11.3. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

11.3.1. Классификация поверхностей второго порядка

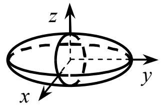
Алгебраической поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек пространства, которое в какой-либо аффинной системе координат $Oxyz$ может быть задано уравнением вида

$$a_{11}\cdot x^2+a_{22}\cdot y^2+a_{33}\cdot z^2+2\cdot a_{12}\cdot x\cdot y+2\cdot a_{13}\cdot x\cdot z+2\cdot a_{23}\cdot y\cdot z+$$
$$+2\cdot a_1\cdot x+2\cdot a_2\cdot y+2\cdot a_3\cdot z+a_0=0\,,$$

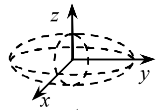
где старшие коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33} не равны нулю одновременно. Без ограничения общности можно считать, что система координат, в которой задано уравнение поверхности второго порядка, прямоугольная. Для каждой поверхности второго порядка существует прямоугольная система координат $Oxyz$, в которой уравнение принимает наиболее простой (***канонический***) вид. Она называется ***канонической***, а уравнение – ***каноническим***.

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

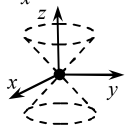
1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ — *уравнение эллипсоида;*



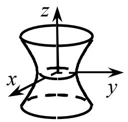
2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ — *уравнение мнимого эллипсоида*;



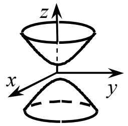
3. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ — *уравнение мнимого конуса*;



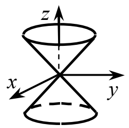
4. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ — *уравнение однополостного гиперболоида*;



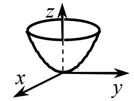
5. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ — *уравнение двуполостного гиперболоида*;



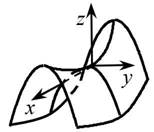
6. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ — *уравнение конуса*;



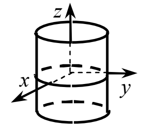
7. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2\cdot z$ — *уравнение эллиптического параболоида*;



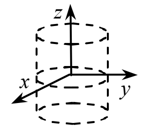
8. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2\cdot z$ — *уравнение гиперболического параболоида*;



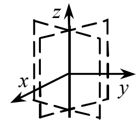
9. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — *уравнение эллиптического цилиндра*;



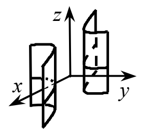
10. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ — *уравнение мнимого эллиптического цилиндра*;



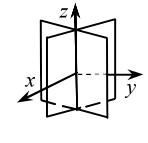
11. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — *уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей*;



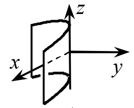
12. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — *уравнение гиперболического цилиндра*;



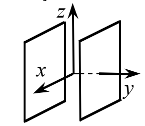
13. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — *уравнение пары пересекающихся плоскостей*;



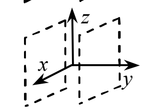
14. $y^2=2\cdot p\cdot x$ — *уравнение параболического цилиндра*;



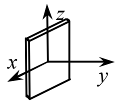
15. $y^2-b^2=0$ — *уравнение пары параллельных плоскостей*;



16. $y^2+b^2=0$ — *уравнение пары мнимых параллельных плоскостей*;



17. $y^2 = 0$ *уравнение пары совпадающих плоскостей.*



В этих уравнениях $a>0$, $b>0$, $c>0$, $p>0$, *причем* $a \ge b \ge c$ *в уравнениях* 1–3; $a \ge b$ *в уравнениях* 4–7,9–11.

Поверхности (1),(4),(5),(6),(7),(8),(9), (12),(13),(14),(15),(17) называются ***вещественными*** (***действительными***), а поверхности (2),(3),(10),(11),(16) – ***мнимыми***. Вещественные поверхности изображены в канонических системах координат. Изображения мнимых поверхностей даются штриховыми линиями только для иллюстрации.

Поверхность второго порядка называется ***центральной***, если она имеет единственный центр (симметрии). В противном случае, если центр отсутствует или не является единственным, поверхность называется ***нецентральной***. К центральным поверхностям относятся эллипсоиды (вещественный и мнимый), гиперболоиды (однополостный и двуполостный), конусы (вещественный и мнимый). Остальные поверхности – нецентральные.

АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ поверхность второго порядка описывается уравнением

$$a_{11}\cdot x^2 + a_{22}\cdot y^2 + a_{33}\cdot z^2 + 2\cdot a_{12}\cdot x\cdot y + 2\cdot a_{13}\cdot x\cdot z + 2\cdot a_{23}\cdot y\cdot z +$$
$$+2\cdot a_1\cdot x + 2\cdot a_2\cdot y + 2\cdot a_3\cdot z + a_0 = 0\,.$$

Требуется определить ее название и составить каноническое уравнение. Для этого нужно выполнить следующие действия.

1. Вычислить ***ортогональные инварианты***

$$\tau_1 = a_{11}+a_{22}+a_{33}\,, \qquad \tau_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Если $\delta = \Delta = 0$, то вычислить ***семиинвариант***

$$\kappa_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Если $\delta = \Delta = 0$ и $\tau_2 = \kappa_2 = 0$, то вычислить семиинвариант

$$\kappa_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

2. По таблице 11.1 определить название поверхности, а по названию – каноническое уравнение поверхности второго порядка.

3. Составить характеристическое уравнение $-\lambda^3 + \tau_1\cdot\lambda^2 - \tau_2\cdot\lambda + \delta = 0$, используя коэффициенты, вычисленные в п.1, либо разлагая определитель

$$\det(A - \lambda\cdot E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \tau_1\cdot\lambda^2 - \tau_2\cdot\lambda + \delta\,.$$

Найти корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (с учетом кратности) характеристического уравнения.

4. Занумеровать корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения в соответствии с правилами:

а) если поверхность эллиптического типа, то $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le |\lambda_3|$;

б) если поверхность гиперболического типа, то обозначить через λ_1 и λ_2 корни одного знака так, чтобы $|\lambda_1| \le |\lambda_2|$, а через λ_3 – корень противоположного знака;

в) если поверхность параболического типа и

– если нулевой корень двойной, то $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ и $\lambda_2 \ne 0$;

– если нулевой корень простой, а ненулевые корни одного знака, то $\lambda_3 = 0$ и $|\lambda_1| \le |\lambda_2|$;

– если нулевой корень простой, а ненулевые корни разных знаков, то $\lambda_3 = 0$ и либо $\lambda_1 > 0$, если $\Delta \ne 0$ или $\Delta = \kappa_2 = 0$;

либо $\lambda_1\cdot\kappa_2 > 0$, если $\Delta = 0$ и $\kappa_2 \ne 0$.

5. Вычислить коэффициенты канонического уравнения и записать его в канонической системе координат $O'x'y'z'$:

а) для поверхностей эллиптического типа:

(1) – при $\Delta < 0$ – уравнение *эллипсоида* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1$ с коэффициентами $a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1\cdot\delta}$, $b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2\cdot\delta}$, $c^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_3\cdot\delta}$;

Т а б л и ц а 11.1. **Классификация поверхностей второго порядка**

<table>
<tr><th></th><th colspan="7">Признаки вида</th><th>Название поверхности</th><th>№</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Центральные поверхности</td><td rowspan="6">$\delta\neq0$</td><td rowspan="3">Эллиптический тип</td><td colspan="2" rowspan="3">$\begin{cases}\tau_2>0,\\ \tau_1\cdot\delta>0\end{cases}$</td><td colspan="3">$\Delta<0$</td><td>Эллипсоид</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\Delta>0$</td><td>Мнимый эллипсоид</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\Delta=0$</td><td>Мнимый конус</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Гиперболический тип</td><td colspan="2" rowspan="3">$\left[\begin{array}{l}\tau_2\le0,\\ \tau_1\cdot\delta\le0\end{array}\right.$</td><td colspan="3">$\Delta>0$</td><td>Однополостный гиперболоид</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\Delta<0$</td><td>Двуполостный гиперболоид</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\Delta=0$</td><td>Конус</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="11">Нецентральные поверхности</td><td rowspan="11">$\delta=0$</td><td rowspan="11">Параболический тип</td><td colspan="5">$\Delta<0$</td><td>Эллиптический параболоид</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="5">$\Delta>0$</td><td>Гиперболический параболоид</td><td>8</td></tr>
<tr><td rowspan="9">$\Delta=0$</td><td rowspan="3">$\tau_2>0$</td><td colspan="3">$\tau_1\cdot\kappa_2<0$</td><td>Эллиптический цилиндр</td><td>9</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\tau_1\cdot\kappa_2>0$</td><td>Мнимый эллиптический цилиндр</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\kappa_2=0$</td><td>Пара мнимых пересекающихся плоскостей</td><td>11</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\tau_2<0$</td><td colspan="3">$\kappa_2\neq0$</td><td>Гиперболический цилиндр</td><td>12</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\kappa_2=0$</td><td>Пара пересекающихся плоскостей</td><td>13</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\tau_2=0$</td><td colspan="3">$\kappa_2\neq0$</td><td>Параболический цилиндр</td><td>14</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\kappa_2=0$</td><td colspan="2">$\kappa_1<0$</td><td>Пара параллельных плоскостей</td><td>15</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\kappa_1>0$</td><td>Пара мнимых параллельных плоскостей</td><td>16</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\kappa_1=0$</td><td>Пара совпадающих плоскостей</td><td>17</td></tr>
</table>

(2) при $\Delta>0$ – уравнение *мнимого эллипсоида* $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}+\frac{(z')^2}{c^2}=-1$ с коэффициентами $a^2=\frac{\Delta}{\lambda_1\cdot\delta}$, $b^2=\frac{\Delta}{\lambda_2\cdot\delta}$, $c^2=\frac{\Delta}{\lambda_3\cdot\delta}$;

(3) при $\Delta=0$ – уравнение *мнимого конуса* $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}+\frac{(z')^2}{c^2}=0$ с коэффициентами $a^2=\frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2=\frac{1}{|\lambda_2|}$, $c^2=\frac{1}{|\lambda_3|}$;

б) для поверхностей гиперболического типа:

(4) при $\Delta>0$ – уравнение *однополостного гиперболоида* $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}-\frac{(z')^2}{c^2}=1$ с коэффициентами $a^2=-\frac{\Delta}{\lambda_1\cdot\delta}$, $b^2=-\frac{\Delta}{\lambda_2\cdot\delta}$, $c^2=\frac{\Delta}{\lambda_3\cdot\delta}$;

(5) при $\Delta<0$ – уравнение *двуполостного гиперболоида* $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}-\frac{(z')^2}{c^2}=-1$ с коэффициентами $a^2=\frac{\Delta}{\lambda_1\cdot\delta}$, $b^2=\frac{\Delta}{\lambda_2\cdot\delta}$, $c^2=-\frac{\Delta}{\lambda_3\cdot\delta}$;

(6) при $\Delta=0$ – уравнение *конуса* $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}-\frac{(z')^2}{c^2}=0$ с коэффициентами $a^2=\frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2=\frac{1}{|\lambda_2|}$, $c^2=\frac{1}{|\lambda_3|}$;

в) для поверхностей параболического типа:

(7) при $\Delta<0$ – уравнение *эллиптического параболоида* $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=2\cdot z$ с коэффициентами $a^2=\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^2\cdot\tau_2}}$, $b^2=\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^2\cdot\tau_2}}$;

(8) при $\Delta>0$ – уравнение *гиперболического параболоида* $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=2\cdot z$ с коэффициентами $a^2=\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^2\cdot\tau_2}}$, $b^2=\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^2\cdot\tau_2}}$;

(9) при $\Delta=0$, $\tau_2>0$, $\tau_1\cdot\kappa_2<0$ – уравнение *эллиптического цилиндра* $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$ с коэффициентами $a^2=-\frac{\kappa_2}{\lambda_1\cdot\tau_2}$, $b^2=-\frac{\kappa_2}{\lambda_2\cdot\tau_2}$;

(10) при $\Delta=0$, $\tau_2>0$, $\tau_1\cdot\kappa_2>0$ – уравнение *мнимого эллиптического цилиндра* $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=-1$ с коэффициентами $a^2=\frac{\kappa_2}{\lambda_1\cdot\tau_2}$, $b^2=\frac{\kappa_2}{\lambda_2\cdot\tau_2}$;

(11) при $\Delta=0$, $\tau_2>0$, $\kappa_2=0$ – уравнение *пары мнимых пересекающихся плоскостей* $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=0$ с коэффициентами $a^2=\frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2=\frac{1}{|\lambda_2|}$;

(12) при $\Delta=0$, $\tau_2<0$, $\kappa_2\neq0$ – уравнение *гиперболического цилиндра* $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=1$ с коэффициентами $a^2=-\frac{\kappa_2}{\lambda_1\cdot\tau_2}$, $b^2=\frac{\kappa_2}{\lambda_2\cdot\tau_2}$;

(13) при $\Delta=0$, $\tau_2<0$, $\kappa_2=0$ – уравнение *пары пересекающихся плоскостей* $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=0$ с коэффициентами $a^2=\frac{1}{\lambda_1}$, $b^2=-\frac{1}{\lambda_2}$;

(14) при $\Delta=0$, $\tau_2=0$, $\kappa_2\neq0$ – уравнение *параболического цилиндра* $(y')^2=2\cdot p\cdot x'$ с коэффициентом $p=\sqrt{-\frac{\kappa_2}{\tau_1^3}}$;

(15) при $\Delta=0$, $\tau_2=0$, $\kappa_2=0$, $\kappa_1<0$ – уравнение *пары параллельных плоскостей* $(y')^2-b^2=0$ с коэффициентом $b^2=-\frac{\kappa_1}{\tau_1^2}$;

(16) при $\Delta=0$, $\tau_2=0$, $\kappa_2=0$, $\kappa_1>0$ – уравнение *пары мнимых параллельных плоскостей* $(y')^2+b^2=0$ с коэффициентом $b^2=\frac{\kappa_1}{\tau_1^2}$;

(17) при $\Delta=0$, $\tau_2=0$, $\kappa_2=0$, $\kappa_1=0$ – уравнение *пары совпадающих плоскостей* $(y')^2=0$.

11.3.6. Нахождение канонической системы координат и построение поверхности второго порядка

Пусть в стандартной системе координат $Oxyz$ алгебраическая поверхность второго порядка задана уравнением (11.18):

$$a_{11}\cdot x^2+a_{22}\cdot y^2+a_{33}\cdot z^2+2\cdot a_{12}\cdot x\cdot y+2\cdot a_{13}\cdot x\cdot z+2\cdot a_{23}\cdot y\cdot z+$$
$$+2\cdot a_1\cdot x+2\cdot a_2\cdot y+2\cdot a_3\cdot z+a_0=0. \qquad (11.25)$$

Требуется:

I) определить название поверхности второго порядка, составить ее каноническое уравнение (см. разд.11.3.1);

II) найти каноническую систему координат $O'x'y'z'$ (в которой уравнение поверхности имеет канонический вид);

III) построить поверхность в заданной системе координат $Oxyz$.

Алгоритм решения I части задачи – определения названия поверхности и составления ее канонического уравнения – рассмотрен в разд.11.3.1. Рассмотрим план решения II и III частей задачи. Для нахождения канонической системы координат $O'x'y'z'$ достаточно указать ее базисные векторы: $\bar{s}_1=s_{11}\cdot\bar{i}+s_{21}\cdot\bar{j}+s_{31}\cdot\bar{k}$, $\bar{s}_2=s_{12}\cdot\bar{i}+s_{22}\cdot\bar{j}+s_{32}\cdot\bar{k}$, $\bar{s}_3=s_{13}\cdot\bar{i}+s_{23}\cdot\bar{j}+s_{33}\cdot\bar{k}$ (***канонический базис***), а также координаты x_0, y_0, z_0 ее начала O' в системе координат $Oxyz$. Заданная поверхность строится в найденной канонической системе координат по каноническому уравнению.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть выполнены пп.1–5 алгоритма составления канонического уравнения поверхности второго порядка (см. разд.11.3.1). Обозначим через

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$$

матрицу квадратичной формы в левой части уравнения (11.25).

6. Найти собственные векторы

$$l_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\quad l_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix},\quad l_3=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$$

матрицы A, соответствующие корням λ_1, λ_2, λ_3 характеристического уравнения, по следующим правилам:

а) если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то $l_1 = (1 \quad 0 \quad 0)^T$, $l_2 = (0 \quad 1 \quad 0)^T$, $l_3 = (0 \quad 0 \quad 1)^T$;

б) если все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ простые, то для каждого корня найти ненулевое решение однородной системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = 0, \\ a_{12} \cdot x + (a_{22} - \lambda) \cdot y + a_{23} \cdot z = 0, \\ a_{13} \cdot x + a_{23} \cdot y + (a_{33} - \lambda) \cdot z = 0, \end{cases} \tag{11.26}$$

а именно, решая (11.26) при $\lambda = \lambda_1$, найти $l_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^T \neq o$; решая (11.26) при $\lambda = \lambda_2$, найти $l_2 = (x_2 \quad y_2 \quad z_2)^T \neq o$; решая (11.26) при $\lambda = \lambda_3$, найти $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T \neq o$.

Если $\lambda_3 = 0$ и корни λ_1 и λ_2 имеют разные знаки ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$), то столбец $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T$ должен удовлетворять дополнительному условию $a_1 \cdot x_3 + a_2 \cdot y_3 + a_3 \cdot z_3 \le 0$, в противном случае следует заменить столбец l_3 на противоположный: $l_3 = (-x_3 \quad -y_3 \quad -z_3)^T$.

Если $\lambda_3 = 0$ и корни λ_1 и λ_2 одного знака ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$), то столбец $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T$ должен удовлетворять дополнительному условию $\tau_1 \cdot (a_1 \cdot x_3 + a_2 \cdot y_3 + a_3 \cdot z_3) < 0$, в противном случае следует заменить столбец l_3 на противоположный: $l_3 = (-x_3 \quad -y_3 \quad -z_3)^T$;

в) если имеется двойной ненулевой корень $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то для простого корня λ_3 найти соответствующий собственный вектор $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T \neq o$ – любое ненулевое решение системы (11.26) при $\lambda = \lambda_3$. Для кратного корня $\lambda_1 = \lambda_2$ в качестве $l_2 = (x_2 \quad y_2 \quad z_2)^T \neq o$ взять любой ненулевой столбец матрицы $A - \lambda_3 \cdot E$, а элементы столбца $l_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^T$ найти по формулам

$$x_1 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad y_1 = -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad z_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Если $\lambda_3 = 0$, то столбец $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T$ должен удовлетворять дополнительному условию $\tau_1 \cdot (a_1 \cdot x_3 + a_2 \cdot y_3 + a_3 \cdot z_3) < 0$, в противном случае следует заменить столбец l_3 на противоположный: $l_3 = (-x_3 \quad -y_3 \quad -z_3)^T$;

г) если имеется двойной нулевой корень $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, то собственный вектор $l_2 = (x_2 \quad y_2 \quad z_2)^T$, соответствующий простому корню λ_2, найти как ненулевое решение системы (11.26). Вычислить столбец $a' = (a_1' \quad a_2' \quad a_3')^T$:

$$a_1' = a_1 - \frac{a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot y_2 + a_3 \cdot z_2}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot x_2, \quad a_2' = a_2 - \frac{a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot y_2 + a_3 \cdot z_2}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot y_2, \quad a_3' = a_3 - \frac{a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot y_2 + a_3 \cdot z_2}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot z_2.$$

Если $a' = o$, то столбец $l_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^T$ найти как ненулевое решение системы (11.26) при $\lambda = 0$. Если $a' \neq o$, то элементы столбца $l_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^T$ вычислить по формулам $x_1 = -\tau_1 \cdot a_1'$, $y_1 = -\tau_1 \cdot a_2'$, $z_1 = -\tau_1 \cdot a_3'$. Элементы столбца $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T$ найти по формулам

$$x_3 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad y_3 = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

По собственным векторам $l_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^T$, $l_2 = (x_2 \quad y_2 \quad z_2)^T$, $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T$ определить канонический базис:

$$\bar{s}_1 = s_{11} \cdot \bar{i} + s_{21} \cdot \bar{j} + s_{31} \cdot \bar{k} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \cdot \bar{i} + \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \cdot \bar{j} + \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \cdot \bar{k},$$

$$\bar{s}_2 = s_{12} \cdot \bar{i} + s_{22} \cdot \bar{j} + s_{32} \cdot \bar{k} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \cdot \bar{i} + \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \cdot \bar{j} + \frac{z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \cdot \bar{k},$$

$$\bar{s}_3 = s_{13} \cdot \bar{i} + s_{23} \cdot \bar{j} + s_{33} \cdot \bar{k} = \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}} \cdot \bar{i} + \frac{y_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}} \cdot \bar{j} + \frac{z_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}} \cdot \bar{k}.$$

7. Найти координаты x_0, y_0, z_0 начала O' канонической системы координат:

а) для эллипсоидов, гиперболоидов, конусов, эллиптических или гиперболических цилиндров, пар плоскостей найти любое решение x_0, y_0, z_0 системы:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z + a_1 = 0, \\ a_{12} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z + a_2 = 0, \\ a_{13} \cdot x + a_{23} \cdot y + a_{33} \cdot z + a_3 = 0; \end{cases}$$

б) для параболоидов и параболического цилиндра найти любое решение x_0, y_0, z_0 системы:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y + a_{13}\cdot z + a_1^{\perp} = 0, \\ a_{12}\cdot x + a_{22}\cdot y + a_{23}\cdot z + a_2^{\perp} = 0, \\ a_{13}\cdot x + a_{23}\cdot y + a_{33}\cdot z + a_3^{\perp} = 0, \\ \left(a_1 + a_1'\right)\cdot x + \left(a_2 + a_2'\right)\cdot y + \left(a_3 + a_3'\right)\cdot z + a_0 = 0, \end{cases}$$

где в зависимости от вида поверхности положить:

– для эллиптического и гиперболического параболоидов:

$$\mu = a_1\cdot s_{13} + a_2\cdot s_{23} + a_3\cdot s_{33}, \quad a_1' = \mu\cdot s_{13}, \quad a_2' = \mu\cdot s_{23}, \quad a_3' = \mu\cdot s_{33},$$

$$a_1^{\perp} = a_1 - a_1', \quad a_2^{\perp} = a_2 - a_2', \quad a_3^{\perp} = a_3 - a_3';$$

– для параболического цилиндра:

$$\mu = a_1\cdot s_{12} + a_2\cdot s_{22} + a_3\cdot s_{32}, \quad a_1^{\perp} = \mu\cdot s_{12}, \quad a_2^{\perp} = \mu\cdot s_{22}, \quad a_3^{\perp} = \mu\cdot s_{32},$$

$$a_1' = a_1 - a_1^{\perp}, \quad a_2' = a_2 - a_2^{\perp}, \quad a_3' = a_3 - a_3^{\perp}.$$

Найденные в пп.6,7 координаты x_0, y_0, z_0 начала O' и базисные векторы $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{s}_3$ определяют каноническую систему координат $O'x'y'z'$.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть определено название поверхности второго порядка, составлено ее каноническое уравнение (см. пп.1–5 в разд.11.3.1), а также найдена каноническая система координат $O'x'y'z'$ (пп.6,7 алгоритма). Требуется построить поверхность второго порядка в заданной системе координат $Oxyz$. Для этого нужно выполнить следующие действия.

8. В координатном пространстве $Oxyz$ изобразить каноническую систему координат $O'x'y'z'$, координаты x_0, y_0, z_0 начала O' которой найдены в п.7, а координаты базисных векторов – в п.6.

9. Построить поверхность второго порядка в канонической системе координат $O'x'y'z'$ по каноническому уравнению, найденному в п.5. Построение центральных поверхностей (эллипсоида, гиперболоидов, конуса) удобно начинать с изображения основного параллелепипеда (см. разд.11.3.2–11.3.4). При построении параболоидов, цилиндров и пар плоскостей использовать разд.11.3.5; 11.2.2–11.2.4, 11.1.1–11.1.3. Мнимые поверхности не изображаются, за исключением мнимого конуса или пары мнимых пересекающихся плоскостей (при этом изображаются только точка O' или ось $O'z'$ соответственно).