Хренниковой А.С.
М80-108Б-19
Вариант-23

№2

Для заданной подстановки из S_8 определить:
а) разложение в произведение независимых циклов;
б) порядок подстановки;
в) разложение в произведение транспозиций;
г) чётность подстановки.

$[(3\ 1\ 6\ 4\ 2\ 5\ 1)(5\ 7\ 2)(8\ 1\ 7)(5\ 3\ 6)]^{-125}$

а) $[(3\ 1\ 6\ 4\ 2\ 5\ 1)(5\ 7\ 2)(8\ 1\ 7)(5\ 3\ 6)]^{-125} = [(1\ 5)(2)(3\ 4)(6\ 7\ 8)]^{-125} = (1\ 5)^{-125}(2)^{-125}(3\ 4)^{-125}(6\ 7\ 8)^{-125} =$
$= (1\ 5)^{-126+1}(3\ 4)^{-126+1}(6\ 7\ 8)^{-126+1} = (1\ 5)(3\ 4)(6\ 7\ 8)$

б) НОК$(2,3)=6$

в) $(1\ 5)(3\ 4)(6\ 7\ 8) = (6\ 8)(6\ 7)(3\ 4)(1\ 5)$

г) Четная

Если $[(3\ 1\ 6\ 4\ 2\ 5)(5\ 7\ 2)(8\ 1\ 7)(5\ 3\ 6)]^{-125}$

а) $[(3\ 1\ 6\ 4\ 2\ 5)(5\ 7\ 2)(8\ 1\ 7)(5\ 3\ 6)]^{-125} = [(1\ 5)(2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8)]^{-125} = (1\ 5)^{-125}(2\ 3\ 4)^{-125}(6\ 7\ 8)^{-125} =$
$= (1\ 5)^{-126+1}(2\ 3\ 4)^{-126+1}(6\ 7\ 8)^{-126+1} = (1\ 5)(2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8)$

б) НОК$(2,3)=6$

в) $(1\ 5)(2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8) = (6\ 8)(6\ 7)(2\ 4)(2\ 3)(1\ 5)$

г) Нечетная

№3

Определить для заданной подгруппы $H \subset S_4$:
а) элементы из H;
б) левые смежные классы группы S_4 по H;
в) правые смежные классы группы S_4 по H;
г) является ли H нормальной подгруппой?

$\langle(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 2)\rangle$

H	$П_0$	(1 3 4)	(1 4 2)	(1 4 3)	(2 3 4)	(1 3)(2 4)	(1 3 2)	(1 4)(2 3)	(2 4 3)	(1 2 4)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)
$П_0$	$П_0$	(1 3 4)	(1 4 2)	(1 4 3)	(2 3 4)	(1 3)(2 4)	(1 3 2)	(1 4)(2 3)	(2 4 3)	(1 2 4)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)
(1 3 4)	(1 3 4)	(1 4 3)	(2 3 4)	$П_0$	(1 3)(2 4)	(1 4 2)	(1 4)(2 3)	(2 4 3)	(1 3 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 4)
(1 4 2)	(1 4 2)	(1 3 2)	(1 2 4)	(1 2)(3 4)	(1 4)(2 3)	(1 3 4)	(1 3)(2 4)	(1 2 3)	(1 4 3)	$П_0$	(2 4 3)	(2 3 4)
(1 4 3)	(1 4 3)	$П_0$	(1 3)(2 4)	(1 3 4)	(1 4 2)	(2 3 4)	(2 4 3)	(1 3 2)	(1 4)(2 3)	(1 2 3)	(1 2 4)	(1 2)(3 4)
(2 3 4)	(2 3 4)	(1 4)(2 3)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(2 4 3)	(1 4 3)	(1 4 2)	(1 2 4)	$П_0$	(1 3 4)	(1 3 2)	(1 3)(2 4)
(1 3)(2 4)	(1 3)(2 4)	(2 4 3)	(1 2 3)	(1 2 4)	(1 3 2)	$П_0$	(2 3 4)	(1 2)(3 4)	(1 3 4)	(1 4 3)	(1 4)(2 3)	(1 4 2)
(1 3 2)	(1 3 2)	(1 2)(3 4)	(1 4)(2 3)	(1 4 2)	(1 3 4)	(1 2 4)	(1 2 3)	(1 4 3)	(1 3)(2 4)	(2 4 3)	(2 3 4)	$П_0$
(1 4)(2 3)	(1 4)(2 3)	(1 2 3)	(2 4 3)	(2 3 4)	(1 4 3)	(1 2)(3 4)	(1 2 4)	$П_0$	(1 4 2)	(1 3 2)	(1 3)(2 4)	(1 3 4)
(2 4 3)	(2 4 3)	(1 2 4)	(1 3 2)	(1 3)(2 4)	$П_0$	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 3 4)	(2 3 4)	(1 4)(2 3)	(1 4 2)	(1 4 3)
(1 2 4)	(1 2 4)	(1 3)(2 4)	$П_0$	(2 4 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 3 4)	(2 3 4)	(1 2)(3 4)	(1 4 2)	(1 4 3)	(1 4)(2 3)
(1 2)(3 4)	(1 2)(3 4)	(1 4)(2 3)	(1 3 4)	(1 3 2)	(1 2 4)	(1 4)(2 3)	(1 4 3)	(1 3)(2 4)	(1 2 3)	(2 3 4)	$П_0$	(2 4 3)
(1 2 3)	(1 2 3)	(2 3 4)	(1 4 3)	(1 4)(2 3)	(1 2)(3 4)	(2 4 3)	$П_0$	(1 4 2)	(1 2 4)	(1 3)(2 4)	(1 3 4)	(1 3 2)

б) ЛСК:

S_4 \ H	Π_0	(1 3 4)	(1 4 2)	(1 4 3)	(2 3 4)	(1 3)(2 4)	(1 3 2)	(1 4)(2 3)	(2 4 3)	(1 2 4)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)
Π_0	Π_0	(1 3 4)	(1 4 2)	(1 4 3)	(2 3 4)	(1 3)(2 4)	(1 3 2)	(1 4)(2 3)	(2 4 3)	(1 2 4)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)
(1 2)	(1 2)	(1 3 4 2)	(1 4)	(1 4 3 2)	(1 2 3 4)	(1 3 2 4)	(1 3)	(1 4 2 3)	(1 2 4 3)	(2 4)	(3 4)	(2 3)

в) ПСК:

H \ S_4	Π_0	(1 2)
Π_0	Π_0	(1 2)
(1 3 4)	(1 3 4)	(1 2 3 4)
(1 4 2)	(1 4 2)	(2 4)
(1 4 3)	(1 4 3)	(1 2 4 3)
(2 3 4)	(2 3 4)	(1 3 4 2)
(1 3)(2 4)	(1 3)(2 4)	(1 4 2 3)
(1 3 2)	(1 3 2)	(2 3)
(1 4)(2 3)	(1 4)(2 3)	(1 3 2 4)
(2 4 3)	(2 4 3)	(1 4 3 2)
(1 2 4)	(1 2 4)	(1 4)
(1 2)(3 4)	(1 2)(3 4)	(3 4)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3)

г) H является нормальной подгруппой

№ 4

Рассматривается (4,7)-код Хэмминга. Для слова а) определить ему соответствующее кодовое слово. Пусть при приеме каждого из слов б), в) возможно была допущена ошибка (не более чем в одной позиции). Определить наличие и положение ошибки, какие слова были переданы? какие слова были закодированы?

а) 0 1 1 1

б) 0 0 1 1 0 1 1

в) 0 1 0 1 0 1 0

а) Строим вспомогательную матрицу

$$M_{3\times7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

По условию $a = 0\,1\,1\,1$, тогда $b = b_1 b_2 0 b_4 1\,1\,1$

$$bM^T = 0: \begin{cases} b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = 0 \\ b_2 + b_3 + b_6 + b_7 = 0 \\ b_4 + b_5 + b_6 + b_7 = 0 \end{cases}$$

$$(b_1 b_2 0 b_4 1 1 1)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=0; \quad \to \quad \begin{cases} b_4+1+1+1=0 \to b_4=1\\ b_2+1+1=0 \to b_2=0\\ b_1+1+1=0 \to b_1=0\end{cases} \Rightarrow b=0001111$$

б) $c=0011011$

$$cM^T=(0\,1\,0\,1\,1\,1\,0)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=(1\,1\,0)_2=\underset{\text{позиция}}{6_{10}} \Rightarrow b=0011001$$

$a=1001$

в) $c=0101110$

$$cM^T=(0\,1\,0\,1\,1\,1\,0)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=(1\,0\,1)_2=\underset{\text{позиция}}{5_{10}} \Rightarrow b=0101010$$

$a=0010$

№5

Определить, является ли полем или кольцом заданная алгебраическая структура. Проверить, существуют ли делители нуля.
Диагональные матрицы порядка 4: $\langle M,+,\times\rangle$.

$$A=\begin{pmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&0&0\\0&0&a_3&0\\0&0&0&a_4\end{pmatrix}, \quad a_i\in\mathbb{R}$$

1. По сложению - коммутативная группа
   1.1. Коммутативность очевидна
   $A+B=B+A$
   1.2. Ассоциативность очевидна
   $A+(B+C)=(A+B)+C$
   1.3. $\exists e_+: A+e_+=A \Rightarrow e_+=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$
   1.4. Обратные элементы
   $A+A^{-1}=e_+ \Rightarrow A^{-1}=-A$
2. По умножению - коммутативный моноид
   2.1. Замкнутость
   $$\begin{pmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&0&0\\0&0&a_3&0\\0&0&0&a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&0&0&0\\0&b_2&0&0\\0&0&b_3&0\\0&0&0&b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&0&0&0\\0&a_2b_2&0&0\\0&0&a_3b_3&0\\0&0&0&a_4b_4\end{pmatrix}$$
   2.2. Ассоциативность следует из ассоциативности умножения матриц
   2.3. $\exists e_\times: A\times e_\times=A, \; e_\times=E$
   2.4. Коммутативность следует из пункта 2.1 $\begin{pmatrix}a_1&&0\\&\ddots&\\0&&a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&&0\\&\ddots&\\0&&b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1&&0\\&\ddots&\\0&&b_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&&0\\&\ddots&\\0&&a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&&0\\&\ddots&\\0&&a_4b_4\end{pmatrix}$
   2.5. Обратные элементы
   $A\times A^{-1}=E$
   A^{-1} не существует, если $\det A=0$
3. Дистрибутивность следует из дистрибутивности умножения матриц относительно сложения (в силу коммутативности умножения достаточно одного тождества).

$A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C)$

4. Делители нуля

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Вывод: коммутативное кольцо с единицей и делителями нуля.