10.2. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

10.2.1. Классификация линий второго порядка

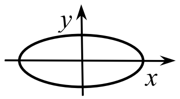
Алгебраической линией второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в какой-либо аффинной системе координат Oxy может быть задано уравнением вида

$$a_{11}\cdot x^2+2\cdot a_{12}\cdot x\cdot y+a_{22}\cdot y^2+2\cdot a_1\cdot x+2\cdot a_2\cdot y+a_0=0,$$

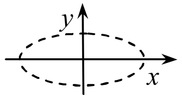
где старшие коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} не равны нулю одновременно ($a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\neq 0$). Без ограничения общности можно считать, что система координат, в которой задано уравнение линии второго порядка, прямоугольная. Для каждой линии второго порядка существует прямоугольная система координат Oxy, в которой уравнение принимает наиболее простой (***канонический***) вид. Она называется ***канонической***, а уравнение – ***каноническим***.

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

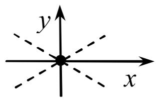
1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *уравнение эллипса*;



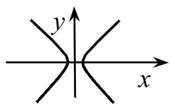
2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ *уравнение мнимого эллипса*;



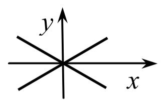
3. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ *уравнение пары мнимых пересекающихся прямых*;



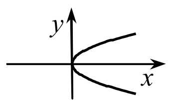
4. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *уравнение гиперболы*;



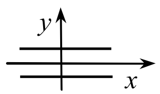
5. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ *уравнение пары пересекающихся прямых*;



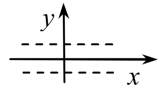
6. $y^2=2\cdot p\cdot x$ *уравнение параболы*;



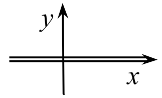
7. $y^2-b^2=0$ *уравнение пары параллельных прямых*;



8. $y^2+b^2=0$ *уравнение пары мнимых параллельных прямых*;



9. $y^2=0$ *уравнение пары совпадающих прямых*.



В этих уравнениях $a>0$, $b>0$, $p>0$, *причем* $a\geq b$ *в уравнениях* 1–3.

Линии (1),(4),(5),(6),(7),(9) называются ***вещественными*** (***действительными***), а линии (2),(3),(8) – ***мнимыми***. Вещественные линии изображены в канонических системах координат. Изображения мнимых линий даются штриховкой только для иллюстрации.

Линия второго порядка называется ***центральной***, если она имеет единственный центр (симметрии). В противном случае, если центр отсутствует или не является единственным, линия называется ***нецентральной***. К центральным линиям относятся эллипсы (вещественный и мнимый), гипербола, пара пересекающихся прямых (вещественных и мнимых). Остальные линии – нецентральные.

АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy линия второго порядка описывается уравнением

$$a_{11}\cdot x^2+2\cdot a_{12}\cdot x\cdot y+a_{22}\cdot y^2+2\cdot a_1\cdot x+2\cdot a_2\cdot y+a_0=0. \qquad (10.11)$$

Требуется определить ее название и составить каноническое уравнение. Для этого нужно выполнить следующие действия.

1. Вычислить ***ортогональные инварианты***

$$\tau=a_{11}+a_{22},\qquad \delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix},\qquad \Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_2\\ a_1 & a_2 & a_0\end{vmatrix}.$$

Если $\delta=\Delta=0$, то вычислить ***семиинвариант*** $\kappa=\begin{vmatrix}a_{11} & a_1\\ a_1 & a_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_2\\ a_2 & a_0\end{vmatrix}$.

2. По таблице 10.1 определить название линии, а по названию – каноническое уравнение линий второго порядка.

3. Составить характеристическое уравнение $\lambda^2-\tau\cdot\lambda+\delta=0$, либо используя вычисленные в п.1 коэффициенты, либо разлагая определитель

$$\det(A-\lambda\cdot E)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\tau\cdot\lambda+\delta.$$

Найти корни λ_1,λ_2 (с учетом кратности) характеристического уравнения.

Т а б л и ц а 10.1. **Классификация линий второго порядка**

		Признаки вида			Название линии	№
Центральные линии	Эллиптический тип	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	$\tau \cdot \Delta < 0$	Эллипс	1
				$\tau \cdot \Delta > 0$	Эллипс мнимый	2
			$\Delta = 0$		Пара мнимых пересекающихся прямых	3
	Гиперболический тип	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$		Гипербола	4
			$\Delta = 0$		Пара пересекающихся прямых	5
Нецентральные линии	Параболический тип	$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$		Парабола	6
			$\Delta = 0$	$\kappa < 0$	Пара параллельных прямых	7
				$\kappa > 0$	Пара мнимых параллельных прямых	8
				$\kappa = 0$	Пара совпадающих прямых	9

4. Занумеровать корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения в соответствии с правилами:

а) если линия эллиптического типа, то $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$;

б) если линия гиперболического типа, то:
– при $\Delta \neq 0$: $\lambda_1 \cdot \Delta > 0$ (знак λ_1 совпадает со знаком Δ);
– при $\Delta = 0$: $\lambda_1 > 0$;

в) если линия параболического типа, то $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Корни λ_1, λ_2 не используются при составлении канонических уравнений линий параболического типа, но применяются при нахождении канонической системы координат (см. разд.10.2.5).

5. Вычислить коэффициенты канонического уравнения и записать его в канонической системе координат $O'x'y'$:

а) для линий эллиптического типа ($\delta > 0$):

(1) при $\tau \cdot \Delta < 0$ – уравнение *эллипса* $\dfrac{(x')^2}{a^2} + \dfrac{(y')^2}{b^2} = 1$ с коэффициентами $a^2 = -\dfrac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}$, $b^2 = -\dfrac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}$;

(2) при $\tau \cdot \Delta > 0$ – уравнение *мнимого эллипса* $\dfrac{(x')^2}{a^2} + \dfrac{(y')^2}{b^2} = -1$ с коэффициентами $a^2 = \dfrac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}$, $b^2 = \dfrac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}$;

(3) при $\Delta = 0$ – уравнение *пары мнимых пересекающихся прямых* $\dfrac{(x')^2}{a^2} + \dfrac{(y')^2}{b^2} = 0$ с коэффициентами $a^2 = \dfrac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2 = \dfrac{1}{|\lambda_2|}$;

б) для линии гиперболического типа ($\delta < 0$):

(4) при $\Delta \neq 0$ – уравнение *гиперболы* $\dfrac{(x')^2}{a^2} - \dfrac{(y')^2}{b^2} = 1$ с коэффициентами $a^2 = -\dfrac{\Delta}{\lambda_1 \cdot \delta}$, $b^2 = \dfrac{\Delta}{\lambda_2 \cdot \delta}$;

(5) при $\Delta = 0$ – уравнение *пары пересекающихся прямых* $\dfrac{(x')^2}{a^2} - \dfrac{(y')^2}{b^2} = 0$ с коэффициентами $a^2 = \dfrac{1}{\lambda_1}$, $b^2 = -\dfrac{1}{\lambda_2}$;

в) для линии параболического типа ($\delta = 0$):

(6) при $\Delta \neq 0$ – уравнение *параболы* $(y')^2 = 2 \cdot p \cdot x'$ с параметром $p = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\tau^3}}$;

(7) при $\Delta = 0$, $\kappa < 0$ – уравнение *пары параллельных прямых* $(y')^2 - b^2 = 0$ с коэффициентом $b^2 = -\dfrac{\kappa}{\tau^2}$;

(8) при $\Delta = 0$, $\kappa > 0$ – уравнение *пары мнимых параллельных прямых* $(y')^2 + b^2 = 0$ с коэффициентом $b^2 = \dfrac{\kappa}{\tau^2}$;

(9) при $\Delta = 0$, $\kappa = 0$ – уравнение *пары совпадающих прямых* $(y')^2 = 0$.

10.2.5. Нахождение канонической системы координат и построение линии второго порядка

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy алгебраическая линия второго порядка задана уравнением (10.11):

$$a_{11}\cdot x^2+2\cdot a_{12}\cdot x\cdot y+a_{22}\cdot y^2+2\cdot a_1\cdot x+2\cdot a_2\cdot y+a_0=0.$$

Требуется:

I) определить название линии второго порядка, составить ее каноническое уравнение (см. разд.10.2.1);

II) найти каноническую систему координат $O'x'y'$ (в которой уравнение линии имеет канонический вид);

III) построить линию в заданной системе координат Oxy.

Алгоритм решения I части задачи – определения названия линии и составления ее канонического уравнения – рассмотрен в разд.10.2.1. Рассмотрим план решения II и III частей задачи. Для нахождения канонической системы координат $O'x'y'$ достаточно указать величину φ угла поворота системы координат $O'x'y'$ относительно системы координат Oxy, а также координаты x_0, y_0 начала O' канонической системы координат в заданной системе координат Oxy. Согласно разд.9.1.2, связи между координатами определяются формулами (9.5):

$$\begin{cases} x=x_0+x'\cdot\cos\varphi-y'\cdot\sin\varphi, \\ y=y_0+x'\cdot\sin\varphi+y'\cdot\cos\varphi. \end{cases} \tag{10.12}$$

Заданная линия строится в найденной канонической системе координат по каноническому уравнению.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть выполнены пп.1–5 алгоритма составления канонического уравнения линии второго порядка (см. разд.10.2.1).

6. Вычислить величину φ угла поворота системы координат:

если $a_{12}\ne 0$ или $a_{11}\ne\lambda_1$, то

$$\cos\varphi=\frac{a_{12}}{\sqrt{(\lambda_1-a_{11})^2+a_{12}^2}},\quad \sin\varphi=\frac{\lambda_1-a_{11}}{\sqrt{(\lambda_1-a_{11})^2+a_{12}^2}};$$

если $a_{12}=0$ и $a_{11}=\lambda_1$, то $\cos\varphi=1$, $\sin\varphi=0$ (т.е. $\varphi=0$).

Для параболы (при $\lambda_1=0$) угол φ должен удовлетворять дополнительному условию, $\tau\cdot\left(a_1\cdot\cos\varphi+a_2\cdot\sin\varphi\right)\le 0$, в противном случае величину угла нужно увеличить на π (в формуле (10.12) угол φ заменить на $\varphi+\pi$ и учесть, что $\cos(\varphi+\pi)=-\cos\varphi$, $\sin(\varphi+\pi)=-\sin\varphi$).

7. Найти координаты x_0, y_0 начала O' канонической системы координат:

а) для всех линий, за исключением параболы, найти любое решение $x=x_0$, $y=y_0$ системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x+a_{12}\cdot y+a_1=0, \\ a_{12}\cdot x+a_{22}\cdot y+a_2=0; \end{cases}$$

б) для параболы найти решение $x=x_0$, $y=y_0$ системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x+a_{12}\cdot y+\dfrac{a_1\cdot a_{11}+a_2\cdot a_{12}}{a_{11}+a_{22}}=0, \\ \left(a_1+\dfrac{a_1\cdot a_{22}-a_2\cdot a_{12}}{a_{11}+a_{22}}\right)\cdot x+\left(a_2-\dfrac{a_1\cdot a_{12}-a_2\cdot a_{11}}{a_{11}+a_{22}}\right)\cdot y+a_0=0, \end{cases}\quad \text{если } a_{11}\ne 0 \text{ или } a_{12}\ne 0;$$

либо системы уравнений $\begin{cases} a_{22}\cdot y+a_2=0, \\ 2\cdot a_1\cdot x+a_0=0, \end{cases}$ если $a_{11}=a_{12}=0$.

Найденные в п.6,7 значения φ, x_0, y_0 подставить в (10.12) для получения формул преобразования координат.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть определено название линии второго порядка, составлено ее каноническое уравнение (см. пп.1–5 в разд.10.2.1), а также найдена каноническая система координат $O'x'y'$ (пп.6,7 алгоритма). Требуется построить линию второго порядка в заданной системе координат Oxy. Для этого нужно выполнить следующие действия.

8. На координатной плоскости Oxy изобразить каноническую систему координат $O'x'y'$, оси которой повернуты на угол φ, вычисленный в п.6, а начало O' имеет координаты x_0, y_0, найденные в п.7.

9. Построить линию второго порядка в канонической системе координат $O'x'y'$ по каноническому уравнению, найденному в п.5. Построение центральных линий (эллипса, гиперболы, пары пересекающихся прямых) удобно начинать с изображения основного прямоугольника (см. разд.10.2.2; 10.2.3). При построении параболических линий (параболы, пары параллельных прямых, пары совпадающих прямых) использовать разд.10.2.4; 10.1.1). Мнимые линии не изображаются, за исключением пары мнимых пересекающихся прямых (в этом случае изображается только единственная точка O').