# 随机过程习题总结

# 1.3 随机变量的数字特征

- 常见的离散随机变量的期望和方差

| 分布 | 分布律 | 期望 | 方差 |
|---|---|---|---|
| 0-1分布 | $P(X=1)=p,\ P(X=0)=q,$ $0<p<1,\ p+q=1$ | $p$ | $pq$ |
| 二项分布 | $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},$ $0<p<1,\ p+q=1,\ k=0,1,\cdots,n$ | $np$ | $npq$ |
| 泊松分布 | $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad \lambda>0,\ k=0,1,\cdots$ | $\lambda$ | $\lambda$ |

- 常见的连续型随机变量的期望和方差

| 分布 | 概率密度 | 期望 | 方差 |
|---|---|---|---|
| 均匀分布 | $f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ | $(a+b)/2$ | $(b-a)^2/12$ |
| 正态分布 | $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$ | $a$ | $\sigma^2$ |
| 指数分布 | $f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\quad \lambda>0$ | $1/\lambda$ | $1/\lambda^2$ |

# 1.4 随机变量的特征函数

- **例1.4.1** 设$X$服从<u>**单点分布**</u>，即 $P(X=c)=1$, 其中$c$为常数，则$X$的特征函数

$$\varphi(t)=E[e^{jtX}]=e^{jtc}$$

- **例1.4.2** 设$X\sim B(n,p)$（<u>二项分布</u>，**Binomial**），即

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

$k=0,1,2,\ldots,n$，$0<p<1$， $q=1-p$，

则$X$的特征函数

$$\varphi(t)=E[e^{jtX}]=\sum_{k=0}^{n}e^{jtk}C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(pe^{jt})^k q^{n-k}=(pe^{jt}+q)^n$$

特别地，当$n=1$时，$X$服从0-1分布，其特征函数为

$$\varphi(t)=pe^{jt}+q$$

# 1.4 随机变量的特征函数

- **例1.4.3** 设$X$服从<u>**泊松分布**</u>（**Poisson**），即

  $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k$=0,1,2,…，$\lambda$>0, 则 $X$ 的特征函数

  $$\varphi(t)=E[e^{jtX}]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jtk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{jt})^k}{k!}}=e^{-\lambda}\underline{e^{\lambda e^{jt}}}=e^{\lambda(e^{jt}-1)}$$

- **例1.4.4** 设$X$服从区间[$a$,$b$]上的<u>**均匀分布**</u>（**Uniform**），即

  $X$的概率密度函数为

  $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

  则$X$的特征函数

  $$\varphi(t)=E[e^{jtX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}f(x)dx=\int_a^b e^{jtx}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{jt(b-a)}(e^{jtb}-e^{jta})$$

# 1.4 随机变量的特征函数

- **例1.4.5** 设$X$~$N(\mu,\sigma^2)$（<u>正态分布</u>，**Normal**），即$X$的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty,-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0$$

则$X$的特征函数

$$\varphi(t)=E[e^{jtX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{u=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jt(\sigma u+\mu)}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}e^{j\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(u-j\sigma t)^2}{2}}du}=e^{j\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

$$\boxed{U=\frac{X-\mu}{\sigma},\ U\sim N(j\sigma t,1),\ f_U(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-j\sigma t)^2}{2}},\ \int_{-\infty}^{+\infty}f_U(u)du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-j\sigma t)^2}{2}}du=1}$$

# 1.4 随机变量的特征函数

- 特别地，若$X$~$N(0,1)$（**<u>标准正态分布</u>**，**Standard Normal**），则其特征函数

$$\varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- **例1.4.6** 设$X$服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的**<u>指数分布</u>**（**Exponential**），即$X$的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

则$X$的特征函数

$$\varphi(t)=E[e^{jtX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}e^{jtx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{(jt-\lambda)x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-jt}=(1-\frac{jt}{\lambda})^{-1}$$

*独立泊松分布的和还是泊松分布，且参数为各参数的和*

*独立正态分布的和还是正态分布，且参数为对应各参数的和.*

# 1.5 $n$ 维正态随机变量

- 下面<u>用向量和矩阵的形式来表示二维正态分布的联合概率密度函数</u>. 令

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2),\quad \boldsymbol{\mu}=(\mu_1\mu_2),\quad B=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

于是

$$|B|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

$$B^{-1}=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\begin{bmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{bmatrix}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sigma_1^2} & -\dfrac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}\\ -\dfrac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{1}{\sigma_2^2}\end{bmatrix}$$

# 1.5 $n$ 维正态随机变量

所以

$$\frac{1}{1-\rho^2}[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$$=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T$$

于是

$$f(x)=f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\left|B\right|^{1/2}}\exp[-\frac{1}{2}(x-\mu)B^{-1}(x-\mu)^T]$$

# 1.5 $n$ 维正态随机变量

- **定义 1.5.1** 设$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是$n$维随机变量，如果其联合概率密度函数为

$$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|B\right|^{1/2}}\exp[-\frac{1}{2}(x-\mu)B^{-1}(x-\mu)^T]$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\overset{def}{=}(EX_1,EX_2,\cdots,EX_n)$

$$B\overset{def}{=}\begin{bmatrix}\operatorname{cov}(X_1,X_1) & \operatorname{cov}(X_1,X_2) & \cdots & \operatorname{cov}(X_1,X_n)\\ \operatorname{cov}(X_2,X_1) & \operatorname{cov}(X_2,X_2) & \cdots & \operatorname{cov}(X_2,X_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \operatorname{cov}(X_n,X_1) & \operatorname{cov}(X_n,X_2) & \cdots & \operatorname{cov}(X_n,X_n)\end{bmatrix}$$

则称$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$服从 $\boldsymbol{\mu}$ 为均值向量、$\boldsymbol{B}$ 为协方差矩阵的<u>$n$ **维正态分布**</u>，记为$\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$.

# 1.5 $n$ 维正态随机变量

- **定理1.5.3** （正态随机变量的性质）

设$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$

(1) 若$l_1,l_2,\ldots.l_n$是常数，则 $Y=\sum_{k=1}^{n} l_k X_k$ 服从一维正态分布

$$N\left(\sum_{k=1}^{n} l_k \mu_k, \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} l_i l_k \operatorname{cov}(X_i,X_k)\right)$$

其中 $\mu_k=EX_k$， $k=1,2,\ldots,n.$

★（<u>一维正态随机变量的线性组合仍然是正态随机变量</u>）

# 2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **例 2.3.1** 设$X(t)=A+Bt,\ t\geq 0$, 其中$A$ 和$B$ 是相互独立的随机变量，分别服从正态分布$N(0,1)$，试求随机过程$\{X(t),\ t\geq 0\}$的一维和二维分布.

# 2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **解** 先求一维分布. $\forall t \geq 0, X(t)$是正态随机变量， 因为

$$E[X(t)]=EA+tEB=0$$

$$D[X(t)]=DA+t^2DB=1+t^2$$

所以$X(t)$服从正态分布$N(0,1+t^2)$,从而$\{X(t), t \geq 0\}$的一维分布为

$$\underline{X(t) \sim N(0,1+t^2),} \quad t \geq 0$$

再求二维分布,$\forall t_1, t_2 \geq 0, X(t_1) = A + Bt_1, X(t_2) = A + Bt_2$ ，

从而

$$(X(t_1), X(t_2)) = (A, B)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix}$$

# 2.3 随机过程的有限维分布函数族

又$A$, $B$相互独立同服从正态分布，故$(A,B)$服从二维正态分布，从而$(X(t_1),X(t_2))$也服从二维正态分布.

$$E[X(t_1)]=0，E[X(t_2)]=0$$

$$D[X(t_1)]=1+t_1^2, D[X(t_2)]=1+t_2^2$$

$$cov(X(t_1),X(t_2))=E[X(t_1)X(t_2)]-E[X(t_1)]E[X(t_2)]$$

$$= E[(A+Bt_1)(A+Bt_2)]$$

$$=1+t_1t_2$$

故$(X(t_1),X(t_2))$的均值向量为$\mathbf{0}=(0,0)$，协方差矩阵为

# 2.3 随机过程的有限维分布函数族

$$B=\begin{bmatrix}1+t_1^2 & 1+t_1t_2\\ 1+t_1t_2 & 1+t_2^2\end{bmatrix}$$

所以随机过程$\{X(t), t\geq 0\}$的二维分布为

$$(X(t_1), X(t_2))\sim N(0,B),\quad t_1,t_2\geq 0$$

# 2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **例 2.3.2** 令$X(t)=A\cos t$, $-\infty<t<+\infty$,其中$A$是随机变量，其分布律为

$$P(A=i)=\frac{1}{3}, \quad i=1,2,3$$

试求

(1) 随机过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的一维分布函数

$$F(\frac{\pi}{4};x), \quad F(\frac{\pi}{2};x)$$

(2) 随机变量$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的二维分布函数

$$F(0,\frac{\pi}{3};x_1,x_2)$$

# 2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **解** (1)先求 $F(\frac{\pi}{4};x)$. 由于 $X(\frac{\pi}{4}) = A\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}A$，因此$X(\frac{\pi}{4})$ 的可能取值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ，并且

$$P(X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2})=P(A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2})=P(A=1)=\frac{1}{3}$$

$$P(X(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2})=P(A\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2})=P(A=2)=\frac{1}{3}$$

$$P(X(\frac{\pi}{4})=\frac{3}{2}\sqrt{2})=P(A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\sqrt{2})=P(A=3)=\frac{1}{3}$$

# 2.3 随机过程的有限维分布函数族

于是

$$F(\frac{\pi}{4};x)=\begin{cases}0, & x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{3}, & \frac{\sqrt{2}}{2}\le x<\sqrt{2}\\ \frac{2}{3}, & \sqrt{2}\le x<\frac{3}{2}\sqrt{2}\\ 1, & x\ge\frac{3}{2}\sqrt{2}\end{cases}$$

再求$F(\frac{\pi}{2};x)$ . 由于$X(\frac{\pi}{2})=A\cos\frac{\pi}{2}=0,$ 因此$X(\frac{\pi}{2})$只能取0值，于是

$$F(\frac{\pi}{2};x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$$

(2) 因为

$$
\begin{aligned}
F(0,\frac{\pi}{3};x_1,x_2) &= P(X(0)\le x_1, X(\frac{\pi}{3})\le x_2) \\
&= P(A\cos 0\le x_1, A\cos\frac{\pi}{3}\le x_2) \\
&= P(A\le x_1, \frac{A}{2}\le x_2) \\
&= P(A\le x_1, A\le 2x_2) \\
&= \begin{cases} P(A\le x_1), x_1\le 2x_2 \\ P(A\le 2x_2), x_1 > 2x_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

## 2.3 随机过程的有限维分布函数族

所以

$$F(0,\frac{\pi}{3};x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x_1\le 2x_2, x_1<1\text{或}x_1>2x_2, x_2<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}, & x_1\le 2x_2, 1\le x_1<2\text{或}x_1>2x_2, \frac{1}{2}\le x_2<1\\ \frac{2}{3}, & x_1\le 2x_2, 2\le x_1<3\text{或}x_1>2x_2, 1\le x_2<\frac{3}{2}\\ 1, & x_1\le 2x_2, x_1\ge 3\text{或}x_1>2x_2, x_2\ge\frac{3}{2}\end{cases}$$

# 泊松过程

- **例6. 某商店顾客的到来服从强度为4人每小时的Poisson过程，已知商店9:00开门，试求：**

**（1）在开门半小时中，无顾客到来的概率；**

**（2）若已知开门半小时中无顾客到来，那么在未来半小时中，仍无顾客到来的概率；**

**（3）若该商店到9:30时仅到来一位顾客，且到11:30时总计已到达5位顾客的概率；**

**（4）在已知到11:30时已到来5位顾客的条件下，在9:30时仅有一位顾客到来的概率。**

**解** 设顾客到来过程为$\{N(t), t\geqslant 0\}$，依题设$\{N(t), t\geqslant 0\}$是参数为$\lambda$的Poisson过程.

(1) 在开门半小时中，无顾客到来的概率为

$$P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)=e^{-4\times\frac{1}{2}}=e^{-2}$$

(2) 在开门半小时中无顾客到来可表示为$\left\{N\left(\frac{1}{2}\right)=0\right\}$，在未来半小时仍无顾客到来可表示为$\left\{N(1)-N\left(\frac{1}{2}\right)=0\right\}$，从而所求概率为

$$\begin{aligned}P\left(N(1)-N\left(\frac{1}{2}\right)=0\,\middle|\,N\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)&=P\left(N(1)-N\left(\frac{1}{2}\right)=0\,\middle|\,N\left(\frac{1}{2}\right)-N(0)=0\right)\\&=P\left(N(1)-N\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)\\&=e^{-4\times\left(1-\frac{1}{2}\right)}=e^{-2}\end{aligned}$$

(3) 到9:30时仅到一位顾客可表示为$\left\{N\left(\frac{1}{2}\right)=1\right\}$，到11：30时总计已到达5位顾客可表示为$\left\{N\left(\frac{5}{2}\right)=5\right\}$，从而所求概率为

$$P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1,\ N\left(\frac{5}{2}\right)=5\right)=P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)-N(0)=1,\ N\left(\frac{5}{2}\right)-N\left(\frac{1}{2}\right)=4\right)$$

$$=P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)-N(0)=1\right)P\left(N\left(\frac{5}{2}\right)-N\left(\frac{1}{2}\right)=4\right)$$

$$=\frac{4\times\frac{1}{2}}{1!}e^{-4\times\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(4\times\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)^4}{4!}e^{-4\times\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{1024}{3}e^{-10}=0.0155$$

（4）在已知到 11：30 时已到达 5 位顾客的条件下，在 9：30 时仅有一位顾客到来的概率为

$$P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1\,\middle|\,N\left(\frac{5}{2}\right)=5\right)=\frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1,\ N\left(\frac{5}{2}\right)=5\right)}{P\left(N\left(\frac{5}{2}\right)=5\right)}$$

$$=\frac{\frac{1024}{3}e^{-10}}{\frac{\left(4\times\frac{5}{2}\right)^5}{5!}e^{-4\times\frac{5}{2}}}$$

$$=C_5^1\left(\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)^4=0.41$$

# 泊松过程

**例7：某中子计数器对到达计数器的粒子只是每隔一个记录一次，假设粒子按照比率4个每分钟的泊松过程到达，令$T$是两个相继被记录粒子之间的时间间隔（单位：分钟）试求：**

**(1) $T$的概率密度函数.**

**(2) $P(T\geq 1)$**

**解** (1) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为被记录粒子之间的时间间隔，则它们相互独立同分布．因此，只需求出 $X_1$ 的分布，即为 $T$ 的分布．

先求 $X_1$ 的分布函数 $F_{X_1}(t)$．

当 $t<0$ 时，$F_{X_1}(t)=0$．

当 $t\geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned} F_{X_1}(t) &= P(X_1 \leqslant t) = 1 - P(X_1 > t) \\ &= 1 - P(N(t) \leqslant 1) \\ &= 1 - P(N(t) = 0) - P(N(t) = 1) \\ &= 1 - e^{-4t} - 4te^{-4t} \end{aligned}$$

即

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 1-(1+4t)e^{-4t}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

从而 $T$ 的概率密度函数为

$$f_T(t) = \begin{cases} 16te^{-4t}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

(2)

$$P(T\geqslant 1)=1-P(T<1)=1-F_T(1)=1-F_{X_1}(1)=5e^{-4}$$

# 补充例题1

- 三个黑球，三个白球，等分后放入甲乙两袋。从甲乙两袋中每次各取一球，然后互换，即把从甲袋中取出的球放入乙袋，把从乙袋中取出的球放入甲袋。把甲袋中的白球数定义为该过程的状态，则有四种状态：0,1,2,3，经过次交换后过程的状态为（1）求出它的一步转移概率矩阵；（2）如果该过程长期运行下去，甲袋中无白球的概率是多少？

# 补充例题1

- （1）

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# 补充例题1

- (2)设该过程的平稳分布为 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_3,\pi_4)$ ，由

$\pi=\pi\cdot P$ ，$\pi_0+\pi_1+\pi_3+\pi_4=1$ ，则有

$$\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_3,\pi_4)=\left(\frac{1}{20},\frac{9}{20},\frac{9}{20},\frac{1}{20}\right)$$

故过程长期以后，甲袋中无白球的概率为1/20 。

# 补充例题2

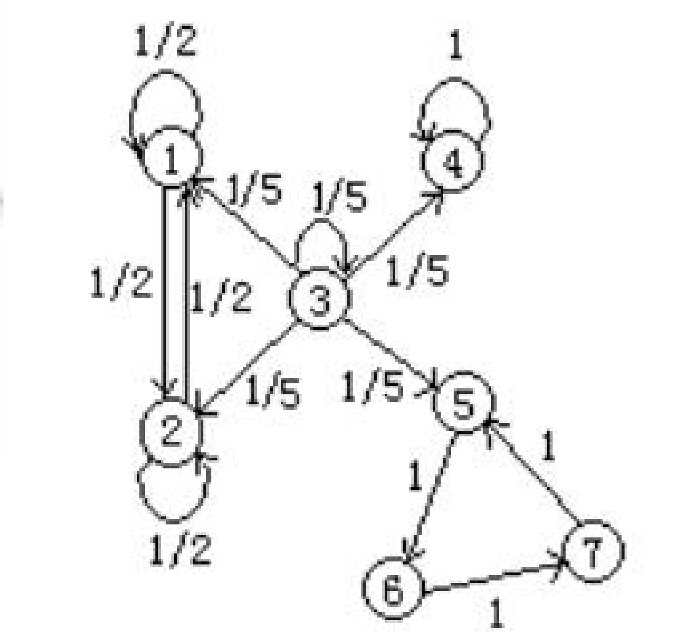
- 设一齐次马尔可夫链，其状态空间S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试画出该过程的状态转移图，并分析状态类型、对状态空间进行分解。

# 补充例题2

- **解：**




该马氏链的状态空间S可分解为 $S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$，

$D = \{3\}$，$C_1 = \{1,2\}$，$C_2 = \{4\}$，$C_3 = \{5,6,7\}$。其中，

D为非常返状态集，$C_1, C_2$和$C_3$均为正常返状态集，且状态1, 2为遍历态，4为吸收态，5, 6, 7为周期态 。