Хренникова А.С.
М80-408Б-19
Вар-19 (29)

Курсовой проект
№1

Производственная функция Кобба-Дугласа: $Q = Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$

p_L - ставка з/п

p_K - норма процента на используемый капитал

$p_L = 29 \quad p_K = 7{,}5 \quad TC = 350 \quad G = 2 \quad \alpha = 0{,}4 \quad A = 0{,}4$

1) При известной величине общих издержек TC определить объем факторов K и L, обеспечивающие максимальный выпуск продукции, и соответствующий объем выпуска.

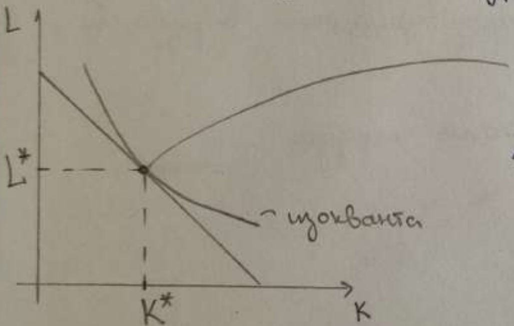
Найти $\{K^*, L^*\} \in \arg\max F(K,L), \quad \{K, L: p_K K + p_L L = I\}$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{\partial F}{\partial L}}\right|_{\{K^*,L^*\}} = \dfrac{p_K}{p_L} \\ p_K K + p_L L = I \end{cases}$$

$\{K^*, L^*\}: F(K^*, L^*) \geq F(K,L)$ для $\forall K, L: p_K K + p_L L = I$ описывает множество допустимых K и L

Точка $\{K^*, L^*\}$ - точка касания прямой $p_K K + p_L L = I$ и одной из изоквант ПФ, т.е. одной из семейства кривых, удовлетворяющих соотношению $F(K,L) = F_0, \ \forall F_0 \geq 0$

$L = \varphi(K, F_0)$ - изокванта уровня F_0



$$\begin{cases} \left.\dfrac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{\partial F}{\partial L}}\right|_{K^*,L^*} = \dfrac{p_K}{p_L} \\ p_K K + p_L L = I \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial (AK^{\alpha}L^{1-\alpha})}{\partial K} = A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = 0{,}16 \cdot K^{-0,6} \cdot L^{0,6} = 0{,}16 \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{-0,6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial (AK^{\alpha}L^{1-\alpha})}{\partial L} = A \cdot (1-\alpha) \cdot K^{\alpha} \cdot L^{-\alpha} = 0{,}24\, K^{0,4} \cdot L^{-0,4} = 0{,}24 \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{0,4}$$

$$\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{\partial F}{\partial L}}\right|_{K^*,L^*} = \frac{0{,}16 \left(\frac{K^*}{L^*}\right)^{-0,6}}{0{,}24 \cdot \left(\frac{K^*}{L^*}\right)^{0,4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{L^*}{K^*}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{L^*}{K^*} = \dfrac{7{,}5}{29} \\ 7{,}5 \cdot K^* + 29 L^* = 350 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 58L^* = 22{,}5K^* \\ 7{,}5K^* + 29L^* = 350 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 58L^* = 22{,}5K^* \\ 7{,}5K^* + 29 \cdot \frac{22{,}5}{58} K^* = 350 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^* = \frac{22{,}5}{58} K^* \\ 18{,}75 K^* = 350 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K^* = 18\frac{2}{3} = 18{,}667 \\ L^* = 7\frac{7}{29} = 7{,}241 \end{cases}$$

$$F(K^*, L^*) = 0{,}4 \cdot \left(18\frac{2}{3}\right)^{0{,}4} \cdot \left(7\frac{7}{29}\right)^{0{,}6} = 0{,}4 \cdot 3{,}224 \cdot 3{,}28 = 4{,}23$$

2) Во сколько раз увеличится выпуск продукции, если в G раз увеличить оба ресурса?

$$Q = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}$$

$$Q' = A \cdot (G K)^\alpha (G \cdot L)^{1-\alpha}$$

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\cancel{A} \cdot (G K)^\alpha \cdot (G \cdot L)^{1-\alpha}}{\cancel{A} \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}} = \frac{G^\alpha \cdot \cancel{K^\alpha} \cdot G^{1-\alpha} \cdot \cancel{L^{1-\alpha}}}{\cancel{K^\alpha} \cdot \cancel{L^{1-\alpha}}} = G^\alpha \cdot G^{1-\alpha} = G = 2$$

3) Найти среднюю производительность труда, среднюю фондоотдачу, среднюю фондовооруженность, предельную производительность труда и предельную фондоотдачу.

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{4{,}23}{7{,}24} = 0{,}58$$ — средняя производительность труда

$$z = \frac{Y}{K} = \frac{4{,}23}{18{,}67} = 0{,}23$$ — средняя фондоотдача

$$k = \frac{K}{L} = \frac{18{,}67}{7{,}24} = 2{,}58$$ — средняя фондовооруженность

$$r = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \frac{\partial (A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha})}{\partial L} = A \cdot K^\alpha \cdot (1-\alpha) \cdot L^{-\alpha} = 0{,}4 \cdot K^{0{,}4} \cdot 0{,}6 \cdot L^{-0{,}4} =$$

$$= 0{,}24 \cdot 3{,}224 \cdot 0{,}453 = 0{,}35$$ — предельная производительность труда

$$r = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \frac{\partial (A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha})}{\partial K} = A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{1-\alpha} = 0{,}16 \cdot K^{-0{,}6} \cdot L^{0{,}6} =$$

$$= 0{,}16 \cdot 3{,}28 \cdot 0{,}173 = 0{,}09$$ — предельная фондоотдача

№2

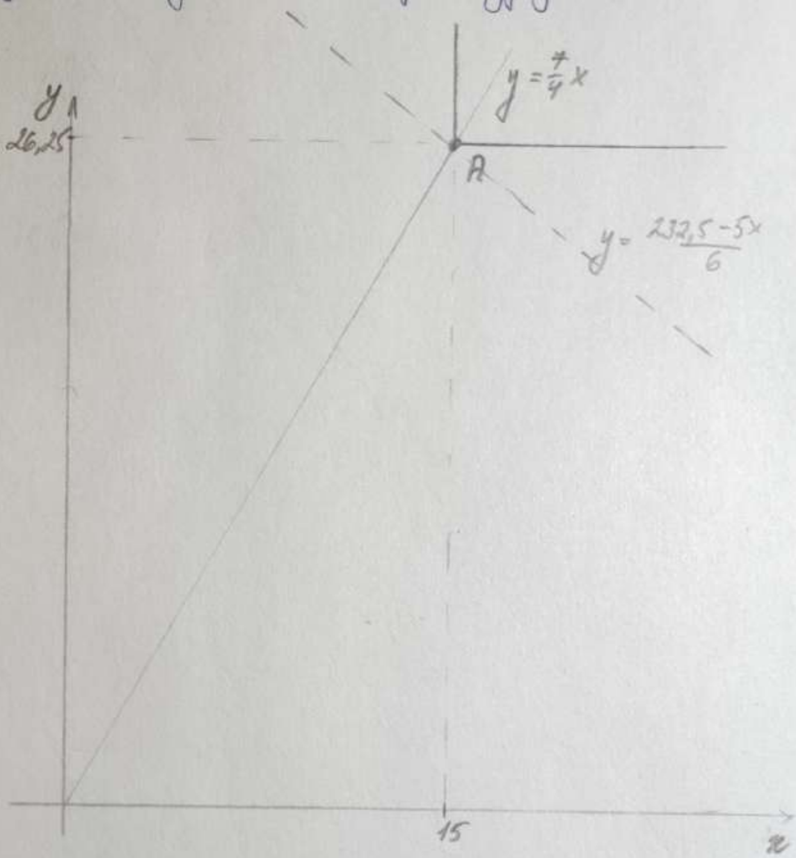
Функция полезности набора из двух товаров описывается функцией Леонтьева $U(x,y)=\min\left\{\frac{x}{\beta}, \frac{y}{\gamma}\right\}$

$K=15 \quad p_x=5 \quad p_y=6 \quad \beta=4 \quad \gamma=7$

1) Найти предельную норму замещения одного товара другим

$$MRS_{xy} = \frac{-\Delta y}{\Delta x} = \frac{\infty}{0} = \infty \quad \left(\frac{x}{y} < \frac{4}{7}\right)$$

$$MRS_{yx} = \frac{1}{MRS_{xy}} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \left(\frac{x}{y} > \frac{4}{7}\right)$$



2) Определить оптимальный набор товаров

$$\begin{cases} \frac{y^*}{x^*} = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\gamma}} \\ p_x \cdot x^* + p_y \cdot y^* = I \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y^*}{x^*} = \frac{\gamma}{\beta} \\ p_x \cdot x^* + p_y \cdot y^* = I \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^* = \frac{7}{4} x^* \\ 5 \cdot x^* + 6 \cdot y^* = I \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^* = \frac{7}{4} x^* \\ 5x^* + 6 \cdot \frac{7}{4} x^* = I \end{cases}$$

$y^* = 26,25$

$I = 232,5$

$x^* = 15$

$$U(x^*, y^*) = \min\left\{\frac{15}{4}; \frac{26,25}{7}\right\} = \min\{3,75; 3,75\} = 3,75$$