Математический анализ

«Элементы теории поля»

Ибрагимов Д.Н., доцент каф. 804

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Москва 2020

Основные теоретические сведения

Определение

$$\operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Определение

Поле F называется потенциальным, если существует скалярное поле u такое, что $F = \operatorname{grad} u$.
Поле F называется соленоидальным, если существует такое векторное поле G, что $F = \operatorname{rot} G$.

Лемма

Поле F потенциальное тогда и только тогда, когда $\operatorname{rot} F = 0$.
Поле F соленоидальное тогда и только тогда, когда $\operatorname{div} F = 0$.

4401. Вычислить градиент поля $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ в точках $O(0;0;0)$, $A(1;1;1)$, $B(2;0;1)$. Вычислить точку, в которой градиент равен нулю.

$$\operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + 3 \\ 4y + x - 2 \\ 6z - 6 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad} u\Big|_O = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} u\Big|_A = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} u\Big|_B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$0 = \operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} 2x + y + 3 \\ 4y + x - 2 \\ 6z - 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4422.1. Вычислить дивергенцию поля $\vec{a} = \frac{-\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точке $M(3;4;5)$. Чему приблизительно равен поток вектора $\vec{a}$ через малую сферу $B_\varepsilon(M)$.

$$\operatorname{div}\vec{a} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_z =$$

$$= \frac{-\sqrt{x^2+y^2} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} + \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\operatorname{div}\vec{a}\Big|_M = \frac{2\cdot 9}{(9+16)^{\frac{3}{2}}} = \frac{18}{125}.$$

$$\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(M)} (\vec{a}, d\vec{S}) = \iiint\limits_{B_\varepsilon(M)} \operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz \approx \iiint\limits_{B_\varepsilon(M)} \frac{18}{125}dxdydz = \frac{24\pi\varepsilon^3}{125}.$$

4436.1. Вычислить ротор поля $\vec{a} = \frac{y}{z}\vec{i} + \frac{z}{x}\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}$ в точке $M(1;2;-2)$.

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{z} & \frac{z}{x} & \frac{x}{y} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right) - \vec{j}\left(\frac{1}{y} + \frac{y}{z^2}\right) + \vec{k}\left(-\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z}\right).$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}\Big|_M = \vec{i}\left(-\frac{1}{4} - 1\right) - \vec{j}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\right) + \vec{k}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ -1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

4457. Доказать, что поле $\vec{a} = yz(2x+y+z)\vec{i} + xz(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}$ потенциально. Вычислить его потенциал.

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz + y^2z + yz^2 & 2xyz + x^2z + xz^2 & 2xyz + x^2y + xy^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(2xz + x^2 + 2xy - 2xy - x^2 - 2xz) - \vec{j}(2yz + 2xy + y^2 - 2xy - y^2 - 2yz) +$$
$$+ \vec{k}(2yz + 2xz + z^2 - 2xz - 2yz - z^2) = 0.$$

$$u = \int (2xyz + y^2z + yz^2)dx = x^2yz + xy^2z + xyz^2 + \varphi(y,z).$$

$$2xyz + x^2z + xz^2 = (x^2yz + xy^2z + xyz^2 + \varphi(y,z))'_y = x^2z + 2xyz + xz^2 + \varphi'_y,$$
$$\varphi'_y = 0, \quad \varphi(y,z) = \psi(z),$$
$$2xyz + x^2y + xy^2 = (x^2yz + xy^2z + xyz^2 + \psi(z))'_z = x^2y + xy^2 + 2xyz + \psi'_z.$$
$$\psi'_z = 0, \quad \psi(z) = C,$$
$$u = x^2yz + xy^2z + xyz^2 + C.$$

4439. a) Вычислить rot grad u.

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

Домашнее задание

4402, 4427, 4457.1, 4458, 4439 б).