

第二章 随机过程的基本概念

张立国

zhangliguo@hrbeu.edu.cn

哈尔滨工程大学

第2章 随机过程的基本概念

- 2.1 随机过程的定义
- 2.2 随机过程的分类和举例
- 2.3 随机过程的有限维分布函数族
- 2.4 随机过程的数字特征
- 2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征
- 2.6 复随机过程
- 2.7 几类重要的随机过程

第2章 随机过程的基本概念

- 2.1 随机过程的定义
- 2.2 随机过程的分类和举例
- 2.3 随机过程的有限维分布函数族
- 2.4 随机过程的数字特征
- 2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征
- 2.6 复随机过程
- 2.7 几类重要的随机过程

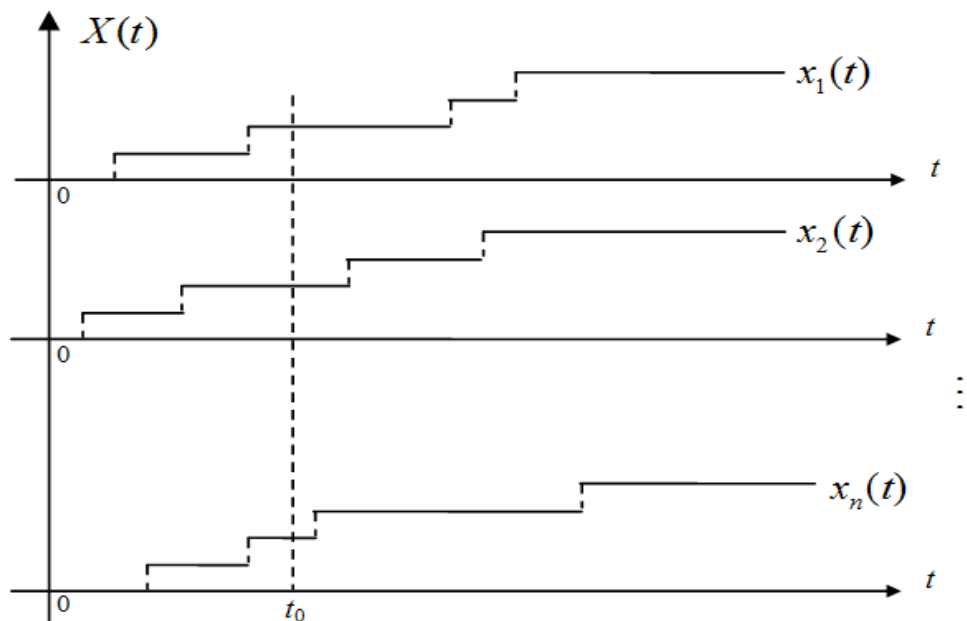
2.1 随机过程的定义

- 在客观世界中，有许多随机现象表现为带随机性的变化过程，它不能用一个或几个随机变量来刻画，而要用一族无穷多个随机变量来描绘，这就是随机过程。
- 随机过程是概率论的继续和发展. 被认为是概率论的“动力学”部分. 它的研究对象是随时间演变的随机现象。
- 事物变化的过程不能用一个（或几个）时间 t 的确定的函数来加以描述。
- 对事物变化的全过程进行一次观察得到的结果是一个时间 t 的函数，但对同一事物的变化过程独立地重复进行多次观察所得的结果是不同的，而且每次观察之前不能预知试验结果。

2.1 随机过程的定义

- **例2.1.1** 当 t ($t \geq 0$) 固定时, 电话交换站在 $[0, t]$ 时间内收到的呼叫次数是随机变量, 记为 $X(t)$. $X(t)$ 服从参数为 λt 的Poisson分布, 其中 λ 是单位时间内平均收到的呼叫次数, 且 $\lambda > 0$. 如果 t 从0变到 $+\infty$, t 时刻前收到的呼叫次数需用一族随机变量 $\{X(t), t \in [0, +\infty]\}$ 来表示, 则该随机现象就是一个随机过程. 对电话交换站做一次实验, 便可得到一个“呼叫次数—时间函数”(即呼叫次数关于时间 t 的函数 $x(t)$).

2.1 随机过程的定义



这个“呼叫次数—时间函数”是不可能预先确定的，只有通过测量才能得到。由于呼叫的随机性，在相同条件下，每次测量都产生不同的“呼叫次数—时间函数”。

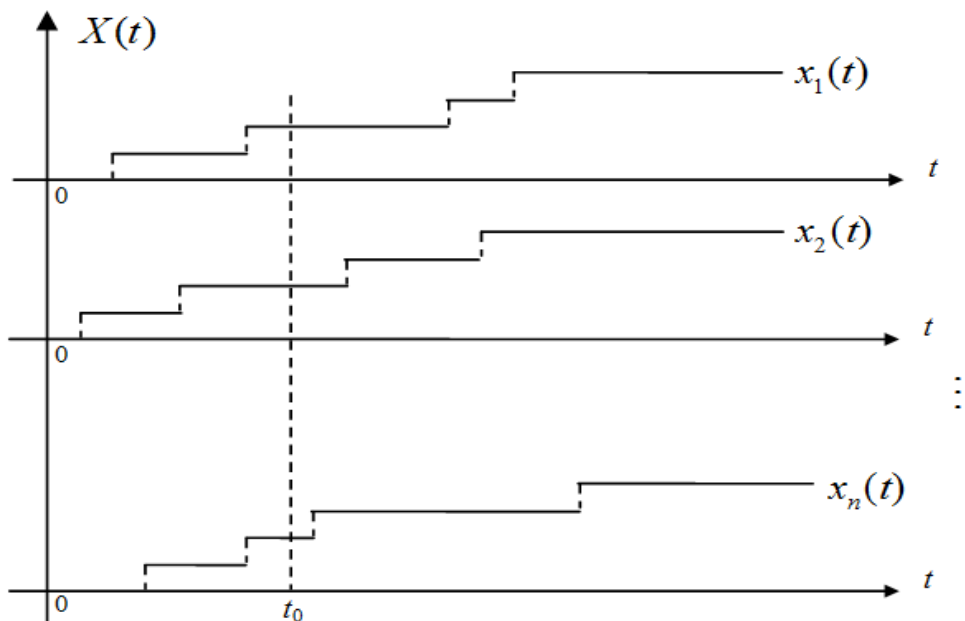
2.1 随机过程的定义

- **例2.1.2** 电子元件或器件由于内部微观粒子（电子）的随机热噪声引起的端电压称为热噪声电压，它在任一确定时刻的值是随机变量，记为 $V(t)$ 。如果 t 从0变到 $+\infty$ ， t 时刻的热噪声电压需要用一族随机变量 $\{V(t), t \in [0, +\infty]\}$ 来表示，则该随机变量就是一个随机过程。对某种装置做一次试验，便可得到一个“电压—时间函数” $v(t)$ 。这个“电压—时间函数”是不可能预先确知的，只有通过测量才能得到。如果在相同的条件下独立地再进行一次测量，则得到的记录是不同的。

2.1 随机过程的定义

- 所谓一族随机变量，首先是随机变量，从而是该试验样本空间上的函数；其次形成一族，因而它还取决于另一个变量，即还是另一参数集上的函数。所以，随机过程就是一族二元函数。
- **定义2.1.1** 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是一个概率空间， T 是一个实的参数集，定义在 Ω 和 T 上的二元函数 $X(\omega, t)$ ，如果对于任意固定的 $t \in T$ ， $X(\omega, t)$ 是 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量，则称 $\{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$ 为该概率空间上的随机过程（**Stochastic Process**），简记为 $\{X(t), t \in T\}$ 。

2.1 随机过程的定义



$\{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$:

- 固定 $t = t_0 \in T$, $X(t_0)$ 是一个随机变量 (第 i 次试验值为 $x_i(t_0)$).
- 对随机过程做一次试验, 即 固定样本点 $\omega \in \Omega$, 得到一个参数 t 的普通函数 $x(t)$.

2.1 随机过程的定义

- **定义2.1.2** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是随机过程, 则当 t 固定时,
 $X(t)$ 是一个随机变量,称之为 $\{X(t), t \in T\}$ 在 t 时刻的状态.
随机变量 $X(t)$ (t 固定, $t \in T$)所有可能的取值构成的集合,
称为随机过程的状态空间, 记为 S .
- **定义2.1.3** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是随机过程, 则当 $\omega \in \Omega$ 固定
时, $X(t)$ 是定义在上 T 不具有随机性的普通函数, 记为
 $x(t)$, 称为随机过程的一个样本函数. 其图像成为随机过程
的一条样本曲线 (轨道或实现) .

2.1 随机过程的定义

- **例2.1.3** 设 $X(t)=V\cos\omega t$, $-\infty < t < +\infty$ 其中 ω 为常数, V 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, 即

$$f_V(v) = \begin{cases} 1, & 0 \leq v \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 画出 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的几条样本曲线;
- (2) 求 $t = 0, \frac{\pi}{4\omega}, \frac{3\pi}{4\omega}, \frac{\pi}{\omega}$ 时随机变量 $X(t)$ 的概率密度函数;
- (3) 求 $t = \frac{\pi}{2\omega}$ 时 $X(t)$ 的分布函数

2.1 随机过程的定义

● 解

(1) 取 $V = \frac{2}{3}$ 则 $x(t) = \frac{2}{3} \cos \omega t$; 取 $V=0$, 则 $x(t)=0$; 取 $V=1$, 则 $x(t)=\cos \omega t$. 这些都是 t 的确定函数, 即随机过程的样本函数.

2.1 随机过程的定义

- (2) 当 $t=0$ 时, $X(0)=V$, 故 $X(0)$ 的概率密度函数就是 V 的概率密度函数, 即

$$f_{X(0)}(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

当 $t = \frac{\pi}{4\omega}$ 时, $X(\frac{\pi}{4\omega}) = V \cos \omega \frac{\pi}{4\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} V$, 故 $X(\frac{\pi}{4\omega})$ 的概率密度函数为

$$f_{X(\frac{\pi}{4\omega})}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

2.1 随机过程的定义

- 当 $t = \frac{3\pi}{4\omega}$ 时, $X(\frac{3\pi}{4\omega}) = V \cos \omega \frac{3\pi}{4\omega} = -\frac{1}{\sqrt{2}}V$, 故 $X(\frac{3\pi}{4\omega})$ 的概率密度函数为

$$f_{X(\frac{3\pi}{4\omega})}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- 当 $t = \frac{\pi}{\omega}$ 时, $X(\frac{\pi}{\omega}) = V \cos \omega \frac{\pi}{\omega} = -V$, 故 $X(\frac{\pi}{\omega})$ 的概率密度函数为

$$f_{X(\frac{\pi}{\omega})}(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

2.1 随机过程的定义

- (3) 当 $t = \frac{\pi}{2\omega}$ 时, $X(\frac{\pi}{2\omega}) = V \cos \omega \frac{\pi}{2\omega} = 0$, 不论 V 取何值, 均有 $X(\frac{\pi}{2\omega}) = 0$, 因此 $P(X(\frac{\pi}{2\omega}) = 0) = 1$, 从而 $X(\frac{\pi}{2\omega})$ 的分布函数为

$$F_{X(\frac{\pi}{2\omega})}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

第2章 随机过程的基本概念

- 2.1 随机过程的定义
- 2.2 随机过程的分类和举例
- 2.3 随机过程的有限维分布函数族
- 2.4 随机过程的数字特征
- 2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征
- 2.6 复随机过程
- 2.7 几类重要的随机过程

2.2 随机过程的分类和举例

- 随机过程可以根据参数集 T 和状态空间 S 是离散集还是连续集分为四大类.

- **1、离散参数、离散状态的随机过程**

这类过程的特点是参数集是离散的, 同时固定 $t \in T$, $X(t)$ 是离散型随机变量即其取值也是离散的。

- **例 2.2.1 (贝努利过程)** 考虑抛掷一颗骰子的试验, 设 X_n 是第 $n(n \geq 1)$ 次抛掷的点数, 对于 $n=1, 2, \dots$ 的不同值, X_n 是不同的随机变量, 因而 $\{X_n, n \geq 1\}$ 构成一随机过程, 称为贝努利过程, 其参数集 $T = \{1, 2, \dots\}$, 状态空间 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2.2 随机过程的分类和举例

- **例 2.2.2** 设有一质点在 x 轴上作随机游动，在 $t=0$ 时质点处于 x 轴的原点 O ，在 $t=1,2,\dots$ 时质点可以在 x 轴上正向或反向移动一个单位，作正向移动一个单位的概率为 p ，作反向移动一个单位的概率为 $q=1-p$ ，在 $t=n$ 时，质点所处的位置为 X_n ，则 $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ 为一随机过程，其参数集 $T=\{0,1,2,\dots\}$ ，状态空间 $S=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ 。

2.2 随机过程的分类和举例

● 2、离散参数、连续状态的随机过程

这类过程的特点是参数集是离散的，对于固定的 $t \in T$ ， $X(t)$ 是连续性随机变量。

- **例 2.2.3** 设 X_n ， $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 是相互独立同服从标准正态分布的随机变量，则 $\{X_n, n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ 为一随机过程，其参数集 $T = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ，状态空间 $S = (-\infty, +\infty)$

2.2 随机过程的分类和举例

● 3、连续参数、离散状态的随机过程

这类过程的特点是参数集是连续的，而对于固定的 $t \in T$ ， $X(t)$ 是离散型随机变量。

- **例2.2.4**（Possion过程） 设 $X(t)$ 表示在期间 $[0, t]$ 内到达服务点的顾客数，对于 $t \in [0, +\infty]$ 的不同值， $X(t)$ 是不同随机变量，因而 $\{X(t), t \geq 0\}$ 构成一随机过程，其参数集 $T = [0, +\infty]$ ，状态空间 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.

2.2 随机过程的分类和举例

● 4、连续参数、连续状态的随机过程

这类过程的特点是参数集是连续的，而对于固定的 $t \in T$ ， $X(t)$ 是连续型随机变量。

- **例2.2.5** 设 $X(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$, $-\infty < t < +\infty$, 其中 $A > 0$, ω 是常数, Φ 服从区间 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布, 则 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是一随机过程, 其参数集 $T = (-\infty, +\infty)$, 状态空间 $S = [-A, A]$.

第2章 随机过程的基本概念

- 2.1 随机过程的定义
- 2.2 随机过程的分类和举例
- 2.3 随机过程的有限维分布函数族
- 2.4 随机过程的数字特征
- 2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征
- 2.6 复随机过程
- 2.7 几类重要的随机过程

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **定义 2.3.1** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一个随机过程, 对于任意固定的 $t \in T$, $X(t)$ 是随机变量, 称

$$\underline{F(t;x)=P(X(t)\leq x), x \in R, t \in T}$$

为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的一维分布函数; 对于任意固定的 $t_1, t_2 \in T$, $X(t_1), X(t_2)$ 是两个随机变量, 称

$$\underline{F(t_1, t_2; x_1, x_2)=P(X(t_1)\leq x_1, X(t_2)\leq x_2), x_1, x_2 \in R, t_1, t_2 \in T}$$

为随机过程的二维分布函数;

2.3 随机过程的有限维分布函数族

一般地, 对于任意固定的 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 是 n 个随机变量, 称

$$\underline{F(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n),}$$

$$x_i \in R, t_i \in T, i=1, 2, \dots, n$$

为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的 n 维分布函数.

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **定义 2.3.2** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程，其一维分布函数，二维分布函数，……， n 维分布函数，……，的全体 $F = \{F(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R, t_i \in T, i=1, 2, \dots, n, n \in N\}$ 称为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限维分布函数族.
- 容易看出，随机过程的有限维分布函数族具有对称性和相容性.

2.3 随机过程的有限维分布函数族

● 1、对称性

设 i_1, i_2, \dots, i_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的任一排列, 则

$$\underline{F(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}; x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = F(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

事实上,

$$\begin{aligned} F(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}; x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) &= P(X(t_{i_1}) \leq x_{i_1}, X(t_{i_2}) \leq x_{i_2}, \dots, X(t_{i_n}) \leq x_{i_n}) \\ &= P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n) \\ &= F(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

● 2、相容性

设 $m < n$, 则

$$F(t_1, t_2, \dots, t_m; x_1, x_2, \dots, x_m) = F(t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty)$$

事实上,

$$\begin{aligned} F(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}; x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) &= P(X(t_{i_1}) \leq x_{i_1}, X(t_{i_2}) \leq x_{i_2}, \dots, X(t_{i_n}) \leq x_{i_n}) \\ &= P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_m) \leq x_m, \\ &\quad X(t_{m+1}) < +\infty, \dots, X(t_n) < +\infty) \\ &= F(t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n; \\ &\quad x_1, x_2, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty) \end{aligned}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **定义 2.3.3** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程, 对于任意固定的 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 是 n 个随机变量, 称

$$\begin{aligned} & \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n; u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= E\{\exp[j(u_1 X(t_1) + u_2 X(t_2) + \dots + u_n X(t_n))]\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[j(u_1 x(t_1) + u_2 x(t_2) + \dots \\ & \quad + u_n x(t_n))] dF(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & \quad u_i \in \mathbf{R}, t_i \in T, i=1, 2, \dots, n, j=\sqrt{-1} \end{aligned}$$

为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的 n 维特征函数.

2.3 随机过程的有限维分布函数族

称

$$\Phi = \{ \varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n; u_1, u_2, \cdots, u_n), u_i \in R, t_i \in T, i = 1, 2, \cdots, n, n \in N \}$$

为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限维特征函数族.

- **例 2.3.1** 设 $X(t) = A + Bt, t \geq 0$, 其中 A 和 B 是相互独立的随机变量, 分别服从正态分布 $N(0, 1)$, 试求随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的一维和二维分布.

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- 解 先求一维分布. $\forall t \geq 0, X(t)$ 是正态随机变量, 因为

$$E[X(t)] = EA + tEB = 0$$

$$D[X(t)] = DA + t^2DB = 1 + t^2$$

所以 $X(t)$ 服从正态分布 $N(0, 1+t^2)$, 从而 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的一维分布为

$$\underline{X(t) \sim N(0, 1+t^2)}, \quad t \geq 0$$

再求二维分布, $\forall t_1, t_2 \geq 0, X(t_1) = A + Bt_1, X(t_2) = A + Bt_2$,

从而

$$(X(t_1), X(t_2)) = (A, B) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

又 A, B 相互独立同服从正态分布，故 (A, B) 服从二维正态分布，从而 $(X(t_1), X(t_2))$ 也服从二维正态分布.

$$E[X(t_1)] = 0, \quad E[X(t_2)] = 0$$

$$D[X(t_1)] = 1 + t_1^2, \quad D[X(t_2)] = 1 + t_2^2$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X(t_1), X(t_2)) &= E[X(t_1)X(t_2)] - E[X(t_1)]E[X(t_2)] \\ &= E[(A + Bt_1)(A + Bt_2)] \\ &= 1 + t_1t_2 \end{aligned}$$

故 $(X(t_1), X(t_2))$ 的均值向量为 $\mathbf{0} = (0, 0)$ ，协方差矩阵为

2.3 随机过程的有限维分布函数族

$$B = \begin{bmatrix} 1+t_1^2 & 1+t_1t_2 \\ 1+t_1t_2 & 1+t_2^2 \end{bmatrix}$$

所以随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的二维分布为

$$\underline{(X(t_1), X(t_2)) \sim N(0, B), \quad t_1, t_2 \geq 0}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **例 2.3.2** 令 $X(t)=A\cos t$, $-\infty < t < +\infty$, 其中 A 是随机变量, 其分布律为

$$P(A=i)=\frac{1}{3}, \quad i=1,2,3$$

试求

- (1) 随机过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的一维分布函数

$$F\left(\frac{\pi}{4}; x\right), \quad F\left(\frac{\pi}{2}; x\right)$$

- (2) 随机变量 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的二维分布函数

$$F\left(0, \frac{\pi}{3}; x_1, x_2\right)$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- 解 (1) 先求 $F(\frac{\pi}{4}; x)$. 由于 $X(\frac{\pi}{4}) = A \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} A$, 因此 $X(\frac{\pi}{4})$

的可能取值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}$, 并且

$$P(X(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}) = P(A \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}) = P(A = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}) = P(A \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}) = P(A = 2) = \frac{1}{3}$$

$$P(X(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}) = P(A \cos \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{2}) = P(A = 3) = \frac{1}{3}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

于是

$$F\left(\frac{\pi}{4}; x\right) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{3}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < \sqrt{2} \\ \frac{2}{3}, & \sqrt{2} \leq x < \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ 1, & x \geq \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

再求 $F\left(\frac{\pi}{2}; x\right)$. 由于 $X\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \cos \frac{\pi}{2} = 0$, 因此 $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 只能取 0 值, 于是

$$F\left(\frac{\pi}{2}; x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

(2) 因为

$$\begin{aligned} F(0, \frac{\pi}{3}; x_1, x_2) &= P(X(0) \leq x_1, X(\frac{\pi}{3}) \leq x_2) \\ &= P(A \cos 0 \leq x_1, A \cos \frac{\pi}{3} \leq x_2) \\ &= P(A \leq x_1, \frac{A}{2} \leq x_2) \\ &= P(A \leq x_1, A \leq 2x_2) \\ &= \begin{cases} P(A \leq x_1), & x_1 \leq 2x_2 \\ P(A \leq 2x_2), & x_1 > 2x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

所以

$$F(0, \frac{\pi}{3}; x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq 2x_2, x_1 < 1 \text{ 或 } x_1 > 2x_2, x_2 < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, & x_1 \leq 2x_2, 1 \leq x_1 < 2 \text{ 或 } x_1 > 2x_2, \frac{1}{2} \leq x_2 < 1 \\ \frac{2}{3}, & x_1 \leq 2x_2, 2 \leq x_1 < 3 \text{ 或 } x_1 > 2x_2, 1 \leq x_2 < \frac{3}{2} \\ 1, & x_1 \leq 2x_2, x_1 \geq 3 \text{ 或 } x_1 > 2x_2, x_2 \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

第2章 随机过程的基本概念

- 2.1 随机过程的定义
- 2.2 随机过程的分类和举例
- 2.3 随机过程的有限维分布函数族
- 2.4 随机过程的数字特征
- 2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征
- 2.6 复随机过程
- 2.7 几类重要的随机过程

2.4 随机过程的数字特征

● 1、随机过程的均值函数

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程, $\forall t \in T, X(t)$ 是一个随机变量, 如果 $E[X(t)]$ 存在, 记为 $m_X(t)$, 则称 $m_X(t), t \in T$ 为 $\{X(t), t \in T\}$ 的均值函数.

- 如果 $\{X(t), t \in T\}$ 的一维分布函数为 $F(t; x)$, 那么

$$\underline{m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(t; x), \quad t \in T}$$

- 随机过程的均值函数 $m_X(t)$ 在 t 时刻的值, 表示随机过程在 t 时刻所处状态取值的理论平均值, 当 $t \in T$ 时, $m_X(t)$ 在几何上表示一条固定的曲线.

2.4 随机过程的数字特征

● 2、随机过程的方差函数

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程, $\forall t \in T, X(t)$ 是一随机变量, 如果 $D[X(t)]$ 存在, 记为 $D_X(t)$, 则称 $D_X(t), t \in T$ 为 $\{X(t), t \in T\}$ 的方差函数.

● 显然

$$\underline{D_X(t) = D[X(t)] = E[X(t) - m_x(t)]^2, \quad t \in T}$$

- 随机过程的方差函数 $D_X(t)$ 在 t 时刻的值, 表示随机过程在 t 时刻所处状态取值离开均值的偏差程度, 当 $t \in T$ 时, $D_X(t)$ 是一个普通的函数.

2.4 随机过程的数字特征

● 3、随机过程的协方差函数

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程 $\forall s, t \in T$, $X(s), X(t)$ 是两个随机变量, 如果 $\text{cov}(X(s), X(t))$ 存在, 记为 $C_x(s, t)$, 则称 $C_x(s, t), s, t \in T$ 为 $\{X(t), t \in T\}$ 的协方差函数.

显然

$$\begin{aligned} \underline{C_x(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t)) = E[(X(s) - m_x(s))(X(t) - m_x(t))]} \\ \underline{= E[X(s)X(t)] - m_x(s) m_x(t)}, t \in T \end{aligned}$$

2.4 随机过程的数字特征

随机过程的协方差函数 $C_x(s,t)$ 在 $s,t \in T$ 时刻的绝对值表示随机过程在时刻 s,t 所处状态的线性联系的密切程度，若 $C_x(s,t)$ 的绝对值较大，则在两个时刻 s,t 的状态 $X(s), X(t)$ 线性联系较密切；若 $C_x(s,t)$ 的绝对值较小，则在两个时刻 s,t 的状态 $X(s), X(t)$ 线性联系不密切。

● 4、随机过程的相关函数

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程， $\forall s, t \in T$ ， $X(s), X(t)$ 是两个随机变量，如果 $E[X(s)X(t)]$ 存在，记为 $R_x(s,t)$ ，则称 $R_x(s,t)$ ， $s, t \in T$ 为 $\{X(t), t \in T\}$ 的相关函数。

2.4 随机过程的数字特征

● 5、随机过程的均方值函数

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程, $\forall t \in T, X(t)$ 是一随机变量, 如果 $E[X(t)]^2$ 存在, 记为 $\Phi_x(t)$, 则称 $\Phi_x(t), t \in T$ 为 $\{X(t), t \in T\}$ 的均方值函数.

2.4 随机过程的数字特征

● 6、随机过程数字特征的关系

随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的协方差函数、相关函数和均值函数的关系为

$$\underline{C_x(s,t) = R_x(s,t) - m_x(s)m_x(t)}, \quad s, t \in T$$

在协方差函数的定义式中，取 $s=t$ ，则随机过程的方差函数和协方差函数的关系为

$$\underline{D_X(t) = C_x(t,t)}, \quad t \in T$$

类似地，均方值函数和相关函数的关系为

$$\underline{\Phi_x(t) = R_x(t,t)}, \quad t \in T$$

2.4 随机过程的数字特征

- 从上述关系可以看出，均值函数和相关函数是随机过程的两个本质数字特征，其它的数字特征可以通过本质的数字特征获得。
- 随机过程的均值函数称为随机过程的一阶矩，均方值函数称为随机过程的二阶矩。显然，相关函数、协方差函数、方差函数也是随机过程的一种二阶矩。

2.4 随机过程的数字特征

- **例 2.4.1** 设 $X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$, $-\infty<t<+\infty$, 其中 A, B 是相互独立, 且都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的随机变量, ω 是实常数. 试求 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 的均值函数和相关函数.

解 $m_X(t) = E[X(t)] = E[A\cos\omega t + B\sin\omega t] = (EA)\cos\omega t + (EB)\sin\omega t = 0$

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E[X(s)X(t)] = E[(A\cos\omega s + B\sin\omega s)(A\cos\omega t + B\sin\omega t)] \\ &= (EA^2)\cos\omega s \cos\omega t + (EAB)(\sin\omega s \cos\omega t + \cos\omega s \sin\omega t) + \\ &\quad (EB^2)\sin\omega s \sin\omega t \\ &= \sigma^2 \cos\omega(t-s) \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad EA^2 = (EA)^2 + DA = \sigma^2$$

$$\checkmark \quad EAB = EA \cdot EB = 0$$

$$\checkmark \quad \cos\omega s \cos\omega t + \sin\omega s \sin\omega t = \cos\omega(t-s)$$

2.4 随机过程的数字特征

- **例 2.4.2** 设 $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$, $-\infty<t<+\infty$, 其中 a 和 ω 是常数, Θ 是服从 $[0,2\pi]$ 上均匀分布的随机变量, 求 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 的数字特征.

解 由于 Θ 的概率密度函数为

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

2.4 随机过程的数字特征

于是

$$\begin{aligned}m_X(t) &= E[X(t)] \\&= E[a \cos(\omega t + \Theta)] \\&= \int_0^{2\pi} a \cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta \\&= 0, \quad -\infty < t < +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_X(s, t) &= E[X(s)X(t)] \\&= E[a \cos(\omega s + \Theta) \cdot a \cos(\omega t + \Theta)] \\&= a^2 \int_0^{2\pi} \cos(\omega s + \theta) \cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta \\&= \frac{a^2}{2} \cos \omega(t - s), \quad -\infty < s, t < +\infty\end{aligned}$$

2.4 随机过程的数字特征

$$\begin{aligned}C_X(s, t) &= R_X(s, t) - m_X(t) \\&= \frac{a^2}{2} \cos \omega(t - s) - 0 \\&= \frac{a^2}{2} \cos \omega(t - s), \quad -\infty < s, t < +\infty\end{aligned}$$

$$D_X(t) = C_X(t, t) = \frac{a^2}{2}, \quad -\infty < t < +\infty$$

$$\Phi_X(t) = R_X(t, t) = \frac{a^2}{2}, \quad -\infty < t < +\infty$$

2.4 随机过程的数字特征

- **例 2.4.3** 设 $X(t)=A+Bt$, $-\infty < t < +\infty$, 其中 A, B 是相互独立的随机变量, 且均值为0, 方差为1, 求 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的数字特征.

解 $m_X(t) = E[X(t)] = E[A+Bt] = EA+tEB=0, \quad -\infty < t < +\infty$

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E[(A+Bs)(A+Bt)] = EA^2 + (s+t)EAB + stEB^2 \\ &= 1+st, \quad -\infty < t < +\infty \end{aligned}$$

$$C_X(s, t) = R_X(s, t) - m_X(s)m_X(t) = 1+st, \quad -\infty < t < +\infty$$

$$D_X(t) = C_X(t, t) = 1+t^2, \quad -\infty < t < +\infty$$

$$\Phi_X(t) = R_X(t, t) = 1+t^2, \quad -\infty < t < +\infty$$

第2章 随机过程的基本概念

- 2.1 随机过程的定义
- 2.2 随机过程的分类和举例
- 2.3 随机过程的有限维分布函数族
- 2.4 随机过程的数字特征
- 2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征
- 2.6 复随机过程
- 2.7 几类重要的随机过程

2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征

● 1、二维随机过程的联合分布函数

- 定义 2.5.1 设 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 是两个随机过程，称 $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ 为 二维随机过程.

- 定义 2.5.2 对于任意 $m \geq 1, n \geq 1, t_1, t_2, \dots, t_m \in T, t'_1, t'_2, \dots, t'_n \in T$, $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m), Y(t'_1), Y(t'_2), \dots, Y(t'_n))$ 是 $m+n$ 维随机变量，称

$$\begin{aligned} & \underline{F(t_1, t_2, \dots, t_m; x_1, x_2, \dots, x_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_n; y_1, y_2, \dots, y_n)} \\ &= P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_m) \leq x_m, Y(t'_1) \leq y_1, Y(t'_2) \leq y_2, \dots, Y(t'_n) \leq y_n) \\ & \quad x_i \in R, y_i \in R, t_i \in T, t'_j \in T, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

为 二维随机过程 $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ 的 $m+n$ 维分布函数.

2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征

- 二维随机过程 $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ 作为一个整体, 具有 $m+n$ (任意) 维分布函数

$$\underline{F(t_1, t_2, \dots, t_m; x_1, x_2, \dots, x_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_n; y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

- $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 都是随机过程, 分别也有 m (任意) 维分布函数 和 n (任意) 维分布函数, 将他们分别记为

$$\underline{F_X(t_1, t_2, \dots, t_m; x_1, x_2, \dots, x_m)}, \quad \underline{F_Y(t'_1, t'_2, \dots, t'_n; y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征

- **定义 2.5.3** 称 $F_X(t_1, t_2, \dots, t_m; x_1, x_2, \dots, x_m)F_Y(t'_1, t'_2, \dots, t'_n; y_1, y_2, \dots, y_m)$ 分别为二维随机过程 $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ 关于 $\{X(t), t \in T\}$ 和关于 $\{Y(t), t \in T\}$ 的 m 维边缘分布函数和 n 维边缘分布函数.

如果对于任意 $m \geq 1, n \geq 1, t_1, t_2, \dots, t_m \in T, t'_1, t'_2, \dots, t'_n \in T$, 有

$$\begin{aligned} & \underline{F(t_1, t_2, \dots, t_m; x_1, x_2, \dots, x_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_n; y_1, y_2, \dots, y_m)} \\ &= \underline{F_X(t_1, t_2, \dots, t_m; x_1, x_2, \dots, x_m)F_Y(t'_1, t'_2, \dots, t'_n; y_1, y_2, \dots, y_m)} \end{aligned}$$

那么称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 相互独立.

2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征

● 2、二维随机过程的数字特征

- **定义 2.5.4** 设 $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ 是二维随机过程, $\forall s, t \in T$ $X(s), Y(t)$ 是两个随机变量, 如果 $E[X(s)Y(t)]$ 存在, 记为 $R_{XY}(s, t)$, 则称 $R_{XY}(s, t)$, $s, t \in T$ 为 $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ 的 互相关函数. 如果 $cov(X(s), X(t))$ 存在, 记为 $C_{XY}(s, t)$, 则称 $C_{XY}(s, t)$, $s, t \in T$ 为 $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ 的 互协方差函数.

- 显然

$$\underline{C_{XY}(s, t) = R_{XY}(s, t) - m_X(s)m_Y(t)}, s, t \in T$$

2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征

- **定义 2.5.5** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 是两个随机过程，如果

$$C_{XY}(s, t) = 0 \text{ 或 } \underline{R_{XY}(s, t) = m_X(s)m_Y(t)}, \quad s, t \in T$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 不相关.

- **定理 2.5.1** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 相互独立，则 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 不相关.

第2章 随机过程的基本概念

- 2.1 随机过程的定义
- 2.2 随机过程的分类和举例
- 2.3 随机过程的有限维分布函数族
- 2.4 随机过程的数字特征
- 2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征
- 2.6 复随机过程
- 2.7 几类重要的随机过程

2.6 复随机过程

● **定义 2.6.1** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 是定义在同一概率空间上的两个是随机过程, 令 $Z(t)=X(t)+jY(t), t \in T$, 则称 $\{Z(t), t \in T\}$ 为复随机过程.

● **定义 2.6.2** 设 $\{Z(t), t \in T\}$ 为复随机过程.称

$m_Z(t)=E[Z(t)], t \in T$, 为 $\{Z(t), t \in T\}$ 的均值函数.称

$D_Z(t) = D[Z(t)] = E|Z(t) - m_Z(t)|^2, t \in T$, 为 $\{Z(t), t \in T\}$ 的方差函数.称

$C_Z(s, t) = \text{cov}(Z(s), Z(t)) = E[\overline{(Z(s) - m_Z(s))}(Z(t) - m_Z(t))]$

$s, t \in T$ 为 $\{Z(t), t \in T\}$ 的协方差函数.称

2.6 复随机过程

$R_Z(s, t) = E[\overline{Z(s)}Z(t)], s, t \in T$, 为 $\{Z(t), t \in T\}$ 的相关函数
称 $\Phi_Z(t) = E|Z(t)|^2, t \in T$, 为 $\{Z(t), t \in T\}$ 的均方值函数.

- 显然，复随机过程的数字特征之间有下列关系和结论：

$$m_Z(t) = m_X(t) + jm_Y(t), \quad t \in T$$

$$D_Z(t) = D_X(t) + D_Y(t), \quad t \in T$$

$$D_Z(t) = C_Z(t, t), \quad t \in T$$

$$C_Z(s, t) = R_Z(s, t) - \overline{m_Z(s)}m_Z(t), \quad s, t \in T$$

$$\Phi_Z(t) = R_Z(t, t), \quad t \in T$$

2.6 复随机过程

● **定义 2.6.3** 设 $\{Z_1(t), t \in T\}$ 和 $\{Z_2(t), t \in T\}$ 是两个复随机过程, 称

$$C_{Z_1 Z_2}(s, t) = \text{cov}(Z_1(s), Z_2(t)) = E[\overline{(Z_1(s) - m_{Z_1}(s))}(Z_2(t) - m_{Z_2}(t))] \\ s, t \in T$$

为 $\{Z_1(t), t \in T\}$ 和 $\{Z_2(t), t \in T\}$ 的互协方差函数, 称

$$R_{Z_1 Z_2}(s, t) = E[\overline{Z_1(s)} Z_2(t)] \quad s, t \in T$$

为 $\{Z_1(t), t \in T\}$ 和 $\{Z_2(t), t \in T\}$ 的互相关函数.

2.6 复随机过程

- **例 2.6.1** 设 $Z(t) = \sum_{k=1}^n X_k e^{j(\omega_0 t + \Phi_k)}$, $-\infty < t < +\infty$, 其中 ω_0 是正常数, n 为固定的正整数, $X_1, X_2, \dots, X_n, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ 是相互独立的实随机变量, 且 $EX_k = 0, DX_k = \sigma_k^2$, $\Phi_k \sim U[0, 2\pi]$, $k=1, 2, \dots, n$. 求 $\{Z(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的均值函数和相关函数.

2.6 复随机过程

● 解

$$m_Z(t) = E\left[\sum_{k=1}^n X_k e^{j(\omega_0 t + \Phi_k)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^n EX_k (E \cos(\omega_0 t + \Phi_k) + jE \sin(\omega_0 t + \Phi_k))$$

$$= \sum_{k=1}^n EX_k \left(\int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi_k) \frac{1}{2\pi} d\varphi_k + j \int_0^{2\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi_k) \frac{1}{2\pi} d\varphi_k \right)$$

$$= 0, \quad -\infty < t < +\infty$$

$$R_Z(s, t) = E\left[\sum_{k=1}^n X_k e^{j(\omega_0 s + \Phi_k)}\right] = E\left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n X_k X_l e^{j(\Phi_l - \Phi_k)}\right] e^{j\omega_0(t-s)}$$

2.6 复随机过程

又

$$\begin{aligned} Ee^{j(\Phi_l - \Phi_k)} &= E \cos(\Phi_l - \Phi_k) + jE \sin(\Phi_l - \Phi_k) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi_l - \varphi_k) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 d\varphi_l d\varphi_k + j \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\varphi_l - \varphi_k) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 d\varphi_l d\varphi_k \\ &= \begin{cases} 0, & l \neq k \\ 1, & l = k \end{cases} \end{aligned}$$

于是

$$R_Z(s, t) = e^{j\omega_0(t-s)} \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$$

第2章 随机过程的基本概念

- 2.1 随机过程的定义
- 2.2 随机过程的分类和举例
- 2.3 随机过程的有限维分布函数族
- 2.4 随机过程的数字特征
- 2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征
- 2.6 复随机过程
- 2.7 几类重要的随机过程

2.7 几类重要的随机过程

● 1、二阶矩过程

- **定义 2.7.1** 如果随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的一、二阶矩存在（有限），则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是二阶矩过程。从二阶矩过程的均值函数和相关函数出发讨论随机过程的性质，而允许不涉及它的有限维分布，这种理论称为随机过程的相关理论。
- 由二阶矩过程的定义，二阶矩过程的均值函数和相关函数总是存在的，进而它的其它数字特征也都存在。

2.7 几类重要的随机过程

- **定理 2.7.1** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是二阶矩过程, 则相关函数 $R_X(s, t)$ 具有下列性质:

(1) 共轭对称性:

$$\overline{R_X(s, t)} = R_X(t, s), \quad s, t \in T$$

(2) 非负定性: 即对于任意 $n \geq 1$, 任意 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 和任意的复数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 有

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n R_X(t_k, t_l) \overline{\lambda_k} \lambda_l \geq 0$$

2.7 几类重要的随机过程

● 2、正态过程

- **定义 2.7.2** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程，如果对于任意 $n \geq 1$ 和任意 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 是 n 维正态随机变量，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为 正态过程 或 高斯过程.
- 显然，正态过程是二阶矩过程，它的 有限维分布由它的均值函数和协方差函数完全确定.

2.7 几类重要的随机过程

- **例 2.7.1** 设 $X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$, $-\infty<t<+\infty$, 其中 A,B 相互独立, 且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量, ω 是实常数. 试证明 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 是正态过程, 并求它的有限维分布.

2.7 几类重要的随机过程

- **证明** 由于 A, B 相互独立, 且都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 因此 $(A, B) \sim N(0, \sigma^2 E)$ (E 是二阶单位矩阵). 对于任意 $n \geq 1$ 和任意 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, 由于

$$X(t_1) = A \cos \omega t_1 + B \sin \omega t_1$$

$$X(t_2) = A \cos \omega t_2 + B \sin \omega t_2$$

$$\vdots$$

$$X(t_n) = A \cos \omega t_n + B \sin \omega t_n$$

即

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) = (A, B) \begin{bmatrix} \cos \omega t_1 & \cos \omega t_2 & \cdots & \cos \omega t_n \\ \sin \omega t_1 & \sin \omega t_2 & \cdots & \sin \omega t_n \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (A, B)C$$

2.7 几类重要的随机过程

因而, $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 是二维正态随机变量 (A, B) 的线性变换, 所以, $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 是 n 维正态随机变量, 故 $\{X(t), t \in T\}$ 是正态过程. 由于 $\{X(t), t \in T\}$ 是正态过程, 且 $E[X(t)] = 0$, 因而 $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) \sim N(0, \mathbf{B}), t_1, t_2, \dots, t_n \in T$.

其中

$$\begin{aligned} B &= C^T \sigma^2 E C = \sigma^2 \begin{bmatrix} \cos \omega t_1 & \sin \omega t_1 \\ \cos \omega t_2 & \sin \omega t_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \omega t_n & \sin \omega t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t_1 & \cos \omega t_2 & \cdots & \cos \omega t_n \\ \sin \omega t_1 & \sin \omega t_2 & \cdots & \sin \omega t_n \end{bmatrix} \\ &= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \cos \omega(t_1 - t_2) & \cdots & \cos \omega(t_1 - t_n) \\ \cos \omega(t_2 - t_1) & 1 & \cdots & \cos \omega(t_2 - t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos \omega(t_n - t_1) & \cos \omega(t_n - t_2) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.7 几类重要的随机过程

● 3、正交增量过程

- **定义 2.7.3** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一二阶矩过程, 如果对于任意的 $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \in T$, 有

$$\overline{E[(X(t_2) - X(t_1))(X(t_4) - X(t_3))]} = 0$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为一正交增量过程.

- 对于正交增量过程, 若 T 取为有限区间 $[a, b]$, 则对于任意的 $a \leq s < t \leq b$, 有

$$\overline{E[(X(s) - X(a))(X(t) - X(s))]} = 0$$

特别地, 当 $X(a)=0$ 时, 有 $\overline{E[X(s)(X(t) - X(s))]} = 0$

2.7 几类重要的随机过程

- **定理 2.7.2** 设 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 是正交增量过程, 且 $X(a)=0$, 则

(1)

$$R_X(s, t) = \Phi_X(\min(s, t)), s, t \in [a, b]$$

$$C_X(s, t) = D_X(\min(s, t)) + |m_X(\min(s, t))|^2 - \overline{m_X(s)} m_X(t), s, t \in [a, b]$$

(2) $\Phi_X(t)$ 是单调不减函数.

2.7 几类重要的随机过程

● 4、独立增量过程

- **定义 2.7.4** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程, 如果对于任意的 $n \geq 3$ 和任意 $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$,

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

是相互独立的随机变量, 则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是 独立增量过程. 如果对于任意 $s < t \in T$, $X(t) - X(s)$ 分布仅依赖于 $t - s$, 而与 s, t 本身取值无关, 则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为 平稳增量过程. 如果 $\{X(t), t \in T\}$ 既是平稳增量过程, 又是独立增量过程, 则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为 平稳的独立增量过程.

- **定理 2.7.3** 独立增量过程的有限维分布函数由 其一维分布函数 和 增量分布函数 确定.

2.7 几类重要的随机过程

● 5、Wiener过程

● **定义2.7.5** 称实随机过程 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 σ 的Wiener过程, 如果

(1) $W(0)=0$;

(2) $\{W(t), t \geq 0\}$ 是平稳的独立增量过程;

(3)

● **定理2.7.4** 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 σ 的Wiener过程, 则

(1)

(2) $\forall t > 0, W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$;

$$m_w(t) = 0, t \geq 0; D_w(t) = \sigma^2 t, t \geq 0;$$

● **定理2.7.5** Wiener过程是正态过程, $s, t \geq 0$.

2.7 几类重要的随机过程

● 6、平稳过程

平稳过程是一类统计特性不随时间推移而变化的随机过程.

- **定义 4.1.1** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程, 如果对于任意的 $n \geq 1$ 和任意的 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 以及 $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau \in T$ 的任意实数 τ , n 维随机变量 $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 和 $(X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_n + \tau))$ 有相同的联合分布函数, 即

$$\underline{F(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = F(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau; x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$t_i \in T, x_i, \tau \in R, i = 1, 2, \dots, n$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是严(强、狭义)平稳过程, 或称 $\{X(t), t \in T\}$ 具有严平稳性.

- 严平稳过程的有限维分布不随时间的推移而发生改变, 所有一维分布函数与时间 t 无关, 所有二维分布函数仅是时间间隔的函数, 而与两个时刻本身无关.

2.7 几类重要的随机过程

- **定义 4.1.2** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是二阶矩过程, 如果

(1) $\forall t \in T, \underline{m_X(t) = m_X}$ (m_X 为常数)

(2) $\forall s, t \in T, \underline{R_X(s, t) = R_X(t - s)}$ 或 $\forall \tau \in R, t, t + \tau \in T, R_X(t, t + \tau) = R_X(\tau)$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为 宽平稳过程, 简称 平稳过程.

- 严平稳过程不一定是宽平稳过程, 因为严平稳过程只涉及有限维分布, 而并不要求一、二阶矩存在. 但对二阶矩过程, 严平稳过程一定是宽平稳过程.
- 宽平稳过程也不一定是严平稳过程, 因为宽平稳过程的定义只要均值函数与时间无关, 相关函数仅依赖于时间间隔, 而与时间起点无关, 推导不出有限维分布不随时间的推移而发生改变, 甚至一、二维分布.

小结

● 随机过程的定义

- 定义在 Ω 和 T 上的二元函数 $X(\omega, t)$ (一族随机变量)
- 当 t 固定时, 是随机变量; 当 ω 固定时, 是普通函数

● 随机过程的分类

- 根据参数集 T 和状态空间 S 是离散还是连续集合, 分为四类

● 随机过程的有限维分布 (特征) 函数族、数字特征

- 分布函数族, 特征函数族
- 均值函数, 方差函数, 协方差函数, 相关函数, 均方值函数

● 两个随机过程的联合分布和数字特征

- 二维随机过程的 $m+n$ 维分布函数, 边缘分布
- 互相关函数, 互协方差函数
- 两个随机过程相互独立 (不相关)

● 复随机过程

● 几类重要的随机过程

- 二阶矩过程, 正态过程, 正交增量过程, 独立增量过程, Wiener过程, 平稳过程