Математический анализ

«Несобственный интеграл»

Ибрагимов Д.Н., доцент каф. 804

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Москва 2020

2336. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{\omega_1 \to -\infty} \int\limits_{\omega_1}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{\omega_2 \to +\infty} \int\limits_{0}^{\omega_2} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{\omega_1 \to -\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_{\omega_1}^{0} + \lim_{\omega_2 \to +\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_{0}^{\omega_2} =$$

$$= -\lim_{\omega_1 \to -\infty} \operatorname{arctg}(\omega_1) + \lim_{\omega_2 \to +\infty} \operatorname{arctg}(\omega_2) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

2340. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{x}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{x+1} - \frac{(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}},$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \lim_{\omega\to+\infty} \left[\int\limits_0^{\omega} \frac{dx}{x+1} - \int\limits_0^{\omega} \frac{(x+\frac{1}{2})dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \int\limits_0^{\omega} \frac{\frac{1}{2}dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \right] =$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left[\ln(x+1)\Big|_0^{\omega} - \frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\Big|_0^{\omega} + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Big|_0^{\omega} \right] =$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left[\ln(\omega+1) - \ln\sqrt{\left(\omega+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\omega+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] =$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{\omega+1}{\sqrt{(\omega+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\omega+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2344. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)dx}{(1+x^2)^2}$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)dx}{(1+x^2)^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(x)dx^2}{(1+x^2)^2} = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2}\cdot\ln(x)d\frac{1}{(1+x^2)} =$$

$$\lim_{\substack{\omega_1\to 0\\ \omega_2\to+\infty}} \left[-\frac{\ln(x)}{2(1+x^2)}\Big|_{\omega_1}^{\omega_2} + \frac{1}{2}\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{dx}{x(x^2+1)}\right] = \lim_{\substack{\omega_1\to 0\\ \omega_2\to+\infty}} \left[-\frac{\ln(x)}{2(1+x^2)}\Big|_{\omega_1}^{\omega_2} + \frac{1}{2}\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right] =$$

$$\lim_{\substack{\omega_1\to 0\\ \omega_2\to+\infty}} \left[-\frac{\ln(x)}{2(1+x^2)}\Big|_{\omega_1}^{\omega_2} - \frac{1}{4}\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{d\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right] = \lim_{\substack{\omega_1\to 0\\ \omega_2\to+\infty}} \left[-\frac{\ln(x)}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\Big|_{\omega_1}^{\omega_2} =$$

$$\lim_{\omega_1\to 0}\left[-\frac{\ln(\omega_1)}{2(1+\omega_1^2)} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\omega_1^2}{\omega_1^2}\right)\right] + \lim_{\omega_2\to+\infty}\left[-\frac{\ln(\omega_2)}{2(1+\omega_2^2)} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\omega_2^2}{\omega_2^2}\right)\right] =$$

$$\lim_{\omega_1\to 0}\left[-\frac{\ln(\omega_1)}{2(1+\omega_1^2)} + \frac{1}{2}\ln(\omega_1) - \frac{1}{4}\ln(1+\omega_1^2)\right] + 0 =$$

$$\lim_{\omega_1\to 0}\left[-\frac{\ln(\omega_1)\omega_1^2}{2(1+\omega_1^2)} - \frac{1}{4}\ln(1+\omega_1^2)\right] = 0$$

2358. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$

Единственная особенность интеграла в $+\infty$. Поскольку

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^4-x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4-x^2+1} = 1,$$

то $\frac{x^2}{x^4-x^2+1} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Так как $p = 2 > 1$, исходный интеграл сходится.

2363. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{x^n+1}$, $n \geqslant 0$

$$m < 0.$$

Тогда у интеграла две особенности: 0 и $+\infty$. Поскольку $\frac{1}{1+x^n}$ ограничена и монотонна в окрестности нуля, то по признаку Абеля для сходимости интеграла в окрестности 0 требуется, чтобы функция $\frac{1}{x^{-m}}$ была интегрируема. То есть $-m < 1$.
Рассмотрим особенность $+\infty$. Поскольку $\frac{x^m dx}{x^n+1} = O\left(\frac{1}{x^{-m+n}}\right)$, то интеграл сходится в том и только в том случае, когда $-m + n > 1$.
Тогда при $m \in (-1; 0)$, $n > 1 + m$ интеграл сходится.

$$m \geqslant 0.$$

Тогда у интеграла одна особенность в $+\infty$. Поскольку $\frac{x^m dx}{x^n+1} = O\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$, то интеграл сходится в том и только в том случае, когда $n - m > 1$.
Тогда при $m \geqslant 0$, $n > 1 + m$ интеграл сходится.

Окончательно, при $m > -1$, $n > 1 + m$ интеграл сходится.

2368. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x}$

Theorem (Признак Дирихле)

Пусть

- $f \in C([a;+\infty))$ *и первообразная* $f(x)$ *ограничена на* $[a;+\infty)$;
- $g \in C^1([a;+\infty))$, $g(x) > 0$, $g'(x) \leqslant 0$ $\big(g(x) < 0,\ g'(x) \geqslant 0\big)$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x} = \int\limits_0^{1} \frac{\sin^2 x dx}{x} + \frac{1}{2}\left(\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)dx}{x}\right).$$

$$\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) \text{ -- ограничена,}$$

$$\frac{1}{x} > 0, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \text{ -- расходится,} \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)dx}{x} \text{ -- сходится по признаку Дирихле.}$$

2373. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-\frac{1}{2}} \cdot \ln(\sin x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(\sin x)^{\alpha-\frac{1}{2}}} \cdot (\sin x)^{\alpha-\frac{1}{2}} \ln(\sin x) \overset{\alpha>\frac{1}{2}}{=} 0.$$

Таким образом $\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} = o(x^{\frac{3}{4}})$. Тогда исходный интеграл сходится.

2378. Исследовать на условную и абсолютную сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Единственная особенность данного интеграла в $+\infty$, так как в окрестности нуля $\frac{\sin x}{x}$ ограничена в силу 1-го замечательного предела.

Проверим на условную сходимость.

$$\int \sin x dx = -\cos x - \text{ограничена},$$

$$\frac{1}{x} > 0, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad x \in [\varepsilon; +\infty),$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Тогда в силу признака Дирихле $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится.

2378. Исследовать на условную абсолютную сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Проверим на абсолютную сходимость. Учтём, что $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$. Тогда

$$\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x} dx}_{\text{расходится, см. №2368}}.$$

$$\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) \text{ – ограничена,}$$

$$\frac{1}{x} > 0, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \text{ – расходится,} \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)dx}{x} \text{ – сходится по признаку Дирихле.}$$

Домашнее задание

2336-2347, 2358-2375, 2378, 2379, 2381.