1) Линейное пространство: определение, примеры, простейшие следствия из аксиом

Линейным пространством $L = \{a,b,c,\ldots\}$ называется множество, относительно элементов которого определены операции сложения и умножения на число, причем <u>результаты этих операций принадлежат этому же множеству</u> (говорят, что L замкнуто относительно операций сложения и умножения на число):

$$a+b \in L; \quad \lambda \cdot a \in L, \forall \lambda \in \Re.$$

(Элементы линейных пространств также будем называть векторами)

Для $\forall a,b,c \in L$ и $\forall \alpha,\beta \in \Re$ эти операции удовлетворяют следующим условиям:

1. $a + b = b + a$ *(коммутативность сложения).*
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(ассоциативность сложения).*
3. $\exists 0 \in L \Rightarrow a+0=a$ *(существование нулевого элемента)*.
4. $\exists \bar{a} \in L \Rightarrow a+\bar{a}=0$ *(существование противоположного элемента)*.
5. $1 \cdot a = a$.
6. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$.
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ *(дистрибутивность).*
8. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ *(дистрибутивность).*

Перечисленные свойства, обычно, называют аксиомами. Имеют место теоремы:

Теорема 1. Нулевой элемент – единственен.
{От противного: $0_1, 0_2$; $0_1+0_2=0_1$ и $0_2+0_1=0_2$ (акс. (3)). Из акс.(1) следует: $0_1=0_2$}

Теорема 2. $\forall a \in L$ противоположный элемент – единственен.
{Пусть для
$a \in L\, \exists \bar{a}_1$ и $\bar{a}_2 \Rightarrow \bar{a}_1 + (a+\bar{a}_2) = \bar{a}_1 + 0 = \bar{a}_1; (\bar{a}_1 + a) + \bar{a}_2 = 0 + \bar{a}_2 = \bar{a}_2 \Rightarrow \bar{a}_1 = \bar{a}_2$
}

Теорема 3. $0 \cdot a = 0$.
{
$$0a = 0a+0 = 0a+a+\bar{a} = (0+1)a+\bar{a} = a+\bar{a} = 0$$
}

Теорема 4. $\bar{a} = (-1)a = -a$.
{ $a+(-1)a = (1-1)a = 0a = 0$ }

2) Линейная зависимость и линейная независимость элементов линейного пространства *(разд.8.2.1)*. Свойства *(разд. 8.2.2)*.

Определение 1. Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot a_k;\ \lambda_k \in \Re, a_k \in L$ называется *линейной комбинацией* элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с коэффициентами λ_k.

Определение 2. Система элементов линейного пространства $\{a_1,\ldots,a_n\}$ называется *линейно зависимой*, если найдутся коэффициенты $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ не все равные нулю, линейная комбинация с которыми равна нулю, т.е.

$$\exists \underset{\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2 \neq 0}{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k = 0.$$

Определение 3. Система элементов линейного пространства $\{a_1,\ldots,a_n\}$ называется *линейно независимой*, если ее линейная комбинация равна нулю <u>только</u> с нулевыми коэффициентами:

$$\forall \underset{\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2 \neq 0}{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \neq 0.$$

Имеют место несколько простых утверждений.

Теорема 1 (<u>необходимое и достаточное условие линейной независимости</u>). $a_1,\ldots,a_n$ – линейно зависима $\Leftrightarrow$ когда хотя бы один из элементов является линейной комбинацией остальных.

{1.(необходимость: $\{a_k\}$ – л.з.): $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k a_k = 0$. Пусть, для определенности, $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow a_1 = \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\frac{-\lambda_k}{\lambda_1}\right) \cdot a_k \Rightarrow$ a_1 – линейная комбинация остальных.
2.(достаточность: a_m – л.к.):

$$a_m = \sum_{k=1, k\neq m}^{n} \mu_k a_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_k = 0,\ \mu_m = -1 \neq 0 \Rightarrow л.з.$$
}

Теорема 2. Если один из элементов системы равен нулю, то вся система линейно зависима.
{
$$0a_1 + 0a_2 + \ldots + 0a_{n-1} + 1 \cdot 0 = 0;\ 1 \neq 0$$
}

Теорема 3. Если подсистема линейно зависима, то и вся система линейно зависима.
{
$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m + 0a_{m+1} + \ldots + 0a_n = 0; \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_m^2 \neq 0$$
}

<u>Примеры</u>.
1)
$$\bar{a}, \bar{b} - л.з. \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} = \lambda \bar{b} \vee \bar{b} = \mu \bar{a}.$$
2)
$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} - л.з. \Leftrightarrow когда\ они\ компланерны.$$
3) $\{f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2\}$ – *линейно независимы*.

Свойства ЛЗ и ЛНЗ векторов

1. Если в систему векторов входит нулевой вектор то это система лЗ
2. Если в системе векторов есть два равных вектора то она ЛЗ
3. Если в системе векторов имеется два пропорциональных(коллинеарных) ($V_i=nV_j$) вектора то она ЛЗ
4. Система из k>1 векторов ЛЗ <=>когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация остальных
5. Любые векторы, входящие в линейно независимую систему, образуют линейно независимую подсистему
6. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, ЛЗ
7. Если система векторов $v_1,v_2,\ldots,v_k$ – линейно независима, а после присоединения к ней вектора v – оказывается линейно зависимой, то вектор v можно разложить по векторам $v_1,v_2,\ldots,v_k$. и притом единственным образом., т.е коофициенты разложения находятся однозначно.
8. Пусть каждый вектор системы $u_1,u_2,\ldots,u_l$ может быть разложен по векторам системы $v_1,v_2,\ldots,v_k$ то есть мы можем линейно выразить $u_1,u_2,\ldots,u_l$ систему векторов через другую. Тогда, если L >K, то $u_1,u_2,\ldots,u_l$ ЛЗ.

3) Размерность и базис линейного пространства *(разд.8.3.1)*. Примеры *(разд.8.3.2)*.

Определения размерности и базиса

Линейное пространство V называется ***n -мерным,*** если в нем существует система из n линейно независимых векторов, а любая система из большего количества векторов линейно зависима. Число n называется ***размерностью (числом измерений)*** линейного пространства V и обозначается dimV . Другими словами, размерность пространства - это максимальное число линейно независимых векторов этого пространства. Если такое число существует, то пространство называется ***конечномерным.*** Если же для любого натурального числа n в пространстве V найдется система, состоящая из n линейно независимых векторов, то такое пространство называют ***бесконечномерным*** (записывают: dimV =∞). Далее, если не оговорено противное, будут рассматриваться конечномерные пространства.

Базисом n -мерного линейного пространства называется упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов ***(базисных векторов).***

Определение 1. *Базисом* линейного пространства L называется система элементов принадлежащих L, удовлетворяющая двум условиям:

1) система $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – <u>линейно независима</u>.
2) Любой элемент L линейно выражается через базисные (т.е. является линейной комбинацией элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$):

$$\forall a \in L\ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Re \Rightarrow a = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

<u>Примеры</u>. Базис на плоскости (V_2 – 2 неколлинеарных вектора), в пространстве (V_3 – 3 некомпланарных вектора), в пространстве R^n (канонический базис), в пространстве многочленов степени $\leq n$ - $(1,x,x^2,\ldots,x^n)$.

Теорема 1. Коэффициенты разложения по базису – единственны.
Пусть
$$a = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) e_k = 0 \Rightarrow \beta_k = \alpha_k\ \forall k$$

Определение 2. *Координатами* элемента линейного пространства в некотором базисе называются коэффициенты разложения по этому базису.
(В силу **т**.1 это определение – корректно)

Будем писать: $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.
В дальнейшем, по умолчанию, будем считать вектор вектором – столбцом, в противном случае будем писать строку координат в явном виде: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, либо как a^T.

Теорема 2. При сложении векторов их координаты складываются: $a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$.
{ $a+b = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k + \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) e_k$ }

Теорема 3. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число:
$\lambda a = (\lambda\alpha_1,\ldots,\lambda\alpha_n)$. {
$$\lambda a = \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \alpha_k) e_k$$
}

Определение 3. *Размерностью* линейного пространства L (обозначается $\dim L$) называется максимальное число линейно независимых элементов этого пространства.
Если такого числа не существует – пространство называется *бесконечномерным*.

Теорема 4. Размерность линейного пространства равна числу базисных векторов.
{Пусть $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ – базис пространства L $\Rightarrow \dim L \geq n$. Рассмотрим (n + 1) произвольных элементов $L: a_1, \ldots, a_{n+1}$. Разложим каждый из них по базису $\{e\}$ и запишем столбцы полученных коэффициентов разложения в виде матрицы $A_{n,n+1}$. Т.к. rang$A_{n,n+1} \leq n$, то, хотя бы один из столбцов будет линейной комбинацией остальных $\Rightarrow$ элементы a_l – линейно зависимы $\Rightarrow$
$\dim L = n$}
Отсюда, в частности, следует, что все базисы одного пространства состоят из одинакового числа векторов.
<u>Примеры</u>. V_2, V_3, R^n.

4) Теорема о разложении элементов линейного пространства по базису *(с.377)*.

Теорема 8.1 (о разложении вектора по базису). Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - базис п -мерного линейного пространства V, то любой вектор V є V может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов:
V =У$_1$e$_1$+У$_2$e$_2$+.:+У$_л$e$_п$ *(8.4)*
и притом единственным образом, т.е. коэффициенты v^,v$_2$,...,v$_n$ определяются однозначно. *Другими словами*, любой вектор пространства может быть разложен по базису и притом единственным образом.
Действительно, размерность пространства *V* равна ***n***. Система векторов *e$_1$, e$_2$* линейно независима (это базис). После присоединения к базису любого вектора ***V***, получаем линейно зависимую систему ***e$_1$, e$_2$***, **V** (так как это система состоит из *(n* **+1)** векторов *n* -мерного пространства). По свойству 7 линейно зависимых и линейно независимых векторов (см. разд.8.2.2) получаем заключение теоремы.
Следствие 1. Если e$_1$, e$_2$,...,e„ — базис пространства V, то
= Lin(e$_1$,e$_2$,...,e$_n$**)**, *т.е.* линейное пространство является линейной оболочкой базисных векторов.
В самом деле, для доказательства равенства *V* = Lin*(e$_1$,e$_2$,—,e„)* двух
множеств достаточно показать, что включения *V* с Lin*(e$_1$,e$_2$,...,e$_n$)* и Linn*(e$_1$,e$_2$,...,e$_n$)аУ* выполняются одновременно. Действительно, с одной стороны, любая линейная комбинация векторов линейного пространства принадлежит самому линейному пространству, т.е. Lin*(e$_1$,e$_2$,...,e$_n$)а V. С* другой стороны, любой вектор пространства по теореме 8.1 можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов, т.е.
с Lin*(e$_x$,e$_2$,...,e$_n$)*. Отсюда следует равенство рассматриваемых множеств.
Следствие 2. Если e$_l$, e$_2$,..., e$_n$ —линейно независимая система векторов линейного пространства V и любой вектор *V* **Є У** может быть представлен в виде линейной комбинации *(8.4): V* = **v1e1** + *v$_2$*e$_2$ **+...+** ***v$_n$e$_n$***, то пространство V имеет размерность п, а система e$_1$,e$_2$,..., e$_n$ является его базисом.
В самом деле, в пространстве *V* имеется система *n* линейно независимых векторов, а любая система **и$_,$, и$_2$,..., и*** из большего количества векторов ***(к > n)*** линейно зависима (по свойству 8 в разд.8.2.2), поскольку каждый вектор из этой системы линейно выражается через векторы *e$_1$, e$_2$,...,e$_л$*. Значит, dim V =*n* и *e, ,e$_2$* — базис *V*.

6) Теорема о дополнении системы векторов до базиса *(с.377-378)*.

Всякую ЛНЗ систему K векторов n-мерного линейного пространства (1<k<n) можно дополнить до базиса пространства.

В самом деле, пусть *e$_l$, e$_2$,...,e$_к$* - линейно независимая система векторов *n* -мерного пространства *V* (1 *<к <n)*. Рассмотрим линейную оболочку этих векторов: L$_к$ = Lin*[e$_l$,e$_2$,...,e$_к$)*. Любой вектор V є *Ь$_к$* образует с векторами e,, *e$_2$...e$_к$* линейно зависимую систему *e$_l$, e$_г$,..e$_к$*, V, так как
вектор V линейно выражается через остальные. Поскольку в и-мерном пространстве существует *n* линейно независимых векторов, то ***Ь$_к$ ф V*** и существует вектор *e$_{к+1}$* є *V*, который не принадлежит *Ь$_к$*. Дополняя этим вектором линейно независимую систему *e$_1$,e$_2$,...,e$_к$*, получаем систему векторов e,, *e* 2 *e к*, *e$_{к+]}$*, которая также линейно независимая. Действительно, если бы она оказалась линейно зависимой, то из п.1 замечаний 8.3 следовало, что *e$_{к+1}$* є Lin*(e$_и$e$_2$,...,e$_к$)= Ь$_к$*, а это противо-речит условию *e$_{к+}$i* й *Ь$_к$*. Итак, система векторов *e$_1$, e$_2$,...,e$_к$, e$_{к+]}$* линейно независимая. Значит, первоначальную систему векторов удалось дополнить одним вектором без нарушения линейной независимости. Продолжаем аналогично. Рассмотрим линейную оболочку этих векторов: *^{1}к$_+$\ =Lin{e$_x$,^{e}$_2$,-..,e$_к$,e$_{к+х}$)*. Если *Ь$_{к+1}$=У*, то *e$_x$,e$_2$,...,e$_к$,e$_{к+х}$* - базис и теорема доказана. Если L$_{к+1}$, то дополняем систему *e$_1$, e$_2$,...,e$_к$, e$_{к+1}$* вектором *e$_{к+2}$* г *Ь$_{к+1}$* и т.д. Процесс дополнения обязательно закончится, так как пространство *V* конечномерное. В результате получим равенство
= *L$_n$* = Lin*(e$_]$,...,e$_к$,...,e,,)*, из которого следует, что *e$_1$,...,e$_к$,...,e$_n$* - базис пространства ***V***. Теорема доказана.

8) Связь координат вектора в разных базисах *(разд.8.4.3)*.

$$\underset{(e)}{v} = S \underset{(e')}{v'} \quad \text{или, что то же самое,} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}. \qquad (8.11)$$

Формула (8.11) устанавливает связь координат вектора в разных базисах: *координатный столбец вектора в старом базисе получается в результате умножения матрицы перехода на координатный столбец вектора в новом базисе.*

5) Линейная оболочка конечной системы векторов. Линейная оболочка подмножества линейного пространства. Свойства *(см. разд.8.2.3*

Определение 1. Подпространством линейного пространства *L* называется такое подмножество элементов *L*, которое само является линейным пространством.
Т.е. подпространство замкнуто относительно операций сложения и умножения на число. (все аксиомы выполняются автоматически).
<u>Примеры</u>. $V_2 \subset V_3$, $\{P_2(x)\} \subset \{P_3(x)\}$, множество решений однородной СЛАУ.
Определение 2. *Линейной оболочкой* системы элементов $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, принадлежащих *L*, называется совокупность **<u>всех</u>** линейных комбинаций этих элементов: $S(a_1, \ldots, a_m) = \{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k\}$.
Непосредственно из определения следует, что любая линейная оболочка является линейным пространством, а любое линейное пространство – линейной оболочкой натянутой на какой-либо базис этого пространства.
Теорема 1 (основное свойство линейных оболочек). Любой вектор системы $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, линейно зависящий от остальных, можно исключить без изменения линейной оболочки.

{Пусть, для определенности, $a_m = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k a_k$, а $b \in S(a_1, \ldots, a_m)$ – произвольный. Тогда $b = \sum_{k=1}^{m} \beta_k a_k = \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k a_k + \beta_m \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k a_k = \sum_{k=1}^{m-1} (\beta_k + \beta_m \lambda_m) a_k$, т.е. $b \in S(a_1, \ldots, a_{m-1})$
Следствие. Размерность линейной оболочки равна рангу соответствующей системы элементов:
$$\dim S(a_1, \ldots, a_m) = rang(a_1, \ldots, a_m).$$
Линейная оболочка $\mathcal{L}(X)$ подмножества X линейного пространства L — пересечение всех подпространств L, содержащих X.
Линейная оболочка является подпространством L.
Линейная оболочка также называется **подпространством, порожденным** X. Говорят также, что линейная оболочка $\mathcal{L}(X)$ **натянута на** множество X
Линейная оболочка $\mathcal{L}(X)$ состоит из всевозможных линейных комбинаций различных конечных подсистем элементов из X. В частности, если X — конечное множество, то $\mathcal{L}(X)$ состоит из всех линейных комбинаций элементов X.
Если X — линейно независимое множество, то оно является базисом $\mathcal{L}(X)$ и тем самым определяет его размерность.
СВОЙСТВА
Линейная комбинация векторов $v_1, v_2 \ldots v_k$ называется ***неотрицательной,*** если все ее коэффициенты - неотрицательные числа. Множество неотрицательных комбинаций векторов $v_1, v_2 \ldots v_k$ называется их ***конической оболочкой*** и обозначается:
$$Con(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \{ v : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k;\ \alpha_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, k \}$$
Линейная комбинация векторов $v_1, v_2 \ldots v_k$ называется ***выпуклой,*** если все ее коэффициенты - неотрицательные числа, а их сумма равна единице. Множество выпуклых комбинаций векторов $v_1, v_2 \ldots v_k$ называется их ***выпуклой оболочкой*** и обозначается:
$$Conv(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \left\{ v : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k;\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, k \right\}$$
Аналогично определению образующих линейной оболочки, векторы $v_1, v_2 \ldots v_k$ называют ***образующими*** множеств ,
$Aff(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, $Con(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, $Conv(v_1, v_2, \ldots, v_k)$
соответственно.
Понятия линейной, аффинной, конической и выпуклой оболочек, определенные для конечной системы векторов, можно обобщить.
Линейной оболочкой непустого подмножества *M* линейного пространства $V\ (M \subset V, M \ne \varnothing)$ называется множество всевозможных линейных комбинаций векторов из *M* :
$$Lin(M) = \left\{ v : v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i;\ k \in N,\ v_i \in M,\ \alpha_i \in R,\ i = 1, \ldots, k \right\}$$
Аналогично определяются аффинная, коническая ***и*** выпуклая оболочки непустого подмножества М:
$$Aff(M) = \left\{ v : v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i;\ k \in N,\ v_i \in M,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \in R,\ i = 1, \ldots, k \right\};$$
$$Con(M) = \left\{ v : v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i;\ k \in N,\ v_i \in M,\ \alpha_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, k \right\};$$
$$Conv(M) = \left\{ v : v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i;\ k \in N,\ v_i \in M,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, k \right\}.$$
Если множество M пустое ($M = \varnothing$), то по определению считается, что
$$Lin(M) = Aff(M) = Con(M) = Conv(M) = \{ o \}.$$
Из определений следуют включения:
$$M \subset Conv(M) \subset Aff(M) \subset Lin(M), \quad M \subset Conv(M) \subset Con(M) \subset Lin(M);$$
и равенство $Conv(M) = Con(M) \cap Aff(M)$.

7) Замена базиса. Матрица перехода от базиса к базису. Свойства матрицы перехода *(разд.8.4.3,8.4.4)*.

<u>Переход к новому базису</u>.
Пусть $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ 2 базиса в линейном пространстве *L*. Первый будем считать исходным, а второй – новым. Все векторы нового базиса разложим по векторам исходного:
$$\begin{cases} f_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \ldots + a_{n1} e_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n = a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \ldots + a_{nn} e_n \end{cases}$$
или в матричной форме записи
$(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot P$,
где $P = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – *матрица перехода* от базиса {*e*} к базису {*f* }, столбцами которой являются координаты векторов f_k в базисе { *e* }.
Так как, по условию, столбцы матрицы *P* линейно независимы, ее определитель не равен нулю и она имеет обратную. Следовательно, переход от базиса {*f*} к базису {*e*} можно осуществлять по формуле
$(e_1, \ldots, e_n) = (f_1, \ldots, f_n) \cdot P^{-1}$.
Пусть *a* – произвольный элемент из *L*. В базисе {*e*} он равен: $a = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, или, в матричной форме:
$a = (e_1, \ldots, e_n) \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T_{\{e\}}$. Соответственно, в базисе {*f*} имеет место равенство
$a = (f_1, \ldots, f_n) \cdot (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T_{\{f\}}$. Отсюда:
$(f_1, \ldots, f_n) \cdot (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T_{\{f\}} = (e_1, \ldots, e_n) \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T_{\{e\}}$.
Подставляя $(f_1, \ldots, f_n)$ из формулы перехода, получим:
$(e_1, \ldots, e_n) \cdot P \cdot (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T_{\{f\}} =$
$(e_1, \ldots, e_n) \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T_{\{e\}}$. Т.к. *a* произвольный вектор *L*, имеем:
$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T = P \cdot (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T$ – формула пересчета <u>новых координат в старые</u> и
$(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T = P^{-1} \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$ – формула пересчета <u>старых координат в новые</u>.
(При выводе было использовано утверждение:
если $(a,b) = (a,c)\ \forall a$, *то* $b = c$)
Таким образом, для вычисления координат в новом базисе приходится решать СЛАУ относительно этих координат: $P \cdot (x)_{\{f\}} = (x)_{\{e\}}$.

Свойства матрицы перехода от одного базиса к другому
Пусть имеются три базиса (e), *(f)*, *(g)* пространства V и известны матрицы перехода: $\underset{(e)\to(f)}{S}$ от базиса (e) к базису *(f)*; $\underset{(f)\to(g)}{S}$ от *(e)* к *(g)*: $\underset{(e)\to(g)}{S}$ Тогда:
$$\underset{(e)\to(g)}{S} = \underset{(e)\to(f)}{S} \cdot \underset{(f)\to(g)}{S}$$
Действительно, запишем связь (8.10) для данных базисов:
$$(f) = (e) \cdot \underset{(e)\to(f)}{S}; \quad (g) = (f) \cdot \underset{(f)\to(g)}{S}; \quad (g) = (e) \cdot \underset{(e)\to(g)}{S}.$$
Подставляя первое выражение во второе равенство, получаем $(g) = (e) \cdot \underset{(e)\to(f)}{S} \cdot \underset{(f)\to(g)}{S}$.
Сравнивая с третьим равенством, приходим к равенству.

2. *Если S – матрица перехода от базиса (e) к базису (f), то матрица S обратима и обратная матрица S^{-1} является матрицей перехода от базиса (f) к базису (e). Координаты вектора v в базисах (e) и (f) связаны формулами:*
$$\underset{(e)}{v} = S \underset{(f)}{v}, \qquad \underset{(f)}{v} = S^{-1} \underset{(e)}{v}.$$
В самом деле, пусть T – матрица перехода от базиса (f) к базису (e). Учитывая, что матрица перехода от базиса (e) к базису (e) – единичная, применяем свойство 1 к трем базисам $(e),(f),(e)$: $E = ST$. Для трех базисов $(f),(e),(f)$ аналогично получаем: $E = TS$. Следовательно, $T = S^{-1}$ (см. разд. 4.1).
3. *Всякая обратимая квадратная матрица n-го порядка может служить матрицей перехода от одного базиса n-мерного линейного пространства к другому базису.*

9 ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Говорят, что между элементами двух множеств *u* и *V* установлено *взаимно однозначное соответствие*, если указано правило, которое каждому элементу $u \in U$ сопоставляет один и только один элемент $v \in V$, причем каждый элемент $v \in V$ оказывается сопоставленным одному и только одному элементу $u \in U$. Взаимно однозначное соответствие будем обозначать $U \Leftrightarrow V$, а соответствующие элементы: $u \leftrightarrow v$.

Два линейных пространства U и *V* называются *изоморфными,* если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что выполняются условия:

1)сумме векторов пространства U соответствует сумма соответствующих векторов пространства *V :*

$$\left.\begin{matrix} u_1 \leftrightarrow v_1 \\ u_2 \leftrightarrow v_2 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad (u_1+u_2) \leftrightarrow (v_1+v_2);$$

2)произведению числа на вектор пространства U соответствует произведение того же числа на соответствующий вектор пространства *V :*

$$u \leftrightarrow v \;\Rightarrow\; \lambda u \leftrightarrow \lambda v$$

Другими словами, *изоморфизм* - это взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции.

12. Теорема о размерности суммы подпространств (с.397).

Теорема 8.4 (о размерности суммы подпространств). *Если L_1 и L_2 подпространства конечномерного линейного пространства V, то размерность суммы подпространств равна сумме их размерностей без размерности их пересечения* (**формула Грассмана**):

$$\dim(L_1+L_2)=\dim L_1+\dim L_2-\dim(L_1\cap L_2). \qquad (8.13)$$

В самом деле, пусть $(e)=(e_1,\ldots,e_s)$ – базис пересечения $L_1\cap L_2$ ($\dim(L_1\cap L_2)=s$). Дополним его упорядоченным набором $(e')=(e'_{s+1},\ldots,e'_{m_1})$ векторов до базиса $(e),(e')$ подпространства L_1 ($\dim L_1=m_1$) и упорядоченным набором $(e'')=(e''_{s+1},\ldots,e''_{m_2})$ векторов до базиса $(e),(e'')$ подпространства L_2 ($\dim L_2=m_2$). Такое дополнение возможно по теореме 8.2. Из указанных трех наборов векторов составим упорядоченный набор $(e),(e'),(e'')$ векторов. Покажем, что эти векторы являются образующими пространства L_1+L_2. Действительно, любой вектор v этого пространства представляется в виде линейной комбинации векторов из упорядоченного набора $(e),(e'),(e'')$:

$$v=v_1+v_2=\underbrace{\sum_{i=1}^{s}\alpha_i e_i+\sum_{i=s+1}^{m_1}\alpha'_i e'_i}_{v_1}+\underbrace{\sum_{i=1}^{s}\beta_i e_i+\sum_{i=s+1}^{m_2}\beta''_i e''_i}_{v_2}.$$

Следовательно, $L_1+L_2=Lin((e),(e'),(e''))$. Докажем, что образующие $(e),(e'),(e'')$ линейно независимы и поэтому они являются базисом пространства L_1+L_2. Действительно, составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее нулевому вектору:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{s}\alpha_i e_i+\sum_{i=s+1}^{m_1}\beta_i e'_i}_{w_1}+\underbrace{\sum_{i=s+1}^{m_2}\gamma_i e''_i}_{w_2}=o. \qquad (8.14)$$

Первые две суммы обозначим w_1 – это некоторый вектор из L_1, последнюю сумму обозначим w_2 – это некоторый вектор из L_2. Равенство (8.14): $w_1+w_2=o$ означает, что вектор $w_2=-w_1$ принадлежит также и пространству L_1. Значит, $w_2\in L_1\cap L_2$. Раскладывая этот вектор по базису (e), находим $w_2=\sum_{i=1}^{s}\delta_i e_i$. Учитывая разложение этого вектора в (8.14), получаем

$$w_2=\sum_{i=1}^{s}\delta_i e_i=\sum_{i=s+1}^{m_2}\gamma_i e''_i \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{s}\delta_i e_i-\sum_{i=s+1}^{m_2}\gamma_i e''_i=o.$$

Последнее равенство можно рассматривать, как разложение нулевого вектора по базису $(e),(e'')$ подпространства L_2. Все коэффициенты такого разложения нулевые: $\delta_1=\ldots=\delta_s=0$ и $\gamma_{s+1}=\ldots=\gamma_{m_2}=0$. Подставляя $\gamma_i=0$ в (8.14), получаем $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i e_i+\sum_{i=s+1}^{m_1}\beta_i e'_i=o$. Это возможно только в тривиальном случае $\alpha_1=\ldots=\alpha_s=0$ и $\beta_{s+1}=\ldots=\beta_{m_1}=0$, так как система векторов $(e),(e')$ линейно независима (это базис подпространства L_1). Таким образом, равенство (8.14) выполняется только в тривиальном случае, когда все коэффициенты равны нулю одновременно. Следовательно, совокупность векторов $(e),(e'),(e'')$ линейно независима, т.е. является базисом пространства L_1+L_2. Подсчитаем размерность суммы подпространств:

$$\dim(L_1+L_2)=s+(m_1-s)+(m_2-s)=m_1+m_2-s=\dim L_1+\dim L_2-\dim(L_1\cap L_2),$$

что и требовалось доказать.

10)Подпространства линейного пространства*(разд.8.6.1).* Примеры *(разд.8.6.2).*

Непустое подмножество L линейного пространства V называется ***линейным подпространством*** пространства V, если

1) $u+v\in L \quad \forall u,v\in L$ (подпространство *замкнуто по отношению к операции сложения*);

2) $\lambda v\in L \quad \forall v\in L$ и любого числа λ (подпространство *замкнуто по отношению к операции умножения вектора на число*).

Для указания линейного подпространства будем использовать обозначение $L\triangleleft V$, а слово "линейное" опускать для краткости.

Замечания 8.7.

1. Условия 1, 2 в определении можно заменить одним условием: $\lambda u+\mu v\in L \quad \forall u,v\in L$ и любых чисел λ и μ. Разумеется, что здесь и в определении речь идет о произвольных числах из того числового поля, над которым определено пространство V (см. разд.8.1.1).

2. В любом линейном пространстве V имеются два линейных подпространства:

а) само пространство V, т.е. $V\triangleleft V$;

б) нулевое подпространство $\{o\}$, состоящее из одного нулевого вектора пространства V, т.е. $\{o\}\triangleleft V$. Эти подпространства называются ***несобственными***, а все остальные – ***собственными***.

3. Любое подпространство L линейного пространства V является его подмножеством: $L\triangleleft V \Rightarrow L\subset V$, но не всякое подмножество $M\subset V$ является линейным подпространством, так как оно может оказаться незамкнутым по отношению к линейным операциям.

4. Подпространство L линейного пространства V само является линейным пространством с теми же операциями сложения векторов и умножения вектора на число, что и в пространстве V, поскольку для них выполняются аксиомы 1–8 (см. разд.8.1). Поэтому можно говорить о размерности подпространства, его базисе и т.п.

5. *Размерность любого подпространства L линейного пространства V не превосходит размерности пространства V: $\dim L\le\dim V$. Если же размерность подпространства $L\triangleleft V$ равна размерности конечномерного пространства V ($\dim L=\dim V$), то подпространство совпадает с самим пространством: $L=V$.*

Это следует из теоремы 8.2 (о дополнении системы векторов до базиса). Действительно, взяв базис подпространства L, будем дополнять его до базиса пространства V. Если это возможно, то $\dim L<\dim V$. Если нельзя дополнить, т.е. базис подпространства L является базисом пространства V, то $\dim L=\dim V$. Учитывая, что пространство есть линейная оболочка базиса (см. следствие 1 теоремы 8.1), получаем $L=V$.

6. *Для любого подмножества M линейного пространства V линейная оболочка $Lin(M)$ является подпространством V и $M\subset Lin(M)\triangleleft V$.*

В самом деле, если $M=\varnothing$ (пустое множество), то по определению $Lin(M)=\{o\}$, т.е. является нулевым подпространством и $\varnothing\subset\{o\}\triangleleft V$. Пусть $M\ne\varnothing$. Нужно доказать, что множество $Lin(M)$ замкнуто по отношению к операциям сложения его элементов и умножения его элементов на число. Напомним, что элементами линейной оболочки $Lin(M)$ служат линейные комбинации векторов из M. Так как линейная комбинация линейных комбинаций векторов является их линейной комбинацией, то, учитывая п.1, делаем вывод, что $Lin(M)$ является подпространством V, т.е. $Lin(M)\triangleleft V$. Включение $M\subset Lin(M)$ – очевидное, так как любой вектор $v\in M$ можно представить как линейную комбинацию $1\cdot v$, т.е. как элемент множества $Lin(M)$.

7. *Линейная оболочка $Lin(L)$ подпространства $L\triangleleft V$ совпадает с подпространством L, т.е. $Lin(L)=L$.*

Действительно, так как линейное подпространство L содержит всевозможные линейные комбинации своих векторов, то $Lin(L)\subset L$. Противоположное включение ($L\subset Lin(L)$) следует из п.6. Значит, $Lin(L)=L$.

Пример:

1. Пространство $\{o\}$, состоящее из одного нулевого вектора пространства V, является подпространством, т.е. $\{o\}\triangleleft V$.

---

11)Алгебраическаясумма подпространств*(разд.8.6.3).* Прямая сумма *(разд.8.6.4).*

Прямая сумма подпространств

Пусть L_1 и L_2 – подпространства линейного пространства V.

Пересечением подпространств L_1 и L_2 называется множество $L_1\cap L_2$ векторов, каждый из которых принадлежит L_1 и L_2 одновременно, т.е. пересечение подпространств определяется как обычное пересечение двух множеств.

Алгебраической суммой подпространств L_1 и L_2 называется множество векторов вида v_1+v_2, где $v_1\in L_1$, $v_2\in L_2$. Алгебраическая сумма (короче просто сумма) подпространств обозначается L_1+L_2:

$$L_1+L_2=\{v\in V: v=v_1+v_2, v_1\in L_1, v_2\in L_2\}.$$

Представление вектора $v\in L_1+L_2$ в виде $v=v_1+v_2$, где $v_1\in L_1$, $v_2\in L_2$, называется ***разложением вектора v по подпространствам*** L_1 и L_2.

Прямая сумма подпространств

Алгебраическая сумма подпространств L_1 и L_2 линейного пространства V называется ***прямой суммой***, если пересечение подпространств состоит из одного нулевого вектора. Прямая сумма подпространств обозначается $L_1\oplus L_2$ и обладает следующим свойством: *если $V=L_1\oplus L_2$, то для каждого вектора $v\in V$ существует единственное представление в виде $v=v_1+v_2$, где $v_1\in L_1$, $v_2\in L_2$.*

Действительно, если предположить противное, а именно существование двух разных разложений: $v=v_1+v_2=w_1+w_2$, где $v_1,w_1\in L_1$, $v_2,w_2\in L_2$, $v_1\ne w_1$, то получим противоречие: из равенства $v_1-w_1=w_2-v_2$ следует, что ненулевой вектор $v_1-w_1\ne o$ принадлежит обоим подпространствам L_1 и L_2 одновременно, значит, принадлежит их пересечению, а по определению их пересечение состоит из одного нулевого вектора.

Признаки прямых сумм подпространств

Сумма $V=L_1+L_2$ является прямой суммой, если:

– существует вектор $v\in V$, который однозначно представляется в виде $v=v_1+v_2$, где $v_1\in L_1$, $v_2\in L_2$;

– базис пространства V является объединением базисов подпространств L_1 и L_2;

– справедливо равенство $\dim V=\dim L_1+\dim L_2$.

13) Евклидово пространство: определение, примеры, следствия из аксиом. *(8.8.1,8.8.2)*

Вещественное линейное пространство ***E*** называется ***евклидовым,*** если каждой паре элементов ***u,*** у этого пространства поставлено в соответствие действительное число (и, у), называемое ***скалярным произведением***, причем это соответствие удовлетворяет следующим условиям:

$$\textbf{1. } (u,v)=(v,u) \quad \forall u,v\in E;$$

$$\textbf{2. } (u+v,w)=(u,w)+(v,w) \quad \forall u,v,w\in E;$$

$$\textbf{3. } (\lambda\cdot u,v)=\lambda\cdot(u,v) \quad \forall u,v\in E,\ \forall\lambda\in R;$$

$$\textbf{4. } (v,v)>0 \quad \forall v\ne o \text{ и } (v,v)=0 \;\Rightarrow\; v=o.$$

В скалярном произведении (u, v) вектор ***u*** - первый, а вектор V - второй сомножители. Скалярное произведение (u, v) вектора v на себя называется ***скалярным квадратом.*** Условия 1-4 называются ***аксиомами скалярного произведения.*** Аксиома 1 определяет ***симметричность*** скалярного произведения, аксиомы 2 и 3 - ***аддитивность*** и ***однородность по первому сомножителю,*** аксиома 4 - ***неотрицательность скалярного квадрата***

Линейные операции над векторами евклидова пространства удовлетворяют аксиомам 1-8 линейного пространства, а операция скалярного умножения векторов удовлетворяет аксиомам 1-4 скалярного произведения. Можно сказать, что евклидово пространство - это вещественное линейное пространство со скалярным произведением. Поскольку евклидово пространство является линейным пространством, на него переносятся все понятия, определенные для линейного пространства, в частности, понятия размерности и базиса.

Простейшие следствия из аксиом скалярного произведения

1. Аксиомы 2 и 3 скалярного произведения можно заменить одним условием ***линейности скалярного произведения по первому сомножителю***:

$$(\alpha\cdot u+\beta\cdot v,w)=\alpha\cdot(u,w)+\beta\cdot(v,w) \quad \forall u,v,w\in E,\ \forall\alpha,\beta\in R.$$

2. Условие линейности скалярного произведения по первому сомножителю в силу симметричности (аксиома 1) справедливо и для второго сомножителя, т.е. скалярное произведение линейно по любому сомножителю.

3. Линейность скалярного произведения по любому сомножителю распространяется на линейные комбинации векторов:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i,\sum_{j=1}^{n}\beta_j v_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j(u_i,v_j)$$

для любых векторов u_i, v_j и действительных чисел α_i,β_j, $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$.

4. Если хотя бы один сомножитель – нулевой вектор, то скалярное произведение равно нулю:

$$(v,o)=(o,v)=0 \quad \forall v\in E.$$

Действительно, представим нулевой вектор в виде $o=0\cdot u$, где u – произвольный вектор из E. Тогда из аксиомы 3 получаем:

$$(o,v)=(0\cdot u,v)=0\cdot(u,v)=0.$$

Неравенство Коши-Буняковского:

Для любых векторов u и v евклидова пространства E выполняется ***неравенство Коши–Буняковского***:

$$(u,v)^2\le(u,u)\cdot(v,v). \qquad (8.25)$$

В самом деле, для любого действительного числа λ и любых векторов u и v справедливо неравенство:

$$0\le(u-\lambda v,u-\lambda v)=\lambda^2(v,v)-2\lambda(u,v)+(u,u).$$

Следовательно, дискриминант квадратного трехчлена (переменной λ) не больше нуля, т.е. $4\cdot(u,v)^2-4\cdot(u,u)\cdot(v,v)\le 0$. Отсюда следует (8.25). Заметим, что равенство нулю дискриминанта возможно только в случае существования такого корня λ, для которого $(u-\lambda v,u-\lambda v)=0$. Это условие равносильно коллинеарности векторов u и v: $u=\lambda\cdot v$. Напомним, что ненулевые векторы u и v называются ***коллинеарными***, если существует такое число λ, что $u=\lambda\cdot v$. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Неравенство Коши–Буняковского выполняется как равенство только для коллинеарных векторов и как строгое неравенство для неколлинеарных.

В нулевом линейном пространстве *{ o }* скалярное произведение можно определить единственным способом, положив ***(o, o)*** = 0 . Аксиомы скалярного произведения при этом выполняются.

14) Основные метрические понятия (разд.8.8.3). Неравенство Коши – Буняковского (с.427). Неравенство треугольника (с.431). Теорема Пифагора (п.6 на с.434).

нер-во коши-буняковского

Для любых векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ выполняется ***неравенство Коши–Буняковского***:

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^2 \le (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}). \tag{8.25}$$

В самом деле, для любого действительного числа λ и любых векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ справедливо неравенство:

$$0 \le (\boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{v}) = \lambda^2 (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - 2\lambda (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}).$$

Следовательно, дискриминант квадратного трехчлена (переменной λ) не больше нуля, т.е. $4 \cdot (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^2 - 4 \cdot (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \le 0$. Отсюда следует (8.25). Заметим, что равенство нулю дискриминанта возможно только в случае существования такого корня λ, для которого $(\boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{v}) = 0$. Это условие равносильно коллинеарности векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$: $\boldsymbol{u} = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$. Напомним, что ненулевые векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ называются ***коллинеарными***, если существует такое число λ, что $\boldsymbol{u} = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Неравенство Коши–Буняковского выполняется как равенство только для коллинеарных векторов и как строгое неравенство для неколлинеар-

свойства

Длиной (нормой) вектора $\boldsymbol{v}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ называется число $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$.

Имея в виду обозначение, длину $|\boldsymbol{v}|$ называют также ***модулем*** вектора. Рассматривается арифметическое значение квадратного корня, которое определено для любого вектора из-за неотрицательности подкоренного выражения (аксиома 4). Поэтому каждый вектор имеет положительную длину, за исключением нулевого, длина которого равна нулю: $|\boldsymbol{o}| = 0$.

Углом между ненулевыми векторами $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ называется число

$$\varphi = \arccos \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|}, \text{ т.е. } \cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|} \text{ и } 0 \le \varphi \le \pi.$$

Представив неравенство Коши–Буняковского (8.25) в виде

$$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \le |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|,$$

можно сделать вывод, что абсолютное значение выражения $\frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|}$ не превосходит единицы, т.е. величина угла определена для любой пары ненулевых векторов. Заметим, что угол между коллинеарными векторами равен нулю или π.

Длина вектора и угол между векторами называются ***основными метрическими понятиями*** [42].

Из неравенства Коши–Буняковского (8.25) следует *неравенство треугольника*:

$$\big||\boldsymbol{u}| - |\boldsymbol{v}|\big| \le |\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| \le |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|.$$

Докажем последнее неравенство. Применяя оценку $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \le |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|$, получаем

$$|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \le$$

$$\le |\boldsymbol{u}|^2 + 2 \cdot |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| + |\boldsymbol{v}|^2 = (|\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|)^2,$$

т.е. $|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 \le (|\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|)^2 \iff |\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| \le |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|$.

----

15) Изоморфизм евклидовых пространств

Два евклидовых пространства $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$ называются ***изоморфными*** ($\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{E}'$), если они изоморфны как линейные пространства (см. разд.8.5) и скалярные произведения соответствующих векторов равны:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{u} \leftrightarrow \boldsymbol{u}' \\ \boldsymbol{v} \leftrightarrow \boldsymbol{v}' \end{array}\right\} \Rightarrow (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}')',$$

где $(\cdot,\cdot)$ и $(\cdot,\cdot)'$ – скалярные произведения в пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$ соответственно.

Напомним, что для изоморфизма конечномерных линейных пространств необходимо и достаточно, чтобы их размерности совпадали (см. теорему 8.3). Покажем, что это условие достаточно для изоморфизма евклидовых пространств (необходимость следует из определения). Как и при доказательстве теоремы 8.3, установим изоморфизм n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ с вещественным арифметическим пространством R^n со скалярным произведением (8.27). В самом деле, взяв в пространстве $\boldsymbol{E}$ какой-нибудь ортонормированный базис $(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$, поставим в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ его координатный столбец $x \in R^n$ ($\boldsymbol{x} \leftrightarrow x$). Это взаимно однозначное соответствие устанавливает изоморфизм линейных пространств: $\boldsymbol{E} \leftrightarrow R^n$. В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пространства $\boldsymbol{E}$ находится по формуле $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ (см. п.1 преимуществ ортонормированного базиса). Такое же выражение дает скалярное произведение (8.27) координатных столбцов x и y, т.е. скалярные произведения соответствующих элементов равны $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^T y$. Следовательно, евклидовы пространства $\boldsymbol{E}$ и R^n изоморфны.

Таким образом, изучение конечномерных евклидовых пространств может быть сведено к исследованию вещественного арифметического пространства R^n со стандартным скалярным произведением (8.27).

17) Ортогональные дополнения подмножеств: определения, примеры, свойства *(разд.8.8.7)*.

Ортогональные дополнения:

Ортогональным дополнением непустого подмножества M евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ называется множество векторов, ортогональных каждому вектору из M. Ортогональное дополнение обозначается

$$M^{\perp} = \{ \boldsymbol{v} : (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0, \ \forall \boldsymbol{w} \in M \}.$$

Рассмотрим примеры ортогональных дополнений.

1. Ортогональным дополнением нулевого подпространства $\{\boldsymbol{o}\} \triangleleft \boldsymbol{E}$ служит все пространство $\boldsymbol{E}$: $\{\boldsymbol{o}\}^{\perp} = \boldsymbol{E}$. Ортогональным дополнением всего пространства является его нулевое подпространство $\boldsymbol{E}^{\perp} = \{\boldsymbol{o}\}$.

2. Пусть в пространстве V_3 радиус-векторов (с началом в точке O) заданы три взаимно перпендикулярных радиус-вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Тогда ортогональным дополнением вектора $\overline{OA}$ является множество радиус-векторов на плоскости, содержащей векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, точнее, $\{\overline{OA}\}^{\perp} = Lin(\overline{OB}, \overline{OC})$. Ортогональным дополнением векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ служит множество радиус-векторов на прямой, содержащей вектор $\overline{OC}$: $\{\overline{OA}, \overline{OB}\}^{\perp} = Lin(\overline{OC})$. Ортогональным дополнение трех заданных векторов служит нулевой радиус-вектор: $\{\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\}^{\perp} = \{\overline{OO}\}$.

3. В пространстве $P_2(R)$ многочленов степени не выше второй со скалярным произведением (8.29) (см. п.6 в разд.8.8.2) задано подмножество $P_0(R)$ – многочленов нулевой степени. Найдем ортогональное дополнение этого подмножества. Для этого приравняем нулю скалярное произведение многочлена $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ на постоянный многочлен $p_0(x) = d$: $(p_2(x), p_0(x)) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot d = 0$. Поскольку величина d произвольная, то $c = 0$. Следовательно, ортогональным дополнением подмножества $P_0(R)$ является множество многочленов из $P_2(R)$ с нулевым свободным членом.

Свойство ортогонального дополнения:

Рассмотрим свойства ортогональных дополнений подмножеств n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}$.

1. *Ортогональное дополнение $M^{\perp}$ непустого подмножества $M \subset \boldsymbol{E}$ является линейным подпространством, т.е. $M^{\perp} \triangleleft \boldsymbol{E}$, и справедливо включение $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.*

В самом деле, множество $M^{\perp}$ замкнуто по отношению к операциям сложения векторов и умножения вектора на число, так как сумма двух векторов, ортогональных M, ортогональна M, и произведение вектора, ортогонального M, на любое число является вектором, ортогональным M. Докажем включение $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. Пусть $\boldsymbol{w} \in M$, тогда $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0$ для любого вектора $\boldsymbol{v} \in M^{\perp}$. Но это означает, что $\boldsymbol{w} \in (M^{\perp})^{\perp}$.

2. *Пересечение любого непустого подмножества $M \subset \boldsymbol{E}$ со своим ортогональным дополнением есть нулевой вектор*: $M \cap M^{\perp} = \{\boldsymbol{o}\}$.

Действительно, только нулевой вектор ортогонален самому себе.

3. *Если $\boldsymbol{L}$ – подпространство $\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{L} \triangleleft \boldsymbol{E}$), то $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{L} \oplus \boldsymbol{L}^{\perp}$.*

Действительно, возьмем в $\boldsymbol{L}$ ортогональный базис $(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k)$. Дополним его векторами $(\boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{f}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{f}_n)$ до ортогонального базиса $(\boldsymbol{e}), (\boldsymbol{f})$ всего пространства $\boldsymbol{E}$. Тогда произвольный вектор $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{E}$ можно представить в виде суммы

$$\boldsymbol{w} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} w_i \boldsymbol{e}_i}_{\boldsymbol{u}} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} w_j \boldsymbol{f}_j}_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}$, а $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{\perp}$, так как $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=k+1}^{n} w_j \underbrace{(\boldsymbol{f}_j, \boldsymbol{e}_i)}_{0} = 0$ для $i = 1, \dots, k$. Следовательно, любой вектор пространства $\boldsymbol{E}$ раскладывается по подпространствам $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{L}^{\perp}$, т.е. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^{\perp}$. Эта алгебраическая сумма является прямой суммой по свойству 2, поскольку $\boldsymbol{L} \cap \boldsymbol{L}^{\perp} = \{\boldsymbol{o}\}$. Следовательно, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{L} \oplus \boldsymbol{L}^{\perp}$.

4. *Если $\boldsymbol{L} \triangleleft \boldsymbol{E}$, то* $\dim \boldsymbol{L}^{\perp} = \dim \boldsymbol{E} - \dim \boldsymbol{L}$.

5. *Если $\boldsymbol{L}$ – подпространство $\boldsymbol{E}$, то $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{L}^{\perp})^{\perp}$.*

Из первого свойства следует включение $\boldsymbol{L} \subset (\boldsymbol{L}^{\perp})^{\perp}$. Докажем, что $(\boldsymbol{L}^{\perp})^{\perp} \subset \boldsymbol{L}$. Действительно, пусть $\boldsymbol{w} \in (\boldsymbol{L}^{\perp})^{\perp}$. По свойству 3: $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, где

----

18) Процесс ортонагализации Грама-Шмидта

Рассмотрим следующую задачу. Дана линейно независимая система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ векторов конечномерного евклидова пространства. Требуется построить ортогональную систему $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_k$ векторов того же пространства так, чтобы совпадали линейные оболочки:

$$Lin(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_k) = Lin(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k).$$

Решение задачи находится при помощи ***процесса ортогонализации*** (Грама – Шмидта), выполняемого за k шагов.

1. Положить $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1$.

2. Найти $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \alpha_{21} \cdot \boldsymbol{w}_1$, где $\alpha_{21} = \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}$.

3. Найти $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \alpha_{31}\boldsymbol{w}_1 - \alpha_{32}\boldsymbol{w}_2$, где $\alpha_{31} = \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}$, $\alpha_{32} = \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)}$;

и т.д.

k) Найти $\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ki} \boldsymbol{w}_i$, где $\alpha_{ki} = \frac{(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_i)}{(\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_i)}$, $i = 1, \dots, k-1$.

Поясним процесс ортогонализации. Искомый на втором шаге вектор $\boldsymbol{w}_2$ представлен в виде линейной комбинации $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \alpha \cdot \boldsymbol{w}_1$. Коэффициент α подберем так, чтобы обеспечить ортогональность векторов $\boldsymbol{w}_2$ и $\boldsymbol{w}_1$. Приравняем нулю скалярное произведение этих векторов $(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1) = (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) - \alpha \cdot (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1) = 0$. Отсюда получаем, что $\alpha = \alpha_{21}$ (см. п.2 алгоритма). Подбор коэффициентов α_{ji} на j-м шаге алгоритма делается так, чтобы искомый вектор $\boldsymbol{w}_j$ был ортогонален всем ранее найденным векторам $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_{j-1}$.

16) Ортогональные и ортонормированные векторы: определение, примеры, свойства *(разд.8.8.4)*. Ортонормированный базис и его преимущества *(разд.8.8.6)*

.

Ортогональные векторы

Два вектора $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ евклидова пространства называются ***ортогональными (перпендикулярными)***, если их скалярное произведение равно нулю: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$.

Система векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ называется ***ортогональной***, если все ее векторы попарно ортогональны, т.е. $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0$ при $i \ne j$. Система векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ называется ***ортонормированной***, если все ее векторы попарно ортогональны и длина (норма) каждого вектора системы равна единице, т.е.

$$(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \ne j. \end{cases}$$

Говорят, что вектор $\boldsymbol{v}$ ***ортогонален (перпендикулярен) множеству*** M, если он ортогонален каждому вектору из M. Ортогональность векторов обозначается знаком перпендикуляра ($\perp$).

Свойства ортогональных векторов

1. *Нулевой вектор ортогонален каждому вектору пространства.*

2. *Взаимно ортогональные ненулевые векторы линейно независимы.*

В самом деле, пусть векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ попарно ортогональны. Составим из них линейную комбинацию и приравняем ее нулевому вектору:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}.$$

Умножим обе части равенства скалярно на вектор $\boldsymbol{v}_1$:

$$\lambda_1 (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 \underbrace{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)}_{0} + \dots + \lambda_k \underbrace{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_k)}_{0} = \underbrace{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{o})}_{0}.$$

Следовательно, $\lambda_1 \cdot |\boldsymbol{v}_1|^2 = 0$. Так как $\boldsymbol{v}_1 \ne \boldsymbol{o}$, то $\lambda_1 = 0$. Аналогично доказываем, что $\lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, т.е рассматриваемая линейная комбинация тривиальная. Значит, ортогональная система векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ линейно независима.

3. *Если сумма взаимно ортогональных векторов равна нулевому вектору, то каждое из слагаемых равно нулевому вектору.*

4. *Если вектор $\boldsymbol{u}$ ортогонален каждому вектору системы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$, то он также ортогонален и любой их линейной комбинации.* Другими словами, *если $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}_i$, $i = 1, \dots k$, то $\boldsymbol{u} \perp Lin(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$.*

5. *Если вектор $\boldsymbol{u}$ ортогонален подмножеству M евклидова пространства, то он ортогонален и линейной оболочке этого подмножества,* т.е. $\boldsymbol{u} \perp M \Rightarrow \boldsymbol{u} \perp Lin(M)$.

6. *Если $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ – ортогональная система векторов, то*

$$|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \dots + \boldsymbol{v}_k|^2 = |\boldsymbol{v}_1|^2 + |\boldsymbol{v}_2|^2 + \dots + |\boldsymbol{v}_k|^2.$$

Это утверждение является обобщением теоремы Пифагора.

Ортогон. и ортонормированые базисы

Так как евклидово пространство является линейным, на него переносятся все понятия и свойства, относящиеся к линейному пространству, в частности, понятия базиса и размерности.

Базис $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ евклидова пространства называется ***ортогональным***, если все образующие его векторы попарно ортогональны, т.е.

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0 \text{ при } i \ne j, \ i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, n.$$

Базис $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ евклидова пространства называется ***ортонормированным***, если его векторы попарно ортогональны и длина каждого из них равна единице:

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \ne j, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, n. \tag{8.31}$$

Теорема 8.5. *В конечномерном евклидовом пространстве любую систему ортогональных (ортонормированных) векторов можно дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса.*

В самом деле, по теореме 8.2 любую систему линейно независимых векторов, в частности, ортогональную (ортонормированную), можно дополнить до базиса. Применяя к этому базису процесс ортогонализации (см. разд. 8.8.5), получаем ортогональный базис. Нормируя векторы этого базиса (см. п.4 замечаний 8.11), получаем ортонормированный базис.

19) Задача о перпендикуляре и ее решение

Пусть L – подпространство конечномерного евклидова пространства E. Для любого вектора $v \in E$ (по свойству 3 ортогонального дополнения) существует единственное разложение:

$$v = l + h, \text{ где } l \in L,\ h \in L^{\perp}. \tag{8.36}$$

Вектор l называется ***ортогональной проекцией*** вектора v на подпространство L, а вектор h – ***ортогональной составляющей*** вектора v относительно подпространства L. По аналогии с привычными терминами курса элементарной геометрии ортогональную составляющую h называют ***перпендикуляром, опущенным из конца вектора v на подпространство L***. Из-за ортогональности составляющих l и h разложение (8.36) называют ***ортогональным***.

Задача о перпендикуляре ставится следующим образом. В n-мерном евклидовом пространстве заданы вектор $v \in E$ и подпространство $L \triangleleft E$. Требуется найти ортогональную проекцию $l \in L$ вектора v и его ортогональную составляющую (перпендикуляр) $h \in L^{\perp}$, т.е. представить заданный вектор v в виде (8.36).

Для решения задачи о перпендикуляре нужно выполнить следующие действия.

1. Взять любой базис $e_1, \ldots, e_r$ подпространства L (полагаем, что $\dim L = r \le n$).

2. Составить неоднородную систему

$$\begin{cases} (e_1,e_1)\cdot l_1 + (e_1,e_2)\cdot l_2 + \ldots + (e_1,e_r)\cdot l_r = (e_1,v), \\ \qquad \vdots \\ (e_r,e_1)\cdot l_1 + (e_r,e_2)\cdot l_2 + \ldots + (e_r,e_r)\cdot l_r = (e_r,v) \end{cases}$$

r уравнений с r неизвестными $l_1, \ldots, l_r$.

3. Решить систему, составленную в п.2.

4. Найти ортогональную проекцию $l = l_1 \cdot e_1 + \ldots + l_r \cdot e_r$, а затем – ортогональную составляющую (перпендикуляр) $h = v - l$.

Поясним алгоритм решения. Разложив ортогональную проекцию $l = l_1 \cdot e_1 + \ldots + l_r \cdot e_r$ по базису подпространства, запишем ортогональную составляющую (перпендикуляр): $h = v - l = v - l_1 \cdot e_1 - \ldots - l_r \cdot e_r$. Затем найдем скалярные произведения (h, e_i), $i = 1, \ldots, r$, умножая последнее равенство последовательно на $e_1, \ldots, e_r$. Учитывая, что $(h, e_i) = 0$, $i = 1, \ldots, r$, получаем систему из п.2 алгоритма. Заметим, что матрица полученной системы – это матрица Грама $G(e_1, \ldots, e_r)$ линейно независимой системы векторов (базиса) $e_1, \ldots, e_r$. По свойству 1 определителя Грама $\det G(e_1, \ldots, e_r) \ne 0$, значит, рассматриваемая система имеет единственное решение.

Пример 8.20. В пространстве R^4 со стандартным скалярным произведением (8.27) заданы: вектор $v = (-3 \quad 2 \quad 0 \quad 0)^T$ и подпространство L – множество решений однородной системы

20) Определитель Грома, его свойства и геометрический смысл *(с.440-441,451)*. Неравенства Адамара, Бесселя *(п. 3 замечаний 8.12, п. 3 замечаний 8.14)*.

Определитель матрицы (8.33) называется ***определителем Грама***. Рассмотрим свойства этого определителя.

1. Критерий Грама линейной зависимости векторов: *система векторов $v_1, \ldots, v_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель Грама этой системы равен нулю.*

Действительно, если система $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейно зависима, то существуют такие числа $x_1, \ldots, x_k$, не равные нулю одновременно, что

$$x_1 v_1 + \ldots + x_k v_k = o.$$

Умножая это равенство скалярно на v_1, затем на v_2 и т.д. на v_k, получаем однородную систему уравнений $G(v_1, v_2, \ldots, v_k) \cdot x = o$, которая имеет нетривиальное решение $x = (x_1 \ \cdots \ x_k)^T$. Следовательно, ее определитель равен нулю (см. разд.5.5). Необходимость доказана. Достаточность доказывается, проводя рассуждения в обратном порядке.

Следствие. *Если какой-либо главный минор матрицы Грама равен нулю, то и определитель Грама равен нулю.*

Главный минор матрицы Грама системы $v_1, v_2, \ldots, v_k$ представляет собой определитель Грама подсистемы векторов. Если подсистема линейно зависима, то и вся система линейно зависима (см. разд.8.2.2).

2. *Определитель Грама* $\det G(v_1, \ldots, v_k)$ *не изменяется в процессе ортогонализации системы векторов* $v_1, \ldots, v_k$. Другими словами, *если в процессе ортогонализации векторов $v_1, \ldots, v_k$ получены векторы $w_1, w_2, \ldots, w_k$, то*

$$\det G(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \det G(w_1, w_2, \ldots, w_k) = (w_1, w_1) \cdot (w_2, w_2) \cdot \ldots \cdot (w_k, w_k).$$

Действительно, в процессе ортогонализации (см. разд. 8.8.5) по векторам $v_1, v_2, \ldots, v_k$ последовательно строятся векторы

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2 - \alpha_{21} w_1, \ldots, \quad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} w_j.$$

После первого шага определитель Грама не изменяется

$$\det G(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \det G(w_1, v_2, \ldots, v_k).$$

Выполним с определителем $\det G(w_1, v_2, \ldots, v_k)$ следующие преобразования. Прибавим ко второй строке первую, умноженную на число $(-\alpha_{21})$, а затем ко второму столбцу прибавим первый, умноженный на $(-\alpha_{21})$. Получим определитель $\det G(w_1, v_2 - \alpha_{21} w_1, \ldots, v_k) = \det G(w_1, w_2, v_3, \ldots, v_k)$. Так как при этих преобразованиях определитель не изменяется (см. разд. 2.3), то

$$\det G(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \det G(w_1, v_2, \ldots, v_k) = \det G(w_1, w_2, v_3, \ldots, v_k).$$

Значит, после второго шага в процессе ортогонализации определитель не изменяется. Продолжая аналогично, получаем после k шагов:

$$\det G(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \det G(w_1, w_2, \ldots, w_k).$$

Вычислим правую часть этого равенства. Матрица $G(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ Грама ортогональной системы $w_1, w_2, \ldots, w_k$ векторов является диагональной, так как $(w_i, w_j) = 0$ при $i \ne j$. Поэтому ее определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\det G(w_1, w_2, \ldots, w_k) = (w_1, w_1) \cdot (w_2, w_2) \cdot \ldots \cdot (w_k, w_k).$$

3. *Определитель Грама любой системы $v_1, v_2, \ldots, v_k$ векторов удовлетворяет двойному неравенству*

$$0 \le \det G(v_1, v_2, \ldots, v_k) \le (v_1, v_1) \cdot (v_2, v_2) \cdot \ldots \cdot (v_k, v_k).$$

Докажем неотрицательность определителя Грама. Если система $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейно зависима, то определитель равен нулю (по свойству 1). Если же система $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейно независима, то, выполнив процесс ортогонализации, получим ненулевые векторы $w_1, w_2, \ldots, w_k$, для которых по свойству 2:

$$\det G(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \det G(w_1, w_2, \ldots, w_k) = |w_1|^2 \cdot |w_2|^2 \cdot \ldots \cdot |w_k|^2 > 0.$$

Оценим теперь скалярный квадрат (v_j, v_j). Выполняя процесс ортогонализации, имеем $v_j = w_j + \alpha_{j1} w_1 + \ldots + \alpha_{j\,j-1} w_{j-1}$. Отсюда

$$(v_j, v_j) = (w_j, w_j) + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ji}^2 (w_i, w_i) \ge (w_j, w_j).$$

Следовательно, по свойству 2:

$$(v_1, v_1) \cdot (v_2, v_2) \cdot \ldots \cdot (v_k, v_k) \ge (w_1, w_1) \cdot (w_2, w_2) \cdot \ldots \cdot (w_k, w_k) = \det G(w_1, w_2, \ldots, w_k).$$

1. Матрица Грама любой системы векторов является неотрицательно определенной (см. разд. 6.6.3), так как все ее главные миноры также являются определителями Грама соответствующих подсистем векторов и неотрицательны в силу свойства 3.

2. Матрица Грама любой линейно независимой системы векторов является положительно определенной, так как все ее угловые миноры положительны (в силу свойств 1,3), поскольку являются определителями Грама линейно независимых подсистем векторов.

3. Определитель квадратной матрицы A (n-го порядка) удовлетворяет ***неравенству Адамара***:

$$(\det A)^2 \le \prod_{i=1}^{n} \left(a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2\right).$$

Действительно, обозначив $a_1, \ldots, a_n$ столбцы матрицы A, элементы матрицы $A^T A$ можно представить как скалярные произведения (8.27): $(a_i, a_j) = (a_i)^T a_j$. Тогда $A^T A = G(a_1, \ldots, a_n)$ – матрица Грама системы $a_1, \ldots, a_n$ векторов пространства R^n. По свойству 3, теореме 2.2 и свойству 1 определителя (см. разд.2.3.1) получаем доказываемое неравенство:

$$(\det A)^2 = \det A \cdot \det A = \det A^T \cdot \det A = \det\left(A^T A\right) =$$

$$= \det G(a_1, \ldots, a_n) \le |a_1|^2 \cdot \ldots \cdot |a_n|^2 = \prod_{i=1}^{n} \left(a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2\right).$$

4. Если A – невырожденная квадратная матрица, то любой главный минор матрицы $A^T A$ положителен. Это следует из п.2, учитывая представление произведения $A^T A = G(a_1, \ldots, a_n)$ как матрицы Грама системы линейно независимых векторов $a_1, \ldots, a_n$ – столбцов матрицы A (см. п.3).

В линейном пр-ве(см 19):

3. Если в подпространстве L взять ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_r$, то квадрат длины вектора l можно вычислить по формуле $|l|^2 = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_r^2$, где $l_i = (l, e_i)$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда из неравенства (см. п.1) $|l| \le |v|$ следует:

$$\sum_{i=1}^{r} l_i^2 \le |v|^2 \qquad \textit{(неравенство Бесселя)},$$

21)Отображения: определение, образ, полный прообраз. Сюръективные, инъективные, биективные, тождественные и обратимые отображения. Композиция отображений. Теорема об обратном отображении *(с.459)*.

Определение линейных отображений

Напомним основные определения [19,25,43], связанные с понятием отображения (функции, оператора).

Пусть V и W – заданные множества. Говорят, что на множестве V ***определено отображение (функция)*** f, если каждому элементу $v \in V$ поставлен в соответствие единственный элемент $f(v)$ множества W. Такое соответствие называют также ***отображением множества V в множество W*** и обозначают $f : V \to W$, или $V \xrightarrow{f} W$. Если отображение f элементу $v \in V$ ставит в соответствие элемент $w \in W$, т.е. $w = f(v)$, то элемент w называется ***образом*** v, а элемент v – ***прообразом*** w.

Два отображения $f : V \to W$ и $g : V \to W$ называются ***равными***, если $f(v) = g(v) \quad \forall v \in V$.

Отображение $f : V \to W$ называется:

инъективным, если разным элементам множества V соответствуют разные образы: $v_1 \ne v_2 \ \Rightarrow \ f(v_1) \ne f(v_2)$;

сюръективным, если для каждого элемента из множества W имеется хотя бы один прообраз: $\forall w \in W \ \exists v \in V : w = f(v)$;

биективным (***взаимно однозначным***), если оно инъективно и сюръективно одновременно.

Сюръективное отображение называется также ***отображением множества V на множество W***.

Композицией отображений $g : U \to V$ и $f : V \to W$ называется отображение $f \circ g : U \to W$, определяемое равенством $(f \circ g)(u) = f(g(u))$.

Отображение $\mathcal{E}_V : V \to V$ называется ***тождественным***, если каждому элементу множества V ставится в соответствие этот же элемент: $\mathcal{E}_V(v) = v \ \forall v \in V$.

Отображение $f^{-1} : W \to V$ называется ***обратным*** для отображения $f : V \to W$, если $f^{-1} \circ f = \mathcal{E}_V : V \to V$ и $f \circ f^{-1} = \mathcal{E}_W : W \to W$. Отображение f называется ***обратимым***, если для него существует обратное отображение. Необходимым и достаточным условием обратимости является условие биективности (взаимной однозначности) отображения.

Пусть V и W – линейные пространства (над одним и тем же числовым полем). Отображение $\mathcal{A} : V \to W$ называется ***линейным***, если

1. $\mathcal{A}(v_1 + v_2) = \mathcal{A}(v_1) + \mathcal{A}(v_2) \ \forall v_1 \in V, \ \forall v_2 \in V$;

2. $\mathcal{A}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \mathcal{A}(v) \quad \forall v \in V$ и любого числа λ (из данного числового поля).

Условие 1 называется ***аддитивностью*** отображения, а условие 2 – ***однородностью***. Пространство V называется ***пространством прообразов***, а пространство W – ***пространством образов***.

22)Линейные отображения: определение *(с.460)*, примеры *(разд.9.1.2)*, свойства *(разд.9.1.3)*. Матрица линейного отображения *(разд.9.1.4)*. Свойства матриц линейных отображений *(с.467)*.

Пусть V и W – линейные пространства (над одним и тем же числовым полем). Отображение $\mathcal{A}:V\to W$ называется ***линейным***, если

1. $\mathcal{A}(v_1+v_2)=\mathcal{A}(v_1)+\mathcal{A}(v_2)\ \forall v_1\in V,\ \forall v_2\in V$;
2. $\mathcal{A}(\lambda\cdot v)=\lambda\cdot\mathcal{A}(v)\quad \forall v\in V$ и любого числа λ (из данного числового поля).

Условие 1 называется ***аддитивностью*** отображения, а условие 2 – ***однородностью***. Пространство V называется ***пространством прообразов***, а пространство W – ***пространством образов***.

Свойства линейных отображений

Пусть $\mathcal{A}:V\to W$ – линейное отображение.

1. *Если векторы $v_1,\ldots,v_k$ линейно зависимы, то их образы также линейно зависимы.*

Действительно, если нетривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору: $\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_k v_k=o_V$, то, применяя к обеим частям отображение $\mathcal{A}$, в силу его линейности с учетом п.1,3 замечаний 9.1, получаем

$$\lambda_1\mathcal{A}(v_1)+\ldots+\lambda_k\mathcal{A}(v_k)=o_W,$$

т.е. равную нулевому вектору нетривиальную линейную комбинацию образов заданных векторов. Значит, образы $\mathcal{A}(v_1),\ldots,\mathcal{A}(v_k)$ заданных векторов линейно зависимы.

2. *Пусть $\mathcal{A}:V\to W$ – сюръективное отображение пространства V на пространство W и векторы $w_1,\ldots,w_k$ пространства W образуют линейно независимую систему. Тогда в пространстве V существует такая линейно независимая система векторов $v_1,\ldots,v_k$, что $\mathcal{A}(v_i)=w_i$, $i=1,\ldots,k$.*

Действительно, в силу сюръективности отображения у векторов $w_1,\ldots,w_k$ найдутся прообразы $v_1,\ldots,v_k$. Если система $v_1,\ldots,v_k$ линейно зависима, то и система $w_1,\ldots,w_k$ была бы линейно зависимой (по свойству 1). Поэтому найденная система прообразов линейно независимая.

3. *При линейном сюръективном отображении $\mathcal{A}:V\to W$ конечномерного пространства размерность пространства образов не превосходит размерности пространства прообразов*, т.е. $\dim W\le\dim V$.

В самом деле, в пространстве образов W нет линейно независимой системы из большего, чем $\dim V$, количества векторов. Если бы такая система векторов была, то прообразы этих векторов были бы линейно независимы (по свойству 2). Но в пространстве V не может быть линейно независимой системы из большего, чем $\dim V$, количества векторов.

4. *Композиция линейных отображений является линейным отображением.*

Действительно, пусть $C=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$ – композиция линейных отображений $\mathcal{A}:U\to V$ и $\mathcal{B}:V\to W$. Тогда отображение C аддитивно:

$$C(u_1+u_2)=(\mathcal{B}\circ\mathcal{A})(u_1+u_2)=\mathcal{B}(\mathcal{A}(u_1+u_2))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(u_1)+\mathcal{A}(u_2))=$$
$$=\mathcal{B}(\mathcal{A}(u_1))+\mathcal{B}(\mathcal{A}(u_2))=C(u_1)+C(u_2).$$

Однородность отображения C доказывается аналогично.

5. *Если линейное отображение $\mathcal{A}:V\to W$ обратимое* (*взаимно однозначное*), *то обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}:W\to V$ – линейное.*

Докажем, например, аддитивность обратного отображения

$$\mathcal{A}^{-1}(w_1+w_2)=\mathcal{A}^{-1}(w_1)+\mathcal{A}^{-1}(w_2).$$

Обозначим $v=\mathcal{A}^{-1}(w_1)+\mathcal{A}^{-1}(w_2)$. Тогда в силу линейности $\mathcal{A}$, получаем

$$\mathcal{A}(v)=\mathcal{A}\big(\mathcal{A}^{-1}(w_1)+\mathcal{A}^{-1}(w_2)\big)=\mathcal{A}\big(\mathcal{A}^{-1}(w_1)\big)+\mathcal{A}\big(\mathcal{A}^{-1}(w_2)\big)=$$
$$=(\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^{-1})(w_1)+(\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^{-1})(w_2)=\mathcal{E}_W(w_1)+\mathcal{E}_W(w_2)=w_1+w_2.$$

Следовательно, $\mathcal{A}^{-1}(w_1+w_2)=v=\mathcal{A}^{-1}(w_1)+\mathcal{A}^{-1}(w_2)$, что и требовалось доказать. Однородность обратного отображения доказывается аналогично.

6. *Линейное отображение конечномерного пространства однозначно задается образами базисных векторов.*

Свойства матриц лин. отображения

При фиксированных базисах линейных пространств:

1) *матрица суммы линейных отображений равна сумме их матриц*;

2) *матрица произведения линейного отображения на число равна произведению матрицы отображения на то же самое число*;

3) *матрица обратного отображения является обратной для матрицы отображения*;

4) *матрица композиции $C=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$ отображений равна произведению матриц отображений*: $C=BA$.

Докажем, например, последнее свойство. Пусть в линейных пространствах V,W,U фиксированы базисы $(e),(f),(g)$ соответственно. Отображения $\mathcal{A}:V\to W$, $\mathcal{B}:W\to U$, а также их композиция $C=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$, имеют матрицы A, B, C относительно соответствующих базисов. Для координатных столбцов v,w,u векторов $v\in V$, $w=\mathcal{A}(v)$, $u=\mathcal{B}(w)=C(v)$ запишем связи (9.2): $w=Av$, $u=Bw$, $u=Cv$. Тогда $Cv=Bw=BAv$ для координатного столбца v произвольного вектора $v\in V$. Отсюда следует, что $C=BA$.

Матрица линейного отображения

Пусть $\mathcal{A}:V\to W$ – линейное отображение n-мерного пространства V в m-мерное пространство W. Зафиксируем в пространстве V произвольный базис $(e)=(e_1,\ldots,e_n)$, а в пространстве W базис $(f)=(f_1,\ldots,f_m)$. Линейное отображение однозначно задается образами базисных векторов (см. свойство 6). Разложим образы $\mathcal{A}(e_i)$, $i=1,\ldots,n$, базисных векторов (e) по базису (f):

$$\mathcal{A}(e_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}f_j,\quad i=1,\ldots,n.$$

Из координатных столбцов векторов $\mathcal{A}(e_1),\ldots,\mathcal{A}(e_n)$ относительно базиса (f) составим матрицу размеров $m\times n$:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.\qquad(9.1)$$

Она называется ***матрицей линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах*** (e) и (f). Матрицу отображения обозначают также $\underset{(e),(f)}{A}$, чтобы подчеркнуть ее зависимость от выбранных базисов.

23) Ядро и образ линейного отображения: определение, примеры, свойства. Теорема о размерностях ядра и образа *(разд.9.1.5)*.

Ядром линейного отображения $\mathcal{A}:V\to W$ называется множество таких векторов $v\in V$, что $\mathcal{A}(v)=o_W$, т.е. множество векторов из V, которые отображаются в нулевой вектор пространства W. Ядро отображения $\mathcal{A}:V\to W$ обозначается:

$$Ker\ \mathcal{A}=\{v:v\in V,\mathcal{A}(v)=o_W\}.$$

Образом линейного отображения $\mathcal{A}:V\to W$ называется множество образов $\mathcal{A}(v)$ всех векторов v из V. Образ отображения $\mathcal{A}:V\to W$ обозначается $Im\ \mathcal{A}$ или $\mathcal{A}(V)$:

$$Im\ \mathcal{A}=\mathcal{A}(V)=\{w:w=\mathcal{A}(v),\ \forall v\in V\}.$$

Заметим, что символ $Im\ \mathcal{A}$ следует отличать от $\operatorname{Im}z$ – мнимой части комплексного числа.

Свойства

1. *Ядро любого линейного отображения $\mathcal{A}:V\to W$ является подпространством*: $\{o_V\}\lhd Ker\ \mathcal{A}\lhd V$.

В соответствии с определением (см. разд. 8.6.1) требуется доказать, что множество $Ker\ \mathcal{A}$ является непустым и замкнутым относительно операций сложения векторов и умножения вектора на число. В самом деле, из однородности отображения следует, что

$$\mathcal{A}(o_V)=\mathcal{A}(0\cdot v)=0\cdot\mathcal{A}(v)=o_W,$$

т.е. нулевой вектор o_V отображается в нулевой вектор o_W. Следовательно, ядро любого линейного отображения не является пустым и содержит, по крайней мере, нулевой элемент: $o_V\in Ker\ \mathcal{A}$. Покажем, что множество $Ker\ \mathcal{A}$ замкнуто по отношению к операциям сложения векторов и умножения вектора на число. Действительно:

$$\left.\begin{array}{l}v_1\in Ker\ \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}(v_1)=o_W\\ v_2\in Ker\ \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}(v_2)=o_W\end{array}\right\}\Rightarrow\ \mathcal{A}(v_1+v_2)=\mathcal{A}(v_1)+\mathcal{A}(v_2)=o_W\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad v_1+v_2\in Ker\ \mathcal{A};$$
$$v\in Ker\ \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}(v)=o_W\Rightarrow\mathcal{A}(\lambda\cdot v)=\lambda\cdot\mathcal{A}(v)=\lambda\cdot o_W=o_W\Rightarrow\lambda\cdot v\in Ker\ \mathcal{A}.$$

Следовательно, множество $Ker\ \mathcal{A}$ является линейным подпространством пространства V.

2. *Образ любого линейного отображения $\mathcal{A}:V\to W$ является подпространством*: $Im\ \mathcal{A}\lhd W$.

В самом деле, докажем, например, замкнутость множества $Im\ \mathcal{A}$ по отношению к операции умножения вектора на число. Если $w\in Im\ \mathcal{A}$, то существует вектор $v\in V$ такой, что $w=\mathcal{A}(v)$. Тогда $\mathcal{A}(\lambda\cdot v)=\lambda\cdot\mathcal{A}(v)=\lambda\cdot w$, т.е. $\lambda\cdot w\in Im\ \mathcal{A}$.

Поскольку ядро и образ линейного отображения являются линейными подпространствами (свойства 1 и 2), можно говорить об их размерностях.

Дефектом линейного отображения называется размерность его ядра: $d=\dim(Ker\ \mathcal{A})$, а ***рангом линейного отображения*** – размерность его образа: $\operatorname{rg}\mathcal{A}=r=\dim(Im\ \mathcal{A})$.

3. *Ранг линейного отображения равен рангу его матрицы* (*определенной относительно любых базисов*).

В самом деле, если $e_1,\ldots,e_n$ любой базис пространства V, то $Im\ \mathcal{A}=Lin(\mathcal{A}(e_1),\ldots,\mathcal{A}(e_n))$. Поэтому максимальное число линейно независимых векторов системы $\mathcal{A}(e_1),\ldots,\mathcal{A}(e_n)$ (ранг системы векторов) равно максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы A отображения, т.е. рангу матрицы: $\dim(Im\ \mathcal{A})=\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}\mathcal{A}$.

4. *Линейное отображение $\mathcal{A}:V\to W$ инъективно тогда и только тогда, когда* $Ker\ \mathcal{A}=\{o_V\}$, другими словами, *когда дефект отображения равен нулю*: $d=\dim(Ker\ \mathcal{A})=0$.

Действительно, образом нулевого вектора o_V служит нулевой вектор o_W. Поэтому, если отображение инъективно, то ядро содержит только нулевой вектор o_V, иначе два разных вектора имели бы один и тот же образ o_W. Обратно, при условии $Ker\ \mathcal{A}=\{o_V\}$ разные векторы $v_1\ne v_2$ не могут иметь одинаковые образы $\mathcal{A}(v_1)=\mathcal{A}(v_2)$, так как в этом случае из равенств $\mathcal{A}(v_1)-\mathcal{A}(v_2)=\mathcal{A}(v_1-v_2)=o_W$ следует, что ненулевой вектор $(v_1-v_2)\in Ker\ \mathcal{A}$ (приходим к противоречию).

5. *Линейное отображение $\mathcal{A}:V\to W$ сюръективно тогда и только тогда, когда* $Im\ \mathcal{A}=W$, другими словами, *когда ранг отображения равен размерности пространства образов*: $r=\dim(Im\ \mathcal{A})=\dim W$.

6. *Линейное отображение $\mathcal{A}:V\to W$ биективно* (значит, *обратимо*) *тогда и только тогда, когда* $Ker\ \mathcal{A}=\{o_V\}$ и $Im\ \mathcal{A}=W$ *одновременно.*

Теорема 9.1 (о размерностях ядра и образа). *Сумма размерностей ядра и образа любого линейного отображения $\mathcal{A}:V\to W$ равна размерности пространства прообразов*:

$$\dim(Ker\ \mathcal{A})+\dim(Im\ \mathcal{A})=\dim V.\qquad(9.3)$$

24) Линейные преобразования: определение, примеры (разд.9.2.1). Матрицы линейного преобразования в разных базисах (разд.9.2.2).

Определение линейного преобразованя:

Линейным преобразованием (***линейным оператором***) линейного пространства V называется линейное отображение $\mathcal{A}:V\to V$ пространства V в себя.

Поскольку линейное преобразование является частным случаем линейного отображения, к нему применимы все понятия и свойства, рассмотренные для отображений: инъективность, сюръективность, биективность, обратимость, ядро, образ, дефект, ранг и т.д.

Матрицей линейного преобразования $\mathcal{A}:V\to V$ ***в базисе*** $e_1,\ldots,e_n$ ***пространства*** V называется квадратная матрица A, составленная из координатных столбцов образов базисных векторов $\mathcal{A}(e_1),\ldots,\mathcal{A}(e_n)$, найденных относительно базиса $e_1,\ldots,e_n$.

Матрица биективного линейного преобразования обратима, т.е. невырождена. Поэтому биективное (обратимое) преобразование называют также ***невырожденным***.

Примеры

1. Обозначим $O:V\to V$ – нулевое преобразование n-мерного пространства V, которое ставит в соответствие любому вектору $v\in V$ нулевой элемент o пространства V. Это преобразование не является инъективным, сюръективным, биективным, обратимым. Матрица нулевого преобразования (в любом базисе) нулевая, ядро преобразования $Ker\ O=V$, образ преобразования $Im\ O=\{o\}$, дефект $d=n$, ранг $r=0$.

2. Обозначим $\mathcal{E}:V\to V$ – тождественное преобразование n-мерного пространства V, которое ставит в соответствие каждому вектору $v\in V$ этот же вектор $\mathcal{E}(v)=v$. Это преобразование является инъективным, сюръективным, биективным, обратимым. Матрица тождественного преобразования (в любом базисе) единичная n-го порядка, ядро преобразования $Ker\ \mathcal{E}=\{o\}$, образ преобразования $Im\ \mathcal{E}=V$, дефект $d=0$, ранг $r=n$.

М-цы линейного преобразования в разных базисах

Найдем связь матриц одного и того же линейного преобразования в разных базисах.

Пусть в базисе $(e)=(e_1,\ldots,e_n)$ преобразование $\mathcal{A}:V\to V$ имеет матрицу $\underset{(e)}{A}$, а в базисе $(f)=(f_1,\ldots,f_n)$ – матрицу $\underset{(f)}{A}$. Если S – матрица перехода от базиса (e) к базису (f), то

$$\underset{(f)}{A}=S^{-1}\underset{(e)}{A}S.\qquad(9.4)$$

Докажем формулу (9.4). Пусть векторы v и w в базисах (e) и (f) имеют координатные столбцы $\underset{(e)}{v},\underset{(f)}{v}$ и $\underset{(e)}{w},\underset{(f)}{w}$ соответственно. Если $w=\mathcal{A}(v)$, то по формуле (9.2) имеем

$$\underset{(e)}{w}=\underset{(e)}{A}\cdot\underset{(e)}{v},\qquad \underset{(f)}{w}=\underset{(f)}{A}\cdot\underset{(f)}{v}.$$

Подставляя в первое равенство связи координат векторов в разных базисах (см. разд. 8.4.3) $\underset{(e)}{v}=S\cdot\underset{(f)}{v}$, $\underset{(e)}{w}=S\cdot\underset{(f)}{w}$, получаем $S\cdot\underset{(f)}{w}=\underset{(e)}{A}\cdot S\cdot\underset{(f)}{v}$ или, учитывая обратимость матрицы S: $\underset{(f)}{w}=S^{-1}\cdot\underset{(e)}{A}\cdot S\cdot\underset{(f)}{v}$. Сравнивая последнее равенство с $\underset{(f)}{w}=\underset{(f)}{A}\cdot\underset{(f)}{v}$, убеждаемся в справедливости (9.4).

25) Алгебра линейных преобразований: сложение, умножение на число, произведение и степень линейных операторов *(разд.9.2.3).*

Рассмотрим множество $\mathcal{L}(V)$ – линейных преобразований (операторов) n-мерного линейного пространства V. Напомним, что два преобразования $\mathcal{A}:V \to V$ и $\mathcal{B}:V \to V$ называются равными, если $\mathcal{A}(v)=\mathcal{B}(v)$ $\forall v \in V$.

На множестве $\mathcal{L}(V)$ определены две линейные операции: сложение еобразований и умножение преобразования на число, поскольку в результате этих операций получается линейное преобразование (см. разд. 9.1.3).

Нетрудно показать, что эти операции удовлетворяют условиям:

1. $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$ $\quad \forall \mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$;
2. $\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})=(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}$ $\quad \forall \mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V)$;
3. существует нулевое преобразование $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(V)$ такое, что $\mathcal{A}+\mathcal{O}=\mathcal{A}$ $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$;
4. для каждого преобразования $\mathcal{A}$ существует ***противоположное преобразование*** $(-\mathcal{A})=(-1)\cdot\mathcal{A}$ такое, что $\mathcal{A}+(-\mathcal{A})=\mathcal{O}$;
5. $\lambda\cdot(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\lambda\cdot\mathcal{A}+\lambda\cdot\mathcal{B}$ $\quad \forall \mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ и любого числа λ;
6. $(\lambda+\mu)\cdot\mathcal{A}=\lambda\cdot\mathcal{A}+\mu\cdot\mathcal{A}$ $\quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ и любых чисел λ, μ;
7. $\lambda(\mu\cdot\mathcal{A})=(\lambda\mu)\cdot\mathcal{A}$ $\quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ и любых чисел λ, μ;
8. $1\cdot\mathcal{A}=\mathcal{A}$ $\quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

В условиях 5–7 говорится о числах из того же числового поля, над которым определено линейное пространство V.

Условия 1–8 повторяют аксиомы линейного пространства (см. разд. 8.1.1). Поэтому множество $\mathcal{L}(V)$ с линейными операциями является линейным пространством. Если пространство V вещественное (комплексное), то и пространство $\mathcal{L}(V)$ вещественное (комплексное).

Найдем размерность пространства $\mathcal{L}(V)$. При фиксированном базисе имеется взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями и их матрицами, причем это соответствие сохраняет линейные операции (см. п.2 замечаний 9.2). Следовательно, пространство $\mathcal{L}(V)$ изоморфно пространству $M_{n\times n}$ – квадратных матриц n-го порядка (см. п.5 в разд.8.3.2). Размерность пространства $M_{n\times n}$ равна n^2. По теореме 8.3 (см. разд.8.5): $\dim \mathcal{L}(V)=\dim M_{n\times n}=n^2$, т.е. $\dim \mathcal{L}(V)=(\dim V)^2$.

Кроме линейных операций в множестве $\mathcal{L}(V)$ определена операция умножения элементов. ***Произведением преобразований*** $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ назовем их композицию, т.е. $\mathcal{A}\,\mathcal{B}=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$. В результате композиции линейных преобразований получается линейное преобразование. Операция умножения удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})=(\mathcal{A}\,\mathcal{B})\mathcal{C}$ $\quad \forall \mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V)$;
2. $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{A}\mathcal{C}$ $\quad \forall \mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V)$;
3. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C}=\mathcal{A}\mathcal{C}+\mathcal{B}\mathcal{C}$ $\quad \forall \mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V)$;
4. существует тождественное преобразование $\mathcal{E}$ такое, что $\mathcal{A}\mathcal{E}=\mathcal{E}\mathcal{A}=\mathcal{A}$ $\quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

Первое условие выражает ассоциативность операции умножения, условия 2 и 3 – законы дистрибутивности, условие 4 – существование нейтрального элемента (см. разд. В.2.2, В.2.3). Множество $\mathcal{L}(V)$ с операциями сложения и умножения элементов является кольцом с единицей (вообще говоря, некоммутативное, так как в общем случае $\mathcal{A}\,\mathcal{B} \ne \mathcal{B}\,\mathcal{A}$).

Операции умножения преобразований и произведения преобразования на число (из заданного числового поля) удовлетворяют условию:

5. $(\lambda\cdot\mathcal{A})\,\mathcal{B}=\mathcal{A}(\lambda\cdot\mathcal{B})=\lambda\cdot(\mathcal{A}\,\mathcal{B})$.

Линейное пространство, которое является кольцом, удовлетворяющим условию 5, называется ***алгеброй***. Поэтому множество $\mathcal{L}(V)$ называют ***алгеброй линейных операторов*** (***преобразований***).

26) Инвариантные подпространства: определение, примеры (разд.9.3.1). Сужение (ограничение) оператора на подпространство (с.478). Свойства инвариантных подпространств (разд.9.3.2). Теорема о матрицах оператора и его сужения на инвариантное подпространство, следствие (с.481).

Определение инвариантных пространств. Примеры

Пусть $\mathcal{A}:V \to V$ – линейное преобразование линейного пространства V. Линейное подпространство $L \triangleleft V$ называется ***инвариантным*** относительно преобразования $\mathcal{A}$, если образ любого вектора из L принадлежит подпространству L, т.е. $\mathcal{A}(v) \in L$ $\quad \forall v \in L$. Другими словами, инвариантное подпространство L включает свой образ $\mathcal{A}(L)$: $\mathcal{A}(L) \subset L$. Нулевое подпространство $\{o\}$ и все пространство V являются инвариантными подпространствами для любого линейного преобразования $\mathcal{A}:V \to V$.

Пусть L – инвариантное подпространство относительно преобразования $\mathcal{A}:V \to V$. Линейный оператор $\mathcal{A}:L \to L$, рассматриваемый как линейное преобразование пространства L в себя, называется ***сужением*** (***ограничением***) ***линейного преобразования*** $\mathcal{A}:V \to V$ ***на инвариантное подпространство*** $L \triangleleft V$ и обозначается $\mathcal{A}_L : L \to L$, или $\mathcal{A}|_L : L \to L$. Для всех векторов $v \in L$ выполняется равенство $\mathcal{A}_L(v)=\mathcal{A}(v)$, т.е. $\forall v \in L$ образы, порождаемые оператором $\mathcal{A}$ и его сужением $\mathcal{A}_L$, совпадают.

Примеры

1. Для нулевого преобразования $\mathcal{O}:V \to V$ любое подпространство $L \triangleleft V$ является инвариантным, так как $\mathcal{O}(L)=\{o\} \subset L$. Сужение нулевого преобразования $\mathcal{O}_L : L \to L$ является нулевым преобразованием.

2. Для тождественного преобразования $\mathcal{E}:V \to V$ любое подпространство $L \triangleleft V$ является инвариантным, так как $\mathcal{E}(L)=L$. Сужение тождественного преобразования $\mathcal{E}_L : L \to L$ является тождественным преобразованием.

Свойства инвариантных подпространств

1. *Если L – инвариантное подпространство относительно обратимого линейного преобразования $\mathcal{A}:V \to V$, то его сужение $\mathcal{A}_L : L \to L$ также обратимое линейное преобразование.*

2. *Для любого линейного преобразования $\mathcal{A}:V \to V$ ядро $\mathbf{Ker}\,\mathcal{A}$ и образ $\mathbf{Im}\,\mathcal{A}$ являются инвариантными подпространствами,* так как $\mathcal{A}(\mathbf{Ker}\,\mathcal{A})=\{o\} \triangleleft \mathbf{Ker}\,\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}(\mathbf{Im}\,\mathcal{A}) \triangleleft \mathbf{Im}\,\mathcal{A}$.

3. *Если L – инвариантное подпространство относительно линейного преобразования $\mathcal{A}:V \to V$, то L – инвариантно относительно любой натуральной степени этого преобразования, причем*

$$\mathcal{A}^m(L) \triangleleft \ldots \triangleleft \mathcal{A}(L) \triangleleft \mathcal{E}(L)=L.$$

В самом деле, каждое из указанных множеств является линейным подпространством, так как это образы сужений линейных операторов, например, $\mathcal{A}^m(L)=\mathbf{Im}\,(\mathcal{A}_L)^m$. Докажем, например, включение $\mathcal{A}^2(L) \triangleleft \mathcal{A}(L)$. Для любого $w \in \mathcal{A}^2(L)$ существует вектор $v \in \mathcal{A}(L) \triangleleft L$, что $w=\mathcal{A}(v)$. Следовательно, $w \in \mathcal{A}(L)$.

4. *Если L – инвариантное подпространство относительно линейного преобразования $\mathcal{A}:V \to V$, то L – инвариантно относительно любого многочлена от этого преобразования.*

теорема о сужении

Теорема 9.2 (о матрицах оператора и его сужения на инвариантное подпространство). *Пусть $\mathcal{A}:V \to V$ – линейное преобразование n-мерного пространства V, а L – подпространство, инвариантное относительно преобразования $\mathcal{A}$. Тогда существует базис $(e)=(e_1,\ldots,e_n)$ пространства V, в котором матрица A преобразования $\mathcal{A}$ имеет нулевой угол:*

$$A=\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline O & D \end{array}\right),$$

где B – матрица сужения $\mathcal{A}_L$ преобразования $\mathcal{A}$ на подпространство L, O – нулевая матрица размеров $(n-l)\times l$, $l=\dim L$. И наоборот, *если в некотором базисе (e) матрица A преобразования $\mathcal{A}$ имеет нулевой угол (нулевую матрицу O размеров $(n-l)\times l$), то преобразование $\mathcal{A}$ имеет l-мерное инвариантное подпространство.*

В самом деле, возьмем базис $e_1,\ldots,e_l$ подпространства L и дополним его векторами $e_{l+1},\ldots,e_n$ до базиса $e_1,\ldots,e_n$ всего пространства V. Раскладывая образы первых l базисных векторов по этому базису, получаем

$$\mathcal{A}(e_i)=a_{1i}e_1+\ldots+a_{li}e_l+0\cdot e_{l+1}+\ldots+0\cdot e_n,$$

так как $\mathcal{A}(e_i) \in L$, $i=1,\ldots,l$. Следовательно, последние $(n-l)$ элементов первых l столбцов матрицы A преобразования $\mathcal{A}$ равны нулю. Обратное утверждение доказывается, проводя аналогичные рассуждения в обратном порядке.

Следствие. *Если n-мерное пространство V представлено в виде прямой суммы ненулевых инвариантных относительно преобразования $\mathcal{A}$ подпространств*

$$V=L_1 \oplus \ldots \oplus L_k,$$

то существует базис, в котором матрица преобразования имеет блочно-диагональный вид

$$A=diag(A_1,\ldots,A_k)=\begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_k \end{pmatrix},$$

где A_i – матрица сужения $\mathcal{A}_{L_i}$ преобразования $\mathcal{A}$ на подпространство L_i, $i=1,\ldots,k$.

Например, рассмотрим операторы проектирования $\Pi_{L_1}:V \to V$ и отражения $Z_{L_1}:V \to V$ (см. п.7, 8 в разд. 9.3.1). Объединяя базисы подпространств L_1 и L_2, получаем базис пространства $V=L_1 \oplus L_2$, в котором матрицы преобразований имеют блочно-диагональный вид

$$\Pi_{L_1}=\left(\begin{array}{c|c} E & O \\ \hline O & O \end{array}\right),\quad Z_{L_1}=\left(\begin{array}{c|c} E & O \\ \hline O & -E \end{array}\right).$$

27) Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования (разд.9.4.1). Геометрический смысл собственных векторов (с.482). Примеры (разд.9.4.2). Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов (с.486).

Пусть $\mathcal{A}:V \to V$ – линейное преобразование n-мерного линейного пространства V. Ненулевой вектор s линейного пространства V, удовлетворяющий условию

$$\mathcal{A}(s)=\lambda s, \tag{9.5}$$

называется ***собственным вектором линейного преобразования*** $\mathcal{A}$. Число λ в равенстве (9.5) называется ***собственным значением преобразования*** $\mathcal{A}$. Говорят, что собственный вектор ***соответствует*** (***принадлежит***) ***собственному значению*** λ. Если пространство V вещественное (комплексное), то собственное значение λ – действительное (комплексное) число.

Множество всех собственных значений линейного преобразования называется его ***спектром***.

Поясним геометрический смысл собственных векторов. Ненулевой вектор s является собственным для преобразования $\mathcal{A}$, если его образ $\mathcal{A}(s)$ коллинеарен прообразу s. Другими словами, *если s – собственный вектор, то преобразование $\mathcal{A}$ имеет одномерное инвариантное подпространство $Lin(s)$*. Справедливо и обратное утверждение.

В самом деле, пусть собственный вектор s соответствует некоторому собственному значению λ. Любой вектор v из $Lin(s)$ имеет вид $v=\alpha s$, где α – любое число из заданного поля. Найдем образ этого вектора

$$\mathcal{A}(v)=\mathcal{A}(\alpha s)=\alpha\mathcal{A}(s)=\alpha\lambda s \in Lin(s).$$

Следовательно, $\mathcal{A}(v) \in Lin(s)$ для любого вектора $v \in Lin(s)$, т.е. подпространство $Lin(s)$ инвариантно относительно преобразования $\mathcal{A}$. Размерность подпространства $Lin(s)$ равна единице, так как $s \ne o$ по определению.

Обратное утверждение доказывается, проводя рассуждения в обратном порядке.

Примеры

1. Для нулевого преобразования $\mathcal{O}:V \to V$ любой ненулевой вектор $s \in V$ является собственным, соответствующим нулевому собственному значению $\lambda=0$, так как $\mathcal{O}(s)=0\cdot s$ $\quad \forall s \in V$.

2. Для тождественного преобразования $\mathcal{E}:V \to V$ любой ненулевой вектор $s \in V$ является собственным, соответствующим единичному собственному значению $\lambda=1$, так как $\mathcal{E}(s)=1\cdot s$ $\quad \forall s \in V$.

3. Для центральной симметрии $Z_o:V \to V$ любой ненулевой вектор $s \in V$ является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda=-1$, так как $Z_o(s)=(-1)\cdot s$ $\quad \forall s \in V$.

4. Для гомотетии $\mathcal{H}_\lambda:V \to V$ любой ненулевой вектор $s \in V$ является собственным, соответствующим собственному значению λ (коэффициенту гомотетии), так как $\mathcal{H}_\lambda(s)=\lambda\cdot s$ $\quad \forall s \in V$.

а алгоритм ты знаешь

28) Характеристический многочлен линейного преобразования и его свойства *(теорема 9.3, замечания 9.4)*

Теорема 9.3 (о собственных векторах линейного преобразования и его матрицы). *Пусть $\mathcal{A}:V\to V$ – линейное преобразование n-мерного линейного пространства V с базисом $e_1,\ldots,e_n$. Тогда собственное значение λ и координатный столбец s собственного вектора $\boldsymbol{s}$ преобразования $\mathcal{A}$ являются собственным значением и собственным вектором матрицы A* (см. разд. 7.2.1) *этого преобразования, определенной относительно базиса* $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$, т.е.

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{s})=\lambda\cdot\boldsymbol{s}\quad\Rightarrow\quad As=\lambda\cdot s,$$

где $\boldsymbol{s}=s_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+s_n\boldsymbol{e}_n$, $s=\begin{pmatrix}s_1 & \cdots & s_n\end{pmatrix}^T$. Обратное утверждение справедливо при дополнительных условиях: *если столбец $s=\begin{pmatrix}s_1 & \cdots & s_n\end{pmatrix}^T$ и число λ являются собственным вектором и собственным значением матрицы A, причем числа $s_1,\ldots,s_n,\lambda$ принадлежат тому же числовому полю, над которым определено линейное пространство V, то вектор $\boldsymbol{s}=s_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+s_n\boldsymbol{e}_n$ и число λ являются собственным вектором и собственным значением линейного преобразования $\mathcal{A}:V\to V$ с матрицей A в базисе $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$.*

В самом деле, условие (9.5) в координатной форме имеет вид (9.6), что совпадает с определением (7.13) собственного вектора матрицы. Наоборот, из равенства (9.6) следует равенство (9.5) при условии, что векторы $\boldsymbol{s}=s_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+s_n\boldsymbol{e}_n$ и $\lambda\cdot\boldsymbol{s}$ определены, т.е. числа $s_1,\ldots,s_n,\lambda$ принадлежат тому же числовому полю, над которым определено линейное пространство.

Напомним, что нахождение собственных значений матрицы сводится к решению ее характеристического уравнения $\Delta_A(\lambda)=0$, где $\Delta_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)$ – характеристический многочлен матрицы A. Для линейного преобразования введем аналогичные понятия.

Характеристическим многочленом линейного преобразования $\mathcal{A}:V\to V$ n-мерного линейного пространства называется характеристический многочлен $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)=\det(A-\lambda E)$ матрицы A этого преобразования найденной относительно любого базиса пространства V.

Уравнение $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)=0$ называется ***характеристическим уравнением линейного преобразования***.

Преобразование $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$ называется ***характеристическим*** для линейного преобразования $\mathcal{A}:V\to V$.

29) Теорема о существовании одномерного или двумерного инвариантного подпространства линейного преобразования вещественного линейного пространства *(теорема 9.2 с.484-486).*

Теорема 9.2 (о матрицах оператора и его сужения на инвариантное подпространство). *Пусть $\mathcal{A}:V\to V$ – линейное преобразование n-мерного пространства V, а L – подпространство, инвариантное относительно преобразования $\mathcal{A}$. Тогда существует базис $(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ пространства V, в котором матрица A преобразования $\mathcal{A}$ имеет нулевой угол:*

$$A=\left(\begin{array}{c|c}B & C\\ \hline O & D\end{array}\right),$$

где B – матрица сужения $\mathcal{A}_L$ преобразования $\mathcal{A}$ на подпространство L, O – нулевая матрица размеров $(n-l)\times l$, $l=\dim L$. И наоборот, *если в некотором базисе $(\boldsymbol{e})$ матрица A преобразования $\mathcal{A}$ имеет нулевой угол (нулевую матрицу O размеров $(n-l)\times l$), то преобразование $\mathcal{A}$ имеет l-мерное инвариантное подпространство.*

В самом деле, возьмем базис $e_1,\ldots,e_l$ подпространства L и дополним его векторами $\boldsymbol{e}_{l+1},\ldots,\boldsymbol{e}_n$ до базиса $e_1,\ldots,e_n$ всего пространства V. Раскладывая образы первых l базисных векторов по этому базису, получаем

$$\mathcal{A}(e_i)=a_{1i}e_1+\ldots+a_{li}e_l+0\cdot\boldsymbol{e}_{l+1}+\ldots+0\cdot\boldsymbol{e}_n,$$

так как $\mathcal{A}(e_i)\in L$, $i=1,\ldots,l$. Следовательно, последние $(n-l)$ элементов первых l столбцов матрицы A преобразования $\mathcal{A}$ равны нулю. Обратное утверждение доказывается, проводя аналогичные рассуждения в обратном порядке.

Следствие. *Если n-мерное пространство V представлено в виде прямой суммы ненулевых инвариантных относительно преобразования $\mathcal{A}$ подпространств*

$$V=L_1\oplus\ldots\oplus L_k,$$

то существует базис, в котором матрица преобразования имеет блочно-диагональный вид

$$A=diag(A_1,\ldots,A_k)=\begin{pmatrix}A_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & A_k\end{pmatrix},$$

где A_i – матрица сужения $\mathcal{A}_{L_i}$ преобразования $\mathcal{A}$ на подпространство L_i, $i=1,\ldots,k$.

Например, рассмотрим операторы проектирования $\Pi_{L_1}:V\to V$ и отражения $Z_{L_1}:V\to V$ (см. п.7, 8 в разд. 9.3.1). Объединяя базисы подпространств L_1 и L_2, получаем базис пространства $V=L_1\oplus L_2$, в котором матрицы преобразований имеют блочно-диагональный вид

$$\Pi_{L_1}=\left(\begin{array}{c|c}E & O\\ \hline O & O\end{array}\right),\quad Z_{L_1}=\left(\begin{array}{c|c}E & O\\ \hline O & -E\end{array}\right).$$

теорема об инвар. Пространств.

Теорема 9.4 (об инвариантных подпространствах линейного преобразования вещественного пространства). *У всякого линейного преобразования вещественного линейного пространства существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

Действительно, составим матрицу A линейного преобразования $\mathcal{A}:V\to V$ n-мерного вещественного линейного пространства V в произвольном базисе $e_1,\ldots,e_n$. Элементы этой матрицы – действительные числа. Следовательно, характеристический многочлен $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)=\det(A-\lambda E)$ – это многочлен степени n с действительными коэффициентами. Согласно следствиям 3, 4 основной теоремы алгебры (см. разд. В.4), такой многочлен может иметь действительные корни и пары комплексных сопряженных корней.

Если $\lambda=\lambda$ – действительный корень характеристического уравнения, то и соответствующий собственный вектор $s=\begin{pmatrix}s_1 & \cdots & s_n\end{pmatrix}^T$ матрицы A также действительный. Поэтому он определяет собственный вектор $\boldsymbol{s}=s_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+s_n\boldsymbol{e}_n$ линейного преобразования (см. теорему 9.3). В этом случае существует одномерное инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство $Lin(\boldsymbol{s})$ (см. геометрический смысл собственных векторов).

Если $\lambda=\alpha\pm\beta i$ – пара комплексных сопряженных корней ($\beta\neq 0$), то собственный вектор $s\neq o$ матрицы A также с комплексными элементами: $s=\begin{pmatrix}x_1+y_1 i & \cdots & x_n+y_n i\end{pmatrix}^T$. Его можно представить в виде $s=x+yi$, где x, y – действительные столбцы. Равенство (9.6) при этом будет иметь вид

$$A\cdot(x+yi)=(\alpha+\beta i)\cdot(x+yi).$$

Выделяя действительную и мнимую части, получаем систему

$$\begin{cases}Ax=\alpha x-\beta y,\\ Ay=\beta x+\alpha y.\end{cases}\tag{9.7}$$

Покажем, что столбцы x и y линейно независимы. Рассмотрим два случая. Если $x=o$, то из первого уравнения (9.7) следует, что $y=o$, так как $\beta\neq 0$. Тогда $s=o$, что противоречит условию $s\neq o$. Предположим, что $x\neq o$ и столбцы x и y пропорциональны, т.е. существует такое действительное число γ, что $y=\gamma x$. Тогда из системы (9.7) получаем

$$\begin{cases}Ax=(\alpha-\beta\gamma)x,\\ \gamma Ax=(\beta+\alpha\gamma)x.\end{cases}$$

Прибавляя ко второму уравнению первое, умноженное на $(-\gamma)$, приходим к равенству $\left[(\beta+\alpha\gamma)-\gamma(\alpha-\beta\gamma)\right]x=o$. Так как $x\neq o$, то выражение в квадратных скобках равно нулю, т.е. $(\beta+\alpha\gamma)-\gamma(\alpha-\beta\gamma)=\beta(1+\gamma^2)=0$. Поскольку $\beta\neq 0$, то $\gamma^2=-1$. Этого не может быть, так как γ – действительное число. Получили противоречие. Таким образом, столбцы x и y линейно независимы.

Рассмотрим подпространство $Lin(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+y_n\boldsymbol{e}_n$. Это подпространство двумерное, так как векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ линейно независимы (как показано выше, их координатные столбцы x, y линейно независимы). Из (9.7) следует, что

$$\begin{cases}\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=\alpha\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{y},\\ \mathcal{A}(\boldsymbol{y})=\beta\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y},\end{cases}$$

т.е. образ любого вектора, принадлежащего $Lin(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, также принадлежит $Lin(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Следовательно, $Lin(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ – двумерное подпространство, инвариантное относительно преобразования $\mathcal{A}$, что и требовалось доказать.

30)Собственные и корневые подпространства. Теорема о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств *(разд.9.4.3 с.489-492).*

Свойства собственных векторов

1. *Собственные векторы линейного преобразования, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Аналогичное утверждение было доказано для собственных векторов матрицы (см. свойство 1 в разд. 7.2.1).

2. *Все собственные векторы линейного преобразования $\mathcal{A}:V\to V$, принадлежащие одному собственному значению, совместно с нулевым вектором образуют линейное подпространство, инвариантное относительно преобразования $\mathcal{A}$.* Такое линейное подпространство называется ***собственным*** для преобразования $\mathcal{A}$.

В самом деле, условие (9.5) можно записать в виде $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{o}$, где $\mathcal{E}:V\to V$ – тождественное преобразование. Множество векторов $\boldsymbol{s}$, удовлетворяющих последнему равенству, составляет ядро линейного преобразования $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})$, т.е. является линейным подпространством $\boldsymbol{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})\lhd V$ (собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ). Покажем, что это подпространство инвариантно относительно преобразования $\mathcal{A}$. Действительно, любой вектор $\boldsymbol{s}\in\boldsymbol{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})$ в силу равенств $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{o}\Leftrightarrow\mathcal{A}(\boldsymbol{s})=\lambda\cdot\boldsymbol{s}$ отображается в коллинеарный ему вектор $\lambda\cdot\boldsymbol{s}$, также принадлежащий $\boldsymbol{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})$.

3. *Для собственного значения λ линейного преобразования $\mathcal{A}:V\to V$ существует цепочка инвариантных подпространств*

$$\{\boldsymbol{o}\}\lhd\boldsymbol{K}_\lambda^1\lhd\boldsymbol{K}_\lambda^2\lhd\ldots\lhd\boldsymbol{K}_\lambda^m\lhd V,\tag{9.8}$$

где $\boldsymbol{K}_\lambda^1=\boldsymbol{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})$, $\boldsymbol{K}_\lambda^2=\boldsymbol{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^2,\ldots,$ $\boldsymbol{K}_\lambda^m=\boldsymbol{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^m$; *$m$ – некоторое натуральное число* ($m\le n=\dim V$).

Все перечисленные в цепочке (9.8) множества $\boldsymbol{K}_\lambda^k$, $k=1,\ldots,m$, являются линейными подпространствами по свойству ядра линейного преобразования. Каждое из подпространств $\boldsymbol{K}_\lambda^k$ инвариантно относительно преобразования $\mathcal{A}$, поскольку для любого вектора $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{K}_\lambda^k$ его образ $\boldsymbol{w}=\mathcal{A}(\boldsymbol{v})\in\boldsymbol{K}_\lambda^k$, так как в силу перестановочности многочленов от одного и того же линейного преобразования (см. п.2 замечаний 9.3)

$$(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^k(\boldsymbol{w})=(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^k\mathcal{A}(\boldsymbol{v})=\mathcal{A}(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^k(\boldsymbol{v})=\mathcal{A}(\boldsymbol{o})=\boldsymbol{o},$$

так как $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^k(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{o}$ $\forall\boldsymbol{v}\in K_\lambda^k$ согласно определения ядра.

Докажем включение $K_\lambda^1\lhd K_\lambda^2$. Если $\boldsymbol{v}\in K_\lambda^1$, то $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{o}$, при этом очевидно, что $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})\cdot(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})(\boldsymbol{v})=(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})(\boldsymbol{o})=\boldsymbol{o}$, т.е. $\boldsymbol{v}\in K_\lambda^2$. Остальные включения доказываются аналогично.

Из цепочки (9.8) "расширяющихся" подпространств следует, что их размерности не убывают

$$0\le\dim\boldsymbol{K}_\lambda^1\le\dim\boldsymbol{K}_\lambda^2\le\ldots\le\dim\boldsymbol{K}_\lambda^m\le\dim V,$$

поэтому в силу конечномерности пространства V существует такое m, что $\dim\boldsymbol{K}_\lambda^m=\dim\boldsymbol{K}_\lambda^{m+1}$, т.е. $\boldsymbol{K}_\lambda^m=\boldsymbol{K}_\lambda^{m+1}$. Покажем, что дальнейшего "увеличения" подпространств нет, т.е. $\boldsymbol{K}_\lambda^m=\boldsymbol{K}_\lambda^{m+1}=\ldots=\boldsymbol{K}_\lambda^{m+k}$ для любого натурального k. Предположим противное. Пусть $\boldsymbol{K}_\lambda^m=\boldsymbol{K}_\lambda^{m+1}$ и для некоторого $k>1$ пространства не совпадают: $\boldsymbol{K}_\lambda^{m+k}\neq\boldsymbol{K}_\lambda^{m+k+1}$, т.е. существует вектор $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{K}_\lambda^{m+k+1}$, который не принадлежит пространству $\boldsymbol{K}_\lambda^{m+k}$. Обозначим $\boldsymbol{w}=(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^k(\boldsymbol{v})$. Тогда, с одной стороны, $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{K}_\lambda^{m+1}$, так как $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^{m+1}(\boldsymbol{w})=(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^{m+k+1}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{o}$, поскольку $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{K}_\lambda^{m+k+1}$. С другой стороны, $\boldsymbol{w}\notin\boldsymbol{K}_\lambda^m$, так как $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^m(\boldsymbol{w})=(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^{m+k}(\boldsymbol{v})\neq\boldsymbol{o}$, поскольку $\boldsymbol{v}\notin\boldsymbol{K}_\lambda^{m+k}$. Следовательно, $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{K}_\lambda^{m+1}$ и $\boldsymbol{w}\notin\boldsymbol{K}_\lambda^m$ одновременно, что противоречит предположению $\boldsymbol{K}_\lambda^m=\boldsymbol{K}_\lambda^{m+1}$.

Таким образом, в цепочке (9.8) размерности пространств $\boldsymbol{K}_\lambda^k$, $k=1,\ldots,m$, возрастают. Поэтому $m\le n=\dim V$.

Корневым подпространством линейного преобразования $\mathcal{A}$ для собственного значения λ называется линейное подпространство $\boldsymbol{K}_\lambda^m=\boldsymbol{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^m$ с наименьшим натуральным показателем m, для которого $\boldsymbol{K}_\lambda^m=\boldsymbol{K}_\lambda^{m+1}$.

4. *Если λ – собственное значение линейного преобразования $\mathcal{A}:V\to V$, то пространство V можно представить в виде прямой суммы $V=\boldsymbol{K}_\lambda^m\oplus\boldsymbol{L}$, где $\boldsymbol{K}_\lambda^m$ – корневое подпространство, а $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{Im}(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^m$ – инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство, в котором нет собственных векторов, принадлежащих собственному значению λ.*

В самом деле, покажем, что пересечение этих подпространств есть нулевой вектор: $\boldsymbol{K}_\lambda^m\cap\boldsymbol{L}=\{\boldsymbol{o}\}$. Выберем вектор $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{K}_\lambda^m\cap\boldsymbol{L}$. Так как вектор $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{L}$, то существует такой вектор $\boldsymbol{v}\in V$, что $\boldsymbol{w}=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^m(\boldsymbol{v})$. Поскольку $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{K}_\lambda^m$, то $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^m(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{o}$. Тогда $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{2m}(\boldsymbol{v})=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^m(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{o}$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{K}_\lambda^{2m}$, но $\boldsymbol{K}_\lambda^{2m}=\boldsymbol{K}_\lambda^m$, так как $\boldsymbol{K}_\lambda^m$ – корневое подпространство. Значит, $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{K}_\lambda^m\Rightarrow\boldsymbol{w}=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^m(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{o}$, т.е. $\boldsymbol{K}_\lambda^m\cap\boldsymbol{L}=\{\boldsymbol{o}\}$. По теореме 9.1 о размерности ядра и образа получаем, что $\dim\boldsymbol{K}_\lambda^m+\dim\boldsymbol{L}=\dim V$. Следовательно, пространство V можно представить в виде прямой суммы подпространств $V=\boldsymbol{K}_\lambda^m\oplus\boldsymbol{L}$ (см. признаки прямых сумм подпространств в разд.8.6.4).

Докажем, что в $\boldsymbol{L}$ нет собственных векторов, принадлежащих собственному значению λ. Действительно, пусть $\boldsymbol{s}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ. Тогда $\boldsymbol{s}\in\boldsymbol{K}_\lambda^1$ и в силу (9.8) $\boldsymbol{s}\in\boldsymbol{K}_\lambda^m$. Подпространство $\boldsymbol{L}$ имеет с $\boldsymbol{K}_\lambda^m$ только один общий вектор (нулевой). Поэтому $\boldsymbol{s}\notin\boldsymbol{L}$, так как $\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{o}$. Инвариантность подпространства $\boldsymbol{L}$ следует из перестановочности операторов $\mathcal{A}$ и $(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^m$ (см. п.2 замечаний 9.3). В самом деле, для любого вектора $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{L}$ существует прообраз $\boldsymbol{v}\in V$: $\boldsymbol{w}=(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^m(\boldsymbol{v})$. Поэтому в силу перестановочности операторов

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{w})=\mathcal{A}(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^m(\boldsymbol{v})=(\mathcal{A}-\lambda\cdot\mathcal{E})^m\mathcal{A}(\boldsymbol{v})\in\boldsymbol{L},$$

поскольку $\mathcal{A}(\boldsymbol{v})\in V$ и $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{Im}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^m$. Таким образом, инвариантность подпространства $\boldsymbol{L}$ доказана, так как $\mathcal{A}(\boldsymbol{w})\in\boldsymbol{L}$ $\forall\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{L}$.

Теорема 9.5 (о разложении пространства в сумму корневых подпространств). *Если все различные корни $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ характеристического уравнения линейного преобразования $\mathcal{A}:V\to V$ являются его собственными значениями, то пространство V можно разложить в прямую сумму инвариантных (корневых) подпространств:*

$$V=\boldsymbol{K}_{\lambda_1}^{m_1}\oplus\ldots\oplus\boldsymbol{K}_{\lambda_k}^{m_k},\tag{9.9}$$

где $\boldsymbol{K}_{\lambda_i}^{m_i}=\boldsymbol{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_i\cdot\mathcal{E})^{m_i}$ – корневое подпространство, соответствующее собственному значению λ_i, $i=1,\ldots,k$.

31) Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений. Теорема о кратностях *(разд.9.4.3 с.493)*. Условие приводимости матрицы линейного преобразования к диагональному виду *(теорема 9.7 и ее следствия с.495-496)*.

Алгебраической кратностью собственного значения λ_1 линейного преобразования $\mathcal{A}: V \to V$ называется кратность корня $\lambda = \lambda_1$ характеристического многочлена $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)$ (или, что то же самое, кратность корня характеристического уравнения $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$).

Геометрической кратностью собственного значения λ_1 линейного преобразования $\mathcal{A}: V \to V$ называется размерность собственного подпространства $K^1_{\lambda_1} = Ker(\mathcal{A} - \lambda_1 \cdot \mathcal{E})$, соответствующего этому собственному значению.

Теорема 9.6 (о кратностях собственных значений). *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Представим пространство V в виде прямой суммы $V = K^{m_1}_{\lambda_1} \oplus L$ (см. свойство 4) и обозначим $r = \dim K^{m_1}_{\lambda_1}$. Выбрав базис пространства $K^{m_1}_{\lambda_1}$, дополним его до базиса всего пространства. В этом базисе, согласно следствию теоремы 9.5, матрица A преобразования $\mathcal{A}$ будет иметь блочно-диагональный вид $A = diag(A_1, A_2)$, где квадратная матрица A_1 порядка r является матрицей сужения $\mathcal{A}_{K^{m_1}_{\lambda_1}}$ преобразования $\mathcal{A}$ на подпространство $K^{m_1}_{\lambda_1}$, а матрица A_2 является матрицей сужения $\mathcal{A}_L$. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид (см. определитель блочно-диагональной матрицы в разд. 2.3.4)

$$\det(A - \lambda E) = \det(A_1 - \lambda E) \cdot \det(A_2 - \lambda E) = p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda),$$

где $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$ – многочлены степеней r и $(n-r)$ соответственно. Так как сужение $\mathcal{A}_{K^{m_1}_{\lambda_1}}$ не имеет собственных значений, отличных от λ_1, то $p_1(\lambda) = (-1)^r(\lambda - \lambda_1)^r$, в силу того, что $p_1(\lambda_1) = 0$ и основной теоремы алгебры. Поскольку сужение $\mathcal{A}_L$ не имеет собственных векторов, принадлежащих собственному значению λ_1, то $p_2(\lambda_1) \neq 0$. Следовательно, r – алгебраическая кратность собственного значения λ_1. Тогда утверждение теоремы следует из включения (9.8): $\dim K^1_{\lambda_1} \le \dim K^{m_1}_{\lambda_1}$, так как $K^1_{\lambda_1} \triangleleft K^{m_1}_{\lambda_1}$.

Теорема

Говорят, что линейное преобразование $\mathcal{A}: V \to V$ n-мерного линейного пространства V ***приводится к диагональному виду***, если существует базис, в котором матрица A преобразования диагональная, т.е. $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – некоторые числа, среди которых могут быть равные. Если преобразование $\mathcal{A}$ приводится к диагональному виду, то оно называется ***диагонализируемым***.

Теорема 9.7 (о диагонализируемости линейного преобразования). *Для того чтобы линейное преобразование приводилось к диагональному виду, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического многочлена являлись собственными значениями преобразования и геометрическая кратность каждого собственного значения была равна его алгебраической кратности.*

Достаточность следует из теорем 9.5 и 9.6. Действительно, если для каждого из различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ геометрическая кратность равна алгебраической кратности, то $\dim K^1_{\lambda_i} = \dim K^{m_i}_{\lambda_i}$, т.е. $K^1_{\lambda_i} = K^{m_i}_{\lambda_i}$ для всех $i = 1, ..., k$. Поэтому в равенстве (9.9) корневые подпространства можно заменить собственными:

$$V = K^1_{\lambda_1} \oplus ... \oplus K^1_{\lambda_k}.$$

Выбрав в каждом собственном подпространстве базис и объединив все эти базисы в единую систему, получим базис всего пространства, составленный из собственных векторов. Достаточность доказана. Необходимость доказывается путем приведения тех же рассуждений, но в обратном порядке.

В разд. 7.2.2 было доказано, что существование n линейно независимых собственных векторов необходимо и достаточно для диагонализируемости матрицы при помощи преобразования подобия (см. теорему 5.7). Теорема 9.7 дает более тонкое условие диагонализируемости матрицы линейного преобразования. В разд. 7.2.2 отмечалось также, что не всякую матрицу можно привести к диагональному виду при помощи преобразования подобия (см. пример 7.9). Аналогичный вывод справедлив и для линейного преобразования.

Следствие 1. *Если характеристическое уравнение линейного преобразования комплексного (вещественного) пространства имеет n попарно различных комплексных* (*действительных*) *корней* (короче говоря, *преобразование имеет* ***простой спектр***), *то это преобразование приводится к диагональному виду.*

Действительно, в этом случае алгебраическая и геометрическая кратности каждого собственного значения равны единице.

Следствие 2. *Если сумма размерностей всех собственных подпространств линейного преобразования $\mathcal{A}: V \to V$ равна размерности линейного пространства V, то линейное преобразование приводится к диагональному виду.*

32) Жорданова форма матрицы. Собственные и присоединенные векторы. Теорема о приведении матрицы к жордановой форме (без доказательства) (разд.9.5.2).

Говорят, что линейное преобразование $\mathcal{A}: V \to V$ n-мерного линейного пространства V ***приводится к каноническому виду***, если существует базис, в котором матрица A преобразования имеет нормальную жорданову форму (см. разд.7.3). Такой базис называется ***жордановым***.

Напомним, что жордановой клеткой r-го порядка, соответствующей собственному значению λ, называют квадратную матрицу r-го порядка (7.35):

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}. \qquad (9.10)$$

Жордановой матрицей называют блочно-диагональную матрицу вида (7.38):

$$J_A = diag\left(J_{r_1}(\lambda_1), \ldots, J_{r_k}(\lambda_k)\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{r_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ \hline O & J_{r_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline O & O & \cdots & J_{r_k}(\lambda_k) \end{array}\right), \qquad (9.11)$$

на диагонали которой стоят жордановы клетки (9.10), причем среди собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ могут быть равные, порядки $r_1, \ldots, r_k$ жордановых клеток (всех или некоторых) могут совпадать.

структура ж. б.

Пусть преобразование $\mathcal{A}: V \to V$ имеет собственный вектор s, соответствующий собственному значению λ. Вектор $s^{(1)}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{A}(s^{(1)}) = \lambda s^{(1)} + s$, называется ***присоединенным вектором 1-го порядка***. Вектор $s^{(2)}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{A}(s^{(2)}) = \lambda s^{(2)} + s^{(1)}$, называется ***присоединенным вектором 2-го порядка*** и т.д. Присоединенный вектор $s^{(p)}$ p-го порядка определяется соотношением $\mathcal{A}(s^{(p)}) = \lambda s^{(p)} + s^{(p-1)}$, где $s^{(p-1)}$ – присоединенный вектор $(p-1)$-го порядка.

Определение присоединенных векторов можно записать эквивалентным образом, используя преобразование $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}$ (характеристическое преобразование для преобразования $\mathcal{A}$): вектор $s^{(p)}$ является присоединенным p-го порядка, если $\mathcal{B}^p(s^{(p)}) = s$, где s – собственный вектор преобразования $\mathcal{A}$.

Действительно, при $p = 1$ из условия $\mathcal{B}(s^{(1)}) = s$ получаем $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(s^{(1)}) = s$, т.е. $\mathcal{A}(s^{(1)}) = \lambda s^{(1)} + s$. При $p = 2$ из условия $\mathcal{B}^2(s^{(2)}) = s$ имеем $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2(s^{(2)}) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\left[(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(s^{(2)})\right] = s$. Отсюда $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(s^{(2)}) = s^{(1)}$, т.е. $\mathcal{A}(s^{(2)}) = \lambda s^{(2)} + s^{(1)}$ и т.д. Заметим, что присоединенный вектор $s^{(p)}$ p-го порядка по определению удовлетворяет одновременно двум условиям:

$$\mathcal{B}^p(s^{(p)}) \neq o \quad \text{и} \quad \mathcal{B}^{p+1}(s^{(p)}) = o,$$

так как собственный вектор $s = \mathcal{B}^p(s^{(p)})$ ненулевой, а $\mathcal{B}^{p+1}(s^{(p)}) = \mathcal{B}(s) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(s) = o$, поскольку $\mathcal{A}(s) = \lambda s$.

Необходимость рассмотрения присоединенных векторов объясняется следующим свойством: *жорданов базис состоит из собственных и присое-*

33) Алгоритм приведения матрицы к жордановой форме (с.501-502, п.1 замечаний 9.6 и первый способ на с.316).

нахождение жорд. формы

Для нахождения жордановой формы J_A квадратной матрицы A нужно выполнить следующие действия.

1. Составить характеристическую матрицу $(A - \lambda E)$.

2. Найти ее инвариантные множители (7.33) одним из способов, рассмотренных в разд. 7.1.4.

3. По инвариантным множителям (7.33) составить таблицу (7.34) элементарных делителей (см. разд. 7.3.1).

4. По элементарным делителям составить жорданову форму J_A (см. разд.7.3.2).

Нахождение преобразующей матрицы

Рассмотрим два способа нахождения преобразующей матрицы .

Первый способ. Если жорданова форма J_A матрицы A известна, то для нахождения преобразующей матрицы S нужно выполнить следующие действия.

1. Составить матричное уравнение $SJ_A = AS$ относительно неизвестной матрицы S, которое равносильно однородной системе n^2 линейных уравнении с n^2 неизвестными элементами s_{ij} матрицы S.

2. Найти такое частное решение этой системы уравнений, для которого $\det S \neq 0$.

Второй способ. Для нахождения преобразующей матрицы S можно использовать следствие теоремы 7.7.

1. Составить блочную λ-матрицу $(A - \lambda E \mid E)$, приписав к характеристической матрице $(A - \lambda E)$ единичную матрицу того же порядка. При помощи элементарных преобразований, выполняемых над строками и столбцами блочной матрицы, привести ее левый блок к нормальному диагональному виду (7.9). При этом блочная матрица преобразуется к виду $(\Lambda(\lambda) \mid S_A(\lambda))$, где $\Lambda(\lambda) = \operatorname{diag}(e_1(\lambda), \ldots, e_n(\lambda))$ — матрица нормального диагонального вида, эквивалентная матрице $(A - \lambda E)$, а $S_A(\lambda)$ — некоторая элементарная λ-матрица.

2. Составить блочную λ-матрицу $(J_A - \lambda E \mid E)$, приписав к характеристической матрице $(J_A - \lambda E)$ единичную матрицу того же порядка. При помощи элементарных преобразований, выполняемых над строками и столбцами блочной матрицы, привести ее левый блок к нормальному диагональному виду (7.9). При этом блочная матрица преобразуется к виду $(\Lambda(\lambda) \mid S_J(\lambda))$, где $\Lambda(\lambda) = \operatorname{diag}(e_1(\lambda), \ldots, e_n(\lambda))$ такая же матрица, что и в пункте 1, а $S_J(\lambda)$ — некоторая элементарная λ-матрица.

3. Найти λ-матрицу $S(\lambda) = S_J^{-1}(\lambda) \cdot S_A(\lambda)$.

4. Вычислить левое значение $S_{\text{left}}(J_A)$ при замене переменной λ матрицей J_A.

5. Найти преобразующую матрицу S, обращая матрицу $S_{\text{left}}(J_A)$: $S = [S_{\text{left}}(J_A)]^{-1}$.

Действительно, при помощи элементарных преобразований характеристические матрицы $(A - \lambda E)$ и $(J_A - \lambda E)$ приводятся к одному и тому же нормальному диагональному виду $\Lambda(\lambda)$:

Отсюда , то есть

$J_A - \lambda E = S(\lambda) \cdot (A - \lambda E) \cdot T(\lambda)$, где

Согласно следствию теоремы j? 7.6, преобразующая числовая матрица $S = [S_{\text{left}}(J_A)]^{-1}$, т.е. S— это матрица , /Обратная к левому значению λ-матрицы $S_{\text{left}}(J_A)$ при подстановке вместо λ матрицы J_A.

34) Многочлен от жордановой клетки. Алгоритм нахождения многочлена от матрицы *(разд.7.3.4).*

Напомним определение многочлена от матрицы (см. разд.1.3.4). Пусть заданы многочлен (степени m) переменной λ:

$$f(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0, \qquad (7.40)$$

A – квадратная матрица n-го порядка. Выражение вида

$$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\ldots+a_1A+a_0E \qquad (7.41)$$

называется многочленом от матрицы A.

При больших значениях m и n вычисление выражения (7.41) затруднительно из-за операции возведения матрицы в натуральную степень. Поэтому требуется найти другие, эквивалентные определению (7.41), формы записи и алгоритмы эффективного вычисления многочлена от матрицы. Для упрощения (7.41) имеются две возможности. Во-первых, можно упростить матрицу A так, чтобы многочлен (7.40) от упрощенной матрицы уже вычислялся сравнительно просто. Например, выражение (7.41) легко вычисляется, если матрица A диагональная. Во-вторых, можно понизить степень m многочлена, тогда самая трудоемкая операция – возведение матрицы в степень – упрощается.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЫ МАТРИЦЫ

Использование жордановой формы для нахождения многочлена от матрицы основано на трех свойствах.

1. *Многочлены от подобных матриц подобны.*

Действительно, пусть при помощи преобразования подобия матрица A приведена к жордановой форме J_A: $J_A=S^{-1}AS$. Подставим $A=S\,J_AS^{-1}$ в правую часть (7.41):

$$f(A)=a_m\left(SJ_AS^{-1}\right)^m+a_{m-1}\left(SJ_AS^{-1}\right)^{m-1}+\ldots+a_1\left(SJ_AS^{-1}\right)+a_0E.$$

Учитывая, что $\left(SJ_AS^{-1}\right)^k=\underbrace{SJ_AS^{-1}\cdot SJ_AS^{-1}\cdot\ldots\cdot SJ_AS^{-1}}_{k\text{ множителей } J_A}=S\,J_A^k\,S^{-1}$ для любого натурального k, получаем

$$f(A)=S\left(a_mJ_A^m+a_{m-1}J_A^{m-1}+\ldots+a_1J_A+a_0E\right)S^{-1}=S\,f(J_A)\,S^{-1}.$$

Таким образом, многочлены $f(A)$ и $f(J_A)$ подобны (с той же самой преобразующей матрицей S):

$$A=S\,J_AS^{-1} \quad\Rightarrow\quad f(A)=S\,f(J_A)\,S^{-1}.$$

2. *Многочлен от блочно-диагональной матрицы является блочно-диагональной матрицей.*

Пусть $A=\left(\begin{array}{c|c}A_1 & O\\ \hline O & A_2\end{array}\right)$, где A_1 и A_2 – квадратные матрицы, а O – нулевые матрицы соответствующих размеров. Для блочно-диагональных матриц справедливы равенства (они следуют из операций над блочными матрицами (см. разд.1.5.1)):

$$A^k=\left(\begin{array}{c|c}A_1 & O\\ \hline O & A_2\end{array}\right)^k=\left(\begin{array}{c|c}A_1^k & O\\ \hline O & A_2^k\end{array}\right),\quad a_kA^k=\left(\begin{array}{c|c}a_kA_1^k & O\\ \hline O & a_kA_2^k\end{array}\right),\text{ где } k\in N.$$

Поэтому $f(A)=\left(\begin{array}{c|c}f(A_1) & O\\ \hline O & f(A_2)\end{array}\right)$. Для большего числа блоков доказательство аналогичное.

3. *Многочлен* (7.41) *от жордановой клетки* $J_r(\lambda_0)$ *имеет вид*

$$f(J_r(\lambda_0))=\begin{pmatrix} f(\lambda_0) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(\lambda_0)\\ 0 & f(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(r-2)!}f^{(r-2)}(\lambda_0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_0)\end{pmatrix}. \qquad (7.42)$$

Это верхняя треугольная матрица r-го порядка, на главной диагонали которой стоят значения функции $f(\lambda)$ в точке λ_0, над диагональю – значения первой производной в этой же точке и т.д., т.е. коэффициенты ряда Тейлора [19,25,44] для функции $f(\lambda)$.

Действительно, разложим многочлен (7.40) по формуле Тейлора в окрестности точки $\lambda=\lambda_0$:

$$f(\lambda)=f(\lambda_0)+\frac{1}{1!}f'(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)+\frac{1}{2!}f''(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^2+\ldots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^m.$$

Остаточный член в данном случае равен нулю, так как все производные более высокого порядка, чем m, тождественно равны нулю. При вычислении $f(J_r(\lambda_0))$ линейный двучлен $(\lambda-\lambda_0)$ заменяется матрицей

$$I=\left(J_r(\lambda_0)-\lambda_0E\right)=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_0 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

у которой элементы над главной диагональю равны единице, а остальные элементы равны нулю, т.е. $I=\begin{pmatrix}0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{r-1}\end{pmatrix}$, где e_i – i-й столбец единичной матрицы r-го порядка.

Можно показать, что при возведении в степень единичные элементы матрицы I смещаются вверх:

$$I^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{r-2}\end{pmatrix},\ I^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & e_1 & \cdots & e_{r-3}\end{pmatrix}\quad\text{и т.д.},$$

причем I^k – нулевая матрица при $k\ge r$. Подставляя эти матрицы в формулу Тейлора, получаем

$$f(A)=f(\lambda_0)\cdot E+\frac{1}{1!}f'(\lambda_0)\cdot I+\frac{1}{2!}f''(\lambda_0)\cdot I^2+\ldots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(\lambda_0)\cdot I^m.$$

Складывая матрицы в правой части, получаем квадратную матрицу r-го порядка, у которой элементы главной диагонали равны $f(\lambda_0)$, элементы над главной диагональю равны $\frac{1}{1!}\cdot f'(\lambda_0)$ и т.д., т.е. матрицу вида (7.42).

35) Аннулирующий многочлен матрицы. Теорема Гамильтона - Кэли *(с.300-301).*

Многочлен $p(\lambda)$ переменной λ называется ***аннулирующим*** для квадратной матрицы A, если при подстановке в многочлен матрицы A вместо переменной λ получаем нулевую матрицу, т.е. $p(A)=O$.

Напомним, что для любой квадратной матрицы A многочлен $\Delta_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)$ называется характеристическим.

Теорема 7.7 (теорема Гамильтона–Кэли). *Характеристический многочлен матрицы является аннулирующим для нее, т.е.* $\Delta_A(A)=O$.

В самом деле, обозначим через $(A-\lambda E)^+$ матрицу, присоединенную к характеристической матрице $(A-\lambda E)$. Тогда из (7.7) следует

$$(A-\lambda E)\cdot(A-\lambda E)^+=\Delta_A(\lambda)E \quad\text{и}\quad (A-\lambda E)^+\cdot(A-\lambda E)=\Delta_A(\lambda)E. \qquad (7.27)$$

Правые части этих равенств можно рассматривать как многочлены с матричными коэффициентами (каждый коэффициент характеристического многочлена умножается на единичную матрицу). Из (7.27) следует, что λ-матрица $\Delta_A(\lambda)E$ делится на $(A-\lambda E)$ слева и справа без остатка, т.е. остаток равен нулевой матрице. По обобщенной теореме Безу (теорема 7.2) остаток равен левому и правому значениям многочлена $\Delta_A(\lambda)E$ при подстановке матрицы A вместо λ. Отсюда получаем $\Delta_A(A)E=O$, т.е. $\Delta_A(A)=O$, что и требовалось доказать.

36) Ортогональные преобразования: определение, примеры, свойства. Каноническая форма ортогонального преобразования и его геометрический смысл. Алгоритм приведения матрицы ортогонального преобразования к каноническому виду *(разд.9.6.1 с.513-519).*

Преобразование $\mathcal{A}:E\to E$ n-мерного евклидова пространства E называется ***ортогональным***, если оно сохраняет скалярное произведение векторов, т.е.

$$(\mathcal{A}(v),\mathcal{A}(w))=(v,w)\quad \forall\, v,w\in E. \qquad (9.16)$$

Из определения следуют ***простейшие свойства***: *при ортогональном преобразовании не изменяются длины векторов, а **также** углы между векторами*, поскольку $|\mathcal{A}(v)|^2=(\mathcal{A}(v),\mathcal{A}(v))=(v,v)=|v|^2$ и для ненулевых векторов $\cos\varphi=\dfrac{(v,w)}{|v|\cdot|w|}=\dfrac{(\mathcal{A}(v),\mathcal{A}(w))}{|\mathcal{A}(v)|\cdot|\mathcal{A}(w)|}$.

Рассмотрим линейное преобразование $\mathcal{A}:E\to E$ n-мерного евклидова пространства E. Напомним, что евклидово пространство является вещественным линейным пространством со скалярным произведением (см. разд.8.8). Поэтому все понятия и свойства линейных преобразований вещественных линейных пространств полностью переносятся на линейные преобразования евклидовых пространств. Наличие скалярного произведения позволяет определить важные свойства таких преобразований.

Свойства

0) Ортогональное преобразование-линейное

1) Ортогональные преобразования и только они переводят ортонормированный базис в ортонормированный.

2) Необходимым и достаточным условием ортогональности A является также равенство A * = A − 1, где A * — сопряженное, а A − 1 — обратное линейные преобразования.

3) В ортонормированном базисе ортогональные преобразования (и только им) соответствуют ортогональные матрицы.

4) Собственные значения ортогональных преобразований равны по модулю 1, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

5) Определитель ортогонального преобразования равен 1 (собственное ортогональное преобразование) или − 1 (несобственное ортогональное преобразование).

6) В произвольном n-мерном евклидовом пространстве ортогональное преобразование является композицией конечного числа отражений.

7) Множество всех ортогональных преобразований евклидова пространства образует группу относительно операции композиции — ортогональную группу данного евклидова пространства.

8) Собственные ортогональные преобразование образуют нормальную подгруппу в этой группе (специальную ортогональную группу).

37) Сопряженные преобразования: определение, примеры, свойства. Матрицы сопряженных преобразований *(разд.9.6.2)*.

Сопряженные преобразования

Пусть $\mathcal{A}:E\to E$ – линейное преобразование n-мерного евклидова пространства E. Преобразование $\mathcal{A}^*:E\to E$ называется ***сопряженным*** преобразованию $\mathcal{A}$, если для любых векторов x и y из пространства E выполняется равенство

$$(\mathcal{A}(x),y)=(x,\mathcal{A}^*(y)). \qquad (9.21)$$

Свойства сопряженного преобразования

1. *Сопряженное преобразование – линейное.*

Докажем, например, однородность: $\mathcal{A}^*(\lambda y)=\lambda\mathcal{A}^*(y)\ \ \forall\lambda\in R$. Пусть $(e)=(e_1,\ldots,e_n)$ – ортонормированный базис пространства E. Тогда

$$(e_1,\mathcal{A}^*(\lambda y))=(\mathcal{A}(e_1),\lambda y)=\lambda(\mathcal{A}(e_1),y)=\lambda(e_1,\mathcal{A}^*(y))=(e_1,\lambda\mathcal{A}^*(y)),$$

т.е. первые координаты векторов $\mathcal{A}^*(\lambda y)$ и $\lambda\mathcal{A}^*(y)$ равны. Аналогично показывается, что равны и остальные координаты этих векторов. Значит, это равные векторы. Аддитивность сопряженного преобразования доказывается аналогично.

2. *Для каждого линейного преобразования существует единственное сопряженное преобразование, причем матрица сопряженного преобразования (в любом ортонормированном базисе) является транспонированной по отношению к матрице данного преобразования (в том же базисе).*

Пусть в ортонормированном базисе $(e)=(e_1,\ldots,e_n)$ преобразование $\mathcal{A}$ имеет матрицу A. Рассмотрим преобразование $\mathcal{A}'$, которое в данном базисе имеет матрицу A^T. Для координатных столбцов x, y любых векторов x, y имеем равенство $(Ax,y)=x^TA^Ty=(x,A^Ty)$ (см. (8.27) в разд.8.8.2). Следовательно, $(\mathcal{A}(x),y)=(x,\mathcal{A}'(y))$, т.е. согласно (9.21) преобразование $\mathcal{A}'$ – сопряженное: $\mathcal{A}'=\mathcal{A}^*$. Итак, сопряженное преобразование существует и его матрица в любом ортонормированном базисе является транспонированной A^T по отношению к матрице данного преобразования. Отсюда также следует единственность, так как транспонированная матрица находится однозначно.

3. *Если L – подпространство, инвариантное относительно линейного преобразования $\mathcal{A}:E\to E$, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ является инвариантным подпространством относительно сопряженного преобразования $\mathcal{A}^*$.* Действительно, покажем, что образ $\mathcal{A}^*(y)$ любого вектора $y\in L^\perp$ ортогонален любому вектору $x\in L$, т.е. $\mathcal{A}^*(y)\in L^\perp$. Учитывая, что $\mathcal{A}(x)\in L$, по определению (9.21) получаем $(x,\mathcal{A}^*(y))=(\mathcal{A}(x),y)=0$, что и требовалось доказать.

Замечания 9.8.

1. Из второго свойства следует, что на сопряженные преобразования переносятся свойства транспонированных матриц (см. разд.1.4.1). В частности: $(\mathcal{A}^*)^*=\mathcal{A}$, $(\mathcal{A}\mathcal{B})^*=\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$, а также $(\mathcal{A}^{-1})^*=(\mathcal{A}^*)^{-1}$ для обратимого преобразования.

2. Матрица A^* сопряженного преобразования $\mathcal{A}^*$ в произвольном (неортонормированном) базисе связана с матрицей A преобразования $\mathcal{A}$ следующей формулой

$$A^*=G^{-1}A^TG,$$

где G – матрица Грама данного базиса.

3. Условие ортогональности преобразования $\mathcal{A}$ (см. свойство 2) можно представить в виде $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^{-1}$.

---

38) Самосопряженные преобразования: определение, примеры, свойства *(разд.9.6.3 с.523-524)*

Самосопряженное преобразование

Линейное преобразование $\mathcal{A}:E\to E$ n-мерного евклидова пространства E называется ***самосопряженным***, если оно является сопряженным самому себе, а именно $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$, т.е. $(\mathcal{A}(x),y)=(x,\mathcal{A}(y))$ для любых векторов x и y из пространства E.

Например, самосопряженными преобразованиями являются нулевое преобразование $\mathcal{O}$ и тождественное $\mathcal{E}$.

Свойства самосопряженного преобразования

1. *Матрица A самосопряженного преобразования в любом ортонормированном базисе является симметрической* ($A^T=A$), и наоборот, *если в каком-либо ортонормированном базисе матрица преобразования симметрическая, то это преобразование самосопряженное.*

2. *Все корни характеристического уравнения самосопряженного преобразования действительные.*

В самом деле, предположим противное, а именно существование пары комплексных сопряженных корней $\lambda=\alpha\pm\beta i$, $\beta\ne0$. По теореме 9.4 преобразование имеет двумерное инвариантное подпространство с линейно независимыми образующими x и y, удовлетворяющими системе (9.19), которая следует из (9.7):

$$\begin{cases}\mathcal{A}(x)=\alpha x-\beta y,\\ \mathcal{A}(y)=\beta x+\alpha y.\end{cases}$$

Найдем скалярные произведения:

$$(\mathcal{A}(x),y)=\alpha(x,y)-\beta|y|^2,\ (x,\mathcal{A}(y))=\beta|x|^2+\alpha(x,y).$$

Левые части равенств совпадают из-за самосопряженности преобразования $\mathcal{A}$. Значит, равны и правые части: $\alpha(x,y)-\beta|y|^2=\beta|x|^2+\alpha(x,y)$. Отсюда $\beta(|x|^2+|y|^2)=0$. Поскольку $\beta\ne0$, то $x=y=o$, что противоречит линейной независимости x и y.

3. *Собственные векторы, принадлежащие различным собственным значениям самосопряженного преобразования, ортогональны.*

Действительно, пусть $\mathcal{A}(x)=\lambda_1x$ и $\mathcal{A}(y)=\lambda_2y$, $\lambda_1\ne\lambda_2$. Тогда

$$(\mathcal{A}(x),y)=\lambda_1(x,y)\ \text{и}\ (x,\mathcal{A}(y))=\lambda_2(x,y).$$

Так как $(\mathcal{A}(x),y)=(x,\mathcal{A}(y))$, то $\lambda_1(x,y)=\lambda_2(x,y)\ \Leftrightarrow\ (\lambda_1-\lambda_2)(x,y)=0$. Отсюда $(x,y)=0$, так как $\lambda_1\ne\lambda_2$. Значит, собственные векторы x и y ортогональны.

4. *Если L – подпространство, инвариантное относительно самосопряженного преобразования $\mathcal{A}:E\to E$, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ также инвариантно относительно преобразования $\mathcal{A}$.*

Это следует из свойства 3 сопряженных преобразований (см. разд. 9.6.2).

39) Теорема о диагонализируемости матрицы самосопряженного преобразования *(с.524)*.

Теорема 9.10 (о диагонализируемости самосопряженного преобразования). *Для всякого самосопряженного преобразования $\mathcal{A}:E\to E$ n-мерного евклидова пространства E существует ортонормированный базис (из собственных векторов), в котором матрица преобразования имеет диагональный вид*

$$\Lambda=diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n), \qquad (9.22)$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – собственные значения преобразования $\mathcal{A}$, повторенные в соответствии с их кратностью.

Диагональный вид (9.22) называется также ***каноническим видом*** самосопряженного преобразования, а базис, в котором матрица имеет вид (9.22), – ***каноническим***.

Для доказательства теоремы 9.10 нужно показать, что если существует ортонормированный базис пространства E, состоящий из собственных векторов преобразования, тогда оно приводится к диагональному виду (см. разд. 9.5.1). Действительно, для собственного значения λ_1 найдем единичный собственный вектор s_1. Представим пространство в виде прямой суммы $E=L_1\oplus L_1^\perp$, где $L_1=Lin(s_1)$ – одномерное инвариантное подпространство. Сужение преобразования $\mathcal{A}$ (по свойству 4) на инвариантное подпространство $L_1^\perp$ является самосопряженным. Поэтому в $L_1^\perp$ можно найти одномерное инвариантное подпространство $L_2=Lin(s_2)$, где s_2 – собственный вектор, перпендикулярный s_1. Продолжая аналогичным образом, получим $E=L_1\oplus\ldots\oplus L_n$, где $L_j=Lin(s_j)$ – одномерное инвариантное подпространство, причем базис $s_1,\ldots,s_n$ из собственных векторов ортогональный, а после нормировки – ортонормированный.

40) Теорема о структуре невырожденного линейного преобразования евклидова пространства и ее геометрический смысл *(с.525)*.

Самосопряженное преобразование называется ***положительным*** (***неотрицательным***), если $(\mathcal{A}(x),x)>0$ для любого ненулевого вектора $x\in E$ (соответственно $(\mathcal{A}(x),x)\ge0$ для любого вектора $x\in E$).

Эти понятия связаны с положительностью (неотрицательностью) симметрических матриц и квадратичных форм (см. разд. 6.5.4). Действительно, запишем неравенство $(\mathcal{A}(x),x)\ge0$ в координатной форме (в ортонормированном базисе). Учитывая, что $(\mathcal{A}(x),x)=(Ax,x)=x^TA^Tx=x^TAx$, получаем $x^TAx\ge0$ для любого столбца $x\in R^n$, что совпадает с определением неотрицательности квадратичной формы x^TAx.

Отметим следующие свойства положительных и неотрицательных преобразований.

1. *Преобразование $\mathcal{A}$ положительно (неотрицательно) тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительные (неотрицательные).*

2. *Для любого неотрицательного (положительного) преобразования $\mathcal{A}$ существует такое единственное неотрицательное (положительное) преобразование $\mathcal{B}$*, что $\mathcal{B}^2=\mathcal{A}$.

Действительно, в каноническом базисе $(s)=(s_1,\ldots,s_n)$ матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид (9.22). Преобразование $\mathcal{B}$ определяем его матрицей в базисе (s), полагая $B=diag(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$. Тогда $B^2=A$.

3. *Преобразования $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ являются самосопряженными неотрицательными (положительными) для любого (невырожденного) преобразования $\mathcal{A}$.*

Теорема 9.11 (о разложении невырожденного линейного преобразования). *Любое невырожденное линейное преобразование $\mathcal{A}:E\to E$ n-мерного евклидова пространства E можно представить в виде композиции положительного самосопряженного преобразования и ортогонального преобразования.*

Действительно, рассмотрим самосопряженное положительное преобразование $\mathcal{D}=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ (см. свойство 3). Для него существует такое положительное самосопряженное преобразование $\mathcal{S}$, что $\mathcal{D}=\mathcal{S}\mathcal{S}=\mathcal{S}^*\mathcal{S}$ (свойство 2). Рассмотрим преобразование $\mathcal{B}=\mathcal{A}\mathcal{S}^{-1}$. Это преобразование ортогональное (см. п.3 замечаний 9.8), так как

$$\mathcal{B}^*\mathcal{B}=(\mathcal{S}^{-1})^*\underbrace{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}_{\mathcal{D}}\mathcal{S}^{-1}=(\mathcal{S}^{-1})^*\mathcal{D}\mathcal{S}^{-1}=(\mathcal{S}^{-1})^*\underbrace{\mathcal{S}^*\mathcal{S}}_{\mathcal{D}}\mathcal{S}^{-1}=\underbrace{(\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1})^*}_{\mathcal{E}}\underbrace{\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1}}_{\mathcal{E}}=\mathcal{E}.$$

Следовательно, $\mathcal{A}=\mathcal{S}\mathcal{B}$ – композиция положительного самосопряженного и ортогонального преобразований.

Замечания 9.9.

1. Из теоремы 9.10 следует, что *для любой действительной симметрической матрицы A существует диагональная матрица $\Lambda=diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ (с собственными числами матрицы A на главной диагонали) и ортогональная матрица S ($S^T=S^{-1}$), что $\Lambda=S^TAS$.*

2. Всякое обратимое самосопряженное преобразование можно представить как композицию растяжений (с коэффициентами, равными собственным числам $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$) вдоль взаимно перпендикулярных направлений (задаваемых ортонормированным базисом $s_1,\ldots,s_n$ из собственных векторов). Растяжение с отрицательным коэффициентом $\lambda_1<0$ понимается как композиция зеркального отражения и растяжения с коэффициентом $|\lambda_1|$.

3. Теорема 9.11 справедлива для любого линейного преобразования, если условие положительности самосопряженного преобразования заменить условием его неотрицательности.

4. Геометрический смысл теоремы 9.11 следующий: любое невырожденное линейное преобразование можно представить как композицию преобразований, каждое из которых есть либо простое отражение (относительно гиперплоскости), либо простой поворот (двумерной плоскости), либо растяжение вдоль взаимно перпендикулярных направлений.

41) Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Изменение матрицы при линейной замене переменных *(с.232, 237)*.

ных – матрицу-столбец $x=(x_1 \ \cdots \ x_n)^T$, линейную форму можно записать в виде

$$g(x)=cx. \tag{6.4}$$

Многочленом второй степени от n переменных $x_1,\ldots,x_n$ называется выражение вида $p_2(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c_0$, где числа a_{ij}, b_i, c_0 – ***коэффициенты многочлена***: a_{ij} – ***старшие коэффициенты*** (или ***коэффициенты квадратичных членов***), b_i – ***коэффициенты линейных членов***, c_0 – ***свободный член***. У многочлена второй степени не все старшие коэффициенты a_{ij} равны нулю одновременно. Многочлен второй степени называется ***однородным***, если $p_2(\lambda x)=\lambda^2p_2(x)$. Нетрудно показать, что многочлен $p_2(x)$ будет однородным тогда и только тогда, когда отсутствуют линейные члены и свободный член ($b_1=b_2=\ldots=b_n=0$, $c_0=0$).

Квадратичной формой переменных $x_1,\ldots,x_n$ называется однородный многочлен второй степени

$$q(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j, \tag{6.5}$$

коэффициенты которого удовлетворяют ***условиям симметричности*** $a_{ij}=a_{ji}$ $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,n$. Это условие не ограничивает общности, так как сумму двух подобных членов $a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$ с неравными коэффициентами $a_{ij}\neq a_{ji}$ (при $i\neq j$) всегда можно заменить суммой $a'_{ij}x_ix_j+a'_{ji}x_jx_i$ с равными коэффициентами, положив $a'_{ij}=a'_{ji}=\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$. Приводя подобные члены, квадратичную форму (6.5) можно представить в виде

$$q(x)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\ldots+a_{nn}x_n^2.$$

Это вид квадратичной формы ***с приведенными подобными членами***.

Симметрическая матрица $A=(a_{ij})$, составленная из коэффициентов квадратичной формы (6.5), называется ***матрицей квадратичной формы***. Определитель этой матрицы называется ***дискриминантом***, а ее ранг – ***рангом квадратичной формы***. Квадратичная форма называется ***вырожденной***, если ее матрица вырожденная ($\operatorname{rg} A<n$), в противном случае, когда матрица невырожденная ($\operatorname{rg} A=n$), квадратичная форма называется ***невырожденной***.

Составляя из переменных матрицу-столбец $x=(x_1 \ \cdots \ x_n)^t$, квадратичную форму можно записать в виде

$$q(x)=x^TAx. \tag{6.6}$$

Чтобы получить матрицу A квадратичной формы (6.6), нужно:

1) записать квадратичную форму в виде (6.5), разбив удвоенные произведения на сумму двух одинаковых слагаемых;

2) из коэффициентов в (6.5) составить матрицу квадратичной формы. Коэффициенты у отсутствующих членов считаются равными нулю.

Чтобы составить матрицу квадратичной формы с приведенными подобными членами, нужно на главной диагонали матрицы поставить коэффициенты при квадратах переменных, а элементы, симметричные главной диагонали, взять равными половине соответствующих коэффициентов у произведений разных переменных.

Преобразование форм при лин замене переменных

Рассмотрим, как меняются коэффициенты линейной и квадратичной форм при линейной замене переменных.

Пусть переменные $x_1,\ldots,x_n$ (условно называемые ***старыми***) заменяются на переменные $y_1,\ldots,y_n$ (условно называемые ***новыми***) по формулам

$$\begin{cases} x_1=s_{11}y_1+\ldots+s_{1n}y_n, \\ \quad\vdots \\ x_n=s_{n1}y_1+\ldots+s_{nn}y_n, \end{cases} \tag{6.7}$$

где s_{ij} – некоторые числа ($i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,n$). В (6.7) каждая старая переменная является линейной формой новых переменных. Такая замена переменных называется ***линейной***. Составим из коэффициентов s_{ij} линейных форм (6.7) квадратную ***матрицу линейной замены переменных*** $S=(s_{ij})$. Тогда формулы (6.7) можно записать в виде

$$x=Sy. \tag{6.8}$$

Линейная замена (6.8) называется ***невырожденной***, если определитель матрицы S отличен от нуля.

свойства нев. Замен переменных

1. *Если $x=Sy$ – линейная невырожденная замена переменных, то обратная замена $y=S^{-1}x$, выражающая новые переменные ($y_1,\ldots,y_n$) через старые ($x_1,\ldots,x_n$), является также линейной и невырожденной.*

2. *Если $x=Sy$ и $y=Tz$ – линейные невырожденные замены переменных, то замена $x=STz$ является также линейной и невырожденной.*

Получим ***формулу изменения коэффициентов линейной формы при линейной невырожденной замене переменных***. Подставляя выражение (6.8) в линейную форму $g(x)=cx$, получаем снова линейную форму $g(Sy)=cSy=c'y$, коэффициенты $c'=(c'_1 \ \cdots \ c'_n)$ которой связаны с коэффициентами $c=(c_1 \ \cdots \ c_n)$ заданной формы (6.4) равенством

42) Канонический вид квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду *(с.238-240)*.

Говорят, что квадратичная форма имеет ***канонический*** вид, если ее матрица диагональная, другими словами, в квадратичной форме имеются только члены с квадратами переменных, а все попарные произведения различных переменных отсутствуют (соответствующие коэффициенты равны нулю):

$$\tilde{q}(y)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_ny_n^2=y^T\Lambda y, \tag{6.11}$$

где $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ – диагональная матрица, для которой условие симметричности матрицы квадратичной формы, разумеется, выполняется.

Задача приведения квадратичной формы к каноническому виду формулируется следующим образом. Для данной квадратичной формы (6.5) требуется найти такую линейную невырожденную замену переменных (6.8), при которой квадратичная форма принимает канонический вид (6.11). Как показывает следующая теорема, эта задача всегда разрешима. Заметим, что на практике нередко бывает достаточно определить только канонический вид квадратичной формы, не указывая замены переменных.

Теорема 6.1 (о приведении квадратичной формы к каноническому виду). *Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду при помощи некоторой линейной невырожденной замены переменных.*

Конструктивное доказательство этой теоремы составляет содержание метода Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Метод лангранжа

Для приведения квадратичной формы n переменных

$$q(x)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\ldots+a_{nn}x_n^2$$

к каноническому виду нужно выполнить следующие действия.

1. Выбрать такую переменную (***ведущую***), которая входит в квадратичную форму во второй и в первой степени одновременно (если в квадратичной форме есть член с квадратом переменной и с произведением этой переменной на другую переменную), и перейти к п.2.

Если в квадратичной форме нет ведущих переменных, то выбрать пару переменных, произведение которых входит в квадратичную форму с отличным от нуля коэффициентом, и перейти к п.3.

Если в квадратичной форме отсутствуют произведения различных переменных, то никаких преобразований делать не надо, так как она уже имеет канонический вид.

2. По ведущей переменной выделить полный квадрат: собрать в квадратичной форме все члены с ведущей переменной, дополнить сумму этих членов до полного квадрата (разумеется, добавленные члены нужно также и вычесть, чтобы не изменилась сумма). Получим сумму полного квадрата некоторой линейной формы (в которую входит ведущая переменная) и квадратичной формы, в которую ведущая переменная не входит. Сделать замену переменных: линейную форму, содержащую ведущую переменную, принять за одну из новых переменных, а все старые переменные, за исключением ведущей, принять за соответствующие новые. Продолжить преобразования с п.1.

3. Выбранную пару переменных заменить на разность и сумму двух новых переменных, а остальные старые переменные принять за соответствующие новые переменные. При этом произведение пары выбранных переменных преобразуется к разности квадратов двух новых переменных, т.е. в новой квадратичной форме $\tilde{q}(y)$ будут квадраты переменных с отличными от нуля коэффициентами. Продолжить преобразования новой квадратичной формы с п.1.

Идея метода Лагранжа состоит в том, что прием, используемый в п.2 (выделение полного квадрата), исключает одну переменную из числа ведущих. Например, если переменная x_1 – ведущая (т.е. $a_{11}\neq 0$ и хотя бы один из коэффициентов $a_{12},a_{13},\ldots,a_{1n}$ отличен от нуля), то выделяем полный квадрат по переменной x_1 (собираем все члены с x_1 и дополняем их сумму до полного квадрата):

43) Теорема Якоби о приведении квадратичной формы к каноническому виду *(с.242-246)*.

Две квадратные матрицы Aи A'одного и того же порядка называются *конгруэнтными*, если существует такая невырожденная матрица S, что $A'=S^TAS$. Конгруэнтными, например, являются матрицы квадратичных форм , получающиеся при невырожденной замене переменных (6.8), так как они связаны равенством (6.10).

Напомним, что главными минорами квадратной матрицы называются миноры, составленные из ее элементов, стоящих на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами. Например, $M_{i_1i_2\ldots i_k}^{i_1i_2\ldots i_k}$— главный минор k-го порядка $(1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant n)$ квадратной матрицы n-го порядка. Угловыми минорами квадратной матрицы A(n-го порядка) называются следующие главные миноры

где угловой минор $\Delta_k=M_{1\,2\ldots k}^{1\,2\ldots k}$k-го порядка составлен из элементов матрицы A, стоящих на пересечении первых kстрок и первых kстолбцов матрицы A,

Теорема 6.2 Якоби о каноническом виде квадратичной формы .

Если квадратичная форма $q(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^TAx$ *имеет ранг* $r=\operatorname{rg}A$*и ее угловые миноры отличны от нуля: то ее можно привести к каноническому виду при помощи линейной замены переменных* $x=Sy$*с верхней треугольной матрицей* S *вида (6.15).*

Действительно, применяя метод Лагранжа, выбираем первую переменную x_1в качестве ведущей $(\Delta_1=a_{11}\neq 0)$и выделяем по ней полный квадрат. Другими словами, делаем линейную замену переменных (6.12). Этой замене соответствует матрица S_1в (6.14), которая является верхней треугольной вида (6.15). Получим квадратичную форму с матрицей

где звездочкой $(*)$обозначены некоторые элементы матрицы A'. Заметим, что матрица S_1— верхняя треугольная с единицами на главной диагонали. Тогда по свойству 4 конгруэнтных матриц, получаем $\Delta_2=\Delta'_2$, следовательно $\Delta_2=a_{11}a'_{22}=\Delta_1a'_{22}$. Отсюда $a'_{22}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\neq 0$. Значит, вторую переменную можно взять в качестве ведущей и выделить по ней полный квадрат. Для этого делаем линейную замену переменных с матрицей вида (6.15) и т.д. Условия (6.16) обеспечивают возможность применения пункта 2 метода Лагранжа rраз. В результате описанных действий получается канонический вид (6.17). Формулы (6.17) для вычисления Λ_iследуют из свойства 4 конгруэнтных матриц. Так как угловые миноры матриц Aи $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$соответственно равны (по свойству 4 конгруэнтных матриц), то $\Delta_1=\lambda_1,\ \Delta_2=\lambda_1\lambda_2,\ \ldots,\ \Delta_r=\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_r$. Отсюда $\lambda_1=\Delta_1,\ \lambda_2=\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ \ldots\ \lambda_r=\frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}$.

Остальные угловые миноры равны нулю $\Delta_{r+1}=\ldots=\Delta_n$, так как $\operatorname{rg}A=r$.

Таким образом, для нахождения канонического вида квадратичной формы методом Якоби необходимо выполнить следующие действия.

1. Составить матрицу A(n-го порядка) квадратичной формы .

2. Найти первые rотличных от нуля угловых миноров матрицы квадратичной формы . Если $\Delta_1\neq 0,\Delta_2\neq 0,\ldots,\Delta_n\neq 0$, то перейти к пункту 3, положив $r=n$. Если $\Delta_{11}=a_{11}=0$, то процесс закончить, так как метод Якоби неприменим. Если $\Delta_1\neq 0,\Delta_2\neq 0,\ldots,\Delta_r\neq 0$и $\Delta_{r+1}=0$, где $0\leqslant r\leqslant n-1$, то найти отличный от нуля минор (r+l)-порядка, окаймляющий минор $\Delta_r\neq 0$. Если такого минора нет, то перейти к пункту 3, иначе процесс закончить, так как метод Якоби неприменим.

3. Записать искомый канонический вид (6.17) квадратичной формы

44) Нормальный вид квадратичной формы. Закон инерции *(разд.6.5.3)*.

1. Согласно п.2 замечаний 6.5 количество ненулевых коэффициентов в (6.18) равно рангу $r = \operatorname{rg} A$ квадратичной формы. Перенумеруем переменные так, чтобы в сумме (6.18) первыми были p слагаемых с положительными коэффициентами, затем $(r-p)$ слагаемых с отрицательными коэффициентами, а остальные слагаемые с нулевыми коэффициентами. Всего будет r отличных от нуля слагаемых ($\lambda_i \neq 0$, $i = 1,\ldots,r$). Если сделать невырожденную замену переменных

$$y_i = \begin{cases} \dfrac{z_i}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & i \le r, \\ z_i, & i > r. \end{cases}$$

то получим ***нормальный вид*** квадратичной формы

$$\tilde{\tilde{q}}(z) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - z_{p+2}^2 - \ldots - z_r^2, \qquad (6.19)$$

в котором коэффициенты равны либо единице, либо минус единице (переменные $z_{r+1},\ldots,z_n$ входят с нулевыми коэффициентами).

2. Из четырех величин: ранга, положительного и отрицательного индексов и сигнатуры, достаточно знать любые две, чтобы вычислить остальные. Например, если известны ранг r и положительный индекс p (см. форму (6.19)), то отрицательный индекс равен $(r-p)$, а сигнатура $\sigma = p - (r-p) = 2p - r$.

Теорема 6.3 (закон инерции квадратичных форм). *Ранг, положительный и отрицательный индексы, а также сигнатура вещественной квадратичной формы не зависят от действительной невырожденной линейной замены переменных, приводящей квадратичную форму к каноническому виду.*

Из теоремы 6.3 следует, что два канонических вида одной и той же квадратичной формы имеют:

а) одинаковое количество ненулевых слагаемых (которое определяется рангом квадратичной формы);

б) одинаковое количество слагаемых одного знака.

В самом деле, пусть квадратичная форма $q(x) = x^T A x$ ранга r приведена к нормальному виду (6.19)

$$\tilde{q}(y) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2 - y_{m+1}^2 - y_{m+2}^2 - \ldots - y_r^2,$$

невырожденной заменой переменных $x = Ty$, а невырожденной заменой переменных $x = Sz$ – к другому нормальному виду:

$$\tilde{\tilde{q}}(z) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - z_{p+2}^2 - \ldots - z_r^2,$$

причем число $r = \operatorname{rg} A$ в этих формулах одно и то же (см. п.1 замечаний 6.5). Докажем, что положительные индексы m и p равны. Предположим противное. Пусть $p > m$. Поскольку замены переменных невырожденные, то $T^{-1}x = y$ и $S^{-1}x = z$. Рассматривая последние равенства как неоднородные системы уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, подберем такое ее решение x^O, чтобы выполнялись условия $y_1 = 0, \ldots, y_m = 0$, $z_{p+1} = 0, \ldots, z_n = 0$. Для этого составим однородную систему, выбрав первые m уравнений из системы $T^{-1}x = y$ и последние $(n-p)$ уравнений системы $S^{-1}x = z$:

$$\begin{cases} (E_m \mid O)T^{-1}x = o, \\ (O \mid E_{n-p})S^{-1}x = o. \end{cases}$$

Получили однородную систему $(m+n-p)$ уравнений с n неизвестными. Так как $p > m$, то число уравнений меньше количества неизвестных. Поэтому система имеет нетривиальное решение $x^O \neq o$ (см. разд.5.5). Вычислим значение квадратичной формы для этого столбца x^O значений переменных. Для ненулевых столбцов

$$y^O = T^{-1}x^O = (\underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{m} \ \ y_{m+1} \ \cdots \ y_n)^T,$$

$$z^O = S^{-1}x^O = (z_1 \ \cdots \ z_p \ \ \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{n-p})^T,$$

получаем

$$q(x^O) = \tilde{q}(y^O) = -y_{m+1}^2 - \ldots - y_r^2 \le 0 \quad \text{и} \quad q(x^O) = \tilde{\tilde{q}}(z^O) = z_1^2 + \ldots + z_p^2 > 0,$$

т.е. $q(x^O) \le 0$ и $q(x^O) > 0$ одновременно, чего не может быть. Заметим, что при $m = 0$ и $p = n$ оба неравенства выполняются для любого ненулевого вектора x^O. Следовательно, предположение $p > m$ приводит к противоречию. К аналогичному противоречию приводит предположение $p < m$. Значит, $p = m$. Другими словами, положительный индекс квадратичной формы не зависит от способа ее приведения к каноническому виду. Ранг формы также не зависит от выбора невырожденной замены переменных. В силу п.2 замечаний 6.7 делаем аналогичный вывод для отрицательного индекса и сигнатуры.

45) Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра *(разд.6.5.4 теорема 6.4)*.

Теорема 6.4 (критерий Сильвестра). *Для того чтобы вещественная квадратичная форма $q(x) = x^T A x$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны*:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \ \ \Delta_n = \det A > 0. \qquad (6.20)$$

Для отрицательной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров ее матрицы чередовались, начиная с отрицательного:

$$\Delta_1 = a_{11} < 0, \ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \ \ (-1)^n \Delta_n = (-1)^n \det A > 0. \qquad (6.21)$$

В самом деле, рассмотрим первое утверждение теоремы (о положительной определенности). Достаточность условий (6.20) следует из теоремы 6.3 (теоремы Якоби), так как при выполнении этих неравенств квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\tilde{q}(y) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2$$

с положительными коэффициентами при квадратах переменных ($\Delta_0 = 1$). Ясно, что $\tilde{q}(y) > 0$ для всех $y \neq o$, т.е. $q(x) = \tilde{q}(S^{-1}x) > 0$ для всех $x \neq o$.

Для доказательства необходимости рассмотрим квадратичную форму $q_k(x_1,\ldots,x_k) = q(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$ переменных $x_1,\ldots,x_k$ $(1 \le k \le n)$. Матрица A_k этой формы представляет собой левый верхний блок матрицы $A = \left(\begin{array}{c|c} A_k & * \\ \hline * & * \end{array}\right)$ данной квадратичной формы (звездочкой ($*$), как обычно, обозначены блоки, не существенные для рассуждений). Из положительной определенности $q(x)$ следует положительная определенность формы $q_k(x_1,\ldots,x_k)$. Тогда из п.2 замечаний 6.8 следует, что $\det A_k > 0$, но $\Delta_k = \det A_k$ – угловой минор k-го порядка матрицы A. Таким образом, $\Delta_k > 0$ для $1 \le k \le n$, что и требовалось доказать. Второе утверждение сводится к первому, если рассмотреть квадратичную форму $[-q(x)]$ (см. п.4 замечаний 6.8).

---

46) Приведение квадратичной формы к главным осям *(разд.9.6.4)*.

В разд. 6.5.3 была рассмотрена задача приведения вещественной квадратичной формы

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x \qquad (9.23)$$

n переменных $x_1,\ldots,x_n$ к каноническому виду (6.18)

$$\tilde{q}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \qquad (9.24)$$

при помощи невырожденной линейной замены переменных $x = Sy$. Для решения этой задачи использовался метод Лагранжа (см. разд.6.5.2).

Рассмотрим другой подход к решению. Линейную невырожденную замену переменных $x = Sy$ с ортогональной матрицей S ($S^{-1} = S^T$) будем называть ***ортогональной заменой переменных*** (или ***ортогональным преобразованием переменных***).

Сформулируем задачу ***приведения квадратичной формы к главным осям***: требуется найти ортогональную замену переменных $x = Sy$ ($S^{-1} = S^T$), приводящую квадратичную форму (9.23) к каноническому виду (9.24).

Для решения используем следующий геометрический смысл задачи. Будем считать переменные $x_1,\ldots,x_n$ координатами вектора $\boldsymbol{x}$ n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ в ортонормированном базисе $(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$, а матрицу A квадратичной формы (9.23) – матрицей некоторого линейного преобразования $\mathcal{A}: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ в том же базисе. Причем это преобразование самосопряженное, так как его матрица симметрическая: $A^T = A$. Квадратичную форму (9.23) можно представить в виде скалярного произведения

$$q(x) = (\mathcal{A}(x), x) = (x, \mathcal{A}(x)).$$

Ортогональной замене переменных $x = Sy$ соответствует переход от одного ортонормированного базиса к другому. Действительно, пусть S – матрица перехода от ортонормированного базиса $(\boldsymbol{e})$ к ортонормированному базису $(\boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_n)$, т.е. $(\boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{e})S$ и $S^{-1} = S^T$. Тогда координаты x вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e})$ и координаты y того же вектора в базисе $(\boldsymbol{s})$ связаны формулой (8.11): $x = Sy$.

Таким образом, задача приведения квадратичной формы к главным осям может быть сформулирована так: требуется найти в пространстве $\boldsymbol{E}$ такой базис, в котором матрица самосопряженного преобразования $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид. Эта задача была решена в разд. 9.6.3. По теореме 9.10 нужно выбрать ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования. При этом матрица перехода S к каноническому базису оказывается ортогональной: $S^T = S^{-1}$.

Сформулируем этот результат для квадратичной формы.

Теорема 9.12 (о приведении квадратичной формы к главным осям). *Вещественная квадратичная форма* (9.23) *при помощи ортогонального преобразования переменных $x = Sy$ может быть приведена к каноническому виду* (9.24), *где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – собственные значения матрицы A.*

Следствие. *Квадратичная форма* (9.23) *является положительно определенной* (*неотрицательно определенной*) *тогда и только тогда, когда все собственные значения ее матрицы положительны* (*неотрицательны*).

Свойства конгруэнтных матриц

1. *Конгруэнтные матрицы имеют равные ранги.* В самом деле, ранг произведения матрицы A на невырожденную матрицу S и S^T равен рангу матрицы A (см. следствие теоремы 3.5).

2. *Матрица, конгруэнтная симметрической матрице, также является симметрической.* Действительно, если $A = A^T$ и $A' = S^T A S$, то $(A')^T = (S^T \cdot A \cdot S)^T = S^T \cdot A^T \cdot (S^T)^T = S^T \cdot A \cdot S = A'$.

3. *Определители действительных конгруэнтных матриц имеют одинаковые знаки. В частности, если $A' = S^T A S$ и $\det S = 1$, то $\det A' = \det A$.* В самом деле, из равенства $A' = S^T A S$ и свойства 1 определителя следует, что $\det A' = \det S^T \det A \det S = \det A (\det S)^2$, т.е. знаки величин $\det A'$ и $\det A$ совпадают. Если же $\det S = 1$, то $\det A' = \det A$.

4. *Если квадратные матрицы A и A' связаны соотношением $A' = S^T A S$, где матрица S — верхняя треугольная с единицами на главной диагонали*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad (6.15)$$

то все угловые миноры матриц A и A' равны, где в (6.15) звездочкой $(*)$ обозначаются любые числа.

Действительно, разобьем квадратные матрицы A, S и A' на блоки, выделив в каждой квадратный блок в первых k строках и первых k столбцах:

Здесь O — нулевые матрицы соответствующих размеров, а звездочкой $(*)$ обозначаются блоки соответствующих размеров, значения элементов которых для доказательства не существенны и могут быть любыми. Получили, что $A'_k = S_k^T A_k S_k$. Учитывая, что $\det S_k = 1$ для любого $k = 1,\ldots,n$, по свойству 3 имеем

$$\Delta'_k = \det A'_k = \det S_k^T \cdot \det A_k \cdot \det S_k = \det A_k = \Delta_k$$

т.е. угловые миноры Δ'_k и Δ_k матриц A' и A равны для любого $k = 1, 2, \ldots, n$.

Вопросы по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

1 курс, 2 семестр, 8 факультет (2005-2006). Бортаковский А.С.

1. Линейное пространство: определение, примеры, простейшие следствия из аксиом *(разд.8.1).*
2. Линейная зависимость и линейная независимость элементов линейного пространства *(разд.8.2.1)*. Свойства *(разд. 8.2.2).*
3. Размерность и базис линейного пространства *(разд.8.3.1).* Примеры *(разд.8.3.2).*
4. Теорема о разложении элементов линейного пространства по базису *(с.377).*
5. Линейная оболочка конечной системы векторов.
   Линейная оболочка подмножества линейного пространства. Свойства *(см. разд.8.2.3 и пп.1,2 в замечаниях 8.3).*
6. Теорема о дополнении системы векторов до базиса *(с.377-378).*
7. Замена базиса. Матрица перехода от базиса к базису. Свойства матрицы перехода *(разд.8.4.3,8.4.4).*
8. Связь координат вектора в разных базисах *(разд.8.4.3).*
9. Изоморфизм линейных пространств *(разд.8.5).*
10. Подпространства линейного пространства *(разд.8.6.1).* Примеры *(разд.8.6.2).*
11. Алгебраическая сумма подпространств *(разд.8.6.3).* Прямая сумма *(разд.8.6.4).*
12. Теорема о размерности суммы подпространств *(с.397).*
13. Евклидово пространство: определение, примеры, следствия из аксиом. *(8.8.1,8.8.2)*
14. Основные метрические понятия *(разд.8.8.3).* Неравенство Коши – Буняковского *(с.427).*
    Неравенство треугольника *(с.431).* Теорема Пифагора *(п.6 на с.434).*
15. Изоморфизм евклидовых пространств *(с.442).*
16. Ортогональные и ортонормированные векторы: определение, примеры, свойства *(разд.8.8.4).*
    Ортонормированный базис и его преимущества *(разд.8.8.6).*
17. Ортогональные дополнения подмножеств: определения, примеры, свойства *(разд.8.8.7).*
18. Процесс ортогонализации *(разд.8.8.5).*
19. Задача о перпендикуляре и ее решение *(разд.8.8.8).*
20. Определитель Грома, его свойства и геометрический смысл *(с.440-441,451).*
    Неравенства Адамара, Бесселя *(п. 3 замечаний 8.12, п. 3 замечаний 8.14).*
21. Отображения: определение, образ, полный прообраз.
    Сюръективные, инъективные, биективные, тождественные и обратимые отображения.
    Композиция отображений. Теорема об обратном отображении *(с.459).*
22. Линейные отображения: определение *(с.460),* примеры *(разд.9.1.2),* свойства *(разд.9.1.3).*
    Матрица линейного отображения *(разд.9.1.4).* Свойства матриц линейных отображений *(с.467).*
23. Ядро и образ линейного отображения: определение, примеры, свойства. Теорема о размерностях ядра и образа *(разд.9.1.5).*
24. Линейные преобразования: определение, примеры *(разд.9.2.1).* Матрицы линейного преобразования в разных *базисах (разд.9.2.2).*
25. Алгебра линейных преобразований: сложение, умножение на число, произведение и степень линейных операторов *(разд.9.2.3).*
26. Инвариантные подпространства: определение, примеры *(разд.9.3.1).* Сужение (ограничение) оператора на подпространство *(с.478).*
    Свойства инвариантных подпространств *(разд.9.3.2).* Теорема о матрицах оператора и его сужения на инвариантное подпространство, следствие *(с.481).*
27. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования *(разд.9.4.1).*
    Геометрический смысл собственных векторов *(с.482).* Примеры *(разд.9.4.2).*
    Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов *(с.486).*
28. Характеристический многочлен линейного преобразования и его свойства *(теорема 9.3, замечания 9.4).*
29. Теорема о существовании одномерного или двумерного инвариантного подпространства линейного преобразования вещественного линейного пространства *(теорема 9.2 с.484-486).*
30. Собственные и корневые подпространства. Теорема о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств *(разд.9.4.3 с.489-492).*
31. Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений.
    Теорема о кратностях *(разд.9.4.3 с.493).* Условие приводимости матрицы линейного преобразования к диагональному виду *(теорема 9.7 и ее следствия с.495-496).*
32. Жорданова форма матрицы. Собственные и присоединенные векторы. Теорема о приведении матрицы к жордановой форме (без доказательства) *(разд.9.5.2).*
33. Алгоритм приведения матрицы к жордановой форме *(с.501-502, п.1 замечаний 9.6 и первый способ на с.316).*
34. Многочлен от жордановой клетки. Алгоритм нахождения многочлена от матрицы *(разд.7.3.4).*
35. Аннулирующий многочлен матрицы. Теорема Гамильтона - Кэли *(с.300-301).*
36. Ортогональные преобразования: определение, примеры, свойства.
    Каноническая форма ортогонального преобразования и его геометрический смысл.
    Алгоритм приведения матрицы ортогонального преобразования к каноническому виду *(разд.9.6.1 с.513-519).*
37. Сопряженные преобразования: определение, примеры, свойства. Матрицы сопряженных преобразований *(разд.9.6.2).*
38. Самосопряженные преобразования: определение, примеры, свойства *(разд.9.6.3 с.523-524)*
39. Теорема о диагонализируемости матрицы самосопряженного преобразования *(с.524).*
40. Теорема о структуре невырожденного линейного преобразования евклидова пространства и ее геометрический смысл *(с.525).*
41. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Изменение матрицы при линейной замене переменных *(с.232, 237).*
42. Канонический вид квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду *(с.238-240).*
43. Теорема Якоби о приведении квадратичной формы к каноническому виду *(с.242-246).*
44. Нормальный вид квадратичной формы. Закон инерции *(разд.6.5.3).*
45. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра *(разд.6.5.4 теорема 6.4).*
46. Приведение квадратичной формы к главным осям *(разд.9.6.4).*