Вариант - 3 (Задача 12) Хренникова А. С.

Ортогональное преобразование A и самосопряженное М80-108Б-19
преобразование B пространства геометрических векторов V_3 в ортонормированном базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеют соответственно матрицы A и B. Каждое преобразование привести к каноническому виду, т.е. найти ортонормированный базис $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$, в котором матрица преобразования имеет канонический вид, и найти эту матрицу. Выяснить геометрический смысл каждого преобразования.

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение: Преобразование A. Применяем алгоритм приведения ортогонального преобразования к каноническому виду.

1. Составляем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ матрицы A:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{9}-\lambda & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9}-\lambda & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 1-9\lambda & 8 & 4 \\ 4 & -4-9\lambda & 7 \\ 8 & 1 & -4-9\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Сделаем замену $t = 9\lambda$ и разложим определитель

$$\begin{vmatrix} 1-t & 8 & 4 \\ 4 & -4-t & 7 \\ 8 & 1 & -4-t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-t)(-4-t)^2 + 8\cdot 8\cdot 7 + 4\cdot 4\cdot 1 - 4\cdot 8(-4-t) - 7(1-t) - 4\cdot 8(-4-t) =$$

$$= (1-t)(16+8t+t^2) + 448 + 16 + 128 + 32t - 7 + 7t + 128 + 32t =$$

$$= 16 + 8t + t^2 - 16t - 8t^2 - t^3 + 713 + 71t = -t^3 - 7t^2 + 63t + 729 = 0$$

$t_1 = 9$ - корень

$$\begin{array}{r|l} -t^3 - 7t^2 + 63t + 729 & t-9 \\ \cline{2-2} -t^3 + 9t^2 \qquad\qquad & -t^2 - 16t - 81 \\ \cline{1-1} -16t^2 + 63t \qquad & \\ -16t^2 + 144t \qquad & \\ \cline{1-1} -81t + 729 & \\ -81t + 729 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Разделив левую часть уравнения на двучлен $t-9$, приходим к квадратному уравнению $t^2 + 16t + 81 = 0$, которое имеет два комплексно сопряженных корня $t_{2,3} = -8 \pm i\sqrt{17}$. Значит, характеристическое уравнение имеет корни

2. Для действительного корня $\lambda_1 = 1$ кратности 1 находим фундаментальную систему решений однородной системы $(A - \lambda_1 E)x = 0$. Приводим матрицу системы к упрощенному виду:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}-1 & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9}-1 & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{13}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{13}{9} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & 8 & 4 \\ 4 & -13 & 7 \\ 8 & 1 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -13 & 7 \\ -8 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -13 & 7 \\ 0 & -18 & 18 \\ 0 & 9 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -13 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Общее решение системы: $x_1 = 1{,}5x_3$, $x_2 = x_3$. Следовательно, фундаментальная система содержит решение $x_1 = (3\ 2\ 2)^T$. Нормируя это решение (поделив координаты на норму $|x_1| = \sqrt{3^2+2^2+2^2} = \sqrt{17}$), получаем столбец $s_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{17}}\ \frac{2}{\sqrt{17}}\ \frac{2}{\sqrt{17}}\right)^T$.

3. Для пары комплексных сопряженных корней $\lambda_{2,3} = -\frac{8}{9} \pm \frac{i\sqrt{17}}{9}$ нужно, согласно алгоритму искать фундаментальную систему решений однородной системы $\left(A - \left(-\frac{8}{9} - \frac{\sqrt{17}}{9}i\right)E\right)z = 0$. Приводим матрицу системы к упрощенному виду:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} - \left(-\frac{8}{9} - \frac{\sqrt{17}}{9}i\right) & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} - \left(-\frac{8}{9} - \frac{\sqrt{17}}{9}i\right) & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} - \left(-\frac{8}{9} - \frac{\sqrt{17}}{9}i\right) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9+i\sqrt{17} & 8 & 4 \\ 4 & 4+i\sqrt{17} & 7 \\ 8 & 1 & 4+i\sqrt{17} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4+i\sqrt{17} & 7 \\ 0 & -7-2i\sqrt{17} & -10+i\sqrt{17} \\ 0 & 13-13i\sqrt{17} & -47-7i\sqrt{17} \end{pmatrix}$$

Вторая и третья строки матрицы пропорциональны, так как $\begin{vmatrix} -7-2i\sqrt{17} & -10+i\sqrt{17} \\ 13-13i\sqrt{17} & -47+7i\sqrt{17} \end{vmatrix} = 0$. Следовательно, третью строку матрицы можно удалить. Находим ненулевое решение оставшихся уравнений. Пусть $z_3 = 7+2i\sqrt{17}$, тогда из второго уравнения $z_2 = -10+i\sqrt{17}$. Подставляя эти значения в первое уравнение получаем $z_1 = 2-2i\sqrt{17}$. Таким образом, столбец $z = (2-2i\sqrt{17}\ \ -10+i\sqrt{17}\ \ 7+2i\sqrt{17})^T$ - это собственный вектор матрицы, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = -\frac{8}{9} - \frac{\sqrt{17}}{9}i$. Выделяя действительные и мнимые части, получаем столбцы $\operatorname{Re} z = (2\ \ -10\ \ 7)^T$ и $\operatorname{Im} z = (-2\sqrt{17}\ \ \sqrt{17}\ \ 2\sqrt{17})^T$, нормируя которые, имеем $s_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{153}}\ \frac{-10}{\sqrt{153}}\ \frac{7}{\sqrt{153}}\right)$
$s_3 = \left(-\frac{2}{3}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{2}{3}\right)^T$

4. Записываем полученные столбцы s_1, s_2, s_3 в искомую матрицу перехода

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{17}} & \frac{2}{\sqrt{153}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{-10}{\sqrt{153}} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{7}{\sqrt{153}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Векторы канонического базиса $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$ находим по столбцам s_1, s_2, s_3 матрицы перехода S, так как они связаны формулой $(\bar{s}_1\ \bar{s}_2\ \bar{s}_3) = (\bar{i}\ \bar{j}\ \bar{k})S$:

$$\bar{s}_1 = \frac{3}{\sqrt{17}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{17}}\bar{j} + \frac{2}{\sqrt{17}}\bar{k}$$

$$\bar{s}_2 = \frac{2}{\sqrt{153}}\bar{i} - \frac{10}{\sqrt{153}}\bar{j} + \frac{7}{\sqrt{153}}\bar{k}$$

$$\bar{s}_3 = -\frac{2}{3}\bar{i} + \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$$

5. По формуле $A_{(s)} = S^T A S$ получаем канонический вид матрицы ортогонального преобразования:

$$A_{(s)} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{17}} & \frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{2}{\sqrt{17}} \\ \frac{2}{\sqrt{153}} & \frac{-10}{\sqrt{153}} & \frac{7}{\sqrt{153}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{17}} & \frac{2}{\sqrt{153}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{-10}{\sqrt{153}} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{7}{\sqrt{153}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{17}} & \frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{2}{\sqrt{17}} \\ \frac{2}{\sqrt{153}} & \frac{7}{\sqrt{153}} & \frac{-10}{\sqrt{153}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{17}} & \frac{2}{\sqrt{153}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{-10}{\sqrt{153}} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{7}{\sqrt{153}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{9} & -\frac{17}{3\sqrt{153}} \\ 0 & \frac{17}{3\sqrt{153}} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Геометрический смысл преобразования A — это композиция поворота вокруг оси, содержащей вектор $\bar{s}_1$, на угол $\varphi = \operatorname{arctg}(-\frac{\sqrt{17}}{8})$, если смотреть из конца вектора $\bar{s}_1$ на плоскость, содержащую векторы $\bar{s}_2, \bar{s}_3$, и зеркальное отражение в этой плоскости.

Заметим, что в пространстве V_3 базисные векторы $\bar{s}_2$ и $\bar{s}_3$ можно найти другим способом, не выполняя преобразований комплексных матриц, а используя векторное произведение. Действительно, искомые векторы $\bar{s}_2$ и $\bar{s}_3$ должны дополнить вектор $\bar{s}_1$ до ортонормированного базиса. Находим сначала векторы $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$, дополняющие вектор $\bar{x}_1 = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ до ортогонального базиса. Возьмем, например, вектор $\bar{x}_2 = 2\bar{i} - 3\bar{j}$, перпендикулярный $\bar{x}_1$ (скалярное произведение $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$). Вектор $\bar{x}_3$ находим при помощи векторного произведения

$$\bar{x}_3 = [\bar{x}_1, \bar{x}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 4\bar{j} - 9\bar{k} - 4\bar{k} + 6\bar{i} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - 13\bar{k}.$$

Нормируя координатные столбцы $x_2 = (2\ \ -3\ \ 0)^T$, $x_3 = (6\ \ 4\ \ -13)$, получаем $s_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\ \ \frac{-3}{\sqrt{13}}\ \ 0\right)^T$, $s_3 = \left(\frac{6}{\sqrt{221}}\ \ \frac{4}{\sqrt{221}}\ \ \frac{-13}{\sqrt{221}}\right)^T$.

Для столбцов $s_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\ \ \frac{-3}{\sqrt{13}}\ \ 0\right)^T$, $s_3 = \left(\frac{6}{\sqrt{221}}\ \ \frac{4}{\sqrt{221}}\ \ \frac{-13}{\sqrt{221}}\right)^T$, найденных вторым способом, матрица перехода будет иметь вид

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{17}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{6}{\sqrt{221}} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{4}{\sqrt{221}} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{-13}{\sqrt{221}} \end{pmatrix},$$

а канонический базис —

$$\bar{s}_1 = \frac{3}{\sqrt{17}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{17}}\bar{j} + \frac{2}{\sqrt{17}}\bar{k}$$

$$\bar{s}_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}\bar{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\bar{j}$$

$$\bar{s}_3 = \frac{6}{\sqrt{221}}\bar{i} + \frac{4}{\sqrt{221}}\bar{j} - \frac{13}{\sqrt{221}}\bar{k}$$

Канонический вид $A_{(s)}$ матрицы ортогонального преобразования в этом базисе совпадает с

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{9} & -\frac{17}{3\sqrt{153}} \\ 0 & \frac{17}{3\sqrt{153}} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Заметим, что канонический базис, а следовательно, и канонический вид матрицы преобразования, находятся неоднозначно. Например, по формуле $A_{(s)} = S^T A S$ вместо матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{9} & -\frac{17}{3\sqrt{153}} \\ 0 & \frac{17}{3\sqrt{153}} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$ может получиться транспонированная матрица. Это означает, что в каноническом базисе нужно поменять местами второй и третий базисные векторы, а в матрице S переставить второй и третий столбцы.

Преобразование B. Применяем алгоритм приведения самосопряженного преобразования к каноническому виду.

1. Составляем характеристическое уравнение $\det(B - \lambda E) = 0$ матрицы B:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)(2-\lambda)^2 - 4 - 4 - 4(2-\lambda) - (-1-\lambda) - 4(2-\lambda) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 8 - 8 + 4\lambda + 1 + \lambda - 8 + 4\lambda = -\lambda^2 + 4\lambda - 4 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 23 + 9\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = 0$$

Находим его корни: один двойной корень $\lambda_1 = 3$ и один простой корень $\lambda_2 = -3$.

2. Для собственного значения $\lambda_1 = 3$ составляем расширенную матрицу системы $(B - \lambda_1 E)x = 0$ и приводим ее к упрощенному виду.

$(B-\lambda_1 E|0)=\left(\begin{array}{ccc|c} -1-3 & 2 & -2 & 0\\ 2 & 2-3 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2-3 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -4&2&-2&0\\2&-1&1&0\\-2&1&-1&0\end{array}\right)\sim \left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

Выражаем базисную переменную через свободные $x_1=0,5x_2-0,5x_3$ и находим фундаментальную систему решений $\varphi_1=(\frac12\ \ 1\ \ 0)^T$, $\varphi_2=(-\frac12\ \ 0\ \ 1)^T$. Ортогонализируем их, используя метод Грама-Шмидта. Полагаем $\psi_1=\varphi_1=(\frac12\ \ 1\ \ 0)^T$, $\psi_2=\varphi_2-\alpha\psi_1$. Коэффициент α выбираем из условия ортогональности $(\psi_1,\psi_2)=0$:

$$(\tfrac12\ \ 1\ \ 0)\left[\begin{pmatrix}-\frac12\\0\\1\end{pmatrix}-\alpha\begin{pmatrix}\frac12\\1\\0\end{pmatrix}\right]=\frac12\left(-\frac12-\alpha\cdot\frac12\right)+1(-\alpha)=-\frac14-\alpha\cdot\frac14-\alpha=-\frac54\alpha-\frac14=0\Rightarrow-\frac54\alpha=\frac14$$

Следовательно, $\alpha=-0,2$ и $\psi_2=\begin{pmatrix}-\frac12\\0\\1\end{pmatrix}+0,2\begin{pmatrix}\frac12\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac12\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac1{10}\\\frac15\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac25\\\frac15\\1\end{pmatrix}$. Нормируем столбцы

$(|\psi_1|=\sqrt{\frac14+1}=\sqrt{\frac54}=\frac{\sqrt5}{2},\ |\psi_2|=\sqrt{\frac4{25}+\frac1{25}+\frac{25}{25}}=\frac{\sqrt{30}}{5})$:

$s_1=\frac1{|\psi_1|}\psi_1=\left(\frac{\sqrt5}5\ \ \frac{2\sqrt5}5\ \ 0\right)^T$, $s_2=\frac{1}{|\psi_2|}\psi_2=\left(-\frac{2\sqrt{30}}{30}\ \ \frac{\sqrt{30}}{30}\ \ \frac{5\sqrt{30}}{30}\right)^T$

2. Для собственного значения $\lambda_2=-3$ составляем расширенную матрицу системы $(B-\lambda_2 E)x=0$ и приводим ее к упрощенному виду

$(B-\lambda_2E|0)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1+3&2&-2&0\\2&2+3&1&0\\-2&1&2+3&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&-2&0\\2&5&1&0\\-2&1&5&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\2&5&1&0\\0&6&6&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&3&3&0\\0&6&6&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim$

$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_2=-x_3$, $x_1=2x_3$. Фундаментальная система решений содержит одно решение. При $x_3=1$ находим $\psi_3=(2\ \ -1\ \ 1)^T$. Нормируя этот столбец, получаем $s_3=\left(\frac{\sqrt6}{3}\ \ -\frac{\sqrt6}{6}\ \ \frac{\sqrt6}{6}\right)^T$.

3. Записываем полученные столбцы s_1, s_2, s_3 в искомую матрицу перехода

$$S=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5}5&-\frac{2\sqrt{30}}{30}&\frac{2\sqrt6}6\\ \frac{2\sqrt5}5&\frac{\sqrt{30}}{30}&-\frac{\sqrt6}6\\0&\frac{5\sqrt{30}}{30}&\frac{\sqrt6}6\end{pmatrix}$$

Векторы канонического базиса $\bar s_1, \bar s_2, \bar s_3$ находим по столбцам s_1, s_2, s_3 матрицы перехода S, так как они связаны формулой $(\bar s_1\ \ \bar s_2\ \ \bar s_3)=(\bar i\ \ \bar j\ \ \bar k)S$:

$\bar s_1=\frac{\sqrt5}5\bar i+\frac{2\sqrt5}5\bar j$, $\bar s_2=-\frac{2\sqrt{30}}{30}\bar i+\frac{\sqrt{30}}{30}\bar j+\frac{5\sqrt{30}}{30}\bar k$, $\bar s_3=\frac{2\sqrt6}6\bar i-\frac{\sqrt6}6\bar j+\frac{\sqrt6}6\bar k$.

4. По формуле $\underset{(s)}{B}=S^TBS$ получаем канонический вид матрицы самосопряженного преобразования:

$$\underset{(s)}{B}=S^TBS=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5}5&\frac{2\sqrt6}5&0\\-\frac{2\sqrt{30}}{30}&\frac{\sqrt{30}}{30}&\frac{5\sqrt{30}}{30}\\ \frac{2\sqrt6}6&-\frac{\sqrt6}6&\frac{\sqrt6}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&-2\\2&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5}5&-\frac{2\sqrt{30}}{30}&\frac{2\sqrt6}6\\ \frac{2\sqrt5}5&\frac{\sqrt{30}}{30}&-\frac{\sqrt6}6\\0&\frac{5\sqrt{30}}{30}&\frac{\sqrt6}6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt5}5&\frac{6\sqrt5}5&0\\-\frac{\sqrt{30}}5&\frac{\sqrt{30}}{10}&\frac{\sqrt{30}}2\\-\sqrt6&\frac{\sqrt6}2&-\frac{\sqrt6}2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5}5&-\frac{2\sqrt{30}}{30}&\frac{2\sqrt6}6\\ \frac{2\sqrt5}5&\frac{\sqrt{30}}{30}&-\frac{\sqrt6}6\\0&\frac{5\sqrt{30}}{30}&\frac{\sqrt6}6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

Геометрический смысл преобразования В - это композиция ортогонального проектирования на гиперплоскость, содержащую векторы $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$, отражения (~~зеркального~~) относительно плоскости, перпендикулярной прямой, содержащей вектор $\bar{s}_3$, и растяжения вдоль этой гиперплоскости с коэффициентом 3.

Ответ: преобразование A) матрица преобразования имеет канонический вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{9} & \frac{-17}{3\sqrt{153}} \\ 0 & \frac{17}{3\sqrt{153}} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$ относительно базиса $\bar{s}_1 = \frac{3}{\sqrt{17}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{17}}\bar{j} + \frac{2}{\sqrt{17}}\bar{k}$

$\bar{s}_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}\bar{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\bar{j}$

$\bar{s}_3 = \frac{6}{\sqrt{221}}\bar{i} + \frac{4}{\sqrt{221}}\bar{j} - \frac{13}{\sqrt{221}}\bar{k}$;

Геометрический смысл преобразования - это композиция поворота вокруг оси, содержащей вектор $\bar{s}_1$ на угол $\varphi = \arctg(-\frac{\sqrt{17}}{8}) = -\arctg\frac{\sqrt{17}}{8}$, если смотреть из конца вектора $\bar{s}_1$ на плоскость, содержащую векторы $\bar{s}_2, \bar{s}_3$;

преобразование В) матрица преобразования имеет канонический вид $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ относительно базиса $\bar{s}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\bar{i} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\bar{j}$, $\bar{s}_2 = -\frac{2\sqrt{30}}{30}\bar{i} + \frac{\sqrt{30}}{30}\bar{j} + \frac{5\sqrt{30}}{30}\bar{k}$, $\bar{s}_3 = +\frac{2\sqrt{6}}{6}\bar{i} - \frac{\sqrt{6}}{6}\bar{j} + \frac{\sqrt{6}}{6}\bar{k}$; геометрический смысл преобразования - ортогональное проектирование на гиперплоскость, содержащую векторы $\bar{s}_1, \bar{s}_2, -\bar{s}_3$, с последующим растяжением вдоль этой гиперплоскости (коэффициент растяжения равен 3).

Вариант-3 (Задача 15) Хренникова А. С.
М80-108Б-19

Найти ортогональную замену переменных $x = Sy$, приводящую квадратичную форму к главным осям. В ответе указать канонический вид и матрицу S.

$2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

Решение: Составляем матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Применяем алгоритм приведения самосопряженного преобразования к каноническому виду.

1. Составляем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (2-\lambda)(5-\lambda)^2 - 4 - 4 - 4(5-\lambda) - (2-\lambda) - 4(5-\lambda) = (2-\lambda)(25 - 10\lambda + \lambda^2) - 8 -$$
$$- 20 + 4\lambda - 2 + \lambda - 20 + 4\lambda = 50 - 20\lambda + 2\lambda^2 - 25\lambda + 10\lambda^2 - \lambda^3 - 50 + 9\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 36) = 0$$

Находим его корни: один корень двойной корень $\lambda_1 = 6$ (кратности $n_1 = 2$) и один простой корень $\lambda_2 = 0$ (кратности $n_2 = 1$).

2.¹ Для собственного значения $\lambda_1 = 6$ составляем расширенную матрицу системы $(A - \lambda_1 E)x = 0$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(A - \lambda_1 E | 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2-6 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5-6 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5-6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выражаем базисную переменную через свободные $x_1 = 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3$ и находим фундаментальную систему решений $\varphi_1 = (\frac{1}{2} \; 1 \; 0)^T$, $\varphi_2 = (-\frac{1}{2} \; 0 \; 1)^T$. Ортогонализируем их, используя метод Грама-Шмидта. Полагаем $\psi_1 = \varphi_1 = (\frac{1}{2} \; 1 \; 0)^T$, $\psi_2 = \varphi_2 - \alpha\psi_1$. Коэффициент α выбираем из условия ортогональности $(\psi_1, \psi_2) = 0$:

$$\left(\tfrac{1}{2} \; 1 \; 0\right)\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \alpha \cdot \frac{1}{2}\right) + 1(-\alpha) = -\frac{1}{4} - \alpha \cdot \frac{1}{4} - \alpha = -\frac{5}{4}\alpha - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow -\frac{5}{4}\alpha = \frac{1}{4}$$

Следовательно, $\alpha = -0{,}2$ и $\psi_2 = \varphi_2 - \alpha\psi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{10} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

Нормируем столбцы ($|\psi_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $|\psi_2| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25} + \frac{25}{25}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$):

$s_1 = \frac{1}{|\psi_1|}\psi_1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \; \frac{2\sqrt{5}}{5} \; 0\right)^T$, $s_2 = \frac{1}{|\psi_2|}\psi_2 = \left(-\frac{2\sqrt{30}}{30} \; \frac{\sqrt{30}}{30} \; \frac{5\sqrt{30}}{30}\right)^T$.

2.² Для собственного значения $\lambda_2 = 0$ составляем расширенную матрицу системы $(A - \lambda_2 E)x = 0$ и приводим ее к упрощенному виду.

$$(A - \lambda_2 E | 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_2 = -x_3$, $x_1 = 2x_3$. Фундаментальная система решений содержит одно решение. При $x_3 = 1$ находим $\varphi_3 = (2 \; -1 \; 1)^T$. Нормируя этот столбец, получаем $s_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \; -\frac{\sqrt{6}}{6} \; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^T$.

3. Записываем полученные столбцы s_1, s_2, s_3 в искомую матрицу перехода

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{5\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

Векторы канонического базиса $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$ находим по столбцам s_1, s_2, s_3 матрицы перехода S, так как они связаны формулой $(\bar{s}_1 \; \bar{s}_2 \; \bar{s}_3) = (\bar{i} \; \bar{j} \; \bar{k})S$:

$\bar{s}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\bar{i} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\bar{j}$, $\bar{s}_2 = -\frac{2\sqrt{30}}{30}\bar{i} + \frac{\sqrt{30}}{30}\bar{j} + \frac{5\sqrt{30}}{30}\bar{k}$, $\bar{s}_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}\bar{i} - \frac{\sqrt{6}}{6}\bar{j} + \frac{\sqrt{6}}{6}\bar{k}$

4. По формуле $B_{(s)} = S^T B S$ получаем канонический вид матрицы самосопряженного преобразования:

$$B_{(s)} = S^T B S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{5\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{5\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{5}}{5} & \frac{12\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{30}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{5} & \sqrt{30} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{5\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(6, 6, 0)$$

Следовательно, искомый канонический вид квадратичной формы: $\tilde{q}(Sy) = 6y_1^2 + 6y_2^2$