5. $y'+y=e^{-x}$

先解齐次方程 $y'+y=0$.

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-y \Rightarrow \frac{dy}{y}=-dx \Rightarrow \ln y=-x+C$

$\Rightarrow y=e^{-x+C}=Ce^{-x}$

常数变易法：假设 $y(x)=C(x)e^{-x}$，则

2022年秋微积分A(1)期末考试样卷

$C'e^{-x}-\cancel{Ce^{-x}}+\cancel{Ce^{-x}}=e^{-x}$

$\Rightarrow C'=1 \Rightarrow C(x)=x+C_1$

$\Rightarrow y(x)=C(x)e^{-x}=xe^{-x}$

系别________ 班级________ 姓名________ 学号________

$\Rightarrow y(x)=xe^{-x}+C_1e^{-x}$, $y(0)=0$ $\Rightarrow y(x)=xe^{-x}$

一、填空题 (10道题, 每题3分, 共30分)

面积 ← 1. 由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{6}$, 以及直线 $x=0$, $y=0$ 围成的有界平面图形的面积为________.

$\int_0^6 y(x)\,dx=\int_0^6(\sqrt{6}-\sqrt{x})^2dx=\int_0^6(6+x-2\sqrt{x})\,dx$

基本定理 ← 2. 极限

洛、泰

$\frac{0}{0}$ $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(e^{\sin t}-\cos t)dt}{(1+x^2)^{\frac12}-1} \overset{洛}{=} \lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-\cos x}{x(1+x^2)^{-\frac12}} \overset{泰}{=} \lim_{x\to0}\frac{(1+x)-1}{x\cdot1}=1$

$(1+u)^\alpha\sim1+\alpha u$

$\sin u\sim x-\frac{1}{3!}x^3$ $(u\to0)$

$\cos u\sim1-\frac12x^2$

$e^u\sim1+u$

弧长 ← 3. 曲线段 $y=\frac23x^{\frac32}$ $(0\le x\le15)$ 的弧长为________.

dl dy dx $L=\int dl=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$

$=\int_0^{15}\sqrt{1+x}\,dx=\frac23(1+x)^{\frac32}\Big|_0^{15}$

黎曼和 ← 4. 极限

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k}}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+\frac kn}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln2$

一阶线性非齐次微分方程 ← 5. 记 $y=y(x)$ 是常微分方程 $y'+y=e^{-x}$ 满足 $y(0)=0$ 的解, 则函数 $y=y(x)$ 拐点 的横坐标为 $x=$________.

$y''=0$

$y=xe^{-x}\Rightarrow y'=e^{-x}-xe^{-x}$

$\Rightarrow y''=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}$

$=-2e^{-x}+xe^{-x}$

基本定理 ← 6. 设 $F(x)=\int_0^{x^2}\sin(\frac{\pi t^2}{2})dt$, 则 $F'(1)=$________.

$\frac{d}{dx}\int_0^{u(x)}f(t)dt=f(u(x))\cdot u'(x)$ $F'(x)=\sin(\frac{\pi x^4}{2})\cdot2x$

7. 积分 $\int_0^2|(x-1)(x-2)|dx=$________.

$=\int_0^1(1-x)(2-x)\,dx+\int_1^2(x-1)(2-x)\,dx$

基本定理 ← 8. 设 $f(x)$ 为连续可微函数, 满足方程 $2\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^2$, 则 $f'(1)=$________.

$\overset{x=1}{\Rightarrow}0=1\cdot f(1)-1^2\Rightarrow f(1)=1$ $1=1\cdot f'(1)-2$

$\Downarrow$ $2f(x)=f(x)+xf'(x)-2x\Rightarrow f(x)=xf'(x)-2x$

一阶微分方程(变量分离型) ← 9. 设 $y(x)$ 是常微分方程 $y'=1+2x+y^2+2xy^2$ 满足初值条件 $y(0)=0$ 的解, 则 $\arctan y(1)=$________.

$=(1+2x)(1+y^2)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=(1+2x)(1+y^2)\Rightarrow\frac{dy}{1+y^2}=(1+2x)\,dx$

$\Rightarrow\arctan y=x+x^2+C$

二阶常系数线性非齐次微分方程 ← 10. 设 $y(x)$ 是常微分方程 $y''-2y'+y=2$ 满足初值条件 $y(0)=2$, $y'(0)=0$ 的解, 则 $y(1)=$________.

先解齐次 $y''-2y'+y=0$, $y=e^{\lambda x}$ $\Rightarrow\lambda^2-2\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=1=重根\Rightarrow y=e^x, xe^x$

$\Rightarrow y=C_1e^x+C_2xe^x$

再解非齐次 $y''-2y'+y=2$: ① 猜 $y(x)=2$

② $y(x)=(多项式)\cdot e^{0\cdot x}$ 而解.

③ 假设 $y(x)=C(x)e^x\Rightarrow C''(x)=2e^{-x}$

$\Rightarrow C(x)=2e^{-x}$

$\Rightarrow y(x)=C(x)e^x=2$

$y''+ay'+by=P_m(x)e^{\lambda x}$

二、**选择题** (10道题, 每题3分, 共30分)

1. 积分 $\int_{-1}^{1}\left[x^2\sin(x^5)+\sqrt{1-x^2}\right]dx =$

奇函数

$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

去 $\sqrt{\ }$

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \xlongequal[dx=-\sin t\,dt]{x=\cos t} \int_{\pi}^{0}\sin t(-\sin t\,dt)=\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt$

$=\int_0^{\pi}\frac{1-2\cos 2t}{2}dt$

$\sqrt{x^2-1} \leftarrow x=\frac{1}{\cos t}$

A. 0;

B. $\frac{\pi}{2}$;

C. π;

D. 1.

广义积分 敛散性 ← 2. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^p}dx$ 收敛, 当且仅当

$x\to0$: $\frac{1-\cos x}{x^p}\sim\frac{1-(1-\frac{x^2}{2})}{x^p}\sim\frac{1}{2x^{p-2}}$, 收敛 $\Leftrightarrow 0<p-2<1$

$x\to+\infty$: $\frac{1-\cos x}{x^p}\sim\frac{1}{x^p}$, 收敛 $\Leftrightarrow p>1$.

A. $p>1$;

B. $p<3$;

C. $1<p<3$;

D. $1\le p\le 3$.

$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$, $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$

基本定理 ← 3. $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t}{t}dt =$

$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt$

$= f(u(x))\,u'(x) - f(v(x))\,v'(x)$

A. $3\sin(x^3)-2\sin(x^2)$;

B. $\frac{3\sin(x^3)-2\sin(x^2)}{x}$;

C. $\frac{3\sin(x^3)-2\sin(x^2)}{x^2}$;

D. $\frac{3\sin(x^3)-2\sin(x^2)}{x^3}$.

渐近线 ← 4. 函数 $y=x\ln(e+\frac{1}{x^2})$ 的斜渐近线为

$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\\ \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=b\end{cases}$

A. $y=x$;

B. $y=x+1$;

C. $y=2x$;

D. $y=2x+1$.

5. 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x} =$

$\|$

$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}=\int_0^{+\infty}\frac{-de^{-x}}{e^{-x}+1}=-\ln(1+e^{-x})\Big|_{x=0}^{+\infty}=\ln 2$

A. 1;

B. $\ln 2$;

C. 2;

D. $2\ln 2$.

6. 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx =$ $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\cos^2 x} d\cos x = \int_0^1 \frac{u^3 du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^2\, du^2}{1+u^2}$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$

A. $\frac{1}{2}$;

B. $\frac{1}{2}\ln 2$;

C. $\ln 2$;

D. $\frac{1}{2}\Big(1-\ln 2\Big)$.

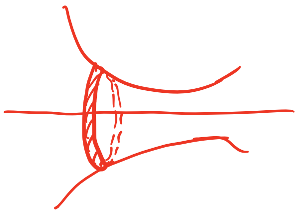
旋转体积 ⟸ 7. 由曲线段 $y=\sqrt{x-1}$ $(1\le x\le 3)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为

A. π;

B. 3π;

C. 2π;

D. 4π.



$\int \underbrace{(\pi y^2)}_{底面积} \cdot \underbrace{dx}_{高}$

旋转 面积 ⟸ 8. 抛物线的一段 $y=\sqrt{2x}$ $(0\le x\le 1)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转面的侧面积为

A. $2\sqrt{3}\pi$;

B. $\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)$;

C. 2π;

D. π.

$\int \underbrace{(2\pi y)}_{长} \cdot \underbrace{\sqrt{dx^2+dy^2}}_{弧长=宽}$

面积 ⟸ 9. 旋轮线 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ $(0\le t\le 2\pi)$ 一拱与 x 轴所围平面有界图形的面积为

$\int y\,dx = \int y(t)\,d\,x(t) = \int y(t)\,x'(t)\,dt$

A. π;

B. 2π;

C. 3π;

D. 4π.

$0\leqslant x<1$

$x^n \longrightarrow 0\ (n\to+\infty)$

10. 极限 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1+x^n}{1+x}dx$ 等于

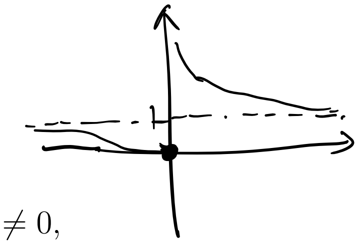
$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

A. 0;

B. 1;

C. 2;

D. ln 2.



三. 解答题 (5道题, 共计40分)

函数作图.

1. (10分)设

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

讨论函数 $f(x)$ 的连续性, 并求 $f(x)$ 的单调区间, 极值点与极值, 凸性区间, 拐点和渐近线.

$f'(x)\gtrless 0$　$f'(x)=0$　$f''(x)\gtrless 0$　$f''(x)=0$

$\sin u \sim u-\frac{1}{3!}u^3$, $\sin(\arcsin u)=u$

$\arcsin u \sim u+\frac{1}{3!}u^3$ $(u\to 0)$

广义积分收敛性

2. (10分) 讨论广义积分

比较判别法.

$$\int_1^{+\infty}\underbrace{\left(\arcsin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)}dx \sim \frac{1}{x}+\frac{1}{6}\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}=\frac{1}{6x^3}$$

的收敛性. 若收敛, 请求出积分值; 若发散, 请说明理由.

$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

Euler方程

二阶常系数非齐次线性微分方程

3. (10分) 求解 Euler 方程 $x^2y''+2xy'-2y=2\ln x-3\ (x>0)$ 的通解. 令$x=e^t$.

4. (5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续, 且满足 $[f(x)]^2\leq 1+2\int_0^x f(t)dt$, $\forall x\in[0,1]$. 证明 $f(x)\leq 1+x$, $\forall x\in[0,1]$.

5. (5 分) 设 $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为实系数多项式. 若 $p(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 证明 $p(x)+p'(x)+p''(x)+\cdots+p^{(n)}(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 其中 $p'(x)$, $p''(x)$, $\cdots$, $p^{(n)}(x)$ 分别表示 $p(x)$ 的一阶, 二阶, $\cdots$, 以及 n 阶导数.

5. $f(x)=p(x)+p'(x)+\cdots+p^{(n)}(x)\overset{\text{要证}}{\geqslant} 0$

$f'(x)=p'(x)+p''(x)+\cdots+p^{(n)}(x)+\cancel{p^{(n+1)}(x)}$

$=f(x)-p(x)$

$\Rightarrow f'(x)-f(x)=-p(x)$

$\Rightarrow [\underbrace{e^{-x}f(x)}_{\text{减函数}}]'=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=-e^{-x}p(x)\leqslant 0$

$\Rightarrow e^{-x}f(x)\geqslant \lim_{x\to+\infty}e^{-x}f(x)=0 \Rightarrow f(x)\geqslant 0.$

3. 令 $x=e^t$, $\Leftrightarrow t=\ln x$.

$y(x) \rightsquigarrow y(t)$

欧拉方程　常系数线性方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

代入 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-2y=2\ln x-3$，得

$$y''(t)+y'(t)-2y(t)=\underbrace{2t-3}_{P_m e^{\lambda_0 t}}$$

先解齐次 $\left.\begin{aligned} &y''+y'-2y=0 \\ &y(t)=e^{\lambda t}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda^2+\lambda-2=(\lambda-1)(\lambda+2)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=-2\end{cases}$

$\Rightarrow$ 齐次通解 $y(t)=C_1e^t+C_2e^{-2t}$.

解非齐次特解：多项式 $y(t)$，满足 $\left.\begin{aligned} &y''+y'-2y=2t-3 \\ &\text{假设 } y(t)=at+b\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$

$\Rightarrow$ 特解 $y(t)=-t+1$

非齐次通解 $y(t)=-t+1+C_1e^t+C_2e^{-2t}$

$$\Rightarrow y(x)=-\ln x+1+C_1x+C_2x^{-2}$$

4. $y(x)=\int_0^x f(t)dt \Longrightarrow y(0)=0$

$\begin{cases}[y'(x)]^2\le 1+2y(x)\\ y'(x)\ge 0\end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} y'(x)\le 1+x$

$y'(x)\le\sqrt{1+2y(x)}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\le\sqrt{1+2y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1+2y}}\le dx \Rightarrow \int_0^{y(x)}\frac{dy}{\sqrt{1+2y}}\le\int_0^x dt \Rightarrow \sqrt{1+2y}\Big|_0^{y(x)}\le x-0$

$\Rightarrow \sqrt{1+2y(x)}-1\le x \Rightarrow \left.\begin{aligned}&\sqrt{1+2y(x)}\le 1+x\\ &[y'(x)]^2\le 1+2y(x)\end{aligned}\right\} \Rightarrow y'(x)\le\sqrt{1+2y(x)}\le 1+x$

$$y'(x) = f(x)$$