# 泊松过程

张立国

zhangliguo@hrbeu.edu.cn

哈尔滨工程大学

# 泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

# 泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

# 1. 泊松过程的定义

- *Poisson* 过程是一类直观意义很强,而且极为重要的过程,其应用范围很广,遍及各个领域，公用事业、生物学、物理学、电子通信工程等很多方面的问题都可用 *Poisson* 过程物理模拟.
- 考虑一个来到某“服务点”要求服务的“顾客流”, 顾客到服务点的到达过程可认为是 *Poisson* 过程.当抽象的“服务点”和“顾客流”有不同的含义时，便可得到不同的 *Poisson*过程. 例如,某电话交换台得电话呼叫,交换台就是服务点，所有的呼叫依先后次序构成一顾客流.

# 1. 泊松过程的定义

- **计数过程**

  **定义 2.7.6** 称实随机过程$\{N(t), t\geq 0\}$为计数过程，如果$N(t)$代表到时刻$t$所发生的随机事件数.

- 计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$应该满足下列条件:

  (1) $N(t)$是非负整数;

  (2) $\forall 0\leq s<t$，$N(t)\geq N(s)$;

  (3) $\forall 0\leq s<t$，$N(t)-N(s)$ 代表时间间隔$t$-$s$内发生的随机事件数.

# 1. 泊松过程的定义

- ***Poisson*过程**

**定义 2.7.7** 称计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$是参数(强度、比率)为$\lambda(\lambda>0)$的 *Poisson* 过程，如果:

(1) $N(0)=0$;

(2) $\{N(t),t\geq 0\}$是<u>**平稳的独立增量过程**</u>;

(3) $\forall t>0$，<u>***N*(*t*) 服从参数为 $\lambda t$ 的 *Poisson*分布**</u>，即

$$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},k=0,1,2,\cdots$$

# 1. 泊松过程的定义

- **定理 2.7.6** 设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为$\lambda$的 *Poisson* 过程，则

(1) $m_N(t)=\lambda t$， $t\geq 0$; $D_N(t)=\lambda t$， $t\geq 0$;

$C_N(s,t)=\lambda min(s,t)$, $s,t\geq 0$; $R_N(s,t)=\lambda^2 st+\lambda min(s,t)$, $s,t\geq 0$.

(2) $\forall 0\leq s<t$，$N(t)-N(s)$服从参数为$\lambda(t-s)$的*Poisson*分布.

- 证明：(1) 只需证明： $R_N(s,t)=\lambda^2 st+\lambda min(s,t)$, $s,t\geq 0$.

(2) 往证:

$$P(N(t)-N(s)=k)=\frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)},k=0,1,2,\cdots$$

# 1. 泊松过程的定义

- **定义 2.7.8** 称计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为$\lambda$的 *Poisson* 过程，如果：

  (1) $N(0)=0$;

  (2) $\{N(t), t\geq 0\}$是<u>**平稳的独立增量过程**</u>;

  (3) 当 $\Delta t$ 充分小时，在$(t, t+\Delta t)$内<u>**出现事件一次的概率**</u>为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，即 $P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$

  (4)当 $\Delta t$ 充分小时，在$(t, t+\Delta t)$内<u>**出现事件两次或是两次以上概率**</u>为 $o(\Delta t)$，即

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2)=o(\Delta t)$$

# 1. 泊松过程的定义

- **定理 2.7.7** 定义2.7.7与定义2.7.8等价.
- **证明:**
- 设定义2.7.7成立，只需证明定义2.7.8中的条件(3)、(4) 成立，即 $P(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2)=o(\Delta t)$

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

- 设定义2.7.8成立，只需证明 $\forall t>0$

$$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},k=0,1,2,\cdots$$

# 泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

# 2. 泊松过程的到达时间间隔分布

- ***Poisson* 过程的到达时间间隔分布**

设$N(t)$表示直到$t$时刻到达的随机点数,$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为λ 的*Poisson*过程, $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{n,}\cdots$ 分别表示第1个，第2个,…,第$n$个,…,随机点的到达时间，称 $\{\tau_n,n=1,2,\cdots\}$ 为*Poisson* 过程的**到达时间序列**，它是一个随机变量序列，令 $T_n=\tau_n-\tau_{n-1},n=1,2,\cdots,\tau_0\overset{def}{=}0$, 称$\{T_n, n=1,2,...\}$为*Poisson* 过程的 **到达时间间隔序列**，它也是一个随机变量序列.显然 $\tau_n=T_1+T_2+\cdots+T_n$

## 2. 泊松过程的到达时间间隔分布

- **定理 2.7.8** 设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为 $\lambda$ 的 *Poisson* 过程，$\{T_n,n=1,2,\dots\}$是其到达时间间隔序列，则$T_1,T_2,\dots,T_n,\dots$,**相互独立同服从参数 $\lambda$ 的指数分布**.

即

$$f_{T_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}\qquad F_{T_n}(t)=\begin{cases}1-\lambda e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$$E[T_n]=\frac{1}{\lambda},\quad D[T_n]=\frac{1}{\lambda^2}$$

# 泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

# 3. 泊松过程的到达时间分布

- **定理 2.7.9** 设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为 $\lambda$ 的 *Poisson*过程 $\{\tau_n, n=1,2,\cdots\}$ 是其到达时间序列，则 $\tau_n(n=1,2,\cdots)$ **服从 $\Gamma$ 分布**（也称为**阶为 $n$ 的 Erlang (埃尔朗)分布**），即 $\tau_n$ 的概率密度函数为

$$f_{\tau_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$$E[\tau_n]=\frac{n}{\lambda},\quad D[\tau_n]=\frac{n}{\lambda^2}$$

# 泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

# 4. 泊松过程的到达时间的条件分布

- 设$\{N(t), t\geq 0\}$是参数为$\lambda$的Poisson过程，如果在$[0,t)$内**仅有一个随机点到达**，$\tau$是**其到达时间**，则$\tau$服从$[0,t)$上的均匀分布.

- 事实上，当$0\leq s<t$时，

$$F_{\tau|N(t)=1}(s\,|\,N(t)=1)=P(\tau\leq s\,|\,N(t)=1)$$

$$=\frac{P(\tau\leq s, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}=\frac{P(N(s)=1, N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$=\frac{P(N(s)=1)P(N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)}=\frac{\lambda s e^{-\lambda s}e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}}=\frac{s}{t}$$

从而$\tau$服从$[0,t)$上的均匀分布.

# 4. 泊松过程的到达时间的条件分布

- **定理2.7.10** 设$\{N(t), t \geq 0\}$是参数为$\lambda$的 *Poisson* 过程，如果在 $[0,t)$ 内有$n$个随机点到达，则 **$n$ 个到达时间**

$$\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n$$

和 $n$ 个相互独立同服从 $[0,t)$ 上**均匀分布的随机变量** $U_1, U_2, \cdots U_n$ **的顺序统计量** $U_{(1)} < U_{(2)} < \cdots < U_{(n)}$ 同分布.

# 4. 泊松过程的到达时间的条件分布

- **例 2.7.2** 假设乘客按照参数为$\lambda$的$Poisson$过程$\{N(t), t \geq 0\}$来到一个火车站乘坐某次列车，若火车在时刻 $t$ 启程，试求在 $[0,t]$ 内到达火车站乘坐该次列车的乘客等待时间总和的数学期望。

- **解：** 设$\tau_k$是第$k$个乘客到达火车站的时刻，则其等待时间为$t-\tau_k$，从而在$[0,t]$内到达火车站乘坐该次列车的乘客等待时间总和为

$$\sum_{k=1}^{N(t)} (t-\tau_k)$$

# 4. 泊松过程的到达时间的条件分布

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-\tau_k)] = E[E(\sum_{k=1}^{N(t)}(t-\tau_k)\,|\,N(t))]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{k=1}^{n}(t-\tau_k)\,|\,N(t)=n)P(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(nt-\sum_{k=1}^{n}E(\tau_k\,|\,N(t)=n))P(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(nt-\sum_{k=1}^{n}EU_{(k)})P(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(nt-\sum_{k=1}^{n}EU_{k})P(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(nt-\frac{1}{2}nt)\cdot\frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!}e^{-\lambda t} = \frac{\lambda t^2}{2}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!})e^{-\lambda t} = \frac{\lambda t^2}{2}e^{\lambda t}e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{\lambda t^2}{2}$$

# 泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

# 5. 复合泊松过程

- **定义 2.7.9** 设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为$\lambda$的*Poisson*过程，$\{Y_n,n=1,2,\ldots\}$是相互独立同分布的随机变量序列，且$\{N(t),t\geq 0\}$和$\{Y_n,n=1,2,\ldots\}$也相互独立，令$\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$， $t\geq 0$，则称$\{N(t), t\geq 0\}$为**<u>复合 *Poisson* 过程</u>**.

- **定理 2.7.11** 设$\{N(t),t\geq 0\}$为复合*Poisson*过程，则

(1) $\{N(t),t\geq 0\}$的一维特征函数为

$$f_{X(t)}(u) \overset{def}{=} \varphi(t;u) = e^{\lambda t(f(u)-1)}$$

其中 $f(u)$ 是 $Y_n$（$n=1, 2, \ldots$）的特征函数;

(2) 若 $EY_n^2<+\infty$, 则 $m_X(t)=\lambda t EY_n, D_X(t)=\lambda t EY_n^2$.

# 5. 复合泊松过程

- **例 2.7.3** 设移民到某地区定居的户数是一 *Poisson* 过程，平均每周有2户定居，即$\lambda=2$，如果每户的人口数是一随机变量，一户四人的概率为1/6，一户三人的概率为1/3，一户二人的概率为1/3，一户一人的概率为1/6，并且每户的人口数是相互独立的随机变量，求在五周内移民到该地区人口数的数学期望和方差.

# 5. 复合泊松过程

- **解** 设$\{N(t),t\geq 0\}$是移民到该地区定居的户数所形成的*Poisson*过程，则其参数为 $\lambda=2$. 再设$Y_n$表示第$n$户的人口数， $X(t)$ 代表移民的总人数，则 $X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n$ ，从而$\{N(t),\ t\geq 0\}$是复合的*Poisson*过程.

因为 $$EY_n=4\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{6}=\frac{5}{2}$$

$$EY_n^2=4^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{6}=\frac{43}{6}$$

所以

$$E[X(5)]=2\times5\times\frac{5}{2}=25,\quad D[X(5)]=2\times5\times\frac{43}{6}=\frac{215}{3}$$

# 5. 复合泊松过程

- **例2.7.4** 设投保人的死亡是参数为$\lambda$的*Poisson*过程，对于第$n$个死亡的投保人用随机变量$Y_n$描述，同时也表示该投保人的价值，并且$Y_n$ ($n$=1,2,...) 相互独立同服从参数为$a$ ($a$>0) 的指数分布.令$X(t)$表示在期间[0,$t$)内保险公司必须付出的全部赔偿，求$E[X(t)]$和$D[X(t)]$.

# 5. 复合泊松过程

- **解** 设$\{N(t),t\geq 0\}$表示死亡的投保人所形成的*Poisson* 过程，其参数为 $\lambda$，则 $X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ ，$t\geq 0$. 从而$\{X(t),t\geq 0\}$是复合的*Poisson*过程.

由于 $$EY_n=\frac{1}{a}, DY_n=\frac{1}{a^2}$$

从而 $$EY_n^2=DY_n+(EY_n)^2=\frac{2}{a^2}$$

因此 $$E[X(t)]=\lambda tEY_n=\frac{\lambda t}{a},\quad D[X(t)]=\lambda tEY_n^2=\frac{2\lambda t}{a^2}$$

# The End