Хренникова А.С. (группа М80-208Б-19)

Билет № 32

1. Метод исключения системы диф. ур-ний и условие его применения.

Метод исключения - метод сведения задачи интегрирования нормальной системы диф. ур-ний

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (*)$$

к задаче интегрирования диф. ур-ния высшего порядка. Данный метод состоит в следующем. Сначала продифференцируем обе части ур-ния (*) по x. В результате получим $\frac{d^2y_1}{dx^2} = y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot f_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$. Т.к. все производные и функции правой части производной y_1'' являются функциями переменных $x, y_1, y_2, \dots, y_n$, то, следовательно, в результате данного дифференцирования получаем некую функцию F_2 этих же переменных.

Далее аналогично дифференцируем обе части ур-ния $y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. $y_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot f_1 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \cdot f_n = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Продолжаем данный последовательный процесс дифференцирования функции $y_1(x)$ до вычисления производной $y_1^{(n-1)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а затем — заключит. производн. $y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Результат сведем в систему диф. ур-ний и отдельное ур-ние:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ y_1^{(n-1)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \quad (**)$$

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \quad (***)$$

Составим определитель (якобиан) и полагаем, что его значение отлично от нуля:

$$\frac{\partial(f_1, F_2, F_3, \ldots, F_{n-1})}{\partial(y_2, y_3, y_4, \ldots, y_n)} \neq 0 \quad (\approx)$$

Если такой якобиан отличен от нуля, то по теореме о системе неявных функций, Или система (**) может быть записана в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}) \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}) \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}) \end{cases} \quad (****)$$

Подставим (****) в (***), получаем следующее диф. ур-ние высшего порядка: $y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = F_n(x, y_1, \varphi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \varphi_3(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \dots, \varphi_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}))$.

Следовательно, в итоге: $y_1^{(n)} = \Phi(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)})$. (V)

Таким образом, интегрирование данной системы сведено к интегрированию ур-ния высшего порядка (V). Действительно, если ур-ние (V) решено и определено его решение $y_1 = \Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, то достаточно подставить его решение в правую часть (****), чтобы в результате получить окончательное решение норм. системы диф. ур-ний (*).

Условие применимости метода исключения: условие достаточной дифференцируемости функций правых частей ур-ний системы (*) и неравенство нулю собственного якобиана (**). При этом, например, если бы при применении метода исключения по y_1, как в рассмотренном случае, якобиан (**) оказался бы равным нулю, то следовало бы провести реализацию этого метода по другой переменной из совокупности y_i, $i = 2, \dots, n$, по которой соответствующий ~~ж~~ якобиан окажется не равным нулю.

2. Теоремы об устойчивости решений линейных динамических систем диф ур-ний.

Рассмотрим устойчивость решений линейных динамич. систем, которые в общем случае могут быть представлены в виде:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t) \qquad (*)$$

Теорема 1: Для того, чтобы любое решение системы (*) было устойчивым, асимптотически устойчивым, устойчивым в целом или неустойчивым необходимо

и достаточно, чтобы было соответственно устойчивым, асимптотически устойчивым, устойчивым в целом или неустойчивым нулевое решение соответствующей однородн. систем.
Доказательство: Докажем, например, что из устойчивости любого решения системы (*) следует устойчивость нулевого решения соответствующей однородн. систем. Действительно, пусть решение $\xi(t, \xi_0)$ устойчиво. Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, и для $\forall y_0$ такого, что $|y_0 - \xi_0| < \delta$, выполняется условие $|y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0)| < \varepsilon$ для $\forall t > t_0$.
Т.к. разность двух решений неоднородн. системы $y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0)$ является решением соответств. однородн. систем, то обознач. такое решение однородн. сист. в виде разности рассматр. реш. $y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0) = z(t, z_0)$. Тогда в соответствии с тем, что любому рассматр. y_0 теперь соответств. $\forall z_0 = y_0 - \xi_0$, сформулир. утверхд. об устойчивости решения $\xi(t, \xi_0)$ теперь можно перефраз. так:

для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, и для любого $\forall z_0$, такого, что $|z_0 - 0| < \delta$, выполняется усл: $|z(t, y_0) - 0| < \varepsilon$ для $\forall t > t_0$. Ч.т.д.

Теорема 2: Для того, чтобы все решения $\frac{dy}{dt} = A(t)y$ или, что то же, $L(y) = 0$, были устойчивыми, необходимо и достаточно, чтобы все решения $L(y) = 0$ были ограниченными.

Доказательство: Сначала докажем достаточность. Пусть все реш. $L(y) = 0$, то есть реш. вида $G(t)y_0$, где $G(t)$ – фунд. матр, огранич. Следовательно, $\exists M > 0$, такое, что $|G(t)| \le M$. Выберем $\forall \varepsilon > 0$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда для $\forall y_0$, такого, что $|y_0 - 0| < \delta$, следует выполнение неравенства $|y(t, y_0) - 0| = |y(t, y_0)| = |G(t) y_0| \le |G(t)| \cdot |y_0| \le \le M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Следовательно, по теореме 1 все решения $L(y) = 0$ устойчивы.

Необходимость докажем от противного. То есть, полагая устойчивость всех решений, предположим, что среди реш. имеется неогранич. реш. $y(t, y_0)$. Тогда, выбрав $\forall \varepsilon > 0$ и

$\forall\delta>0$, можно утверждать, что, вследствие неограниченности $y(t, y_0)$ $\exists t_1>0$, при котором $|y(t_1, y_0)| > \frac{2\varepsilon|y_0|}{\delta}$. Построим следующ. реш. $L(y)=0$: $\frac{y(t, y_0)\delta}{2|y_0|}$. При $t=t_0$ это реш. $\left|\frac{y(t, y_0)\delta}{2|y_0|}-0\right| < \frac{|y_0|\delta}{|y_0|2} = \frac{\delta}{2}<\delta$. При значении $t=t_1$ имеем $\left|\frac{y(t, y_0)\delta}{2|y_0|}-0\right| = |y(t_1, y_0)|\cdot\left|\frac{\delta}{2|y_0|}\right| > \frac{2\varepsilon|y_0|}{\delta}\frac{\delta}{2|y_0|}=\varepsilon$. То есть неогранич. реш. по теореме 1 неустойчиво. Полученное противореч. относит. усл. данной теоремы об устойчивости всех реш. доказывает утверждение теоремы.

Теорема 3: Если все корни характеристического ур-ния сист. (*) имеют неполож. веществ. части, при этом корни с нулевыми веществ. частями только простые, то все реш. данной системы устойчивы.

Доказательство: Общ. реш. дан. сист. в различн. возможн. случ. корней характерист. ур-ние 1 соответств. с усл. теоремы, имеет вид (при $\beta_k\neq 0$):

$$y=\sum_{k=1}^{l} C_kP_k(t)e^{\alpha_k t}+\sum_{k=l+1}^{l+r}\{C_k Re[P_k(t)e^{(\alpha_k+i\beta_k)t}]+C_{k+r}Im[P_k(t)e^{(\alpha_k+i\beta_k)t}]\}+$$
$$+\sum_{k=l+2r+1}^{l+2r+m}\{C_kRe[e^{i\beta_k t}]+C_{k+m}Im[e^{i\beta_k t}]\}+y_2,$$

где $\alpha_k\leq 0$ для

всех $k=1,2,3,..,n=l+2r+2m$. Т.к. $P_k(t)e^{\alpha_k t}\to 0$ при $t\to\infty$, а $e^{i\beta_k t}$ и $e^{i\beta_s t}$ ограничены, то все решение соответств. однородн. системы ограничены. Таким образом по теореме 2 решения однородн. системы устойчивы. Следовательно, по теореме 1 при устойчивости решений однородн. системы устойчивы так же и все решения данной неоднородной системы.

Теорема 4: Если все корни характеристич ур-ния сист. (*) имеют отрицат. веществ. части, то все реш. данной системы асимпт. устойчивы.

Доказательство: Общ. реш. данной сист. в соответствии с уж. теор., запис. в виде (при $\beta_k\neq 0$):

$$y=\sum_{k=1}^{l}C_kP_k(t)e^{\alpha_k t}+\sum_{k=l+1}^{l+r}\{C_k\operatorname{Re}[P_k(t)e^{(\alpha_k+i\beta_k)t}]+C_{k+r}\operatorname{Im}[P_k(t)e^{(\alpha_k+i\beta_k)t}]\}+y_r,$$

где $\alpha_k<0$ для всех $k=1,2,3,..,n=l+2r$. Т.к. $P_k(t)e^{\alpha_k t}\to 0$ при $t\to\infty$, то все реш. соотв. однородн. систем. огранич. и асимпт. устойчивы, а, следовательно, по теореме 1, и все реш. данной сист. асимпт.

устойчивы.

Теорема 5: Если среди корней характ. ур-ние сист. (*) имеется хотя бы один корень с положит. вещ. частью, то все реш. данной сист. неуст.

3. $(x+2y^3)y' = y$

$(x+2y^3)\frac{dy}{dx} = y$

$\frac{(x+2y^3)}{\frac{dx}{dy}} = y$

$\frac{(x+2y^3)}{x'} = y$

$x+2y^3 = x'y$

$x' - \frac{x}{y} = 2y^2$

$x = u(y)\cdot v(y)$

$x' = u'\cdot v + u\cdot v'$

$u'\cdot v + uv' - u\cdot v\cdot\frac{1}{y} = 2y^2$

$\begin{cases} u'\cdot x - ux\cdot\frac{1}{y} = 0 \\ uv' = 2y^2 \end{cases}$

$\frac{du}{dy} = \frac{u}{y} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|u| = \ln|y| \Rightarrow u = y$

$y\cdot\frac{dv}{dy} = 2y^2 \Rightarrow \cancel{dv = \; \Rightarrow v = \frac{\ln|y|}{2} + C}$

$\cancel{x = u\cdot v = \frac{\ln|y|}{2}\cdot y + Cy}$

$dv = 2y\cdot dy \Rightarrow v = y^2 + C$

$x = y(y^2+C) = y^3 + Cy$

4. $y^{V} + 9y^{III} = (x^2 + e^{3x})\cos 3x + x(\sin 3x + e^{3x}) - 2e^{-7x} + (2x-3)$

$y^{(5)} + 9y^{(3)} = 0$

$\lambda^5 + 9\lambda^3 = 0$

$\lambda^3(\lambda^2 + 9) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad k_1 = 3$

$\lambda_2 = \pm 3i \quad k_2 = 1$

$y(x) = C_1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x$

$2x - 3:$ $\quad e^{0x}[(2x-3)\cos 0x + 0 \cdot \sin 0x]$

$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \qquad m = 1 \quad n = -\infty$

$\hat{\lambda} = 0 \qquad N = 1$

$y_r = (Ax + B) \cdot x^3 = Ax^4 + Bx^3$

$y_r' = 4Ax^3 + 3Bx^2$

$y_r'' = 12Ax^2 + 6Bx$

$y_r''' = 24Ax + 6B$

$y_r^{(4)} = 24A$

$y_r^{(5)} = 0$

$9(24Ax + 6B) = 2x - 3$

$216Ax + 54B = 2x - 3$

$\begin{cases} 216A = 2 \\ 54B = -3 \end{cases} \quad A = \frac{1}{108} \quad B = -\frac{1}{18}$

$y_r = \left(\frac{x}{108} - \frac{1}{18}\right)x^3$