ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Курс лекций 2 семестр

2012

Москва

Определение. Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на некотром промежутке, если на этом промежутке функция F дифференцируема и выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема. Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными функции f(x) на одном и том же промежутке, то их разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна на этом промежутке.

Доказательство. Пусть X указанный промежуток. Возьмем любые $x_1 < x_2$ из промежутка X. Тогда функция $F_1(x) - F_2(x)$ на отрезке $[x_1; x_2]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа. Поэтому $(F_1(x_2) - F_2(x_2)) - (F_1(x_1) - F_2(x_1)) = (F_1'(\xi) - F_2'(\xi))(x_2 - x_1) = 0$. Следовательно, $F_1(x) - F_2(x) = const$.

Определение. Совокупность всех первообразных функций для данной функции f(x) на промежутке X называется неопредеелнным интегралом от функции f(x) (на этом промежутке) и обозначается символом $\int f(x)dx$.

В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, выражение $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, сама функция f(x) называется подынтегральной функцией. Если F(x) одна из первообразных для функции f(x), то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C любая постоянная. Заметим, что последнее равенство следует понимать как равенство двух множеств.

Отметим следующие очевидные свойства неопределенного интеграла.

1. $d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx$.
2. $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$.
3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
4. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$.

Проверим, например, свойство 3. Пусть F(x) первообразная для f(x), а G(x) первообразная для g(x). Тогда $\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + C_1$, с другой стороны $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) + C_2 \pm G(x) + C_3$. С учетом того, что C_1, C_2, C_3 произвольные постоянные, и равенства следует понимать как равенство множеств, заключаем справедливость 3.

Теорема (интегрирование заменой переменной). Если на некотором промежутке I_x выполняется $\int f(x)dx = F(x) + C$, а $\varphi : I_t \to I_x$ непрерывно дифференцируемое отображение промежутка I_x в I_t, то $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказательство. Имеем $(F(\varphi(t)))' = F'(x)\big|_{x=\varphi(t)} \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

Пример.

$$\int \sin 3t dt \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{3}\int \sin x dx = -\frac{1}{3}\cos x + C = -\frac{1}{3}\cos(3t) + C$$

$$x = 3t,\ dt = \frac{1}{3}dx$$

Теорема (формула интегрирования по частям). Пусть функции u(x)и v(x) дифференцируемы на промежутке X и на этом промежутке для функции $v(x)\cdot u'(x)$ существует первообразная. Тогда на данном промежутке для функции $v'(x)\cdot u(x)$ существует первообразная и спарведлива формула

$$\int v'(x)\cdot u(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx\ .$$

Доказательство. Имеем $(v(x)\cdot u(x))' = v'(x)u(x) + v(x)u'(x)$. Так как $v(x)\cdot u(x)$ первообразная для функции $(v(x)\cdot u(x))'$, а $\int u'(x)v(x)dx$ существует по условию, то, по свойству линейности (3), $\int v'(x)\cdot u(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

Таблица интегралов.

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\quad 0 < a \neq 1$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}d(\frac{x}{a}) = \arcsin(\frac{x}{a}) + C$
9.

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}dx \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{a}arctg(\frac{x}{a}) + C$$

$$t = \frac{x}{a},\ dx = adt$$

10. $\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\int(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{a+x})dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
11.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \int \frac{2t}{t^2 \pm a^2} \frac{t^2 \pm a^2}{2t^2} dt = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \Rightarrow t^2 - 2tx + x^2 = x^2 \pm a^2,$$

$$x = \frac{t^2 \mp a^2}{2t} = \frac{t}{2} \mp \frac{a^2}{2t},$$

$$t - x = \frac{t}{2} \pm \frac{a^2}{2t}, \quad dx = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{a^2}{2t^2}\right) dt$$

Определение. Разбиением τ отрезка $[a;b]$ называется конечная система точек $x_0, x_1,..,x_n$ этого отрезка такая, что $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Отрезки $[x_{i-1}; x_i]$ называются отрезками разбиения. Максимум $d(\tau)$ из длин отрезков разбиения называется мелкостью разбиения τ.

Определение. Пусть дано разбиение τ отрезка $[a;b]$ и на каждом из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ разбиения выбрана точка ξ_i. В этом случае говорят, что задано разбиение с отмеченными точками. Его обозначают (τ, ξ), где $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$.

Определение. Пусть на отрезке $[a;b]$ определена функция f и (τ, ξ) разбиение с отмеченными точками этого отрезка. Сумма $\sigma(f,\tau,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ называется интегральной суммой Римана функции f, соответствующей разбиению (τ, ξ).

Определение. Число I называется интегралом Римана от функции f на отрезке $[a;b]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения (τ, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a;b]$, мелкости $d(\tau) < \delta$ имеет место неравенство $\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon$.

Интеграл от функции f по отрезку $[a;b]$ обозначают символом $\int_a^b f(x)dx$ и пишут

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Числа a,b называют, соответственно, верхним и нижним пределами интегрирования. Сама функция, если для нее существует интеграл Римана, называется интегрируемой по Риману. Обозначим $\Re[a;b]$ множество функций, интегрируемых на отрезке [a;b].

Теорема (необходимое условие интегрируемости). Для того чтобы функция f, определенная на отрезке [a;b], была интегрируема по Риману на отрезке [a;b], необходимо, чтобы она была ограничена на этом отрезке. Итак, если $f \in \Re[a;b]$, то f ограничена на [a;b].

Доказательство. Предположим, что f не ограничена на отрезке [a;b]. Тогда при любом выборе разбиения τ отрезка [a;b] функция f окажется не ограниченной по крайней мере на одном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$. Значит, выбирая различным образом точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, мы можем сделать величину $|f(\xi_i)\Delta x_i|$ сколь угодно большой. Но тогда и интегральную сумму $\sigma(f,\tau,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ можно сделать сколь угодно большой за счет изменений только точки $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Поэтому не может существовать конечного предела интегральных сумм.

Теорема (Критерий Коши интегрируемости функции).

$$f \in \Re[a;b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (\tau', \xi'), (\tau'', \xi''), d(\tau'), d(\tau'') < \delta \Rightarrow \left| \sum_{i'} f(\xi')\Delta x'_{i'} - \sum_{i''} f(\xi'')\Delta x''_{i''} \right| < \varepsilon .$$

Доказательство. Пусть $f \in \Re[a;b]$ и $I = \int_a^b f(x)dx$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall (\tau, \xi),\ d(\tau) < \delta \Rightarrow \left| I - \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Отсюда $\forall(\tau',\xi'),\,(\tau'',\xi''),\,d(\tau'),d(\tau'')<\delta \Rightarrow \left|\sum_{i'} f(\xi')\Delta x'_{i'} - \sum_{i''} f(\xi'')\Delta x''_{i''}\right| < \varepsilon$.

Обратно, пусть выполняется условие в теореме. Возьмем последовательность $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ и для каждого значения ε_n подберем δ_n так, чтобы

$$\forall(\tau',\xi'),\,(\tau'',\xi''),\,d(\tau'),d(\tau'')<\delta_n \Rightarrow \left|\sum_{i'} f(\xi')\Delta x'_{i'} - \sum_{i''} f(\xi'')\Delta x''_{i''}\right| < \varepsilon_n .$$

Очевидно, что можно считать, что $\delta_{n+1} \le \delta_n$. При каждом n выберем произвольным образом разбиение (τ_n,ξ_n). Обозначим $\sigma_n = \sum_i f\left(\xi_i^n\right)\Delta x_i$. Тогда последовательность $\{\sigma_n\}$ фундаментальна. Действительно, для $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \varepsilon_N<\varepsilon$. Тогда для $\forall n,m>N \Rightarrow \delta_n,\delta_m \le \delta_N$. Следовательно, $d(\tau_n)<\delta_N,\ d(\tau_m)<\delta_N$. Отсюда $|\sigma_n-\sigma_m|<\varepsilon_N<\varepsilon$. Таким образом, существует предел $I=\lim_{n\to\infty}\sigma_n$. Докажем, что этот предел и есть интеграл Римана. Для $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \varepsilon_N<\varepsilon$. Положим $\delta=\delta_N$ Тогда при всех $n>N$ будет $\delta_n\le\delta_N=\delta$. Возьмем любое $(\tau,\xi),\ d(\tau)<\delta$. В этом случае при всех $n>N$ имеем $\left|\sigma_n-\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\right|<\varepsilon_N$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получим $\left|I-\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\right|\le\varepsilon_N<\varepsilon$.

Введем следующее обозначение $\Delta_i=[x_{i-1};x_i]$. Пусть $\tau: x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$ произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Обозначим $\omega(f,E)=\sup\limits_{x',x''\in E}|f(x')-f(x'')|$ - колебание функции f на множестве E.

Теорема. Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция f была интегрируема на нем, достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall\tau=\{x_i\}_{i=0}^n,\ d(\tau)<\delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i<\varepsilon .$$

Доказательство. Пусть $\tau=\{x_i\}_{i=0}^n$ произвольное разбиение отрезка $[a;b]$, а $\tilde\tau=\{x_{ij}\}_{i=0}^{n}{}_{j=0}^{n_i}$ разбиение, полученное из τ, добавлением к нему некоторых точек (при этом отрезки разбиения сами разбиваются $x_{i0}=x_{i-1}<x_{i1}<\ldots<x_{i,n_i}=x_i$). Такое разбиение называется продолжением разбиения $\tau=\{x_i\}_{i=0}^n$. Оценим разность интегральных сумм, полученных для этих двух разбиений и произвольного выбора точек на отрезках разбиения.

$$\left|\sigma(f,\tilde\tau,\tilde\xi)-\sigma(f,\tau,\xi)\right| = \left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij})\Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij})\Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_i)\Delta x_{ij}\right| =$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{n_i}(f(\xi_{ij})-f(\xi_i))\Delta x_{ij} \le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{n_i}\left|f(\xi_{ij})-f(\xi_i)\right|\Delta x_{ij} \le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{n_i}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_{ij} = \sum_{i=1}^n\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i$$

Здесь мы использовали то, что $\Delta x_i=\sum_{j=1}^{n_i}\Delta x_{ij}$.

Из полученной оценки следует, что, если выполняется условие теремы, то для любого разбиения $\tau=\{x_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a;b]$ мелкости $d(\tau)<\delta$ и любого его продолжения, при любом выборе отмеченных точек ξ и $\tilde{\xi}$, будем иметь

$$\left|\sigma(f,\tilde{\tau},\tilde{\xi})-\sigma(f,\tau,\xi)\right|\le\sum_{i=1}^n\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i<\varepsilon.$$

Пусть теперь выполняются условия теоремы. Возьмем два произвольных разбиения (τ',ξ'), (τ'',ξ'') с отмеченными точками отрезка $[a;b]$, для которых $d(\tau')<\delta$, $d(\tau'')<\delta$, где δ найдено по числу $\varepsilon/2$. Составим из этих двух разбиений новое разбиение $\tilde{\tau}=\tau'\cup\tau''$. Очевидно, что оно является продолжением обоих разбиений. Поэтому, по доказанному мы должны иметь неравенства

$$\left|\sigma(f,\tilde{\tau},\tilde{\xi})-\sigma(f,\tau',\xi')\right|<\varepsilon/2; \qquad \left|\sigma(f,\tilde{\tau},\tilde{\xi})-\sigma(f,\tau'',\xi'')\right|<\varepsilon/2.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\sigma(f,\tau',\xi')-\sigma(f,\tau'',\xi'')\right|<\varepsilon,$$

что, по критерию Коши, означает, что $f\in\Re[a;b]$.

Следствие. $f\in C[a;b]\ \Rightarrow\ f\in\Re[a;b]$.

Доказательство. Во-первых, если $f\in C[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке. Во-вторых, функция равномерно непрерывна на отреке $[a;b]$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f,\delta)=0$. Т.е.

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\ \forall\delta'<\delta\Rightarrow\omega(f,\delta')<\varepsilon.$$

Возьмем $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ в качестве произвольного числа и для него подберем $\delta>0$. Тогда для произвольного разбиения τ отрезка $[a;b]$ мелкости $d(\tau)<\delta$ будем иметь

$$\omega(f,\Delta_i)=\sup_{x',x''\in\Delta_i}\left|f(x')-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^n\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i<\dfrac{\varepsilon}{b-a}\sum\limits_{i=1}^n\Delta x_i=\varepsilon$ и функция $f\in\Re[a;b]$.

Следствие. Если функция f монотонна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Так как f монотонна на отрезке $[a;b]$, то $\omega(f,[a;b])=\left|f(b)-f(a)\right|$. Для произвольного числа $\varepsilon>0$ положим $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\left|f(b)-f(a)\right|}$. Мы считаем, что знаменатель не равен нулю, иначе функция постоянна на отрезке и, очевидно, интегрируема на нем. Для $\forall\tau=\{x_i\}_{i=0}^n$, $d(\tau)<\delta$ имеем, с учетом монотонности,

$$\sum_{i=1}^n\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i<\delta\sum_{i=1}^n\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|=\delta\left|\sum_{i=1}^n(f(x_i)-f(x_{i-1}))\right|=\delta(f(b)-f(a))=\varepsilon.$$

Пусть $f:[a;b]\to\mathbf{R}$ ограниченная функция и $\tau=\{x_i\}_{i=0}^n$ произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Обозначим $m_i=\inf\limits_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$, $M_i=\sup\limits_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$. Суммы $s_\tau=\sum\limits_{i=1}^n m_i\Delta x_i$, $S_\tau=\sum\limits_{i=1}^n M_i\Delta x_i$ называются нижней и верхней суммами Дарбу, соответствующие разбиению τ отрезка $[a;b]$. Очевидно, что имеют место неравенства $s_\tau\le\sigma(f,\tau,\xi)\le S_\tau$.

Лемма. $s_\tau=\inf\limits_\xi\sigma(f,\tau,\xi)$, $S_\tau=\sup\limits_\xi\sigma(f,\tau,\xi)$.

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. Так как $m_i=\inf\limits_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$, то существует точка $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$ такая, что $m_i>f(\xi_i)-\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$. Тогда

$$\sigma(f,\tau,\xi)=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i<\sum_{i=1}^n\left(m_i+\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i=s_\tau+\varepsilon.$$

Определение.

$$I_*=\lim_{d(\tau)\to0}s_\tau\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall\tau,\ d(\tau)<\delta\Rightarrow|I_*-s_\tau|<\varepsilon;$$
$$I^*=\lim_{d(\tau)\to0}S_\tau\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall\tau,\ d(\tau)<\delta\Rightarrow|I_*-S_\tau|<\varepsilon$$

Теорема. Пусть $f:[a;b]\to\mathbf{R}$ - ограниченная функция. Тогда $f\in\Re[a;b]$ тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой оба предела I^*, I_*. Их общее значение совпадает с интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство. Пусть оба предела существуют и равны между собой. Тогда из неравенства $s_\tau\le\sigma(f,\tau,\xi)\le S_\tau$ следует, что $\exists\lim\limits_{d(\tau)\to0}\sigma(f,\tau,\xi)=I^*=I_*$. Следовательно, $f\in\Re[a;b]$. Обратно, пусть $f\in\Re[a;b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx=I$. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Тогда

$$\exists\delta>0:\forall(\tau,\xi),\ d(\tau)<\delta\Rightarrow|I-\sigma(f,\tau,\xi)|<\varepsilon.$$

Возьмем произвольное разбиение τ, $d(\tau)<\delta$. Так как $S_\tau=\sup\limits_\xi\sigma(f,\tau,\xi)$, то существует набор точек ξ такой, что $S_\tau-\varepsilon<\sigma(f,\tau,\xi)<I+\varepsilon$.

Отсюда $S_\tau<I+2\varepsilon$. Но $I-2\varepsilon<I-\varepsilon<\sigma(f,\tau,\xi)\le S_\tau$. Следовательно, $|S_\tau-I|<2\varepsilon$. Поэтому $\lim\limits_{d(\tau)\to0}S_\tau=I$. Аналогично показывается, что $\lim\limits_{d(\tau)\to0}s_\tau=I$.

Теорема. Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция была интегрируема на этом отрезке необходимо и достаточно, чтобы для произвольного числа $\varepsilon>0$ нашлось такое разбиение τ этого отрезка, для которого $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$.

(без доказательства)

Заметим, что $\omega(f,\Delta_i)=M_i-m_i$, поэтому

$$\sum_{i=i}^{n} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i = \sum_{i=i}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = S_\tau - s_\tau$$

Таким образом, из приведенного критерия интегрируемости следует, что условие

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^n, \ d(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon$$

является и необходимым условием интегрируемости функции. Рассмотрим теперь свойства определенного интеграла.

Теорема. Если $f, g \in \Re[a;b]$, то $\alpha f + \beta g \in \Re[a;b]$ и справедливо равенство

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \, .$$

Доказательство. Очевидное следствие равенства

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i))\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \, .$$

Теорема. Пусть $f \in \Re[a;b]$, $f \in \Re[b;c]$. Тогда $f \in \Re[a;c]$ и справедливо равенство

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \, .$$

Доказательство. Обозначим $I_1 = \int_a^b f(x)dx$, $I_2 = \int_b^c f(x)dx$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ тогда

$$\exists \delta_1 > 0: \ \forall (\tau, \xi), \ d(\tau) < \delta_1 \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I_1 \right| < \varepsilon \, ;$$

$$\exists \delta_2 > 0: \ \forall (\tau, \xi), \ d(\tau) < \delta_2 \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I_2 \right| < \varepsilon$$

(в первом случае разбиения отрезка [a;b], а во втором – [b;c]).

Пусть $M = \sup\limits_{[a;c]} f$. Эта верхняя грань конечна, поскольку функция ограничена на отрезках [a;b] и [b;c]. Возьмем $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{M})$ и пусть τ разбиение отрезка $[a;c]$ мелкости $d(\tau) < \delta$. Возможны два случая.

(а) b не является внутренней точкой ни одного из отрезков разбиения τ. В этом случае она является концом одного отрезка и началом другого. Положим $\tau_1 : x_0 = a < x_1 < \ldots < x_j = b$, $\tau_2 : x_j = b < x_{j+1} < \ldots < x_n = c$. Очевидно, что имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{j} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=j+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \, .$$

Поэтому

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I_1 - I_2 \right| \le \left| \sum_{i=1}^{j} f(\xi_i)\Delta x_i - I_1 \right| + \left| \sum_{i=j+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I_2 \right| < 2\varepsilon \, .$$

(б) b является внутренней точкой отрезка $[x_{j-1}; x_j]$. Перейдем от разбиения τ к разбиению $\tau' : x_0 = a < x_1 < \ldots x_{j-1} < b < x_j < \ldots < x_n = b$, выбрав произвольным образом точки $\xi_j^1 \in [x_{j-1}; b]$, $\xi_j^2 \in [x_j; b]$. Тогда

$$\left|\sigma(f,\tau)-\sigma(f,\tau')\right|=\left|f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})-f(\xi_j^1)(x_j-b)-f(\xi_j^2)(b-x_{j-1})\right|\le 3Md(\tau)<3\varepsilon .$$

Так как разбиение τ' соответствуент случаю (а), то $\left|\sigma(f,\tau')-I_1-I_2\right|<2\varepsilon$. Поэтому $\left|\sigma(f,\tau)-I_1-I_2\right|<5\varepsilon$.

Теорема. Если $f\in\Re[a;b]$ и $[c;d]\subset[a;b]$, то $f\in\Re[c;d]$.

Доказательство. $f\in\Re[a;b]\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall\tau,\ d(\tau)<\delta\Rightarrow\sum_{\tau}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i<\varepsilon$.

Возьмем произвольное разбиение τ' отрезка $[c;d]$, $d(\tau')<\delta$ и дополним его некоторым множеством точек до разбиения τ всего отрезка $[a;b]$, причем $d(\tau)<\delta$. Тогда

$$\sum_{\tau'}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i\le\sum_{\tau}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i<\varepsilon .$$

Следовательно, $f\in\Re[c;d]$.

Теорема. Если $f\in\Re[a;b]$, то $|f|\in\Re[a;b]$ и имеет место неравенство $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$.

Доказательство. $\omega(|f|,\Delta)=\sup\limits_{x',x''\in\Delta}\left||f(x')|-|f(x'')|\right|\le\sup\limits_{x',x''\in\Delta}|f(x')-f(x'')|=\omega(f,\Delta)$. Отсюда

$$\sum_{\tau}\omega(|f|,\Delta_i)\Delta x_i\le\sum_{\tau}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i .$$

Из полученного неравенства следует $|f|\in\Re[a;b]$. Из неравенства

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|\Delta x_i$$

Следует вторая часть теоремы.

Теорема. Если $f\in\Re[a;b]$ и $g\in\Re[a;b]$ и $f(x)\le g(x),\ \forall x\in[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из неравенства

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i .$$

Определение. Если $b<a$, то $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a g(x)dx$. Если $b=a$, то $\int_a^a f(x)dx=0$.

Теорема. Если $f\in C[a;b]$, то существует точка $\xi\in[a;b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

Доказательство. Если $a=b\Rightarrow\xi$ любая. Пусть $a<b$. Положим $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Тогда, очевидно, что имеет место неравенство: $\inf\limits_{[a;b]}f\le\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\sup\limits_{[a;b]}f$. По теореме Больцано-Коши существует точка $\xi\in[a;b]$, что $f(\xi)=\mu$.

Теорема. Если $f\in\Re[a;b]$ и $g\in\Re[a;b]$, то $f\cdot g\in\Re[a;b]$.

Доказательство. Пусть $C=\sup\limits_{[a;b]}|f|$. Имеем

$$\left|f^2(x')-f^2(x'')\right|=|f(x')-f(x'')||f(x')+f(x'')|\le 2C|f(x')-f(x'')| .$$

Отсюда следует, что $\sum_i \omega\left(f^2,\Delta_i\right)\Delta x_i \le 2C\sum_i \omega\left(f,\Delta_i\right)\Delta x_i$, а, значит, $f^2 \in \Re[a;b]$. Далее из равенства $f\cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2-(f-g)^2\right)$ следует, что $f\cdot g \in \Re[a;b]$.

Теорема (о среднем). Пусть $f,g\in\Re\left[a;b\right]$, $m=\inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. Если функция g неотрицательна (неположительна) на отрезке $\left[a;b\right]$, то $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$, где $\mu\in\left[m;M\right]$.

Доказательство. Будем считать, что $g(x)\ge 0$ на $\left[a;b\right]$. Тогда $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$. Отсюда $m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$. Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то из полученного неравенства следует, что соотношение верно. Если $\int_a^b g(x)dx \ne 0$, то положим $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Следствие. В предположениях теоремы о среднем, если $f\in C\left[a;b\right]$, то найдется точка $\xi\in\left[a;b\right]$ такая, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Данное следствие есть очевидное следствие теоремы Больцано-Коши.

Пусть $f \in \Re[a;b]$. Тогда $f \in \Re[a;x]$, $\forall x \in [a;b]$. Рассмотрим функцию $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$.

Теорема. Пусть $f \in \Re[a;b]$. Тогда $F \in C[a;b]$.

Доказательство. $f \in \Re[a;b] \Rightarrow \exists C>0: |f(x)| \le C$, $\forall x \in [a;b]$. Отсюда получаем

$$|F(x+h)-F(x)| = \left| \int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt \right| \le \left| \int\limits_x^{x+h} |f(t)|dt \right| \le C|h|.$$

Следовательно, $\lim\limits_{h\to 0} F(x+h)=F(x)$.

Теорема. Пусть $f \in \Re[a;b]$. Если f непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$, то $F(x)$ имеет производную в точке x_0 и $F'(x_0)=f(x_0)$.

Доказательство. Имеем

$$\left|\frac{1}{\Delta x}(F(x_0+\Delta x)-F(x_0))-f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - f(x_0)\right| = \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)dt\right| =$$

$$=\frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\big(f(t)-f(x_0)\big)dt\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t)-f(x_0)|dt\right|.$$

Так как f непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$, то

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ \forall t \in [a;b],\ |t-x_0|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $|\Delta x|<\delta$. Тогда, если t из отрезка с концами x_0, $x_0+\Delta x$, будет выполнено $|t-x_0|<\delta$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{\Delta x}(F(x_0+\Delta x)-F(x_0))-f(x_0)\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t)-f(x_0)|dt\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\frac{\varepsilon}{2}|\Delta x| < \varepsilon.$$

Отсюда получаем $\exists F'(x_0)=f'(x_0)$.

Следствие. Если $f \in C[a;b]$, то функция имеет на данном отрезке первообразную. При этом $\int f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt + C$.

Теорема (основная теорема итегрального исчисления). Если $f \in C[a;b]$ и $\Phi(x)$ произволная первообразная этой функции на указанном отрезке, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b)-\Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b$.

Доказательство. Имеет место равенство $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt + C$.

Отсюда $\Phi(a)=C$, $\Phi(b)=\int\limits_a^b f(x)dx + C$. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b)-\Phi(a)$.

Теорема (интегрирование по частям). Пусть $u,v \in C^1[a;b]$, тогда

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство. Так как $(uv)' = u'v + uv'$ и входящие сюда функции непрерывны, то интегралы существуют и формула верна.

Теорема (замена переменной в интеграле). Если $\varphi : [\alpha;\beta] \to [a;b]$, $\varphi \in C^1[\alpha;\beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, а функция $f \in C[a;b]$, то справедливо равенство $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ первообразная $f(x)$. Тогда, по теореме о дифференцируемости композиции функций, $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, следовательно, $F(\varphi(t))$ первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. По формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Определение. Метрическим пространством называется множество X вместе с вещественной функцией ρ на $X\times X$, обладающей свойствами:

1) $\rho(x,y)\geq 0$; $\rho(x,y)=0$, если и только если $x=y$;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для любых $x,y\in X$ (симметричность);

3) $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$, для любых $x,y,z\in X$ (неравенство треугольника).

Функция ρ называется расстоянием или метрикой на X. Таким образом, метрическое пространство есть пара (X,ρ), состоящая из множества X и заданной на нем метрики ρ. Элементы множества X называются точками.

Определение. *Открытым шаром* $B(a,r)$ с центром в точке a и радиусом r в метрическом пространстве (X,ρ) называется подмножество в X, состоящее из точек x, находящихся на расстоянии $<r$ от точки $x\in X$: $B(a,r)=\{x\in X:\ \rho(x,a)<r\}$.

Открытый шар $B(a,\varepsilon)$ мы будем также называть $\varepsilon-$окрестностью точки a.

Определение. Множество $G\subset X$ называется *открытым* в метрическом пространстве (X,ρ), если для любой точки $x\in G$ найдется шар $B(x,\varepsilon)$ такой, что $B(x,\varepsilon)\subset G$.

Определение. Множество $F\subset X$ называется замкнутым в (X,ρ), если его дополнение $X\setminus F$ открыто в (X,ρ).

Теорема. Пусть U_α, $\alpha\in A$ система открытых множеств метрического пространства (X,ρ). Тогда множество $\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ открыто.

Доказательство. Пусть $x\in\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha\Rightarrow\exists\alpha\in A: x\in U_\alpha\Rightarrow\exists U(x,\varepsilon)\subset U_\alpha\Rightarrow U(x,\varepsilon)\subset\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$.

Следствие. Пусть F_α, $\alpha\in A$ система замкнутых множеств метрического пространства (X,ρ). Тогда множество $\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha$ замкнуто.

Это есть очевидное следствие равенства $X\setminus(\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in A}(X\setminus F_\alpha)$.

Теорема. Пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество. Объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Доказательство. Пусть U_i, $i=1,2,...,n$ открытые множества и $x\in U_1\cap...\cap U_n\Rightarrow x\in U_i$, $i=1,2,...,n$. Следовательно, $\exists U(x,\varepsilon_i)\subset U_i$, $i=1,2,...,n$.

Возьмем $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$. Тогда $U(x,\varepsilon)\subset U_i$, $i=1,2,...,n\Rightarrow U(x,\varepsilon)\subset\bigcap_i U_i$. Для замкнутых множеств очевидное следствие закона $X\setminus(\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in A}(X\setminus F_\alpha)$.

Определение. Пусть $\{x_n\}$ последовательность точек в метрическом пространстве X. Говорят, что последовательность сходится к точке x, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое число $n_\varepsilon\in N$, что при всех $n>n_\varepsilon$, $x_n\in B(x,\varepsilon)$.

Определение. Открытое в X множество, содержащее точку $x\in X$, называется окрестностью этой точки в X.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X,ρ) будем называть фундаментальной, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, что $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ для всех $n>n_\varepsilon$, $m>n_\varepsilon$.

Определение. Если в метрическом пространстве (X,ρ) всякая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется полным.

На множестве $\mathbf{R}^n$ упорядоченных наборов из n действительных чисел $x=(x_1,...,x_n)$ определим функцию $\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$. Тогда $(\mathbf{R}^n,\rho)$ представляет собой метрическое пространство. Для обоснования этого докажем лемму.

Лемма. Для любых действительных чисел $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n$ выполняются неравенства:

1) $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\right|\le\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}$.

2) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2}\le\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}(t\cdot x_i-y_i)^2=t^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2t\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}y_i^2\ge0.$$

Следовательно, $D=(\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2\le0$. Отсюда получаем первое нервенство. Для получения второго неравенства рассмотрим

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\le\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}+\sum_{i=1}^{n}y_i^2=$$

$$=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}\right)^2.$$

Отсюда получаем второе неравенство.

Отсюда ясно, что все аксиомы метрического пространства выполняются.

Лемма. Пространство $\mathbf{R}^m$ является полным.

Доказательство. Для доказательства этого факта рассмотрим фундаментальную последовательность $\{x_n\}$, $x_n=(x_1^n,...,x_m^n)$ точек пространства $\mathbf{R}^m$. Тогда, в силу неравенства,

$$|x_j^n-x_j^s|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i^n-x_i^s)^2},$$

мы получаем, что каждая последовательность $\{x_j^n\}$, $j=1,2,...,m$ является фундаментальной. Поэтому, в силу критерия Коши, существуют пределы $x_j=\lim\limits_{n\to\infty}x_j^n$. Тогда, в силу неравенства

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i^n-x_i)^2}\le\sum_{i=1}^{m}|x_i^n-x_i|,$$

мы получаем, что точка $(x_1,...,x_m)$ является пределом последовательности $\{x_n\}$, $x_n=(x_1^n,...,x_1^m)$. Это и означает полноту пространства $\mathbf{R}^m$.

Замечание. В данной лемме параллельно доказано, что точка $a=(a_1,...,a_m)$ является пределом последовательности $\{x_n\}$, $x_n=(x_1^n,...,x_m^n)$ тогда и только тогда, когда $a_i=\lim\limits_{n\to\infty}x_i^n$.

Определение. Точка $a\in\mathbf{R}^n$ называется *предельной* точкой множества $X\subset\mathbf{R}^n$, если для любой окрестности $U(a)$ точки a пересечение $X\cap U(a)$ является бесконечным множеством. Объединение множества X и всех его предельных точек называется замыканием множества X и обозначается $\overline{X}$.

Лемма. Множество X замкнуто тогда и только тогда, когда $X=\overline{X}$.

Доказательство. Пусть X замкнутое множество. По определению $X\subset\overline{X}$. Пусть $x\in\overline{X}$, но $x\notin X$. Тогда $x\in R^n\setminus X$, которое является открытым множеством. Отсюда $\exists U(a,\varepsilon)\subset\mathbf{R}^n\setminus X$, а, значит, $x\notin\overline{X}$.

Обратно, пусть $X=\overline{X}$. Возьмем любую точку $x\notin X=\overline{X}$. Тогда существует окрестность $U(a)$ такая, что $X\cap U(a)$ - конечное множество $\{x_1,...,x_k\}$. Поскольку одноточечное множество, очевидно, замкнуто, а объединение конечного числа замкнутых множеств – замкнуто, то $U(a)\setminus\{x_1,...,x_k\}$ - открытое множество. Следовательно, $V(a)\subset U(a)\setminus\{x_1,...,x_k\}$ и $V(a)\cap X=\varnothing$. Таким образом, $\mathbf{R}^n\setminus X$ открыто.

Определение. Множество $X\subset\mathbf{R}^n$ называется ограниченным, если существует n-мерный шар $U(O,\Delta)$, $O=(0,...,0)$ такой, что $X\subset U(O,\Delta)$. Последовательность точек $\{x_m\}$ пространства $\mathbf{R}^n$ называется ограниченной, если множество $\{x_m: m=1,2,...\}$ ограничено.

Очевидно, что, если последовательность сходится, то она ограничена, т.к. каждая из координатных последовательностей $\{x_i^m\}$, $i=1,2,...,n$ ограничена. Если для последовательности $\{x_m\}$ выполняется $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_m,O)=\infty$, то будем говорить, что последовательность стремится к бесконечности.

Теорема (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. $\{x_m\}$, $x_m=(x_1^m,...,x_n^m)$ ограничена. Отсюда

$$\Delta>\rho(x_m,O)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^m)^2}\geq\left|x_i^m\right|,\ i=1,2,...,n.$$

Поэтому каждая последовательность $\{x_i^m\}$, $i=1,2,...,n$ ограничена. Из последовательности $\{x_1^m\}$ выделяем сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{m_{k_1}}\}$. Из $\{x_2^{m_{k_1}}\}$ выделяем сходящуюся $\{x_2^{m_{k_2}}\}$ и т.д. из $\{x_n^{m_{k_{n-1}}}\}$ выфделяем сходящуюся $\{x_1^{m_{k_n}}\}$. В итоге получаем сходящиеся подпоследовательности $\{x_i^{m_{k_n}}\}$, $i=1,2,...,n$. Следовательно, подпоследовательность $(x_1^{m_{k_n}},...,x_n^{m_{k_n}})$ является сходящейся подпоследовательностью исходной последовательности.

Определение. Множество $X\subset\mathbf{R}^n$ называется компактом, если из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит множеству X.

Теорема. Для того чтобы множество $X\subset\mathbf{R}^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.

Доказательство. Пусть $X\subset\mathbf{R}^n$ является компактом. Если множество $X\subset\mathbf{R}^n$ было бы неограниченным, то для любого натурального числа m нашлась бы точка $x_m\in X$ такая, что

$\rho(x_m,O)>m,\ m=1,2,...,\ O=(0,0,...,0)$. Ясно, что $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_m,O)=\infty$, поэтому для любой подпоследовательности данной последовательности будет выполняться $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x_{m_k},O)=\infty$. Следовательно, из данной последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, X является ограниченным множеством. Если множество X не является замкнутым, то найдется его предельная точка $a\notin X$. Каждая окрестность $U(a,\frac{1}{m})$ содержит точку $x_m\in X\cap U(a,\frac{1}{m})$. Ясно, что $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=a$, т.е. $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_m,a)=0$. Поэтому для любой подпоследовательности данной последовательности будет выполняться $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x_{m_k},a)=0$. Следовательно, любая подпоследовательность этой последовательности сходится к точке a. Это противоречит определению компакта. Итак, множество X является замкнутым.

Обратно. Пусть X ограниченное замкнутое множество и $\{x_m\}$ какая либо последовательность его точек. Тогда эта последовательность также ограничена, а, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{m_k}=a$. Ясно, что либо $a\in X$, либо a - предельная точка множества X, а в этом случае она также принадлежит X в силу замкнутости.

Определение. Пусть a предельная точка множества $X\subset\mathbf{R}^n$ и функция $f:X\to\mathbf{R}^m$. Точка A называется пределом функции f при $x\to a$ по множеству X, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists U(a,\delta):\ \forall x\in\overset{\circ}{U}(a,\delta)\cap X\Rightarrow\rho(f(x),A)<\varepsilon \text{ или}$$
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in X,\ 0<\rho(x,a)<\delta\ \Rightarrow\rho(f(x),A)<\varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a,\,x\in X}f(x)=A$ или $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ \dots\\ x_n\to a_n,\\ x\in X}}f(x_1,...,x_n)=A$.

Теорема (о пределе сложной функции). Пусть $g:Y\to\mathbf{R}^n$, $f:X\to Y$, точка B - предельная точка множества Y и существует предел $\lim\limits_{\substack{y\to B,\\ y\in Y}}g(y)=C$. Пусть точка a - предельная точка множества X, существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}}f(x)=B$ и найдется окрестность $\overset{\circ}{V}(a)$ точки a такая, что $B\notin f(\overset{\circ}{V}(a)\cap X)$. Тогда существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}}g\circ f(x)=\lim\limits_{\substack{y\to B,\\ y\in Y}}g(y)=C$ композиции функций $g\circ f:X\to\mathbf{R}^n$.

Доказательство в точности повторяет доказательство аналогичной теоремы 1-го семестра.

$$\lim\limits_{\substack{y\to B,\\ y\in Y}}g(y)=C\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\sigma>0:\ \forall y\in Y,\ 0<\rho(y,B)<\sigma\Rightarrow\rho(g(y),C)<\varepsilon.$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}}f(x)=B\Rightarrow\exists\delta_1>0:\ \forall x\in X,\ 0<\rho(x,a)<\delta_1\Rightarrow\rho(f(x),B)<\sigma.$$

$$\exists\delta_2>0:U(a,\delta_2)\subset V(a).$$

$$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)\Rightarrow\forall x\in X,\ 0<\rho(x,a)<\delta\Rightarrow0<\rho(f(x),B)<\sigma\Rightarrow\rho(g(f(x)),C)<\varepsilon.$$

Пусть $f:X\to\mathbf{R}^n$, $X\subset\mathbf{R}^m$. Тогда, если $x=(x_1,...,x_m)\in X$ и $y=f(x)$, то $y=(y_1,...,y_n)$. Отсюда $y_i=f_i(x_1,...,x_m)$ и $f_i:X\to\mathbf{R}$.

Кроме того, если $A=(A_1,...,A_n)=\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x)$, то из неравенства

$$\left|A_i-f_i(x)\right|\le \rho(A,f(x))\le \sum_{j=1}^{n}\left|A_i-f_i(x)\right|$$

следует, что $A=\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x) \Leftrightarrow A_i=\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f_i(x),\ i=1,2,...,n$ (покоординатная сходимость).

Более того, следует заметить, что, если $A=\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x)$, то для любой последовательности $\{x_k\},\ x_k\in X,\ \ x_k\ne a,\ \lim\limits_{k\to+\infty} x_k=a \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=A$. Доказательство аналогично одномерному случаю.

Из полноты пространства $\mathbf{R}^n$ следует справедливость критерия Коши существования предела функции.

Теорема (критерий Коши существования предела функции).
Пусть a предельна точка множества X. Функция $f:X\to\mathbf{R^m}$, $X\subset\mathbf{R^n}$ имеет предел при $x\to a$ тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \forall x,x'\in X,\ 0<\rho(x,a)<\delta,\ \ 0<\rho(x',a)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(x'))<\varepsilon\,.$$

Доказательство. Пусть существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in X}} f(x)=A$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \forall x,x'\in E,\ 0<\rho(x,a)<\delta,\ \ 0<\rho(x',a)<\delta$$
$$\Rightarrow \rho(f(x),A)<\varepsilon/2;\ \ \rho(f(x'),A)<\varepsilon/2 \Rightarrow$$
$$\rho(f(x'),f(x))<\varepsilon.$$

Обратно. Пусть выполняется условие в теореме. Возьмем последовательность $\varepsilon_n=1/n$. Для каждого такого $\varepsilon_n=1/n$ найдем соответсвующее ему значение δ_n, для которого

$$\forall x,x'\in X,\ 0<\rho(x,a)<\delta_n,\ \ 0<\rho(x',a)<\delta_n \Rightarrow \rho(f(x),f(x'))<\varepsilon_n.$$

Возьмем произвольную точку $x_n\in X,\ 0<\rho(x_n,a)<\delta_n$. Последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальная. Действительно, возьмем любую точку $x\in X,\ 0<\rho(x,a)<\min\{\delta_n,\delta_m\}$. Тогда

$$\rho(f(x_n),f(x_m))\le\rho(f(x_n),f(x))+\rho(f(x),f(x_m))<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}.$$

Поэтому $\forall\varepsilon>0\ \exists N>\frac{1}{2\varepsilon}\Rightarrow\forall n,m>N\Rightarrow\frac{1}{n}+\frac{1}{m}<\frac{2}{N}<\varepsilon\Rightarrow\rho(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$. В силу полноты пространства $\mathbf{R}^n$, существует предел $A=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Из неравенства $\rho(f(x_n),f(x_m))<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$ следует, что $\rho(f(x_n),A)\le\frac{1}{n}$. Отсюда следут, что

$$\forall x\in X,\ 0<\rho(x,a)<\delta_n,\ \ 0<\rho(x_n,a)<\delta_n \Rightarrow \rho(f(x),f(x_n))<\frac{1}{n}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\rho(f(x),A)\le\rho(f(x),f(x_n))+\rho(A,f(x_n))<\frac{2}{n}.$$

Следовательно, для $\delta_n:\ n=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$ будет $\rho(f(x),A)<\varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in X}} f(x)=A$.

*Определение***.** Пусть $f:X\to\mathbf{R^m}$, $X\subset\mathbf{R^n}$ и $a\in X$. Функция называется *непрерывной* в точке $a\in X$, если $\forall U(f(a))\,\exists V(a):\ f(U(a)\cap X)\subset V(f(a))$.

Из данного определения, очевидно, следует, что, если $f(x)=(f_1(x),...,f_n(x))$, то непрервность данной функции равносильна непрерывности всех функций $f_i(x)$, $i=1,2,...,n$.

Теорема. Если $f:X\to\mathbf{R}^m$, $X\subset\mathbf{R}^n$ непрерывно в точке $a\in X$, то она ограничена в некоторой окрестности $U(a)\cap X$ этой точки.

Доказательство. Для $\varepsilon=1$ существует окрестность $U(a)$ такая, что $\rho(f(x),f(a))<1, \forall x\in X\cap U(a)$. Отсюда $\rho(f(x),O)\le\rho(f(x),f(a))+\rho(f(a),O)<1+\rho(f(a),O)=M, \forall x\in X\cap U(a)$, т.е. $f(x)\in U(O,M)$.

Теорема. Если функция $f:X\to\mathbf{R}$ непрерывна в точке $a\in X$ и $f(a)>0$ $(f(a)<0)$, то существует окрестность $U(a)\cap X$ точки a такая, что $f(x)>0$ $(f(x)<0)$, $\forall x\in U(a)\cap X$.

Доказательство. Пусть $f(a)>0$. Возьмем $\varepsilon=f(a)/2$ и найдем окрестность $U(a)\cap X$, для которой

$$\forall x\in U(a)\cap X\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\frac{f(a)}{2}\Rightarrow f(x)>\frac{f(a)}{2}>0.$$

Теорема. Если функция $g:Y\to\mathbf{R}^k$, $Y\subset\mathbf{R}^n$ непрерывна в точке $y_0\in Y$, а функция $f:X\to Y$, $X\subset\mathbf{R}^m$ непрерывно в точке x_0, причем $f(x_0)=y_0$, то определена функция $g\circ f:X\to\mathbf{R}^k$ и она непрерывна в точке x_0.

Доказательство. По определению для любой окрестности $U(g(y_0))$ существует окрестность $W(y_0)$ такая, что $g(W(y_0)\cap Y)\subset U(g(y_0))$. По непрерывности f в точке x_0 существует окрестность $V(x_0)$ такая, что $f(V(x_0)\cap X)\subset W(y_0)\cap Y$. Отсюда $g\circ f(V(x_0)\cap X)\subset g(W(y_0)\cap Y)\subset U(g(y_0))$.

Теорема. Если функции $f:X\to\mathbf{R},$ $g:X\to\mathbf{R}$, $X\subset\mathbf{R}^n$ непрерывны в точке $a\in X$, то функции $\alpha f+\beta g$, $f\cdot g$ непрерывны в точке $a\in X$. Если $g(x)\ne0$ на X, то функция $f/g: X\to\mathbf{R}$ непрерывна в точке $a\in X$.

Доказательство. Так как $g(a)\ne0$, то существует окрестность $U(a)$ такая, что $|g(x)|>\dfrac{|g(a)|}{2}$

Действительно, для числа $\dfrac{|g(a)|}{2}$ найдется окрестность $U(a)$ такая, что

$$\forall x\in U(a)\cap X\Rightarrow|g(x)-g(a)|<\frac{|g(a)|}{2}\Rightarrow$$

$$|g(a)|\le|g(x)-g(a)|+|g(x)|<\frac{|g(a)|}{2}+|g(x)|\Rightarrow|g(x)|>\frac{|g(a)|}{2}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Для числа $\dfrac{|g(a)|^2}{2(|g(a)|+|f(a)|)}\varepsilon$ найдем окрестность $V(a)$ такую, что при всех $x\in V(a)\cap X$ выполняется

$$|f(x)-f(a)|<\frac{|g(a)|^2}{2(|g(a)|+|f(a)|)}\varepsilon;\qquad|g(x)-g(a)|<\frac{|g(a)|^2}{2(|g(a)|+|f(a)|)}\varepsilon.$$

Тогда $\forall x\in U(a)\cap V(a)\cap X$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right|\le2\frac{|f(x)-f(a)||g(a)|+|g(x)-g(a)||f(a)|}{(g(a))^2}<\varepsilon.$$

Теорема (Вейерштрасс). Всякая функция непрерывная на компакте ограничена на нем и достигает своей верхней и своей нижней грани.

Доказательство. Пусть $f: X \to \mathbf{R}, X \subset \mathbf{R^n}$ непрерывна на компакте X. Обозначим $M = \sup\limits_X f$. Как всякая грань числового множества верхняя грань может быть как конечной так и бесконечной. Выберем произвольную последовательность $\{y_m\}$, $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = M$, $y_m < M, m = 1,2,\dots$. Для каждого числа y_m найдется точка $x_m \in X: f(x_m) > a_m$. Поскольку X - компакт, то из последовательности $\{x_m\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = a$, предел которой принадлежит X. Поскольку справедливо неравенство $M \ge f(x_{m_k}) > a_{m_k}$, то $M = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{m_k}) = f(a)$. Таким образом, верхняя грань конечна, поэтому функция ограничена сверху; кроме того, эта верхняя грань досигается. Аналогично доказывается для нижней грани.

Определение. Путем в пространстве $\mathbf{R}^n$ называется непрерывное отображение $\varphi:[a;b]\to\mathbf{R}^n$. Множество $X \subset \mathbf{R}^n$ называется линейно связным, если для любой пары точек x_0, $x_1 \in X$ существует путь $\varphi:[a;b]\to\mathbf{R}^n$ такой, что $\varphi([a;b])\subset X$, $\varphi(a)=x_0$, $\varphi(b)=x_1$, т.е. из любой точки множества можно пройти к любой другой, не выходя за пределы множества.

Теорема. Если функция $f: X\to\mathbf{R}, X\subset\mathbf{R}^n$ непрерывна на линейно связном множестве X, принимает в точках $a\in X, b\in X$ значения $A=f(a)$, $B=f(b)$, то для любого числа C, лежащего между A,B найдется точка $c\in X$, для которой $f(c)=C$.

Доказательство. Пусть $\varphi:[a;b]\to\mathbf{R}^n$ путь, для которого $\varphi([\alpha;\beta])\subset X$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Композиция отображений $f\circ\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ непрерывна, как композиция непрерывных отображений. По теореме Больцано-Вейерштрасса найдется точка $t\in[a;b]$, для которой $f(\varphi(t))=C$. Положим $\varphi(t)=c$.

Определение. Функция $f: X\to\mathbf{R}$, $X\subset\mathbf{R}^m$ называется равномерно непрерывной на X, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что $\forall x',x''\in X$, $\rho(x',x'')<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Теорема (Кантор). Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем.

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$\exists\varepsilon>0: \forall\delta>0\ \exists x',x''\in X,\ \ \rho(x',x'')<\delta, \left|f(x')-f(x'')\right|>\varepsilon.$$

Положим $\delta_n=\dfrac{1}{n}$ и найдем указанные точки $x'_n, x''_n\in X$, для которых $\rho(x'_n,x''_n)<\dfrac{1}{n}, \left|f(x'_n)-f(x''_n)\right|>\varepsilon$. Так как X компакт, то из последовательности $\{x'_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}, \xi=\lim\limits_{k\to\infty}x'_{n_k}\in X$. Далее $\rho(x''_{n_k},\xi)\le\rho(x'_{n_k},\xi)+\rho(x'_{n_k},x''_{n_k})\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x''_{n_k}=\xi$.

Тогда, в силу непрерывности функции, имеем

$$\lim_{k\to\infty}f\left(x''_{n_k}\right)=\lim_{k\to\infty}f\left(x'_{n_k}\right)=f(\xi)\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\left(f\left(x''_{n_k}\right)-f\left(x'_{n_k}\right)\right)=0.$$

Это является противоречием неравенству $\left|f(x'_n)-f(x''_n)\right|>\varepsilon, \forall n$.

Пусть V – линейное пространство над **R**. Нормой на V называется функция из V в **R**, обозначаемая $x \mapsto \|x\|$ и удовлетворяющая следующим аксиомам:

(1) $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in V$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \forall x \in V$;

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in V$.

Линейное пространство, на котором задана норма называется нормированным пространством. Норма на линейном пространстве задает метрику: $\rho(x,y) = \|x - y\|$. Отсюда следует, что норма есть функция непрерывная в любой точке $x \in V$. Поскольку $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| = \rho(x,y)$.

Если $f: X \to W,\ X \subset V$ отображение и V, W линейные нормированные пространства, то непрерывность в точке может быть сформулирована следующим образом:

<u>Как было</u>: $\forall U(f(a))\ \exists V(a)\colon\ f(V(a) \cap X) \subset U(f(a))$.

<u>Стало</u>: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ \forall x \in X,\ \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x) = f(a)$.

Пример. В $\mathbf{R}^m$ введем операцию сложения элементов и умножение на число:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m);$$
$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m).$$

Тогда $\mathbf{R}^m$ становится линейным пространством. Определим $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$. Легко проверить, что все аксиомы нормы выполняются. Таким образом, $\mathbf{R}^m$ становится линейным нормированным простарнством.

Лемма. Пусть V и W конечномерные линейные пространства над **R;** предположим, что на V выбрана норма $\|x\|_1$, а на W – норма $\|x\|_2$. Тогда для всякого линейного отображения $A: V \to W$ существует такое число C, что $\|Ax\|_2 \leq C\|x\|_1$ для всех $x \in V$.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ базис в V, а $f_1, \ldots, f_n$ базис в W. Если $x = x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m$, то

$$\|x\|_1 \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i| \|e_i\|_1 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \|e_i\|_1^2} = \alpha \|\tilde{x}\|_{\mathbf{R}^m}, \quad \tilde{x} = (x_1, \ldots, x_m).$$

Отсюда следует, что функция $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto \left\| \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \right\|_1$ непрерывна на R^m. Так как множество $S = \left\{ \tilde{x} \in \mathbf{R}^m, \|\tilde{x}\| = 1 \right\}$ замкнуто и ограничено, то оно является компактом. Функция $F(\tilde{x}) = F(x_1, \ldots, x_m) = \left\| \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \right\|_1$ непрерывна на S, так как

$$|F(x_1, \ldots, x_m) - F(y_1, \ldots, y_m)| = \big| \|x\|_1 - \|y\|_1 \big| \leq \|x - y\|_1 \leq \alpha \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\mathbf{R}^m}.$$

Поскольку на S у вектора $(x_1, \ldots, x_m)$ хотя ба одна координата не равна нулю, то, в силу линейной независимости векторов $e_1, \ldots, e_m$, получаем, что $F(x_1, \ldots, x_m) > 0$ на S. По теореме Вейерштрасса, эта функция достигает своего минимума λ. Ясно, что $\lambda > 0$. Возьмем любой $\tilde{x} \in \mathbf{R}^m,\ \tilde{x} = (x_1, \ldots, x_m)$. Пусть $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$. Тогда

$$\|x\|_1 = \|\tilde{x}\|_{\mathbf{R}^m} \cdot \left\| \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{\|\tilde{x}\|_{\mathbf{R}^m}} e_i \right\| = \|\tilde{x}\|_{\mathbf{R}^m} \cdot F\left(\frac{x_1}{\|\tilde{x}\|_{\mathbf{R}^m}}, \dots, \frac{x_m}{\|\tilde{x}\|_{\mathbf{R}^m}}\right) \geq \|\tilde{x}\|_{\mathbf{R}^m} \cdot \lambda .$$

Итак, мы получили $\|x\|_1 \leq \alpha \|\tilde{x}\|_{\mathbf{R}^m}$, $\|x\|_1 \geq \lambda \|\tilde{x}\|_{\mathbf{R}^m}$.

Рассмотрим теперь вектор $Ax = (\sum_{i=1}^{m} a_{1j}x_j, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{nj}x_j)$, где (a_{ij}) матрица оператора. Имеем

$$\|Ax\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j f_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| |x_j| \|f_i\|_2 \leq \|\tilde{x}\|_{\mathbf{R}^m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \|f_i\|_2 \leq \lambda^{-1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \|f_i\|_2}_{C} \|x\|_1 .$$

Следствие. Если V конечномерное линейное пространство и $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ две нормы в нем, то существуют числа C_1 и C_2, такие что $C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$, $\forall x \in V$.

Доказательство. Достаточно положить V=W, а в качестве линейного отображения выбрать тождественное.

Следствие. Всякое линейное отображение конечномерных нормированных линейных пространств непрерывно.

Определение. Пусть E и F конечномерные линейные нормированные пространства над **R** и $U \subset E$ открытое множество. Тогда отображение $f\colon U \to F$ называется *дифференцируемым* в точке $p \in U$, если существует линейное отображение $A: E \to F$, для которого[1]

$$\|f(p+h) - f(p) - Ah\| = o(\|h\|) \text{ при } h \to 0 .$$

При этом линейное отображение $A: E \to F$ называется *производной* функции f в точке p. Производную будем обозначать $Df(p)$.

Заметим, что, если $E = F = \mathbf{R}$, то линейное отображение $A: E \to F$ имеет вид $A(x) = a \cdot x$. Очевидно, что $a = f'(p)$.

*Теорема***.** Если $A: E \to F$ линейное отображение, то оно дифференцируемо в любой точке и его производная равна A.

Теорема. Если отображение $f: U \to F$ дифференцируемо в точке $p \in E$, то его производная в точке p единственна.

Доказательство. Предположим, что каждое из линейных отображений $A, B: E \to F$ является производной отображения $f: U \to F$. Тогда должно выполняться

$$f(p+h) - f(p) - Ah = \varphi(h), \ \|\varphi(h)\| = o(\|h\|), \ h \to 0;$$
$$f(p+h) - f(p) - Bh = \psi(h), \ \|\psi(h)\| = o(\|h\|), \ h \to 0.$$

Отсюда $Ah - Bh = \psi(h) - \varphi(h)$. При этом, $\|Ah - Bh\| = o(\|h\|)$, $h \to 0$. Предположим, что существует $v \neq 0$, для которого $Av - Bv = w \neq 0$, то $\|A(t \cdot v) - B(t \cdot v)\| = |t| \|w\|$. Это не есть $o(\|tv\|)$. Следовательно, A=B.

Теорема. Если отображение $f\colon U \to F$ дифференцируемо в точке p, то оно непрерывно в этой точке.

Доказательство. Имеем

$$\|f(x) - f(p)\| = \left\| f(p + \underbrace{(x-p)}_{h}) - f(p) \right\| \leq \|f(p+h) - f(p) - Ah\| + \|Ah\| \leq o(\|h\|) + C \cdot \|h\| \to 0, \ \ h \to 0 .$$

---

[1] Это означает, что $\dfrac{\|f(p+h) - f(p) - Ah\|}{\|h\|} \to 0, \ h \to 0$ в смысле нормы пространства F.

Отсюда, очевидно, следует непрерывность.

Теорема (о дифференцируемости сложной функции). Пусть E,F и G – конечномерные нормированные линейные пространства, $U \subset E, V \subset F$ - открытые подмножества, $f: U \to V$ и $g: V \to G$ - отображения. Если для некоторой точки $p \in U$, отображение f дифференцируемо в точке p, а отображение g дифференцируемо в точке $f(p)$, то отображение $g \circ f: U \to G$ дифференцируемо в точке p, причем $D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p)$.

Доказательство. Пусть $A = Df(p)$, $B = Dg(f(p))$, $F = g \circ f$, $q = f(p)$, $k = f(p+h) - f(p)$. Тогда

$$F(p+h) - F(p) = g(f(p+h)) - g(q) = g(q+k) - g(q).$$

Так как g дифференцируемо в точке q, то $g(q+k) - g(q) = Bk + \omega_1$, где $\frac{\|\omega_1\|}{\|k\|} \to 0,\ k \to 0$. В свою очередь, $f(p+h) - f(p) = Ah + \omega_2$, $\frac{\|\omega_2\|}{\|h\|} \to 0,\ h \to 0$. Поэтому,

$$F(p+h) - F(p) = B(Ah + \omega_2) + \omega_1 = (B \circ A)h + B\omega_2 + \omega_1.$$

Поскольку отображение $B \circ A$ является линейным, то остается проверить, что $\frac{\|B\omega_2 + \omega_1\|}{\|h\|} \to 0,\ h \to 0$.

Имеем, $\frac{\|B\omega_2 + \omega_1\|}{\|h\|} \le C\frac{\|\omega_2\|}{\|h\|} + \frac{\|\omega_1\|}{\|h\|}$, где $\|Bx\| \le C\|x\|$. Первое слагаемое в полученном неравенстве стремится к нулю по условию дифференцируемости f. Стремление к нулю второго слагаемого можно доказать следующим образом. Так как g дифференцируемо в точке q, то $\frac{\|\omega_1\|}{\|k\|} \to 0,\ k \to 0$.

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что $\frac{\|\omega_1\|}{\|k\|} < \varepsilon$ при $\|k\| < \eta$. В свою очередь, в силу непрерывности f в точке p, найдется такое $\delta_1 > 0$, что $\|k\| < \eta$ при $\|h\| < \delta_1$. Далее, так как f дифференцируемо в точке p, то найдется такое $\delta_2 > 0$, что $\frac{\|\omega_2\|}{\|h\|} < 1$ при $\|h\| < \delta_2$. Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Тогда, если $\|Ax\| \le H\|x\|$, то при $\|h\| < \delta$ получим

$$\|\omega_1\| < \varepsilon\|k\| = \varepsilon\|Ah + \omega_2\| \le \varepsilon(H\|h\| + \|\omega_2\|) < \varepsilon(H+1)\|h\|.$$

Так как ε произвольно, то это означает, что $\frac{\|\omega_1\|}{\|h\|} \to 0,\ h \to 0$.

Выясним, какой матрицей задается производная отображения. Пусть $(u_1, \dots, u_m)$ и $(v_1, \dots, v_n)$ стандартные базисы в $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$: у вектора u_i (или v_i) на i-ом месте стоит единица, а на остальных местах - нули. Пусть $U \subset \mathbf{R}^m$ открытое множество, и пусть $f: U \to \mathbf{R}^n$ действует по формуле

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

Если f дифференцируемо в точке $p = (p_1, \dots, p_m) \in U$ и $Df(p) = A: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, то $f(p+h) = f(p) + Ah + \varphi(h)$, $\|\varphi(h)\| = o(\|h\|),\ h \to 0$. Следовательно,

$$f(p + tu_j) = f(p) + A(tu_j) + \varphi(tu_j),\quad \|\varphi(tu_j)\| = o(t),\ t \to 0.$$

Отсюда $Au_j = \lim\limits_{t \to 0} t^{-1}(f(p + tu_j) - f(p))$. Если A задается матрицей (a_{ij}), т.е. $A(u_j) = \sum_i a_{ij} v_i$, то

$$a_{ij}=\lim_{t\to 0}\frac{f_i(p_1,...,p_{j-1},p_j+t,p_{j+1},...,p_n)-f_i(p_1,...,p_{j-1},p_j,p_{j+1},...,p_n)}{t}.$$

Иными словами, a_{ij} - производная функции $y\mapsto f_i(p_1,...,p_{j-1},y,p_{j+1},...,p_n)$ в точке p_j.

Определение. Пусть $U\subset\mathbf{R}^m$ - открытое множество и $f:U\to\mathbf{R}$ - функция. Если $p=(p_1,...,p_m)\in U$, то предел $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(p_1,...,p_{j-1},p_j+t,p_{j+1},...,p_n)-f(p_1,...,p_{j-1},p_j,p_{j+1},...,p_n)}{t}$ (если он существует) называется i-ой частной производной функции f в точке p и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(p)$ или $f'_{x_j}(p)$.

Итак, на основании вышесказанного, можно сделать вывод, что матрица линейного отображения $Df(p)$ в стандартных базисах имеет вид:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p)...\frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p)\\ \text{..............................}\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p)...\frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p)\end{pmatrix}.$$

Как известно, композиция линейных отображений задается матрицей, равной произведению матриц этих отображений. Поэтому из теоремы о производной сложной функции следует

Следствие. Пусть $U\subset\mathbf{R}^m$ и $V\subset\mathbf{R}^n$ открытые множества, $f:U\to V$ и $g:V\to\mathbf{R}$ отображения. Если для некоторой точки $p\in U$, отображение f дифференцируемо в точке p, а отображение g дифференцируемо в точке $f(p)$, то отображение $g\circ f:U\to\mathbf{R}$ дифференцируемо в точке p, причем, если $f(x_1,...,x_m)=(y_1(x_1,...,x_m),...,y_n(x_1,...,x_m))$, то

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(p))\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p).$$

Действительно, матрица линейного отображения $Dg(f(p))$ имеет вид $\left(\dfrac{\partial g}{\partial y_1}(f(p)),...,\dfrac{\partial g}{\partial y_n}(f(p))\right)$, поэтому

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(p)),...,\frac{\partial g}{\partial y_n}(f(p))\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(p)...\frac{\partial y_1}{\partial x_m}(p)\\ \text{..............................}\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}(p)...\frac{\partial y_n}{\partial x_m}(p)\end{pmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(p))\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_1}(p),...,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(p))\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_m}(p)\right).$$

Рассмотрим теперь функцию $f:U\to\mathbf{R},\ U\subset\mathbf{R}^\mathbf{n}$. Если $p=(p_1,...,p_n)\in U,\ h=(\Delta x_1,...,\Delta x_n)$, то условие дифференцируемости функции запишется в виде:

$$\Delta f(p)=f(p+h)-f(p)=f(p_1+\Delta x_1,...,p_n+\Delta x_n)-f(p_1,...,p_n)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Delta x_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\Delta x_n+\varphi(\Delta x_1,...,\Delta x_n),\quad \varphi(\Delta x_1,...,\Delta x_n)=o(\sqrt{\Delta x_1^2+...+\Delta x_n^2}),\ (\Delta x_1,...,\Delta x_n)\to(0,...,0).$$

Заметим, что условие дифференцируемости можно записать и иначе. Пусть $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+...+\Delta x_n^2}$ и $\varepsilon(\Delta x_1,...,\Delta x_n)=\dfrac{\varphi(\Delta x_1,...,\Delta x_n)}{\rho}$. Тогда $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ \Delta x_n\to 0}}\varepsilon(\Delta x_1,...,\Delta x_n)=0$. Поэтому

$$\varphi=\varepsilon\cdot\rho=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(\varepsilon\cdot\frac{\Delta x_i}{\rho})}_{\varepsilon_i}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Delta x_i,\quad \lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \cdots\\ \Delta x_n\to 0}}\varepsilon_i(\Delta x_1,...,\Delta x_n)=0.$$

Последнее условие выполняется потому, что $\frac{\Delta x_i}{\rho}$ ограничена. Обратно,

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Delta x_i=\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\frac{\Delta x_i}{\rho}\right)}_{\varepsilon}\cdot\rho,\quad \lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \cdots\\ \Delta x_n\to 0}}\varepsilon(\Delta x_1,...,\Delta x_n)=0.$$

Поэтому условие дифференцируемости можно записать в виде

$$\Delta f(p)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Delta x_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\Delta x_n+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Delta x_i,\quad \lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \cdots\\ \Delta x_n\to 0}}\varepsilon_i(\Delta x_1,...,\Delta x_n)=0,\ i=1,2,...,n.$$

Главная линейная относительно $\Delta x_1,...,\Delta x_n$ (приращения аргументов) часть $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Delta x_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\Delta x_n$ называется дифференциалом функции $f:U\to\mathbf{R},\ U\subset\mathbf{R}^n$. Обозначается $df(p)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Delta x_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\Delta x_n$. Приращения независимых аргументов будем называть также дифференциалами независимых аргументов и обозначать $dx_1,...,dx_n$. Тогда дифференциал функции можно записать в виде:

$$df(p)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\cdot dx_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\cdot dx_n.$$

Итак, дифференциал - это $Df(a)h$, т.е. результат действия оператора $Df(a)$ на вектор h.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некотрой окрестности $U((x_0;y_0))$ точки $(x_0;y_0)$ и дифференцируема в самой этой точке. Тогда

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}),\quad x\to x_0,\ y\to y_0$$

Рассмотрим теперь плоскость $z=z_0+A(x-x_0)+B(y-y_0)$. Если такая плоскость обладает тем свойством, что точка $(x,y,f(x,y))$ графика функции отклоняется от точки $(x,y,z(x,y))$ плоскости на величину, бесконечно малую по сравнению с величиной $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, т.е.

$$f(x,y)-z(x,y)=o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}),\ x\to x_0,\ y\to y_0,$$

то такая плоскость называется касательной плоскостью к графику функции $z=f(x,y)$ в точке $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Из определения дифференцируемости функции и единственности дифференциала следует, что плоскость $z=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ является касательной к графику функции в точке $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ и такая плоскость единственна. Вектор $(f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),-1)$ является нормальным вектором касательной плоскости. Прямая, проходящая через данную точку и имеющая в качестве направляющего вектора - вектор нормали касательной плоскости называется нормалью. Ее уравнение имеет вид

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Рассмотрим произвольный путь $\Gamma:[0,1]\to\mathbf{R}^3$, который определяется дифференцируемыми функциями $x(t),\ y(t),\ z(t)$, причем такой, что множество (кривая в пространстве)

$\gamma=\{(x(t),y(t),z(t)):t\in[0;1]\}\subset\{(x,y,f(x,y)):\ (x,y)\in U)\}$ и $x(0)=x_0,\ \ y(0)=y_0,\ \ z(0)=z_0$ (т.е. это путь на графике функции). Очевидно, что $z(t)=f(x(t),y(t))$ Вектор

$$(x'(0),y'(0),z'(0))=(x'(0),y'(0),f'_x(x_0,y_0)x'(0)+f'_y(x_0,y_0)y'(0))$$

называется направляющим вектором касательной к кривой γ в точке $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Очевидно, что этот вектор ортогонален вектору $(f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),-1)$. Поэтому касательная к кривой лежит в касательной плоскости. Верно и обратное, если прямая $x=x_0+\xi t,\ \ y=y_0+\eta t,\ z=f(x_0,y_0)+\zeta t$ лежит в касательной плоскости и проходит через точку $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, то на графике есть путь, для которого вектор $(\xi,\ \eta,\zeta)$ (направляющий вектор этой прямой) будет направляющим вектором касательной к кривой, определяемой этим путем. А именно пусть $\Gamma(t)=(\underbrace{x_0+\xi t}_{x(t)},\ \underbrace{y_0+\eta t}_{y(t)},\ \underbrace{f(x_0+\xi t,\ y_0+\eta t)}_{z(t)})$. Тогда

$$x'(0)=\xi,\ y'(0)=\eta,\ \ z'(0)=f'_x(x_0,y_0)\xi+f'_y(x_0,y_0)\eta.$$

Так как прямая $x=x_0+\xi t,\ \ y=y_0+\eta t,\ z=f(x_0,y_0)+\zeta t$ лежит в касательной плоскости, то

$$f(x_0,y_0)+\zeta t=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\xi t+f'_y(x_0,y_0)\eta t.$$

Поэтому $\zeta=f'_x(x_0,y_0)\xi+f'_y(x_0,y_0)\eta$. Следовательно, $x'(0)=\xi,\ y'(0)=\eta,\ \ z'(0)=\zeta$, т.е. вектор (ξ,η,ζ) направляющий вектор касательной к кривой, определяемой путем Γ. Итак, касательная плоскость к графику функции в данной точке образована касательными ко всевозможным кривым на графике, проходящим через данную точку.

Из уравнения касательной плоскости $z=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ следует, что $z-f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)$. Таким образом, дифференциал функции в точке (x_0,y_0) равен приращению аппликаты касательной плоскости к графику функции в этой точке.

Предположим, что функция $f(x_1,\dots,x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ и имеет частную производную f'_{x_i} в каждой ее точке. Тогда на этой окрестности определена функция $f'_{x_i}(x_1,\dots,x_n)$. Если в точке $(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ существует частная производная $(f'_{x_i})'_{x_j}$, то она называется частной производной второго порядка функции $f(x_1,\dots,x_n)$. Аналогично можно определить частные производные любого порядка.

Определение. Частная производная (по любой из независимых переменных) от частной производной порядка $m-1$ называется *частной производной порядка m*. Частная производная, полученная дифференцированием по разным переменным, называется *смешанной частной производной*. Частная производная, полученная дифференцированием по одной переменной, называется *чистой частной производной*.

Отметим используемые обозначения

$$f''_{x_ix_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=(f'_{x_i})'_{x_j};\ \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_k}^{\alpha_k}\dots\partial x_{i_1}^{\alpha_1}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x_{i_k}^{\alpha_k-1}\dots\partial x_{i_1}^{\alpha_1}}\right),\ \alpha_1+\dots+\alpha_k=n.$$

Пример 30.10. Найти f''_{xy}, f''_{yx}, если $f(x,y)=ye^x+x\sin(1+y^2)$.

Решение. Имеем: $f'_x=ye^x+\sin(1+y^2)$, $f''_{xy}=e^x+\cos(1+y^2)\cdot 2y$, $f'_y=e^x+x\cos(1+y^2)\cdot 2y$, $f''_{yx}=e^x+\cos(1+y^2)\cdot 2y$.

Имеет место теорема о независимости частных производных от порядка дифференцирования.

Теорема. Пусть функция $f(x_1,\dots,x_n)$ определена вместе со своими частными производными f'_{x_i}, f'_{x_j}, $f''_{x_ix_j}$, $f''_{x_jx_i}$ в некоторой окрестности $U_r(a)$ точки $a=(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$, причем $f''_{x_ix_j}$, $f''_{x_jx_i}$ непрерывны в этой точке; тогда $f''_{x_ix_j}(a)=f''_{x_jx_i}(a)$.

Доказательство. Рассуждения проведем для случая двух аргументов. Пусть $\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1, x_2^{(0)}+\Delta x_2\right)\in U_r(a)$. Положим

$$H=f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,x_2^{(0)}+\Delta x_2)-f(x_1^{(0)},x_2^{(0)}+\Delta x_2)-f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,x_2^{(0)})+f(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$$

и рассмотрим следующие вспомогательные функции $\varphi(x_1)=f(x_1,x_2^{(0)}+\Delta x_2)-f(x_1,x_2^{(0)})$ и $\psi(x_2)=f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,x_2)-f(x_1^{(0)},x_2)$. Легко видеть, что $\Delta\varphi(x_1^{(0)})=\Delta\psi(x_2^{(0)})=H$. Применяя дважды теорему Лагранжа, получаем

$$\Delta\varphi(x_1^{(0)})=\varphi'(x_1^{(0)}+\theta_1\Delta x_1)\Delta x_1=\left(f'_{x_1}(x_1^{(0)}+\theta_1\Delta x_1,x_2^{(0)}+\Delta x_2)-f'_{x_1}(x_1^{(0)}+\theta_1\Delta x_1,x_2^{(0)})\right)\Delta x_1=$$
$$=f'_{x_1x_2}(x_1^{(0)}+\theta_1\Delta x_1,x_2^{(0)}+\theta_2\Delta x_2)\Delta x_1\Delta x_2.$$

Аналогично находим

$$\Delta\psi(x_2^{(0)})=\psi'(x_2^{(0)}+\theta_3\Delta x_2)\Delta x_2=f'_{x_2x_1}(x_1^{(0)}+\theta_4\Delta x_1,x_2^{(0)}+\theta_3\Delta x_2)\Delta x_1\Delta x_2.$$

Поскольку $\Delta\varphi(x_1^{(0)})=\Delta\psi(x_2^{(0)})$, то

$$f'_{x_2x_1}(x_1^{(0)}+\theta_4\Delta x_1,x_2^{(0)}+\theta_3\Delta x_2)=f'_{x_1x_2}(x_1^{(0)}+\theta_1\Delta x_1,x_2^{(0)}+\theta_2\Delta x_2).$$

Так как вторые частные производные непрерывны в точке $(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$, то при $(\Delta x_1,\Delta x_2)\to(0,0)$ получаем $f'_{x_2x_1}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})=f'_{x_1x_2}(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$.

Введем обозначение $C^k(G,\mathbf{R})$ для множества функций $f:G\to\mathbf{R}$, определенных на области $G\subset\mathbf{R}^n$ и имеющих в этой области непрерывные частные производные до порядка k включительно. Из доказанной выше теоремы следует, что, если $f\in C^k(G,\mathbf{R})$, то значение $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_{i_k}^{\alpha_k}\ldots\partial x_{i_1}^{\alpha_1}}$ в точках области не меняется при любой перестановке индексов.

Пусть, как выше, $h=(\Delta x_1,...,\Delta x_n)$ и $f:U\to\mathbf{R}$, где $U\subset\mathbf{R}^n$. Дифференциал $df(x,h)$ мы определили как $df(x,h)=Df(x)h$. Предположим, что $Df(x)$ определена на U. Тогда, при фиксированном h, $df(x,h)$ является некоторой функцией от x. Если эта функция дифференцируема в точке x, то

$$df(x+k,h)-df(x,k)=d(df(x,h),k)+\eta,\quad \lim_{k\to 0}\frac{\eta}{\|k\|}=0\,.$$

Дифференциал от первого дифференциала при $k=h$ называется вторым дифференциалом функции f и обозначается d^2f. Итак, $d^2f(x,h)=d(df(x,h),h)$. Аналогично определяется дифференциал порядка 3,4,..., т.е. $d^nf=d(d^{n-1}f)$.

$$d^2f=d(df)=d(\sum_{j=1}^n f'_{x_j}dx_j)=\sum_{j=1}^n(df'_{x_j})dx_j=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n f''_{x_jx_i}dx_idx_j=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_idx_j\,.$$

Данное равенство символически можно записать в виде

$$d^2f=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f\,.$$

По индукции легко проверить, что

$$d^kf=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\,.$$

Кстати, здесь полезно знать полиномиальную теорему

$$(x_1+...+x_n)^k=\sum_{\substack{i_1+...+i_n=k\\ i_1\ge 0,...,i_n\ge 0}}\frac{k!}{i_1!...i_n!}x_1^{i_1}...x_n^{i_n}\,.$$

Пример. Найти d^2w, если $w=f(u,v),\ u=x^2+y^3,\ v=\dfrac{x}{y}$.

Решение. По формуле (30.4) имеем $d^2w=w''_{xx}dx^2+2w''_{xy}dxdy+w''_{yy}dy^2$. Найдем вторые частные производные.

$$w''_{xx}=(w'_x)'_x=(f'_u2x+f'_v\frac{1}{y})'_x=2f'_u+2x(f''_{uu}2x+f''_{uv}\frac{1}{y})+\frac{1}{y}(f''_{vu}2x+f''_{vv}\frac{1}{y})=$$
$$=4x^2f''_{uu}+\frac{4x}{y}f''_{uv}+\frac{1}{y^2}f''_{vv}+2f'_u.$$

$$w''_{xy}=(w'_x)'_y=(f'_u2x+f'_v\frac{1}{y})'_y=2x(f''_{uu}3y^2-f''_{uv}\frac{x}{y^2})-\frac{1}{y^2}f'_v+\frac{1}{y}(f''_{vu}3y^2-f''_{vv}\frac{x}{y^2})=$$
$$=6xy^2f''_{uu}+\left(3y-\frac{4x^2}{y^2}\right)f''_{uv}-\frac{x}{y^3}f''_{vv}-\frac{1}{y^2}f'_v.$$

$$w''_{yy}=(w'_y)'_y=(f'_u\cdot 3y^2-f'_v\frac{x}{y^2})'_y=6yf'_u+3y^2(f''_{uu}3y^2-f''_{uv}\frac{x}{y^2})-\frac{x}{y^2}(f''_{vu}3y^2-f''_{vv}\frac{x}{y^2})+f'_v\frac{2x}{y^3}=$$

$$=9y^4f''_{uu}-6xf''_{uv}+\frac{x^2}{y^4}f''_{vv}+6yf'_u+f'_v\frac{2x}{y^3}.$$

Окончательно находим

$$d^2w=\left(4x^2f''_{uu}+\frac{4x}{y}f''_{uv}+\frac{1}{y^2}f''_{vv}+2f'_u\right)dx^2+\left(9y^4f''_{uu}-6xf''_{uv}+\frac{x^2}{y^4}f''_{vv}+6yf'_u+f'_v\frac{2x}{y^3}\right)dy^2+$$

$$+2\left(6xy^2f''_{uu}+\left(3y-\frac{4x^2}{y^2}\right)f''_{uv}-\frac{x}{y^3}f''_{vv}-\frac{1}{y^2}f'_v\right)dxdy.$$

Говорят, что отображение $f: U \to \mathbf{R}^n$, $U \subset \mathbf{R}^m$, $f(x) = (f_1(x_1,...,x_m),...,f_n(x_1,...,x_m))$ принадлежит классу C^1, если все частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ существуют и непрерывны всюду на U.

Определение. Пусть E,F конечномерные ЛНП. Нормой линейного оператора $A: E \to F$ называется число $\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}:\ x \in E,\ x \neq 0\right\} = \sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Заметим, что данное определение корректо. Действительно, во-первых, $\|Ax\| \le C\|x\|$ для всех $x \in E$. Поэтому $\|A\|$ существует. Если $Hom(E,F)$ линейное пространство линейных отображений $E \to F$, то функция $A \mapsto \|A\|$, $A \in Hom(E,F)$ является нормой. Все аксиомы тривиальны. Например,

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\| \Rightarrow \|Ax\| \le \|A\|\|x\| \Rightarrow \|Ax + Bx\| \le \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\| \Rightarrow \frac{\|Ax + Bx\|}{\|x\|} \le \|A\| + \|B\| \Rightarrow \|A + B\| \le \|A\| + \|B\|.$$

Если $A: E \to F$ изоморфизм конечномерных ЛНП.

$$\|v - w\| = \|A^{-1}A(v - w)\| \le \|A^{-1}\|\|A(v - w)\| \le \|A^{-1}\|\|A\|\|v - w\| \Rightarrow$$

$$\|A^{-1}\|^{-1}\|v - w\| \le \|Av - Aw\| \le \|A\|\|v - w\|. \qquad (*)$$

Пусть $V_1 \subset E_1$, $V_2 \subset E_2$ открытые подмножества конечномерных ЛНП. Отображение $f: V_1 \to V_2$ называется *диффеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и отображения $f: V_1 \to V_2$ и $f: V_2 \to V_1$ принадлежат классу C^1.

Теорема. Пусть $U \subset \mathbf{R}^n$ открытое подмножество и $f: U \to \mathbf{R}^n$ отображение класса C^1. Предположим, что для некоторой точки $p \in U$ отображение $Df(p)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ является изоморфизмом. Тогда существует содержащее точку p открытое подмножество $U_1 \subset U$, что $f(U_1) \subset \mathbf{R}^n$ - открытое множество и ограничение $f|_{U_1}: U_1 \to f(U_1)$ является диффеоморфизмом.

Предположим, что $f: (x_1,...,x_n) \mapsto (f_1(x_1,...,x_n),...,f_n(x_1,...,x_n))$. Очевидно, что $Df(p)$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) \ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство теоремы опирается на вспомогательные леммы.

Лемма 1. В условиях теоремы для всякой точки $a \in U$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V \ni a$ обладающая следующим свойством: если $x, x + h \in V$, то $\|f(x + h) - f(x) - Df(x)h\| \le \varepsilon\|h\|$.

Доказательство. Применим формулу Тейлора к каждой из функций

$$f_j(x + h) - f_j(x) = \sum_{i=1}^{n}(f_j)'_{x_i}(x)\cdot h_i + \sum_{i=1}^{n}((f_j)'_{x_i}(x + \theta h) - (f_j)'_{x_i}(x))\cdot h_i\ .$$

У точки a есть компактная окрестность $V_0 = B(a,\delta_0) \subset \overline{B(a,\delta_0)} \subset U$. Функции $(f_j)'_{x_i}(x)$ будучи непрерывными на компакте $\overline{V_0}$, равномерно непрерывны на нем. Поэтому можно найти $\delta_i > 0$ такое, что $|(f_j)'_{x_i}(x + \theta h) - (f_j)'_{x_i}(x)| < \frac{\varepsilon}{n}$, $x, x + h \in V_0 \cap B(a,\delta_i)$. Положим $\delta = \min(\delta_0,...,\delta_n)$. Тогда $V = B(a,\delta)$.

Лемма 2. В условиях теоремы существует окрестность V точки p такая, что $f(x)\neq f(y)$, как только $x,y\in V, x\neq y$.

Доказательство. Так как f принадлежит классу C^1 и $Df(p)$ является изоморфизмом, тосуществует число $M>0$ и окрестность $V_1\ni p$ такие, что для всех $a\in V_1$ отображение $Df(a)$ является изоморфизмом и $\left\|(Df(a))^{-1}\right\|\leq M$. Действительно, якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p)...\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ .... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p)...\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) \end{vmatrix}\neq 0$$

поэтому в силу непрерывности найдется окрестность $V_1=B(p,\delta_1)\subset U$, где

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)...\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ .... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a)...\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \end{vmatrix}\neq 0 .$$

Поэтому в каждой точке $a\in\overline{B(p,\delta_1)}$ $Df(a)$ является изоморфизмом. Отображение $(Df(a))^{-1}$ задается матрицей (b_{ij}) обратной к $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)...\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ .... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a)...\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \end{pmatrix}$. Поэтому b_{ij} выражаются через миноры этой матрицы, а занчит непрерывно зависят от a. Поэтому на компакте $\overline{B(p,\delta_1)}$ ограничены числом N. Отсюда

$$\left\|(Df(a))^{-1}h\right\|=\left\|(\sum_{i=1}^{n}b_{1j}h_j,...,\sum_{i=1}^{n}b_{nj}h_j,...,)\right\|=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}b_{1j}h_j\right)^2+...+\left(\sum_{i=1}^{n}b_{nj}h_j\right)^2}\leq\left|\sum_{i=1}^{n}b_{1j}h_j\right|+...+\left|\sum_{i=1}^{n}b_{nj}h_j\right|\leq Nn\sum_{i=1}^{n}\left|h_j\right|\leq Nn^2\left\|h\right\|.$$

Поэтому $M=Nn^2$.

Применим теперь предыдущую лемму для $\varepsilon=1/(2M)$. Находим окрестность $V\subset V_1$ со следующим свойством: если $x\in V$, $x+h\in V$, то

$$f(x+h)-f(x)=Df(x)h+R(x,h),$$

где $\left\|R(x,h)\right\|\leq\left\|h\right\|/(2M)$. Поскольку, ввиду неравенства (*) $\left\|h\right\|/M\leq\left\|Df(x)^{-1}\right\|^{-1}\left\|h\right\|\leq\left\|Df(x)h\right\|$. Следовательно, $\left\|R(x,h)\right\|\leq\left\|h\right\|/(2M)$ и $\left\|Df(x)h\right\|\geq\left\|h\right\|/M$. Отсюда $\left\|R(x,h)\right\|<\left\|Df(x)\right\|$, а, следовательно, $f(x+h)-f(x)\neq 0$.

Лемма 3. Пусть $U\subset\mathbf{R}^n$ открытое подмножество и $f:U\to\mathbf{R}^n$ отображение класса C^1. Если, для каждой точки $a\in U$ отображение $Df(a)$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ является изоморфизмом, то множество $f(U)$ открыто.

Доказательство. Пусть $a\in U$. Нам нужно жоказать, что существует окрестность $W\ni f(a)$, обладающая свойством: для всякого $y\in W$ $\exists x\in U$: $f(x)=y$. Мы построим такой элемент x методом Ньютона, а именно, как предел последовательности:

$$x_0=a,\ x_n=x_{n-1}+\left(Df(x_{n-1})\right)^{-1}(y-f(x_{n-1})).$$

Мы хотим доказать, что эта последовательность будет сходится к точке $x\in U$ и $f(x)=y$.

Так как f принадлежит классу C^1 и $Df(a)$ является изоморфизмом, то существует число $M>0$ и окрестность $V_1 \ni a$ такие, что для всех $x \in V_1$ $\left\|(Df(x))^{-1}\right\| \le M$. Кроме того, по лемме 1, существует окрестность $V_2 \subset V_1$ и обладающая тем свойством, что, если $x', x'' \in V_2$, то

$$\|f(x'') - f(x') - Df(x')(x'' - x')\| \le \|x'' - x'\|/(2M).$$

Поэтому, если $x_{n-1}, x_n \in V_2$, то $\underbrace{x_n}_{x''} = \underbrace{x_{n-1}}_{x'} + \underbrace{(Df(x_{n-1}))^{-1}(y - f(x_{n-1}))}_{h}$ и, обозначив $R_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) - Df(x_{n-1})h$, находим

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + Df(x_{n-1})(Df(x_{n-1}))^{-1}(y - f(x_{n-1})) + R_n = y + R_n,$$

где $\|R_n\| \le \|h\|/(2M) = \dfrac{1}{2M}\left\|(Df(x_{n-1}))^{-1}(y - f(x_{n-1}))\right\| \le \dfrac{1}{2M} M \|y - f(x_{n-1})\| = \dfrac{1}{2}\|y - f(x_{n-1})\|$. Итак,

$$\|y - f(x_n)\| \le \frac{1}{2}\|y - f(x_{n-1})\| \le \ldots \le \frac{1}{2^n}\|y - f(a)\|.$$

Таким образом, $y = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, так что, если последовательность x_n сходится к некоторой точке x, то $y = f(x)$. Итак, докажем, что все $x_n \in V_2$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Предположим, что, если $x_1, \ldots, x_{n-1} \in V_2$, то $\|x_n - x_{n-1}\| \le M\|y - f(x_{n-1})\| \le \dfrac{M}{2^{n-1}}\|f(a) - y\|$. Поэтому, если точки $x_1, \ldots, x_{n-1} \in V_2$ уже построены, то

$$\|x_n - a\| \le \sum_{k=1}^{n}\|x_k - x_{k-1}\| \le M\|f(a) - y\| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \le M\|f(a) - y\|\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\right) \le 2M\|f(a) - y\|.$$

Пусть $B(a, \delta) \subset V_2$ и $y \in W = B(f(a), \dfrac{\delta}{2M})$. Тогда, в силу предыдущего неравенства, получаем $\|x_n - a\| < \delta$. Следовательно, $x_n \in V_2$. Более того, для $n > m$ имеем

$$\|x_n - x_m\| \le \sum_{k=m+1}^{n}\|x_k - x_{k-1}\| \le M\|f(a) - y\| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = M\|f(a) - y\|\frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\right) = M\|f(a) - y\|\frac{1}{2^{m-1}}.$$

Поэтому последовательность фундаментальна, а, значит, она сходится. Итак, $B(f(a), \dfrac{\delta}{2M}) \subset f(U)$.

Доказательство теоремы.

Пусть $f: U \to \mathbf{R}^n$ отображение класса C^1. Предположим, что для некоторой точки $p \in U$ отображение $Df(p)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ является изоморфизмом. Уменьшая при необходимости открытое множество U, можно считать, что $Df(x)$ является изоморфизмом для всех $x \in U$ и f взаимно однозначно на U. Лемма 3 гарантирует, что образ любого открытого множества открыт. Отсюда следует, что $g = f^{-1}: f(U) \to U$ непрерывно. Покажем, что g: $f(U) \to U$ принадлежит классу C^1. Пусть $a \in U$, $b = f(a)$. Покажем, что g дифференцируемо в точке b и его производная равна $(Df(a))^{-1}$. Нужно доказать, что

$$0 = \lim_{y\to b}\frac{\|g(y) - g(b) - (Df(a))^{-1}(y - b)\|}{\|y - b\|};$$

который, по теореме о пределе сложной функции, равен

$$\lim_{x\to a}\frac{\|g(f(x)) - g(f(a)) - (Df(a))^{-1}(f(x) - f(a))\|}{\|f(x) - f(a)\|} = \lim_{x\to a}\frac{\|x - a - (Df(a))^{-1}(f(x) - f(a))\|}{\|f(x) - f(a)\|}.$$

Так как $f(x) - f(a) = Df(a)(x - a) + \psi(x)$, $\|\psi(x)\| = o(\|x - a\|)$, $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\|x - a - (Df(a))^{-1}(f(x) - f(a))\|}{\|f(x) - f(a)\|} = \lim_{x\to a}\frac{\|(Df(a))^{-1}\psi(x)\|}{\|Df(a)(x - a) + \psi(x)\|}.$$

Для числителя имеем $\left\|(Df(a))^{-1}\psi(x)\right\| \le \left\|(Df(a))^{-1}\right\|\left\|\psi(x)\right\| \Rightarrow \left\|(Df(a))^{-1}\psi(x)\right\| = o(\|x-a\|),\ x \to a$. Как уже несколько раз отмечалось, так как f принадлежит классу C^1, то существует число $M > 0$ и окрестность $V_1 \ni a$ такие, что для всех $x \in V_1$ $\left\|(Df(x))^{-1}\right\| \le M$. Отсюда, по неравенству (*), имеем $\frac{1}{M}\|x-a\| \le \left\|(Df(a))^{-1}\right\|^{-1}\|x-a\| \le \|Df(a)(x-a)\|$. Уменьшая при необходимости окрестность, можно считать, что $\|\psi(x)\| \le \|x-a\|/(2M)$, поэтому знаменатель $\|Df(a)(x-a)+\psi(x)\| \ge \|Df(a)(x-a)\| - \|\psi(x)\| \ge \frac{1}{2M}\|x-a\|$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to a}\frac{\left\|(Df(a))^{-1}\psi(x)\right\|}{\|Df(a)(x-a)+\psi(x)\|} = 0$. Итак, доказано, что $Dg(b) = (Df(g(b)))^{-1}$. Так как $g(b)$ непрерывно зависит от b, то из операции взятия обратной матрицы, следует, что $g \in C^1$.

Теорема. Пусть $U \subset \mathbf{R}^{m+n}$ - открытое множество и $f: U \to \mathbf{R}^n$ - отображение класса С1, записанное в координатах как

$$(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n) \mapsto (\varphi_1(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n),...,\varphi_n(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)).$$

Пусть $a=(a_1,...,a_m)\in \mathbf{R}^m$, $b=(b_1,...,b_n)\in \mathbf{R}^n$ и $p=(a_1,...,a_m,b_1,...,b_n)\in U$, причем $f(a_1,...,a_m,b_1,...,b_n)=(0,...,0)\in \mathbf{R}^n$. Если определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}(p) ... \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}(p) \\ .... \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1}(p) ... \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n}(p) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то существуют открытое множество $W \subset \mathbf{R}^m$, содержащее точку $(a_1,...,a_m)$, и открытое множество $V \subset \mathbf{R}^n$, содержащее точку $(b_1,...,b_n)$, обладающие тем свойством, что для всякого $x=(x_1,...,x_m)\in W$ существует и единственно $y=(y_1,...,y_n)\in V$, удовлетворяющее условию $f(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=(0,...,0)\in \mathbf{R}^n$. Наконец отображение $g: W \to V$ ставящее в соответсвие точке $x \in W$ то единственное $y \in V$, для которого $f(x,y)=0$ принадлежит классу C^1, как и отображение f.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\tilde{f}: \mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^{m+n}$, заданное следующей формулой:

$$\tilde{f}(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=(x_1,...,x_m,\varphi_1(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n),...,\varphi_n(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)).$$

Очевидно, что это отображение принадлежит классу C^1 (поскольку все функции

$$(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n) \mapsto x_1;$$
$$...$$
$$(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n) \mapsto x_m;$$
$$(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n) \mapsto \varphi_1(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n);$$
$$...$$
$$(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n) \mapsto \varphi_n(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)$$

имеют непрерывные частные производные) на множестве U. Если обозначить

$$B=\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}(p) ... \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}(p) \\ .... \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1}(p) ... \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n}(p) \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) ... \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}(p) \\ .... \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(p) ... \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}, \quad E_{m\times m}=\begin{pmatrix} 10...0 \\ 01...0 \\ .... \\ 00....1 \end{pmatrix},$$

то производная отображения $\tilde{f}$ задается матрицей Якоби

$$\begin{pmatrix} E_{m\times m} & 0 \\ A & B \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы, очевидно совпадает с $\det B$ и поэтому в точке p отличен от нуля. Значит, $D\tilde{f}(p)$ изоморфизм. По теореме об обратной функции, найдется открытое множество $U_1 \ni p$, что $\tilde{f}\big|_{U_1}: U_1 \to \tilde{f}(U_1)$ есть диффеоморфизм. Далее цепочка рассуждений:

$\exists B(p,r)\subset U_1 \Rightarrow \exists\delta>0:\ K=\{(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n):|x_i-a_i|<\delta,\ |y_j-b_j|<\delta,\ i=1,...,m,\ j=1,...,n\}\subset B(p,r)$. Для этого в качестве числа δ достаточно выбрать число меньшее чем $r/\sqrt{m+n}$. Тогда $\rho((x,y),(a,b))=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-a_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_i)^2}<\delta\sqrt{m+n}<r$. Множества

$$O=\{(x_1,...,x_m):|x_i-a_i|<\delta,\ i=1,...,m\} \text{ и } V=\{(y_1,...,y_n):|y_i-b_i|<\delta,\ i=1,...,n\},$$

очевидно являются окрестностями точек a и b, соответственно и K окрестность точки p, а $\tilde{f}\big|_K : K\to\tilde{f}(K)$ диффеоморфизм.

Поскольку $\tilde{f}(K)$ - открытое множество и $\tilde{f}(p)=(a_1,...,a_m,0,...,0)\in\tilde{f}(K)$, то найдется окрестность $W\ni a$ точки a, для которой $\{(x,0...,0):\ x\in W\}\subset\tilde{f}(K)$. Покажем, что открытые множества V и W обладают требуемыми свойствами.

Заметим, что $f(x,y)=(0,...,0)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{f}(x,y)=(x,0,...,0)$. В силу того, что $\tilde{f}$ взаимно однозначно на K , то далее цепочка рассуждений:

$$\forall x\in W\Rightarrow(x,0,...,0)\in\tilde{f}(K)\Rightarrow\exists!\left(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_m,y_1,...,y_n\right)\in K:$$
$$(x,0,...,0)=\tilde{f}(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_m,y_1,...,y_n)=(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_m,\varphi_1(x,y),...,\varphi_n(x,y))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\tilde{x}=(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_m),\ f(x,y)=0,$$

где $y=(y_1,...,y_n)\in V$. Итак, для любого $x\in W$ $\exists!$ $y\in V:\ f(x,y)=0$. Итак, существование отображения $g:W\to V$ доказано. Для доказательства того, что $g:W\to V$ - это отбражение класса C^1 рассмотрим следующие отображения класса C^1 :

$$i:W\to\mathbf{R}^{m+n},\ \ i:x\mapsto(x,0,...,0);$$

$$h:f(K)\to K \text{ - диффеоморфизм обратный к } \tilde{f}\big|_K;$$

$$p:K\to V,\ p(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=(y_1,...,y_n).$$

Очевидно, что $g=p\circ h\circ i$. Отсюда g - отображение класса C^1 .

Теорема. Если функция $f(x_1,...,x_n)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными до порядка m, $m\geq 1$, включительно в некоторой δ-окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)})$, то при $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\triangle x_i)^2}<\delta$ справедлива формула

$$f(x_1^{(0)}+\triangle x_1,...,x_n^{(0)}+\triangle x_n)=f(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)})+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\triangle x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+\triangle x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x^{(0)})+r_{m-1}(\triangle x),$$

где

$$r_{m-1}(\triangle x)=\frac{1}{m!}\left(\triangle x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+\triangle x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(x_1^{(0)}+\theta\triangle x_1,...,x_n^{(0)}+\theta\triangle x_n),$$
$$0<\theta<1,\quad \triangle x=(\triangle x_1,...,\triangle x_n).$$

Доказательство проведем для случая функции $z=f(x,y)$ двух аргументов. Пусть $\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}<\delta$. Тогда все точки $(x_0+t\triangle x,\ y_0+t\triangle y)$, $t\in[0,1]$ принадлежат δ-окрестности точки $(x_0,\ y_0)$. Следовательно, определена сложная функция $F(t)=f\left(x_0+t\triangle x,\ y_0+t\triangle y\right)$, $t\in[0,1]$. Ясно, что

$$F(1)-F(0)=f\left(x_0+\triangle x,\ y_0+\triangle y\right)-f(x_0,y_0).$$

Из условий теоремы следует, что для функции $F(t)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$F(t)=F(0)+F'(0)\cdot t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+...+\frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1}+\frac{F^{(m)}(\theta t)}{m!}t^m.$$

По индукции, используя формулу дифференцирования сложной функции, легко показать, что

$$F^{(k)}(t)=\left(\triangle x\frac{\partial}{\partial x}+\triangle y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\left(x_0+t\triangle x,y_0+t\triangle y\right),\ k=1,2,...,m.$$

Отсюда получаем

$$f\left(x_0+\triangle x,\ y_0+\triangle y\right)-f(x_0,y_0)=F(1)-F(0)=F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+...+\frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}+\frac{F^{(m)}(\theta)}{m!}=$$
$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\triangle x\frac{\partial}{\partial x}+\triangle y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+\left(\triangle x\frac{\partial}{\partial x}+\triangle y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f\left(x_0+\theta\triangle x,y_0+\theta\triangle y\right).$$

Следствие. Пусть $f\in C^m(U(a),\mathbf{R})$. Тогда в $U(a)$ справедливо равенство

$$f(a_1+\triangle x_1,...,a_n+\triangle x_n)=f(a)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\triangle x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+\triangle x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(a)+\varepsilon(\triangle x_1,...,\triangle x_n)\rho^m,$$

где $\lim\limits_{\substack{\triangle x_1\to 0\\ ...\\ \triangle x_n\to 0}}\varepsilon(\triangle x_1,...,\triangle x_n)=0$ и $\rho=\sqrt{\triangle x_1^2+...+\triangle x_n^2}$.

Пусть в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ определена функция $w=f(x,y,z)$ и задан единичный вектор $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. Координаты такого вектора представляют собой его направляющие косинусы, т.е. косинусы углов, которые вектор $\vec{l}$ образует с ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Прямая L с направляющим вектором $\vec{l}$ и проходящая через точку M_0 имеет следующее параметрическое представление:

$$L:\ x=x_0+t\cos\alpha;\ y=y_0+t\cos\beta,\ z=z_0+t\cos\gamma,\ t\in\mathbf{R}.$$

Пусть M(t) произвольная точка прямой L. Тогда

$$\rho(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=|t|.$$

Определение. Производная $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$ функции f в точки M_0 в направлении вектора $\vec{l}$ определяется равенством $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)=\lim\limits_{t\to+0}\frac{f(M(t))-f(M_0)}{\rho(M(t),M_0)}$.

Предположим, что функция $w=f(x,y,z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, тогда, по теореме о дифференцируемости сложной функции, находим

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)=\lim_{t\to+0}\frac{f(M(t))-f(M_0)}{\rho(M(t),M_0)}=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}=$$

$$=\frac{d}{dt}\big(f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)\big)\Big|_{t=0}=f'_x(M_0)\cos\alpha+f'_y(M_0)\cos\beta+f'_z(M_0)\cos\gamma.$$

Итак,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)=f'_x(M_0)\cos\alpha+f'_y(M_0)\cos\beta+f'_z(M_0)\cos\gamma.$$

Введем в рассмотрение вектор $\nabla f(M_0)=\big(f'_x(M_0),f'_y(M_0),f'_z(M_0)\big)$, который называется градиентом функции f в точке M_0. Данный вектор обозначается так же $grad\,f(M_0)$. Тогда производную по направлению можно представить в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)=\big(\nabla f(M_0),\vec{l}\big).$$

Поскольку $\big(\nabla f(M_0),\vec{l}\big)=|\nabla f(M_0)|\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\nabla f(M_0)$ и $\vec{l}$, то при $|\nabla f(M_0)|\neq 0$ производная по направлению в точке M_0 достигает наибольшего значения в единственном направлении, а именно в направлении градиента и равна она в этом случае $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)=|\nabla f(M_0)|$. Итак, направление градиента показывает направление наибыстрейшего роста функции, а его величина равна производной в этом направлении.

Пример. Найти производную функции $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ в точке M_0 в направлении вектора $\overrightarrow{M_0M}$, где $M_0(1,0,1)$, $M(3,1,2)$.

Решение. Имеем $f'_x(M_0)=2x\big|_{M_0}=2;$ $f'_y(M_0)=2y\big|_{M_0}=0;$ $f'_z(M_0)=2z\big|_{M_0}=2$. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $(2,1,1)$, следовательно, единичный вектор $\vec{l}=\dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$. Отсюда $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{6}},\ \cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{6}},\ \cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{6}}.$ Поэтому

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}}=f'_x(M_0)\cdot\cos\alpha+f'_y(M_0)\cdot\cos\beta+f'_z(M_0)\cdot\cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\,.$$