解析式。将给定的数据代入，可以求解相应的系泊系统参数。

5.1.1 系泊系统各部分的力学分析

稳定后的系泊系统可以分为锚、锚链、钢桶和重物球、钢管、浮标五个部分。对于锚而言，由于锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角不超过 16 度时，锚保持静止，因此无需分析锚的受力情况。建立系泊系统坐标系如图 1 所示，其中 x 轴为风力方向；xAy 平面为海平面；原点 A 为锚链末端与锚的链接处。

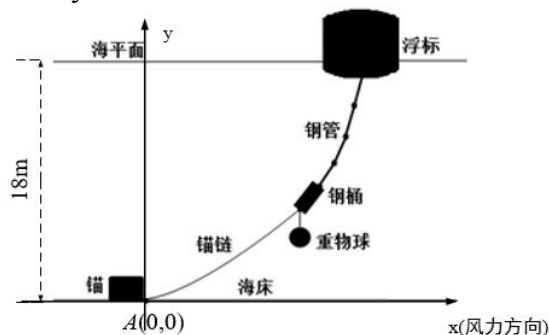


图 1 系泊系统坐标系

下面对锚链、钢桶和重物球、钢管、浮标四部分的力学分析依次进行讨论：

(1) 锚链形状的方程推导

由于假设锚链质量均匀，且不考虑锚链自身的弹性伸长，因此锚泊船的锚链完全符合悬链的基本条件^[1]。参照悬链线方程的推导^[2]，将锚链整体视为一条可微的曲线，锚链坐标系 AC 段如图 2 所示：

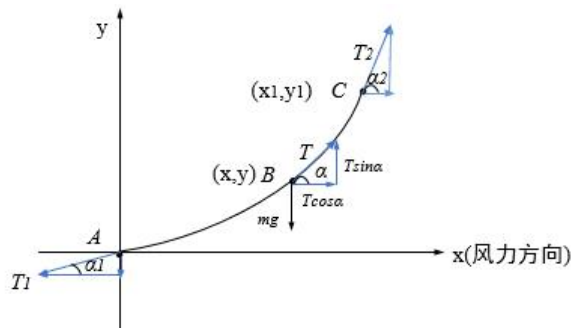


图 2 锚链 AC 段坐标系

在图 2 中，x 轴为风力方向；xAy 平面为海平面；原点 A 为锚链末端与锚的链接处； α_1 表示锚链 A 端切线方向与 x 轴正方向的夹角； T_1 表示锚链 A 点所受拉力，方向沿绳；锚链右端视为 C 点，坐标设为 (x_1, y_1) ； T_2 表示 C 点所受拉力，

方向沿绳； α_2 表示锚链 C 端切线方向与 x 轴正方向的夹角；B 为锚链线上任意一点，坐标设为(x,y)； α 表示锚链 B 端切线方向与 x 轴正向的夹角；T 表示 B 点所受拉力。

对 B 点(x,y)进行受力分析，受力平衡时有如下方程：

$$\begin{cases} T \sin \alpha = mg + T_1 \sin \alpha_1 \\ T \cos \alpha = T_1 \cos \alpha_1 \end{cases} \quad (1)$$

其中 m 表示 B 点左侧的锚链质量和，g 代表重力加速度， α 记为 B 的切线方向与 x 轴正向的夹角。

由坐标系可知，y 对 x 的导数可以表示为：

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$$

将(1)式代入得：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mg + T_1 \sin \alpha_1}{T_1 \cos \alpha_1} \quad (2)$$

对于锚链， $m=\sigma s$ ，其中 s 是 AB 锚链的长度， σ 是锚链的线密度，即单位长度锚链的质量^[1]。代入(2)式得：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma s g + T_1 \sin \alpha_1}{T_1 \cos \alpha_1} \quad (3)$$

根据勾股定理可以得到弧长公式：

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

积分得到 $s = \int \sqrt{1 + y'^2} dx$ ，代入(3)式移项可得：

$$\frac{dy}{dx} T_1 \cos \alpha_1 - T_1 \sin \alpha_1 = \sigma g \int \sqrt{1 + y'^2} dx$$

对上式做一次变量替换，令 $p = y'$ ，得到如下方程：

$$p T_1 \cos \alpha_1 - T_1 \sin \alpha_1 = \sigma g \int \sqrt{1 + p^2} dx$$

为了将积分符号去掉，上式两边对 x 求导， α_1 是待确定的常量，得到：

$$\frac{dp}{dx} T_1 \cos \alpha_1 = \sigma g \sqrt{1 + p^2}$$

然后对 x 和 p 分离变量并对两端进行积分得到：

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int \frac{\sigma g}{T_1 \cos \alpha_1} dx$$

$$\text{即：} \sinh^{-1}(p) = \frac{\sigma g}{T_1} x + C_1 \quad (4)$$

其中 C_1 可以由 $x=0, y=0$ 时的值确定，原点 A 处 $p = y' = \tan \alpha_1$ ，可得 C_1 为：

$$C_1 = \sinh^{-1}(p) = \sinh^{-1}(\tan \alpha_1) \quad (5)$$

经过上述求解已经得到了 dy/dx 的函数形式，即：

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \left(\frac{\sigma g}{T_1 \cos \alpha_1} x + C_1 \right)$$

对上式进行分离变量：

$$\int dy = \int \sinh\left(\frac{\sigma g}{T_1 \cos \alpha_1} x + C_1\right) dx$$

积分得到：

$$y = \frac{T_1 \cos \alpha_1}{\sigma g} \cosh\left(\frac{\sigma g}{T_1 \cos \alpha_1} x + C_1\right) + C_2 \quad (6)$$

其中 C_2 同样可以由坐标系原点来确定，(0,0)点代入得常数 C_2 为：

$$C_2 = -\frac{T_1 \cos \alpha_1}{\sigma g} \cosh(C_1) \quad (7)$$

由于对系泊系统整体而言，水平方向受力平衡，可知：

$$F_{wind} = T_1 \cos \alpha_1$$

其中 F_{wind} 表示海面风力。

综上(5)(6)(7)式，在所设定的直角坐标系下，锚链的曲线方程可以表示为：

$$y = \frac{T_1 \cos \alpha_1}{\sigma g} \cosh\left(\frac{\sigma g}{T_1 \cos \alpha_1} x + \sinh^{-1}(\tan \alpha_1)\right) - \frac{T_1 \cos \alpha_1}{\sigma g} \cosh(\sinh^{-1}(\tan \alpha_1))$$

a. 锚链无沉底时

锚链末端纵坐标为 y_1 ，横坐标为 x_1 ，由于锚链从坐标系原点开始，全部锚链均高于海水底面。对锚链总长度进行曲线积分得：

$$\int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = s, y_1 = y(x_1) \quad (8)$$

锚链末段满足：

$$y'|_{x_1} = \tan \alpha_2$$

其中 s 为锚链长度，此问中为已知量。

b. 锚链有沉底时

锚链沉在水底部分的长度为 x_0 米，锚链末端纵坐标为 y_1 ，横坐标为 x_1 ，由于锚链从 $(x_0, 0)$ 点开始，右侧的锚链均高于海水底面。对锚链总长度进行曲线积分得：

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = s - x_0, y_1 = y(x_1) \quad (9)$$

锚链末段仍然满足：

$$y'|_{x_1} = \tan \alpha_2$$

其中 s 为锚链长度。

(2) 钢桶与重物球的受力平衡和力矩平衡

将钢桶和重物球作为一个整体进行受力分析，如图 3 所示，

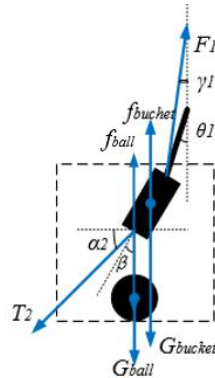


图 3 钢桶和重物的整体受力分析图示

在图 3 中,钢桶与重物球整体受到四个力的作用,分别是总重力 $G_{bucket}+G_{ball}$,钢桶浮力 f_{bucket} ,钢球浮力 f_{ball} ,左侧锚链的拉力 T_2 ,右侧钢管的拉力 F_1 。

最下面一节钢管记为钢管 1,钢桶及钢管 1 各角度表示如上图所示。钢桶中心轴线与竖直方向的夹角为 β ;钢桶与锚链接触的位置处锚链的切线方向与 x 轴正向的夹角为 α_2 ;钢管 1 与竖直方向的夹角记为 θ_1 ;钢管 1 的下端力的方向与钢桶中心轴线的夹角为 γ_1 。

按照锚链中所选取的参考系,钢桶重物球系统在 x 轴 y 轴方向受力平衡:

$$\begin{cases} x: F_1 \sin \gamma_1 = T_2 \cos \alpha_2 \\ y: G_{bucket} + G_{ball} + T_2 \sin \alpha_2 = f_{ball} + f_{bucket} + F_1 \cos \gamma_1 \end{cases} \quad (10)$$

其中 $T_2, F_1, \gamma_1, \alpha_2, f_{ball}, f_{bucket}$ 的含义见图 3。

由于钢桶可以绕质心旋转,应对该整体进行受力和力矩分析。为使该整体处于平衡状态,需要各个力达到力矩平衡。因为钢桶重力、浮力均可认为作用在质心,不产生力矩,而重物球重力 G_{ball} 、左侧锚链的拉力 T_2 、右侧钢管的拉力 F_1 均会产生力矩。

根据力矩定义: $M=L \times F=LF \sin \lambda$ 。其中 M 为力矩, F 为受力; L 为力臂; λ 为 F 与 L 的矢量夹角。对于钢管 1,计算力矩时 λ 为 $\beta - \gamma_1$;对于钢桶与左侧锚链接触的位置,计算力矩时 λ 为 $\pi/2 - \alpha_2 - \beta$ 。对于重物球,计算力矩时所用角度为 β 。

因此钢桶的力矩平衡式如下:

$$G_{ball}L \sin \beta + F_1L \sin(\beta - \gamma_1) = T_2L \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \beta\right) \quad (11)$$

其中 G_{ball} 为重物球重力, F_1 为右侧钢管的拉力, T_2 为左侧锚链的拉力。

(3) 四根钢管的受力平衡与力矩平衡

4 节钢管从下至上依次记为钢管 1, 钢管 2, 钢管 3, 钢管 4。对于系泊系统的四段钢管部分,每一段都是受到重力 G_{pipe} 、浮力 f_{pipe} 、钢管左侧的拉力和右侧的拉力。记 1 号钢管左侧拉力为 F_1 , 右侧拉力为 F_2 ; 由 1 号 2 号钢管连接处微分的受力平衡可知, 2 号钢管左侧拉力为 F_2 , 右侧拉力为 F_3 。以此类推, 4 号钢管左侧拉力为 F_4 , 右侧与浮标连接处的拉力为 F_5 。

故 1 号钢管的受力分析与力矩分析如图 4:

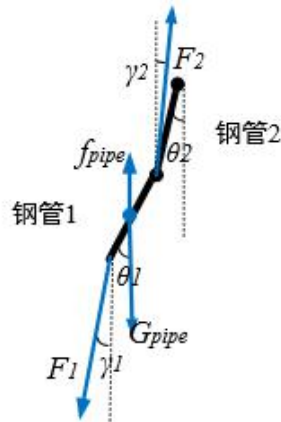


图 4 钢管 1 的受力分析图示

$$\text{受力平衡: } \begin{cases} G_{pipe} + F_1 \cos \gamma_1 = f_{pipe} + F_2 \cos \gamma_2 \\ F_1 \sin \gamma_1 = F_2 \sin \gamma_2 \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{力矩平衡: } F_1 L \sin(\gamma_1 - \theta_1) = F_2 L \sin(\theta_1 - \gamma_2)$$

同理，2 号钢管受力平衡与力矩平衡方程为：

$$\begin{cases} G_{pipe} + F_2 \cos \gamma_2 = f_{pipe} + F_3 \cos \gamma_3 \\ F_2 \sin \gamma_2 = F_3 \sin \gamma_3 \\ F_2 L \sin(\gamma_2 - \theta_2) = F_3 L \sin(\theta_2 - \gamma_3) \end{cases} \quad (13)$$

3 号钢管的受力平衡与力矩平衡方程为：

$$\begin{cases} G_{pipe} + F_3 \cos \gamma_3 = f_{pipe} + F_4 \cos \gamma_4 \\ F_3 \sin \gamma_3 = F_4 \sin \gamma_4 \\ F_3 L \sin(\gamma_3 - \theta_3) = F_4 L \sin(\theta_3 - \gamma_4) \end{cases} \quad (14)$$

4 号钢管的受力平衡与力矩平衡方程为：

$$\begin{cases} G_{pipe} + F_4 \cos \gamma_4 = f_{pipe} + F_5 \cos \gamma_5 \\ F_4 \sin \gamma_4 = F_5 \sin \gamma_5 \\ F_4 L \sin(\gamma_4 - \theta_4) = F_5 L \sin(\theta_4 - \gamma_5) \end{cases} \quad (15)$$

其中力臂长度 L 均相等；钢管 1,2,3,4 与竖直方向的夹角分别记为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ；钢管 1,2,3,4 的下端力的方向与钢桶中心轴线的夹角分别为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ；1 号钢管左侧拉力为 F_1 ，右侧拉力为 F_2 ；2 号钢管左侧拉力为 F_2 ，右侧拉力为 F_3 ；以此类推 4 号钢管左侧拉力为 F_4 ，右侧拉力为 F_5 ；每一段钢管的重力为 G_{pipe} ，浮力为 f_{pipe} 。

(4) 浮标受力分析

对于浮标而言，当水流力为零时，共受到四个力作用，分别为 4 号钢管的拉力 F_5 ，自身重力 G_{buoy} ，水面风力 F_{wind} 以及自身浮力 f_{buoy} 。当不考虑浮标倾斜时，浮标吃水深度最终将稳定为长度 d ，浮标在四个力的作用下保持平衡。

$$\text{竖直方向受力平衡: } f_{buoy} = G_{buoy} + F_5 \cos \gamma_5 \quad (16)$$

$$\text{水平方向受力平衡: } F_5 \sin \gamma_5 = F_{wind} \quad (17)$$

式(16)中 $f_{buoy} = \rho g V = \pi \left(\frac{2}{2} \right)^2 d g \rho$ ，式(17)中 $F_{wind} = 0.625 \times S v^2 = 0.625 \times 2 \times (2 - d) v^2$

其中， γ_5 为 4 号钢管所受拉力 F_5 与竖直方向的夹角； ρ 代表海水密度； g 代表重力加速度； V 代表浮标沉在海水中的体积； S 代表物体在风向法平面的投影面积； v 为风速； d 为浮标吃水深度。

(5) 水下总高度与游动区域的计算

结合前面四部分的受力分析方程，可以列出总的高度 H 和游动区域最大半径 R 的方程。

水下总高度 H 在此问中取定值 18m，可以表示为锚链末端纵坐标 y_1 、钢桶和 4 根钢管的 y 轴投影长度、浮标吃水深度 d 之和：

$$H = y_1 + l_{bucket} \cos \beta + l_{pipe} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 + \cos \theta_4) + d \quad (18)$$

式(18)中 y_1 可以由锚链形状的方程确定，即 $\int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = s, y_1 = y(x_1)$

其中 s 为锚链长度,此问中为已知量, x_1 和 y_1 分别代表锚链末端 C 点的横坐标和纵坐标。 l_{bucket} 为钢桶长度, l_{pipe} 为钢管长度, $\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4$ 分别代表钢管 1-4 的倾斜角度, β 代表钢桶倾斜角度, d 代表浮标吃水深度。

将游动区域理解为一个圆形区域,当风力达到最大且方向保持不变时,该圆形区域的半径达到最大。最大半径值等于稳定后系泊系统各个部分在水平方向投影的总长度。因此游动区域的最大半径 R 可以表示为锚链末端横坐标 x_0 , 钢桶和 4 根钢管的 x 轴投影长度之和:

$$R = x_0 + l_{bucket} \sin \beta + l_{pipe} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4) \quad (19)$$

5.1.2 模型汇总

基于上述(1)-(5)的分析,共得到 20 个从系泊系统底部到顶部的刚体力学方程。通过求解这 20 个方程构成的刚体力学方程组可以得到钢桶的倾斜角度 β , 各节钢管的倾斜角度 γ 、锚链形状 $y(x)$ 、浮标的吃水深度 d 和一些中间变量。通过对前面所求出变量的组合,可以求出浮标的游动区域半径 R 。

最终需要求解出数值的变量为:钢桶的倾斜角度 β , 各节钢管的倾斜角度 γ , 悬链左端倾角 α_0 , 锚链形状 $y(x)$ 的图像, 浮标的游动区域半径 R 。

刚体力学方程组共包含的 20 个变量,按照系泊系统从下到上的方程组求解排列顺序、各参数的求解顺序罗列如下:

刚体力学方程组(12)-(19)表示为:

$$\begin{aligned} \text{锚链:} \quad \begin{cases} \text{无沉底:} \begin{cases} \int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx = s, y_1 = y(x_1) \\ y'|_{x_1} = \tan \alpha_2 \end{cases} \\ \text{有沉底:} \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx = s - x_0, y_1 = y(x_1) \\ y'|_{x_1} = \tan \alpha_2 \end{cases} \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{钢桶及重物球:} \quad \begin{cases} x: F_1 \sin \gamma_1 = F_{wind} \\ y: G_{bucket} + G_{ball} + \frac{F_{wind}}{\cos \alpha_2} \sin \alpha_2 = f_{ball} + f_{bucket} + F_1 \cos \gamma_1 \\ G_{ball} L \sin \beta + F_1 L \sin (\beta - \gamma_1) = \frac{F_{wind}}{\cos \alpha_2} L \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \beta \right) \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{钢管 1:} \quad \begin{cases} G_{pipe} + F_1 \cos \gamma_1 = f_{pipe} + F_2 \cos \gamma_2 \\ F_1 \sin \gamma_1 = F_2 \sin \gamma_2 \\ F_1 L \sin (\gamma_1 - \theta_1) = F_2 L \sin (\theta_1 - \gamma_2) \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{钢管 2:} \quad \begin{cases} G_{pipe} + F_2 \cos \gamma_2 = f_{pipe} + F_3 \cos \gamma_3 \\ F_2 \sin \gamma_2 = F_3 \sin \gamma_3 \\ F_2 L \sin (\gamma_2 - \theta_2) = F_3 L \sin (\theta_2 - \gamma_3) \end{cases} \quad (23)$$

$$\text{钢管 3:} \quad \begin{cases} G_{pipe} + F_3 \cos \gamma_3 = f_{pipe} + F_4 \cos \gamma_4 \\ F_3 \sin \gamma_3 = F_4 \sin \gamma_4 \\ F_3 L \sin (\gamma_3 - \theta_3) = F_4 L \sin (\theta_3 - \gamma_4) \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{钢管 4: } \begin{cases} G_{pipe} + F_4 \cos \gamma_4 = f_{pipe} + F_5 \cos \gamma_5 \\ F_4 \sin \gamma_4 = F_5 \sin \gamma_5 \\ F_4 L \sin(\gamma_4 - \theta_4) = F_5 L \sin(\theta_4 - \gamma_5) \end{cases} \quad (25)$$

$$\text{浮标: } \begin{cases} \pi \left(\frac{2}{2} \right)^2 dg \rho = G_{buoy} + F_5 \cos \gamma_5 \\ F_5 \sin \gamma_5 = 0.625 \times 2 \times (2 - d) v^2 \end{cases} \quad (26)$$

$$\text{总高度: } H = y_1 + l_{bucket} \cos \beta + l_{pipe} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 + \cos \theta_4) + d \quad (27)$$

上述 20 个方程为一个不可分割的整体，各参数在方程中出现和求解的顺序如下图所示：



图 5 各参数在方程中出现和求解的顺序

式(20)中

$$y = \frac{T_1 \cos \alpha_1}{\sigma g} \cosh \left(\frac{\sigma g}{T_1 \cos \alpha_1} x + \sinh^{-1}(\tan \alpha_1) \right) - \frac{T_1 \cos \alpha_1}{\sigma g} \cosh(\sinh^{-1}(\tan \alpha_1)) \quad (28)$$

$$\text{游动区域的最大半径: } R = x_0 + l_{bucket} \sin \beta + l_{pipe} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4) \quad (29)$$

其中各个力矩平衡方程中力臂长度均相等，钢管 1,2,3,4 与竖直方向的夹角分别记为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ，钢管 1,2,3,4 的下端力的方向与钢桶中心轴线的夹角分别为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ，1 号钢管左侧拉力为 F_1 ，右侧拉力为 F_2 ，2 号钢管左侧拉力为 F_2 ，右侧拉力为 F_3 ，以此类推 5 号钢管左侧拉力为 F_4 ，右侧拉力为 F_5 ，每一段钢管的重力为 G_{pipe} ，浮力为 f_{pipe} 。重物球所受浮力为 f_{ball} ， β 代表钢桶与竖直线夹角； ρ 代表海水密度， g 代表重力加速度； v 代表浮标沉在海水中的体积； S 代表为物体在风向法平面的投影面积(m^2)， v 为风速(m/s)； m_{ball} 为重物球质量。

5.1.3 模型的求解算法

某型传输节点选用 II 型电焊锚链 22.05m，选用的重物球的质量为 1200kg。现将该型传输节点布放在水深 18m、海床平坦、海水密度为 $1.025 \times 103 \text{ kg/m}^3$ 的海域。若海水静止，分别计算海面风速为 12m/s 和 24m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

(1) 算法分析：

由 5.1.2 节可知，有 20 个力学方程组，20 个待求未知量，可以通过 MATLAB 的“fsolve”函数^[3]来求解方程组。因锚链可能会有一部分贴在海底地面上(即拖

地现象), 故要对这两种情况进行判断。

(2) 算法步骤:

Step1: 由于需要进行锚链是否有贴在海底部分的判断, 利用 MATLAB 的“fsolve”函数及力学方程组函数“方程 1”和“方程 2”: 其中方程 1 表示锚链存在拖地部分, 方程 2 表示锚链不存在拖地部分。对于不存在拖地的情况, 需要将原未知量锚链与海底夹角赋值 0, 增加锚链贴在海底的长度为未知量。

Step2: 为了用“fsolve”求解方程组, 要反复设置并调整“fsolve”函数的迭代初始值 x_0 , 当求解方程组返回值 $\text{exitflag}=1$ 时, 表示对于此方程组而言该初始解 x_0 是可行、可取的。

Step3: 调用“fsolve”函数, 先以“方程 1”为子程序, 对 20 个力学方程求解, 并绘出锚链线的形状图。

Step4: 比较得到的锚链与海底的夹角与 0 的大小, 如果锚链与海底夹角 α_1 小于 0, 则表示锚链会有一段贴在海底地面上。需要再次调用“方程 2”并计算锚链拖地的长度, 并绘出锚链线的形状图。

5. 1. 4 模型的求解结果及分析

(一) 海面风速为 12m/s

求解得到的钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度和游动区域最大半径如下表:

表 1 海面风速为 12m/s 时系泊系统参数表	
海面风速为 12m/s	计算值
钢桶与竖直线夹角 β	1.1353°
钢管 1 倾斜角度 θ_1	1.0887°
钢管 2 倾斜角度 θ_2	1.0802°
钢管 3 倾斜角度 θ_3	1.0719°
钢管 4 倾斜角度 θ_4	1.0637°
浮标吃水深度 d	0.7087m
游动区域最大半径 R	14.3341m

绘制的锚链形状图形如下:

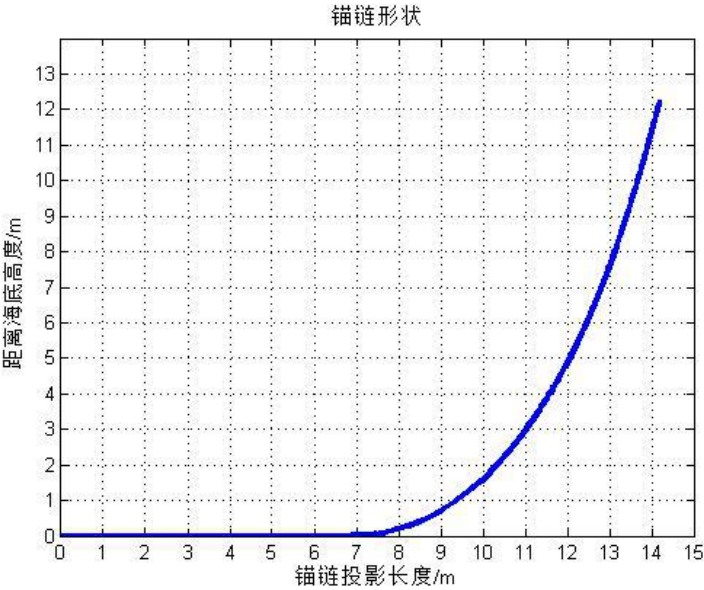


图 6 海面风速为 12m/s 时锚链形状图形

根据图 6 可知，锚链末端与锚的衔接处的切线方向与海床的夹角为 0 度，即锚链有一部分沉在海床面上，之后角度再逐渐增大。经过计算，锚链沉在海床上的长度为 6.7401m，水中锚链部分在 x 轴的投影长度为 7.4992m，在 y 轴的投影长度为 12.2922m。分析原因可知，由于海面风速较小，风力也较小，因此锚链不需要全部伸展就可以使得浮标达到平衡，证明了求解的正确性。

(二)海面风速为 24m/s

求解得到的钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度和游动区域最大半径如下表

表 2 海面风速为 24m/s 时系泊系统参数表

海面风速为 24m/s	计算值
钢桶与竖直线夹角 β	4.3158°
钢管 1 倾斜角度 θ_1	4.1457°
钢管 2 倾斜角度 θ_2	4.1147°
钢管 3 倾斜角度 θ_3	4.0841°
钢管 4 倾斜角度 θ_4	4.0540°
浮标吃水深度 d	0.7231m
游动区域最大半径 R	17.4809m

对比表 1 和表 2 进行分析，当风速由 12m/s 增加到 24m/s 时，由于风力增大，钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度、游动区域最大半径均有不同幅度地增加，但是钢桶与竖直线夹角仍在 5 度范围内，因此设备的工作效果可以得到保证。

绘制的锚链形状图形如下：

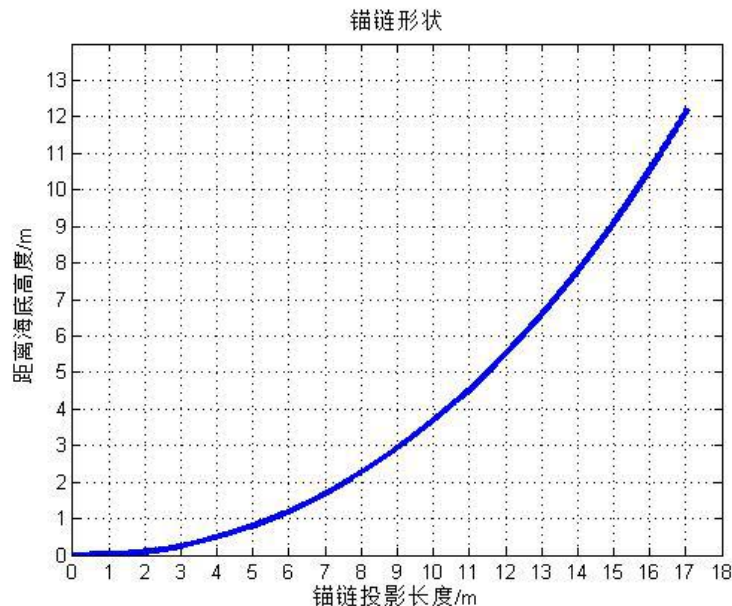


图 7 海面风速为 24m/s 时锚链形状图形

根据图 7 可知，锚链沉在海床上的长度为 0.1307 m，处于脱离海床的边缘，因此锚链末端与锚的衔接处的切线方向与海床的夹角仍为 0 度。水中锚链部分在 x 轴的投影长度为 16.9891m，在 y 轴的投影长度为 12.2900 m。由此可知，当风

速增加时，风力的增大对锚链形状的影响很大。

5.2 海水静止时的系泊系统多目标优化模型

在问题 1 的假设下，即锚链长度和型号、水深及海水密度不变时，改变重物球的质量，会导致钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域均有所不同。通过优化模型，在满足钢桶的倾斜角度不超过 5 度、锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度的情况下，找出尽可能小的浮标的吃水深度、游动区域最大半径及钢桶倾斜角度所对应的的重物球质量，即为最优的设计。

5.2.1 建模前的准备

由于锚链是否有沉在海床的部分对锚链形状及重物球质量的选择影响较大，因此需要先进行判断。类似于模型 1 中的处理方式，假设锚链没有沉在海床的部分，尝试计算锚链左端点 A 端切线方向与 x 轴正方向的夹角 α_1 。若 $\alpha_1 < 0$ ，则表示假设不成立，证明此时锚链有沉在海床的部分，对锚链悬挂部分的处理应采用(20)式无沉底；若求得 $\alpha_1 > 0$ ，则表示假设成立，锚链没有沉在海床的部分，全部处于悬挂状态，对锚链部分的处理应采用(20)式有沉底部分。经过上述处理后，然后调节重物球质量 G_{ball} ，使得钢桶倾角 ≤ 5 度，锚链左端点与海床夹角 ≤ 16 度。同时要使得浮标的吃水深度，游动区域最大半径，钢桶倾斜角度都尽可能地小，基于此建立多目标优化模型。

5.2.2 多目标优化模型的建立

(1) 优化目标一：钢桶倾斜角度最小

按题目所述，钢桶竖直时，水声通讯设备的工作效果最佳，若钢桶倾斜则影响设备的工作效果。当钢桶与竖直方向的夹角即倾斜角超过 5 度时，设备工作效果较差，所以保证钢桶倾斜角度 β 最小是系泊系统正常工作的重要条件。钢桶倾斜角度 β 可由方程组(20)-(27)联立求解得到，分析由于 m_{ball} 的改变，使得(20)-(27)式方程形式完全不变，但是钢桶左侧受力的大小发生变化，从而引起刚体力学的 20 个方程的求解结果发生改变，因而钢桶的倾斜角度由于受到钢桶受力平衡和力矩平衡方程所影响，也同样发生变化。

按照问题 1 假设，锚链长度和型号、水深及海水密度均已知。因此当重物球质量 m_{ball} 确定时，(20)-(27)方程中各参数和结果均已确定， β 仅受重物球质量 m_{ball} 影响。

故优化目标一可以表示为：

$$\min \beta(m_{ball})$$

(2) 优化目标二：浮标的吃水深度最小

题目要求系泊系统的设计要使得浮标的吃水深度 d 尽可能小， d 处于(20)-(27)方程中，不能独立求解。由优化目标一中的分析可知由于 m_{ball} 的改变，钢桶倾斜角度改变，刚体力学方程组求解的 1-4 号钢管倾斜角度也发生改变，4 号钢管倾斜角度的改变会使得浮标竖直方向受力发生改变，即浮标浮力发生改变，故浮标的吃水深度发生改变。故这时浮标吃水深度的变化也完全取决于重物球质量的变化。

同样利用问题 1 提供的数据，当重物球质量 m_{ball} 确定时，各参数和结果均可通过(20)-(27)式确定，故吃水深度 d 仅受重物球质量 m_{ball} 影响。该优化目标可以表示为：

$$\min d(m_{ball})$$

(3) 优化目标三：游动区域的半径最小

系泊系统的设计中同样要求浮标的游动区域要尽可能小，按照模型 1 中的分析，当风力等外界因素大小固定、方向任意时，浮标的游动区域可以表示为以锚为起点的最大半径为 R 的圆，由上述分析可知，重物球质量改变时，钢桶，钢管各倾角，锚链形状均会发生改变， R 即为系泊系统水平方向的投影长度， R 的求解基于(29)式，故该问中游动区域半径也完全也完全取决于重物球质量的变化。

同样利用问题 1 提供的数据，游动区域仅受重物球质量 m_{ball} 影响，通过(20)-(29)式联立可以求解。该优化目标可以表示为：

$$\min R(m_{ball})$$

(4) 决策变量与约束条件

通过对优化目标一，二，三的分析可知，唯一的决策变量即为重物球质量 m_{ball} 。由于问题 1 中重物球质量为 1200kg，重力加速度 g 取 $9.8m/s^2$ ，故在此先大致限定重物球范围，再求解过程中可以进一步修正：

$$1200 \leq m_{ball} \leq 5000$$

约束条件即为锚链在锚链左端点 A 端切线方向与 x 轴正方向的夹角 α_1 不超过 16 度，钢桶倾斜角度不超过 5 度。由于优化目标一为钢桶倾斜角度最小，所以只需在最后检验钢桶倾角是否满足不超过 5 度的条件。此外还需验证浮标是否露在水面上、以及各指标参数是否符合常理。因此限定 α_1 如下：

$$0^\circ \leq \alpha_1 \leq 16^\circ$$

(5) 多目标优化模型的最终确立

基于(2)(3)(4)的分析，对于重物球质量的选择的问题，建立多目标优化模型如下：

$$\begin{aligned} \min & \beta(m_{ball}) \\ \min & d(m_{ball}) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \min & R(m_{ball}) \\ s.t. & \begin{cases} 1200 \leq m_{ball} \leq 5000 \\ 0^\circ \leq \alpha_1 \leq 16^\circ \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

其中 α_1 表示锚链左端点 A 端切线方向与 x 轴正方向的夹角， m_{ball} 为重物球质量大小， β 为钢桶的倾斜角度，求解基于方程组(20)-(27)； d 为浮标吃水深度，求解基于方程组(20)-(27)； R 为浮标游动区域的最大半径，求解基于(29)式。

先对三个目标函数进行无量纲化处理，再采用线性加权法对三个目标函数进行归一化处理，将多目标函数化归为单目标函数：

$$\begin{aligned} \min & \lambda_1 \frac{\beta(m_{ball})}{\beta_{max}} + \lambda_2 \frac{d(m_{ball})}{d_{max}} + \lambda_3 \frac{R(m_{ball})}{R_{max}} \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{aligned}$$

其中权重 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 代表了每个目标函数的重要程度，三个权重之和等于 1。 $\beta_{max}, d_{max}, R_{max}$ 分别代表在所选取的自变量范围内，钢桶倾斜角度，浮标吃水深度，浮标游动区域的半径可能达到的最大值。对不同的权重组合进行求解并对结果进行比较和分析。

5.2 模型的求解算法

(1) 算法分析：

对于风速 $V_{\text{wind}}=36\text{m/s}$ 时，钢桶，各根钢管的倾角，锚链形状和浮标游动区域的计算问题，只需要将问题 1 中的求解程序中风速参数进行修改即可。

对于重新设计重物球质量使得优化目标函数达到最优的问题。可以将重物球质量 M_{ball} 作为全局变量以便修改。在主程序中，使用 for 函数，以重物球质量 M_{ball} 循环，并通过钢桶倾角、锚链左侧与海面夹角等约束条件，查找满足条件的重物球质量的可行解，然后以优化目标最小为标准，从这些可行解找到最优解。

(2) 算法步骤：

Step1: 类似模型一的求解步骤 step1，编写函数判断有拖地或无拖地的情况下，20 个力学方程的求解，程序中需要修改风速 $V_{\text{wind}}=36\text{m/s}$ ，重物球质量取决于全局变量的设定。

Step2: 编写主程序，计算不同的重物球质量下，满足使用“for”函数对重物球质量 M_{ball} 从 1200 遍历到 5000，求解钢桶钢管倾角，浮标吃水深度，浮标游动区域的半径。通过判断模型 2 中约束指标锚链左侧与海面夹角 $<16^\circ$ ，钢桶倾角小于 5° 等。进行选取可行解。

Step3: 对目标函数进行无量纲化和归一化：将钢桶倾角、吃水深度、区域半径除以各自最大值，并以不同的权重组合，如 0.8:0.1:0.1，0.4:0.3:0.3，1/3:1/3:1/3，0.1:0.8:0.1 加权相加得到不同的优化目标，用“min”函数查找新的优化目标的最优解，得到决策变量值：重物球质量“Mball”。并对不同权重组合下求得的结果进行比较。

5. 2. 3 模型求解结果及分析

(一)海面风速为 36m/s，重物球质量为 1200kg 时

求解得到的钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度、游动区域最大半径和锚链左端点 A 端切线方向与 x 轴正方向的夹角 α_1 如下表：

表 3 重物球质量为 1200kg 时系泊系统参数表

重物球质量为 1200kg	计算值
钢桶与竖直线夹角 β	8.9804°
钢管 1 倾斜角度 θ_1	8.6485°
钢管 2 倾斜角度 θ_2	8.5878°
钢管 3 倾斜角度 θ_3	8.5279°
钢管 4 倾斜角度 θ_4	8.4688°
浮标吃水深度 d	0.7448m
游动区域最大半径 R	18.7654m
锚链左端切线方向与海床夹角 α_1	18.3881°

根据表 3 可知，仍采用问题 1 中假设的情况下，即重物球质量仍取值 1200kg，且锚链长度和型号、水深及海水密度不变时，锚链左端点 A 端切线方向与 x 轴正方向的夹角 α_1 达到了 18.3881° 度，超过题目中规定的 16° 度。此时钢桶倾斜角度为 8.9804° 度，也超过了 5° 度的上限。由此可知，重物球质量过低会导致系泊系统设备工作效果较差，甚至锚被拖行从而致使节点移位丢失。

绘制的锚链形状图形如下：

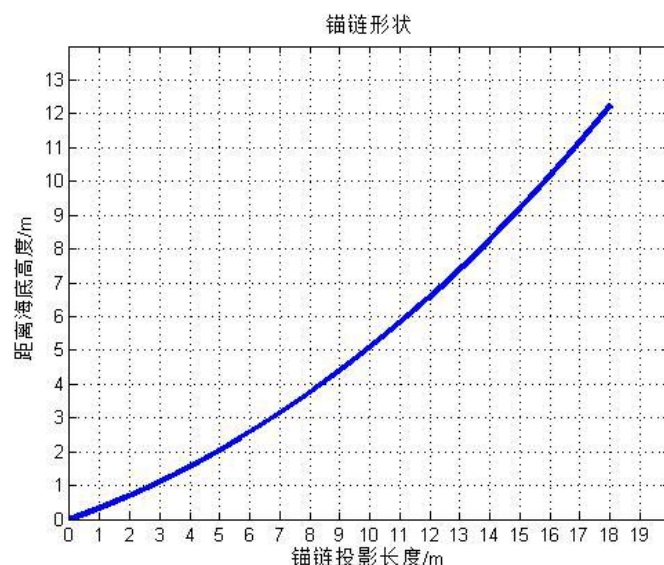


图 8 重物球质量为 1200kg 时锚链形状图形

(二) 调节重物球质量时

根据(一)中结果可知，重物球质量过小会导致设备无法工作，因此需要调节重物球的质量，使得钢桶的倾斜角度不超过 5 度，锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。将重物球质量视为变量，绘制吃水深度 d 、钢桶的倾斜角度 β 、游动区域半径 R 、锚链左端点 A 端切线方向与 x 轴正方向的夹角 α_1 和优化目标加权

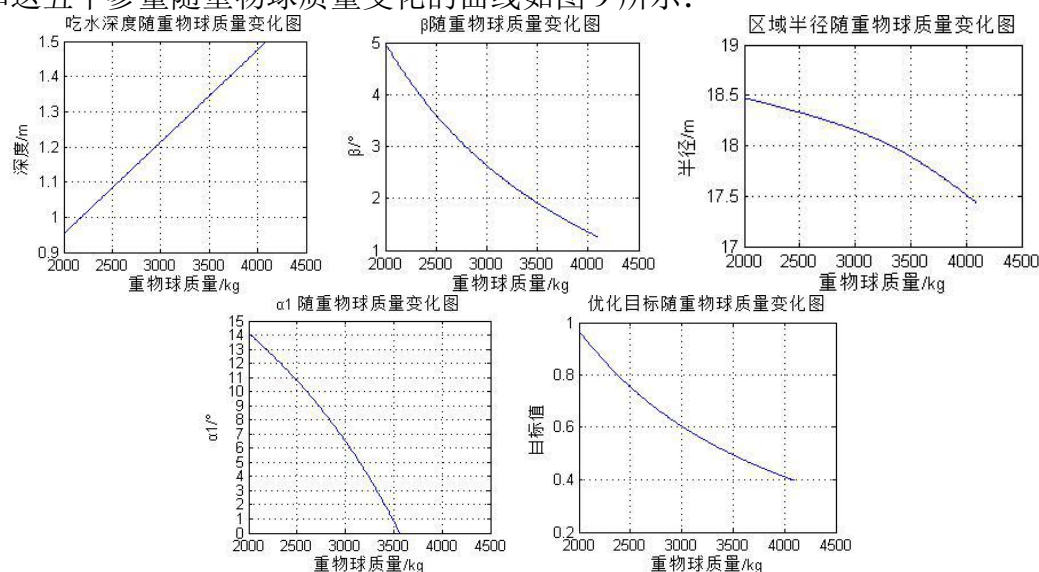


图 9 参量 d 、 α_1 、 β 、 R 及优化目标随重物球质量的变化曲线

根据图 9 可知，钢桶的倾斜角度 β 、游动区域半径 R 、锚链左端点 A 端切线方向与 x 轴正方向的夹角 α_1 和优化目标值均随重物球质量增加而减小，而吃水深度 d 随重物球质量增加而增加。

当优化目标钢桶倾角 β ：吃水深度 d ：区域半径 R 的权重比值 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ 分别为 0.8:0.1:0.1、0.4:0.3:0.3、1/3:1/3:1/3、0.1:0.8:0.1 时，求得重物球质量、钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度、游动区域最大半径和锚链左端点 A 端切线方向与 x 轴正方向的夹角 α_1 如下表：

表 4 不同权重 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 组合时系泊系统参数表

不同权重组合 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	0.8,0.1,0.1	0.4,0.3,0.3	1/3,1/3,1/3	0.1,0.8,0.1
重物球质量	4090kg	4090kg	4090kg	2010kg
钢桶倾角 β	1.2664°	1.2664°	1.2664°	4.9550°
钢管 1 倾斜角度 θ_1	1.2492°	1.2492°	1.2492°	4.8313°
钢管 2 倾斜角度 θ_2	1.2461°	1.2461°	1.2461°	4.8084°
钢管 3 倾斜角度 θ_3	1.2427°	1.2427°	1.2427°	4.7857°
钢管 4 倾斜角度 θ_4	1.2397°	1.2397°	1.2397°	4.7631°
浮标吃水深度 d	1.4995m	1.4995m	1.4995m	0.9556m
游动区域最大半径 R	17.4354m	17.4354m	17.4354m	18.4735m
锚链左端切线方向与海床夹角 α_1	0°	0°	0°	14.0765°

对比不同权重可知，当优化目标—钢桶倾角最小分别处于绝对重要、相对重要、各优化目标同等重要时，得到的重物球质量均需要增加到 4090kg 时。当优化目标—吃水深度最小处于绝对重要时，所需重物球质量为 2010kg。综上可知，三个优化目标中钢桶倾角最小这个目标处于决定性的作用。按照题意，应使得钢桶倾角最小这个目标处于主要地位以保证系泊系统工作状态最佳，所以最终确定重物球质量为 4090kg，（重力为 $4090\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2 = 40082\text{N}$ ）

上述重物球质量达到最优的条件下(即重物球质量为 4090kg)，锚链左端点 A 端切线方向与 x 轴正方向的夹角 α_1 为 0 度(即存在锚链沉在海床上的部分)，满足不超过 16 度的条件。此时钢桶倾斜角度减小至 1.2664 度，同样满足不超过 5 度的条件。由此可知，此时系泊系统的设备可以正常工作。

绘制的锚链形状图形如下：

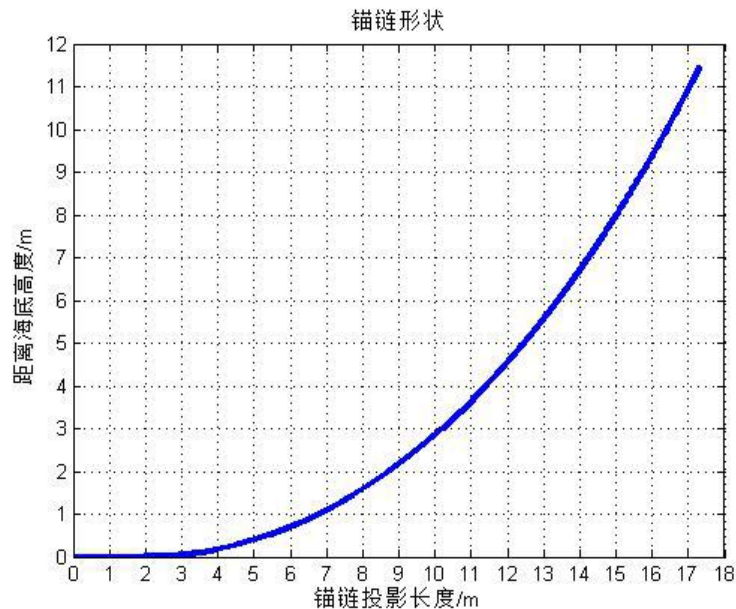


图 10 重物球质量为 4090kg 时锚链形状图形

5.3 考虑风力、水流力和水深的系泊系统优化模型

5.3.1 模型前准备

(1)同时考虑风力，水流力，水深时，与模型 2 相比，外界的条件由水深 18m、

海水流速=0m/s、风速最大 36m/s，变化为水深 16m-20m、海水流速最大 1.5m/s、风速最大可达到 36m/s。基于前面的结果分析不难得知，流速和风速越大，系泊系统越危险，且需要考虑不同水深水流不同造成的影响。因此需要合理设计系泊系统的参数，使得其在不同情况下均可达到最优的工作状态。

(2)系泊系统参数确定后，对于题目中的所提到的不同情况，将其理解为：

a.水流力与风力的夹角分别为同向、反向、相互垂直的情况；

b.水流速度从海面到海底的规律分别为各点水流速度相同、水流速度自上而下线性递减或者其他形式；

c.实测水深分别为 16m、17m、18m、19m、20m 的情况。

因此，首先需要分析水流力与风力的三种夹角的受力情况，对于水流速度的变化规律及实测水深分别进行讨论。然后利用多目标优化模型确定不同情况下最优的锚链型号、长度和重物球质量。

5.3.2 水流力与风力的三种夹角下的受力分析

由模型 1 中所推导的方程(20)-(27)可知，当考虑水流力时，水流力仅对水平方向作用力有影响，对竖直方向作用力和力矩均无影响。将钢管作用力的作用点简化为钢管中心，根据模型 2 中求解结果显示，钢桶与各钢管的夹角均小于 2 度，因此可以将水流力 F_{water} 对钢桶和钢管的作用面积视为钢桶和钢管的纵截面积。

每一截钢管所受到的水流力： $F_{wat_pipe} = 374 \times S v^2 = 374 \times 1 \times 50 \times 10^{-3} \times v^2$

钢桶所受到的水流力： $F_{wat_bucket} = 374 \times 1 \times 30 \times 10^{-2} \times v^2$

浮标所受到的水流力： $F_{wat_float} = 374 \times 2 \times d \times v^2$

下面对各点水流速度相同时，水流力与风力的夹角分别为同向、反向、相互垂直的情况，以及各点水流速度不同时水流力的计算分别进行讨论：

(1) 水流力与风力同向时

此时系泊系统的受力仍然处于同一个平面内，对锚链进行受力分析，基于模型一中锚链线方程的推导，可知加入水流力后，锚链线函数 $y(x)$ 发生如下改变：

$$\begin{aligned} y &= \frac{F_{wind}}{\sigma g} \cosh \left(\frac{\sigma g}{F_{wind}} x + \sinh^{-1}(\tan \alpha_1) \right) - \frac{F_{wind}}{\sigma g} \cosh \left(\sinh^{-1}(\tan \alpha_1) \right) \\ \Rightarrow y &= \frac{F'}{\sigma g} \cosh \left(\frac{\sigma g}{F'} x + \sinh^{-1}(\tan \alpha_1) \right) - \frac{F'}{\sigma g} \cosh \left(\sinh^{-1}(\tan \alpha_1) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

其中改变后的力 F' 表示为 $F' = F_{wind} + 4F_{wat_pipe} + F_{wat_bucket} + F_{wat_float}$ (33)

对钢桶重新进行受力和力矩分析，由于钢桶左侧力由 F_{wind} 变为 F' ，因此和模型一相比，钢桶受力平衡的方程组发生如下改变：

$$\begin{cases} x: F_1 \sin \gamma_1 = F_{wind} \\ y: G_{bucket} + G_{ball} + \frac{F_{wind}}{\cos \alpha_2} \sin \alpha_2 = f_{ball} + f_{bucket} + F_1 \cos \gamma_1 \\ G_{ball} L \sin \beta + F_1 L \sin(\beta - \gamma_1) = \frac{F_{wind}}{\cos \alpha_2} L \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \beta \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x: F_1 \sin \gamma_1 = F' \\ y: G_{bucket} + G_{ball} + \frac{F'}{\cos \alpha_2} \sin \alpha_2 = f_{ball} + f_{bucket} + F_1 \cos \gamma_1 \\ G_{ball} L \sin \beta + F_1 L \sin (\beta - \gamma_1) = \frac{F'}{\cos \alpha_2} L \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \beta \right) \end{cases} \quad (34)$$

对钢管进行受力分析，由于对每一根钢管，水流力对竖直方向作用力和力矩平衡式均无影响，仅对水平方向的受力平衡式有影响。因此和模型一相比，1-4号钢管水平方向上受力平衡式依次发生如下改变：

$$F_1 \sin \gamma_1 = F_2 \sin \gamma_2 \Rightarrow F_1 \sin \gamma_1 = F_2 \sin \gamma_2 + F_{wat_pipe} \quad (35)$$

$$F_2 \sin \gamma_2 = F_3 \sin \gamma_3 \Rightarrow F_2 \sin \gamma_2 = F_3 \sin \gamma_3 + F_{wat_pipe} \quad (36)$$

$$F_3 \sin \gamma_3 = F_4 \sin \gamma_4 \Rightarrow F_3 \sin \gamma_3 = F_4 \sin \gamma_4 + F_{wat_pipe} \quad (37)$$

$$F_4 \sin \gamma_4 = F_5 \sin \gamma_5 \Rightarrow F_4 \sin \gamma_4 = F_5 \sin \gamma_5 + F_{wat_pipe} \quad (38)$$

对浮标进行水平方向的受力分析，浮标受到同侧的水流力和风力，和模型一相比，水平方向的平衡方程发生如下改变：

$$F_5 \sin \gamma_5 = F_{wind} \Rightarrow F_5 \sin \gamma_5 = F_{wind} + F_{wat_float}$$

具体变化可以带入风力和水流力的公式，即：

$$F_5 \sin \gamma_5 = 0.625 \times 2 \times (2-d) v^2 \Rightarrow F_5 \sin \gamma_5 = 0.625 \times 2 \times (2-d) v^2 + 374 \times 2 \times d \times v^2 \quad (39)$$

其中：钢管 1,2,3,4 与竖直方向的夹角分别记为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ，钢管 1,2,3,4 的下端力的方向与钢桶中心轴线的夹角分别为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ，1 号钢管左侧拉力为 F_1 ，右侧拉力为 F_2 ，2 号钢管左侧拉力为 F_2 ，右侧拉力为 F_3 ，以此类推 5 号钢管左侧拉力为 F_4 ，右侧拉力为 F_5 ，每一段钢管的重力为 G_{pipe} ，浮力为 f_{pipe} 。重物球浮力为 f_{ball} ， β 代表钢桶与竖直线夹角； ρ 代表海水密度， g 代表重力加速度； V 代表浮标沉在海水中的体积； S 代表为物体在风向法平面的投影面积(m^2)， v 为风速(m/s)； m_{ball} 为重物球质量。

(2) 水流力与风力反向时

与二力同向相比，只需将水平方向的受力平衡式中含水流力的部分取反处理即可。上述 (32)-(39) 式改变为：

$$F' = F_{wind} - 4F_{wat_pipe} - F_{wat_bucket} - F_{wat_float} \quad (40)$$

$$F_1 \sin \gamma_1 = F_2 \sin \gamma_2 - F_{wat_pipe} \quad (41)$$

$$F_2 \sin \gamma_2 = F_3 \sin \gamma - F_{wat_pipe} \quad (42)$$

$$F_3 \sin \gamma_3 = F_4 \sin \gamma_4 - F_{wat_pipe} \quad (43)$$

$$F_4 \sin \gamma_4 = F_5 \sin \gamma_5 - F_{wat_pipe} \quad (44)$$

$$F_5 \sin \gamma_5 = 0.625 \times 2 \times (2-d) v^2 - 374 \times 2 \times d \times v^2 \quad (45)$$

(3) 水流力与风力垂直时

基于(1),(2)部分的计算可知，作用在钢桶上的水流力约为 252.5N，作用在每根钢管上的水流力约为 42.1N，而钢桶和钢管两端的作用力量级为 $1.5 \times 10^4 N$ 。故在近似计算时，可近似认为水下的钢管和钢桶受到的水流力可以忽略不计，仅考虑浮标所受到的水流力。

此时系泊系统的总体仍然处于一个平面内，和水流力与风力同向、反向这两

种情况不同之处在于：当水流力与风力垂直时，系泊系统的所处平面会发生旋转，最终系泊系统稳定时，以浮标所受的水流力与风力的合力为 x 轴正方向，y 轴正方向仍然为竖直向上，建立坐标系如图 11 所示：

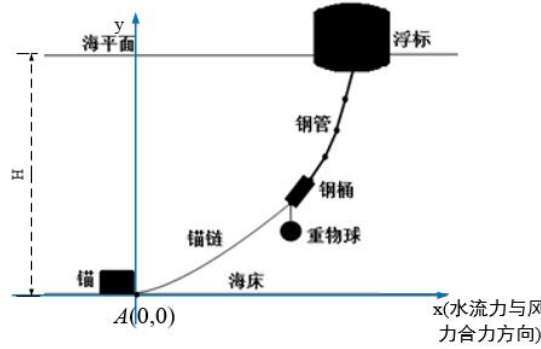


图 11 考虑水流力时的系泊系统坐标系

对比水平力与风力同向时的刚体力学方程(32)-(39)可知：

对锚链进行分析，忽略钢管，钢桶所受水流力，锚链曲线表示为

$$y = \frac{F'}{\sigma g} \cosh\left(\frac{\sigma g}{F'} x + \sinh^{-1}(\tan \alpha_1)\right) - \frac{F'}{\sigma g} \cosh(\sinh^{-1}(\tan \alpha_1)) \quad (46)$$

其中改变后的力 F' 表示为 $F' = F_{wind} + F_{wat_float}$ (47)

对钢桶和重物球重新进行受力和力矩分析，与模型二相比，钢桶左侧力发生由 F_{wind} 变为 F' ，如下改变：

$$\begin{cases} x: F_1 \sin \gamma_1 = F' \\ y: G_{bucket} + G_{ball} + \frac{F'}{\cos \alpha_2} \sin \alpha_2 = f_{ball} + f_{bucket} + F_1 \cos \gamma_1 \\ G_{ball} L \sin \beta + F_1 L \sin(\beta - \gamma_1) = \frac{F'}{\cos \alpha_2} L \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \beta\right) \end{cases} \quad (48)$$

对钢管进行受力分析，由于对每一根钢管，水流力对竖直方向作用力和力矩平衡式均无影响，仅对水平方向的受力平衡式有影响。因此和模型二相比，1-4 号钢管水平方向上受力平衡式依次发生如下改变：

$$F_1 \sin \gamma_1 = F_2 \sin \gamma_2 \quad (49)$$

$$F_2 \sin \gamma_2 = F_3 \sin \gamma_3 \quad (50)$$

$$F_3 \sin \gamma_3 = F_4 \sin \gamma_4 \quad (51)$$

$$F_4 \sin \gamma_4 = F_5 \sin \gamma_5 \quad (52)$$

对浮标进行水平方向的受力分析，浮标受到相互垂直的水流力和风力，4 号钢管的拉力的水平分量和水流力与风力的合力平衡。代入风力和水流力的公式，即：

$$F_5 \sin \gamma_5 = \sqrt{(0.625 \times 2 \times (2-d)v^2)^2 + (374 \times 2 \times d \times v^2)^2} \quad (53)$$

(4) 各点水流速度不同时水流力的计算

各点水流速度不同时，应分段处理水流力的计算。假设系泊系统在水中的每一个固定的高度 dy ，水流速度不变，视为 v_i 。参照二力同向时钢管、钢桶和浮标的水流力公式，得到：

$$\text{每一截钢管所受到的水流力: } F_{wat_pipe} = \sum_i 374 \times 1 \times 50 \times 10^{-3} \times v_i^2$$

$$\text{钢桶所受到的水流力: } F_{\text{wat_bucket}} = \sum_i 374 \times 1 \times 30 \times 10^{-2} \times v_i^2$$

$$\text{浮标所受到的水流力: } F_{\text{wat_float}} = \sum_i 374 \times 2 \times d \times v_i^2$$

5.3.3 多目标优化模型的建立

由于同时考虑风力、水流力和水深时(以下统称为外界的条件),外界条件较为复杂,要求在系泊系统最危险的情况仍能使系泊系统正常工作。因此需要合理设计系泊系统的参数:包括锚链型号 $kind$ 、锚链长度 s 、重物球质量 m_{ball} 。其中锚链型号直接影响了锚链单位长度的质量 σ_{kind} 。因此基于问题 2 所建立的多目标优化模型,找到不同情况下最优的工作状态对应的锚链型号及长度,即为最优的设计。

(1) 优化目标一: 钢桶倾斜角度最小

按题目所述,保证钢桶倾斜角度 β 最小是系泊系统正常工作的重要条件。钢桶倾斜角度 β 可由力学方程组联立求解得到,分析由于 G_{ball} , σ_{kind} , s 的改变,刚体力学方程组形式完全不变,但是钢桶左侧受重物球力的大小发生变化, σ_{kind} 使得锚链曲线方程发生改变,锚链长度同样影响了锚链在竖直方向的投影长度,从而引起刚体力学方程组的求解结果发生改变,因而钢桶的倾斜角度由于受到钢桶受力平衡和力矩平衡方程所影响,也同样发生变化。

按照问题 1 假设,锚链长度和型号、水深及海水密度均已知。因此当重物球质量 m_{ball} , 锚链型号长度 σ_{kind} , s 确定时,力学方程中各参数和结果均已确定, β 仅受重物球质量 m_{ball} , 锚链型号 σ_{kind} , 长度 s 影响。

故优化目标一可以表示为:

$$\min \beta(m_{\text{ball}}, \sigma_{\text{kind}}, s)$$

(2) 优化目标二: 浮标的吃水深度最小

题目要求系泊系统的设计要使得浮标的吃水深度 d 尽可能小, d 同样处于力学方程中,与优化目标一的受力分析相同。当重物球质量 m_{ball} 、锚链单位长度的质量 σ_{kind} 和锚链长度 s 确定时,各参数和结果均可通过力学式确定,故吃水深度仅受 m_{ball} , σ_{kind} 和 s 影响。该优化目标可以表示为:

$$\min d(m_{\text{ball}}, \sigma_{\text{kind}}, s)$$

(3) 优化目标三: 游动区域的半径最小

系泊系统的设计中同样要求浮标的游动区域要尽可能小,浮标的浮动区域表示为以锚为起点的最大半径为 R 的圆内, R 的求解即(29)式。与优化目标一的受力分析相同,游动区域仅受重物球质量 m_{ball} 、锚链单位长度的质量 σ_{kind} 和锚链长度 s 影响,通过力学方程组联立可以求解。该优化目标可以表示为:

$$\min R(m_{\text{ball}}, \sigma_{\text{kind}}, s)$$

(4) 决策变量与约束条件

通过对优化目标一,二,三的分析可知,决策变量即为重物球质量 m_{ball} 、锚链种类 $kind$ 和锚链长度 s 。

由于问题 3 中重物球质量不定,重力加速度 g 取 9.8m/s^2 ,故在此粗略限定重物球范围:

$$0 \leq m_{\text{ball}} \leq 5000$$

锚链种类 $kind=1,2,3,4,5$, 对应的锚链单位长度的质量 σ_{kind} 为:

$$\sigma_1 = 3.2, \sigma_2 = 7, \sigma_3 = 12.5, \sigma_4 = 19.5, \sigma_5 = 28.12$$

由于锚链长度 s 为决策变量，基于第一二问中的求解规律，可以先粗略地进行一定的范围约束：

$$11 \leq s \leq 30$$

题目要求锚链在左端锚点与海床的夹角 α_1 不超过 16 度，钢桶倾斜角度 β 不超过 5 度。由于上文中要求优化目标一最小，由于优化目标一为钢桶倾斜角度最小，所以只需在最后检验钢桶倾角是否满足不超过 5 度的条件。此外还需验证浮标是否露在水面上、以及各指标参数是否符合常理。因此限定 α_1 如下：

$$0^\circ \leq \alpha_1 \leq 16^\circ$$

5.3.4 模型汇总

基于上述水流力与风力的三种夹角下的受力和计算，可以得到水流力与风力同向、反向和垂直时汇总中的 20 个方程(参考模型 1 的汇总)。然后利用优化目标、约束条件与决策变量之间的关系，通过外界条件下的方程组联立求解。

(1) 刚体力学方程组（见附件 1）

(2) 多目标优化模型的最终确立

$$\min \beta(m_{\text{ball}}, \sigma_{\text{kind}}, s) \quad (54)$$

$$\min d(m_{\text{ball}}, \sigma_{\text{kind}}, s) \quad (55)$$

$$\min R(m_{\text{ball}}, \sigma_{\text{kind}}, s) \quad (56)$$

$$s.t. \begin{cases} 0 \leq m_{\text{ball}} \leq 4000 \\ \sigma_{\text{kind}} = [3.2 \quad 7 \quad 12.5 \quad 19.5 \quad 28.12] \\ 11 \leq s \leq 30 \\ 0^\circ \leq \alpha_1 \leq 16^\circ \end{cases} \quad (57)$$

其中， β 代表钢桶倾斜角度； d 代表浮标吃水深度； R 代表游动区域半径,均可由力学方程组求解；决策变量为重物球质量 m_{ball} 、锚链单位长度的质量 σ_{kind} 和锚链长度 s ，受到锚链左端与海平面夹角 α_1 的约束。

同模型 2 处理方法相同，先对三个目标函数进行无量纲化处理，再采用线性加权法归一化，将多目标优化问题化归为单目标优化：

$$\min \lambda_1 \frac{\beta(m_{\text{ball}}, \sigma_{\text{kind}}, s)}{\beta_{\max}} + \lambda_2 \frac{d(m_{\text{ball}}, \sigma_{\text{kind}}, s)}{d_{\max}} + \lambda_3 \frac{R(m_{\text{ball}}, \sigma_{\text{kind}}, s)}{R_{\max}}$$

其中权重 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 代表了每个目标函数的重要程度，三个权重之和等于 1，即 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ 。 $\beta_{\max}, d_{\max}, R_{\max}$ 分别代表在所选取的自变量范围内，钢桶倾斜角度，浮标吃水深度，浮标游动区域的半径可能达到的最大值。对不同的权重组合进行求解。

5.3.5 模型的求解算法

(1) 算法分析：

模型 3 需要先求解出系泊系统的最优设计，然后再对不同的情况进行系泊系统浮标系统的参数计算。

在 5.2.2 节基础上进行修改可以得到最优设计的三个决策变量的求解程序。调整求解方程，加上水流的影响；将锚链线密度、锚链长度、重物球质量均作为全局变量；用多重搜索，对锚链线密度、锚链长度、重物球质量遍历，根据优化目标值最小查找系泊系统的最优设计。

确定最优设计后,对于水流力方向与风力方向的不同情况,各高度的水流速度的变化,只要根据模型三修改部分力学方程组。然后参照 5.1.3 节中的算法求解钢管、钢桶倾角,区域半径,吃水深度等相关数据。

(2) 算法思想:多重搜索

因为程序对锚链线密度、锚链长度、重物球质量,进行遍历查找最优解,算法复杂度较大,求解时间较长,故采用多重搜索来减少程序运行时间。即先用较大步长即粗精度查找粗略解,再在粗略解附近用较小步长求解最优解。

(3) 算法步骤:

Step1: 由于需要进行锚链是否有贴在海底的部分的判断,利用 MATLAB 的“fsolve”函数以及力学方程组函数“方程 1”“方程 2”: 其中方程 1 表示锚链存在拖地部分,方程 2 表示锚链不存在拖地部分。

Step2: 在 5.2.2 节基础上,为了方便各子程序中对变量的调用,修改程序中与水流力相关的方程,将重物球质量“ M_{ball} ”、锚链线密度“ σ ”、锚链长度“ $maolian$ ”作为全局变量。

Step3: 为了让 MATLAB 自动进行锚链是否拖地的判断,需要编写子程序“fun”,通过求解力学方程组,对返回值中的锚链与海底夹角 α_1 是否大于 0 进行判断,得知锚链是否有贴在海底的部分,从而决定使用“方程 1”或者“方程 2”再次计算。

Step4: 编写主程序,以较大精度,使用“for”函数对重物球质量、锚链线密度、锚链长度遍历,调用子程序“fun”(作用如 step3 所述),求解钢桶倾角、钢管倾角、吃水深度、区域半径,通过判断约束指标“ $\alpha_1 < 16^\circ$ ”,“ $\beta < 5^\circ$ ”,“ $d < 5$ ”等判断进行筛选得到一系列可行解。

Step5: 对目标函数进行无量纲化和归一化:将钢桶倾角、吃水深度、区域半径除以各自最大值,并以不同的权重组合加权相加得到优化目标,用“min”函数查找新的优化目标的最优解,得到决策变量值:重物球质量“ M_{ball} ”、锚链线密度“ σ ”、锚链长度“ $maolian$ ”的粗略解。

Step6: 将精度缩小,仍然按照 step5 的方法,查找重物球质量、锚链线密度、锚链长度的最优解。并对不同权重组合下求得的结果进行比较。

Step7: 修改使用 5.1.3 中算法,对得到的最优重物球质量、锚链线密度、锚链长度,在不同深度下,各点水流速度不同时,水流力与风力夹角不同时,参照模型三进行力学方程组的修改,仿照模型 1 的求解算法可以求解钢桶倾角、吃水深度、区域半径等变量的值,并绘出锚链形状图。

5.3.6 模型的求解结果及分析

基于上述模型建立及求解算法,求解得到不同情况下钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域最大半径。

其中不同情况包括:1).各位置水流速度相同,水流力与风力同向;2).各位置水流速度相同,水流力与风力反向;3).各位置水流速度相同,水流力与风向垂直;4).各位置水流速度自上而下线性递减,水流力与风力同向;令海水深度 H 分别为 16m、17m、18m、19m、20m,选择最优的锚链型号、长度和重物球质量。

结果显示:当各位置水流速度相同时,仅 5 号锚链能够达到目标函数和约束条件的要求,故选择锚链型号 5(即单位长度质量为 28.12kg/m),锚链长为 20.90m,重物球质量为 4601.88kg;当各位置水流速度自上而下线性递减(呈一次函数,海面水速大海底水速为 0)时:选择锚链型号 5(即单位长度质量为 28.12kg/m),锚链

长为 20.90m，重物球质量为 4635.34kg。

可见各点水流速度的不同对三个决策变量的影响较小，为了保证系泊系统的最优设计，最终选定锚链型号为 5，锚链长度为 20.90m，重物球质量为 4635.34kg。

以各位置水流速度相同时，水力与风力同向时的求解结果为例，其余情况下的结果见附件 2-4。

求解得到不同深度下的钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度、游动区域最大半径和锚链左端点 A 端切线方向与 x 轴正方向的夹角 α_1 如下表：

表 5 各点水速相同、水力与风力同向时的系泊系统参数表

深度 H	H=16m	H=17m	H=18m	H=19m	H=20m
钢桶与竖直线夹角 β	4.4868°	4.4555°	4.4252°	4.3945°	4.3674°
钢管 1 倾斜角度 θ_1	4.3946°	4.3633°	4.3331°	4.3024°	4.2753°
钢管 2 倾斜角度 θ_2	4.3328°	4.3021°	4.2723°	4.2422°	4.2155°
钢管 3 倾斜角度 θ_3	4.2713°	4.2411°	4.2118°	4.1821°	4.1560°
钢管 4 倾斜角度 θ_4	4.2101°	4.1803°	4.1516°	4.1224°	4.0966°
浮标吃水深度 d	1.7637m	1.7744m	1.7848m	1.7956m	1.8052m
游动区域最大半径 R	18.0025m	17.4934m	16.9661m	16.3961m	15.8630m
锚链与海床夹角 α_1	0°	0°	0°	0°	0°

根据表 5 可知，当深度 H 逐渐增加时，钢桶和钢管的倾斜角度均逐渐减小，浮标吃水深度逐渐增加，而游动区域最大半径逐渐变小，锚链均存在沉在海底的部分。

H 分别为 16m、17m、18m、19m、20m 时绘制的锚链形状图形如下：

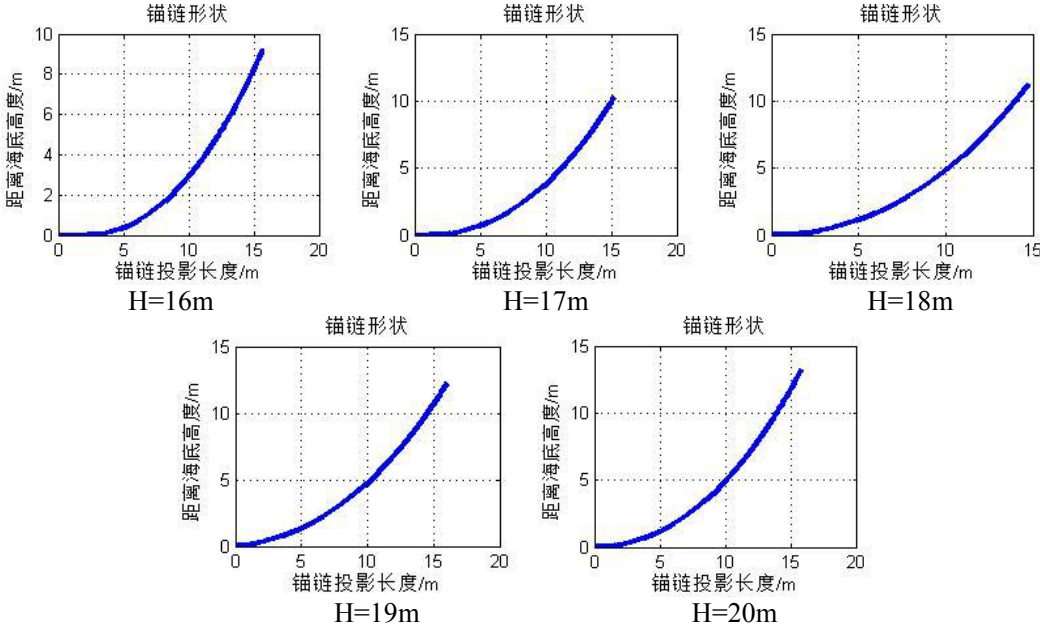


图 12 不同深度时的锚链形状图形

各位置水流速度相同，水流力与风力反向、垂直，以及水流速度自上而下线性递减，水流力与风力同向时，求解得到不同深度下的钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度、游动区域最大半径和夹角 α_1 ，以及 H 分别为 16m、17m、18m、19m、20m 时绘制的锚链形状图形见附件 2-4。

六、模型评价与改进

6.1 模型优点

- 1.文中模型 5.1 仿照悬链线方程利用微元法的思想推导出了锚链线方程，使得求结过程得到简化，利于后续结果的计算，使得模型更加可靠。
- 2.模型 5.2 以钢桶倾角最小，浮标吃水深度最小，浮标游动区域半径最小为优化目标建立多目标优化模型，通过调整权重来衡量某个目标的重要程度，使得结果更加客观。
- 3.由于问题 2 规模较小，采用直接多重遍历搜索即可求得最优的重物球质量。使得模型较为简单直接，计算方便。
- 4.模型 5.3 中考虑到了不同的水流速度与距海底高度的情况，水流力与风力成不同角度，不同水深条件下的情况，最后确定系泊系统的锚链型号，锚链长度，重物球质量。对于各情况均进行分析，使得结果更加可信。

6.2 模型缺点

1. 第三问中模型求解时受到初始解的影响较大，有的可能缺失最优解。
2. 当水流力与风力同时作用在浮标上时，未考虑浮标产生倾斜时的情况。
3. 由于限制的最大吃水深度越大，钢桶倾角就越能够达到最小，所以对于浮标最大吃水深度的限制，模型 2 中取 1.5 米，模型 3 中取 1.8 米，存在一定的主观性。

6.3 模型改进

(1) 水流力与风力夹角任意时

为了验证模型三求解出的系泊系统的锚链型号，长度，重物球质量。对于浮标倾斜的情况进行重新受力分析，由于水平方向上浮标受力情况不变，但是风力和水流力的角度可以是任意值，所以浮标受到的水流力和风力的合力发生变化。浮标所受合力可以根据力的平行四边形法则和余弦定理表示为：

$$F = \sqrt{F_{\text{wat_float}}^2 + F_{\text{wind}}^2 - 2F_{\text{wat_float}}F_{\text{wind}}\cos\eta}$$

其中 $F_{\text{wat_float}}$ 表示浮标所受到的水流力， F_{wind} 代表浮标所受到的风力， F 代表浮标水平方向上所受到的水流力与风力的合力， η 代表风力与水流力夹角。

假设水流力与风力夹角为任意角度 η ，按照模型三中所求解得到的三个决策变量,当水深为 20m 时，对系泊系统各参数进行计算，锚链线见附件 5：

表 6 各点水速相同、水力与风力任意角度时的系泊系统参数表

任意角度 η	$\eta = 30^\circ$	$\eta = 45^\circ$	$\eta = 60^\circ$
钢桶与竖直线夹角 β	3.3920°	3.4691°	3.5655°
钢管 1 倾斜角度 θ_1	3.3552°	3.4315°	3.5270°
钢管 2 倾斜角度 θ_2	3.3483°	3.4245°	3.5197°
钢管 3 倾斜角度 θ_3	3.3414°	3.4174°	3.5124°
钢管 4 倾斜角度 θ_4	3.3345°	3.4104°	3.5052°
浮标吃水深度 d	1.7851m	1.7863m	1.7879m
游动区域最大半径 R	15.0511m	15.1108m	15.1836m
锚链左端切线方向与海床夹角 α_1	0°	0°	0°

由上表规律可知任意夹角时，均可满足系泊系统正常工作的条件，且各个参数差异不大。

(2) 模型三中优化目标的权重发生改变时