Вариант - 3

Хренникова А.С.
М8О-108Б-19

Элементы a_1, a_2, a_3, a_4 евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением $(x, y) = x^T y$. Применяя процесс ортогонализации к системе элементов a_1, a_2, a_3, a_4, найти ортогональный базис подпространства $A = Lin(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Дополнить этот базис до ортогонального базиса всего пространства $\mathbb{R}^4$.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Решение: Применяем к заданной системе векторов процесс ортогонализации.

1. Полагаем $b_1 = a_1$

2. Вычисляем $\alpha_{21} = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{1\cdot(-4) - 2\cdot 2 + 0\cdot 0 + 3\cdot(-2)}{1\cdot 1 - 2(-2) + 0\cdot 0 + 3\cdot 3} = \frac{-4-4-6}{1+4+9} = \frac{-14}{14} = -1$ и находим вектор

$$b_2 = a_2 - \alpha_{21} b_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Вычисляем коэффициенты $\alpha_{31} = \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{-2\cdot 1 - 2\cdot(-2) + 0\cdot 0 + 4\cdot 3}{14} = \frac{-2+4+12}{14} = \frac{14}{14} = 1$

$\alpha_{32} = \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = \frac{-3\cdot(-2) + 0\cdot(-2) + 0\cdot 0 + 1\cdot 4}{-3(-3) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1} = \frac{6+4}{9+1} = \frac{10}{10} = 1$ и находим вектор $b_3 = a_3 - \alpha_{31} b_1 - \alpha_{32} b_2 =$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получили нулевой вектор. Значит, система векторов a_1, a_2, a_3 линейно зависима. Продолжаем процесс ортогонализации, учитывая, что $b_3 = 0$.

4. Вычисляем коэффициенты $\alpha_{41} = \frac{(a_4, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{8\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 3\cdot 0 + 4\cdot 3}{14} = \frac{8-6+12}{14} = \frac{14}{14} = 1$, $\alpha_{42} = \frac{(a_4, b_2)}{(b_2, b_2)} = \frac{8\cdot(-3) + 3\cdot 0 + 3\cdot 0 + 4\cdot 1}{10} = \frac{-24+4}{10} = -2$ для ненулевых векторов b_1 и b_2. Коэффициент α_{43} при нулевом векторе $b_3 = 0$ можно взять любым, например $\alpha_{43} = 0$. Находим вектор

$$b_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Процесс ортогонализации завершен. Найдена такая ортогональная система векторов b_1, b_2, b_3, b_4, что $A = Lin(a_1, a_2, a_3, a_4) = Lin(b_1, b_2, b_3, b_4)$. Исключая из этой системы нулевой вектор $b_3 = 0$, получаем базис b_1, b_2, b_4 подпространства $A = Lin(b_1, b_2, b_4)$.

Дополняем базис b_1, b_2, b_4 до ортогонального базиса всего пространства $\mathbb{R}^4$. Для этого находим фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $B^T x = 0$, где $B = (b_1\ b_2\ b_4)$ – матрица, составленная из соответствующих столбцов. Составляем расширенную матрицу системы $B^T x = 0$ и приводим её к упрощенному виду:

$$(B|o) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 & 9 \\ 0 & -6 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -42 & 0 & 70 \\ 0 & 42 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -42 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 18 & 70 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{35}{9} \end{pmatrix}.$$

Выражаем базисные переменные x_1, x_2, x_3 через свободную переменную x_4: $x_1 = +\frac{1}{3}x_4$, $x_2 = \frac{5}{3}x_4$, $x_3 = -\frac{35}{9}x_4$. По этим формулам для $x_4 = 9$ получаем $x_1 = -3$, $x_2 = 15$, $x_3 = -35$. Таким образом, фундаментальная система состоит из одного решения $\varphi = (+3\ \ 15\ \ -35\ \ 9)^T$. Этот столбец дополняет ортогональный базис подпространства A до базиса $\mathbb{R}^4$.

Ответ: $(1\ -2\ 0\ 3)^T$, $(-3\ 0\ 0\ 1)^T$, $(1\ 5\ 3\ 3)^T$, $(3\ 15\ -35\ 9)^T$ – ортогональный базис $\mathbb{R}^4$; первые три столбца образуют базис подпространства A.