

# 第5章 马尔可夫过程

张立国

[zhangliguo@hrbeu.edu.cn](mailto:zhangliguo@hrbeu.edu.cn)

哈尔滨工程大学

# 5 马尔可夫过程

- 5.1 马尔可夫过程的定义
- 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布
- 5.3 齐次马尔可夫链的分类
- 5.4 转移概率的稳定性能

# 5 马尔可夫过程

- 5.1 马尔可夫过程的定义
- 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布
- 5.3 齐次马尔可夫链的分类
- 5.4 转移概率的稳定性能

## 5.1 马尔可夫过程的定义

- 马尔可夫过程是无后效性的随机过程
- 马尔可夫性

**定义 5.1.1** 设  $\{X(t), t \in T\}$  是一个随机过程，如果  $\{X(t), t \in T\}$  在  $t_0$  时刻所处的状态为已知时，它在时刻  $t > t_0$  所处状态的条件分布与其在  $t_0$  之前所处的状态无关. 通俗地说，就是知道过程“现在”的条件下，其“将来”的条件分布不依赖于“过去”，则称  $\{X(t), t \in T\}$  具有马尔可夫 (Markov) 性。

## 5.1 马尔可夫过程的定义

### ● 马尔可夫过程

**定义 5.1.2** 设  $\{X(t), t \in T\}$  的状态空间为  $S$ , 如果

$\forall n \geq 2, \forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$  在条件  $X(t_i)=x_i, x_i \in S,$   
 $i=1,2,\dots,n-1$  下,  $X(t_n)$  的条件分布函数恰好等于在条件  
 $X(t_{n-1})=x_{n-1}$  下的条件分布函数, 即

$$\begin{aligned} & \underline{P(X(t_n) \leq x_n \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1})} \\ & \underline{= P(X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}), x_n \in R} \end{aligned}$$

则称  $\{X(t), t \in T\}$  为 马尔可夫过程。

## 5.1 马尔可夫过程的定义

### ● 马尔可夫链

**定义 5.1.3** 参数集和状态空间都是离散的马尔可夫过程称为马尔科夫链。

为了讨论简单起见，在以后取马尔科夫链的状态空间为有限或可列无限，此时马尔可夫性可表示为

$$\begin{aligned} & \forall n \geq 2, \forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, i_1, i_2, \cdots, i_n \in S \\ & \underline{P(X(t_n) = i_n \mid X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \cdots, X(t_{n-1}) = i_{n-1})} \\ & \underline{= P(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1})} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

## 5.1 马尔可夫过程的定义

特别地，取  $T=\{0,1,2,\dots\}$  的马尔可夫链常记为  $\{X(n), n\geq 0\}$  或  $\{X_n, n\geq 0\}$ ，此时马尔可夫性为  $\forall n\geq 1, i_0, i_1, \dots, i_n \in S$ ,

$$\begin{aligned} &P(X(n)=i_n/X(0)=i_0, X(1)=i_1, \dots, X(n-1)=i_{n-1}) \\ &= P(X(n)=i_n/X(n-1)=i_{n-1}) \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

或  $P(X_n=i_n/X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_{n-1}=i_{n-1}) = P(X_n=i_n/X_{n-1}=i_{n-1})$

(5.1.4)

- 容易证明，对于马尔可夫链  $\{X(n), n\geq 0\}$ ,

(5.1.2) 式等价于 (5.1.3) 式或 (5.1.4) 式。

# 5 马尔可夫过程

- 5.1 马尔可夫过程的定义
- 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布
- 5.3 齐次马尔可夫链的分类
- 5.4 转移概率的稳定性能



## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

### 1. 转移概率

- **定义 5.2.1** 设  $\{X_n, n \geq 0\}$  是马尔可夫链, 称  $\{X_n, n \geq 0\}$  在  $n$  时处于状态  $i$  的条件下经过  $k$  步转移, 于  $n+k$  时到达状态  $j$  的条件概率  $\underline{p_{ij}^{(k)}(n) \stackrel{\text{def}}{=} P(X_{n+k} = j | X_n = i), i, j \in S, n \geq 0, k \geq 1}$  为  $\{X_n, n \geq 0\}$  在  $n$  时的  $k$  步转移概率; 称以  $\underline{P^{(k)}(n) = (p_{ij}^{(k)}(n))_{i,j \in S}}$  为  $\{X_n, n \geq 0\}$  在  $n$  时的  $k$  步转移概率矩阵. 特别地, 当  $k=1$  时,  $\{X_n, n \geq 0\}$  在  $n$  时的一步转移概率和一步转移概率矩阵分别简记为  $\underline{P(n)}$ .

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **定义 5.2.2** 称可数维的矩阵  $P=(p_{ij})$  为随机矩阵，如果

$$p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j; \quad \sum_j p_{ij} = 1, \quad \forall i$$

- 显然， $\{X_n, n \geq 0\}$  的  $k$  步转移概率矩阵  $P^{(k)}(n)$  是一随机矩阵。事实上，由于  $p_{ij}^{(k)}(n) \geq 0, i, j \in S$ ，并且

$$\begin{aligned} \sum_j p_{ij}^{(k)}(n) &= \sum_j P(X_{n+k} = j | X_n = i) = P\left(\bigcup_j (X_{n+k} = j) | X_n = i\right) \\ &= P(\Omega | X_n = i) = 1 \end{aligned}$$

- 如果我们进一步约定  $p_{ij}^{(0)}(n) = \delta_{ij}, i, j \in S, n \geq 0$ ，则

$P^{(0)}(n) = I$  为单位矩阵。

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

### ● 2. Chapman-Kolmogorov方程

#### ● 定理5.2.1 (C-K方程)

$$p_{ij}^{(k+m)}(n) = \sum_l p_{il}^{(k)}(n) p_{lj}^{(m)}(n+k), \quad n, k, m \geq 0, i, j \in S$$

或

$$P^{(k+m)}(n) = P^{(k)}(n) P^{(m)}(n+k)$$

- $\{X_n, n \geq 0\}$  在  $n$  时处于状态  $i$  的条件下经过  $k+m$  步转移于  $n+k+m$  时到达状态  $j$ , 可以先在  $n$  时从状态  $i$  出发, 经过  $k$  步于  $n+k$  时到达某种中间状态  $l$ , 再在  $n+k$  时从状态  $l$  出发经过  $m$  步转移于  $n+k+m$  时到达最终状态  $j$ , 而中间状态  $l$  要取遍整个状态空间。

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

### ● 证明

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(k+m)}(n) &= P(X_{n+k+m} = j \mid X_n = i) \\ &= P\left(\bigcup_l (X_{n+k} = l), X_{n+k+m} = j \mid X_n = i\right) \\ &= P\left(\bigcup_l (X_{n+k} = l, X_{n+k+m} = j) \mid X_n = i\right) \\ &= \sum_l P(X_{n+k} = l, X_{n+k+m} = j \mid X_n = i) \\ &= \sum_l P(X_{n+k} = l \mid X_n = i) P(X_{n+k+m} = j \mid X_{n+k} = l, X_n = i) \\ &= \sum_l P(X_{n+k} = l \mid X_n = i) P(X_{n+k+m} = j \mid X_{n+k} = l) \\ &= \sum_l p_{il}^{(k)}(n) p_{lj}^{(m)}(n+k) \end{aligned}$$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- 在C-K方程矩阵形式中，取 $m=1$ ，得

$$P^{(k+1)}(n) = P^{(k)}(n)P(n+k), n, k \geq 0$$

一直推下去，有  $P^{(k+1)}(n) = P(n)P(n+1)\cdots P(n+k), n, k \geq 0$

其分量形式为

$$p_{ij}^{(k+1)}(n) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_k} p_{ij_1}(n) p_{j_1 j_2}(n+1) \cdots p_{j_k j}(n+k), n, k \geq 0; i, j \in S$$

在上式中把  $k+1$  换成  $k$ ，便可得如下结论：

- 定理5.2.2** 马尔可夫链的 $k$ 步转移概率由一步转移概率所完全确定.

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

### ● 3. 马尔可夫链的分布

#### ● 1) 初始分布

称  $q_i^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} P(X_0 = i), i \in S$  为马尔可夫链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的初始分布;

称第  $i$  个分量为  $q_i^{(0)}$  的(行)向量  $q^{(0)}$  为马尔可夫链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的初始分布向量, 即  $q^{(0)} = (q_i^{(0)})$ .

#### ● 2) 有限维分布

**定理 5.2.3** 马尔可夫链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的有限维分布由其初始分布和一步转移概率所完全确定.

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

● **证明**  $\forall n \geq 1, \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, i_1, i_2, \cdots, i_n, i \in S,$

$$\begin{aligned} & \underline{P(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n)} \\ &= P(\bigcup_i (X_0 = i), X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n) \\ &= P(\bigcup_i (X_0 = i, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n)) \\ &= \sum_i P(X_0 = i, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n) \\ &= \sum_i P(X_0 = i) P(X_{t_1} = i_1 | X_0 = i) P(X_{t_2} = i_2 | X_0 = i, X_{t_1} = i_1) \cdots \\ & \quad \cdot P(X_{t_n} = i_n | X_0 = i, X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \\ &= \sum_i P(X_0 = i) P(X_{t_1} = i_1 | X_0 = i) P(X_{t_2} = i_2 | X_{t_1} = i_1) \cdots P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \\ &= \sum_i q_i^{(0)} p_{ii_1}^{(t_1)}(0) p_{i_1 i_2}^{(t_2 - t_1)}(t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(t_n - t_{n-1})}(t_{n-1}) \end{aligned}$$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- 3) 绝对分布

称  $q_j^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} P(X_n = j), n \geq 0, j \in S$  为马尔可夫链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的绝对分布；称第  $j$  个分量为  $q_j^{(n)}$  的(行)向量  $q^{(n)}$  为马尔可夫链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的绝对分布向量，即  $q^{(n)} = (q_j^{(n)})$  .

- 显然，绝对分布与初始分布和  $n$  步转移概率有如下关系：

$$q_j^{(n)} = \sum_i q_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}(0), \quad n \geq 0, i, j \in S$$

或

$$\underline{q^{(n)} = q^{(0)} P^{(n)}(0)}$$



## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

事实上

$$\begin{aligned} q_j^{(n)} &= P(X_n = j) = P\left(\bigcup_i (X_0 = i), X_n = j\right) \\ &= P\left(\bigcup_i (X_0 = i, X_n = j)\right) \\ &= \sum_i P(X_0 = i, X_n = j) \\ &= \sum_i P(X_0 = i)P(X_n = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_i q_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}(0) \end{aligned}$$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

### ● 4. 齐次马尔可夫链

- **定义 5.2.3** 设  $\{X_n, n \geq 0\}$  是一马尔可夫链, 如果其一步转移概率  $p_{ij}(n)$  恒与起始时刻  $n$  无关, 记为  $p_{ij}$ , 则称  $\{X_n, n \geq 0\}$  为 齐次(时间齐次或时齐)马尔可夫链. 否则, 称为非齐次马尔可夫链.
- 对于齐次马尔可夫链  $\{X_n, n \geq 0\}$ ,  $k$  步转移概率  $p_{ij}^{(k)}(n)$  也恒与起始时刻  $n$  无关, 可记为  $p_{ij}^{(k)}$ . 因此在具体讨论时, 总可以假定时间起始为零, 即  $p_{ij}^{(k)} = P(X_k = j | X_0 = i), i, j \in S, k \geq 0$ .  
进而  $k$  步转移概率矩阵  $P^{(k)}(n)$  和一步转移概率矩阵  $P(n)$  也恒与起始时刻  $n$  无关, 分别记为  $P^{(k)}$  和  $P$ .

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

对于马尔可夫链我们有以下定理

- **定理 5.2.4**

(1)  $P^{(k)} = P^k, k \geq 0;$

(2)  $q^{(k)} = q^{(0)} P^k, k \geq 0;$

(3)  $\{X_n, n \geq 0\}$  的有限维分布由其初始分布和一步转移概率所完全确定.

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例 5.2.1** (天气预报问题) 如果明天是否有雨仅与今天的天气有关, 而与过去的天气无关, 并设今天下雨、明天有雨的概率为 $\alpha$ , 今天无雨而明天有雨的概率为 $\beta$ ; 又假定把有雨称为 0 状态天气, 把无雨称为 1 状态天气,  $X_n$  表示时刻 $n$ 时的状态天气, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是以 $S=\{0,1\}$ 为状态空间的齐次马尔可夫链, 其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例5.2.2** (有限制随机游动问题) 设有一质点只能在  $\{0,1,2,\dots,a\}$  中的各点上作随机游动, 移动规则如下: 移动前若在点  $i \in \{1,2,\dots,a-1\}$  上, 则以概率  $p$  向右移动一格到  $i+1$  处, 以概率  $q$  向左移动一格到  $i-1$  处, 而以概率  $r$  停留在  $i$  处, 其中  $p, q, r \geq 0, p+q+r=1$ ; 移动前若在 0 处, 则以概率  $p_0$  向右移动一格到 1 处, 而以概率  $r_0$  停留在 0 处, 其中  $p_0, r_0 \geq 0, p_0+r_0=1$ ; 移动前若在  $a$  处, 则以概率  $q_a$  向左移动一格到  $a-1$  处, 而以概率  $r_a$  停留在  $a$  处, 其中,  $q_a, r_a \geq 0, q_a+r_a=1$ .

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

设 $X_n$ 表示质点在 $n$ 时刻所处的位置，则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是以 $S = \{0, 1, 2, \dots, a\}$ 为状态空间的齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q_a & r_a \end{bmatrix}$$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

其中0和 $a$ 是限制质点游动的两道墙壁，当 $r_0=1, p_0=0$ 时称0为吸收壁；当 $r_0=0, p_0=1$ 时，称0为完全反射壁；当 $0<r_0<1, 0<p_0<1$ 时，称0为部分吸收壁或部分反射壁. 对于 $a$ 也有类似的含义.

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例5.2.3** (无限制随机游动问题) 设有一质点只能在 $\{\dots, -a, -(a-1), \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, a, \dots\}$ 中的各点上作随机游动, 移动规则如下: 移动前若点在 $i \in \{\dots, -a, -(a-1), \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, a, \dots\}$ 上, 则以概率 $p$ 向右移动一格到 $i+1$ 处, 以概率 $q$ 向左移动一格到 $i-1$ 处, 其中 $p, q \geq 0$ .  $p+q=1$ . 设 $X_n$ 表示质点在 $n$ 时刻所处的位置, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是以 $S = \{\dots, -a, -(a-1), \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, a, \dots\}$ 为状态空间的齐次马尔可夫链.



## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例5.2.4** (赌徒输光问题) 有两个赌徒甲、乙进行一系列赌博. 在每一局中甲获胜的概率为 $p$ , 乙获胜的概率为 $q$ ,  $p+q=1$  每一局后, 负者要付1元给胜者. 如果起始时甲有资本 $a$ 元, 乙有资本 $b$ 元,  $a+b=c$  元, 两人赌博直到甲输光或乙输光为止, 求甲输光的概率.

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **解** 根据题设, 这个问题可以看成以  $S=\{0,1,2,\dots,c\}$  为状态空间的随机游动  $\{X_n, n\geq 0\}$ , 质点从  $a$  点出发到达 0 状态先于到达  $c$  状态的概率就是甲先输光的概率. 设  $0<j<c, u_j$  为质点从  $j$  出发到达 0 状态先于到达  $c$  状态的概率. 由全概率公式有

$$u_j = u_{j+1}p + u_{j-1}q$$

显然  $u_0=1, u_c=0$ , 从而得到了一个具有边界条件的差分方程. 设

$$r = \frac{q}{p}, d_j = u_j - u_{j+1}$$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

则可得到两个相邻差分间的递推关系：

$$d_j = r d_{j-1}$$

于是  $d_j = r d_{j-1} = r^2 d_{j-2} = \cdots = r^j d_0$

当  $r \neq 1$  时，

$$\begin{aligned} u_0 - u_c = 1 &= \sum_{j=0}^{c-1} (u_j - u_{j+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{c-1} d_j = \sum_{j=0}^{c-1} r^j d_0 = \frac{1-r^c}{1-r} d_0 \end{aligned}$$

于是

$$d = \frac{1-r}{1-r^c}$$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

而

$$\begin{aligned}u_j &= u_j - u_c = \sum_{k=j}^{c-1} (u_k - u_{k+1}) \\&= \sum_{k=j}^{c-1} d_k = \sum_{k=j}^{c-1} r^k d_0 \\&= r^j (1 + r + \cdots + r^{c-j-1}) d_0 = \frac{r^j - r^c}{1 - r} d_0\end{aligned}$$

所以

$$u_j = \frac{r^j - r^c}{1 - r^c}$$

故

$$u_a = \frac{r^a - r^c}{1 - r^c} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^c}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^c}$$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

当  $r=1$  时,  $u_0 - u_c = 1 = cd_0$

而  $u_j = (c-j) d_0$

故

$$u_a = \frac{c-a}{c} = \frac{b}{c}$$

根据以上计算结果可知, 当  $r \neq 1$  即  $p \neq q$  时, 甲先输光的概率为

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^c}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^c}$$

当  $r=1$  即  $p=q$  时, 甲先输光的概率为  $b/c$ .

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例5.2.5** (艾伦菲斯特问题) 设一个坛子中装有 $m$ 个球, 它们或是红色的, 或是黑色的, 从坛中随机地摸出一个球, 并换入一个相反颜色的球. 设经过 $n$ 次摸换坛中黑球数为 $X_n$ , 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是以 $S = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ 为状态空间的齐次马尔可夫链.

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

其一步转移概率矩阵为

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & \frac{m-1}{m} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{m} & 0 & \frac{m-2}{m} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{m-1}{m} & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例5.2.6**(卜里耶问题) 设坛子中有 $a$ 只红球,  $b$ 只黑球, 从坛中随机地摸出一个球, 然后把该球放回, 并加入与摸出的球颜色相同的球 $c$ 只. 设经过 $n$ 次摸取坛中黑球数为 $X_n$ , 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是以 $S = \{b, b+c, b+2c, \dots\}$ 为状态空间的非齐次马尔可夫链.

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 - \frac{b}{a+b+nc} & \frac{b}{a+b+nc} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 - \frac{b+c}{a+b+nc} & \frac{b+c}{a+b+nc} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 - \frac{b+2c}{a+b+nc} & \frac{b+2c}{a+b+nc} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例 5.2.7** 设  $\{X_n, n \geq 0\}$  具有三个状态 0, 1, 2 的齐次马尔可夫链, 其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

初始分布  $q_i^{(0)} = \frac{1}{3}, i = 0, 1, 2$ . 试求:

(1)  $P(X_0 = 0, X_2 = 1)$ ;

(2)  $P(X_2 = 1)$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

● 解 由于

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} (1) \quad P(X_0 = 0, X_2 = 1) &= P(X_0 = 0)P(X_2 = 1 | X_0 = 0) \\ &= q_0^{(0)} p_{01}^{(2)} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{16} = \frac{5}{48} \end{aligned}$$

$$(2) \quad P(X_2 = 1) = \sum_{i=0}^2 q_i^{(0)} p_{i1}^{(2)} = \frac{1}{3} \left( \frac{5}{16} + \frac{1}{2} + \frac{9}{16} \right) = \frac{11}{24}$$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例 5.2.8** 有一多级传输系统只传输数字0和1，设每一级的传真率为 $p$ ，误码率为 $q=1-p$ ，且一个单位时间传输一级， $X_0$ 是第一级的输入， $X_n$ 是第 $n$ 级得输出，则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是以 $S=\{0,1\}$ 为状态空间的齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

- (1) 设 $p=0.9$ ，求系统二级传输后的传真率与三级传输后的误码率；
- (2) 设初始分布 $q_1^{(0)} = \alpha, q_0^{(0)} = 1 - \alpha$ ，又已知系统经 $n$ 级传输后输出为1，求原发数字也是1的概率。

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

● 解 由于

$$P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

有相异特征值  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=p-q$ , 则  $P$  可表示成对角阵

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q \end{bmatrix}$$

的相似矩阵.

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

又 $\lambda_1, \lambda_2$ 对应的特征向量分别为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

令

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

则

$$P = H \Lambda H^{-1}$$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

从而

$$P^n = (H\Lambda H^{-1})^n = H\Lambda^n H^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n \end{bmatrix}$$

- (1) 当 $p=0.9$ 时, 系统经二级传输后的传真率与三级传输后的误码率分别为

$$p_{11}^{(2)} = p_{00}^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0.9-0.1)^2 = 0.820$$

$$p_{10}^{(3)} = p_{01}^{(3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0.9-0.1)^3 = 0.244$$



## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- (2) 根据贝叶斯公式，当已知系统经 $n$ 级传输后输出为1，原发数字也是1的概率为

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1 | X_n = 1) &= \frac{P(X_0 = 1)P(X_n = 1 | X_0 = 1)}{P(X_n = 1)} \\ &= \frac{q_1^{(0)} p_{11}^{(n)}}{q_0^{(0)} p_{01}^{(n)} + q_1^{(0)} p_{11}^{(n)}} \\ &= \frac{\alpha(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p - q)^n)}{(1 - \alpha)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p - q)^n) + \alpha(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p - q)^n)} \\ &= \frac{\alpha + \alpha(p - q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p - q)^n} \end{aligned}$$

# 5 马尔可夫过程

- 5.1 马尔可夫过程的定义
- 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布
- 5.3 齐次马尔可夫链的分类
- 5.4 转移概率的稳定性能

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

### ● 1 状态的基本属性

● **定义 5.3.1** 设  $i, j \in S$ , 称

$$\underline{f_{ij}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} P(X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \dots, n-1 | X_0 = i)}$$

为系统在0时从状态*i*出发经过*n*步转移后首次到达状态*j*的概率, 简称首次概率. 称

$$\underline{f_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \dots, n-1) | X_0 = i)}$$

为系统在0时从状态*i*出发经过有限步转移后迟早要回到状态*j*的概率, 简称迟早概率.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

称

$$\underline{f_{ij}^{(+\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} P(X_n \neq j, n=1, 2, \dots | X_0 = i)}$$

为系统在0时从状态*i*出发永远也不能回到状态*j*的概率.

### ● 引理 5.3.1

$$(1) \quad 0 \leq f_{ij}^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)} \leq f_{ij} \leq 1$$

$$(2) \quad f_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \neq j} \sum_{i_2 \neq j} \cdots \sum_{i_{n-1} \neq j} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j}$$

$$(3) \quad p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^n f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$$

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **定义 5.3.2** 设  $j \in S$ , 称  $T_j \stackrel{\text{def}}{=} \min\{n \mid n \geq 1, X_n = j\}$  为系统首次到达状态  $j$  的时间, 简称首次达时. 当  $\{n \mid n \geq 1, X_n = j\} = \emptyset$ , 即  $\forall n \geq 1, X_n \neq j$  时,  $T_j \stackrel{\text{def}}{=} +\infty$ , 即系统在有限时间内不可能到达状态  $j$ . 显然  $T_j$  是一个随机变量.

- **引理 5.3.2**

- (1)  $f_{ij}^{(n)} = P(T_j = n \mid X_0 = i)$
- (2)  $f_{ij} = P(T_j < +\infty \mid X_0 = i)$
- (3)  $\mu_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} E(T_j \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **定义 5.3.3** 设  $i \in S$  , 若  $\{n \mid n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\} \neq \emptyset$ , 则称其最大公约数为状态  $i$  的周期, 记为  $d_i$ , 即

$$d_i = \text{GCD}\{n \mid n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

若  $\{n \mid n \geq 1, f_{ii}^{(n)} > 0\} \neq \emptyset$ , 则记其最大公约是为  $h_i$ , 即

$$h_i = \text{GCD}\{n \mid n \geq 1, f_{ii}^{(n)} > 0\}$$

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

### ● 引理 5.3.3

- (1) 若  $p_{ii}^{(n)} > 0$  , 则存在  $m \geq 1$  , 使得  $n = md_i$
- (2) 若  $f_{ii}^{(n)} > 0$  , 则存在  $m' \geq 1$  , 使得  $n = m'h_i$
- (3) 若  $d_i$  和  $h_i$  中一个存在, 则另一个也存在, 且  $d_i = h_i$  .

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

● **证明:** (简略)  $\forall i \in S$  , 令引理中所述的两个集合分别为  $N_1$  和  $N_2$ 。

$N_1$  和  $N_2$  同为空集或非空集合 (由引理5.3.1(3))。

由于,  $f_{ii}^{(n)} \leq p_{ii}^{(n)}$  ,  $N_1$  中的数的数量不会少于  $N_2$  , 因而  $d_i \leq h_i$  。

现往证  $d_i \geq h_i$

1) 当  $h_i=1$  时,  $d_i=1$ , 有  $h_i=d_i$ 。

2)  $h_i \geq 1$  时, (考查当  $n$  不是  $h_i$  的整数倍时,  $p_{ii}^{(n)}$  是否都为0)

令  $n=mh_i+1$ ,  $l=1,2,\dots, h_i-1$ ,  $m=0$  时有  $p_{ii}^{(l)} = \sum_{k=1}^l f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(l-k)} = 0$

以此类推, 当  $n \neq mh_i$  时, 均有  $p_{ii}^{(n)}=0$ , 表示  $h_i$  是集合  $N_1$  的公约数, 故

$h_i \leq d_i$  , 得证。



## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **定义 5.3.4** 设  $i \in S$

- (1) 若  $f_{ii}=1$  则称状态  $i$  为 常返状态，或称状态  $i$  为返回状态；  
若  $f_{ii}<1$  则称状态  $i$  为 非常返状态，或称状态  $i$  为滑过状态。
- (2) 若  $i$  是常返状态且  $u_{ii}<+\infty$  则称状态  $i$  为 正常返状态；若  $i$  是常返状态且  $u_{ii}=+\infty$  则称状态  $i$  为 零常返状态，或称状态  $i$  为消极常返状态。
- (3) 若  $d_i > 1$  则称状态  $i$  为 周期状态，且周期为  $d_i$ ，若  $d_i=1$  则称状态  $i$  为 非周期状态；若状态  $i$  是正常返的非周期状态，则称状态  $i$  为 遍历状态。

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **定义 5.3.5** 设  $i, j \in S$ , 若  $\exists n \geq 1$ , 使  $p_{ij}^{(n)} > 0$  则称状态  $i$  可达 状态  $j$ , 记为  $i \rightarrow j$ ; 若  $i \rightarrow j$  且  $j \rightarrow i$ , 则称状态  $i$  与状态  $j$  互通, 记为  $i \leftrightarrow j$ .
- **引理 5.3.4**
  - (1) 可达的传递性: 若  $i \rightarrow j, j \rightarrow k$  则  $i \rightarrow k$ .
  - (2) 互通的传递性: 若  $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k$  则  $i \leftrightarrow k$ .
  - (3) 互通的对称性: 若  $i \leftrightarrow j$  则  $j \leftrightarrow i$ .
- **引理 5.3.5** 设  $i, j \in S$ , 则  $i \rightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0$ ;  $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} f_{ji} > 0$ .
- **引理 5.3.6** 设  $i \neq j \in S$ ,  $j$  是常返状态,  $j \rightarrow i$ , 则  $i \leftrightarrow j$ , 且  $f_{ij} = f_{ji} = 1$ .

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **引理 5.3.5** 设  $i, j \in S$  则  $i \rightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0; i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij}f_{ji} > 0$ .
- **引理 5.3.6** 设  $i \neq j \in S$ ,  $j$  是常返状态,  $j \rightarrow i$  则  $i \leftrightarrow j$ , 且  $f_{ij} = f_{ji} = 1$ .

### 2. 状态属性的判定

**定理 5.3.1** (Doeblin公式)  $\forall i, j \in S$ , 有

$$f_{ij} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N p_{ij}^{(n)}}{1 + \sum_{n=1}^N p_{jj}^{(n)}}$$

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

### ● 2. 状态属性的判定

- **定理 5.3.1** (Doeblin公式)  $\forall i, j \in S$ , 有

$$f_{ij} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N p_{ij}^{(n)}}{1 + \sum_{n=1}^N p_{jj}^{(n)}}$$

- **推论 5.3.1** 设  $i \in S$ , 则  $f_{ii} = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^N p_{ii}^{(n)}}$

- **推论 5.3.2** 设  $i \in S$ , 则

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty \Leftrightarrow f_{ii} < 1 \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty \Leftrightarrow f_{ii} = 1$$

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

### ● 定理 5.3.2

$i \in S$  是常返状态的充要条件是以下三条件之一成立:

(1)  $f_{ii} = 1$

(2)  $P(T_i < +\infty | X_0 = i) = 1$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$

$i \in S$  是非常返状态的充要条件是以下三条件之一成立:

(1)  $f_{ii} < 1$

(2)  $P(T_i < +\infty | X_0 = i) < 1$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty$

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **定理 5.3.3** 对任意给定的状态  $i$ ，如果  $i$  是常返状态且周期为  $d_i$ ，则存在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \frac{d_i}{\mu_{ii}} \quad . \quad \text{规定当 } \mu_{ii} = +\infty \text{ 时, } \frac{1}{\mu_{ii}} = 0$$

- **定理 5.3.4** 设  $i \in S$  是常返状态，则

(1)  $i$  是零常返的充要条件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ ;

(2)  $i$  是遍历的充要条件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{ii}} > 0$ ;

(3)  $i$  是正常返周期的充要条件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$  不存在，但此时有一收敛于某正数的子列.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

● **推论 5.3.3** 设  $j \in S$  是非常返状态或零常返状态, 则  $\forall i \in S$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ .

● **定理 5.3.5** 设  $i, j \in S$

(1) 若存在正整数  $n$ , 使得  $p_{ii}^{(n)} > 0, p_{ii}^{(n+1)} > 0$ , 则  $i$  非周期;

(2) 若存在正整数  $m$ , 使得  $m$  步转移概率矩阵  $P^{(m)}$  中相应于状态  $j$  的那列元素全不为零, 则  $j$  非周期.

(3) 设状态  $i$  的周期为  $d$ , 则必存在正整数  $N_0$ , 使得当

$N \geq N_0$  时, 都有  $p_{ii}^{(Nd)} > 0$  .

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **定理 5.3.6** 互通的两个状态有相同的状态类型.

即设  $i, j \in S$ , 且  $i \leftrightarrow j$ , 则  $i$  和  $j$  或者同为非常返状态, 或者同为零常返状态, 或者同为正常非周期状态, 或者同为正常返周期状态且周期相同.



## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

### ● 3. 状态空间的分解

- 我们约定若  $i \rightarrow i$ , 则  $i \leftrightarrow i$ , 从而互通满足:

(1) 自反性:  $i \leftrightarrow i$ ;

(2) 对称性: 若  $i \leftrightarrow j$  则  $j \leftrightarrow i$

(3) 传递性: 若  $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k$ , 则  $i \leftrightarrow k$

即, 互通是一种等价关系.

- 利用互通这一等价关系, 可将状态空间  $S$  进行划分:

$$S = \bigcup_n S_n, \quad S_m \cap S_n = \emptyset, \quad m \neq n, m, n = 1, 2, \dots$$

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- 显然，同一子集 $S_n$ 中的所有状态都互通，不同子集中 $S_m$ 和 $S_n(m \neq n)$ 的状态不互通(但单向可达是可以的).
- 称 $S_n$ 为一个等价类，包含 $i$ 的等价类 $S_n$ 也常记为 $S(i)$ ，于是

$$S(i) = \{i\} \cup \{j \mid j \leftrightarrow i\}$$

$$S(i) = S(j) \Leftrightarrow i \leftrightarrow j$$

$$S(i) = S_n \Leftrightarrow i \in S_n$$

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

### ● 定义 5.3.6

(1) 闭集：设  $C$  是  $S$  的子集，如果  $\forall i \in C, \forall j \notin C$  和  $\forall n \geq 0$ ，有  $p_{ij}^{(n)} = 0$ ，则称  $C$  为闭集。显然状态空间  $S$  是闭集。

(2) 吸收状态：设  $i \in S$ ，如果状态子集  $\{i\}$  是闭集，则状态  $i$  称为吸收状态。

(3) 不可约闭集：设  $C$  是闭集，如果  $C$  中不再含有任何非空真闭子集，则称  $C$  是不可约闭集。或称  $C$  是不可约的，或不可分的，或最小的。

(4) 不可约的齐次马尔可夫链：如果状态空间  $S$  是不可约的，那么称该齐次马尔可夫链是不可约的，否则称为可约的。

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

### ● 引理 5.3.7

- (1)  $C$  是闭集的充要条件是  $p_{ij} = 0, \forall i \in C, j \notin C$ .
- (2)  $C$  是闭集的充要条件是  $\sum_{j \in C} p_{ij} = 1, \forall i \in C$ .
- (3)  $C$  是闭集的充要条件是  $\sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = 1, \forall i \in C, n \geq 0$ .
- (4)  $i \in S$  是吸收状态的充要条件是  $p_{ii} = 1$ .

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **引理5.3.8** 等价类  $S(i)$  若是闭集, 则  $S(i)$  是不可约的.
- **引理5.3.9** 设  $C$  是闭集, 当且仅当  $C$  中的任何两个状态都互通时,  $C$  是不可约的.
- **推论5.3.4** 齐次马尔可夫链不可约的充要条件是它的任何两个状态都互通.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **定理 5.3.7**

- (1) 有限齐次马尔可夫链的所有非常返状态之集  $D$  不可能是闭集.
- (2) 有限齐次马尔可夫链不可能存在零常返状态.
- (3) 不可约的有限齐次马尔可夫链的所有状态都是正常返状态.

- **定理 5.3.8** 设  $i \in S$  是常返状态, 则包含  $i$  的等价类  $S(i)$  是闭集, 从而是不可约的.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **定理 5.3.9** 齐次马尔可夫链的状态空间  $S$  可唯一地分解成有限个或可列无限多个互不相交的状态子集  $D, C_1, C_2, \dots$  之并, 即

$$\underline{S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots}$$

其中  $D$  是所有非常返状态构成的状态子集,  $C_n (n=1, 2, \dots)$  是由常返状态构成的不可约闭集, 每个状态子集中的状态有着相同的状态类型, 且  $\forall i, j \in C_n$  总有  $f_{ij} = 1$ .

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **引理 5.3.10** 设  $C$  是不可约闭集, 周期为  $d, \forall i, j \in C$ ,

如果  $p_{ij}^{(n_1)} > 0, p_{ij}^{(n_2)} > 0$ , 则  $d \mid n_2 - n_1$ .

- **定理 5.3.10** 设  $C$  是周期为  $d$  的不可约闭集, 则  $C$  可唯一地分解为  $d$  个互不相交的状态子集  $J_1, J_2, \dots, J_d$

之并, 即 
$$C = \bigcup_{m=1}^d J_m, J_m \cap J_l = \emptyset, m \neq l, m, l = 1, 2, \dots, d$$

而且  $\forall k \in J_m, m = 1, 2, \dots, d$ , 有  $\sum_{j \in J_{m+1}} p_{kj} = 1$

其中  $J_{d+1} \stackrel{\text{def}}{=} J_1$ .



## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **定理 5.3.11** 设  $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$  是周期为  $d$  的不可约的齐次马尔可夫链, 其状态空间  $S$  已被唯一地分解为  $d$  个互不相交的状态子集  $J_1, J_2, \dots, J_d$  之并. 现仅在时刻  $0, d, 2d, \dots$  上考虑  $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$  即令  $Y_n = X_{nd}, n=0,1,2,\dots$ , 则:
  - (1)  $\{Y_n, n=0,1,2,\dots\}$  是以  $P^{(d)} = (p_{ij}^{(d)})$  为一步转移概率矩阵的新的齐次马尔可夫链;
  - (2) 对  $\{Y_n, n=0,1,2,\dots\}$  而言, 每个  $J_m (m=1,2,\dots,d)$  都是不可约闭集, 而且  $J_m$  中的状态都是非周期的;
  - (3) 如果  $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$  的所有状态皆为常返状态, 那么  $\{Y_n, n=0,1,2,\dots\}$  的所有状态也都是常返状态.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

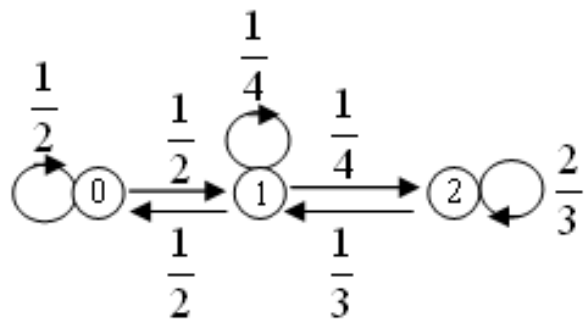
- **例 5.3.1** 设状态空间  $S=\{0,1,2\}$  的齐次马尔可夫链, 它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

研究其各个状态间的关系以及状态类型.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

**解** 由于  $\textcircled{0} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \textcircled{1} \xrightarrow{\frac{1}{4}} \textcircled{2} \quad \textcircled{2} \xrightarrow{\frac{1}{3}} \textcircled{1} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \textcircled{0}$ ，其中圈中的数字代表状态，箭头上的数字代表概率。于是可得到如图所示状态转移图. 由于  $p_{00} = \frac{1}{2}$ ，由周期的定义可知，状态0是非周期的. 由于三个状态互通，故该齐次马尔可夫链是不可约的，且只有三个状态，故三个状态都是正常返状态，从而都是遍历状态.



## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

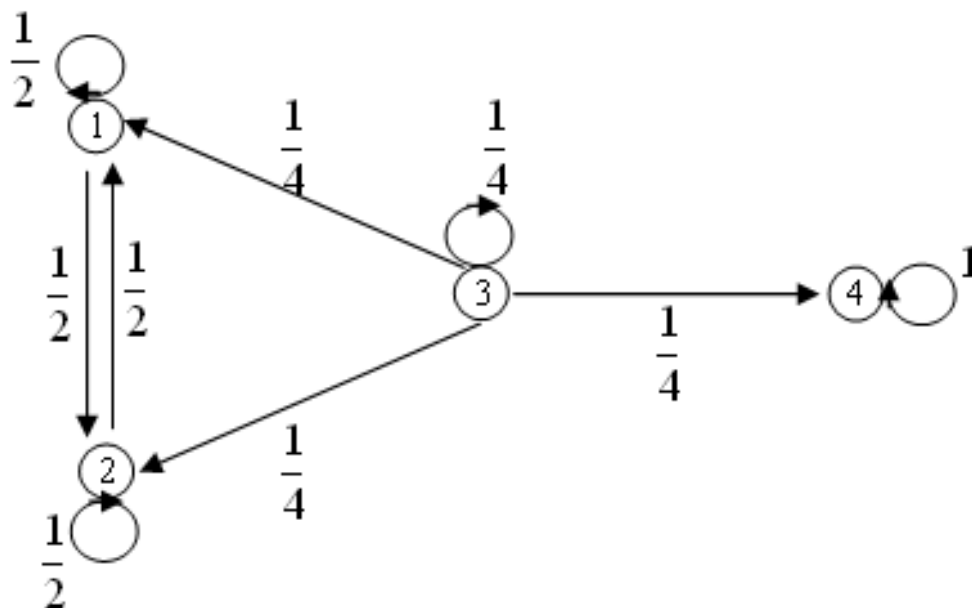
- **例 5.3.2** 设状态空间  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  的齐次马尔可夫链, 其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试分析其状态类型.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解** 状态转移图如图所示.状态3可达状态1,2和4, 但这三个状态不能可达状态3, 故{3}是非常返状态集, 闭集有两个{1,2}和{4},其中{4}是吸收状态集.



## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

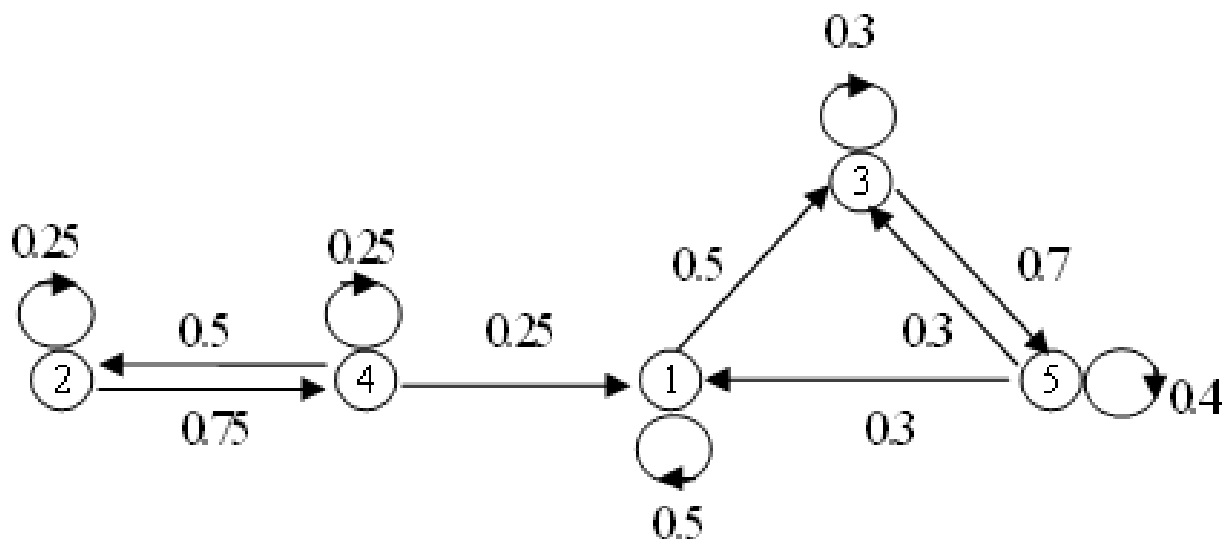
- **例 5.3.3** 设  $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$  是一齐次马尔可夫链，状态空间  $S=\{1,2,3,4,5\}$ ，其中一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.25 & 0.5 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

试分析状态类型.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解** 状态转移图如图所示.状态2,4可达状态1,3,5, 但反过来不可达的, 于是一旦离开状态集{2,4}就不可能回到状态2或4, 所以{2,4}为非常返状态集, {1,3,5}是闭集.



## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **例 5.3.4** 设齐次马尔可夫链的状态空间  $S=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$  其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中\*表示一个正数. 试分析状态类型.



## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解** 由于 $p_{00}=0$ ，因此0是一个吸收状态，又 $p_{60}>0$ ，故6是非常返状态，从而可达状态6的状态7、8也是非常返状态，故 $D=\{6,7,8\}$ 是非常返状态集.状态1只可达2，同时2只可达1，所以 $\{1,2\}$ 是周期为2的正常返状态集，可分解为 $J_1=\{1\}$ ， $J_2=\{2\}$ . $\{3,4,5\}$ 是状态闭集，由于 $p_{44}>0$ ，因此其周期为1.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

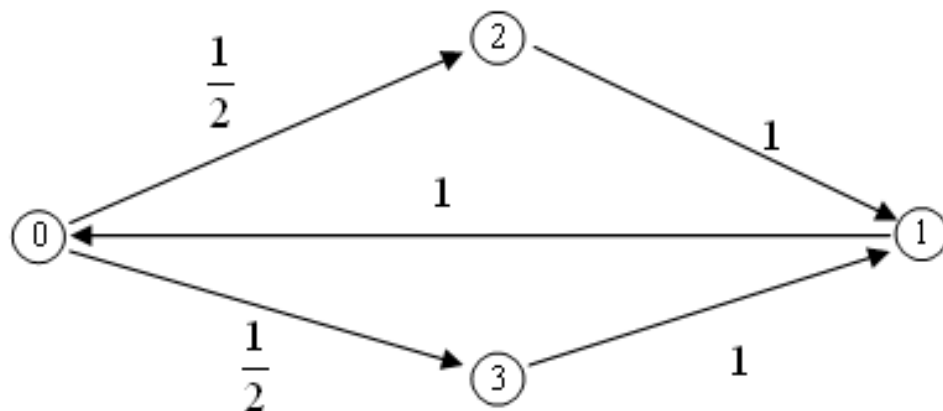
- **例5.3.5** 设状态空间 $S=\{0,1,2,3\}$ 的齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试对其状态进行分类.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解** 状态转移图如下图所示.它是一个有限齐次马尔可夫链,所有状态都是互通的,所以所有状态均为常返状态,整个状态空间  $S=\{0,1,2,3\}$  构成一个不可约闭集.



## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **例5.3.6** 设齐次马尔可夫链的状态空间 $S=\{0,1,2,3,4\}$ 它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

试对其状态进行分类.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

### ● 解

(1) 从一步转移概率矩阵可知状态2和3不能和其它状态互通,  $\{2,3\}$ 组成一个闭集.如果过程初始就处于2状态或3状态, 则过程永远处于2、3状态, 故 $\{2,3\}$ 是常返状态.

(2) 状态4可转移到 $\{0,1\}$ 状态, 但0,1两个状态不能到达4状态,  $\{0,1\}$ 组成一个闭集, 并且0,1是常返状态, 4是非常返状态.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **例5.3.7** 设齐次马尔可夫链的状态空间 $S=\{0,1,2,3\}$ 其一步转移概率矩阵为

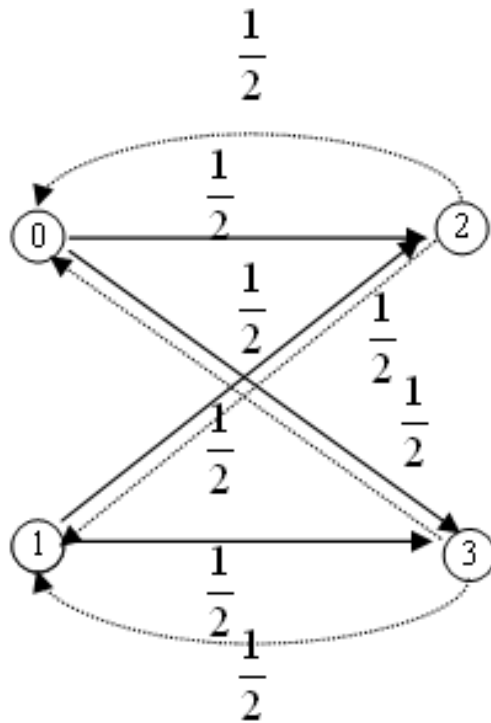
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试分析过程的周期性.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解** 状态转移图如图所示.四个状态可以分成 $\{0,1\}$ ,  $\{2,3\}$ 两个子集, 该过程有确定性的周期转移.

$\{0,1\} \rightarrow \{2,3\} \rightarrow \{0,1\} \rightarrow \{2,3\} \rightarrow \dots$ 显然它的周期 $d=2$ .



## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **例 5.3.8** 设齐次马尔可夫链的状态空间  $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ，其一步转移概率矩阵为

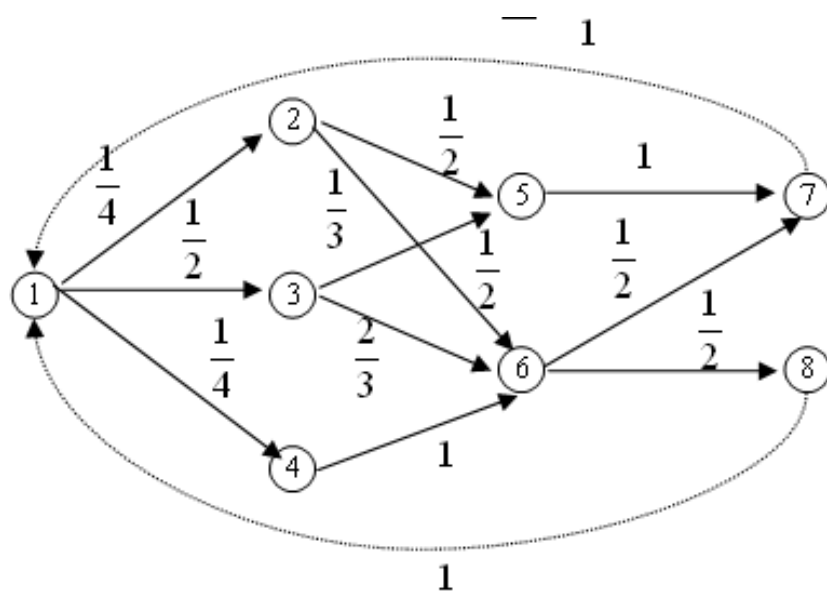
$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试研究过程的周期性.



## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解** 状态转移图如图所示.八个状态可以分成四个状态子集  $J_1 = \{1\}$ ,  $J_2 = \{2,3,4\}$ ,  $J_3 = \{5,6\}$ ,  $J_4 = \{7,8\}$ .  $J_1, J_2, J_3, J_4$  是互不相交的状态子集, 它们的并是整个状态空间, 该过程有确定的周期转移  $J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow J_3 \rightarrow J_4 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots$  显然它的周期  $d=4$ .



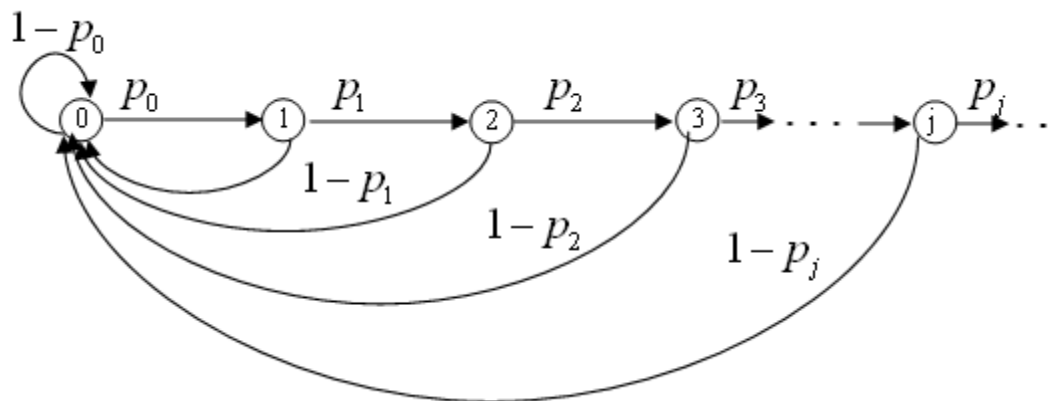
## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **例 5.3.9** 设状态空间  $S=\{0,1,2,\dots\}$  的齐次马尔可夫链, 其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

试研究该链是常返链的充要条件.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类



- 解 状态转移图如上图所示. 由于

$$f_{00}^{(1)} = 1 - p_0$$

$$f_{00}^{(2)} = p_0(1 - p_1) = p_0 - p_0p_1$$

$$f_{00}^{(3)} = p_0p_1(1 - p_2) = p_0p_1 - p_0p_1p_2$$

$\vdots$

$$f_{00}^{(n)} = p_0p_1 \cdots p_{n-2} - p_0p_1 \cdots p_{n-1}$$

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

故

$$\sum_{k=1}^n f_{00}^{(k)} = 1 - p_0 p_1 \cdots p_{n-1}$$

从而

$$f_{00} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{00}^{(k)} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} p_0 p_1 \cdots p_{n-1}$$

所以 $f_{00}=1$ 的充要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_0 p_1 \cdots p_{n-1} = 0$ , 即0是常返状态的充要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_0 p_1 \cdots p_{n-1} = 0$ , 由于链中的所有状态互通, 所以所有状态都是常返, 故该链是常返链的充要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_0 p_1 \cdots p_{n-1} = 0$ , 此条件相当于以下正项级数发散, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{p_n}\right) = +\infty$$

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

反之, 如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{p_n}\right)$  收敛则该链为非常返链. 例如,

若  $p_n = e^{-\frac{1}{n+1}}, n = 0, 1, 2, \dots$ , 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{p_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$$

时齐次马尔可夫链是常返链.

若  $p_n = e^{-\frac{1}{(n+1)^2}}, n = 0, 1, 2, \dots$ , 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{p_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$$

级数收敛, 此时齐次马尔可夫链是非常返链, 而且

$$f_{00} = 1 - \exp\left[-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\right] = 1 - e^{-\frac{\pi^2}{6}} \approx 0.8070$$

## 补充例题1

- 设 $Y_n$ 表示某股票第 $n$ 天的价格，令 $X_n = Y_n - Y_{n-1}$ ，以1, 0, -1分别表示 $X_n < -0.5$ 元， $-0.5 \leq X_n \leq 0.5$ 元， $X_n > 0.5$ 元。现连续观察该股票40天，得如下数据：1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 0, -1, -1, -1, -1, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 0, -1, -1。假设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 具有齐次马氏性，（1）试求该马氏链的一步转移概率矩阵；（2）如果今天该股票的价格下跌( $X_n < -0.5$ )，试预测这以后第2个交易日该股票的走势。

## 补充例题1

- 解：（1）在40个数据中，-1转移到-1有13次，-1转移到0有3次，-1转移到1有1次，以此类推，可以得出该马氏链的一步转移概率矩阵P：

$$P = \begin{bmatrix} \frac{13}{17} & \frac{3}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{4}{12} & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

## 补充例题1

● (2) 由  $p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=-1}^1 p_{ik} p_{kj}$  得,

$$\begin{aligned} p_{-1,-1}^{(2)} &= p_{-1,-1} p_{-1,-1} + p_{-1,0} p_{0,-1} + p_{-1,1} p_{1,-1} \\ &= \left(\frac{13}{17}\right)^2 + \frac{3}{17} \times \frac{4}{12} + \frac{1}{17} \times \frac{1}{10} = 0.6495 \end{aligned}$$

同理,  $p_{-1,0}^{(2)} = 0.2497$ ,  $p_{-1,1}^{(2)} = 0.1008$

故, 预测之后的第二个交易日该股票价格仍然下跌。



## 补充例题2

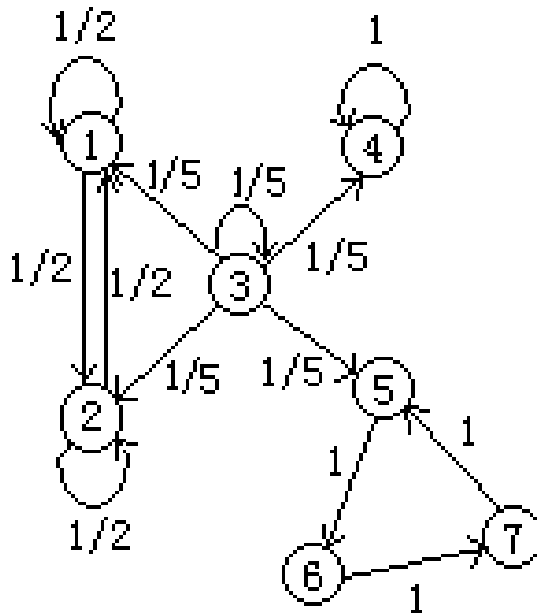
- 设一齐次马尔可夫链，其状态空间 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ，其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试画出该过程的状态转移图，并分析状态类型、对状态空间进行分解。

## 补充例题2

● 解:



该马氏链的状态空间 $S$ 可分解为  $S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$ ,

$D = \{3\}$ ,  $C_1 = \{1, 2\}$ ,  $C_2 = \{4\}$ ,  $C_3 = \{5, 6, 7\}$ 。其中,

$D$ 为非常返状态集,  $C_1, C_2$ 和 $C_3$ 均为正常返状态集, 且状态

1, 2为遍历态, 4为吸收态, 5, 6, 7为周期态。

# 5 马尔可夫过程

- 5.1 马尔可夫过程的定义
- 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布
- 5.3 齐次马尔可夫链的分类
- 5.4 转移概率的稳定性能

## 5.4 转移概率的稳定性能

- 马尔科夫链理论的一个重要问题是讨论当  $n \rightarrow \infty$  时, 转移概率  $p_{ij}(n)$  的极限, 即转移概率的稳定性能。

## 5.4 转移概率的稳定性能

### ● 1. 转移概率的极限

根据5.3.3, 若  $j$  是非常返态或零常返态, 则  $\forall i \in S$  总有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

因此, 后续讨论中总是假定  $j$  是正常返态且  $i$  是非常返态或  $i$

与  $j$  属于同一正常返态类, 其他情形均有  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ 。但当

$j$  为正常返周期态时,  $\{p_{ij}^{(n)}\}$  的极限一般不存在, 即使极

限存在, 也可能依赖于初始状态  $i$ , 因此我们仅讨论马尔

科夫链具有遍历性的情况。

## 5.4 转移概率的稳定性能

- 遍历性的定义：如果马尔科夫链转移概率  $p_{ij}^{(n)}$  的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j \quad i, j \in S$$

存在，且与*i*无关，则称此马尔科夫链具有遍历性。

**说明：**具有遍历性的齐次马氏链，无论系统从哪一个状态出发，当转移步数*n*充分大以后，转移到状态*j*的概率都近似于*p<sub>j</sub>*。即当*n*充分大时，可用*p<sub>j</sub>*作为*p<sub>ij</sub><sup>(n)</sup>*的近似值。

## 5.4 转移概率的稳定性能

- 推论5.4.2 设  $\{X_n, n=0,1,\dots\}$  是不可约的齐次马尔科夫链，其状态空间  $S$  中的每个状态都是正常返非周期状态，则  $\forall i, j \in S$ ，极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$  存在，且此极限值与初始状态  $i$  无关，记作  $\pi_j$ ，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$$

## 5.4 转移概率的稳定性能

### ● 极限分布:

当马尔科夫链具有遍历性时, 考察绝对概率  $p_j^{(n)} (n \rightarrow \infty)$  的极限,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i q_i^{(0)} p_{ij}^{(n)} = \sum_i q_i^{(0)} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_i q_i^{(0)} p_j = p_j$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_j^{(n)} = p_j$  或记为  $\pi_j$  (定义5.4.1)

上式说明, 绝对概率的极限与转移概率的极限是相同的, 讨论转移概率的极限已经足够, 而绝对概率分布的极限自然也可以求得。



## 5.4 转移概率的稳定性能

- 在工程技术当中，当马尔科夫链的极限分布存在时，它的遍历性表示：一个系统经过相当长的一段时间以后，达到一种动态的平衡状态，此时系统在各个状态上的概率分布不随时间的推移而改变，亦不依赖于初始状态。

## 5.4 转移概率的稳定性能

### ● 关于极限分布的讨论：

(1) 极限分布存在的条件由马尔科夫定理保证，即（简写）

$$P^m > 0 \quad \text{使} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p^m = \pi$$

(2) 一个不可约齐次马尔科夫链，如果它的状态是正常返非周期（即遍历态）的，则这个马尔科夫链为遍历链。具有遍历性的马尔科夫链，无论系统从哪个状态出发，当 $n$ 充分大时，转移到 $j$ 的概率都近似于 $p_j = \{1/\mu_{jj}, j \in S\}$ 。而对于有周期的马尔科夫链和可约的马尔科夫链，有关极限分布的计算较为复杂。

## 5.4 转移概率的稳定性能

- 推论5.4.3 不可约的齐次马尔科夫链是遍历链的充要条件是极限分布存在且唯一。

## 5.4 转移概率的稳定性能

### 2 平稳分布

如果一个概率分布  $\pi = (\pi_j, j = 1, 2, \dots)$  满足  $\pi P = \pi$  , 即

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}^{(n)}$$

则称该概率分布为相应的马尔科夫链的平稳分布(定义 5.4.2)。求平稳分布的方法, 即解下列线性方程组

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$$

## 5.4 转移概率的稳定性能

- 关于平稳分布的讨论：

- (1) 判断一个齐次马氏链是否为遍历链，通过求转移概率的极限来解决是困难的，故我们通过研究平稳分布是否存在来判断一个齐次马氏链是否为遍历链。
- (2) 如果马尔科夫链的初始分布取为平稳分布，那么在任意时刻 $n$ 的绝对概率分布都等于初始概率分布。这也是“平稳分布”这一名词的由来。
- (3) 一个不可约齐次马氏链是遍历链的充要条件是它存在平稳分布且平稳分布就是极限分布。

## 5.4 转移概率的稳定性能

### ● 3 平稳分布和极限分布之间的关系

- (1) 不可约的遍历链存在唯一的平稳分布，并且该平稳分布就是其极限分布。
- (2) 对于一般的齐次马尔科夫链，如果它不是不可约的遍历链，则极限分布一定不存在，这时其平稳分布可能存在，也可能不存在，若存在还可能不是唯一的。

## 5.4 转移概率的稳定性能

- 在实际应用中， $\pi = \{\pi_j\}$  有两种解释：一是作为转移概率  $p_{ij}^{(n)}$  的极限分布，它告诉我们在过程的长期运行中无论初始状态*i*是什么，经过一段时间后发现，过程处于状态*j*的概率就是  $\pi_j$ 。另一种解释就是， $\pi_j$  也代表了就长期而言，过程访问*j*的次数在总时间中的平均份额或比例。

## 5.4 转移概率的稳定性能

- 例5.4.1 考虑只有0,1两个状态的齐次马尔科夫链 $\{X_n, n \geq 0\}$ , 其转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \quad 0 < \alpha, \beta < 1$$

试计算该马尔科夫链的极限分布。



## 5.4 转移概率的稳定性能

- 解：由于该链为不可约遍历链，其平稳分布就是极限分布。设其平稳分布为  $\pi = \{\pi_0, \pi_1\}$ ，由

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases} \quad \text{得}$$

$$\begin{cases} \pi_0 + \pi_1 = 1 \\ (1 - \alpha)\pi_0 + \beta\pi_1 = \pi_0 \\ \alpha\pi_0 + (1 - \beta)\pi_1 = \pi_1 \end{cases}$$

解方程组得

$$\pi_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

## 5.4 转移概率的稳定性能

- 例5.4.2 设有状态空间 $S=\{0, 1, 2\}$ 的齐次马尔科夫链, 它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

试求它的极限分布。

## 5.4 转移概率的稳定性能

- **解：** 由一步转移概率矩阵知，此齐次马尔科夫链是不可约遍历链，它的平稳分布就是极限分布，设极限分布为

$$\pi = \pi P, \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

即

$$\begin{cases} \pi_0 = 0.5\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.2\pi_2 \\ \pi_1 = 0.4\pi_0 + 0.4\pi_1 + 0.3\pi_2 \\ \pi_2 = 0.1\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_0 = \frac{21}{62}, \pi_1 = \frac{23}{62}, \pi_2 = \frac{18}{62}$$

$\Downarrow$

$$\pi = \left\{ \frac{21}{62}, \frac{23}{62}, \frac{18}{62} \right\}$$

## 5.4 转移概率的稳定性能

- 例5.4.3 设齐次马尔科夫链的状态空间 $S=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ，其一步转移概率矩阵为 $P$ ，求它的平稳分布。

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

## 5.4 转移概率的稳定性能

- **解：** 由一步转移概率矩阵知，该齐次马尔科夫链是不可约遍历链，故其平稳分布存在唯一，设平稳分布  $\pi = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ ，求解方程组

$$\pi = \pi P, \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

即

$$\pi_0 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1, \quad \pi_1 = \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_2$$

$$\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3, \quad \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_4$$

$$\pi_4 = \frac{2}{3}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_4, \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

## 5.4 转移概率的稳定性能

● 得

$$\pi_0 = \frac{1}{31}, \pi_1 = \frac{2}{31}, \pi_2 = \frac{4}{31}, \pi_3 = \frac{8}{31}, \pi_4 = \frac{16}{31}$$

● 所以马尔科夫链的平稳分布为

$$\pi = \left\{ \frac{1}{31}, \frac{2}{31}, \frac{4}{31}, \frac{8}{31}, \frac{16}{31} \right\}$$

## 5.4 转移概率的稳定性能

● **例5.4.4** 设有状态空间  $S=\{0,1,2,\dots,6\}$  的齐次马尔科夫链,

其一步转移概率矩阵为

(1)试对S进行分类，并说明各状态类型；

(2)求平稳分布，其平稳分布是否唯一？为什么？

(3)求  $P(X_{n+2}=1|X_n=0)$ ,

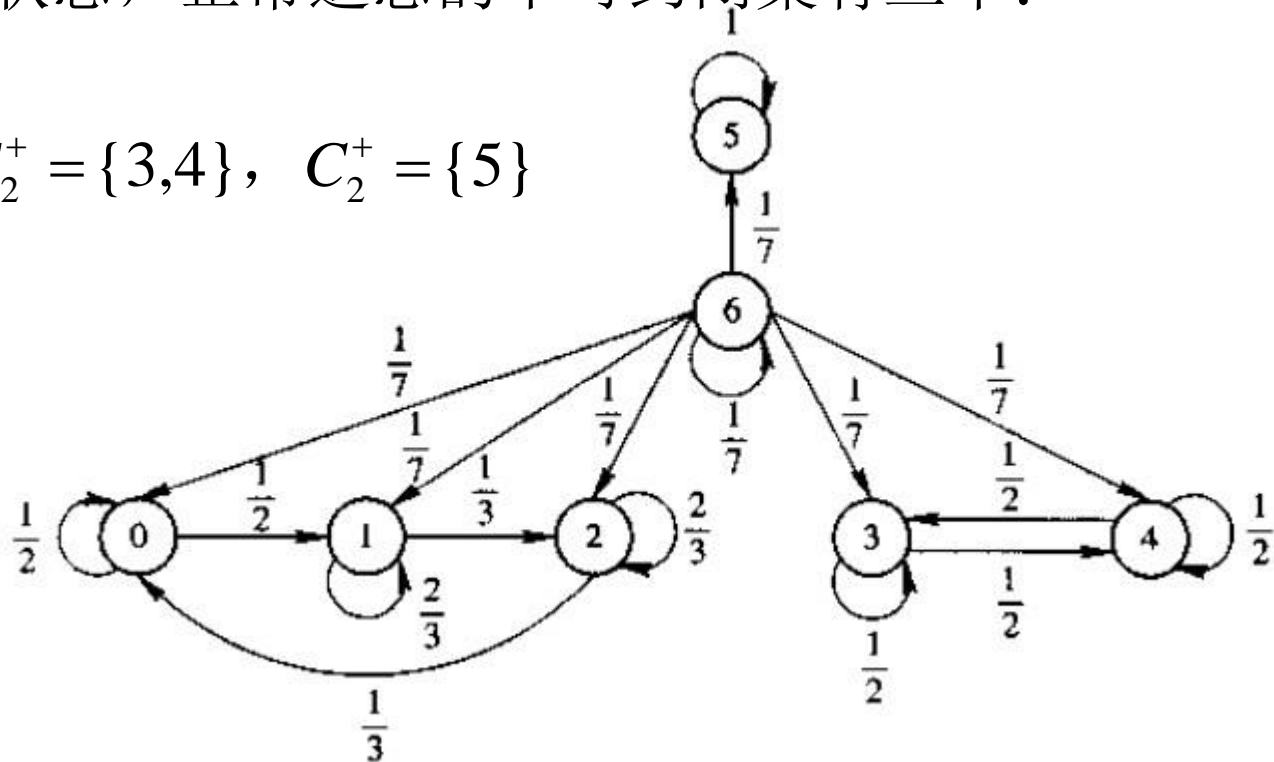
$$P(X_{n+2} = 2 \mid X_n = 0)$$

[illegible]

## 5.4 转移概率的稳定性能

- 解： (1)画状态转移图，如下图所示。依据状态转移图，6是非常返态， $D=\{6\}$ 是非常返状态集，0,1,2,3,4,5是正常返非周期状态，正常返态的不可约闭集有三个：

$$C_1^+ = \{0,1,2\}, C_2^+ = \{3,4\}, C_3^+ = \{5\}$$





## 5.4 转移概率的稳定性能

(2)由(1)知, 此齐次马尔科夫链有三个不同的正常返状态的不可约闭集, 故其平稳分布不唯一, 并且有无穷多个平稳分布。设对应于 $C_1^+, C_2^+, C_3^+$ 的转移概率矩阵分别为

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad P_3 = (1)$$

## 5.4 转移概率的稳定性能

令  $\pi^{(1)} = \{\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \pi_3^{(1)}\}$ ,  $\pi^{(2)} = \{\pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}\}$ ,  $\pi^{(3)} = \{\pi_1^{(3)}\}$

求解方程组

$$\pi^{(1)} = \pi^{(1)} P_1, \quad \pi_1^{(1)} + \pi_2^{(1)} + \pi_3^{(1)} = 1$$

$$\pi^{(2)} = \pi^{(2)} P_2, \quad \pi_1^{(2)} + \pi_2^{(2)} = 1$$

$$\pi^{(3)} = \pi^{(3)} P_1, \quad \pi_1^{(3)} = 1$$

得非负解  $\pi^{(1)} = \{\frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\}$ ,  $\pi^{(2)} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ ,  $\pi^{(3)} = \{1\}$

所以平稳分布为

$$\pi = \{\frac{2\lambda_1}{8}, \frac{3\lambda_1}{8}, \frac{3\lambda_1}{8}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \lambda_3, 0\}, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

## 5.4 转移概率的稳定性能

● (3) 由于  $P^{(2)} = P^2$ , 所以

$$P(X_{n+2} = 1 | X_n = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$$

$$P(X_{n+2} = 2 | X_n = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

# 补充例题1

- 三个黑球，三个白球，等分后放入甲乙两袋。从甲乙两袋中每次各取一球，然后互换，即把从甲袋中取出的球放入乙袋，把从乙袋中取出的球放入甲袋。把甲袋中的白球数定义为该过程的状态，则有四种状态：0,1,2,3，经过次交换后过程的状态为（1）求出它的一步转移概率矩阵；（2）如果该过程长期运行下去，甲袋中无白球的概率是多少？

# 补充例题1

● (1)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 补充例题1

- (2) 设该过程的平稳分布为  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_3, \pi_4)$  , 由

$$\pi = \pi \cdot P \quad , \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \quad , \quad \text{则有}$$

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_3, \pi_4) = \left( \frac{1}{20}, \frac{9}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{20} \right)$$

故过程长期以后, 甲袋中无白球的概率为  $1/20$  。

## 补充例题2

- 设某厂的商品销售状况可以分为三个状态：滞销（用1表示）、正常（用2表示）、畅销（用3表示）（按一个月计）。若经过对历史资料的整理分析，其销售状态的变化（从这月到下个月）与初始时刻无关，且该销售过程的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

试分析该过程经过相当长时间后，哪一种销售状态的可能性最大？

## 补充例题2

- 解：经计算可得 $\mathbf{P}^{(2)} > \mathbf{0}$ ，即2步转移概率矩阵中每个元素均大于0，由马尔科夫定理知，该马氏过程为一遍历链，其极限分布存在且唯一，而且，其平稳分布即为极限分布。设其平稳分布为

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_3) \text{ , 由求平稳分布的方程组解得}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{1}{2} \pi_1 + \frac{3}{9} \pi_2 + \frac{1}{6} \pi_3 \\ \pi_2 = \frac{1}{2} \pi_1 + \frac{1}{9} \pi_2 + \frac{4}{6} \pi_3 \\ \pi_3 = \frac{5}{9} \pi_2 + \frac{1}{6} \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{array} \right.$$

其解为  $\pi_1 = \frac{8}{23}$ ,  $\pi_2 = \frac{9}{23}$ ,  $\pi_3 = \frac{6}{23}$  。此结果表明，经过相当长时间以后，正常销售状态的可能性最大。