Вариант - 3

Хренниковой А.
М80-108Б-19

Преобразование $A: V_3 \to V_3$ пространства V_3 геометрических векторов. Для этого преобразования:

а) найти собственные векторы и собственные значения;

б) определить алгебраическую и геометрическую кратности собственных значений;

в) указать одномерные и двумерные инвариантные подпространства.

Поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси, содержащей вектор $\bar{i}$ в направлении от вектора $\bar{j}$ к вектору $\bar{k}$.

Решение: Выполняем п. а) задания. Используем алгоритм нахождения собственных векторов и собственных значений линейного преобразования.

1. Выбираем стандартный базис $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ пространства V_3 и составляем матрицу A преобразования.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Вычисляем определитель

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) + (1-\lambda)$$ и составляем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$: $(\lambda^2+1)(1-\lambda) = 0$.

3. Уравнение имеет три корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. $\lambda_1 = 1$ - этот вещественный корень является собственным значением преобразования A.

4. Для корня $\lambda_1 = 1$ находим фундаментальную систему решений однородной системы $(A - \lambda_1 E)x = 0 \Leftrightarrow (A - E)x = 0$. Составляем расширенную матрицу системы и приводим ее к упрощенному виду (удаляя нулевые строки)

$$(A - E|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0-1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выражаем базисные переменные x_2, x_3 через свободные: $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Придавая свободной переменной стандартное значение $x_1 = 1$, получаем фундаментальную систему решений $\varphi_1 = (1\ 0\ 0)^T$.

5. Решению $\varphi_1 = (1\ 0\ 0)^T$ соответствует собственный вектор $\bar{s}_1 = \bar{i}$. Все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 1$ имеют вид $\bar{s} = C_1 \cdot \bar{i}$, где C_1 - произвольная постоянная, не равная нулю.

Выполняем п. б) задания. Характеристическое уравнение имеет вид $(1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0$. Значит, алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 1$ равна 1, так как этот корень простой. Геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 1$ равна 1, так как для этого корня был найден собственный вектор $\bar{s}_1$. В этом случае размерность собственного подпространства $Ker(A - \lambda_1 E) = Lin(\bar{s}_1)$ равна 1.

Выполняем п. в) задания. Подпространство $L = Lin(\bar{i})$ инвариантно относительно этого преобразования, так как любой вектор, принадлежащий L, не изменяется в результате поворота, т.е. отображается в себя. Подпространство $\Pi = L^{\perp}$ - радиус-векторов, принадлежащих плоскости, перпендикулярной оси вращения, также инвариантное, так как в результате поворота все эти радиус-векторы остаются в той же плоскости $Lin(\bar{j}, \bar{k})$.

Ответ: а) собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует собственный вектор $\bar{s} = C_1\bar{i}$, где C_1 - произвольная постоянная, не равная нулю.

б) собственное значение $\lambda_1 = 1$ имеет алгебраическую и геометрическую кратности, равные 1.

в) одномерное инвариантное подпространство: $Lin(\bar{i})$

двумерное инвариантное подпространство: $Lin(\bar{j}, \bar{k})$.