А.С. БОРТАКОВСКИЙ
Е.А. ПЕГАЧКОВА

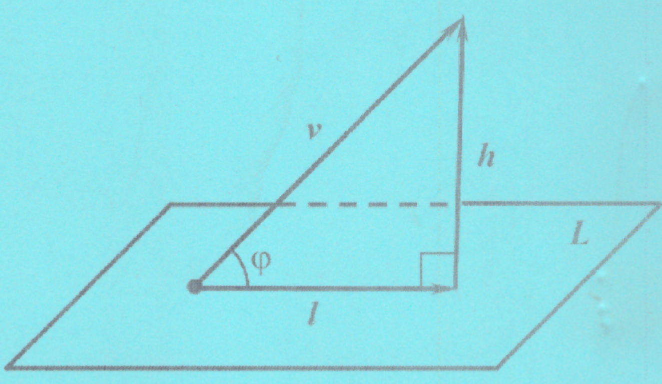
$$q(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^TAx$$

$$f(J_m(\lambda))=\begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(m-2)!}f^{(m-2)}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

# ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

$$\Delta_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)$$

## Часть 2




$$G(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)=\begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & \cdots & (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1) & \cdots & (\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

$$|h|=\sqrt{\frac{\det G(a_1,\ldots,a_n,x)}{\det G(a_1,\ldots,a_n)}}$$

$$\dim(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\dim\boldsymbol{A}+\dim\boldsymbol{B}-\dim(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})$$

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

**А.С. БОРТАКОВСКИЙ, Е.А. ПЕГАЧКОВА**

# ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

## Часть 2

*Печатается по рекомендации Редакционного совета факультета
«Информационные технологии и прикладная математика»
Московского авиационного института
(национального исследовательского университета)*

Москва

2017

ББК 517
УДК 51
Б 82

Б 82 **Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.**

Типовые задачи по линейной алгебре. Часть 2: Учебное пособие. – М.: Доброе слово, 2017. – 140 с.

ISBN 978-5-89796-606-0

Пособие предназначено для проведения самостоятельной работы студентов по курсу линейной алгебры во втором семестре. Приведены основные теоретические сведения и методы решения типовых задач по всем основным разделам линейной алгебры: векторные (линейные) пространства, евклидовы пространства, линейные преобразования векторных пространств, ортогональные и сопряженные преобразования евклидовых пространств, квадратичные формы. Составлены варианты типовых задач, письменное решение которых проверяется преподавателем. Подробное решение аналогичных задач приводится в каждом разделе. Эти примеры помогают студентам выработать навыки и умения решения типовых задач. Степень обоснованности и объем пояснений в приводимых примерах должны воспроизводиться студентами при самостоятельном решении задач.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Самостоятельная работа студентов (СРС) является важной составляющей учебного процесса, которой отводится значительный объем в государственных стандартах подготовки бакалавров. Самостоятельная работа позволяет студентам закрепить навыки и умения, приобретенные на аудиторных занятиях (лекциях, семинарах, лабораторных работах), проверить правильность понимания теоретических сведений, научиться решать основные типовые задачи. Проверка СРС вместе с тестами и контрольными работами дает информацию об успеваемости студентов в течение семестра и служит для текущей аттестации. Большое значение СРС имеет для подготовки к экзамену или зачету. Она учитывается также в итоговой аттестации при рейтинговой системе оценивания.

Пособие дополняет книги [3-8], образуя вместе с ними единый методический комплекс по линейной алгебре для первокурсников. Основную часть пособия составляют 20 вариантов, содержащих типовые задачи по линейной алгебре. Каждый студент выполняет один вариант задания (номер варианта определяется порядковым номером фамилии студента в списке группы). Вариант содержит 16 задач по всем основным разделам линейной алгебры [1-11]: векторные (линейные) пространства, евклидовы пространства, линейные преобразования и отображения векторных пространств, инвариантные подпространства, ортогональные и сопряженные преобразования евклидовых пространств, квадратичные формы.

Умение решать типовые задачи, как правило, достаточно для получения удовлетворительной итоговой оценки. В течение семестра на каждом практическом занятии преподаватель указывает номера задач, письменное решение которых, соответственно оформленное, студенты должны сдать на проверку на следующем занятии. После проверки студентам сообщаются оценки и обсуждаются допущенные в решениях характерные ошибки.

Пособие состоит из 9 тематических разделов и вариантов заданий, собранных в разд. 10. В конце пособия приводится список рекомендуемой литературы для практической подготовки. В каждом тематическом разделе содержатся необходимые теоретические сведения, описываются методы и алгоритмы решения типовых задач. Приводятся примеры решения задач, аналогичных задачам из вариантов для СРС, причем нумерации и формулировки разбираемых примеров и задач для СРС совпадают. Эти примеры помогают студентам выработать навыки и умения решения типовых задач. Степень обоснованности действий, подробность алгебраических преобразований и объем пояснений в приводимых примерах должны воспроизводиться студентами при самостоятельном решении.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ

1. Решение каждой задачи должно быть написано аккуратно, разборчивым почерком, чернилами или пастой синего (или черного) цвета на листах белой бумаги (либо в клеточку) формата А4. Текст следует писать на одной стороне листа, оставляя левое поле не менее 2 см. Листы должны быть скреплены с левой стороны степлером.

2. На каждом листе работы указываются фамилия и инициалы студента, выполнившего работу, номер учебной группы, номер варианта, дата сдачи.

3. Перед решением каждой задачи ставится ее порядковый номер, который необходимо выделить (подчеркиванием или маркером), и полностью приводится условие задачи.

4. Математические выкладки необходимо сопровождать пояснениями, раскрывающими смысл и содержание выполняемых действий. Все вычисления проводятся точно, без округления результата. В конце решения приводится ответ. Слово "*Ответ*" следует выделить (подчеркиванием или маркером).

5. Решение задачи с измененным условием или задачи из другого варианта не засчитывается. Отсутствие обоснования решения или пояснений приводит к снижению оценки. Оценка также снижается за небрежное оформление работы.

# 1. ВЕКТОРНЫЕ (ЛИНЕЙНЫЕ) ПРОСТРАНСТВА

## Аксиомы векторного пространства

***Векторным*** (***линейным***) ***пространством*** называется множество $\boldsymbol{V}$ произвольных элементов, называемых ***векторами***, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, т.е. любым двум векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, называемый ***суммой векторов*** $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, любому вектору $\boldsymbol{v}$ и любому числу $\lambda$ поставлен в соответствие вектор $\lambda\boldsymbol{v}$, называемый ***произведением вектора*** $\boldsymbol{v}$ ***на число*** $\lambda$; так что выполняются следующие условия:

1. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$; (коммутативность)

**2.** $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{V}$; (ассоциативность)

**3.** существует такой элемент $\boldsymbol{o}\in\boldsymbol{V}$, называемый ***нулевым вектором***, что $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{v}$ $\forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$;

**4.** для каждого вектора $\boldsymbol{v}$ существует такой вектор $(-\boldsymbol{v})\in\boldsymbol{V}$, называемый ***противоположным*** вектору $\boldsymbol{v}$, что $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{o}$;

**5.** $\lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V},\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$; (дистрибутивность)

**6.** $(\lambda+\mu)\,\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V},\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$; (дистрибутивность)

**7.** $\lambda(\mu\boldsymbol{v})=(\lambda\mu)\,\boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V},\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$; (ассоциативность)

**8.** $1\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$. (унитарность)

Знак равенства, поставленный между векторами, означает, что в левой и правой частях равенства представлен один и тот же элемент множества $\boldsymbol{V}$. Такие векторы называются ***равными***. Условия 1–8 называются ***аксиомами векторного пространства***. Аксиомы 1 и 2 определяют коммутативность и ассоциативность операции сложения векторов. Аксиомы 5 или 6 определяют дистрибутивность умножения вектора на число относительно операции сложения, а именно относительно сложения векторов (аксиома 5) или сложения чисел (аксиома 6).

Векторное пространство – это непустое множество, так как обязательно содержит нулевой вектор. Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются ***линейными операциями*** над векторами. ***Разностью векторов*** $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ называется сумма вектора $\boldsymbol{u}$ с противоположным вектором $(-\boldsymbol{v})$ и обозначается: $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{v})$. Два ненулевых вектора $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ называются ***коллинеарными*** (***пропорциональными***), если существует такое число $\lambda$, что $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{u}$. Понятие коллинеарности распространяется на любое конечное число векторов. Нулевой вектор $\boldsymbol{o}$ считается коллинеарным с любым вектором.

В определении векторного пространства операция умножения вектора на число введена для действительных чисел. Такое пространство называют ***векторное пространством над полем действительных*** (***вещественных***) ***чисел***, или, короче, ***вещественным векторным пространством***. Если в определении вместо поля $\mathbb{R}$ действительных чисел взять поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, то получим ***векторное пространство над полем комплексных чисел***, или, короче, ***комплексное векторное пространство***. В качестве числового поля можно выбрать и поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, при этом получим векторное пространство над полем рациональных чисел. Далее, если не оговорено противное, будут рассматриваться вещественные векторные пространства. В некоторых случаях для краткости будем говорить о пространстве, опуская слово векторное, так как все пространства, рассматриваемые ниже, – векторные.

**Примеры векторных пространств**

1. Обозначим $V_1, V_2, V_3$ – множества геометрических векторов (направленных отрезков) на прямой, на плоскости, в пространстве соответственно с обычными операциями сложения векторов и умножения векторов на число. Выполнение аксиом 1–8 векторного пространства следует из курса аналитической геометрии. Следовательно, множества $V_1, V_2$, $V_3$ являются вещественными векторными пространствами. Вместо свободных векторов можно рассмотреть соответствующие множества радиус-векторов. Например, множество векторов на плоскости, имеющих общее начало, т.е. отложенных от одной фиксированной точки плоскости, является вещественным векторным пространством. Множество радиус-векторов единичной длины не образует векторного пространство, так как для любого из этих векторов $\overline{e}$ произведение $2\overline{e}$ не принадлежит рассматриваемому множеству (вектор $2\overline{e}$ не единичный).

2. Обозначим $\mathbb{R}^n$ – множество матриц-столбцов размеров $n \times 1$ с операциями сложения матриц и умножения матриц на число. Аксиомы 1–8 векторного пространства для этого множества выполняются (см. разд. 1 в [7]). Нулевым вектором в этом множестве служит нулевой столбец $o = (0 \quad \cdots \quad 0)^T$. Следовательно, множество $\mathbb{R}^n$ – вещественное векторное пространство. Аналогично, множество $\mathbb{C}^n$ столбцов размеров $n \times 1$ с комплексными элементами – комплексное векторное пространство. Множество матриц-столбцов с неотрицательными действительными элементами, напротив, не является векторным пространством, так как не содержит противоположных векторов.

3. Обозначим $\{Ax = o\}$ – множество решений однородной системы $Ax = o$ линейных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными (где $A$ –матрица системы), рассматриваемое как множество столбцов размеров $n \times 1$ с операциями сложения матриц и умножения матриц на число. Заметим, что эти операции действительно определены на множестве $\{Ax = o\}$. Из свойств решений однородной системы (см. разд. 5 в [7]) следует, что сумма двух решений однородной системы и произведение ее решения на число также являются решениями однородной системы, т.е. принадлежат множеству $\{Ax = o\}$. Аксиомы векторного пространства для столбцов выполняются (см. п. 2). Поэтому множество решений однородной системы является вещественным векторным пространством.

Множество $\{Ax = b\}$ решений неоднородной системы $Ax = b$, $b \neq o$, напротив, не является векторным пространством, хотя бы потому, что не содержит нулевого элемента ($x = o$ не является решением неоднородной системы).

4. Обозначим $\mathbb{R}^{m \times n}$ – множество матриц размеров $m \times n$ с операциями сложения матриц и умножения матриц на число. Аксиомы 1–8 векторного пространства для этого множества выполняются (см. разд.1 в [7]). Нулевым вектором является нулевая матрица $O$ соответствующих размеров. Следовательно, множество $\mathbb{R}^{m \times n}$ является векторным пространством.

5. Обозначим $P(\mathbb{C})$ – множество многочленов одной переменной с комплексными коэффициентами. Операции сложения многочленов и умножения многочлена на число определены и удовлетворяют аксиомам 1–8 (в частности, нулевым вектором является многочлен, тождественно равный нулю). Поэтому множество $P(\mathbb{C})$ является векторным пространством над полем комплексных чисел. Множество $P(\mathbb{C})$ многочленов с действительными коэффициентами также является векторным пространством (но, разумеется, над полем действительных чисел). Множество $P_n(\mathbb{R})$ многочленов степени не выше, чем $n$, с действительными коэффициентами также является вещественным векторным пространством. Заметим, что операция сложения многочленов определена на этом множестве, так как степень суммы многочленов не превышает степеней слагаемых.

Множество многочленов степени $n$ не является векторным пространством, так как сумма таких многочленов может оказаться многочленом меньшей степени, не принадлежащим рассматриваемому множеству. Множество всех многочленов степени не выше, чем $n$, с положительными коэффициентами также не является векторным пространством, поскольку при умножении такого многочлена на отрицательное число получим многочлен, не принадлежащий этому множеству.

6. Обозначим $C(\mathbb{R})$ – множество действительных функций, определенных и непрерывных на $\mathbb{R}$. Сумма $(f+g)$ функций $f$, $g$ и произведение $\lambda f$ функции $f$ на действительное число $\lambda$ определяются равенствами: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Эти операции действительно определены на $C(\mathbb{R})$, так как сумма непрерывных функций и произведение непрерывной функции на число являются непрерывными функциями, т.е. элементами $C(\mathbb{R})$. Проверим выполнение аксиом векторного пространства.

Из коммутативности сложения действительных чисел следует справедливость равенства $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}$. Поэтому $f+g=g+f$, т.е. аксиома 1 выполняется. Аксиома 2 следует аналогично из ассоциативности сложения. Нулевым вектором служит функция $o(x)$, тождественно равная нулю, которая, разумеется, является непрерывной. Для любой функции $f$ выполняется равенство $f(x)+o(x)=f(x)$, т.е. справедлива аксиома 3. Противоположным вектором для вектора $f$ будет функция $(-f)(x)=-f(x)$. Тогда $f+(-f)=o$ (аксиома 4 выполняется). Аксиомы 5, 6 следуют из дистрибутивности операций сложения и умножения действительных чисел, а аксиома 7 – из ассоциативности умножения чисел. Последняя аксиома выполняется, так как умножение на единицу не изменяет функцию: $1\cdot f(x)=f(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}$, т.е. $1\cdot f=f$.

Таким образом, рассматриваемое множество $C(\mathbb{R})$ с введенными операциями является вещественным векторным пространством. Аналогично доказывается, что $C^1(\mathbb{R})$, $C^2(\mathbb{R}),\ldots$ – множества функций, имеющих непрерывные производные первого, второго и т.д. порядков соответственно, также являются векторными пространствами. Множество действительных функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, обозначается $C[a,b]$. Это множество также является векторным пространством.

Множество действительных функций, определенных и монотонных на $\mathbb{R}$, не является векторным пространством, так как разность двух монотонных функций может оказаться немонотонной функцией.

### Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Для элементов векторного пространства были введены операции умножения вектора на число (из некоторого числового поля) и сложения векторов. При помощи этих операций можно составлять алгебраические выражения.

Вектор $\boldsymbol{v}$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$, если

$$\boldsymbol{v}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+\alpha_k\boldsymbol{v}_k, \tag{1.1}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые числа. В этом случае говорят, что ***вектор*** $\boldsymbol{v}$ ***разложен по векторам*** $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (***вектор*** $\boldsymbol{v}$ ***линейно выражается через векторы*** $v_1, v_2, \ldots, v_k$), а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ называют ***коэффициентами разложения***. Линейная комбинация с нулевыми коэффициентами $\boldsymbol{v} = 0 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{v}_k$ называется ***тривиальной***.

Набор векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ из $V$ называется ***системой векторов***, а любая часть системы векторов – ***подсистемой***.

Система из $k$ векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ называется ***линейно зависимой***, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, что справедливо равенство

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}, \tag{1.2}$$

т.е. линейная комбинация является нулевым вектором.

Система из $k$ векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ называется ***линейно независимой***, если равенство (1.2) возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, т.е. когда линейная комбинация в левой части (1.2) тривиальная. Один вектор $\boldsymbol{v}_1$ тоже образует систему: при $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{o}$ – линейно зависимую, а при $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{o}$ – линейно независимую. ***Рангом системы векторов*** $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ называется максимальное число линейно независимых векторов этой системы и обозначается $\mathrm{rg}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k)$.

**Свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов**

**1.** *Если в систему векторов входит нулевой вектор, то она линейно зависима.*

**2.** *Если в системе векторов имеются два равных вектора, то она линейно зависима.*

**3.** *Если в системе векторов имеются два пропорциональных* (*коллинеарных*) *вектора* ($\boldsymbol{v}_i = \lambda \boldsymbol{v}_j$), *то она линейно зависима.*

**4.** *Система из* $k > 1$ *векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация остальных.*

**5.** *Любые векторы, входящие в линейно независимую систему, образуют линейно независимую подсистему.*

**6.** *Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.*

**7.** *Если система векторов* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ *– линейно независима, а после присоединения к ней вектора* $\boldsymbol{v}$ *– оказывается линейно зависимой, то вектор* $\boldsymbol{v}$ *можно разложить по векторам* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ *и притом единственным образом, т.е. коэффициенты разложения* (1.1) *находятся однозначно.*

**8.** *Пусть каждый вектор системы* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_l$ *может быть разложен по векторам системы* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, т.е. $\boldsymbol{u}_i = \sum\limits_{j=1}^{k} a_{ji}\boldsymbol{v}_j$, $i = 1,...,l$ (говорят, что ***система векторов*** $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l$ ***линейно выражается через систему векторов*** $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$). *Тогда если* $l > k$, *то система векторов* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_l$ *– линейно зависима.*

Пусть дана система векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ вещественного векторного пространства $\boldsymbol{V}$ (т.е. над полем $\mathbb{R}$). Множество линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ называется их ***линейной оболочкой*** и обозначается:

$$Lin(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k) = \left\{ \boldsymbol{v} : \ \boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + ... + \alpha_k\boldsymbol{v}_k ; \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,...,k \right\}.$$

Векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ называются ***образующими линейной оболочки*** $Lin(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k)$.

### Размерность и базис векторного пространства

Векторное пространство $\boldsymbol{V}$ называется ***n-мерным***, если в нем существует система из $n$ линейно независимых векторов, а любая система из большего количества векторов линейно зависима. Число $n$ называется ***размерностью*** (***числом измерений***) векторного пространства $\boldsymbol{V}$ и обозначается $\dim \boldsymbol{V}$. Другими словами, размерность пространства – это максимальное число линейно независимых векторов этого пространства. Если такое число существует, то пространство называется ***конечномерным***. Если же для любого натурального числа $n$ в пространстве $\boldsymbol{V}$ найдется система, состоящая из $n$ линейно независимых векторов, то такое пространство называют ***бесконечномерным*** (записывают: $\dim \boldsymbol{V} = \infty$).

***Базисом*** $n$-мерного векторного пространства называется упорядоченная совокупность $n$ линейно независимых векторов (***базисных векторов***). В некоторых пространствах, часто встречающихся в приложениях, один из возможных базисов, наиболее удобный с практической точки зрения, называют ***стандартным***.

### Свойства базиса

**1.** *Если* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ *– базис* $n$*-мерного пространства* $\boldsymbol{V}$, *то любой вектор* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ *может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов*:

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + ... + v_n\boldsymbol{e}_n$$

*и притом единственным образом, т.е. коэффициенты* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *определяются однозначно*. Другими словами, *любой вектор пространства может быть разложен по базису и притом единственным образом*.

**2.** *Если* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ *– базис пространства* $\boldsymbol{V}$*, то* $\boldsymbol{V} = Lin(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$, т.е. *векторное пространство является линейной оболочкой базисных векторов.*

**3.** *Если* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ *– линейно независимая система векторов пространства* $\boldsymbol{V}$ *и любой вектор* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ *может быть представлен в виде линейной комбинации:* $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + ... + v_n\boldsymbol{e}_n$*, то пространство* $\boldsymbol{V}$ *имеет размерность* $n$*, а система* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ *является его базисом.*

**4.** *Всякую линейно независимую систему* $k$ *векторов* $n$*-мерного векторного пространства* ($1 \le k < n$) *можно дополнить до базиса пространства.*

Заметим, что свойство 3 удобно применять для нахождения базиса и размерности векторного пространства. В некоторых учебниках оно берется за определение базиса, а именно: *линейно независимая система* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ *векторов называется базисом, если любой вектор пространства можно разложить по векторам* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$. *Количество базисных векторов определяет размерность пространства.* Разумеется, что эти определения эквивалентны приведенным выше (в конечномерном случае).

### Примеры базисов векторных пространств

Укажем размерность и базис для примеров векторных пространств, рассмотренных выше.

1. Пространства $V_1, V_2$, $V_3$ имеют размерности 1, 2, 3 соответственно. Действительно, любой ненулевой вектор пространства $V_1$ образует линейно независимую систему (см. определение), а любые два ненулевых вектора пространства $V_1$ коллинеарны, т.е. линейно зависимы. Следовательно, $\dim V_1 = 1$, а базисом пространства $V_1$ является любой ненулевой вектор. Аналогично доказывается, что $\dim V_2 = 2$ и $\dim V_3 = 3$. Базисом пространства $V_2$ служат любые два неколлинеарных вектора, взятые в определенном порядке (один из них считается первым базисным вектором, другой – вторым). Базисом пространства $V_3$ являются любые три некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке. Стандартным базисом в $V_1$ является единичный вектор $\bar{i}$ на прямой. Стандартным базисом в $V_2$ считается базис $\bar{i}$, $\bar{j}$, состоящий из двух взаимно перпендикулярных единичных векторов плоскости. Стандартным базисом в пространстве $V_3$ считается базис $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, составленный из трех единичных попарно перпендикулярных векторов, образующих правую тройку.

2. Пространство $\mathbb{R}^n$ содержит не более чем $n$ линейно независимых векторов. В самом деле, возьмем $k$ столбцов из $\mathbb{R}^n$ и составим из них матрицу размеров $n\times k$. Если $k>n$, то столбцы линейно зависимы, так как их количество больше ранга матрицы. Следовательно, $\dim\mathbb{R}^n \le n$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ нетрудно найти $n$ линейно независимых столбцов. Например, столбцы единичной матрицы

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\ e_n=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

линейно независимы. Следовательно, $\dim\mathbb{R}^n=n$. Пространство $\mathbb{R}^n$ называется ***n-мерным вещественным арифметическим пространством***. Указанный набор векторов считается ***стандартным базисом*** пространства $\mathbb{R}^n$. Аналогично доказывается, что $\dim\mathbb{C}^n=n$, поэтому пространство $\mathbb{C}^n$ называют ***n-мерным комплексным арифметическим пространством***.

3. Напомним, что любое решение однородной системы $Ax=o$ линейных уравнений с $n$ неизвестными можно представить в виде $x=C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+\ldots+C_{n-r}\varphi_{n-r}$, где $r=\operatorname{rg}A$, а $\varphi_1$, $\varphi_2,\dots,$ $\varphi_{n-r}$ – фундаментальная система решений (см. разд.5 в [7]). Следовательно, $\{Ax=o\}=Lin(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-r})$ $=Lin\left(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-r}\right)$, т.е. базисом пространства $\{Ax=o\}$ решений однородной системы служит ее фундаментальная система решений, а размерность пространства $\dim\{Ax=o\}=n-r$.

4. В пространстве $\mathbb{R}^{2\times3}$ матриц размеров $2\times3$ можно выбрать 6 матриц:

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ e_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ e_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

которые линейно независимы. Действительно, их линейная комбинация

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3+\alpha_4e_4+\alpha_5e_5+\alpha_6e_6=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\\alpha_4&\alpha_5&\alpha_6\end{pmatrix}\tag{1.3}$$

равна нулевой матрице только в тривиальном случае $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_6=0$. Прочитав равенство (1.3) справа налево, заключаем, что любая матрица из $\mathbb{R}^{2\times3}$ линейным образом выражается через выбранные 6 матриц, т.е. $\mathbb{R}^{2\times3}=Lin(e_1,e_2,\ldots,e_6)$. Следовательно, $\dim\mathbb{R}^{2\times3}=2\cdot3=6$, а матрицы $e_1$, $e_2,\dots,$ $e_6$ являются базисом (стандартным) этого пространства. Аналогично доказывается, что $\dim\mathbb{R}^{m\times n}=m\cdot n$.

5. Для любого натурального $n$ в пространстве $P(\mathbb{C})$ многочленов с комплексными коэффициентами можно найти $n$ линейно независимых элементов. Например, многочлены $e_1 = 1$, $e_2 = z$, $e_3 = z^2, \ldots, e_n = z^{n-1}$ линейно независимы, так как их линейная комбинация

$$a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \ldots + a_n \cdot e_n = a_1 + a_2 z + \ldots + a_n z^{n-1}$$

равна нулевому многочлену ($o(z) \equiv 0$) только в тривиальном случае $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Поскольку эта система многочленов линейно независима при любом натуральном $n$, пространство $P(\mathbb{C})$ бесконечномерное. Аналогично делаем вывод о бесконечной размерности пространства $P(\mathbb{R})$ многочленов с действительными коэффициентами. Пространство $P_n(\mathbb{R})$ многочленов степени не выше, чем $n$, конечномерное. Действительно, векторы $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2, \ldots, e_{n+1} = x^n$ образуют базис (***стандартный***) этого пространства, так как они линейно независимы и любой многочлен из $P_n(\mathbb{R})$ можно представить в виде линейной комбинации этих векторов:

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = a_0 \cdot e_1 + a_1 \cdot e_2 + \ldots + a_n \cdot e_{n+1}.$$

Следовательно, $\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

6. Пространство $C(\mathbb{R})$ непрерывных функций является бесконечномерным. Действительно, для любого натурального $n$ многочлены $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, рассматриваемые как непрерывные функции, образуют линейно независимые системы (см. предыдущий пример).

**Координаты и преобразования координат**

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ – базис векторного пространства $\boldsymbol{V}$. Тогда каждый вектор $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ можно разложить по базису (см. свойство 1 базиса), т.е. представить в виде $\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{e}_1 + v_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + v_n \boldsymbol{e}_n$, причем коэффициенты $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в разложении определяются однозначно. Эти коэффициенты $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называются ***координатами вектора*** $\boldsymbol{v}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ (или относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$). Координаты $v_1, v_2, \ldots, v_n$ вектора $\boldsymbol{v}$ – это упорядоченный набор чисел, который представляется в виде матрицы-столбца $\underset{(\boldsymbol{e})}{v} = (v_1 \ \cdots \ v_n)^T$ и называется ***координатным столбцом вектора*** $\boldsymbol{v}$ (в данном базисе).

Вектор и его координатный столбец обозначаются одной и той же буквой полужирной или светлой соответственно.

Если базис (как упорядоченный набор векторов) представить в виде символической матрицы-строки $(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{e}_1\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{e}_n)$, то разложение вектора $\boldsymbol{v}$ по базису $(\boldsymbol{e})$ можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+v_n\boldsymbol{e}_n=(\boldsymbol{e}_1\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{e})\underset{(\boldsymbol{e})}{v}.$$

Здесь умножение символической матрицы-строки $(\boldsymbol{e})$ на числовую матрицу-столбец $\underset{(\boldsymbol{e})}{v}$ производится по правилам умножения матриц (см. разд.1 в [7]). Обозначение базиса у координатного столбца будем опускать, если понятно относительно какого базиса получены координаты.

Из свойства 1 базиса следует, что *равные векторы имеют равные соответствующие координаты* (*в одном и том же базисе*), и наоборот, *если координаты векторов* (*в одном и том же базисе*) *соответственно равны*, *то равны и сами векторы*.

**Линейные операции в координатной форме**

Пусть $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ – базис пространства $\boldsymbol{V}$, векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ имеют в этом базисе координаты $u=(u_1\ \ \cdots\ \ u_n)^T$ и $v=(v_1\ \ \cdots\ \ v_n)^T$ соответственно, т.е.

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+u_n\boldsymbol{e}_n,\qquad \boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+v_n\boldsymbol{e}_n.$$

*При сложении векторов их координаты складываются*:

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(u_1+v_1)\boldsymbol{e}_1+(u_2+v_2)\boldsymbol{e}_2+\ldots+(u_n+v_n)\boldsymbol{e}_n.$$

*При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число*:

$$\lambda\boldsymbol{v}=(\lambda v_1)\boldsymbol{e}_1+(\lambda v_2)\boldsymbol{e}_2+\ldots+(\lambda v_n)\boldsymbol{e}_n.$$

Другими словами, *сумма векторов* $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ *имеет координаты* $u+v$, а *произведение* $\lambda\boldsymbol{v}$ *имеет координаты* $\lambda v$. Разумеется, что все координаты получены в одном базисе $(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$.

Если система векторов линейно зависима (линейно независима), то их координатные столбцы, полученные относительно одного базиса, образуют линейно зависимую (соответственно, линейно независимую) систему.

Все свойства линейной зависимости и линейной независимости векторов переносятся без изменений на их координатные столбцы, полученные в одном и том же базисе. И наоборот, свойства, сформулированные в [7] для матриц-столбцов, переносятся на векторы, если матрицы-столбцы считать их координатными столбцами.

## Преобразование координат вектора при замене базиса

Пусть заданы два базиса пространства $\boldsymbol{V}$: $(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$ и $(\boldsymbol{e}') = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, ..., \boldsymbol{e}'_n)$. Базис $(\boldsymbol{e})$ будем условно называть «старым», а базис $(\boldsymbol{e}')$ – «новым». Пусть известны разложения каждого вектора нового базиса по старому базису:

$$\boldsymbol{e}'_i = s_{1i}\,\boldsymbol{e}_1 + s_{2i}\,\boldsymbol{e}_2 + ... + s_{ni}\,\boldsymbol{e}_n, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.4}$$

Записывая по столбцам координаты векторов $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, ..., \boldsymbol{e}'_n$ в базисе $(\boldsymbol{e})$, можно составить матрицу:

$$\underset{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{e}')}{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Квадратная матрица $S$, составленная из координатных столбцов векторов нового базиса $(\boldsymbol{e}')$ в старом базисе $(\boldsymbol{e})$, называется ***матрицей перехода*** от старого базиса к новому. При помощи матрицы перехода (1.5) формулы (1.4) можно записать в виде:

$$(\boldsymbol{e}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n)\cdot S \ \text{ или, короче, } \ (\boldsymbol{e}') = (\boldsymbol{e})\cdot S. \tag{1.6}$$

Умножение символической матрицы-строки $(\boldsymbol{e})$ на матрицу перехода $S$ в (1.6) производится по правилам умножения матриц (см. разд. 1 в [7]).

Пусть в базисе $(\boldsymbol{e})$ вектор $\boldsymbol{v}$ имеет координаты $v_1, v_2, \ldots, v_n$, а в базисе $(\boldsymbol{e}')$ – координаты $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$, т.е.

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + ... + v_n\boldsymbol{e}_n = v'_1\boldsymbol{e}'_1 + v'_2\boldsymbol{e}'_2 + ... + v'_n\boldsymbol{e}'_n$$

или, короче, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{e})\,v = (\boldsymbol{e}')\,v'$.

*Координатный столбец вектора в старом базисе получается в результате умножения матрицы перехода на координатный столбец вектора в новом базисе*:

$$\underset{(\boldsymbol{e})}{v} = S \underset{(\boldsymbol{e}')}{v'} \quad \text{или, что то же самое,} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}.$$

## Свойства матрицы перехода от одного базиса к другому

**1.** *Пусть имеются три базиса* $(\boldsymbol{e}), (\boldsymbol{f}), (\boldsymbol{g})$ *пространства* $\boldsymbol{V}$ *и известны матрицы перехода*: $\underset{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{f})}{S}$ *от базиса* $(\boldsymbol{e})$ *к базису* $(\boldsymbol{f})$; $\underset{(\boldsymbol{f})\to(\boldsymbol{g})}{S}$ *от* $(\boldsymbol{f})$ *к* $(\boldsymbol{g})$; $\underset{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{g})}{S}$ *от* $(\boldsymbol{e})$ *к* $(\boldsymbol{g})$.

*Тогда*

$$\underset{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{g})}{S} = \underset{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{f})}{S}\ \underset{(\boldsymbol{f})\to(\boldsymbol{g})}{S}.$$

**2.** *Если $S$ – матрица перехода от базиса $(\boldsymbol{e})$ к базису $(\boldsymbol{f})$, то матрица $S$ обратима и обратная матрица $S^{-1}$ является матрицей перехода от базиса $(\boldsymbol{f})$ к базису $(\boldsymbol{e})$. Координаты вектора $\boldsymbol{v}$ в базисах $(\boldsymbol{e})$ и $(\boldsymbol{f})$ связаны формулами*:

$$\underset{(\boldsymbol{e})}{v} = S \underset{(\boldsymbol{f})}{v}, \qquad \underset{(\boldsymbol{f})}{v} = S^{-1} \underset{(\boldsymbol{e})}{v}.$$

**3.** *Всякая обратимая квадратная матрица $n$-го порядка может служить матрицей перехода от одного базиса $n$-мерного векторного пространства к другому базису.*

## Изоморфизм векторных пространств

Два векторных пространства $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ называются ***изоморфными***, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что выполняются условия:

1) сумме векторов пространства $\boldsymbol{U}$ соответствует сумма соответствующих векторов пространства $\boldsymbol{V}$:

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{u}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \leftrightarrow \boldsymbol{v}_2 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \leftrightarrow (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2);$$

2) произведению числа на вектор пространства $\boldsymbol{U}$ соответствует произведение того же числа на соответствующий вектор пространства $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{u} \leftrightarrow \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \lambda\boldsymbol{u} \leftrightarrow \lambda\boldsymbol{v}.$$

Другими словами, ***изоморфизм*** – это взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции.

**Теорема (об изоморфизме векторных пространств).** *Два конечномерных векторных пространства* (*над одним и тем же числовым полем*) *изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же размерность.*

Из теоремы следует, что любое $n$-мерное вещественное векторное пространство $\boldsymbol{V}$ изоморфно $n$-мерному арифметическому пространству $\mathbb{R}^n$, а $n$-мерное комплексное пространство изоморфно $\mathbb{C}^n$.

## Определение подпространства

Непустое подмножество $\boldsymbol{L}$ векторного пространства $\boldsymbol{V}$ называется его ***подпространством***, если

1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L} \quad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}$ (подпространство *замкнуто по отношению к операции сложения*);

2) $\lambda\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L} \quad \forall\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}$ и любого числа $\lambda$ (подпространство *замкнуто по отношению к операции умножения вектора на число*).

Для указания подпространства будем использовать обозначение $\boldsymbol{L} \lhd \boldsymbol{V}$.

Заметим, что условия 1, 2 в определении можно заменить одним условием: $\lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}$ $\forall\, \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}$ и любых чисел $\lambda$ и $\mu$. Разумеется, что здесь и в определении речь идет о произвольных числах из того числового поля, над которым определено пространство $\boldsymbol{V}$.

### Пересечение и сумма подпространств

Пусть $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ – подпространства векторного пространства $\boldsymbol{V}$.

***Пересечением подпространств*** $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ называется множество $\boldsymbol{L}_1\bigcap\boldsymbol{L}_2$ векторов, каждый из которых принадлежит $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ одновременно, т.е. пересечение подпространств определяется как обычное пересечение двух множеств.

***Алгебраической суммой подпространств*** $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ называется множество векторов вида $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1\in\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{v}_2\in\boldsymbol{L}_2$. Алгебраическая сумма (короче просто сумма) подпространств обозначается $\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2$:

$$\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2=\left\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}:\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1\in\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{v}_2\in\boldsymbol{L}_2\right\}.$$

Представление вектора $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2$ в виде $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1\in\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{v}_2\in\boldsymbol{L}_2$, называется ***разложением вектора*** $\boldsymbol{v}$ ***по подпространствам*** $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$.

Пересечение и сумма подпространств являются подпространствами. Поэтому понятия размерности, базиса и т.п. применяются к ним. Операции пересечения и суммы распространяется на любое конечное число подпространств.

**Теорема (о размерности суммы подпространств).** *Если $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ подпространства конечномерного векторного пространства $\boldsymbol{V}$, то размерность суммы подпространств равна сумме их размерностей без размерности их пересечения* (***формула Грассмана***):

$$\dim(\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2)=\dim\boldsymbol{L}_1+\dim\boldsymbol{L}_2-\dim(\boldsymbol{L}_1\bigcap\boldsymbol{L}_2). \tag{1.7}$$

### Прямая сумма подпространств

Алгебраическая сумма подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ векторного пространства $\boldsymbol{V}$ называется ***прямой суммой***, если пересечение подпространств состоит из одного нулевого вектора. Прямая сумма подпространств обозначается $\boldsymbol{L}_1\oplus\boldsymbol{L}_2$ и обладает следующим свойством: *если $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{L}_1\oplus\boldsymbol{L}_2$, то для каждого вектора $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$ существует единственное представление в виде $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{v}_1\in\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{v}_2\in\boldsymbol{L}_2$.*

## Способы описания подпространств $\mathbb{R}^n$

Любое $n$-мерное вещественное векторное пространство $\boldsymbol{V}$ изоморфно $n$-мерному арифметическому пространству $\mathbb{R}^n$. Чтобы установить изоморфизм $\boldsymbol{V} \leftrightarrow \mathbb{R}^n$, достаточно выбрать в пространстве $\boldsymbol{V}$ базис и каждому вектору поставить в соответствие его координатный столбец. Поэтому будем рассматривать описание подпространств $n$-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. Обычно используется два способа задания, а именно:

1) подпространство $\boldsymbol{L} \lhd \mathbb{R}^n$ задается как линейная оболочка $\boldsymbol{L} = Lin(a_1, a_2, ..., a_k)$ системы столбцов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ размеров $n \times 1$;

2) подпространство $\boldsymbol{L} \lhd \mathbb{R}^n$ задается как множество решений $\boldsymbol{L} = Lin\{Ax = o\}$ однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Для каждого способа задания нужно уметь находить размерность и базис подпространства.

### Алгоритм нахождения базиса линейной оболочки системы столбцов

Чтобы найти размерность и базис подпространства $\boldsymbol{L} = Lin(a_1, a_2, ..., a_k) \lhd \mathbb{R}^n$ нужно выполнить следующие действия:

1. Составить из данных столбцов матрицу $A = (a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_k)$ размеров $n \times k$.

2. Привести матрицу к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк. Количество $r$ ненулевых строк в полученной матрице, равное рангу матрицы $A$, определяет размерность подпространства $r = \operatorname{rg} A = \dim \boldsymbol{L}$.

3. Найти базисные столбцы в матрице ступенчатого вида (это столбцы с ведущими элементами). Столбцы матрицы $A$ с такими же номерами, как и базисные в матрице ступенчатого вида, образуют базис подпространства.

### Алгоритм нахождения базиса множества решений однородной системы

Чтобы найти размерность и базис подпространства $\boldsymbol{L} = Lin\{Ax = o\} \lhd \mathbb{R}^n$ решений однородной системы $m$ линейных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными нужно, используя алгоритм Гаусса решения однородной системы, найти фундаментальную систему решений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ (см. алгоритм в разд.5 в [7]). Эта система образует базис подпространства, поэтому его размерность $\dim \boldsymbol{L} = n - r$, где $r = \operatorname{rg} A$. Отметим, что в результате этого алгоритма подпространство $\boldsymbol{L} = Lin\{Ax = o\}$ представляется в другой форме описания – как линейная оболочка фундаментальной системы решений $\boldsymbol{L} = Lin(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-r})$.

Новые подпространства можно получать в результате сложения или пересечения заданных подпространств. Рассмотрим алгоритмы нахождения размерности и базиса пересечения и суммы подпространств. При этом данные подпространства могут быть заданы любым из указанных выше двух способов описания.

### Алгоритмы нахождения базиса алгебраической суммы подпространств

Для заданных подпространств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ пространства $\mathbb{R}^n$ требуется найти размерность и базис их алгебраической суммы $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. Рассмотрим методику решения этой задачи для двух случаев описания подпространств.

Пусть подпространства заданы линейными оболочками своих образующих: $\boldsymbol{A}=Lin(a_1,...,a_{k_1})$ и $\boldsymbol{B}=Lin(b_1,...,b_{k_2})$. Тогда, приписывая к образующим $a_1,\ldots,a_{k_1}$ одного подпространства образующие $b_1,\ldots,b_{k_2}$ другого подпространства, получаем образующие суммы подпространств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=Lin(a_1,...,a_{k_1},b_1,...,b_{k_2}).$$

Размерность и базис суммы $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=Lin(a_1,...,a_{k_1},b_1,...,b_{k_2})$ найти, используя соответствующий алгоритм для линейной оболочки системы столбцов.

Пусть подпространства заданы как множества решений однородных систем уравнений: $\boldsymbol{A}=\{Ax=o\}$ и $\boldsymbol{B}=\{\,Bx=o\,\}$. Тогда, представляя эти подпространства как линейные оболочки фундаментальных систем решения, сводим задачу к предыдущему случаю, а именно нужно выполнить следующие действия:

1) для каждой однородной системы $Ax=o$ и $Bx=o$ найти фундаментальные системы решений $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-r_A}$ и $\psi_1,\ldots,\psi_{n-r_B}$ соответственно. При этом получим $\boldsymbol{A}=Lin(\varphi_1,...\varphi_{n-r_A})$ и $\boldsymbol{B}=Lin(\psi_1,...,\psi_{n-r_B})$, где $r_A=\operatorname{rg}A$, $r_B=\operatorname{rg}B$;

2) размерность и базис суммы $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=Lin(\varphi_1,...,\varphi_{n-r_A},\psi_1,...,\psi_{n-r_B})$ найти, используя соответствующий алгоритм для линейной оболочки системы столбцов.

### Алгоритмы нахождения базиса пересечения подпространств

Для заданных подпространств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ пространства $\mathbb{R}^n$ требуется найти размерность и базис их пересечения $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$. Рассмотрим методику решения этой задачи для двух случаев описания подпространств.

Пусть подпространства заданы как множества решений однородных систем уравнений: $\boldsymbol{A}=\{Ax=o\}$ и $\boldsymbol{B}=\{\,Bx=o\,\}$. Тогда, приписывая к системе $Ax=o$, задающей одно подпространство, систему $Bx=o$, задающую другое подпространство, получаем систему $\begin{cases}Ax=o,\\ Bx=o,\end{cases}$ определяющую пересечение подпространств:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{A}=\{Ax=o\}\\ \boldsymbol{B}=\{Bx=o\}\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\left\{\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=o\right\}.$$

Базисом пересечения служит ее фундаментальная система решений.

Пусть подпространства $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ пространства $\mathbb{R}^n$ заданы линейными оболочками своих образующих: $\boldsymbol{A}=Lin(a_1,...,a_{k_1})$ и $\boldsymbol{B}=Lin(b_1,...,b_{k_2})$. Пересечению $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$ принадлежат только такие $x\in\mathbb{R}^n$, которые можно представить как равные между собой линейные комбинации столбцов $a_1,\ldots,a_{k_1}$ и столбцов $b_1,\ldots,b_{k_2}$ соответственно:

$$x=\alpha_1\, a_1+...+\alpha_{k_1}a_{k_1}=\beta_1\, b_1+...+\beta_{k_2}b_{k_2}\,. \tag{1.8}$$

Для нахождения размерности и базиса пересечения $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$ нужно выполнить следующие действия.

1. Составить блочную матрицу $(A\mid B)$ коэффициентов однородной системы уравнений $A\alpha=B\beta$, где матрицы $A=(a_1\ \cdots\ a_{k_1})$, $B=(b_1\ \cdots\ b_{k_2})$ образованы из заданных столбцов, а $\alpha=(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_{k_1})^T$, $\beta=(\beta_1\ \cdots\ \beta_{k_2})^T$ – столбцы коэффициентов линейных комбинаций (1.8).

2. Для однородной системы с матрицей $(A\mid B)$ найти фундаментальную систему решений $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$, $k=k_1+k_2-\operatorname{rg}(A\mid B)$ (см. разд. 5 в [7])). Каждое решение $\varphi_i=(\alpha_{1i}\ \cdots\ \alpha_{k_1 i}\mid\beta_{1i}\ \cdots\ \beta_{k_2 i})^T$, $i=1,...,k$, содержит искомые коэффициенты линейных комбинаций (1.8).

3. Записать линейную комбинацию $x_i=\alpha_{1i}\,a_1+...+\alpha_{k_1 i}\,a_{k_1}$ (или, что то же самое, $x_i=\beta_{1i}\,b_1+...+\beta_{k_2 i}b_{k_2}$) для каждого решения $\varphi_i$, $i=1,...,k$, из фундаментальной системы.

4. Представить пересечение $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$ как линейную оболочку столбцов $x_1,\ldots,x_k$: $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=Lin(x_1,...,x_k)$.

5. Найти ранг системы столбцов $x_1,\ldots,x_k$ и максимальную линейно независимую подсистему. Эта подсистемы является базисом пересечения $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$, а ранг равен размерности.

## Линейные многообразия

Пусть $\boldsymbol{L}$ подпространство векторного пространства $\boldsymbol{V}$, а $\boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{V}$ – некоторый вектор. Множество векторов $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, представимых в виде $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{l}$, где $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$, называется ***линейным многообразием***, ***проходящим через конец вектора $\boldsymbol{v}_0$ параллельно подпространству $\boldsymbol{L}$***, и обозначается

$$\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{L} = \{\, \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{l} : \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L} \,\}.$$

Говорят также, что линейное многообразие получено ***параллельным сдвигом подпространства $\boldsymbol{L}$ на вектор $\boldsymbol{v}_0$***, а подпространство $\boldsymbol{L}$ называют ***однородной частью*** линейного многообразия $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{L}$. ***Размерностью линейного многообразия*** называют размерность его однородной части, т.е. $\dim \boldsymbol{L}$. В $n$-мерном векторном пространстве $(n-1)$-мерное линейное многообразие называется ***гиперплоскостью***. Обратим внимание на то, что размерность многообразия равна максимальному числу линейно независимых векторов не самого многообразия, а его однородной части.

Важным примером линейного многообразия служит множество $M = \{Ax = b\}$ решений неоднородной системы линейных уравнений с $n$ неизвестными. Любое решение неоднородной системы представляется в виде (см. разд. 5 в [7])

$$x = x^{\text{н}} + x^{\text{о}},$$

где $x^{\text{н}}$ – частное решение неоднородной системы, а $x^{\text{о}}$ – решение соответствующей однородной системы. Учитывая, что множество $L = \{Ax = o\}$ решений однородной системы является векторным подпространством $L \triangleleft \mathbb{R}^n$, получаем $M = x^{\text{н}} + L$. Следовательно, множество $\{Ax = b\}$ решений неоднородной системы является линейным многообразием в $\mathbb{R}^n$, полученным параллельным сдвигом векторного пространства $\{Ax = o\}$ решений соответствующей однородной системы на вектор $x^{\text{н}}$: $\{Ax = b\} = x^{\text{н}} + \{Ax = o\}$.

**Пример 1.** Пусть $U$ – множество всех геометрических векторов, являющихся линейными комбинациями неколлинеарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$; $V$ – множество всех симметрических матриц второго порядка с нулевым следом; $W$ – множество многочленов $p(x)$ не выше третьей степени, удовлетворяющих условию $p(0) > p'(0)$. Является ли каждое из этих множеств векторным пространством над полем действительных чисел относительно обычных операций сложения элементов и умножения элемента на число? Если нет, то указать, какие именно свойства векторного пространства не выполнены. Если образует, то найти его размерность. Если размерность конечна, то найти базис.

*Решение*. Множество $U$. Для любых двух векторов $u_1 = \alpha_1\overline{a} + \beta_1\overline{b} + \gamma_1\overline{c}$ и $u_2 = \alpha_2\overline{a} + \beta_2\overline{b} + \gamma_2\overline{c}$ из множества $U$ их сумма $u_1 + u_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)\overline{a} + (\beta_1 + \beta_2)\overline{b} + (\gamma_1 + \gamma_2)\overline{c}$ и произведение $\lambda u_1 = \lambda\alpha_1\overline{a} + \lambda\beta_1\overline{b} + \lambda\gamma_1\overline{c}$ представляют собой линейные комбинации векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, т.е. принадлежат множеству $U$. Значит, линейные операции замкнуты в этом множестве. Так как аксиомы векторного пространства справедливы для геометрических векторов, то множество $U$ является векторным пространством.

Находим его размерность и базис. Любую линейную комбинацию заданных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, учитывая равенство $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$, можно представить как линейную комбинацию двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma(-\overline{a} - \overline{b}) = (\alpha - \gamma)\overline{a} + (\beta - \gamma)\overline{b}$. Причем векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно независимы, поскольку они неколлинеарны. Иначе говоря, любой вектор из пространства $U$ можно разложить по двум линейно независимым векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Значит, согласно свойству 3 базиса, эти векторы образуют базис пространства, а его размерность равна 2.

Множество $V$. Сумма симметрических матриц с нулевым следом есть симметрическая матрица с нулевым следом, т.е. при сложении любых элементов множества $V$ снова получаем элемент этого множества. Значит, операция сложения замкнута в множестве $V$. При умножении симметрической матрицы с нулевым следом на число опять получаем матрицу из $V$. Следовательно, операция умножения матрицы на число замкнута в множестве $V$. Аксиомы векторного пространства справедливы для любых матриц одинаковых размеров. Поэтому множество $V$ является векторным пространством.

Находим его размерность и базис. Любая матрица из заданного множества имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, где $a$ и $b$ – действительные числа. Эту матрицу можно представить в виде линейной комбинации двух матриц $e_1$ и $e_2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a e_1 + b e_2,\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что матрицы $e_1$ и $e_2$ линейно независимы. Действительно, если приравнять линейную комбинацию этих матриц нулевой матрице, то получим равенство

$$a e_1 + b e_2 = 0 \ \Leftrightarrow\ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которое справедливо только в тривиальном случае, когда $a = b = 0$. Это означает линейную независимость $e_1, e_2$. Таким образом, любой элемент из пространства $V$ может быть разложен по двум линейно независимым элементам $e_1, e_2$. Значит, эти элементы образуют базис векторного пространства, а его размерность равна 2.

Множество $W$ не является векторным пространством, поскольку не содержит противоположный элемент. Действительно, умножая многочлен $p(x)$ на число $(-1)$ получим многочлен $q(x) = -p(x)$, для которого неравенство $q(0) > q'(0)$ не выполняется, так как $q(0) = -p(0)$, $q'(0) = -p'(0)$ и, следовательно, $-q(0) > -q'(0)$. Значит, многочлен $q(x)$ не принадлежит заданному множеству. (Заметим, что в $W$ нет также и нулевого элемента.)

*Ответ*: множество $U$ является двумерным векторным пространством с базисом $\overline{a}, \overline{b}$; множество $V$ является двумерным векторным пространством с базисом $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; множество $W$ не является векторным пространством, так как не содержит противоположных элементов.

**Пример 2.** Доказать, что каждая из систем векторов $(a) = (a_1, a_2, a_3)$ и $(b) = (b_1, b_2, b_3)$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

образует базис в пространстве $\mathbb{R}^3$. Найти матрицу перехода от базиса $(a)$ к базису $(b)$ и координаты вектора $x = (2 \quad -3 \quad 4)^T$ в каждом из базисов $(a)$ и $(b)$.

*Решение*. Предположим, что каждая из систем векторов $(a)$ и $(b)$ образует базис и составим матрицы перехода $A$ и $B$ от стандартного базиса $(e) = (e_1, e_2, e_3)$, где $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_1 = (0, 0, 1)^T$, к базисам $(a)$ и $(b)$ соответственно. В стандартном базисе элементы любого столбца являются его координатами. Например, для столбца $x$ имеем разложение

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 - 3e_2 + 4e_3 = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = (e) \underset{(e)}{x}.$$

Значит, каждый столбец из $\mathbb{R}^3$ совпадает со своим координатным столбцом в стандартном базисе. Поэтому матрицы перехода от стандартного базиса составляем из заданных столбцов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 8 \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Определители этих матриц отличны от нуля. Поэтому их столбцы линейно независимы. Следовательно, предположение верное, каждая из заданных систем векторов образует базис. Находим обратные матрицы $A^{-1}$, $B^{-1}$, а также искомую матрицу $S = A^{-1}B$ перехода от базиса $(a)$ к базису $(b)$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -18 & -42 & 23 \\ 4 & 11 & -6 \\ 9 & 22 & -12 \end{pmatrix}.$$

Координатные столбцы одного и того же вектора $x$ (разных базисах) связаны формулами $\underset{(e)}{x} = A \underset{(a)}{x}$, $\underset{(e)}{x} = B \underset{(b)}{x}$. Отсюда $\underset{(a)}{x} = A^{-1} \underset{(e)}{x}$ и $\underset{(b)}{x} = B^{-1} \underset{(e)}{x}$, т.е.

$$\underset{(a)}{x} = \begin{pmatrix} -13 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}, \qquad \underset{(b)}{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

*Ответ*: $\begin{pmatrix} -18 & -42 & 23 \\ 4 & 11 & -6 \\ 9 & 22 & -12 \end{pmatrix}$, $x = -34a_1 + 9a_2 + 18a_3 = 0b_1 + 3b_2 + 4b_3$.

**Пример 3.** Найти размерность и базис каждого из подпространств $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, их алгебраической суммы $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ и пересечения $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, если подпространство $\boldsymbol{A}$ задано линейной оболочкой своих образующих $\boldsymbol{A} = Lin(a_1, a_2, a_3, a_4)$, а подпространство $\boldsymbol{B}$ – системой уравнений $Bx = 0$. Образующие $a_1, a_2, a_3, a_4$ и матрица $B$ системы уравнений имеют вид

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

*Решение*. Сначала определяем размерность и базис пространства $\boldsymbol{B}$ решений однородной системы. Для этого находим фундаментальную систему решений. Составляем расширенную матрицу системы и приводим ее к упрощенному виду:

$$(B \mid o) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{-1} & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{2} & -5 & 16 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2{,}5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободные: $x_1 = -2x_3 + 5x_4$, $x_2 = 2{,}5x_3 - 8x_4$. По этим формулам для $x_3 = 2$, $x_4 = 0$ получаем $x_1 = -4$, $x_2 = 5$, а для $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ имеем $x_1 = 5$, $x_2 = -8$. Таким образом, фундаментальная система состоит из двух решений

$b_1 = (-4 \quad 5 \quad 2 \quad 0)^T$, $b_2 = (5 \quad -8 \quad 0 \quad 1)^T$. Эти решения образуют базис подпространства $\boldsymbol{B} = Lin(b_1, b_2)$, а его размерности равна 2.

Теперь будем искать базис пересечения подпространств. Попутно находим базис подпространства $\boldsymbol{A}$, а также базис суммы $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. Согласно алгоритму составим блочную матрицу $(A \mid B) = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \mid b_1 \quad b_2)$ и приведем ее к упрощенному виду

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -3 & -4 & 5 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 5 & -8 \\ 4 & 2 & -2 & -8 & 2 & 0 \\ \boldsymbol{1} & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 6 & -4 & 4 \\ 0 & \boldsymbol{1} & 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 16 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{-4} & 12 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & -8 & 12{,}5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{1} & -1{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1{,}5 \end{array}\right).$$

По левому блоку матрицы определяем, что $\mathrm{rg}A = 3$ (в этом блоке 3 ненулевых строки), а столбцы $a_1$, $a_2$, $a_4$ – базисные. Следовательно, эти столбцы составляют базис пространства $\boldsymbol{A}$ и $\dim \boldsymbol{A} = 3$. По упрощенному виду матрицы $(A \mid B)$ заключаем, что столбцы $a_1$, $a_2$, $a_4$, $b_1$ образуют базис подпространства $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ и $\dim(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = 4$. Теперь находим фундаментальную систему решений однородной системы $A\alpha = B\beta$. Выражаем базисные переменные через свободные (линия раздела матрицы на блоки соответствует знаку равенства в уравнениях системы): $\alpha_1 = \alpha_3 + 0{,}5\beta_2$, $\alpha_2 = -\alpha_3 + 0{,}5\beta_2$, $\alpha_4 = 0$, $\beta_1 = 1{,}5\beta_2$. По этим формулам для $\alpha_3 = 1$, $\beta_2 = 0$, получаем $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_4 = 0$, $\beta_1 = 0$, а для $\alpha_3 = 0$, $\beta_2 = 2$ имеем $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_4 = 0$, $\beta_1 = 3$. Фундаментальная система решений имеет вид $\varphi_1 = (1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \mid 0 \quad 0)$, $\varphi_2 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \mid 3 \quad 2)$. Находим линейные комбинации $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$. В случае $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получаем нулевой столбец $x_1 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$, который не может быть базисным. При $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$ находим $x_2 = 3b_1 + 2b_2 = (-2 \quad -1 \quad 6 \quad 2)^T$. Этот столбец образует базис подпространства $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = Lin(x_2)$ и, следовательно, $\dim(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = 1$. Подставляя размерности в формулу Грассмана (1.7), получаем верное равенство $4 = 3 + 2 - 1$.

*Ответ*: $\dim \boldsymbol{A} = 3$, базис $a_1$, $a_2$, $a_4$; $\dim \boldsymbol{B} = 2$, базис $b_1 = (-4 \quad 5 \quad 2 \quad 0)^T$, $b_2 = (5 \quad -8 \quad 0 \quad 1)^T$; $\dim(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = 4$, базис $a_1$, $a_2$, $a_4$, $b_1$; $\dim(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = 1$, базис $x_2 = (-2 \quad -1 \quad 6 \quad 2)^T$.

# 2. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

## Аксиомы евклидова пространства

Вещественное векторное пространство $\boldsymbol{E}$ называется ***евклидовым***, если каждой паре элементов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ этого пространства поставлено в соответствие действительное число $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, называемое ***скалярным произведением***, причем это соответствие удовлетворяет следующим условиям:

**1.** $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) \quad \forall\, \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{E}$; (коммутативность)

**2.** $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \quad \forall\, \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in \boldsymbol{E}$; (аддитивность по первому множителю)

**3.** $(\lambda\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\lambda(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \quad \forall\, \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{E}$, $\forall\, \lambda\in\mathbb{R}$; (однородность по первому множителю)

**4.** $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})>0 \quad \forall\, \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o}$ и $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$. (неотрицательность скалярного квадрата)

В скалярном произведении $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ вектор $\boldsymbol{u}$ – первый, а вектор $\boldsymbol{v}$ – второй множители. Скалярное произведение $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$ вектора $\boldsymbol{v}$ на себя называется ***скалярным квадратом***. Условия 1–4 называются ***аксиомами скалярного произведения***. Аксиомы 2 и 3 можно заменить одной аксиомой, выражающей свойство ***линейности скалярного произведения*** по первому множителю

$$(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})+\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \quad \forall\, \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in \boldsymbol{E}, \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Поскольку евклидово пространство является векторным пространством, на него переносятся все понятия, определенные для векторного пространства, в частности, понятия размерности и базиса.

## Примеры евклидовых пространств

Определяя для элементов векторного пространства операцию скалярного произведения, получаем евклидово пространство. Если скалярное произведение можно ввести разными способами в одном и том же векторном пространстве, то и получаемые евклидовы пространства будут разными. Приведем примеры евклидовых пространств, соответствующих рассмотренным в разд.1 примерам векторных пространств.

1. В пространствах $V_1, V_2, V_3$ векторы (свободные или радиус-векторы) рассматриваются как направленные отрезки. В курсе элементарной геометрии вводятся понятия длины вектора и величины угла между векторами, а затем определяется скалярное произведение: $(\overline{u},\overline{v})=|\overline{u}||\overline{v}|\cos\varphi$. Это скалярное произведение считается стандартным. Аксиомы 1–4 для

этого скалярного произведения выполняются. Поэтому пространства $V_1, V_2, V_3$ являются евклидовыми.

2. В пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение столбцов $x = (x_1 \ \cdots \ x_n)^T$ и $y = (y_1 \ \cdots \ y_n)^T$ можно задать формулой:

$$(x, y) = x^T A y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \,, \qquad (2.1)$$

где $A$ – квадратная симметрическая положительно определенная матрица $n$-го порядка (см. разд. 7 в [7]). Проверим выполнение аксиом 1–4. Аксиома 1 (коммутативность) выполняется в силу симметричности матрицы $A$: $(x, y) = x^T A y = y^T A^T x = y^T A x = (y, x)$, поскольку число при транспонировании не изменяется, т.е. $x^T A y = y^T A^T x$. Свойство линейности по первому множителю для (2.1) выполняется:

$$(\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x + \beta y)^T A z = \alpha x^T A z + \beta y^T A z = \alpha(x, z) + \beta(y, z).$$

Значит, выполняются аксиомы 2 и 3. Аксиома 4 также выполняется, так как квадратичная форма $(x, x) = x^T A x$ положительно определенная (см. разд. 7 в [7]). Таким образом, пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением (2.1) является евклидовым пространством. В частности, если в качестве матрицы $A$ взять единичную матрицу, формула (2.1) примет вид:

$$(x, y) = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \,.$$

Это скалярное произведение считается ***стандартным*** в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Приведем примеры формул, которые не задают скалярного произведения в $\mathbb{R}^2$:

$(x, y) = |x_1||y_1| + |x_2||y_2|$ – аксиомы 1, 4 выполняются, а аксиомы 2, 3 – нет;

$(x, y) = x_2 \cdot y_2$ – аксиомы 1, 2, 3 выполняются, а аксиома 4 – нет.

3. В пространстве $C[a, b]$ действительных функций, определенных и непрерывных на данном промежутке $[a, b]$, скалярное произведение можно задать формулой:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \,. \qquad (2.2)$$

В самом деле аксиомы 1, 2, 3 для (2.2) выполняются в силу свойств определенного интеграла. Проверим выполнение аксиомы 4. Для ненулевой функции $f(x)$: $(f, f) = \int_a^b [f(x)]^2 \, dx > 0$, так как, если в какой-нибудь точке $x_0 \in (a, b)$ функция $f(x_0) \neq 0$, то в силу непрерывности она отлична от нуля в некоторой окрестности точки $x_0$, целиком лежащей в интервале $(a, b)$. Поэтому $[f(x)]^2 > 0$ в этой окрестности. Значит, интеграл от этой функции больше нуля.

Таким образом, пространство $C[a, b]$ со скалярным произведением (2.2) является евклидовым. Скалярное произведение (2.2) считается ***стандартным*** в пространстве $C[a, b]$. Для разрывных функций формула (2.2) не определяет скалярного произведения, так как нарушается аксиома 4.

4. В пространстве $P(\mathbb{R})$ многочленов с действительными коэффициентами скалярное произведение можно задать формулой (2.2), так как многочлены являются непрерывными функциями. Это произведение считается стандартным в пространстве $P(\mathbb{R})$.

В пространстве $P_n(\mathbb{R})$ многочленов степени не выше, чем $n$, зададим скалярное произведение многочленов $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ и $q(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$ формулой:

$$(p, q) = a_n b_n + \ldots + a_1 b_1 + a_0 b_0. \tag{2.3}$$

Выражение в правой части (2.3) симметрично для коэффициентов двух многочленов. Оно не меняется при одновременной замене буквы $a$ на букву $b$, а буквы $b$ на букву $a$. Поэтому аксиома 1 коммутативности выполняется. Аксиомы 2, 3 следуют из линейности выражения по коэффициентам каждого многочлена. Проверим аксиому 4. Запишем скалярный квадрат $(p, p) = a_n^2 + \ldots + a_1^2 + a_0^2 \geq 0$. Заметим, что $(p, p) = 0$ только при $a_n = \ldots = a_1 = a_0 = 0$, т.е. в случае нулевого многочлена $p(x) \equiv 0$. Следовательно, формула (2.3) задает скалярное произведение в пространстве $P_n(\mathbb{R})$.

### Неравенство Коши – Буняковского

Для любых векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ выполняется ***неравенство Коши – Буняковского***:

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^2 \leq (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}).$$

Неравенство Коши–Буняковского выполняется как равенство только для коллинеарных векторов и как строгое неравенство для неколлинеарных.

### Длина вектора. Угол между векторами

***Длиной*** (***нормой***) ***вектора*** $\boldsymbol{v}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ называется число $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$. Имея в виду обозначение, длину $|\boldsymbol{v}|$ называют также ***модулем*** вектора. Каждый вектор имеет положительную длину, за исключением нулевого, длина которого равна нулю: $|\boldsymbol{o}| = 0$.

***Величиной угла между ненулевыми векторами*** $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ называется число

$$\varphi = \arccos \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}.$$

Величина угла определена для любой пары ненулевых векторов и $0 \le \varphi \le \pi$. Заметим, что угол между коллинеарными векторами равен нулю или $\pi$.

Длина вектора и угол между векторами называются ***основными метрическими понятиями***.

Из неравенства Коши–Буняковского следует *неравенство треугольника*:

$$\big|\,|\boldsymbol{u}| - |\boldsymbol{v}|\,\big| \le |\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| \le |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|.$$

## Ортогональные векторы и их свойства

Два вектора $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ евклидова пространства называются ***ортогональными*** (***перпендикулярными***), если их скалярное произведение равно нулю: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$.

Система векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ называется ***ортогональной***, если все ее векторы попарно ортогональны, т.е. $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0$ при $i \ne j$. Система векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ называется ***ортонормированной***, если все ее векторы попарно ортогональны и длина (норма) каждого вектора системы равна единице, т.е.

$$(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \ne j. \end{cases}$$

Говорят, что вектор $\boldsymbol{v}$ ***ортогонален*** (***перпендикулярен***) ***множеству*** $M$, если он ортогонален каждому вектору из $M$. Ортогональность векторов обозначается знаком перпендикуляра ($\perp$).

## Свойства ортогональных векторов

**1.** *Нулевой вектор ортогонален каждому вектору пространства.*

**2.** *Взаимно ортогональные ненулевые векторы линейно независимы.*

**3.** *Если сумма взаимно ортогональных векторов равна нулевому вектору, то каждое из слагаемых равно нулевому вектору.*

**4.** *Если вектор* $\boldsymbol{u}$ *ортогонален каждому вектору системы* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$, *то он также ортогонален и любой их линейной комбинации*. Другими словами, *если* $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}_i$, $i = 1,...k$, *то* $\boldsymbol{u} \perp Lin(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k)$.

**5.** *Если вектор* $\boldsymbol{u}$ *ортогонален подмножеству* $M$ *евклидова пространства, то он ортогонален и линейной оболочке этого подмножества*, т.е. $\boldsymbol{u} \perp M \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u} \perp Lin(M)$.

**6.** *Если* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ *– ортогональная система векторов, то*

$$|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + ... + \boldsymbol{v}_k|^2 = |\boldsymbol{v}_1|^2 + |\boldsymbol{v}_2|^2 + ... + |\boldsymbol{v}_k|^2 .$$

Это утверждение является обобщением теоремы Пифагора.

### Процесс ортогонализации Грама – Шмидта

Рассмотрим следующую задачу. Дана линейно независимая система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ векторов конечномерного евклидова пространства. Требуется построить ортогональную систему $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ векторов того же пространства так, чтобы совпадали линейные оболочки:

$$Lin(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_j) = Lin(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_j), \; j = 1,...,k .$$

Решение задачи находится при помощи ***процесса ортогонализации*** (Грама – Шмидта), выполняемого за $k$ шагов.

1. Положить $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1$.

2. Найти $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \alpha_{21} \cdot \boldsymbol{w}_1$, где $\alpha_{21} = \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}$.

3. Найти $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \alpha_{31}\boldsymbol{w}_1 - \alpha_{32}\boldsymbol{w}_2$, где $\alpha_{31} = \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}$, $\alpha_{32} = \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)}$;

и т.д.

$k$) Найти $\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{v}_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_{ki}\boldsymbol{w}_i$, где $\alpha_{ki} = \dfrac{(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_i)}{(\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_i)}$, $i = 1,...,k-1$.

Процесс ортогонализации можно дополнить ***процессом нормировки***, разделив каждый вектор ортогональной системы $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ на его длину:

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{|\boldsymbol{w}_i|} \cdot \boldsymbol{w}_i, \; i = 1,...,k .$$

В результате получим ортонормированную систему $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, отвечающую условию $Lin(\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_k) = Lin(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k)$.

Если исходная система векторов является линейно зависимой, то среди векторов ортогональной системы $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ будут нулевые. В этом случае коэффициенты $\alpha_{ji} = \dfrac{(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{w}_i)}{(\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_i)}$ на $j$-м шаге вычисляются только для ненулевых векторов $\boldsymbol{w}_i \neq \boldsymbol{o}$, $i = 1,\ldots, j-1$, а коэффициенты $\alpha_{ji}$ перед нулевыми векторами $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{o}$, $i = 1,\ldots, j-1$, можно выбрать произвольными, например, нулевыми. В остальном процесс ортогонализации остается неизменным. Чтобы получить ортонормированную систему, нулевые векторы следует исключить, а остальные векторы нормировать.

### Ортогональный и ортонормированный базисы

Базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ евклидова пространства называется ***ортогональным***, если все образующие его векторы попарно ортогональны, т.е.

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0 \text{ при } i \neq j,\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n.$$

Базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ евклидова пространства называется ***ортонормированным***, если его векторы попарно ортогональны и длина каждого из них равна единице:

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n.$$

**Теорема (о дополнении системы векторов до базиса).** *В конечномерном евклидовом пространстве любую систему ортогональных* (*ортонормированных*) *векторов можно дополнить до ортогонального* (*ортонормированного*) *базиса*.

### Выражение скалярного произведения через координаты множителей

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ – базис евклидова пространства, в котором векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеют координаты $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ соответственно, т.е.

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n.$$

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ вычисляется по их координатам

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n,\ y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$$

или, используя операции с матрицами:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^T G(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\ y,$$

где $x=(x_1 \ \cdots \ x_n)^T$, $y=(y_1 \ \cdots \ y_n)^T$ – координатные столбцы векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, а $G(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ – квадратная симметрическая матрица, составленная из скалярных произведений

$$G(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)=\begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) & \cdots & (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_1) & \cdots & (\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix},$$

которая называется ***матрицей Грама*** системы векторов $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$. Определитель этой матрицы называется ***определителем Грама***.

Если в евклидовом пространстве заданы два базиса $(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ и $(\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{f}_1,...,\boldsymbol{f}_n)$, то матрицы Грама этих базисов связаны равенством

$$G(\boldsymbol{f}_1,...,\boldsymbol{f}_n)=S^T G(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)\, S,$$

где $S$ – матрица перехода от базиса $(\boldsymbol{e})$ к базису $(\boldsymbol{f})$: $(\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{e})\, S$.

### Преимущества ортонормированного базиса

**1.** *В ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n$ скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ находится по формуле*: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$, *где* $x_1,...,x_n$ *– координаты вектора* $\boldsymbol{x}$, *а* $y_1,...,y_n$ *– координаты вектора* $\boldsymbol{y}$.

**2.** *В ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n$ длина вектора $\boldsymbol{x}$ вычисляется по формуле* $|\,\boldsymbol{x}\,|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$, *где* $x_1,...,x_n$ *– координаты вектора* $\boldsymbol{x}$.

**3.** *Координаты $x_1,...,x_n$ вектора $\boldsymbol{x}$ относительно ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n$ находятся при помощи скалярного произведения по формулам*: $x_1=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1),\ldots,x_n=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_n)$.

### Свойства определителя Грама

**1.** *Система векторов $\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель Грама этой системы равен нулю.*

**2.** *Если какой-либо главный минор матрицы Грама равен нулю, то и определитель Грама равен нулю.*

**3.** *Определитель Грама* $\det G(\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_k)$ *не изменяется в процессе ортогонализации системы векторов* $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$. Другими словами, *если в процессе ортогонализации векторов* $\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_k$ *получены векторы* $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2,..., \boldsymbol{w}_k$, *то*

$$\det G(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,...,\boldsymbol{v}_k)=\det G(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,...,\boldsymbol{w}_k)=(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_1)(\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_2)\cdot\ldots\cdot(\boldsymbol{w}_k,\boldsymbol{w}_k).$$

**4.** *Определитель Грама любой системы* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,..., \boldsymbol{v}_k$ *векторов удовлетворяет двойному неравенству*

$$0\le\det G(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,...,\boldsymbol{v}_k)\le(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1)\cdot(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2)\cdot\ldots\cdot(\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{v}_k).$$

## Изоморфизм евклидовых пространств

Два евклидовых пространства $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$ называются ***изоморфными*** ($\boldsymbol{E}\leftrightarrow\boldsymbol{E}'$), если они изоморфны как векторные пространства (см. разд.1) и скалярные произведения соответствующих векторов равны:

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{u}\leftrightarrow\boldsymbol{u}'\\ \boldsymbol{v}\leftrightarrow\boldsymbol{v}'\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}')',$$

где $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ и $(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}')'$ – скалярные произведения в пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$ соответственно.

*Для изоморфизма конечномерных евклидовых пространств необходимо и достаточно, чтобы их размерности совпадали.* Поэтому изучение $n$-мерных евклидовых пространств может быть сведено к исследованию вещественного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением: $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n=x^Ty$. Для этого достаточно взять в пространстве $\boldsymbol{E}$ какой-нибудь ортонормированный базис $(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ и поставить в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{E}$ его координатный столбец $x\in\mathbb{R}^n$ ($\boldsymbol{x}\leftrightarrow x$). В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пространства $\boldsymbol{E}$ находится по формуле $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$, т.е. выполняется равенство $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(x,y)$ скалярных произведений соответствующих векторов.

## Ортогональные дополнения

***Ортогональным дополнением*** непустого подмножества $M$ евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ называется множество векторов, ортогональных каждому вектору из $M$. Ортогональное дополнение обозначается

$$M^{\perp}=\{\,\boldsymbol{v}:(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0,\ \forall\ \boldsymbol{w}\in M\}.$$

## Свойства ортогонального дополнения

Рассмотрим свойства ортогональных дополнений подмножеств $n$-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}$.

**1.** *Ортогональное дополнение* $M^{\perp}$ *непустого подмножества* $M \subset \boldsymbol{E}$ *является векторным подпространством*, *т.е.* $M^{\perp} \lhd \boldsymbol{E}$, *и справедливо включение* $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

**2.** *Пересечение любого непустого подмножества* $M \subset \boldsymbol{E}$ *со своим ортогональным дополнением есть нулевой вектор*: $M \bigcap M^{\perp} = \{ \boldsymbol{o} \}$.

**3.** *Если* $\boldsymbol{L}$ *– подпространство* $\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{L} \lhd \boldsymbol{E}$), *то* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{L} \oplus \boldsymbol{L}^{\perp}$.

**4.** *Если* $\boldsymbol{L} \lhd \boldsymbol{E}$, *то* $\dim \boldsymbol{L}^{\perp} = \dim \boldsymbol{E} - \dim \boldsymbol{L}$.

**5.** *Если* $\boldsymbol{L}$ *– подпространство* $\boldsymbol{E}$, *то* $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{L}^{\perp})^{\perp}$.

**6.** *Если* $\boldsymbol{L}_1 \lhd \boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{L}_2 \lhd \boldsymbol{E}$, *то* $(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2)^{\perp} = \boldsymbol{L}_1^{\perp} \bigcap \boldsymbol{L}_2^{\perp}$ и $(\boldsymbol{L}_1 \bigcap \boldsymbol{L}_2)^{\perp} = \boldsymbol{L}_1^{\perp} + \boldsymbol{L}_2^{\perp}$.

## Нахождение ортогонального дополнения подпространства

В разд. 1 для описания подпространств векторных пространств использовались два способа описания (внешний и внутренний). Рассмотрим применение этих способов описания для нахождения ортогональных дополнений подпространств. Учитывая изоморфизм евклидовых пространств, будем рассматривать арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением.

Для заданного подпространства $L \lhd \mathbb{R}^n$ требуется найти его ортогональное дополнение $L^{\perp}$. В зависимости от способа описания подпространства $L$ используем одно из следующих двух утверждений.

**1.** *Если подпространство* $L \lhd \mathbb{R}^n$ *задано как линейная оболочка* $L = Lin(a_1,\ldots,a_k)$ *столбцов матрицы* $A = (a_1 \ \cdots \ a_k)$, *то множество решений однородной системы* $A^T x = o$ *является его ортогональным дополнением* $L^{\perp} \lhd \mathbb{R}^n$, т.е.

$$L = Lin(a_1,\ldots,a_k) \quad \Rightarrow \quad L^{\perp} = \{ A^T x = o \}.$$

**2.** *Если подпространство* $L \lhd \mathbb{R}^n$ *задано как множество решений однородной системы* $Ax = o$ $m$ *уравнений с* $n$ *неизвестными, то линейная оболочка столбцов* $a_1^{\mathrm{T}}, \ldots, a_m^{\mathrm{T}}$ *транспо-*

*нированной матрицы* $A^T = (a_1^{\mathrm{T}} \ \cdots \ a_m^{\mathrm{T}})$ *является его ортогональным дополнением* $L^{\perp} \lhd \mathbb{R}^n$, т.е.

$$L = \{Ax = o\} \quad \Rightarrow \quad L^{\perp} = Lin(a_1^{\mathrm{T}}, ..., a_m^{\mathrm{T}}),$$

*где* $a_i^{\mathrm{T}}$ – $i$*-й столбец матрицы* $A^T$.

## Задача о перпендикуляре

Пусть $\boldsymbol{L}$ – подпространство конечномерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}$. Для любого вектора $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$ (по свойству 3 ортогонального дополнения) существует единственное разложение:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{h}, \text{ где } \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L},\ \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{L}^{\perp}. \tag{2.4}$$

Вектор $\boldsymbol{l}$ называется ***ортогональной проекцией*** вектора $\boldsymbol{v}$ на подпространство $\boldsymbol{L}$, а вектор $\boldsymbol{h}$ – ***ортогональной составляющей*** вектора $\boldsymbol{v}$ относительно подпространства $\boldsymbol{L}$. По аналогии с привычными терминами курса элементарной геометрии ортогональную составляющую $\boldsymbol{h}$ называют ***перпендикуляром, опущенным из конца вектора $\boldsymbol{v}$ на подпространство $\boldsymbol{L}$***. Из-за ортогональности составляющих $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{h}$ разложение (2.4) называют ***ортогональным***. Для наглядности на рис. 2.1 векторы $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{h}$ расположены в виде прямоугольного треугольника.

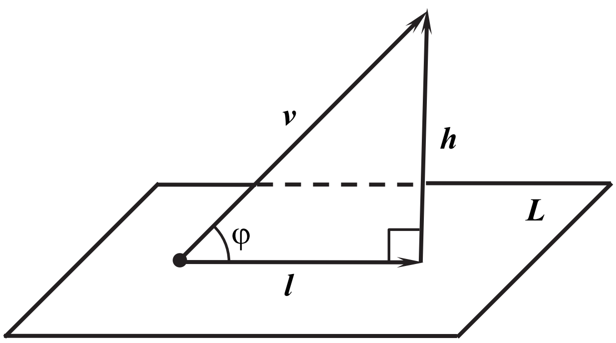


Рис.2.1

Задача о перпендикуляре ставится следующим образом. В $n$-мерном евклидовом пространстве заданы вектор $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$ и подпространство $\boldsymbol{L} \lhd \boldsymbol{E}$. Требуется найти ортогональную проекцию $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$ вектора $\boldsymbol{v}$ и его ортогональную составляющую (перпендикуляр) $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{L}^{\perp}$, т.е. представить заданный вектор $\boldsymbol{v}$ в виде (2.4).

Для решения задачи о перпендикуляре нужно выполнить следующие действия.

1. Взять любой базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ подпространства $\boldsymbol{L}$ (полагаем, что $\dim \boldsymbol{L} = r \le n$).

2. Составить неоднородную систему

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) \cdot l_1 + (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \cdot l_2 + \ldots + (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_r) \cdot l_r = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}), \\ \qquad \vdots \\ (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_1) \cdot l_1 + (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_2) \cdot l_2 + \ldots + (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_r) \cdot l_r = (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{v}) \end{cases} \tag{2.5}$$

$r$ уравнений с $r$ неизвестными $l_1, \ldots, l_r$.

3. Решить систему, составленную в п. 2.

4. Найти ортогональную проекцию $\boldsymbol{l} = l_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \ldots + l_r \cdot \boldsymbol{e}_r$, а затем – ортогональную составляющую (перпендикуляр) $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{l}$.

### Задача о перпендикуляре к многообразию

Аналогично решается задача о перпендикуляре не для подпространства, а для многообразия. Пусть в $n$-мерном евклидовом пространстве заданы вектор $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$ и многообразие $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{L}$ (рис. 2.2). Требуется найти разложение $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{h}$, где $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{L}^{\perp}$.
Здесь $\boldsymbol{h}$ – перпендикуляр, опущенный из конца вектора $\boldsymbol{v}$ на многообразие $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{L}$. Заметим, что составляющие $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{h}$ в общем случае не ортогональны.

Поставленная задача сводится к задаче нахождения ортогональной проекции $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{v}_0$ и ортогональной составляющей $\boldsymbol{h}$ вектора $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$ относительно подпространства $\boldsymbol{L}$ (см. рис. 2.3). Найдя ортогональное разложение $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{h}$, можно получить и искомое разложение $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{h}$, где $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v}_0$.

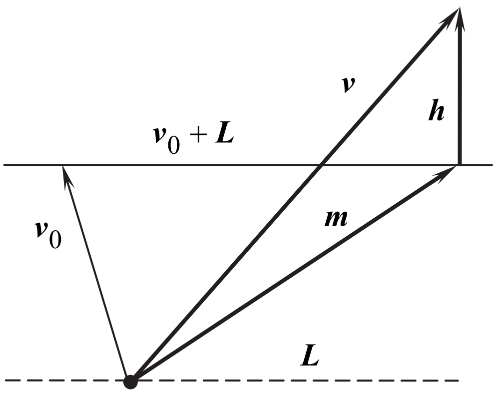



Рис. 2.2

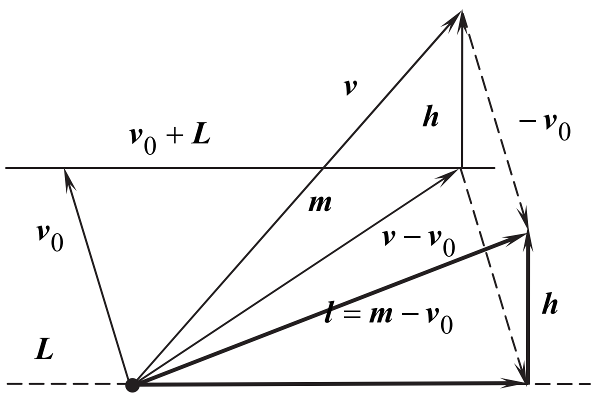



Рис. 2.3

### Метрические приложения определителя Грама

Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ – линейно независимая система векторов $n$-мерного евклидова пространства ($k \le n$). Определим по индукции понятие ***многомерного объема***. Обозначим через $\boldsymbol{h}_j$ – перпендикуляр, опущенный из конца вектора $\boldsymbol{v}_j$ на подпространство $Lin(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1})$, $j = 2, \ldots, k$.

Обозначим
$V_{\#\boldsymbol{v}_1} = |\boldsymbol{v}_1|$ – одномерный объем – длина вектора $\boldsymbol{v}_1$;

$V_{\#\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2} = V_{\#\boldsymbol{v}_1} \cdot |\,\boldsymbol{h}_2\,| = |\,\boldsymbol{v}_1\,| \cdot |\,\boldsymbol{h}_2\,|$ – двумерный объем – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$;

$V_{\#\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2,\,\boldsymbol{v}_3} = V_{\#\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2} \cdot |\,\boldsymbol{h}_3\,| = |\,\boldsymbol{v}_1\,| \cdot |\,\boldsymbol{h}_2\,| \cdot |\,\boldsymbol{h}_3\,|$ – трехмерный объем – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$;

. . .

$V_{\#\boldsymbol{v}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{v}_k} = V_{\#\boldsymbol{v}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{v}_{k-1}} \cdot |\,\boldsymbol{h}_k\,| = |\,\boldsymbol{v}_1\,| \cdot |\,\boldsymbol{h}_2\,| \cdot\ldots\cdot |\,\boldsymbol{h}_k\,|$ – $k$-мерный объем – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

*Определитель Грама системы векторов* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ *равен квадрату* $k$*-мерного объема параллелепипеда, построенного на этих векторах* (***геометрический смысл определителя Грама***)

$$V^2_{\#\boldsymbol{v}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{v}_k} = |\,\boldsymbol{h}_1\,|^2 \cdot |\,\boldsymbol{h}_2\,|^2 \cdot\ldots\cdot |\,\boldsymbol{h}_k\,|^2 = \det G(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k), \tag{2.6}$$

***Расстоянием от конца вектора*** $\boldsymbol{v}$ ***до подпространства*** $\boldsymbol{L}$ называется наименьшее значение длин векторов $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{l})$, где $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$, т.е.

$$d = \min_{\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}} |\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{l}\,|.$$

Аналогично определяется расстояние от конца вектора до многообразия.

***Углом между ненулевым вектором*** $\boldsymbol{v}$ ***и подпространством*** $\boldsymbol{L}$ называется наименьший угол между вектором $\boldsymbol{v}$ и ненулевыми векторами подпространства, т.е.

$$\varphi = \min_{\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}} \left( \arccos \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{l})}{|\,\boldsymbol{v}\,| \cdot |\,\boldsymbol{l}\,|} \right).$$

Аналогично определяется угол между вектором и многообразием, как угол между вектором и однородной частью многообразия.

Для нахождения расстояний и углов можно использовать формулу (2.6).

Пусть задан вектор $\boldsymbol{v}$ и подпространство $\boldsymbol{L} = Lin(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r)$, причем векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ линейно независимы. Тогда $V_{\#\,\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{v}} = V_{\#\,\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_r} \cdot |\,\boldsymbol{h}\,|$, где $\boldsymbol{h}$ – ортогональная составляющая вектора $\boldsymbol{v}$ относительно подпространства $\boldsymbol{L}$. Отсюда, $|\,\boldsymbol{h}\,| = \dfrac{V_{\#\,\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{v}}}{V_{\#\,\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_r}}$. Используя (2.6) для вычисления объемов, получаем, что длина $|\,\boldsymbol{h}\,|$ ортогональной составляющей (расстояние от конца вектора $\boldsymbol{v}$ до подпространства $\boldsymbol{L} = Lin(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r)$) находится по формуле

$$|\,\boldsymbol{h}\,| = \sqrt{\frac{\det G(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{v})}{\det G(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r)}}, \tag{2.7}$$

а угол $\varphi$ между ненулевым вектором $\boldsymbol{v}$ и подпространством находится по формуле

$$\varphi = \arcsin \frac{|\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

**Пример 4.** Можно ли в векторных пространствах $\mathbb{R}^2$ (столбцов из двух действительных чисел) и $P_2$ (многочленов степени не выше второй) задать скалярное произведение формулами **(1)** или **(2)**, приведенными в таблице?

| **Пр-во** | **Формула (1)** | **Формула (2)** |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ | $(x,y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ | $(x,y) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 - 3x_2y_2$ |
| $P_2$ | $(p,q) = p(1)q'(1) + p'(1)q(1) - 2p'(0)q'(0)$ | $(p,q) = \int_{-1}^{1} [p(x)q(x) + p'(x)q'(x)]dx + p(1)q(1)$ |

Если можно, то найти угол между первыми двумя векторами стандартного базиса.

*Решение*. Рассмотрим ф о р м у л у **(1)** для пространства $\mathbb{R}^2$. Эта формула ставит в соответствие элементам $x = (x_1 \quad x_2)^T$, $y = (y_1 \quad y_2)^T$ пространства $\mathbb{R}^2$ действительное число. Проверяем, удовлетворяет ли эта формула аксиомам 1–4 скалярного произведения. Сначала проверяем выполнение аксиомы 1. Поменяем местами множители $x$ и $y$:

$$(y,x) = 4y_1x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 3y_2x_2 = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

Получили выражение в правой части формулы **(1)**, т.е. $(y,x) = (x,y)$. Значит, аксиома 1 выполняется. Заметим, что выражение в правой части **(1)** симметрическое относительно $x$ и $y$. Оно не меняется при одновременной замене буквы $x$ на букву $y$, а буквы $y$ на букву $x$. Это и обеспечивает коммутативность.

Вместо аксиом 2 и 3 проверяем линейность по первому множителю. Для произвольных $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ получаем

$$(\alpha x + \beta y, z) = 4(\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 - 2(\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 - 2(\alpha x_2 + \beta y_2)z_1 + 3(\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 =$$

$$= \alpha(4x_1z_1 - 2x_1z_2 - 2x_2z_1 + 3x_2z_2) + \beta(4y_1z_1 - 2y_1z_2 - 2y_2z_1 + 3y_2z_2) = \alpha(x,z) + \beta(y,z).$$

Линейность доказана, следовательно, аксиомы 2 и 3 выполняются. Вместо приведенного доказательства достаточно заметить, что выражение в правой части **(1)** линейно по переменным $x_1, x_2$:

$$4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 = x_1(4y_1 - 2y_2) + x_2(-2y_1 + 3y_2).$$

Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат и представляем полученную квадратичную форму в матричном виде (см. разд. 7 в [7])

$$(x,x) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 3x_2^2 = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры матрицы этой квадратичной формы положительные $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$. Значит, по критерию Сильвестра, квадратичная форма положительно определена, т.е. $(x,x) > 0$ для всех $x \neq o$. Значит, аксиома 4 для формулы **(1)** выполняется, поскольку $(x,x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$ и $(x,x) = 0$ только при $x = o$. Таким образом, формула **(1)** задает скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Находим угол $\varphi$ между первыми двумя векторами стандартного базиса $\mathbb{R}^2$, т.е. между векторами $e_1 = (1 \quad 0)^T$ и $e_2 = (0 \quad 1)^T$. Вычисляем косинус угла по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(e_1,e_2)}{\sqrt{(e_1,e_1)}\sqrt{(e_2,e_2)}} = \frac{4\cdot1\cdot0 - 2\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot0 + 3\cdot0\cdot1}{\sqrt{4\cdot1^2 - 2\cdot1\cdot0 + 3\cdot0^2}\sqrt{4\cdot0^2 - 2\cdot0\cdot1 + 3\cdot1^2}} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}.$$

Значит, угол между векторами $\varphi = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Рассмотрим ф о р м у л у **(2)** для пространства $\mathbb{R}^2$. Выражение в правой части формулы **(2)** симметрическое относительно $x$ и $y$, а также линейно по переменным $x_1, x_2$. Значит, аксиомы 1–3 выполняются. Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат и представляем полученную квадратичную форму в матричном виде

$$(x,x) = 2x_1^2 - 8x_1x_2 - 3x_2^2 = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем угловые миноры матрицы квадратичной формы $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = -19 < 0$. По критерию Сильвестра, эта квадратичная форма не является положительно определенной. Значит, аксиома 4 не выполняется. Чтобы в этом убедиться, не обязательно использовать критерий Сильвестра. Достаточно привести пример ненулевого вектора $x$, для которого $(x,x) \leq 0$. Например, для $x = (0 \quad 1)^T$ имеем $(x,x) = -3$. Значит, аксиома 4 не выполняется. Поэтому формулой **(2)** нельзя задать скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим ф о р м у л у **(1)** для пространства $P_2$. Эта формула ставит в соответствие элементам $p(x) = ax^2 + bx + c$, $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ пространства $P_2$ действительное число. Проверяем, удовлетворяет ли эта формула аксиомам 1–4 скалярного произведения. Сначала проверяем выполнение аксиомы 1. Выражение в правой части **(1)** симметрическое относительно $p$ и $q$. Действительно, при одновременной замене буквы $p$ на букву $q$, а буквы $q$ – на букву $p$, выражение не меняется

$$q(1)p'(1)+q'(1)p(1)-2q'(0)p'(0)=p(1)q'(1)+p'(1)q(1)-2p'(0)q'(0).$$

Значит, формула **(1)** удовлетворяет аксиоме 1.

Выражение в правой части **(1)** линейно по многочлену $p$. Значит, формула **(1)** линейна по первому множителю (аксиомы 2–3 выполняются). Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат $(p,p)=2p(1)p'(1)-2[p'(0)]^2$. Это выражение может быть отрицательным. Например, для многочлена $p(x)=x-1$ имеем $(p,p)=-2$. Значит, аксиома 4 не выполняется. Поэтому формулой **(1)** нельзя задать скалярное произведение в $P_2$.

Рассмотрим ф о р м у л у **(2)** для пространства $P_2$. Правая часть формулы симметрическая относительно $p$ и $q$, а также линейна по $p$ (из-за линейности интеграла). Поэтому аксиомы 1–3 выполняются. Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат

$$(p,p)=\int_{-1}^{1}\{[p(x)]^2+[p'(x)]^2\}\,dx+[p(1))]^2.$$

Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет неотрицательное значение. Поэтому $(p,p)\ge 0$. Предположим, что $(p,p)=0$, тогда

$$(p,p)=\int_{-1}^{1}[p(x)]^2\,dx+\int_{-1}^{1}[p'(x)]^2\,dx+[p(1))]^2=0.$$

Следовательно, каждое слагаемое равно нулю. Так как многочлен является непрерывной функцией, равенство $\int_{-1}^{1}[p(x)]^2\,dx=0$ возможно только для нулевого многочлена $p(x)\equiv 0$ (см. пример 3 евклидовых пространств). Следовательно, аксиома 4 выполняется. Таким образом, формула **(4)** задает скалярное произведение в $P_2$.

Находим угол $\varphi$ между первыми двумя векторами стандартного базиса $P_2$, т.е. между многочленами $p_1(x)\equiv 1$ и $p_2(x)=x$. Вычисляем скалярные произведения

$$(p_1,p_2)=\int_{-1}^{1}[1\cdot x+0\cdot 1]dx+1\cdot 1=\int_{-1}^{1}xdx+1=1;\quad (p_1,p_1)=\int_{-1}^{1}[1^2+0^2]dx+1^2=2+1=3;$$

$$(p_2,p_2)=\int_{-1}^{1}[x^2+1^2]dx+1^2=\frac{2}{3}+2+1=\frac{11}{3}.$$

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{(p_1, p_2)}{\sqrt{(p_1, p_1)}\sqrt{(p_2, p_2)}} == \dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{11}{3}}} = \dfrac{\sqrt{11}}{11}$, значит, угол равен $\arccos\dfrac{\sqrt{11}}{11}$.

*Ответ*: в пространстве $\mathbb{R}^2$ формула **(1)** задает скалярное произведение, а формула **(2)** нет; в пространстве $P_2$ формула **(2)** задает скалярное произведение, а формула **(1)** нет. Углы между первыми двумя векторами стандартного базиса в $\mathbb{R}^2$ и в $P_2$ равны $\pi - \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ и $\arccos\dfrac{\sqrt{11}}{11}$, соответственно.

**Пример 5.** Даны элементы $a_1 = (1 \quad -1 \quad 2 \quad 2)^T$, $a_2 = (1 \quad 3 \quad 1 \quad -5)^T$, $a_3 = (3 \quad 5 \quad 4 \quad -8)^T$, $a_4 = (3 \quad -7 \quad 2 \quad 8)^T$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением $(x, y) = x^T y$. Применяя процесс ортогонализации к системе элементов $a_1, a_2, a_3, a_4$, найти ортогональный базис подпространства $\boldsymbol{A} = Lin(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Дополнить этот базис до ортогонального базиса всего пространства $\mathbb{R}^4$.

*Решение*. Применяем к заданной системе векторов процесс ортогонализации.

1. Полагаем $b_1 = a_1$.

2. Вычисляем $\alpha_{21} = \dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{1\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 2 + (-5)\cdot 2}{1^2 + (-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \dfrac{-10}{10} = -1$ и находим вектор

$$b_2 = a_2 - \alpha_{21} b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычисляем коэффициенты $\alpha_{31} = \dfrac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{3\cdot 1 + 5\cdot(-1) + 4\cdot 2 + (-8)\cdot 2}{1^2 + (-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \dfrac{-10}{10} = -1$

$\alpha_{32} = \dfrac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = \dfrac{3\cdot 2 + 5\cdot 2 + 4\cdot 3 + (-8)\cdot(-3)}{2^2 + 2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \dfrac{52}{26} = 2$ и находим вектор

$$b_3 = a_3 - \alpha_{31} b_1 - \alpha_{32} b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получили нулевой вектор. Значит, система векторов $a_1, a_2, a_3$ линейно зависима. Продолжаем процесс ортогонализации, учитывая, что $b_3 = o$.

4. Вычисляем коэффициенты $\alpha_{41} = \frac{(a_4, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{3 \cdot 1 + (-7) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2}{1^2 + (-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{30}{10} = 3$,

$\alpha_{42} = \frac{(a_4, b_2)}{(b_2, b_2)} = \frac{3 \cdot 2 + (-7) \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 8 \cdot (-3)}{2^2 + 2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \frac{-26}{26} = -1$ для ненулевых векторов $b_1$ и $b_2$. Коэффициент $\alpha_{43}$ при нулевом векторе $b_3 = o$ можно взять любым, например $\alpha_{43} = 0$. Находим вектор

$$b_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Процесс ортогонализации завершен. Найдена такая ортогональная система векторов $b_1, b_2, b_3, b_4$, что $\boldsymbol{A} = Lin(a_1, a_2, a_3, a_4) = Lin(b_1, b_2, b_3, b_4)$. Исключая из этой системы нулевой вектор $b_3 = o$, получаем базис $b_1, b_2, b_4$ подпространства $\boldsymbol{A} = Lin(b_1, b_2, b_4)$.

Дополняем базис $b_1, b_2, b_4$ до ортогонального базиса всего пространства $\mathbb{R}^4$. Для этого находим фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $B^T x = o$, где $B = (b_1 \quad b_2 \quad b_4)$ – матрица, составленная из соответствующих столбцов. Составляем расширенную матрицу системы $B^T x = o$ и приводим ее к упрощенному виду:

$$\left(B \mid o\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выражаем базисные переменные $x_1, x_2, x_3$ через свободную переменную $x_4$: $x_1 = 1{,}5x_4$, $x_2 = 1{,}5x_4$, $x_3 = -x_4$. По этим формулам для $x_4 = 2$ получаем $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$. Таким образом, фундаментальная система состоит из одного решения $\varphi = (3 \quad 3 \quad -2 \quad 2)^T$. Этот столбец дополняет ортогональный базис подпространства $\boldsymbol{A}$ до базиса $\mathbb{R}^4$.

*Ответ*: $(1 \quad -1 \quad 2 \quad 2)^T$, $(2 \quad 2 \quad 3 \quad -3)^T$, $(2 \quad -2 \quad -1 \quad -1)^T$, $(3 \quad 3 \quad -2 \quad 2)^T$ – ортогональный базис $\mathbb{R}^4$; первые три столбца образуют базис подпространства $\boldsymbol{A}$.

**Пример 6.** В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением $(x,y)=x^T y$ заданы столбцы $a_1=(1\quad 1\quad 1\quad 1)^T$, $a_2=(1\quad 1\quad 2\quad 0)^T$, $a_3=(-1\quad -1\quad -4\quad 2)^T$ и подпространство $\boldsymbol{B}$ – множество решений однородной системы $Bx=0$ с матрицей $(B)=\begin{pmatrix}2&1&1&3\\3&2&2&1\\1&2&2&-9\end{pmatrix}$. Найти:

а) величину угла между вектором $x=(1\quad 0\quad -1\quad 1)^T$ и подпространством $Lin(a_1,a_2,a_3)$;

б) ортогональную проекцию $b\in\boldsymbol{B}$ вектора $y=(7\quad -4\quad -1\quad 2)^T$ на подпространство $\boldsymbol{B}$ и его ортогональную составляющую (перпендикуляр) $h\in\boldsymbol{B}^{\perp}$ относительно подпространства $\boldsymbol{B}$.

*Решение*. а) Находим базис подпространства $\boldsymbol{A}=Lin(a_1,a_2,a_3)$. Составляем из заданных столбцов матрицу $A=(a_1\quad a_2\quad a_3)$ и приводим ее к ступенчатому виду

$$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}&1&-1\\1&1&-1\\1&2&-4\\1&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&\boldsymbol{1}&-3\\0&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Следовательно $\mathrm{rg}A=2$, а столбцы $a_1$, $a_2$ образуют базис $\boldsymbol{A}$.

Угол между вектором $x$ и подпространством $\boldsymbol{A}=Lin(a_1,a_2)$ можно искать двумя способами: используя геометрический смысл определителя Грама (первый способ), либо решая задачу о перпендикуляре (второй способ).

П е р в ы й  с п о с о б. Длину $|h|$ ортогональной составляющей вектора $x$ относительно подпространства $\boldsymbol{A}$ находим по формуле (2.7): $|h|=\sqrt{\dfrac{\det G(a_1,a_2,x)}{\det G(a_1,a_2)}}$. По скалярным произведениям

$$(a_1,a_1)=1^2+1^2+1^2+1^2=4;\qquad (a_1,a_2)=1\cdot1+1\cdot1+1\cdot2+1\cdot0=4;$$

$$(a_2,a_2)=1^2+1^2+2^2+0^2=6;\qquad (a_1,x)=1\cdot1+1\cdot0+1\cdot(-1)+1\cdot1=1;$$

$$(a_2,x)=1\cdot1+1\cdot0+2\cdot(-1)+0\cdot1=-1;\qquad (x,x)=1^2+0^2+(-1)^2+1^2=3$$

составляем и вычисляем определители Грама

$$\det G(a_1,a_2,x)=\begin{vmatrix}(a_1,a_1)&(a_1,a_2)&(a_1,x)\\(a_1,a_2)&(a_2,a_2)&(a_2,x)\\(a_1,x)&(a_2,x)&(x,x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&4&1\\4&6&-1\\\boldsymbol{1}&-1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&8&-11\\0&10&-13\\1&-1&3\end{vmatrix}=6;$$

$$\det G(a_1,a_2)=\begin{vmatrix}(a_1,a_1) & (a_1,a_2)\\(a_1,a_2) & (a_2,a_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 4\\4 & 6\end{vmatrix}=8.$$

Значит $|h|=\sqrt{\frac{6}{8}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $\sin\varphi=\frac{|h|}{|x|}=\frac{\sqrt{3}}{2}:\sqrt{3}=\frac{1}{2}$. Следовательно, $\varphi=\frac{\pi}{6}$ – искомый угол между вектором $x$ и подпространством $Lin(a_1,a_2,a_3)$.

Второй способ. Составляем неоднородную систему уравнений (2.5) с матрицей Грама $G(a_1,a_2)$

$$G(a_1,a_2)\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a_1,x)\\(a_2,x)\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}4l_1+4l_2=1,\\4l_1+6l_2=-1.\end{cases}$$

Решая ее, получаем $l_1=1.25$ и $l_2=-1$. Находим ортогональную проекцию вектора $x$ относительно на подпространство $\boldsymbol{A}$

$$l=l_1\cdot a_1+l_2\cdot a_2=1{,}25\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}25\\0{,}25\\-0{,}75\\1{,}25\end{pmatrix}.$$

Вычисляем длины векторов

$$|l|=\sqrt{0{,}25^2+0{,}25^2+(-0{,}75)^2+1{,}25^2}=1{,}5;\qquad |x|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$$

и косинус угла между ними $\cos\varphi=\frac{|l|}{|x|}=\frac{1{,}5}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, искомый угол $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

б) Определяем базис подпространства $\boldsymbol{B}$ решений однородной системы. Для этого находим фундаментальную систему решений. Составляем расширенную матрицу системы и приводим ее к упрощенному виду:

$$(B\mid o)=\left(\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & 1 & 3 & 0\\3 & 2 & 2 & 1 & 0\\\mathbf{1} & 2 & 2 & -9 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & -9 & 0\\0 & \mathbf{-3} & -3 & 21 & 0\\0 & -4 & -4 & 28 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 5 & 0\\0 & 1 & 1 & -7 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободные: $x_1=-5x_4$, $x_2=-x_3+7x_4$. По этим формулам для $x_3=1$, $x_4=0$ получаем $x_1=0$, $x_2=-1$, а для $x_3=0$, $x_4=1$ имеем $x_1=-5$, $x_2=7$. Таким образом, фундаментальная система состоит из двух решений $\varphi_1=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$, $\varphi_2=\begin{pmatrix}-5 & 7 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$. Эти решения образуют базис подпространства $\boldsymbol{B}=Lin(\varphi_1,\varphi_2)$, т.е. $\dim\boldsymbol{B}=2$.

Вычисляем скалярные произведения

$$(\varphi_1,\varphi_1)=0^2+(-1)^2+1^2+0^2=2; \qquad (\varphi_1,\varphi_2)=0\cdot(-5)+(-1)\cdot 7+1\cdot 0+0\cdot 1=-7;$$

$$(\varphi_2,\varphi_2)=(-5)^2+7^2+0^2+1^2=75; \qquad (\varphi_1,y)=0\cdot 7+(-1)\cdot(-4)+1\cdot(-1)+0\cdot 2=3;$$

$$(\varphi_2,y)=(-5)\cdot 7+7\cdot(-4)+0\cdot(-1)+1\cdot 2=-61.$$

и составляем неоднородную систему (2.5) $G(\varphi_1,\varphi_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\varphi_1,y) \\ (\varphi_2,y) \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} 2\cdot b_1-7\cdot b_2=3, \\ -7\cdot b_1+75\cdot b_2=-61. \end{cases}$$

Решаем ее по правилу Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 75 \end{vmatrix}=101, \ \Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -61 & 75 \end{vmatrix}=-202, \ b_1=\frac{-202}{101}=-2;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -61 \end{vmatrix}=-101, \ b_2=\frac{-101}{101}=-1.$$

Находим ортогональную проекцию $b$ вектора $y$ на подпространство $\boldsymbol{B}$ и ортогональную составляющую (перпендикуляр) $h\in\boldsymbol{B}^{\perp}$ вектора $y$ относительно подпространства $\boldsymbol{B}$

$$b=b_1\cdot\varphi_1+b_2\cdot\varphi_2=-2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad h=y-b=\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Можно выполнить проверку ортогональности найденных векторов, вычисляя скалярное произведение $(b,h)=5\cdot 2+(-5)\cdot 1+(-2)\cdot 1+(-1)\cdot 3=0$. Действительно, найденные векторы ортогональны.

*Ответ*: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $b=\begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T$, $h=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$.

# 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

## Определение отображения (функции)

Пусть $V$ и $W$ – заданные множества. Говорят, что на множестве $V$ ***определено отображение*** (***функция***) $f$, если каждому элементу $v \in V$ поставлен в соответствие единственный элемент $f(v)$ множества $W$. Такое соответствие называют также ***отображением множества*** $V$ ***в множество*** $W$ и обозначают $f : V \to W$, или $V \xrightarrow{f} W$. Если отображение $f$ элементу $v \in V$ ставит в соответствие элемент $w \in W$, т.е. $w = f(v)$, то элемент $w$ называется ***образом*** $v$, а элемент $v$ – ***прообразом*** $w$.

Два отображения $f : V \to W$ и $g : V \to W$ называются ***равными***, если $f(v) = g(v)$ $\forall\, v \in V$.

Отображение $f : V \to W$ называется:

***инъективным***, если разным элементам множества $V$ соответствуют разные образы: $v_1 \neq v_2 \;\Rightarrow\; f(v_1) \neq f(v_2)$;

***сюръективным***, если для каждого элемента из множества $W$ имеется хотя бы один прообраз: $\forall w \in W \;\; \exists\, v \in V : w = f(v)$;

***биективным*** (***взаимно однозначным***), если оно инъективно и сюръективно одновременно.

Сюръективное отображение называется также ***отображением множества*** $V$ ***на множество*** $W$.

***Композицией отображений*** $g : U \to V$ и $f : V \to W$ называется отображение $f \circ g : U \to W$, определяемое равенством $(f \circ g)(u) = f(g(u))$.

Отображение $\mathcal{E}_V : V \to V$ называется ***тождественным***, если каждому элементу множества $V$ ставится в соответствие этот же элемент: $\mathcal{E}_V(v) = v \;\; \forall\, v \in V$.

Отображение $f^{-1} : W \to V$ называется ***обратным*** для отображения $f : V \to W$, если $f^{-1} \circ f = \mathcal{E}_V : V \to V$ и $f \circ f^{-1} = \mathcal{E}_W : W \to W$. Отображение $f$ называется ***обратимым***, если для него существует обратное отображение. Необходимым и достаточным условием обратимости является условие биективности (взаимной однозначности) отображения.

## Линейные отображения

Пусть $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ – векторные пространства (над одним и тем же числовым полем). Отображение $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ называется ***линейным***, если

**1.** $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1)+\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_2)\ \ \forall\, \boldsymbol{v}_1\in\boldsymbol{V},\ \forall\, \boldsymbol{v}_2\in\boldsymbol{V}$;

**2.** $\mathcal{A}(\lambda\cdot\boldsymbol{v})=\lambda\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{v})\ \ \forall\, \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$ и любого числа $\lambda$ (из данного числового поля).

Условие 1 называется ***аддитивностью*** отображения, а условие 2 – ***однородностью***. Пространство $\boldsymbol{V}$ называется ***пространством прообразов***, а пространство $\boldsymbol{W}$ – ***пространством образов***.

Заметим, что условия аддитивности и однородности можно заменить одним условием ***линейности*** отображения:

$$\mathcal{A}(\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2)=\lambda_1\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1)+\lambda_2\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_2)\quad \forall\, \boldsymbol{v}_1\in\boldsymbol{V},\ \forall\, \boldsymbol{v}_2\in\boldsymbol{V}$$

и любых чисел $\lambda_1$ и $\lambda_2$ из данного числового поля.

## Свойства линейных отображений

Пусть $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ – линейное отображение.

**1.** *Линейное отображение* $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ *нулевому элементу* $\boldsymbol{o}_{\boldsymbol{V}}$ *пространства* $\boldsymbol{V}$ *ставит в соответствие нулевой элемент* $\boldsymbol{o}_{\boldsymbol{W}}$ *пространства* $\boldsymbol{W}$.

**2.** *При линейном отображении образ линейной комбинации является линейной комбинацией образов*:

$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\,\boldsymbol{v}_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\,\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_i).$$

**3.** *Если векторы* $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ *линейно зависимы, то их образы также линейно зависимы.*

**4.** *Пусть* $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ *– сюръективное отображение пространства* $\boldsymbol{V}$ *на пространство* $\boldsymbol{W}$ *и векторы* $\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_k$ *пространства* $\boldsymbol{W}$ *образуют линейно независимую систему. Тогда в пространстве* $\boldsymbol{V}$ *существует такая линейно независимая система векторов* $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$, *что* $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{w}_i,\ i=1,\ldots,k$.

**5.** *При линейном сюръективном отображении* $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ *конечномерного пространства размерность пространства образов не превосходит размерности пространства прообразов*, т.е. $\dim\boldsymbol{W}\le\dim\boldsymbol{V}$.

**6.** *Композиция линейных отображений является линейным отображением.*

**7.** *Если линейное отображение* $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ *обратимое* (*взаимно однозначное*), *то обратное отображение* $\mathcal{A}^{-1}:\boldsymbol{W}\to\boldsymbol{V}$ *– линейное.*

**8.** *Линейное отображение конечномерного пространства однозначно задается образами базисных векторов.*

## Линейные операции над линейными отображениями

***Суммой отображений*** $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ и $\mathcal{B}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ называется отображение $(\mathcal{A}+\mathcal{B}):\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$, определяемое равенством $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{v})=\mathcal{A}(\boldsymbol{v})+\mathcal{B}(\boldsymbol{v})$ для всех $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$.

***Произведением отображения*** $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ ***на число*** $\lambda$ называется отображение $(\lambda\cdot\mathcal{A}):\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$, определяемое равенством $(\lambda\cdot\mathcal{A})(\boldsymbol{v})=\lambda\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{v})$ для всех $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$.

Нетрудно доказать, что *сумма линейных отображений и произведение линейного отображения на число являются линейными отображениями.*

## Примеры линейных отображений

1. Обозначим $\mathcal{O}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ – нулевое отображение, которое ставит в соответствие любому вектору $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$ нулевой элемент $\boldsymbol{o}_{\boldsymbol{W}}$ пространства $\boldsymbol{W}$. Условия аддитивности и однородности такого отображения, разумеется, выполняются. Это отображение не является инъективным (разным прообразам $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ соответствует один и тот же образ $\boldsymbol{o}_{\boldsymbol{W}}$), не является сюръективным (из всех векторов пространства $\boldsymbol{W}$ только у нулевого имеется прообраз). Поэтому нулевое отображение не является биективным и обратимым.

2. Пусть в $n$-мерном векторном пространстве $\boldsymbol{V}$ задан базис $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$. Обозначим $æ:\boldsymbol{V}\to\mathbb{R}^n$ отображение, которое ставит в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{v}$ его координатный столбец $v=(v_1\ \cdots\ v_n)^T$ относительно заданного базиса. Такое отображение является линейным, так как при сложении векторов в одном и том же базисе их координаты складываются, а при умножении вектора на число – координаты вектора умножаются на это число (см. разд.1). Это отображение является инъективным (разные векторы имеют разные координаты (в одном и том же базисе)), является сюръективным (для любого столбца $v=(v_1\ \cdots\ v_n)^T\in\mathbb{R}^n$ существует прообраз $v=v_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+v_n\boldsymbol{e}_n$). Поэтому отображение æ биективное и, следовательно, обратимое. Напротив, отображение, которое каждому вектору

$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ ставит в соответствие столбец $v = (v_1 + 1 \quad \cdots \quad v_n + 1)^T \in \mathbb{R}^n$, не является линейным, так как образом нулевого вектора $\boldsymbol{o}_V \in \boldsymbol{V}$ служит столбец $(1 \quad \cdots \quad 1)^T \neq o$, отличный от нулевого.

3. Пусть в трехмерном пространстве $V_3$ геометрических векторов задан стандартный базис $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (см. п. 1 примеров базисов в разд.1). Обозначим $\text{пр}_{\bar{i}}(\bar{v}) = (\bar{v}, \bar{i})$ – алгебраическое значение длины ортогональной проекции вектора $\bar{v}$ на ось, задаваемую вектором $\bar{i}$, т.е. абсциссу вектора $\bar{v}$. Тогда отображение $\text{пр}_{\bar{i}} : V_3 \to \mathbb{R}$ будет линейным, так как скалярное произведение $(\bar{v}, \bar{i})$ линейно по первому множителю (см. разд. 2 в [8]). Это отображение является сюръективным (для любого действительного числа $x$, задающего величину проекции (абсциссу), найдется прообраз, например вектор $\bar{v} = x \cdot \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, имеющий абсциссу $x$). Однако, отображение $\text{пр}_{\bar{i}}$ не является инъективным (разные векторы могут иметь одну и ту же абсциссу). Поэтому отображение не является биективным и, следовательно, обратимым. Отображение $V_3 \to \mathbb{R}$, которое каждому вектору $\bar{v} \in V_3$ ставит в соответствие его длину $|\bar{v}| \in \mathbb{R}$, не является линейным, поскольку не выполняется, например, условие однородности: $|\lambda \cdot \bar{v}| \neq \lambda |\bar{v}|$ для отрицательных $\lambda$.

4. Пусть $P_n(\mathbb{R})$ и $P_{n-1}(\mathbb{R})$ – пространства многочленов с действительными коэффициентами степени не выше $n$ или $(n-1)$ соответственно. Обозначим через $\mathcal{D}(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}$ производную многочлена $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$. Тогда отображение (оператор дифференцирования) $\mathcal{D} : P_n(\mathbb{R}) \to P_{n-1}(\mathbb{R})$ ставит в соответствие каждому многочлену $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$ его производную, т.е. многочлен из пространства $P_{n-1}(\mathbb{R})$. Этот оператор линейный, так как производная суммы равна сумме производных, а производная произведения функции на число равна произведению производной на это число [11]. Оператор дифференцирования не является инъективным (два многочлена, отличающиеся свободными членами имеют одну и ту же производную), является сюръективным (для любого многочлена $p_{n-1}(x)$ имеется прообраз – многочлен из множества первообразных $\int p_{n-1}(x)\,dx + C$, где $C$ – произвольная постоянная). Поэтому оператор дифференцирования не является биективным и, следовательно, обратимым. Оператор интегрирования $\mathcal{I} : P_{n-1}(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$, который многочлену $p_{n-1}(x) \in P_{n-1}(\mathbb{R})$

ставит в соответствие многочлен $p_n(x)=\int\limits_0^x p_{n-1}(t)\,dt$, также является линейным (см. свойства интеграла в [11]). Этот оператор является инъективным (из равенства образов, дифференцируя по верхнему пределу интегрирования, получаем равенство прообразов), не является сюръективным (многочлен с отличным от нуля свободным членом не имеет прообраза). Поэтому оператор интегрирования не является биективным и, следовательно, обратимым.

### Матрица линейного отображения

Пусть $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ – линейное отображение $n$-мерного пространства $\boldsymbol{V}$ в $m$-мерное пространство $\boldsymbol{W}$. Зафиксируем в пространстве $\boldsymbol{V}$ произвольный базис $(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$, а в пространстве $\boldsymbol{W}$ базис $(\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{f}_1,\ldots,\boldsymbol{f}_m)$. Линейное отображение однозначно задается образами базисных векторов (см. свойство 8). Разложим образы $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_i)$, $i=1,\ldots,n$, базисных векторов $(\boldsymbol{e})$ по базису $(\boldsymbol{f})$:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\boldsymbol{f}_j\,,\quad i=1,\ldots,n\,.$$

Из координатных столбцов векторов $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1),\ldots,\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)$ относительно базиса $(\boldsymbol{f})$ составим матрицу размеров $m\times n$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Она называется ***матрицей линейного отображения*** $\mathcal{A}$ ***в базисах*** $(\boldsymbol{e})$ ***и*** $(\boldsymbol{f})$, или ***относительно базисов*** $(\boldsymbol{e})$ ***и*** $(\boldsymbol{f})$. Матрицу отображения обозначают также $\underset{(\boldsymbol{e}),(\boldsymbol{f})}{A}$, чтобы подчеркнуть ее зависимость от выбранных базисов.

Матрица отображения связывает координаты образа $\boldsymbol{w}=\mathcal{A}(\boldsymbol{v})$ и прообраза $\boldsymbol{v}$. *Если* $v=(v_1\ \cdots\ v_n)^T$ *– координатный столбец вектора* $\boldsymbol{v}$, *а* $w=(w_1\ \cdots\ w_m)^T$ *– координатный столбец вектора* $\boldsymbol{w}$ (т.е. $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+\ +\ldots+v_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{w}=w_1\boldsymbol{f}_1+\ldots+w_m\boldsymbol{f}_m$), *то*

$$\begin{pmatrix} w_1\\ \vdots\\ w_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad w=Av\,, \tag{3.2}$$

*где* $A$ *– матрица* (3.1) *отображения* $\mathcal{A}$.

Для нахождения матрицы отображения $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ нужно выполнить следующие действия:

1) задать базисы $(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ и $(\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{f}_1,...,\boldsymbol{f}_m)$ пространств $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ ;

2) найти образ $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1)$ первого базисного вектора и разложить его по базису $(\boldsymbol{f})$. Полученные координаты записать в первый столбец матрицы (3.1) отображения $\mathcal{A}$ ;

3) найти образ $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2)$ второго базисного вектора и разложить его по базису $(\boldsymbol{f})$. Полученные координаты записать во второй столбец матрицы (3.1) отображения и т.д. В последний столбец матрицы (3.1) записать координаты образа $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)$ последнего базисного вектора.

Найдем матрицы отображений, рассмотренных в примерах, приведенных выше.

1. Матрица нулевого отображения $\boldsymbol{O}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ нулевая относительно любых базисов пространств $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ , так как образ любого базисного вектора равен нулевому вектору $\boldsymbol{o}_{\boldsymbol{W}}$ , координаты которого равны нулю (относительно любого базиса пространства $\boldsymbol{W}$ ).

2. Пусть в $n$-мерном векторном пространстве $\boldsymbol{V}$ задан базис $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$. Рассмотрим отображение $æ:\boldsymbol{V}\to\mathbb{R}^n$, которое ставит в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+...+v_n\boldsymbol{e}_n$ его координатный столбец $v=(v_1 \quad \cdots \quad v_n)^T$ относительно заданного базиса. В пространстве $\mathbb{R}^n$ выберем стандартный базис $e_1,\ldots,e_n$ (см. п. 2 примеров базисов в разд. 1). Напомним, что в стандартном базисе координатный столбец вектора $x=(x_1 \quad \cdots \quad x_n)^T$ совпадает с самим столбцом $x$, так как

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+...+x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=x_1\,\boldsymbol{e}_1+x_2\,\boldsymbol{e}_2+...+x_n\,\boldsymbol{e}_n\,.$$

Поэтому образ $æ(\boldsymbol{e}_1)$ первого базисного вектора $\boldsymbol{e}_1$ имеет координатный столбец $e_1=(1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^T$, совпадающий с первым базисным вектором $e_1\in R^n$. Образ $æ(\boldsymbol{e}_2)=e_2$ и т.д. Составляя из этих столбцов матрицу отображения $æ:\boldsymbol{V}\to\mathbb{R}^n$, получаем единичную матрицу $E$ $n$-го порядка.

3. Пусть в трехмерном пространстве $V_3$ геометрических векторов задан стандартный базис $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$. В качестве базиса одномерного векторного пространства $\mathbb{R}$ возьмем единицу.

Рассмотрим отображение $\text{пр}_{\bar{i}} : V_3 \to \mathbb{R}$, где $\text{пр}_{\bar{i}}(\bar{v}) = (\bar{v}, \bar{i})$ – алгебраическое значение длины ортогональной проекции вектора $\bar{v}$ на ось, задаваемую вектором $\bar{i}$, т.е. абсцисса вектора $\bar{v}$. Тогда матрица отображения $\text{пр}_{\bar{i}}$ имеет вид $(1 \quad 0 \quad 0)$, так как $\text{пр}_{\bar{i}}(\bar{i}) = (\bar{i}, \bar{i}) = 1$, а $\text{пр}_{\bar{i}}(\bar{j}) = (\bar{j}, \bar{i}) = 0$, $\text{пр}_{\bar{i}}(\bar{k}) = (\bar{k}, \bar{i}) = 0$.

4. Взяв в пространствах $P_n(\mathbb{R})$ и $P_{n-1}(\mathbb{R})$ стандартные базисы (см. п.5 примеров базисов в разд.1), находим образы базисных векторов (первые производные многочленов):

$$\mathcal{D}(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^{n-1};$$

$$\mathcal{D}(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^{n-1};$$

$$\mathcal{D}(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^{n-1};$$

$$\ldots$$

$$\mathcal{D}(x^n) = n\, x^{n-1} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + n \cdot x^{n-1}.$$

Записывая найденные координаты по столбцам матрицы отображения, получаем матрицу размеров $n \times (n+1)$:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

**Свойства матриц линейных отображений**

При фиксированных базисах векторных пространств:

1) *матрица суммы линейных отображений равна сумме их матриц*;

2) *матрица произведения линейного отображения на число равна произведению матрицы отображения на то же самое число*;

3) *матрица обратного отображения является обратной для матрицы отображения*;

4) *матрица композиции* $\mathcal{C} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ *отображений равна произведению матриц отображений*: $C = BA$.

## Ядро и образ линейного отображения

***Ядром линейного отображения*** $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ называется множество таких векторов $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}_{\boldsymbol{W}}$, т.е. множество векторов из $\boldsymbol{V}$, которые отображаются в нулевой вектор пространства $\boldsymbol{W}$. Ядро отображения $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ обозначается:

$$\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A} = \{\, \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}_{\boldsymbol{W}} \,\}.$$

***Образом линейного отображения*** $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ называется множество образов $\mathcal{A}(\boldsymbol{v})$ всех векторов $\boldsymbol{v}$ из $\boldsymbol{V}$. Образ отображения $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ обозначается $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$:

$$\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A} = \mathcal{A}(\boldsymbol{V}) = \left\{\, \boldsymbol{w} : \boldsymbol{w} = \mathcal{A}(\boldsymbol{v}),\ \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \right\}.$$

Заметим, что символ $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A}$ следует отличать от $\operatorname{Im} z$ – мнимой части комплексного числа.

## Примеры ядер и образов линейных отображений

1. Ядром нулевого отображения $\mathbb{O}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ является все пространство $\boldsymbol{V}$, а образом служит один нулевой вектор, т.е. $\boldsymbol{Ker}\,\mathbb{O} = \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{Im}\,\mathbb{O} = \{\boldsymbol{o}_{\boldsymbol{W}}\}$.

2. Рассмотрим отображение $æ : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}^n$, которое ставит в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{v}$ $n$-мерного векторного пространства $\boldsymbol{V}$ его координатный столбец $v = (v_1 \ \cdots \ v_n)^T$ относительно заданного базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Ядром этого отображения является нулевой вектор $\boldsymbol{o}_{\boldsymbol{V}}$ пространства $\boldsymbol{V}$, поскольку только этот вектор имеет нулевой координатный столбец $æ(\boldsymbol{o}_{\boldsymbol{V}}) = o \in \mathbb{R}^n$. Образ отображения æ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, так как это отображение сюръективно (любой столбец из $\mathbb{R}^n$ является координатным столбцом некоторого вектора пространства $\boldsymbol{V}$).

3. Рассмотрим отображение $\text{пр}_{\bar{i}} : V_3 \to \mathbb{R}$, которое каждому вектору $\bar{v}$ трехмерного пространства $V_3$ геометрических векторов ставит в соответствие алгебраическое значение $\text{пр}_{\bar{i}}(\bar{v}) = (\bar{v}, \bar{i})$ длины его ортогональной проекции на ось, задаваемую вектором $\bar{i}$, т.е. абсциссу вектора $\bar{v}$. Ядром этого отображения является множество векторов $\operatorname{Lin}(\bar{j}, \bar{k})$, перпендикулярных вектору $\bar{i}$. Образом является все множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

4. Рассмотрим отображение $\mathcal{D} : P_n(\mathbb{R}) \to P_{n-1}(\mathbb{R})$, которое каждому многочлену степени не выше $n$ ставит в соответствие его производную. Ядром этого отображения является множество $P_0(\mathbb{R})$ многочленов нулевой степени, а образом – все пространство $P_{n-1}(\mathbb{R})$.

### Свойства ядра и образа линейного отображения

**1.** *Ядро любого линейного отображения* $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *является подпространством*: $\{\boldsymbol{o_V}\} \triangleleft \boldsymbol{Ker}\, \mathcal{A} \triangleleft \boldsymbol{V}$.

**2.** *Образ любого линейного отображения* $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *является подпространством*: $\{\boldsymbol{o_W}\} \triangleleft \boldsymbol{Im}\, \mathcal{A} \triangleleft \boldsymbol{W}$.

Поскольку ядро и образ линейного отображения являются векторными подпространствами (свойства 1 и 2), можно говорить об их размерностях.

***Дефектом линейного отображения*** называется размерность его ядра: $d = \dim(\boldsymbol{Ker}\, \mathcal{A})$, а ***рангом линейного отображения*** – размерность его образа: $\operatorname{rg} \mathcal{A} = r = \dim(\boldsymbol{Im}\, \mathcal{A})$.

**3.** *Ранг линейного отображения равен рангу его матрицы* (*определенной относительно любых базисов*).

**4.** *Линейное отображение* $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *инъективно тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{Ker}\, \mathcal{A} = \{\boldsymbol{o_V}\}$, другими словами, *когда дефект отображения равен нулю*: $d = \dim(\boldsymbol{Ker}\, \mathcal{A}) = 0$.

**5.** *Линейное отображение* $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *сюръективно тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{Im}\, \mathcal{A} = \boldsymbol{W}$, другими словами, *когда ранг отображения равен размерности пространства образов*: $r = \dim(\boldsymbol{Im}\, \mathcal{A}) = \dim \boldsymbol{W}$.

**6.** *Линейное отображение* $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *биективно* (значит, *обратимо*) *тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{Ker}\, \mathcal{A} = \{\boldsymbol{o_V}\}$ и $\boldsymbol{Im}\, \mathcal{A} = \boldsymbol{W}$ *одновременно*.

**7.** *Сумма размерностей ядра и образа любого линейного отображения* $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *равна размерности пространства прообразов*:

$$\dim(\boldsymbol{Ker}\, \mathcal{A}) + \dim(\boldsymbol{Im}\, \mathcal{A}) = \dim \boldsymbol{V}.$$

**8.** *Линейное отображение* $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *биективно* (значит, *обратимо*) *тогда и только тогда*, *когда обратима его матрица* (*определенная относительно любых базисов*). Обратимые линейные отображения называются также ***невырожденными*** (имея в виду невырожденность их матрицы).

**Пример 7.** Отображение $\mathcal{A}: P_1 \to P_2$ пространства $P_1$ многочленов не выше первой степени с действительными коэффициентами в пространство $P_2$ многочленов не выше второй степени определяется для каждого многочлена $p(x) \in P_1$ формулой

$$\mathcal{A}(p(x)) = 2\int_0^x p(t)\,dt + p(x) + 3p'(x).$$

Для отображения $\mathcal{A}$ :

а) выяснить является ли оно инъективным, сюръективным, биективным, обратимым;

б) доказать линейность;

в) найти ядро, образ, дефект, ранг;

г) составить матрицу отображения относительно стандартных базисов.

*Решение*. Выполняем п. б) задания. Отображение $\mathcal{A}$ является линейным по свойствам операций интегрирования и дифференцирования.

Выполняем п. г) задания. Стандартные базисы в пространствах $P_1$ и $P_2$ – это многочлены 1, $x$ и 1, $x$, $x^2$ соответственно. Находим образ базисного многочлена из $P_1$, разлагаем его по базису в $P_2$ и записываем координаты в столбец. Для первого элемента базиса (т.е. для 1) имеем

$$\mathcal{A}(1) = 2\int_0^x 1\,dt + 1 + 3\cdot(1)' = 2x + 1 + 3\cdot 0 = 2x + 1.$$

Разлагаем по базису $2x+1 = 1\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2$ и записываем координаты в столбец $(1 \quad 2 \quad 0)^T$. Для второго элемента базиса (т.е. для $x$) аналогично находим образ

$$\mathcal{A}(x) = 2\int_0^x t\,dt + x + 3(x)' = 2\cdot\frac{x^2}{2} + x + 3\cdot 1 = x^2 + x + 3,$$

разлагаем по базису $x^2 + x + 3 = 3\cdot 1 + 1\cdot x + 1\cdot x^2$ и записываем координаты в столбец $(3 \quad 1 \quad 1)^T$. Из найденных координатных столбцов составляем матрицу отображения

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполняем п. в) задания. Находим все многочлены, отображающиеся в нулевой многочлен $o(x)$. Для этого получим образ произвольного многочлена $p(x)=ax+b$ не выше первой степени.

$$\mathcal{A}(ax+b)=2\int_0^x (at+b)\,dt+ax+b+3(ax+b)'=2a\frac{x^2}{2}+2bx+ax+b+3a=ax^2+(a+2b)x+3a+b.$$

Этот многочлен совпадает с нулевым многочленом, если все его коэффициенты равны нулю, т.е. $a=0$, $a+2b=0$, $3a+b=0$. Отсюда следует, что $a=b=0$. Значит, в нулевой многочлен отображается только нулевой многочлен. Поэтому ядро состоит из одного нулевого многочлена $\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A}=\{o(x)\}$ и дефект $d=\dim(\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A})=0$. Теперь находим образ $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A}$. Из равенства

$$\mathcal{A}(ax+b)=ax^2+(a+2b)x+3a+b=a(x^2+x+3)+b(2x+1)$$

следует, что образ любого многочлена является линейной комбинацией двух многочленов $x^2+x+3$ и $2x+1$. Значит, образ отображения есть линейная оболочка этих двух многочленов, т.е. $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A}=Lin(2x+1,x^2+x+3)$. Так как указанные многочлены линейно независимые, то ранг $r=\dim(\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A})=2$. Для проверки размерностей ядра и образа можно использовать свойства 3 и 7. Действительно, ранг отображения равен рангу его матрицы, т.е. $\dim(\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A})=2=\operatorname{rg}A$, а сумма размерностей ядра и образа равна размерности пространства прообразов: $\dim(\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A})+\dim(\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A})=0+2=2=\dim P_1$.

Выполняем п. а) задания. Отображение является инъективным, так как $\dim(\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A})=0$ (см. свойство 4 ядра и образа). Отображение не является сюръективным, так как $\dim(\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A})=2\neq\dim P_2=3$ (см. свойство 5 ядра и образа). Поскольку отображение не является сюръективным, то оно не является биективным и обратимым.

*Ответ:* Отображение $\mathcal{A}$: а) является инъективным, не является сюръективным, биективным, обратимым; в) $\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A}=\{o(x)\}$, $d=0$; $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A}=Lin(2x+1,x^2+x+3)$, $r=2$; г) $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$.

## 4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

***Линейным преобразованием*** (***линейным оператором***) векторного пространства $\boldsymbol{V}$ называется линейное отображение $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ пространства $\boldsymbol{V}$ в себя.

Поскольку линейное преобразование является частным случаем линейного отображения, к нему применимы все понятия и свойства, рассмотренные для отображений: инъективность, сюръективность, биективность, обратимость, ядро, образ, дефект, ранг и т.д.

***Матрицей линейного преобразования*** $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ ***в базисе*** $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ ***пространства*** $\boldsymbol{V}$ называется квадратная матрица $A$, составленная из координатных столбцов образов базисных векторов $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1),\ldots,\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)$, найденных относительно базиса $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$.

Матрица биективного линейного преобразования обратима, т.е. невырождена. Поэтому биективное (обратимое) преобразование называют также ***невырожденным***.

### Примеры линейных преобразований

1. Обозначим $\mathcal{O}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ – нулевое преобразование $n$-мерного пространства $\boldsymbol{V}$, которое ставит в соответствие любому вектору $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$ нулевой элемент $\boldsymbol{o}$ пространства $\boldsymbol{V}$. Это преобразование не является инъективным, сюръективным, биективным, обратимым. Матрица нулевого преобразования (в любом базисе) нулевая, ядро преобразования $\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{O}=\boldsymbol{V}$, образ преобразования $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{O}=\{\boldsymbol{o}\}$, дефект $d=n$, ранг $r=0$.

2. Обозначим $\mathcal{E}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ – тождественное преобразование $n$-мерного пространства $\boldsymbol{V}$, которое ставит в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$ этот же вектор $\mathcal{E}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$. Это преобразование является инъективным, сюръективным, биективным, обратимым. Матрица тождественного преобразования (в любом базисе) единичная $n$-го порядка, ядро преобразования $\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{E}=\{\boldsymbol{o}\}$, образ преобразования $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{E}=\boldsymbol{V}$, дефект $d=0$, ранг $r=n$.

3. Обозначим $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{o}}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ – ***центральную симметрию*** $n$-мерного пространства $\boldsymbol{V}$ (относительно нулевого вектора $\boldsymbol{o}$), т.е. преобразование, которое каждому вектору ставит в соответствие противоположный ему вектор: $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{v}$. Это преобразование линейное, инъективное, сюръективное, биективное, обратимое. Матрица преобразования противоположна единичной (в любом базисе): $Z_{\boldsymbol{o}}=-E$, ядро преобразования $\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{Z}_{\boldsymbol{o}}=\{\boldsymbol{o}\}$, образ преобразования $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{Z}_{\boldsymbol{o}}=\boldsymbol{V}$, дефект $d=0$, ранг $r=n$.

4. Обозначим $\mathcal{H}_{\lambda}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ – ***гомотетию*** $n$-мерного пространства $\boldsymbol{V}$ (с коэффициентом $\lambda$), т.е. преобразование, которое каждому вектору ставит в соответствие коллинеарный ему вектор: $\mathcal{H}_{\lambda}(\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{v}$. Это преобразование линейное. При $\lambda\ne 0$ оно инъективное, сюръектив-

ное, биективное, обратимое. Матрица преобразования пропорциональна единичной (в любом базисе): $\mathcal{H}_\lambda = \lambda \cdot E$, ядро преобразования $\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{H}_\lambda = \{\boldsymbol{o}\}$, образ преобразования $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{H}_\lambda = \boldsymbol{V}$, дефект $d = 0$, ранг $r = n$. При $\lambda = 0$: $\mathcal{H}_0 = \mathcal{O}$ (см. п.1); при $\lambda = 1$: $\mathcal{H}_1 = \mathcal{E}$ (см. п.2); при $\lambda = -1$: $\mathcal{H}_{(-1)} = \mathcal{Z}_{\boldsymbol{o}}$ (см. п.3).

5. Рассмотрим векторное пространство $V_2$ радиусов-векторов (с общим началом в точке $O$), принадлежащих одной плоскости (рис. 4.1). Обозначим $\mathcal{R}_\varphi : V_2 \to V_2$ – поворот вокруг точки $O$ (на угол $\varphi$ в положительном направлении (против часовой стрелки)). Это преобразование линейное, инъективное, сюръективное, биективное, обратимое. Найдем матрицу поворота в стандартном ортонормированном базисе $\bar{i}, \bar{j}$. Раскладывая образы $\bar{i}' = \mathcal{R}_\varphi(\bar{i})$, $\bar{j}' = \mathcal{R}_\varphi(\bar{j})$ базисных векторов по базису, получаем

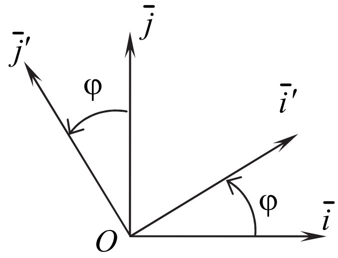


Рис. 4.1

$$\bar{i}' = \cos\varphi \cdot \bar{i} + \sin\varphi \cdot \bar{j},$$
$$\bar{j}' = -\sin\varphi \cdot \bar{i} + \cos\varphi \cdot \bar{j}.$$

Составляем матрицу (3.1) преобразования, записывая найденные координаты образов по столбцам:

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Ядро преобразования $\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{R}_\varphi = \{\bar{o}\}$, образ преобразования $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{R}_\varphi = V_2$, дефект $d = 0$, ранг $r = 2$. При $\varphi = 2\pi k$, $k \in Z$: $\mathcal{R}_{2\pi k} = \mathcal{E}$ (см. п. 2); при $\varphi = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$: $\mathcal{R}_{\pi+2\pi k} = \mathcal{Z}_{\boldsymbol{o}}$ (см. п.3).

6. Обозначим $\mathcal{D} : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ – оператор дифференцирования, который каждому многочлену степени не выше $n$ ставит в соответствие его производную, рассматриваемую как многочлен степени не выше $n$: $\mathcal{D}(p(x)) = p'(x)$. Это преобразование линейное, неинъективное, несюръективное, небиективное, необратимое. Квадратная матрица ($(n+1)$-го порядка) преобразования в стандартном базисе имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ядро преобразования $\boldsymbol{Ker}\ \mathcal{D} = P_0(\mathbb{R})$ – пространство многочленов нулевой степени, образ $\boldsymbol{Im}\ \mathcal{D} = P_{n-1}(\mathbb{R})$ – пространство многочленов степени не выше $(n-1)$, дефект $d=1$, ранг $r=n$, $\dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$.

**Матрицы линейного преобразования в разных базисах**

Укажем связь матриц одного и того же линейного преобразования в разных базисах.

*Пусть в базисе* $(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ *преобразование* $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ *имеет матрицу* $\underset{(\boldsymbol{e})}{A}$ *, а в базисе* $(\boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{f}_1,...,\boldsymbol{f}_n)$ *– матрицу* $\underset{(\boldsymbol{f})}{A}$ *. Если* $S$ *– матрица перехода от базиса* $(\boldsymbol{e})$ *к базису* $(\boldsymbol{f})$*, то*

$$\underset{(\boldsymbol{f})}{A} = S^{-1} \underset{(\boldsymbol{e})}{A}\, S\,. \tag{4.1}$$

Эта формула показывает, что матрицы линейного преобразования в разных базисах оказываются *подобными* (см. разд.6 в [7]). И наоборот, любые две подобные матрицы являются матрицами некоторого линейного преобразования, найденными относительно разных базисов.

Для матриц преобразований справедливы свойства, рассмотренные в разд. 3.

**Пример 8.** Преобразование $\mathcal{A}: V_3 \to V_3$ пространства $V_3$ – геометрических векторов представляет собой ортогональное проектирование на ось, содержащую вектор $\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ . Для этого преобразования:

а) выяснить является ли оно инъективным, сюръективным, биективным, обратимым;

б) доказать линейность;

в) найти ядро, образ, дефект, ранг;

г) составить матрицу $A$ преобразования относительно стандартного базиса.

*Решение*. Выполняем п. а) задания. Преобразование проектирования не является сюръективным, так как образы всех векторов принадлежат оси проекции (все образы коллинеарны вектору $\bar{d} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ ). Поэтому, например, вектор $\bar{i}$ не имеет прообраза. Так как преобразование не сюръективное, то оно не будет биективным и обратимым. Покажем, что это преобразование не является инъективным. В самом деле, вектор $\bar{d} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ имеет равные направляющие косинусы $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому ортогональные проекции векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ совпадают с вектором $\overline{OH}$ (см. рис. 4.2). Иначе говоря, разные прообразы имеют один и тот же образ.

Выполняем п. б) з а д а н и я. Линейность преобразования проектирования следует из свойств проекций (см. в разд. 1.2.2 в [4]), поскольку проекция суммы векторов равна сумме их проекций, а проекция произведения вектора на число равна произведению проекции этого вектора на число.

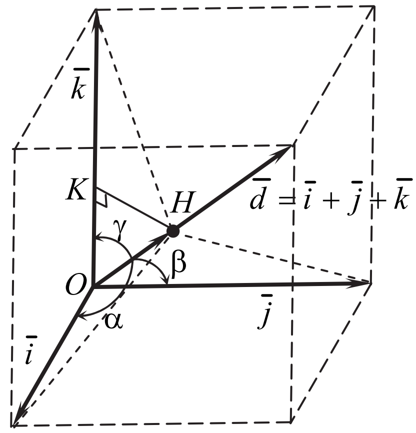


Рис. 4.2

Выполняем п. г) з а д а н и я. Составляем матрицу линейного преобразования $\mathcal{A}$. Для этого находим координаты вектора $\overline{OH}$ (см. рис. 4.2). Напомним, что этот вектор является образом базисных векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$: $\overline{OH}=\mathcal{A}(\overline{i})=\mathcal{A}(\overline{j})=\mathcal{A}(\overline{k})$. Находим аппликату точки $H$. Опустим из точки $H$ перпендикуляр $HK$ на ось аппликат. Так как $OH=|\overline{k}|\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $OK=OH\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$. Абсцисса и ордината точки $H$ имеют ту же величину, так как ось проекции образует равные углы с координатными осями. Значит, $\overline{OH}=\frac{1}{3}\overline{i}+\frac{1}{3}\overline{j}+\frac{1}{3}\overline{k}$. Отсюда $\mathcal{A}(\overline{i})=\mathcal{A}(\overline{j})=\mathcal{A}(\overline{k})=\frac{1}{3}\overline{i}+\frac{1}{3}\overline{j}+\frac{1}{3}\overline{k}$. Составляем из координатных столбцов матрицу преобразования $\mathcal{A}$: $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Выполняем п. в) з а д а н и я. Находим ядро и образ преобразования. При ортогональном проектировании все векторы перпендикулярные оси, содержащей вектор $\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$, будут преобразовываться в нулевой. Значит, ядро преобразования можно представить как линейную оболочку двух неколлинеарных векторов, например $\overline{i}-\overline{j}$ и $\overline{i}-\overline{k}$, перпендикулярных вектору $\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$, т.е. $\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A}=Lin(\overline{i}-\overline{j},\overline{i}-\overline{k})$. Тогда дефект преобразования $d=\dim(\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A})=2$. Образ преобразования составляют векторы, лежащие на оси проекции, значит, $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A}=Lin(\overline{i}+\overline{j}+\overline{k})$, поэтому ранг преобразования $r=\dim(\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A})=1$.

*Ответ:* а) преобразование $\mathcal{A}$ не является инъективным, сюръективным, биективным, обратимым; в) $\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A}=Lin(\overline{i}-\overline{j},\overline{i}-\overline{k})$, $d=2$; $\boldsymbol{Im}\mathcal{A}=Lin(\overline{i}+\overline{j}+\overline{k})$, $r=1$; г) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

## 5. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Пусть $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ – линейное преобразование векторного пространства $\boldsymbol{V}$. Векторное подпространство $\boldsymbol{L} \triangleleft \boldsymbol{V}$ называется ***инвариантным*** относительно преобразования $\mathcal{A}$, если образ любого вектора из $\boldsymbol{L}$ принадлежит подпространству $\boldsymbol{L}$, т.е. $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{L} \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}$. Другими словами, инвариантное подпространство $\boldsymbol{L}$ включает свой образ $\mathcal{A}(\boldsymbol{L})$: $\mathcal{A}(\boldsymbol{L}) \subset \boldsymbol{L}$. Нулевое подпространство $\{\boldsymbol{o}\}$ и все пространство $\boldsymbol{V}$ являются инвариантными подпространствами для любого линейного преобразования $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

Пусть $\boldsymbol{L}$ – инвариантное подпространство относительно преобразования $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$. Линейный оператор $\mathcal{A}: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$, рассматриваемый как линейное преобразование пространства $\boldsymbol{L}$ в себя, называется ***сужением*** (***ограничением***) ***линейного преобразования*** $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ ***на инвариантное подпространство*** $\boldsymbol{L} \triangleleft \boldsymbol{V}$ и обозначается $\mathcal{A}_{\boldsymbol{L}}: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$, или $\mathcal{A}\big|_{\boldsymbol{L}}: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$. Для всех векторов $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}$ выполняется равенство $\mathcal{A}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{v})$, т.е. $\forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}$ образы, порождаемые оператором $\mathcal{A}$ и его сужением $\mathcal{A}_{\boldsymbol{L}}$, совпадают.

### Примеры инвариантных подпространств

Рассмотрим инвариантные подпространства линейных преобразований, определенных в разд.4.

1. Для нулевого преобразования $\mathcal{O}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ любое подпространство $\boldsymbol{L} \triangleleft \boldsymbol{V}$ является инвариантным, так как $\mathcal{O}(\boldsymbol{L}) = \{\boldsymbol{o}\} \subset \boldsymbol{L}$. Сужение нулевого преобразования $\mathcal{O}_{\boldsymbol{L}}: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$ является нулевым преобразованием.

2. Для тождественного преобразования $\mathcal{E}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ любое подпространство $\boldsymbol{L} \triangleleft \boldsymbol{V}$ является инвариантным, так как $\mathcal{E}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$. Сужение тождественного преобразования $\mathcal{E}_{\boldsymbol{L}}: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$ является тождественным преобразованием.

3. Для центральной симметрии $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{o}}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ любое подпространство $\boldsymbol{L} \triangleleft \boldsymbol{V}$ является инвариантным, так как $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$. Сужение центральной симметрии $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{o}}\big|_{\boldsymbol{L}}: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$ является центральной симметрией.

4. Для гомотетии $\mathcal{H}_{\lambda}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ любое подпространство $\boldsymbol{L} \triangleleft \boldsymbol{V}$ является инвариантным, так как $\mathcal{H}_{\lambda}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$ (при $\lambda \neq 0$). Сужение гомотетии $\mathcal{H}_{\lambda}\big|_{\boldsymbol{L}}: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$ является гомотетией.

5. Для поворота $\mathcal{R}_\varphi : V_2 \to V_2$ плоскости (при $\varphi \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) имеются два инвариантных подпространства: нулевое $\{\overline{o}\}$ и вся плоскость $V_2$. Других инвариантных подпространств нет.

6. Для оператора дифференцирования $\mathcal{D} : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ каждое из подпространств $\{o(x)\} \lhd P_0(\mathbb{R}) \lhd P_1(\mathbb{R}) \lhd \ldots \lhd P_n(\mathbb{R})$ является инвариантным, так как при дифференцировании степень многочлена уменьшается.

7. Рассмотрим оператор $\Pi_{\boldsymbol{L}_1} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ проектирования на подпространство $\boldsymbol{L}_1$ параллельно подпространству $\boldsymbol{L}_2$. Здесь $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}_1 \oplus \boldsymbol{L}_2$, $\Pi_{\boldsymbol{L}_1}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1$ для $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{L}_2$. Для этого оператора подпространства $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ инвариантные, так как $\Pi_{\boldsymbol{L}_1}(\boldsymbol{L}_1) = \boldsymbol{L}_1$ и $\Pi_{\boldsymbol{L}_1}(\boldsymbol{L}_2) = \{\boldsymbol{o}\} \subset \boldsymbol{L}_2$. Сужение оператора проектирования на подпространство $\boldsymbol{L}_1$ является тождественным преобразованием $\Pi_{\boldsymbol{L}_1}\Big|_{\boldsymbol{L}_1} = \mathcal{E}$, а сужение на подпространство $\boldsymbol{L}_2$ – нулевым $\Pi_{\boldsymbol{L}_1}\Big|_{\boldsymbol{L}_2} = \mathcal{O}$.

8. Рассмотрим оператор $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{L}_1} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ отражения в подпространстве $\boldsymbol{L}_1$ параллельно подпространству $\boldsymbol{L}_2$. Здесь $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}_1 \oplus \boldsymbol{L}_2$, $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{L}_1}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ для $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{L}_2$. Для этого оператора подпространства $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ инвариантные, так как $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{L}_1}(\boldsymbol{L}_1) = \boldsymbol{L}_1$ и $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{L}_1}(\boldsymbol{L}_2) = \boldsymbol{L}_2$. Сужение оператора отражения на подпространство $\boldsymbol{L}_1$ является тождественным преобразованием $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{L}_1}\Big|_{\boldsymbol{L}_1} = \mathcal{E}$, а сужение на подпространство $\boldsymbol{L}_2$ – центральной симметрией $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{L}_1}\Big|_{\boldsymbol{L}_2} = \mathcal{Z}_{\boldsymbol{o}}$, так как $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{L}_1}\Big|_{\boldsymbol{L}_2}(\boldsymbol{v}_2) = -\boldsymbol{v}_2$.

9. В пространстве $V_3$ радиус-векторов пространства, отложенных от фиксированной точки $O$, рассмотрим поворот на угол $\varphi \neq \pi k, k \in Z$, вокруг оси $l$, заданной радиус-вектором $\bar{l}$. Подпространство $L = Lin(\bar{l})$ инвариантно относительно этого преобразования, так как любой вектор, принадлежащий $L$, не изменяется в результате поворота, т.е. отображается в себя. Подпространство $\Pi = L^{\perp}$ – радиус-векторов, принадлежащих плоскости, перпендикулярной оси вращения, также инвариантное, так как в результате поворота все эти радиус-векторы остаются в той же плоскости.

**Свойства инвариантных подпространств**

**1.** *Если* $\boldsymbol{L}$ *– инвариантное подпространство относительно обратимого линейного преобразования* $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$*, то его сужение* $\mathcal{A}_{\boldsymbol{L}}:\boldsymbol{L}\to\boldsymbol{L}$ *также обратимое линейное преобразование.*

**2.** *Для любого линейного преобразования* $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ *ядро* $\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A}$ *и образ* $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A}$ *являются инвариантными подпространствами*, так как $\mathcal{A}(\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A})=\{\boldsymbol{o}\}\triangleleft\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}(\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A})\triangleleft\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A}$.

**3.** *Если* $\boldsymbol{L}$ *– инвариантное подпространство относительно линейного преобразования* $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$*, то* $\boldsymbol{L}$ *– инвариантно относительно любой натуральной степени этого преобразования, причем*

$$\mathcal{A}^m(\boldsymbol{L})\triangleleft\ldots\triangleleft\mathcal{A}(\boldsymbol{L})\triangleleft\mathcal{E}(\boldsymbol{L})=\boldsymbol{L}.$$

**4.** *Если* $\boldsymbol{L}$ *– инвариантное подпространство относительно линейного преобразования* $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$*, то* $\boldsymbol{L}$ *– инвариантно относительно любого многочлена от этого преобразования.*

**Теорема (о матрицах оператора и его сужения на инвариантное подпространство).** *Пусть* $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ *– линейное преобразование* $n$*-мерного пространства* $\boldsymbol{V}$*, а* $\boldsymbol{L}$ *– подпространство, инвариантное относительно преобразования* $\mathcal{A}$*. Тогда существует базис* $(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ *пространства* $\boldsymbol{V}$*, в котором матрица* $A$ *преобразования* $\mathcal{A}$ *имеет нулевой угол:*

$$A=\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline O & D \end{array}\right),$$

*где* $B$ *– матрица сужения* $\mathcal{A}_{\boldsymbol{L}}$ *преобразования* $\mathcal{A}$ *на подпространство* $\boldsymbol{L}$*,* $O$ *– нулевая матрица размеров* $(n-l)\times l$*,* $l=\dim\boldsymbol{L}$. И наоборот, *если в некотором базисе* $(\boldsymbol{e})$ *матрица* $A$ *преобразования* $\mathcal{A}$ *имеет нулевой угол (нулевую матрицу* $O$ *размеров* $(n-l)\times l$*), то преобразование* $\mathcal{A}$ *имеет* $l$*-мерное инвариантное подпространство.*

**Следствие.** *Если* $n$*-мерное пространство* $\boldsymbol{V}$ *представлено в виде прямой суммы ненулевых инвариантных относительно преобразования* $\mathcal{A}$ *подпространств*

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{L}_1\oplus\ldots\oplus\boldsymbol{L}_k,$$

*то существует базис, в котором матрица преобразования имеет блочно-диагональный вид*

$$A = diag(A_1,\dots,A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_k \end{pmatrix},$$

*где* $A_i$ *– матрица сужения* $\mathcal{A}_{\boldsymbol{L}_i}$ *преобразования* $\mathcal{A}$ *на подпространство* $\boldsymbol{L}_i$, $i = 1,\dots,k$.

**Теорема (об инвариантных подпространствах линейного преобразования вещественного пространства).** *У всякого линейного преобразования вещественного векторного пространства существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

## Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

Пусть $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ – линейное преобразование $n$-мерного векторного пространства $\boldsymbol{V}$. Ненулевой вектор $\boldsymbol{s}$ векторного пространства $\boldsymbol{V}$, удовлетворяющий условию

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{s}) = \lambda \boldsymbol{s}, \tag{5.1}$$

называется ***собственным вектором линейного преобразования*** $\mathcal{A}$. Число $\lambda$ в равенстве (5.1) называется ***собственным значением преобразования*** $\mathcal{A}$. Говорят, что собственный вектор ***соответствует*** (***принадлежит***) ***собственному значению*** $\lambda$. Если пространство $\boldsymbol{V}$ вещественное (комплексное), то собственное значение $\lambda$ – действительное (комплексное) число.

Множество всех собственных значений линейного преобразования называется его ***спектром***.

Геометрический смысл собственных векторов заключается в следующих свойствах.

1. *Ненулевой вектор* $\boldsymbol{s}$ *является собственным для преобразования* $\mathcal{A}$, *если его образ* $\mathcal{A}(\boldsymbol{s})$ *коллинеарен прообразу* $\boldsymbol{s}$.

2. *Если* $\boldsymbol{s}$ *– собственный вектор, то преобразование* $\mathcal{A}$ *имеет одномерное инвариантное подпространство* $Lin(\boldsymbol{s})$, *и наоборот.*

## Примеры собственных векторов

1. Для нулевого преобразования $\mathcal{O}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ любой ненулевой вектор $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{V}$ является собственным, соответствующим нулевому собственному значению $\lambda = 0$, так как $\mathcal{O}(\boldsymbol{s}) = 0 \cdot \boldsymbol{s}$ $\forall \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{V}$.

2. Для тождественного преобразования $\mathcal{E}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ любой ненулевой вектор $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{V}$ является собственным, соответствующим единичному собственному значению $\lambda = 1$, так как $\mathcal{E}(\boldsymbol{s}) = 1 \cdot \boldsymbol{s}$ $\quad \forall \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{V}$.

3. Для центральной симметрии $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{o}}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ любой ненулевой вектор $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{V}$ является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda = -1$, так как $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{s}) = (-1)\boldsymbol{s} \quad \forall \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{V}$.

4. Для гомотетии $\mathcal{H}_{\lambda}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ любой ненулевой вектор $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{V}$ является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda$ (коэффициенту гомотетии), так как $\mathcal{H}_{\lambda}(\boldsymbol{s}) = \lambda \cdot \boldsymbol{s}$ $\forall \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{V}$.

5. Для поворота $\mathcal{R}_{\varphi}: V_2 \to V_2$ плоскости (при $\varphi \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) собственных векторов нет, так как при повороте на угол, не кратный $\pi$, образ каждого ненулевого вектора неколлинеарен прообразу. Здесь рассматривается поворот вещественной плоскости, т.е. двумерного векторного пространства над полем действительных чисел.

6. Для оператора дифференцирования $\mathcal{D}: P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ любой ненулевой многочлен нулевой степени (не равный тождественно нулю) является собственным вектором, соответствующим нулевому собственному значению $\lambda = 0$, так как $\mathcal{D}(s(x)) = 0 \cdot s(x) \quad \forall\, s(x) \equiv \mathrm{const}$. Любой многочлен ненулевой степени не является собственным вектором, так как многочлен не пропорционален своей производной: $\mathcal{D}(s(x)) = s'(x) \neq \lambda\, s(x)$, поскольку они имеют разные степени.

7. Рассмотрим оператор $\Pi_{\boldsymbol{L}_1}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ проектирования на подпространство $\boldsymbol{L}_1$ параллельно подпространству $\boldsymbol{L}_2$. Здесь $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}_1 \oplus \boldsymbol{L}_2$, $\Pi_{\boldsymbol{L}_1}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1$ для $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{L}_2$. Для этого оператора любой ненулевой вектор $\boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{L}_1$ является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda = 1$, так как $\Pi_{\boldsymbol{L}_1}(\boldsymbol{v}_1) = 1 \cdot \boldsymbol{v}_1$, а любой ненулевой вектор $\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{L}_2$ является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda = 0$, так как $\Pi_{\boldsymbol{L}_2}(\boldsymbol{v}_2) = 0 \cdot \boldsymbol{v}_2$. Другие векторы не являются собственными, так как равенство $\Pi_{\boldsymbol{L}_1}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 = \lambda(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$ возможно либо при $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{o}$, либо при $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{o}$.

8. Рассмотрим оператор $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{L}_1}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ отражения в подпространстве $\boldsymbol{L}_1$ параллельно подпространству $\boldsymbol{L}_2$. Здесь $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}_1 \oplus \boldsymbol{L}_2$, $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{L}_1}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ для $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{L}_2$. Для этого оператора любой ненулевой вектор $\boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{L}_1$ является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda = 1$, так как $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{L}_1}(\boldsymbol{v}_1) = 1 \cdot \boldsymbol{v}_1$, а любой ненулевой вектор $\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{L}_2$ является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda = -1$, так как

$\mathcal{Z}_{\boldsymbol{L}_2}(\boldsymbol{v}_2) = (-1)\boldsymbol{v}_2$. Другие векторы не являются собственными, так как равенство $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{L}_1}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \lambda(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$ возможно либо при $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{o}$, либо при $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{o}$.

9. В пространстве $V_3$ радиус-векторов пространства, отложенных от фиксированной точки $O$, рассмотрим поворот на угол $\varphi \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, вокруг оси $l$, заданной радиус-вектором $\bar{l}$. Любой ненулевой вектор, коллинеарный вектору $\bar{l}$, является собственным, отвечающим собственному значению $\lambda = 1$. Других собственных векторов у этого преобразования нет.

### Нахождение собственных векторов и собственных значений линейного преобразования

Для нахождения собственных векторов и собственных значений линейного преобразования $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ вещественного векторного пространства $\boldsymbol{V}$ следует выполнить следующие действия.

1. Выбрать произвольный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ векторного пространства $\boldsymbol{V}$ и найти матрицу $A$ преобразования $\mathcal{A}$ относительно этого базиса.

2. Составить ***характеристический многочлен преобразования*** $\mathcal{A}$:

$$\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

3. Найти все различные действительные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ характеристического уравнения $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$. Эти корни являются собственными значениями преобразования. Комплексные с ненулевой мнимой частью корни характеристического уравнения следует отбросить.

4. Для корня $\lambda = \lambda_1$ найти фундаментальную систему $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ решений однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_1 E)x = o,$$

где $r = \mathrm{rg}\,(A - \lambda_1 E)$. Для этого можно использовать либо алгоритм решения однородной системы, либо один из способов нахождения фундаментальной матрицы (см. разд. 5 в [7]).

5. Записать линейно независимые собственные векторы преобразования $\mathcal{A}$, отвечающие собственному значению $\lambda_1$:

$$\boldsymbol{s}_1 = \varphi_{11}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \varphi_{n1}\boldsymbol{e}_n,$$

$$\boldsymbol{s}_2 = \varphi_{12}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \varphi_{n2}\boldsymbol{e}_n,$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{s}_{n-r} = \varphi_{1\,n-r}\,\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \varphi_{n\,n-r}\,\boldsymbol{e}_n.$$

Для нахождения совокупности всех собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_1$, образовать ненулевые линейные комбинации

$$\boldsymbol{s} = C_1\boldsymbol{s}_1 + C_2\boldsymbol{s}_2 + \ldots + C_{n-r}\boldsymbol{s}_{n-r},$$

где $C_1, \ldots, C_{n-r}$ – произвольные постоянные, не равные нулю одновременно.

Повторить п. 4, 5 для остальных собственных значений $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Для нахождения собственных векторов линейного преобразования комплексного векторного пространства нужно в п. 3 определить все корни характеристического уравнения и, не отбрасывая комплексные корни, выполнить для них п. 4, 5.

## Свойства собственных векторов

**1.** *Собственные векторы линейного преобразования, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы.*

**2.** *Все собственные векторы линейного преобразования $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, принадлежащие одному собственному значению, совместно с нулевым вектором образуют векторное подпространство, инвариантное относительно преобразования $\mathcal{A}$.* Такое векторное подпространство называется ***собственным*** для преобразования $\mathcal{A}$. Собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda$, является ядром $\boldsymbol{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ линейного преобразования $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$.

**3.** *Для собственного значения $\lambda$ линейного преобразования $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ существует цепочка инвариантных подпространств*

$$\{\boldsymbol{o}\} \lhd \boldsymbol{K}_\lambda^1 \lhd \boldsymbol{K}_\lambda^2 \lhd \ldots \lhd \boldsymbol{K}_\lambda^m \lhd \boldsymbol{V}, \tag{5.2}$$

*где* $\boldsymbol{K}_\lambda^1 = \boldsymbol{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$, $\boldsymbol{K}_\lambda^2 = \boldsymbol{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2, \ldots,$ $\boldsymbol{K}_\lambda^m = \boldsymbol{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m$; *$m$ – наименьшее натуральное число $m$ ($m \le n = \dim \boldsymbol{V}$), для которого* $\boldsymbol{K}_\lambda^m = \boldsymbol{K}_\lambda^{m+1}$.

Для собственного значения $\lambda$ линейного преобразования $\mathcal{A}$ цепочка (5.2) начинается (не считая $\{\boldsymbol{o}\}$) с собственного подпространства $\boldsymbol{K}_\lambda^1 = \boldsymbol{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ и заканчивается ***корневым подпространством*** $\boldsymbol{K}_\lambda^m = \boldsymbol{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m$.

**Теорема (о разложении пространства в сумму корневых подпространств).** *Если все различные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ характеристического уравнения линейного преобразования $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ являются его собственными значениями, то пространство $\boldsymbol{V}$ можно разложить в прямую сумму инвариантных* (*корневых*) *подпространств*:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{K}_{\lambda_1}^{m_1} \oplus ... \oplus \boldsymbol{K}_{\lambda_k}^{m_k}, \qquad (5.3)$$

*где* $\boldsymbol{K}_{\lambda_i}^{m_i} = \boldsymbol{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{m_i}$ *– корневое подпространство, соответствующее собственному значению* $\lambda_i$, $i = 1,...,k$.

**Следствие.** *Если все различные корни* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *характеристического уравнения линейного преобразования* $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ *являются его собственными значениями, то существует базис пространства* $\boldsymbol{V}$, *в котором матрица* $A$ *линейного преобразования имеет блочно-диагональный вид*

$$A = diag(A_1, ..., A_k),$$

*где* $A_1, ..., A_k$ *– матрицы сужений* $\mathcal{A}_{K_{\lambda_i}^{m_i}} : K_{\lambda_i}^{m_i} \to K_{\lambda_i}^{m_i}$, $i = 1,...,k$, *преобразования* $\mathcal{A}$ *на корневые подпространства.*

Согласно следствию из теоремы о матрицах оператора и его сужения на инвариантное подпространство, такой базис можно получить, записывая последовательно базисы корневых подпространств (5.3).

### Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений

***Алгебраической кратностью собственного значения*** $\lambda_1$ линейного преобразования $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ называется кратность корня $\lambda = \lambda_1$ характеристического многочлена $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)$ (или, что то же самое, кратность корня характеристического уравнения $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$).

***Геометрической кратностью собственного значения*** $\lambda_1$ линейного преобразования $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ называется размерность собственного подпространства $\boldsymbol{K}_{\lambda}^{1} = \boldsymbol{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$, соответствующего этому собственному значению.

**Теорема (о кратностях собственных значений).** *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

**Пример 9.** Преобразование $\mathcal{A}: V_3 \to V_3$ пространства $V_3$ – геометрических векторов представляет собой ортогональное проектирование на ось, содержащую вектор $\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$. Для этого преобразования:

а) найти собственные векторы и собственные значения;

б) определить алгебраическую и геометрическую кратности собственных значений;

в) указать одномерные и двумерные инвариантные подпространства.

*Решение.* Выполняем п. а) з а д а н и я. Используем алгоритм нахождения собственных векторов и собственных значений линейного преобразования.

1. Выбираем стандартный базис $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ пространства $V_3$ и составляем матрицу $A$ преобразования (см. п. г) решение примера 8).

2. Вычисляем определитель

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix}=\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)^2+\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)=-\lambda^3+\lambda^2$$

и составляем характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$: $-\lambda^3+\lambda^2=0$.

3. Уравнение имеет два корня $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$. Эти вещественные корни является собственными значениями преобразования $\mathcal{A}$.

$4^1$. Для корня $\lambda_1=0$ находим фундаментальную систему решений однородной системы $(A-\lambda_1 E)x=o \;\Leftrightarrow\; Ax=o$. Составляем расширенную матрицу системы и приводим ее к упрощенному виду (удаляя нулевые строки)

$$(A\mid o)=\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)\sim(1\quad 1\quad 1\mid 0).$$

Выражаем базисную переменную $x_1$ через свободные: $x_1=-x_2-x_3$. Придавая свободным переменным стандартные значения $x_2=1$, $x_3=0$ или $x_2=0$, $x_3=1$ получаем фундаментальную систему решений $\varphi_1=(-1\quad 1\quad 0)^T$, $\varphi_2=(-1\quad 0\quad 1)^T$.

$5^1$. Решениям $\varphi_1=(-1\quad 1\quad 0)^T$ и $\varphi_2=(-1\quad 0\quad 1)^T$ соответствуют собственные векторы $\bar{s}_1=-\bar{i}+\bar{j}$ и $\bar{s}_2=-\bar{i}+\bar{k}$. Все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=0$ имеют вид $\bar{s}=C_1(-\bar{i}+\bar{j})+C_2(-\bar{i}+\bar{k})$, где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные, не равные нулю одновременно. Все эти векторы $\bar{s}$ перпендикулярны оси проекции.

Повторяем п. 4,5 для собственного значения $\lambda_2=1$.

$4^2$. Для корня $\lambda_2 = 1$ находим фундаментальную систему решений однородной системы $(A - \lambda_1 E)x = o \Leftrightarrow (A - E)x = o$. Составляем расширенную матрицу системы и приводим ее к упрощенному виду (удаляя нулевые строки)

$$(A - E \mid o) = \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{1} & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{3} & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Общее решение этой системы $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$, а фундаментальная система состоит из одного решения, например, $\varphi_3 = (1 \quad 1 \quad 1)^T$.

$5^2$. Решению $\varphi_3 = (1 \quad 1 \quad 1)^T$ соответствуют собственный вектор $\bar{s}_3 = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$. Все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 1$ имеют вид $\bar{s} = C_3(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$, где $C_3$ – не равная нулю произвольная постоянная.

Выполняем п. б) задания. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2(1-\lambda) = 0$. Значит, алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 0$ равна 2, так как этот корень двойной, а кратность корня $\lambda_2 = 1$ равна 1, так как этот корень простой. Геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 0$ равна 2, так как для этого корня были найдены два линейно независимых собственных вектора $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$. В этом случае размерность собственного подпространства $\boldsymbol{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) = Lin(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ равна 2. Для $\lambda_2 = 1$ был найден только один линейно независимый собственный вектор $\bar{s}_3$. Поэтому $\boldsymbol{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E}) = Lin(\bar{s}_3)$. Значит, геометрическая кратность $\lambda_1 = 2$ равна 1.

Выполняем п. в) задания. Для любого линейного преобразования одномерными инвариантными подпространствами являются линейные оболочки каждого собственного вектора (и только они). Любой ненулевой вектор $\bar{s}$, перпендикулярный оси проекции ($\bar{s} \perp \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$) порождает одномерное инвариантное подпространство $Lin(\bar{s})$. В свою очередь, вектор $\bar{s}_3 = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ также порождает одномерное инвариантное подпространство $Lin(\bar{s}_3)$. Находим двумерные инвариантные подпространства. Пусть $\Pi$ – множество векторов принадлежащих или параллельных некоторой плоскости. Если эта плоскость содержит ось проектирования или перпендикулярна ей, то проекция любого вектора из $\Pi$ принадлежит множеству $\Pi$, т.е. $\mathcal{A}(\Pi)\subset\Pi$, что означает инвариантность подпространства $\Pi$. Если плоскость образует с осью острый угол, то проекции некоторых векторов из $\Pi$ на ось не будут принадлежать множеству $\Pi$, т.е. $\mathcal{A}(\Pi)\not\subset\Pi$. Значит, такое множество $\Pi$ не будет инвариантным. Таким образом, двумерные инвариантные подпространства можно представить, например, в виде $Lin(\bar{s},\bar{s}_3)$ или $Lin(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$, где $\bar{s}_1=-\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{s}_2=-\bar{i}+\bar{k}$, $\bar{s}_3=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ – найденные в п. б) собственные векторы, а $\bar{s}$ – любой ненулевой вектор, перпендикулярный $\bar{s}_3$ (он тоже собственный). Заметим, что в среди найденных инвариантных подпространств имеются ядро $\boldsymbol{Ker}\,\mathcal{A}=Lin(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ и образ $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A}=Lin(\bar{s}_3)$ преобразования, поскольку эти подпространства инвариантные.

*Ответ:* а) собственному значению $\lambda_1=0$ соответствуют собственные векторы $\bar{s}=C_1\bar{s}_1+C_2\bar{s}_2$, где $\bar{s}_1=-\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{s}_2=-\bar{i}+\bar{k}$, $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные, не равные нулю одновременно; собственному значению $\lambda_2=1$ соответствуют собственные векторы $\bar{s}=C_3\bar{s}_3$, где $\bar{s}_3=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$, $C_3$ – не равная нулю произвольная постоянная; б) собственное значение $\lambda_1=0$ имеет алгебраическую и геометрическую кратности, равные 2, собственное значение $\lambda_2=1$ имеет кратности, равные 1; в) одномерные инвариантные подпространства: $Lin(\bar{s}_3)$, $Lin(\bar{s})$, где $\bar{s}$ – любой ненулевой вектор, перпендикулярный $\bar{s}_3$; двумерные инвариантные подпространства: $Lin(\bar{s},\bar{s}_3)$, $Lin(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$.

## 6. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Матрица линейного преобразования $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ $n$-мерного векторного пространства определяется относительно его базиса. Выбирая разные базисы, получаем разные матрицы одного и того же преобразования. Поэтому возникает задача ***приведения линейного преобразования к каноническому виду***: требуется найти такой базис пространства $\boldsymbol{V}$, в котором матрица преобразования имеет наиболее простой вид. Упрощение матрицы преобразования позволяет выяснить его структуру, представить в виде композиции простых преобразований. Например, если в некотором базисе матрица преобразования оказывается диагональной, то с геометрической точки зрения это преобразование сводится к гомотетиям вдоль каждого из направлений базисных векторов. Кроме того, приведение преобразований к каноническому виду позволяет сравнивать различные преобразования. Все преобразования, которые имеют одинаковый канонический вид, эквивалентны, так как обладают одинаковыми свойствами.

В разд. 6 в [7] была рассмотрена задача приведения матрицы к диагональному виду при помощи преобразования подобия. В этом разделе аналогичная задача рассматриваются для линейного преобразования.

### Приведение линейного преобразования к диагональному виду

Говорят, что линейное преобразование $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ $n$-мерного векторного пространства $\boldsymbol{V}$ ***приводится к диагональному виду***, если существует базис, в котором матрица $A$ преобразования диагональная, т.е. $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – некоторые числа, среди которых могут быть равные. Если преобразование $\mathcal{A}$ приводится к диагональному виду, то оно называется ***диагонализируемым***.

В [7] было сформулировано необходимое и достаточное условие приводимости матрицы к диагональному виду. Переформулируем это условие для линейного преобразования: *линейное преобразование $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда в пространстве $\boldsymbol{V}$ существует базис из собственных векторов*.

Критерий диагонализируемости линейного преобразования можно сформулировать иначе.

**Теорема (о диагонализируемости линейного преобразования).** *Для того чтобы линейное преобразование приводилось к диагональному виду, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического многочлена являлись собственными значениями преобразования и геометрическая кратность каждого собственного значения была равна его алгебраической кратности.*

**Следствие 1.** *Если характеристическое уравнение линейного преобразования комплексного (вещественного) пространства имеет* $n$ *попарно различных комплексных (действительных) корней* (короче говоря, *преобразование имеет* ***простой спектр***), *то это преобразование приводится к диагональному виду.*

**Следствие 2.** *Если сумма размерностей всех собственных подпространств линейного преобразования* $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ *равна размерности векторного пространства* $\boldsymbol{V}$, *то линейное преобразование приводится к диагональному виду.*

## Приведение линейного преобразования к каноническому виду

***Жордановой клеткой*** $r$-го порядка, соответствующей собственному значению $\lambda$, называют квадратную матрицу $r$-го порядка:

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

***Жордановой матрицей*** называют блочно-диагональную матрицу вида:

$$J_A = diag(J_{r_1}(\lambda_1),...,J_{r_k}(\lambda_k)) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{r_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ \hline O & J_{r_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline O & O & \cdots & J_{r_k}(\lambda_k) \end{array}\right), \tag{6.2}$$

на диагонали которой стоят жордановы клетки (6.1), причем среди собственных значений $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ могут быть равные, порядки $r_1,\ldots,r_k$ жордановых клеток (всех или некоторых) могут совпадать.

Говорят, что линейное преобразование $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ $n$-мерного векторного пространства $\boldsymbol{V}$ ***приводится к каноническому виду***, если существует базис, в котором матрица $A$ преобразования имеет ***нормальную жорданову форму*** (6.2). Такой базис называется ***жордановым***.

## Существование и структура жорданова базиса

Пусть преобразование $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ имеет собственный вектор $\boldsymbol{s}$, соответствующий собственному значению $\lambda$. Вектор $\boldsymbol{s}^{(1)}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{A}(\boldsymbol{s}^{(1)}) = \lambda \boldsymbol{s}^{(1)} + \boldsymbol{s}$, называется ***присоединенным вектором 1-го порядка***. Вектор $\boldsymbol{s}^{(2)}$, удовлетворяющий условию

$\mathcal{A}(\boldsymbol{s}^{(2)}) = \lambda\boldsymbol{s}^{(2)} + \boldsymbol{s}^{(1)}$, называется ***присоединенным вектором 2-го порядка*** и т.д. Присоединенный вектор $\boldsymbol{s}^{(p)}$ $p$-го порядка определяется соотношением $\mathcal{A}(\boldsymbol{s}^{(p)}) = \lambda\boldsymbol{s}^{(p)} + \boldsymbol{s}^{(p-1)}$, где $\boldsymbol{s}^{(p-1)}$ – присоединенный вектор $(p-1)$-го порядка.

Жорданов базис составляют собственные и присоединенные векторы, взятые в следующем порядке:

$$\underbrace{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_1^{(1)}, \boldsymbol{s}_1^{(2)}, ..., \boldsymbol{s}_1^{(r_1-1)}}_{J_{r_1}(\lambda_1)}, \underbrace{\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_2^{(1)}, \boldsymbol{s}_2^{(2)}, ..., \boldsymbol{s}_2^{(r_2-1)}}_{J_{r_2}(\lambda_2)}, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{s}_k^{(1)}, \boldsymbol{s}_k^{(2)}, ..., \boldsymbol{s}_k^{(r_k-1)}}_{J_{r_k}(\lambda_r)}, \qquad (6.3)$$

где $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_k$ – собственные векторы, а остальные векторы – соответственно присоединенные к ним, $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$. Каждой из $k$ жордановых клеток в (6.2) отвечает одна группа векторов в (6.3). Количество собственных векторов в (6.3) равно количеству жордановых клеток в (6.2). Перестановке групп векторов в базисе (6.3) соответствует перестановка жордановых клеток в (6.2), при этом форма матрицы остается жордановой.

**Теорема (о приведении линейного преобразования к каноническому виду).** *Если все корни характеристического уравнения являются собственными значениями преобразования, то это преобразование приводится к каноническому виду, т.е. существует базис пространства, в котором матрица преобразования имеет жорданову форму.*

Из теоремы следует, что любое линейное преобразование комплексного векторного пространства приводится к каноническому виду, а преобразование вещественного векторного пространства приводится к каноническому виду только тогда, когда все корни характеристического уравнения действительные.

Теорема о приведении линейного преобразования к каноническому виду является теоремой о ***существовании жордановой формы***. Вместе с ней справедлива теорема о ***единственности жордановой формы*** матрицы линейного преобразования (с точностью до перестановок жордановых клеток), так как состав жордановых клеток (количество и порядки) полностью определяется по размерностям инвариантных подпространств (5.2), (5.3). От выбора базиса зависит расположение жордановых клеток на главной диагонали матрицы (6.2).

**Методика приведения линейного преобразования к каноническому виду**

Задача приведения линейного преобразования к каноническому виду формулируется следующим образом. Требуется найти базис $n$-мерного векторного пространства $\boldsymbol{V}$, в котором матрица линейного преобразования $\mathcal{A}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ имеет жорданову форму $J_A$, т.е.

– найти жорданову форму $J_A$ матрицы $A$ преобразования (*первый этап*);

– найти жорданов базис (*второй этап*).

**Нахождение жордановой формы матрицы линейного преобразования (первый этап приведения к каноническому виду)**

Для нахождения жордановой формы $J_A$ матрицы линейного преобразования нужно выполнить следующие действия.

1. Выбрать произвольный базис $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ векторного пространства $\boldsymbol{V}$ и найти в этом базисе матрицу $A$ преобразования $\mathcal{A}$.

2. Составить характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}$:

$$\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)=\det(A-\lambda E).$$

3. Найти все различные корни $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ характеристического уравнения $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)=0$ и их алгебраические кратности $n_1,\ldots,n_k$.

4. Для корня $\lambda=\lambda_1$ кратности $n_1$ найти ранги матриц

$$r_p=\operatorname{rg} B^p, \quad p=1,\ldots,m_1,$$

где $B=A-\lambda_1 E$, а $m_1$ – наименьшее натуральное число ($m_1\le n_1$), при котором $r_{m_1+1}=r_{m_1}$.

5. Определить количество $k_p$ жордановых клеток $J_p(\lambda_1)$ порядка $p$:

$$k_p=r_{p-1}-2r_p+r_{p+1},\ p=1,\ldots,m_1,$$

где $r_0=n$.

Повторить п. 4, 5 для остальных собственных значений $\lambda_2,\ldots,\lambda_k$.

6. Составить искомую матрицу $J_A$ блочно-диагонального вида, располагая найденные жордановы клетки на главной диагонали.

**Нахождение жорданова базиса (второй этап приведения к каноническому виду)**

Пусть в базисе $(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ векторного пространства $\boldsymbol{V}$ преобразование $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ имеет матрицу $A$. Требуется найти матрицу перехода $S$ от базиса $(\boldsymbol{e})$ к жорданову базису $(\boldsymbol{s})=(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_n)$: $(\boldsymbol{s})=(\boldsymbol{e})S$. Предполагаем, что жорданова форма $J_A$ матрицы $A$ известна.

1. Для собственного значения $\lambda_1$ (алгебраической кратности $n_1$) найти характеристическую матрицу $B=A-\lambda_1 E$ и по жордановой форме $J_A$ определить наибольший порядок $m_1$ жордановых клеток, соответствующих собственному значению $\lambda_1$.

2. Привести матрицы $B^p$, $p=1,\dots,m_1$, к модифицированному ступенчатому виду $(B^p)_{\text{ст}}$ (он получается в результате удаления нулевых строк из матрицы ступенчатого вида).

3. Найти фундаментальную матрицу $\Phi_{m_1}$ однородной системы уравнений

$$(B^{m_1})_{\text{ст}}\,(B^{m_1-1})^T_{\text{ст}}\,x=o$$

и составить матрицу $S^{(m_1-1)}=(B^{m_1-1})^T_{\text{ст}}\,\Phi_{m_1}$. Если $B^{m_1}$ – нулевая матрица, то $S^{(m_1-1)}=(B^{m_1-1})^T_{\text{ст}}$, так как в этом случае $\Phi_{m_1}$ – единичная матрица.

Вычислить матрицу $BS^{(m_1-1)}$, найти фундаментальную матрицу $\Phi_{m_1-1}$ однородной системы уравнений

$$\left(\frac{(B^{m_1-1})_{\text{ст}}}{(BS^{(m_1-1)})^T}\right)(B^{m_1-2})^T_{\text{ст}}\,x=o$$

и составить матрицу $S^{(m_1-2)}=\left(\;BS^{(m_1-1)}\,\middle|\,(B^{m_1-2})^T_{\text{ст}}\Phi_{m_1-1}\right)$. Если однородная система не имеет фундаментальной матрицы (система имеет только тривиальное решение), то $S^{(m_1-2)}=BS^{(m_1-1)}$.

Вычислить матрицу $BS^{(m_1-2)}$, найти фундаментальную матрицу $\Phi_{m_1-2}$ однородной системы уравнений

$$\left(\frac{(B^{m_1-2})_{\text{ст}}}{(BS^{(m_1-2)})^T}\right)(B^{m_1-3})^T_{\text{ст}}\,x=o$$

и составить матрицу $S^{(m_1-3)}=\left(\;BS^{(m_1-2)}\,\middle|\,(B^{m_1-3})^T_{\text{ст}}\Phi_{m_1-2}\right)$. Если фундаментальная матрица $\Phi_{m_1-2}$ не существует, то $S^{(m_1-3)}=BS^{(m_1-2)}$.

Продолжить аналогичным образом построение матриц $S^{(m_1-4)},\dots,S^{(3)},S^{(2)}$.

Вычислить матрицу $BS^{(2)}$, найти фундаментальную матрицу $\Phi_2$ однородной системы уравнений

$$\left(\frac{(B^2)_{\text{ст}}}{(BS^{(2)})^T}\right)(B)^T_{\text{ст}}\,x=o$$

и составить матрицу $S^{(1)} = \left( \, BS^{(2)} \middle| \, (B)_{\text{ст}}^T \Phi_2 \right)$. Если фундаментальная матрица $\Phi_2$ не существует, то $S^{(1)} = BS^{(2)}$.

Вычислить матрицу $BS^{(1)}$, найти фундаментальную матрицу $\Phi_1$ однородной системы уравнений

$$\left( \frac{(B)_{\text{ст}}}{(BS^{(1)})^T} \right) x = o$$

и составить матрицу $S^{(0)} = \left( \, BS^{(1)} \middle| \, \Phi_1 \right)$. Если фундаментальная матрица $\Phi_1$ не существует, то $S^{(0)} = BS^{(1)}$.

Если $m_1 = 1$, то $S^{(0)} = \Phi_1$, где $\Phi_1$ – фундаментальная матрица однородной системы уравнений $(B)_{\text{ст}} x = o$.

4. Из столбцов полученных матриц

$$S^{(0)} = \left( B^{m_1-1} s_1^{(m_1-1)} \ \ldots B^{m_1-1} s_{k_{m_1}}^{(m_1-1)} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, B^2 s_1^{(2)} \ldots B^2 s_{k_3}^{(2)} \,\middle|\, B s_1^{(1)} \ldots B s_{k_2}^{(1)} \,\middle|\, s_1^{(0)} \ldots s_{k_1}^{(0)} \right),$$

$$S^{(1)} = \left( B^{m_1-2} s_1^{(m_1-1)} \ldots B^{m_1-2} s_{k_{m_1}}^{(m_1-1)} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, B s_1^{(2)} \ \ldots \ B s_{k_3}^{(2)} \,\middle|\, s_1^{(1)} \ \ldots \ s_{k_2}^{(1)} \right),$$

$$\ldots$$

$$S^{(m_1-2)} = \left( B s_1^{(m_1-1)} \ldots B s_{k_{m_1}}^{(m_1-1)} \,\middle|\, s_1^{(m_1-2)} \ldots s_{k_{m_1-1}}^{(m_1-2)} \right),$$

$$S^{(m_1-1)} = \left( s_1^{(m_1-1)}, \ldots, s_{k_{m_1}}^{(m_1-1)} \right),$$

составить первые $n_1$ столбцов искомой матрицы $S$, записывая первые столбцы матриц $S^{(0)}, S^{(1)}, \ldots, S^{(m_1-2)}, S^{(m_1-1)}$, затем вторые столбцы этих матриц и т.д.

Выполнить п. 1–4 для остальных собственных значений $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$, получая следующие $n_2, \ldots, n_k$ столбцов искомой матрицы $S$ соответственно (при этом $m_1$ заменяется на $m_2, \ldots, m_k$).

Приводя матрицу к жордановой форме, полезно учитывать следующие замечания.

**1.** Жорданов базис и, следовательно, матрица $S$, определяются неоднозначно. Матрица $S$ перехода к жорданову базису, полученная на втором этапе, приводит матрицу $A$ к жордановой форме $J_A = S^{-1}AS$, в которой жордановы клетки расположены на диагонали следующим образом: сначала идут подряд по убыванию порядка (начиная с наибольшего размера $m_1$) все жордановы клетки, соответствующие собственному значению $\lambda_1$, затем следуют подряд по убыванию порядка все жордановы клетки, соответствующие $\lambda_2$, и т.д.

**2.** Жорданова форма матрицы определяется неоднозначно (с точностью до перестановок жордановых клеток). Поэтому жорданова форма $J_A$, найденной на первом этапе, может отличаться от жордановой формы $J_A = S^{-1}AS$, которая получается при помощи преобразующей матрицы $S$, сформированной на втором этапе.

**3.** Для комплексных матриц операция транспонирования заменяется операцией сопряжения: $A^* = (\overline{A})^T$ – матрица $A$ транспонируется, и все ее элементы заменяются сопряженными.

**4.** Количество жордановых клеток, соответствующих одному собственному значению, равно геометрической кратности этого собственного значения, а сумма порядков всех этих клеток равна его алгебраической кратности.

**5.** Геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1$ равна $n - \mathrm{rg}(A - \lambda_1 E)$.

## Частные случаи нахождения жордановой формы и жорданова базиса

Геометрическая кратность любого собственного значения не меньше единицы и не больше его алгебраической кратности. В случаях, когда геометрическая кратность принимает крайние значения, процедура приведения линейного преобразования к каноническому виду упрощается.

**1.** Если геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1$ равна его алгебраической кратности (значит, $n - \mathrm{rg}(A - \lambda_1 E) = n_1$), то этому собственному значению соответствуют $n_1$ жордановых клеток первого порядка $J_1(\lambda_1)$, образующие диагональную матрицу $diag(\lambda_1, \lambda_1, ..., \lambda_1) = \lambda_1 E_{n_1}$ порядка $n_1$, а цепочку векторов жорданова базиса составляют линейно независимые собственные векторы $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_{n_1}$ соответствующие $\lambda_1$.

**2.** Если геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1$ равна 1 (значит, $n - \mathrm{rg}(A - \lambda_1 E) = 1$), то этому собственному значению соответствует одна жорданова клетка $n_1$-го порядка $J_{n_1}(\lambda_1)$. Соответствующую цепочку векторов $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_1^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{s}_1^{(n_1 - 1)}$ жорданова базиса, точнее, их координатные столбцы $s_1, s_1^{(1)}, \ldots$, можно найти, последовательно решая системы уравнений

$$(A-\lambda_1 E)s_1 = o\,,\ (A-\lambda_1 E)s_1^{(1)} = s_1\,,\ (A-\lambda_1 E)s_1^{(2)} = s_1^{(1)}, \ldots, (A-\lambda_1 E)s_1^{(n_1-1)} = s_1^{(n_1-2)}\,. \quad (6.4)$$

Здесь $s_1$ – любое ненулевое решение указанной однородной системы – собственный вектор матрицы $A$, а $s_1^{(1)}, \ldots, s_1^{(n_1-1)}$ – любые решения соответствующих неоднородных систем – присоединенные векторы до $(n_1-1)$-го порядка.

**Пример 10.** Линейные преобразования $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ вещественных векторных пространств в некотором базисе имеют матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ соответственно. Найти жордановы нормальные формы $J_A$ и $J_B$ матриц этих преобразований, а также матрицы перехода $S_A$ и $S_B$ к жорданову базису. Выполнить проверку, используя равенства $J_A = S_A^{-1} A S_A$ и $J_B = S_B^{-1} B S_B$.

*Решение.* П р е о б р а з о в а н и е $\mathcal{A}$. *Первый этап.* Находим жорданову форму $J_A$ матрицы $A$ преобразования $\mathcal{A}$. Первый шаг алгоритма не нужен, так как матрица преобразования задана.

2. Составляем характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}$:

$$\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 5-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 = (3-\lambda)^3 .$$

3. Находим корни характеристического уравнения $(3-\lambda)^3 = 0$. Уравнение имеет один корень $\lambda_1 = 3$ алгебраической кратности $n_1 = 3$. Этот действительный корень является собственным значением преобразования.

4. Для корня $\lambda_1 = 3$ кратности $n_1 = 3$ находим ранги матриц $B = A - \lambda_1 E$, $B^2$, $B^3$. Выполняя элементарные преобразования над строками, приводим матрицы $B$, $B^2$, $B^3$ к ступенчатому виду

$$B=\begin{pmatrix}3&6&-15\\1&2&-5\\\boldsymbol{1}&2&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\ B^2=\begin{pmatrix}3&6&-15\\1&2&-5\\1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6&-15\\1&2&-5\\1&2&-5\end{pmatrix}=O;\ B^3=O.$$

Матрицы $B^2$ и $B^3$ – нулевые (к ступенчатому виду не приводятся). Находим ранги: $r_1=\operatorname{rg}B=1$, $r_2=\operatorname{rg}B^2=0$, $r_3=\operatorname{rg}B^3=0$. Значит, $m_1=2$, так как $r_2=r_3$.

5. Определяем количество $k_1=r_0-2r_1+r_2=3-2\cdot1+0=1$ – жордановых клеток 1-го порядка, количество $k_2=r_1-2r_2+r_3=1-2\cdot0+0=1$ – жордановых клеток 2-го порядка. Следовательно, жорданова форма имеет жордановы клетки $J_2(3)$ и $J_1(3)$.

6. Составляем искомую матрицу $J_A$ блочно-диагонального вида, располагая найденные жордановы клетки на главной диагонали

$$J_A=\left(\begin{array}{c|cc}3&0&0\\\hline 0&3&1\\0&0&3\end{array}\right). \tag{6.5}$$

Жорданова форма матрицы получена.

Второй этап. Находим матрицу перехода к жорданову базису.

1. Для собственного значения $\lambda_1=3$ алгебраической кратности $n_1=3$ по жордановой форме $J_A$ определяем наибольший порядок $m_1=2$ жордановых клеток, соответствующих собственному значению $\lambda_1=3$. Составляем матрицу $B=A-\lambda_1E$ (см. п.4 первого этапа).

2. Матрица $B$ была приведена к ступенчатому виду (см. п.4 первого этапа). Модифицированный ступенчатый вид $(B)_{\text{ст}}=(1\quad 2\quad -5)$ получается удалением нулевых строк.

3. Так как $B^2$ – нулевая матрица, то $S^{(1)}=(B)_{\text{ст}}^T=(1\quad 2\quad -5)^T$.

Вычисляем матрицу $BS^{(1)}=\begin{pmatrix}3&6&-15\\1&2&-5\\\boldsymbol{1}&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}90\\30\\30\end{pmatrix}$, составляем расширенную матрицу однородной системы уравнений $\left(\dfrac{(B)_{\text{ст}}}{(BS^{(1)})^T}\right)x=o$ и приводим ее к упрощенному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&0\\\hline 90&30&30&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}\boldsymbol{1}&2&-5&0\\\hline 3&1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&0\\\hline 0&-5&16&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&0\\\hline 0&\boldsymbol{1}&-3{,}2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1{,}4&0\\\hline 0&1&-3{,}2&0\end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободную: $x_1 = -1{,}4x_3$, $x_2 = 3{,}2x_3$. Полагая $x_3 = 5$, получаем ненулевое решение $\varphi_1 = (-7 \quad 16 \quad 5)^T$, которое образует фундаментальную систему. Значит, фундаментальная матрица состоит из одного столбца $\Phi_1 = (-7 \quad 16 \quad 5)^T$.

Составляем матрицу $S^{(0)} = \left( BS^{(1)} \middle| \Phi_1 \right) = \left(\begin{array}{c|c} 90 & -7 \\ 30 & 16 \\ 30 & 5 \end{array}\right)$. Из столбцов матриц $S^{(0)}$ и $S^{(1)}$ составляем искомую матрицу $S$:

$$S^{(0)} = \left(\begin{array}{c|c} 90 & -7 \\ 30 & 16 \\ 30 & 5 \end{array}\right),\ S^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 90 & 1 & -7 \\ 30 & 2 & 16 \\ 30 & -5 & 5 \end{pmatrix},$$

записывая сначала первые столбцы матриц $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, а затем второй столбец матрицы $S^{(0)}$. Матрица перехода к жорданову базису найдена. Выполним проверку. Вычислим

$$J_A = S^{-1}AS = \frac{1}{9900}\begin{pmatrix} 90 & 30 & 30 \\ 330 & 660 & -1650 \\ -210 & 480 & 150 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 90 & 1 & -7 \\ 30 & 2 & 16 \\ 30 & -5 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{30}{9900}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 11 & 22 & -55 \\ -7 & 16 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 270 & 93 & -21 \\ 90 & 36 & 48 \\ 90 & 15 & 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{330}\begin{pmatrix} 990 & 330 & 0 \\ 0 & 990 & 0 \\ 0 & 0 & 990 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Как видим, полученная жорданова форма отличается от (6.5) только перестановкой жордановых клеток.

П р е о б р а з о в а н и е $\mathscr{B}$. *Первый этап*. Находим жорданову форму $J_B$ матрицы $B$ преобразования $\mathscr{B}$. Первый шаг алгоритма не нужен, так как матрица преобразования задана.

2. Составляем характеристический многочлен преобразования $\mathscr{B}$:

$$\Delta_{\mathscr{B}}(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3.$$

3. Находим корни характеристического уравнения $(1-\lambda)^3 = 0$. Уравнение имеет один корень $\lambda_1 = 1$ алгебраической кратности $n_1 = 3$. Этот действительный корень является собственным значением преобразования.

4. Для корня $\lambda_1 = 1$ кратности $n_1 = 3$ находим ранг матрицы $C = B - \lambda_1 E$. Выполняя элементарные преобразования над строками, приводим матрицу $C$ к ступенчатому виду

$$C = B - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -\boldsymbol{1} & -4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & \boldsymbol{1} & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $r_1 = \mathrm{rg}(B - \lambda_1 E) = 2$. Тогда геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 1$ равна единице ($n - r_1 = 1$). Это крайнее (наименьшее) значение геометрической кратности. Поэтому можем воспользоваться упрощенной процедурой приведения к каноническому виду. Собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует жорданова клетка третьего порядка $J_3(1)$. Так как других собственных значений нет, то искомая матрица $J_B$ совпадает с этой клеткой

$$J_B = J_3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.6)$$

По правилу (6.4) находим столбцы матрицы $S$ перехода к жорданову базису. Составляем расширенную матрицу однородной системы $(B - \lambda_1 E)s_1 = o$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(B - \lambda_1 E \mid o) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & 13 & 0 \\ -1 & -4 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_1 = 3x_3$, $x_2 = x_3$. При $x_3 = 1$ получаем ненулевое решение $s_1 = (3 \quad 1 \quad 1)^T$ – собственный вектор матрицы $B$. Составляем расширенную матрицу неоднородной системы $(B - \lambda_1 E)s_1^{(1)} = s_1$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(B - \lambda_1 E \mid s_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 & 1 \\ -1 & -4 & 7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_1 = 3 - 3x_3$, $x_2 = -1 + x_3$. При $x_3 = 0$ получаем $s_1^{(1)} = (3 \quad -1 \quad 0)^T$ – присоединенный вектор первого порядка. Составляем расширенную матрицу неоднородной системы $(B - \lambda_1 E)s_1^{(2)} = s_1^{(1)}$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(B-\lambda_1 E \mid s_1^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 & -1 \\ -1 & -4 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_1 = 4-3x_3$, $x_2 = -1+x_3$. При $x_3 = 0$ получаем $s_1^{(2)} = (4 \quad -1 \quad 0)^T$ – присоединенный вектор второго порядка. Из полученных столбцов составляем искомую матрицу

$$S = (s_1 \quad s_1^{(1)} \quad s_1^{(2)}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку жорданова форма (6.6) данной матрицы $B$ определяется однозначно (она состоит из одной жордановой клетки), то можно проверить равенство $SJ_B = BS$, равносильное преобразованию $J_B = S^{-1}BS$ подобия. Вычислим

$$SJ_B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ BS = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство $SJ_B = BS$ выполняется.

*Ответ*: а) для преобразования $\mathcal{A}$ : $J_A = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$, $S = \begin{pmatrix} 90 & 1 & -7 \\ 30 & 2 & 16 \\ 30 & -5 & 5 \end{pmatrix}$;

б) для преобразования $\mathcal{B}$ : $J_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

## 7. МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ОТ МАТРИЦЫ)

В алгебре $\mathcal{L}(\boldsymbol{V})$ линейных преобразований $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ конечномерного векторного пространства $\boldsymbol{V}$ можно определить целую неотрицательную степень оператора $\mathcal{A}$, полагая по определению

$$\mathcal{A}^0=\mathcal{E},\quad \mathcal{A}^1=\mathcal{A},\quad \mathcal{A}^2=\mathcal{A}\,\mathcal{A},\ldots,\ \mathcal{A}^m=\mathcal{A}^{m-1}\mathcal{A}.$$

Пусть задан многочлен (степени $m$) переменной $\lambda$:

$$p(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0. \tag{7.1}$$

***Многочленом*** $p(\mathcal{A})$ ***от линейного преобразования*** $\mathcal{A}$ называется выражение

$$p(\mathcal{A})=a_m\mathcal{A}^m+\ldots+a_1\mathcal{A}+a_0\mathcal{E}. \tag{7.2}$$

Значение $p(\mathcal{A})$ представляет собой линейное преобразование $p(\mathcal{A}):\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$. Многочлен $p(\lambda)$ называется ***аннулирующим для линейного преобразования*** $\mathcal{A}$, если $p(\mathcal{A})=\mathcal{O}$ – нулевое преобразование.

Напомним (см. разд. 1 в [7]), что ***многочленом*** $p(A)$ ***от квадратной матрицы*** $A$ (порядка $n$) называется выражение

$$p(A)=a_mA^m+\ldots+a_1A+a_0E. \tag{7.3}$$

Значение $p(A)$ представляет собой квадратную матрицу (порядка $n$). Многочлен $p(\lambda)$ называется ***аннулирующим для квадратной матрицы*** $A$, если $p(A)=O$ – нулевая матрица.

При фиксированном базисе векторного пространства $\boldsymbol{V}$ каждому линейному преобразованию $\mathcal{A}$ ставится в соответствие его матрица $A$ ($\mathcal{A}\leftrightarrow A$). Это взаимно однозначное соответствие сохраняет линейные операции, т.е. пространство $\mathcal{L}(\boldsymbol{V})$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^{n\times n}$ квадратных матриц $n$-го порядка (изоморфизм $\mathcal{L}(\boldsymbol{V})\leftrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}$), причем многочлену $p(\mathcal{A})$ от линейного преобразования $\mathcal{A}$ ставится в соответствие многочлен $p(A)$ от матрицы $A$ этого преобразования $\mathcal{A}$. Поэтому свойства многочленов от матриц переносятся на многочлены от линейного преобразования. В частности, многочлены от одного преобразования перестановочны: $p(\mathcal{A})\,q(\mathcal{A})=q(\mathcal{A})\,p(\mathcal{A})$.

Учитывая изоморфизм $\mathcal{L}(\boldsymbol{V})\leftrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}$, задача нахождения многочлена (7.2) от линейного преобразования $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ сводится к поиску многочлена (7.3) от его матрицы $A$. Действительно, если нужно найти многочлен $p(\mathcal{A})$ от линейного преобразования $\mathcal{A}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$, то выбираем любой базис $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ пространства $\boldsymbol{V}$ и составляем матрицу $A$ преобразования $\mathcal{A}$ в выбранном базисе. Находим многочлен $p(A)$. Эта матрица $p(A)$ является матрицей преобразования $p(\mathcal{A}) : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

### Нахождение многочлена от матриц

При больших значениях $m$ и $n$ вычисление выражения (7.3) затруднительно из-за операции возведения матрицы в натуральную степень. Поэтому требуется найти другие, эквивалентные определению (7.3), формы записи и алгоритмы эффективного вычисления многочлена от матрицы. Для упрощения (7.3) имеются две возможности. Во-первых, можно упростить матрицу $A$ так, чтобы многочлен (7.1) от упрощенной матрицы уже вычислялся сравнительно просто. Например, выражение (7.3) легко вычисляется, если матрица $A$ диагональная. Во-вторых, можно понизить степень $m$ многочлена, тогда самая трудоемкая операция – возведение матрицы в степень – упрощается. Первый способ связан с использованием жордановой формы матрицы, второй – с использованием аннулирующего многочлена.

### Использование жордановой формы матрицы

Использование жордановой формы для нахождения многочлена от матрицы основано на трех свойствах (см. разд. 7.3.4 в [3]).

**1.** *Многочлены от подобных матриц подобны.* Например, если $B = S^{-1}AS$, то $p(B) = S^{-1}p(A)S$.

**2.** *Многочлен от блочно-диагональной матрицы является блочно-диагональной матрицей*. Например, если $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & A_2 \end{array}\right)$, где $A_1$ и $A_2$ – квадратные матрицы, а $O$ – нулевые матрицы соответствующих размеров, то $p(A) = \left(\begin{array}{c|c} p(A_1) & O \\ \hline O & p(A_2) \end{array}\right)$.

**3.** *Многочлен* (7.3) *от жордановой клетки* $J_r(\lambda_0)$ *имеет вид*

$$p(J_r(\lambda_0)) = \begin{pmatrix} p(\lambda_0) & \frac{1}{1!}p'(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(r-1)!}p^{(r-1)}(\lambda_0) \\ 0 & p(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(r-2)!}p^{(r-2)}(\lambda_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(\lambda_0) \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

Это верхняя треугольная матрица $r$-го порядка, на главной диагонали которой стоят значения функции $p(\lambda)$ в точке $\lambda_0$, над диагональю – значения первой производной в этой же точке и т.д., т.е. коэффициенты ряда Тейлора для функции $p(\lambda)$.

**Нахождение многочлена от матрицы с использованием ее жордановой формы**

1. Привести матрицу $A$ к жордановой форме $J_A = S^{-1}AS$, т.е. определить жорданову форму $J_A$ и преобразующую матрицу $S$.

2. Составить блочно-диагональную матрицу $p(J_A)$, размещая на ее диагонали многочлены от жордановых клеток (7.3).

3. Найти многочлен от матрицы $A$ по формуле $p(A) = S\ p(J_A)\ S^{-1}$.

**Использование аннулирующих многочленов**

При помощи аннулирующего многочлена можно понизить степень искомого многочлена. Существование аннулирующего многочлена, степень которого равна порядку матрицы, следует из теоремы Гамильтона – Кэли.

**Теорема Гамильтона – Кэли.** *Характеристический многочлен матрицы является аннулирующим для нее, т.е.* $\Delta_A(A) = O$.

Следовательно, для любой квадратной матрицы $n$-го порядка существует аннулирующий многочлен $n$-й степени (характеристический многочлен имеет $n$-ю степень). Однако, могут существовать аннулирующие многочлены меньшей степени. ***Минимальным многочленом*** матрицы $A$ называется ее аннулирующий многочлен наименьшей степени (со старшим коэффициентом, равным единице). Заметим, что минимальный многочлен матрицы $A$ имеет вид (см. разд. 7.2.4 в [7]):

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \qquad (7.5)$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – собственные значения матрицы, $m_1, \ldots, m_k$ – максимальные размеры жордановых клеток (в жордановой форме $J_A$ матрицы $A$), соответствующих этим собственным значениям. Минимальный многочлен матрицы $A$ можно найти по формуле

$$\mu_A(\lambda) = \frac{(-1)^n \Delta_A(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)},$$

где $d_{n-1}(\lambda)$ – наибольший общий делитель миноров ($n-1$)-го порядка характеристической матрицы $A - \lambda E$.

Для понижения степени многочлена (7.3) можно использовать аннулирующие многочлены матрицы $A$, например, ее характеристический многочлен или минимальный многочлены.

Разделим заданный многочлен (7.1) на характеристический:

$$p(\lambda) = q(\lambda) \cdot \Delta_A(\lambda) + r(\lambda). \tag{7.6}$$

Здесь $q(\lambda)$ – частное, а $r(\lambda)$ – остаток, степень которого меньше $n$ (так как характеристический многочлен степени $n$):

$$r(\lambda) = r_{n-1}\lambda^{n-1} + r_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + r_1\lambda + r_0. \tag{7.7}$$

Подставив в (7.6) вместо переменной $\lambda$ матрицу $A$, получим:

$$p(A) = r(A), \tag{7.8}$$

поскольку характеристический многочлен является аннулирующим ($\Delta_A(A) = O$).

### Нахождение многочлена от матрицы с использованием ее характеристического многочлена как аннулирующего

1. Составить характеристический многочлен матрицы $A$:

$$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

2. Найти все различные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ характеристического уравнения $\Delta_A(\lambda) = 0$ и их алгебраические кратности $n_1, \ldots, n_k$.

3. Для корня $\lambda = \lambda_1$ кратности $n_1$ составить $n_1$ уравнений

$$p(\lambda_1) = r(\lambda_1), \quad \left.\left(\frac{d^i}{d\lambda^i} p(\lambda)\right)\right|_{\lambda=\lambda_1} = \left.\left(\frac{d^i}{d\lambda^i} r(\lambda)\right)\right|_{\lambda=\lambda_1}, \quad i = 1, \ldots, n_1 - 1, \tag{7.9}$$

где $r(\lambda) = r_{n-1}\lambda^{n-1} + r_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + r_1\lambda + r_0$ – многочлен (7.7) с неопределенными коэффициентами $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$.

Повторить п.3 для остальных собственных значений $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Все полученные уравнения объединить в одну систему $n$ уравнений с $n$ неизвестными $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$.

4. Решить составленную систему, т.е. найти коэффициенты $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ многочлена (7.7).

5. По формуле (7.8) найти многочлен от матрицы:

$$p(A) = r_{n-1}A^{n-1} + r_{n-2}A^{n-2} + ... + r_1 A + r_0 E .$$

Заметим, что вместо характеристического многочлена можно использовать минимальный многочлен матрицы, который также является аннулирующим. Однако найти его сложнее, чем характеристический.

Формулы (7.9) получаются при подстановке собственных значений в тождество (7.8) и в его производные. Поэтому составить систему уравнений (п.3) для неопределенных коэффициентов можно следующим способом. Записать для многочлена $r(\lambda) = r_{n-1}\lambda^{n-1} + r_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + r_1\lambda + r_0$ с неопределенными коэффициентами тождество $p(\lambda) \equiv r(\lambda)$. Подставить в него последовательно все собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Получим $k$ уравнений. Затем продифференцировать тождество и подставить последовательно в равенство $p'(\lambda) \equiv r'(\lambda)$ те собственные значения $\lambda_j$, алгебраическая кратность которых не меньше двух: $n_j \geq 2$. В равенство $p''(\lambda) \equiv r''(\lambda)$ подставить последовательно те собственные значения, алгебраическая кратность которых не меньше трех ($n_j \geq 3$) и т.д. Процесс закончится, когда будет получено $n$ уравнений относительно $n$ неопределенных коэффициентов $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$.

### Функции от матриц

Понятие функции можно распространить для матричных значений аргумента. Пусть $A$ – числовая квадратная матрица и $f(\lambda)$ – скалярная функция переменной $\lambda$. Определим выражение $f(A)$.

Напомним, что спектром квадратной матрицы $A$ называется совокупность всех ее собственных значений (корней характеристического многочлена). Все собственные значения являются также корнями минимального многочлена (7.5):

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k} ,$$

где $\lambda_1$ – корень кратности $m_1$, $\lambda_2$ – корень кратности $m_2$ и т.д. Степень $\nu$ минимального многочлена не превосходит порядка $n$ матрицы $A$: $\nu = m_1 + m_2 + ... + m_k \leq n$.

Говорят, что скалярная функция $f(\lambda)$ переменной $\lambda$ ***определена на спектре матрицы*** $A$, если для функции $f(\lambda)$ определены значения

$$f(\lambda_i),\ f'(\lambda_i), \ldots,\ f^{(m_i - 1)}(\lambda_i), \qquad i = 1, 2, ..., k ,$$

т.е. функция $f(\lambda)$ определена в окрестности каждой точки $\lambda=\lambda_i$ ($i=1,2,...,k$) вместе со своими производными до указанного порядка.

Пусть $f(\lambda)$ – произвольная функция, определенная на спектре матрицы $A$. ***Значение*** $f(A)$ ***функции*** $f(\lambda)$ ***от матрицы*** $A$ определяется равенством

$$f(A)=p(A),$$

где $p(\lambda)$ – любой многочлен, принимающий на спектре матрицы $A$ те же значения, что $f(\lambda)$:

$$f(\lambda_i)=p(\lambda_i),\ f'(\lambda_i)=p'(\lambda_i),\ldots,\ f^{(m_i-1)}(\lambda_i)=p^{(m_i-1)}(\lambda_i),\ \ i=1,2,...,k.$$

Поскольку функции от матриц определяются через многочлены, то на них переносятся свойства многочленов от матриц, рассмотренные выше, в частности:

*функция* $f(\lambda)$ *от жордановой клетки* $J_r(\lambda_0)$ *имеет вид* (7.4)

$$f(J_r(\lambda_0))=\begin{pmatrix} f(\lambda_0) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(\lambda_0) \\ 0 & f(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(r-2)!}f^{(r-2)}(\lambda_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить значение функции $f(A)$ от матрицы применяются алгоритмы нахождения многочлена $p(A)$ от матрицы, либо с использованием жордановой формы, либо с использованием ее аннулирующего многочлена. В этих алгоритмах многочлен $p(\lambda)$ надо заменить функцией $f(\lambda)$.

**Пример 11.** Найти степень $A^{20}$ матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ двумя способами:

а) приводя матрицу к жордановой нормальной форме;

б) используя характеристический многочлен матрицы как аннулирующий.

*Решение*. а) Находим многочлен $p(\lambda)=\lambda^{20}$ от матрицы $A$ первым способом.

1. Приводим матрицу $A$ к жордановой форме. Для этого составляем характеристический многочлен

$$\Delta_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2.$$

Характеристическое уравнение $(\lambda-2)^2=0$ имеет один двойной корень $\lambda_1=2$. Для собственного значения $\lambda_1=2$ (алгебраической кратности $n_1=2$) находим собственные векторы. Составляем расширенную матрицу однородной системы уравнений $(A-\lambda_1 E)x=o$ и приводим ее к ступенчатому виду

$$(A-\lambda_1 E \mid o)=\left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{-1} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисную переменную через свободную $x_1=x_2$. При $x_2=1$ получаем собственный вектор $s_1=(1 \quad 1)^T$. Так как геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1=2$ равна единице ($n-rg(A-\lambda_1 E)=2-1=1$), то используем частный случай нахождения жорданова базиса (см. разд.6). Собственному значению $\lambda_1=2$ соответствует жорданова клетка второго порядка $J_2(2)$. Так как других собственных значений нет, то искомая матрица $J_A$ совпадает с этой клеткой $J_A=J_2(2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. По правилу (6.4) находим столбцы матрицы $S$ перехода к жорданову базису. Первый столбец этой матрицы – собственный вектор $s_1=(1 \quad 1)^T$. Второй столбец – присоединенный вектор $s_1^{(1)}$. Находим присоединенный вектор. Составляем расширенную матрицу неоднородной системы $(A-\lambda_1 E)s_1^{(1)}=s_1$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(A-\lambda_1 E \mid s_1)=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисную переменную через свободную $x_1=x_2-1$. При $x_2=0$ получаем $s_1^{(1)}=(-1 \quad 0)^T$ – присоединенный вектор первого порядка. Из полученных столбцов составляем искомую матрицу $S=(s_1 \quad s_1^{(1)})=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Составляем матрицу $p(J_A)$. Для многочлена $p(\lambda)=\lambda^{20}$ по правилу (7.4) составляем многочлен $p(J_2(2))$ от жордановой клетки $J_2(2)$. Учитывая, что $p(2)=2^{20}$, $p'(2)=20\cdot 2^{19}=10\cdot 2^{20}$, получаем

$$p(J_A)=p(J_2(2))=\begin{pmatrix} p(2) & p'(2) \\ 0 & p(2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{20} & 10\cdot 2^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix}=2^{20}\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Находим искомый многочлен от матрицы $A$ по формуле $p(A)=Sp(J_A)S^{-1}$:

$$p(A)=S\,p(J_A)S^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot 2^{20}\cdot\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=2^{20}\begin{pmatrix}1 & 9\\ 1 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=2^{20}\begin{pmatrix}-9 & 10\\ -10 & 11\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $A^{20}=2^{20}\begin{pmatrix}-9 & 10\\ -10 & 11\end{pmatrix}$.

б) Находим многочлен $p(\lambda)=\lambda^{20}$ от матрицы $A$ вторым способом.

1. Составляем характеристический многочлен матрицы $A$: $\Delta_A(\lambda)=(\lambda-2)^2$.

2. Характеристическое уравнение $(\lambda-2)^2=0$ имеет один корень $\lambda_1=2$ (алгебраической кратности $n_1=2$)

3. Для корня $\lambda_1=2$ кратности $n_1=2$ по правилу (7.9) составляем два уравнения

$$2^{20}=2r_1+r_0,\qquad 20\cdot 2^{19}=r_1,$$

где $r_0$, $r_1$ – неопределенные коэффициенты многочлена $r(\lambda)=r_1\lambda+r_0$.

Эту систему можно получить иначе. Запишем тождество $\lambda^{20}\equiv r_1\lambda+r_0$. Подставляя в него $\lambda=2$, получаем $2^{20}=2r_1+r_0$. Дифференцируя тождество по $\lambda$, приходим к равенству $20\lambda^{19}\equiv r_1$. Подставляем $\lambda=2$ (этот корень кратности 2): $20\cdot 2^{19}=r_1$. В результате получаем ту же систему двух уравнений с двумя неизвестными.

4. Решаем полученную систему уравнений: $r_1=10\cdot 2^{20}$, $r_0=-19\cdot 2^{20}$.

5. По формуле (7.8) находим искомый многочлен от матрицы:

$$p(A)=10\cdot 2^{20}A-19\cdot 2^{20}E=2^{20}\cdot(10A-19E)=2^{20}\left(10\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}-19\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=2^{20}\begin{pmatrix}-9 & 10\\ -10 & 11\end{pmatrix}.$$

*Ответ*: $A^{20}=2^{20}\begin{pmatrix}-9 & 10\\ -10 & 11\end{pmatrix}$.

# 8. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим линейное преобразование $\mathcal{A}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ $n$-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}$. Напомним, что евклидово пространство является вещественным векторным пространством со скалярным произведением (см. разд. 2). Поэтому все понятия и свойства линейных преобразований вещественных векторных пространств полностью переносятся на линейные преобразования евклидовых пространств. Наличие скалярного произведения позволяет определить важные свойства таких преобразований.

## Ортогональные преобразования

Преобразование $\mathcal{A}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ $n$-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ называется ***ортогональным***, если оно сохраняет скалярное произведение векторов, т.е.

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{v}),\mathcal{A}(\boldsymbol{w}))=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\quad\forall\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{E}.$$

Из определения следуют ***простейшие свойства***: *при ортогональном преобразовании не изменяются длины векторов, а также углы между векторами*, поскольку $|\mathcal{A}(\boldsymbol{v})|^2=(\mathcal{A}(\boldsymbol{v}),\mathcal{A}(\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=|\boldsymbol{v}|^2$ и для ненулевых векторов $\cos\varphi=\dfrac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{w}|}=\dfrac{(\mathcal{A}(\boldsymbol{v}),\mathcal{A}(\boldsymbol{w}))}{|\mathcal{A}(\boldsymbol{v})|\cdot|\mathcal{A}(\boldsymbol{w})|}$. Перейдем к изучению других свойств ортогональных преобразований.

## Свойства ортогональных преобразований

**1.** *Ортогональное преобразование – линейное.*

**2.** *Линейное преобразование ортогонально тогда и только тогда, когда оно отображает ортонормированный базис в ортонормированный.*

**3.** *Линейное преобразование* $\mathcal{A}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ *ортогонально тогда и только тогда, когда его матрица* $A$ *в любом ортонормированном базисе является ортогональной, т.е.* $A^T=A^{-1}$.

**4.** *Ортогональное преобразование обратимо, т.е. инъективно и сюръективно*: $\boldsymbol{Ker}\mathcal{A}=\{\boldsymbol{o}\}$, $\boldsymbol{Im}\,\mathcal{A}=\boldsymbol{E}$. Это следует из свойств ядра и образа линейного отображения (см. разд. 3).

**5.** *Корни характеристического уравнения ортогонального преобразования по модулю равны единице* (*собственные значения равны* $+1$ *или* $-1$).

**6.** *Собственные векторы ортогональной матрицы, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны* [3].

**7.** *Определитель матрицы ортогонального преобразования равен* $+1$ *или* $-1$.

**8.** *Пусть* $\boldsymbol{L}$ *– инвариантное относительно ортогонального преобразования* $\mathcal{A}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ *подпространство* $\boldsymbol{E}$. *Тогда его ортогональное дополнение* $\boldsymbol{L}^{\perp}$ *также инвариантно по отношению к преобразованию* $\mathcal{A}$.

Ортогональное преобразование $\mathcal{A}$ называется ***собственным***, если $\det A=1$ и ***несобственным***, если $\det A=-1$.

**9.** *Пусть* $\lambda=\alpha\pm\beta i$ *– пара комплексных сопряженных корней* ($\beta\neq 0$) *характеристического многочлена ортогонального преобразования* $\mathcal{A}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$. *Тогда существует такая пара равных по длине ортогональных векторов* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$, *что*

$$\begin{cases}\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=\alpha\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{y}\,,\\ \mathcal{A}(\boldsymbol{y})=\beta\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}\,.\end{cases}$$

**Теорема (о каноническом виде ортогонального преобразования).** *Для каждого ортогонального преобразования* $\mathcal{A}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ $n$*-мерного евклидова пространства* $\boldsymbol{E}$ *существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования имеет* ***канонический вид***:

$$\underset{(\boldsymbol{s})}{A}=\begin{pmatrix}\pm1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & \pm1 & & & \\ & & & R_{\varphi_1} & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & R_{\varphi_k}\end{pmatrix}. \qquad (8.1)$$

*На главной диагонали матрицы стоят либо числа* 1 *или* $(-1)$, *либо блоки вида* $R_{\varphi}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$, *а остальные элементы матрицы равны нулю.*

Базис $(\boldsymbol{s})=(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_n)$, в котором матрица преобразования имеет вид (8.1), называется ***каноническим***. Заметим, что канонический базис определяется неоднозначно.

Матрицу вида (8.1) можно представить в виде произведения матриц, каждая из которых есть либо матрица $diag(1,\ldots,1,-1,1,\ldots,1)$ ***простого отражения*** относительно гиперплоскости, либо матрица $diag(1,\ldots,1,R_{-\varphi},1,\ldots,1)$ ***простого вращения*** двумерной плоскости. Поэтому справедливо утверждение.

**Следствие (геометрический смысл ортогонального преобразования).** *Любое ортогональное преобразование можно представить как композицию преобразований, каждое из которых есть либо простое отражение* (*относительно гиперплоскости*), *либо простой поворот* (*двумерной плоскости*).

В частности, ортогональное преобразование трехмерного пространства представляет собой поворот вокруг некоторой оси (если определитель матрицы преобразования равен 1) или композицию поворота вокруг некоторой оси и зеркального отражения в плоскости, перпендикулярной этой оси (если определитель матрицы преобразования равен –1).

### Приведение ортогонального преобразования к каноническому виду

Пусть в некотором ортонормированном базисе $(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ ортогональное преобразование $\mathcal{A}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ имеет матрицу $A$. Требуется найти ***канонический*** базис $(\boldsymbol{s})=(\boldsymbol{s}_1,...,\boldsymbol{s}_n)$, в котором матрица преобразования имеет канонический вид (8.1). Для решения задачи нужно выполнить следующие действия.

1. Составить характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$ и найти различные его корни $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ (а также их алгебраические кратности).

2. Для действительного корня $\lambda_1$ кратности $n_1$ найти фундаментальную систему $x_1,\ldots,x_{n_1}$ решений однородной системы $(A-\lambda_1 E)x=o$. Линейно независимую систему $x_1,\ldots,x_{n_1}$ векторов (пространства $\mathbb{R}^n$) ортогонализировать и нормировать (см. разд.2). Получим столбцы $s_1,\ldots,s_{n_1}$.

3. Для пары $\lambda=\alpha\pm\beta i$ комплексных сопряженных корней кратности $m$ найти фундаментальную систему $z_1,\ldots,z_m$ решений однородной системы $(A-(\alpha-\beta i)E)z=o$. Выделяя действительные $x_j=\operatorname{Re} z_j$ и мнимые части $y_j=\operatorname{Im} z_j$, $j=1,...,m$, комплексных столбцов $z_1,\ldots,z_m$, получить $m$ пар ортогональных векторов $x_1,y_1;x_2,y_2;\ldots;x_m,y_m$ (пространства $\mathbb{R}^n$). Эту систему векторов ортогонализировать и нормировать. Получим $2m$ столбцов $s_1,\ldots,s_{2m}$.

Выполнить п. 2 или п. 3 для всех различных корней характеристического уравнения.

4. Полученные в пп. 2,3 группы столбцов последовательно записать в матрицу $S$. Векторы канонического базиса находим по матрице $S$ перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ к искомому каноническому базису, согласно равенству: $\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_n$: $(\boldsymbol{s})=(\boldsymbol{e})S$.

5. По формуле $\underset{(\boldsymbol{s})}{A}=S^TAS$ получить канонический вид (8.1) матрицы ортогонального преобразования:

каждый действительный корень $\lambda_1$ кратности $n_1$ будет повторяться на главной диагонали $n_1$ раз;

для каждой пары $\lambda = \alpha \pm \beta i$ комплексных сопряженных корней кратности $m$ на диагонали будут повторяться $m$ блоков вида $R_\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Заметим, что канонический базис находится неоднозначно. Например, если векторы $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$ канонического базиса определяют плоскость, которая поворачивается в результате преобразования на угол $\varphi$, то в базисе $\boldsymbol{s}_1, -\boldsymbol{s}_2$ или $\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_1$ поворот будет в противоположном направлении, т.е. на угол $(-\varphi)$. Можно сказать, что канонический вид (8.1) ортогонального преобразования определяется однозначно с точностью до перестановок диагональных элементов $\lambda_i \in \mathbb{R}$, а также клеток вида $R_\varphi$ и, быть может, замены этих клеток на транспонированные клетки $R_{-\varphi}$.

## Сопряженные преобразования

Пусть $\mathcal{A} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ – линейное преобразование $n$-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}$. Преобразование $\mathcal{A}^* : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ называется ***сопряженным*** преобразованию $\mathcal{A}$, если для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из пространства $\boldsymbol{E}$ выполняется равенство

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y})).$$

## Свойства сопряженного преобразования

**1.** *Сопряженное преобразование – линейное.*

**2.** *Для каждого линейного преобразования $\mathcal{A}$ существует единственное сопряженное преобразование $\mathcal{A}^*$, причем матрица сопряженного преобразования в любом ортонормированном базисе является транспонированной по отношению к матрице данного преобразования в том же базисе* ( $A^* = A^T$ ).

**3.** *Матрица $A^*$ сопряженного преобразования $\mathcal{A}^*$ в произвольном* (*неортонормированном*) *базисе связана с матрицей $A$ преобразования $\mathcal{A}$ следующей формулой*

$$A^* = G^{-1} A^T G,$$

*где $G$ – матрица Грама данного базиса.*

**4.** *Собственные значения сопряженного преобразования $\mathcal{A}^*$ совпадают с собственными значениями $\mathcal{A}$ преобразования.*

**5.** *Если* $\boldsymbol{L}$ *– подпространство, инвариантное относительно линейного преобразования* $\mathcal{A}: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$*, то его ортогональное дополнение* $\boldsymbol{L}^{\perp}$ *является инвариантным подпространством относительно сопряженного преобразования* $\mathcal{A}^*$.

### Самосопряженные преобразования

Линейное преобразование $\mathcal{A}: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ $n$-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ называется ***самосопряженным***, если оно является сопряженным самому себе, а именно $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, т.е. $(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}(\boldsymbol{y}))$ для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из пространства $\boldsymbol{E}$.

Например, самосопряженными преобразованиями являются нулевое преобразование $\mathcal{O}$ и тождественное $\mathcal{E}$.

### Свойства самосопряженного преобразования

**1.** *Матрица* $A$ *самосопряженного преобразования в любом ортонормированном базисе является симметрической* ($A^T = A$), и наоборот, *если в каком-либо ортонормированном базисе матрица преобразования симметрическая, то это преобразование самосопряженное.*

**2.** *Все корни характеристического уравнения самосопряженного преобразования действительные.*

**3.** *Собственные векторы, принадлежащие различным собственным значениям самосопряженного преобразования, ортогональны.*

**4.** *Если* $\boldsymbol{L}$ *– подпространство, инвариантное относительно самосопряженного преобразования* $\mathcal{A}: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$*, то его ортогональное дополнение* $\boldsymbol{L}^{\perp}$ *также инвариантно относительно преобразования* $\mathcal{A}$.

**Теорема (о диагонализируемости самосопряженного преобразования).** *Для всякого самосопряженного преобразования* $\mathcal{A}: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ $n$*-мерного евклидова пространства* $\boldsymbol{E}$ *существует ортонормированный базис* (*из собственных векторов*)*, в котором матрица преобразования имеет диагональный вид*

$$\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n), \tag{8.2}$$

*где* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *– собственные значения преобразования* $\mathcal{A}$, *повторенные в соответствии с их кратностью*.

Диагональный вид (8.2) называется также ***каноническим видом*** самосопряженного преобразования, а базис, в котором матрица имеет вид (8.2), – ***каноническим***.

Матрицу вида (8.2) можно представить в виде произведения матриц, каждая из которых есть либо матрица $diag(1,...,1,-1,1,...,1)$ ***простого отражения*** относительно гиперплоскости, либо матрица $diag(1,...,1,\lambda,1,...,1)$ ***простого растяжения*** вдоль некоторого направления (или сжатие к гиперплоскости), либо матрица $diag(1,...,1,0,1,...,1)$ ***простой проекции*** на гиперплоскость. Поэтому справедливо утверждение.

**Следствие 1 (геометрический смысл самосопряженного преобразования).** *Любое самосопряженное преобразование можно представить как композицию преобразований, каждое из которых есть либо простое отражение* (*относительно гиперплоскости*), *либо проекция на гиперплоскость, либо растяжение вдоль взаимно перпендикулярных направлений.*

**Следствие 2 (о диагонализируемости симметрической матрицы).** *Для любой действительной симметрической матрицы* $A$ *существует диагональная матрица* $\Lambda = diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$ (*с собственными числами матрицы* $A$ *на главной диагонали*) *и ортогональная матрица* $S$ ($S^T = S^{-1}$), *что* $\Lambda = S^T AS$.

### Приведение самосопряженного преобразования к диагональному виду

Пусть в некотором ортонормированном базисе $(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ самосопряженное преобразование $\mathcal{A}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ имеет матрицу $A$. Требуется найти базис $(\boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{s}_1,...,\boldsymbol{s}_n)$, в котором матрица преобразования имеет диагональный вид (8.2). Для решения задачи нужно выполнить следующие действия.

1. Составить характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$, найти его корни $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ и их алгебраические кратности $n_1,\ldots,n_k$, $n_1+...+n_k=n$.

2. Для корня $\lambda_1$ кратности $n_1$ найти фундаментальную систему $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n_1}$ решений однородной системы $(A-\lambda_1 E)x=o$. Столбцы $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n_1}$ ортогонализировать и нормировать. Получим $n_1$ столбцов $s_1,\ldots,s_{n_1}$.

Выполнить п.2 для остальных собственных значений $\lambda_2,\ldots,\lambda_k$.

3. Полученные в п. 2 группы столбцов последовательно записать в матрицу $S$. Векторы канонического базиса находим по матрице $S$ перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ к искомому каноническому базису, согласно равенству: $\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_n$: $(\boldsymbol{s})=(\boldsymbol{e})S$.

4. По формуле $\Lambda = S^T AS$ получить канонический вид (8.2) матрицы самосопряженного преобразования:

$$\Lambda = diag(\underbrace{\lambda_1,...,\lambda_1}_{n_1}, \underbrace{\lambda_2,...,\lambda_2}_{n_2},..., \underbrace{\lambda_k,...,\lambda_k}_{n_k}).$$

Корень $\lambda_i$ кратности $n_i$ будет повторяться на главной диагонали $n_i$ раз ($i = 1,...,k$).

Заметим, что канонический базис находится неоднозначно. Например, если векторы $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$ канонического базиса поменять местами, то получим новый канонический базис. Матрицы преобразования в этих двух базисах отличаются только перестановкой первых двух диагональных элементов. Можно сказать, что канонический вид (8.2) самосопряженного преобразования определяется однозначно с точностью до перестановок диагональных элементов.

## Положительные и неотрицательные преобразования

Самосопряженное преобразование называется ***положительным*** (***неотрицательным***), если $(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) > 0$ для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ (соответственно $(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) \geq 0$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$).

Эти понятия связаны с положительностью (неотрицательностью) симметрических матриц и квадратичных форм (см. разд. 7 в [7]). Действительно, в любом ортонормированном базисе матрица $A$ положительного самосопряженного преобразования $\mathcal{A}$ является положительно определенной. В свою очередь, симметрическая положительно определенная матрица $A$ является матрицей положительно определенной квадратичной формы $x^T Ax$. Эта эквивалентность следует из координатной записи скалярного произведения (в ортонормированном базисе): $(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = (Ax, x) = x^T A^T x = x^T Ax$.

Отметим следующие свойства положительных и неотрицательных преобразований.

**1.** *Преобразование $\mathcal{A}$ положительно* (*неотрицательно*) *тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительные* (*неотрицательные*).

**2.** *Для любого неотрицательного* (*положительного*) *преобразования $\mathcal{A}$ существует такое единственное неотрицательное* (*положительное*) *преобразование $\mathcal{B}$, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.* В этом случае используется обозначение $\mathcal{B} = \sqrt{\mathcal{A}}$ (квадратный корень из неотрицательного оператора). Аналогичное обозначение $B = \sqrt{A}$ применяется для неотрицательно определенных матриц $A$ и $B$, если $B^2 = A$.

**3.** *Преобразования $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ являются самосопряженными неотрицательными* (*положительными*) *для любого* (*невырожденного*) *преобразования $\mathcal{A}$.*

**Теорема (о полярном разложении невырожденного линейного преобразования).** *Любое невырожденное линейное преобразование* $\mathcal{A}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ $n$*-мерного евклидова пространства* $\boldsymbol{E}$ *можно представить в виде композиции* $\mathcal{A}=\mathcal{S}\mathcal{Q}$ *положительного самосопряженного преобразования* $\mathcal{S}$ *и ортогонального преобразования* $\mathcal{Q}$*, причем такое представление единственное.*

Представление $\mathcal{A}=\mathcal{S}\mathcal{Q}$ называется ***полярным разложением*** оператора $\mathcal{A}$. Теорема о полярном разложении справедлива для любого линейного преобразования, если условие положительности самосопряженного преобразования заменить условием его неотрицательности (при этом теряется единственность разложения). Разложение $\mathcal{A}=\mathcal{S}\mathcal{Q}$ можно заменить на композицию $\mathcal{A}=\mathcal{Q}_1\mathcal{S}_1$ ортогонального преобразования $\mathcal{Q}_1$ и положительного самосопряженного преобразования $\mathcal{S}_1$.

**Следствие 1 (геометрический смысл невырожденного линейного преобразования).** *Любое невырожденное линейное преобразование можно представить как композицию преобразований, каждое из которых есть либо простое отражение* (*относительно гиперплоскости*)*, либо простой поворот* (*двумерной плоскости*)*, либо растяжение вдоль взаимно перпендикулярных направлений.*

**Следствие 2 (полярное разложение матриц).** *Любую квадратную матрицу* $A$ *можно представить в виде* $A=SQ$*, где* $S$ *– симметрическая неотрицательно определенная матрица, а* $Q$ *– ортогональная матрица. Если матрица* $A$ *невырожденная, то такое представление единственно.*

### Алгоритм полярного разложения линейного преобразования (квадратной матрицы)

Задача полярного разложения $\mathcal{A}=\mathcal{S}\mathcal{Q}$ линейного преобразования $\mathcal{A}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ евклидова пространства сводится к разложению $A=SQ$ матрицы $A$ этого преобразования, найденной относительно некоторого ортонормированного базиса $(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$. Полученные при этом матрицы $S$ и $Q$ являются матрицами искомых преобразований $\mathcal{S}$ и $\mathcal{Q}$ в выбранном базисе.

Пусть в ортонормированном базисе $(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ преобразование $\mathcal{A}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ имеет матрицу $A$. Для получения полярного разложения $A=SQ$ нужно выполнить следующие действия.

1. Вычислить симметрическую матрицу $C=AA^T$.

2. Найти собственные значения $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (с учетом кратности) матрицы $C$ и ортонормированную систему $d_1,\ldots,d_n$ собственных векторов. Составить из собственных векторов преобразующую матрицу $D=(d_1 \ \ \ldots \ \ d_n)$, приводящую матрицу $C$ к диагональному виду $\Lambda = D^{-1}CD$, где $\Lambda = diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$ – диагональная матрица с неотрицательными элементами.

3. Вычислить неотрицательную симметрическую матрицу $S = D\sqrt{\Lambda}\,D^{-1}$, где $\sqrt{\Lambda} = diag(\sqrt{\lambda_1},...,\sqrt{\lambda_n})$ – диагональная матрица с неотрицательными элементами.

4. Найти ортогональную матрицу $Q = S^{-1}A$.

5. Записать искомое полярное разложение $A = SQ$ матрицы $A$, которое соответствует искомому полярному разложению $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{Q}$.

В разложении $A = SQ$ матрица $S = \sqrt{AA^T}$. Эта матрица находится в п.1–3 алгоритма. Чтобы получить разложение $A = Q_1S_1$, нужно для транспонированной матрицы получить полярное разложение $A^T = SQ$, тогда $A = Q^TS^T = Q_1S_1$. Таким образом, $Q_1 = Q^T$, а $S_1 = S$.

**Пример 12.** Ортогональное преобразование $\mathcal{A}$ и самосопряженное преобразование $\mathcal{B}$ пространства геометрических векторов $V_3$ в ортонормированном базисе $\bar{i}\,,\bar{j}\,,\bar{k}$ имеют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{9}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно. Каждое преобразование привести к каноническому виду, т.е. найти ортонормированный базис $\bar{s}_1\,,\bar{s}_2\,,\bar{s}_3$, в котором матрица преобразования имеет канонический вид (8.1) или (8.2), и найти эту матрицу. Выяснить геометрический смысл каждого преобразования.

*Решение.* Преобразование $\mathcal{A}$. Применяем алгоритм приведения ортогонального преобразования к каноническому виду.

1. Составляем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ матрицы $A$:

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{11}-\lambda & \frac{2}{11} & -\frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{6}{11}-\lambda & \frac{7}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{9}{11} & \frac{6}{11}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{11^3}\begin{vmatrix} 9-11\lambda & 2 & -6 \\ 6 & -6-11\lambda & 7 \\ 2 & 9 & 6-11\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Сделаем замену $t=11\lambda$ и разложим определитель

$$\begin{vmatrix} 9-t & 2 & -6 \\ 6 & -6-t & 7 \\ 2 & 9 & 6-t \end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (9-t)(t^2-36)+28-324-12(6+t)-12(6-t)-63(9-t)=0\,.$$

Упрощая, получаем $t^3-9t^2-99t+1331=0$. Так как собственное значение ортогонального преобразования либо $\lambda=1$, либо $\lambda=-1$, то полученное уравнение должно иметь действительный корень $t=11$ или $t=-11$. Подстановкой убеждаемся, что $t_1=-11$ является корнем. Разделив левую часть уравнения на двучлен $t+11$, приходим к квадратному уравнению $t^2-20t+121=0$, которое имеет два комплексно сопряженных корня $t_{2,3}=10\pm i\sqrt{21}$. Значит, характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1=-1$, $\lambda_{2,3}=\frac{10}{11}\pm\frac{\sqrt{21}}{11}i$. Все корни простые (кратности 1).

2. Для действительного корня $\lambda_1=-1$ кратности 1 находим фундаментальную систему решений однородной системы $(A-\lambda_1 E)\,x=o$. Приводим матрицу системы к упрощенному виду:

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix} \frac{9}{11}+1 & \frac{2}{11} & -\frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{6}{11}+1 & \frac{7}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{9}{11} & \frac{6}{11}+1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 20 & 2 & -6 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 17 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 10 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы: $x_2=-4x_1$, $x_3=2x_1$. Следовательно, фундаментальная система содержит решение $x_1=(1\quad -4\quad 2)^T$. Нормируя это решение (поделив координаты на норму $|\,x_1\,|=\sqrt{1^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{21}$), получаем столбец $s_1=(\frac{1}{\sqrt{21}}\quad \frac{-4}{\sqrt{21}}\quad \frac{2}{\sqrt{21}})^T$.

3. Для пары комплексных сопряженных корней $\lambda_{2,3}=\frac{10}{11}\pm\frac{\sqrt{21}}{11}i$ нужно, согласно алгоритму, искать фундаментальную систему решений однородной системы $(A-(\frac{10}{11}-\frac{\sqrt{21}}{11}i)E)z=o$. Приводим матрицу системы к упрощенному виду:

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix} \frac{9}{11}-(\frac{10}{11}-\frac{\sqrt{21}}{11}i) & \frac{2}{11} & -\frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{6}{11}-(\frac{10}{11}-\frac{\sqrt{21}}{11}i) & \frac{7}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{9}{11} & \frac{6}{11}-(\frac{10}{11}-\frac{\sqrt{21}}{11}i) \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} -1+i\sqrt{21} & 2 & -6 \\ 6 & -16+i\sqrt{21} & 7 \\ 2 & 9 & -4+i\sqrt{21} \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 9 & -4+i\sqrt{21} \\ 0 & 13-9i\sqrt{21} & 5+5i\sqrt{21} \\ 0 & -43+i\sqrt{21} & 19-3i\sqrt{21} \end{pmatrix}.$$

Вторая и третья строки матрицы пропорциональны, так как $\begin{vmatrix} 13-9i\sqrt{21} & 5+5i\sqrt{21} \\ -43+i\sqrt{21} & 19-3i\sqrt{21} \end{vmatrix}=0$.

Следовательно, третью строку матрицы можно удалить. Находим ненулевое решение оставшихся уравнений. Пусть $z_3=-13+9i\sqrt{21}$, тогда из второго уравнения имеем $z_2=5+5i\sqrt{21}$. Подставляя эти значения в первое уравнение, получаем $z_1=46+2i\sqrt{21}$. Таким образом, столбец $z=(46+2i\sqrt{21}\quad 5+5i\sqrt{21}\quad -13+9i\sqrt{21})^T$ – это собственный вектор матрицы, соответствующий собственному значению $\lambda_3=\frac{10}{11}-\frac{\sqrt{21}}{11}i$. Выделяя действительные и мнимые части, получаем столбцы $\operatorname{Re} z=(46\quad 5\quad -13)^T$ и $\operatorname{Im} z=(2\sqrt{21}\quad 5\sqrt{21}\quad 9\sqrt{21})^T$, нормируя которые, имеем $s_2=(\frac{46}{\sqrt{2310}}\quad \frac{5}{\sqrt{2310}}\quad \frac{-13}{\sqrt{2310}})^T$, $s_3=(\frac{2}{\sqrt{110}}\quad \frac{5}{\sqrt{110}}\quad \frac{9}{\sqrt{110}})^T$.

4. Записываем полученные в п. 3,4 столбцы $s_1, s_2, s_3$ в искомую матрицу перехода

$$S=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{46}{\sqrt{2310}} & \frac{2}{\sqrt{110}} \\ \frac{-4}{\sqrt{21}} & \frac{5}{\sqrt{2310}} & \frac{5}{\sqrt{110}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{-13}{\sqrt{2310}} & \frac{9}{\sqrt{110}} \end{pmatrix}.$$

Векторы канонического базиса $\overline{s}_1, \overline{s}_2, \overline{s}_3$ находим по столбцам $s_1, s_2, s_3$ матрицы перехода $S$, так как они связаны формулой $(\overline{s}_1\quad \overline{s}_2\quad \overline{s}_3)=(\overline{i}\quad \overline{j}\quad \overline{k})S$:

$$\overline{s}_1=\frac{1}{\sqrt{21}}\overline{i}-\frac{4}{\sqrt{21}}\overline{j}+\frac{2}{\sqrt{21}}\overline{k},\qquad \overline{s}_2=\frac{46}{\sqrt{2310}}\overline{i}+\frac{5}{\sqrt{2310}}\overline{j}-\frac{13}{\sqrt{2310}}\overline{k},\qquad \overline{s}_3=\frac{2}{\sqrt{110}}\overline{i}+\frac{5}{\sqrt{110}}\overline{j}+\frac{9}{\sqrt{110}}\overline{k}.$$

5. По формуле $\underset{(s)}{A}=S^T AS$ получаем канонический вид (8.1) матрицы ортогонального преобразования:

$$\underset{(s)}{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{-4}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{46}{\sqrt{2310}} & \frac{5}{\sqrt{2310}} & \frac{-13}{\sqrt{2310}} \\ \frac{2}{\sqrt{110}} & \frac{5}{\sqrt{110}} & \frac{9}{\sqrt{110}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{9}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{9}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{46}{\sqrt{2310}} & \frac{2}{\sqrt{110}} \\ \frac{-4}{\sqrt{21}} & \frac{5}{\sqrt{2310}} & \frac{5}{\sqrt{110}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{-13}{\sqrt{2310}} & \frac{9}{\sqrt{110}} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{-4}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{21}}\\ \frac{46}{\sqrt{2310}} & \frac{5}{\sqrt{2310}} & \frac{-13}{\sqrt{2310}}\\ \frac{2}{\sqrt{110}} & \frac{5}{\sqrt{110}} & \frac{9}{\sqrt{110}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-11}{\sqrt{21}} & \frac{502}{\sqrt{2310}} & \frac{-26}{\sqrt{110}}\\ \frac{44}{\sqrt{21}} & \frac{155}{\sqrt{2310}} & \frac{45}{\sqrt{110}}\\ \frac{-22}{\sqrt{21}} & \frac{59}{\sqrt{2310}} & \frac{103}{\sqrt{110}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{10}{11} & -\frac{\sqrt{21}}{11}\\ 0 & \frac{\sqrt{21}}{11} & \frac{10}{11}\end{pmatrix}. \qquad (8.3)$$

Геометрический смысл преобразования $\mathcal{A}$ – это композиция поворота вокруг оси, содержащей вектор $\bar{s}_1$, на угол $\varphi = \arg\operatorname{tg}\frac{\sqrt{21}}{10}$, если смотреть из конца вектора $\bar{s}_1$ на плоскость, содержащую векторы $\bar{s}_2, \bar{s}_3$, и зеркальное отражение в этой плоскости.

Заметим, что в пространстве $V_3$ базисные векторы $\bar{s}_2$ и $\bar{s}_3$ можно найти другим способом, не выполняя преобразований комплексных матриц, а используя векторное произведение. Действительно, искомые векторы $\bar{s}_2$ и $\bar{s}_3$ должны дополнять вектор $\bar{s}_1$ до ортонормированного базиса. Находим сначала векторы $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$, дополняющие вектор $\bar{x}_1 = \bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}$ до ортогонального базиса. Возьмем, например, вектор $\bar{x}_2 = 4\bar{i} + \bar{j}$, перпендикулярный $\bar{x}_1$ (скалярное произведение $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$). Вектор $\bar{x}_3$ находим при помощи векторного произведения

$$\bar{x}_3 = [\bar{x}_1, \bar{x}_2] = \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -4 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix} = -2\bar{i} + 8\bar{j} + 17\bar{k}\,.$$

Нормируя координатные столбцы $x_2 = (4 \quad -1 \quad 0)^T$ и $x_3 = (2 \quad 8 \quad 15)^T$, получаем $s_2 = (\frac{4}{\sqrt{17}} \quad \frac{1}{\sqrt{17}} \quad 0)^T$, $s_3 = (\frac{-2}{\sqrt{357}} \quad \frac{8}{\sqrt{357}} \quad \frac{17}{\sqrt{357}})^T$.

Для столбцов $s_2 = (\frac{4}{\sqrt{17}} \quad \frac{1}{\sqrt{17}} \quad 0)^T$, $s_3 = (\frac{-2}{\sqrt{357}} \quad \frac{8}{\sqrt{357}} \quad \frac{17}{\sqrt{357}})^T$, найденных вторым способом, матрица перехода будет иметь вид $S = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{-2}{\sqrt{357}}\\ \frac{-4}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{8}{\sqrt{357}}\\ \frac{2}{\sqrt{21}} & 0 & \frac{17}{\sqrt{357}}\end{pmatrix}$, а канонический базис –

$$\bar{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}\bar{i} - \frac{4}{\sqrt{21}}\bar{j} + \frac{2}{\sqrt{21}}\bar{k}, \qquad \bar{s}_2 = \frac{4}{\sqrt{17}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{21}}\bar{j}, \qquad \bar{s}_3 = \frac{-2}{\sqrt{357}}\bar{i} + \frac{8}{\sqrt{357}}\bar{j} + \frac{17}{\sqrt{357}}\bar{k}\,.$$

Канонический вид $\underset{(s)}{A}$ матрицы ортогонального преобразования в этом базисе совпадает с (8.3).

Заметим, что канонический базис, а следовательно, и канонический вид матрицы преобразования, находятся неоднозначно. Например, по формуле $\underset{(s)}{A} = S^T AS$ вместо матрицы (8.3) может получиться транспонированная матрица. Это означает, что в каноническом базисе нужно поменять местами второй и третий базисные векторы, а в матрице $S$ переставить второй и третий столбцы.

Преобразование $\mathcal{B}$. Применяем алгоритм приведения самосопряженного преобразования к каноническому виду.

1. Составляем характеристическое уравнение $\det(B-\lambda E)=0$ матрицы $B$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2(3-\lambda) = 0 .$$

Находим его корни: один корень двойной корень $\lambda_1 = 0$ (кратности $n_1 = 2$) и один простой корень $\lambda_2 = 3$ (кратности $n_2 = 1$).

$2^1$. Для собственного значения $\lambda_1 = 0$ составляем расширенную матрицу системы $(A-\lambda_1 E)x = o$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(A-\lambda_1 E \mid o) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисную переменную через свободные $x_1 = -x_2 - x_3$ и находим фундаментальную систему решений $\varphi_1 = (1 \quad 0 \quad -1)^T$, $\varphi_2 = (1 \quad -1 \quad 0)^T$. Ортогонализируем их, используя метод Грама–Шмидта (см. разд. 2). Полагаем $\psi_1 = \varphi_1 = (1 \quad 0 \quad -1)^T$, $\psi_2 = \varphi_2 - \alpha\psi_1$. Коэффициент $\alpha$ выбираем из условия ортогональности $(\psi_1, \psi_2) = 0$:

$$(1 \quad 0 \quad -1)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = 1\cdot(1-\alpha) + 0\cdot(-1) + (-1)\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2\alpha = 0 .$$

Следовательно, $\alpha = 0{,}5$ и $\psi_2 = (0{,}5 \quad -1 \quad 0{,}5)^T$. Нормируем столбцы ($|\psi_1| = \sqrt{2}$, $|\psi_2| = \sqrt{\frac{3}{2}}$):

$$s_1 = \frac{1}{|\psi_1|}\psi_1 = (\tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad -\tfrac{\sqrt{2}}{2})^T, \; s_2 = \frac{1}{|\psi_2|}\psi_2 = (\tfrac{\sqrt{6}}{6} \quad -\tfrac{\sqrt{6}}{3} \quad \tfrac{\sqrt{6}}{6})^T .$$

$2^2$. Для собственного значения $\lambda_2 = 3$ составляем расширенную матрицу системы $(A - \lambda_2 E)x = o$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(A - \lambda_2 E \mid o) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{1} & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{3} & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$. Фундаментальная система решений содержит одно решение. При $x_3 = 1$ находим $\varphi_3 = (1 \quad 1 \quad 1)^T$. Нормируя этот столбец, получаем $s_3 = (\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{3})^T$.

3. Записываем полученные в п.2 столбцы $s_1, s_2, s_3$ в искомую матрицу перехода

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Векторы канонического базиса $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$ находим по столбцам $s_1, s_2, s_3$ матрицы перехода $S$, так как они связаны формулой $(\bar{s}_1 \quad \bar{s}_2 \quad \bar{s}_3) = (\bar{i} \quad \bar{j} \quad \bar{k})S$:

$$\bar{s}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}, \quad \bar{s}_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}\bar{i} - \frac{\sqrt{6}}{3}\bar{j} + \frac{\sqrt{6}}{6}\bar{k}, \quad \bar{s}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\bar{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\bar{k}.$$

4. По формуле $\underset{(s)}{B} = S^T B S$ получаем канонический вид (8.2) матрицы самосопряженного преобразования:

$$\underset{(s)}{B} = S^T B S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Геометрический смысл преобразования $\mathcal{B}$ – это композиция ортогонального проектирования на ось, содержащую вектор $\bar{s}_3$ и растяжения вдоль этой оси с коэффициентом 3.

*Ответ*: преобразование $\mathcal{A}$) матрица преобразования имеет канонический вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{11} & -\frac{\sqrt{21}}{11} \\ 0 & \frac{\sqrt{21}}{11} & \frac{10}{11} \end{pmatrix}$ относительно базиса $\bar{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}\bar{i} - \frac{4}{\sqrt{21}}\bar{j} + \frac{2}{\sqrt{21}}\bar{k}$, $\bar{s}_2 = \frac{4}{\sqrt{17}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{21}}\bar{j}$, $\bar{s}_3 = \frac{-2}{\sqrt{357}}\bar{i} + \frac{8}{\sqrt{357}}\bar{j} + \frac{17}{\sqrt{357}}\bar{k}$; геометрический смысл преобразования – это композиция поворота вокруг оси, содержащей вектор $\bar{s}_1$, на угол $\varphi = \arg\operatorname{tg}\frac{\sqrt{21}}{10}$, если смотреть из конца вектора $\bar{s}_1$ на плоскость, содержащую векторы $\bar{s}_2, \bar{s}_3$, и зеркальное отражение в этой плоскости;

преобразование $\mathcal{B}$) матрица преобразования имеет канонический вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ относительно базиса $\bar{s}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\bar{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\bar{k}$, $\bar{s}_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}\bar{i} - \frac{\sqrt{6}}{6}\bar{j} + \frac{\sqrt{6}}{3}\bar{k}$, $\bar{s}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}$; геометрический смысл преобразования – это ортогональное проектирование на ось, содержащую вектор $\bar{s}_3$, с последующим растяжением вдоль этой оси (коэффициент растяжения равен 3).

**Пример 13.** Преобразование $\mathcal{Z}: V_2 \to V_2$ пространства $V_2$ – геометрических векторов представляет собой отражение в подпространстве $L_1 = lin(2\bar{i} + \bar{j})$ параллельно подпространству $L_2 = lin(\bar{i} + 2\bar{j})$. Выяснить геометрический смысл сопряженного преобразования, найти его инвариантные подпространства и матрицу в стандартном базисе $\bar{i}, \bar{j}$.

*Решение*. Сначала составляем матрицу преобразования $\mathcal{Z}$. Проще всего это сделать в базисе $\bar{e}_1 = 2\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{e}_2 = \bar{i} + 2\bar{j}$ пространства $V_2$. Действительно, учитывая геометрический смысл заданного преобразования, получаем $\mathcal{Z}(\bar{e}_1) = \bar{e}_1$, $\mathcal{Z}(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2$. Следовательно, матрица $\underset{(e)}{Z}$ преобразования $\mathcal{Z}$ относительно базиса $(\bar{e}) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ диагональная $\underset{(e)}{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Отметим, что $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ собственные векторы, принадлежащие собственным значениям $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$ соответственно. Сопряженное преобразование $\mathcal{Z}^*$ имеет такие же собственные значения. Поэтому $\mathcal{Z}^*$ – это отражение в некотором подпространстве.

Базис $(\overline{e})=(\overline{e}_1,\overline{e}_2)$ не ортонормированный. Находим матрицу $Z$ преобразования $\mathcal{Z}$ в стандартном (ортонормированном) базисе $\overline{i}\,,\overline{j}$. Составляем матрицу перехода $S$ от стандартного базиса к базису $(\overline{e})=(\overline{e}_1,\overline{e}_2)$: $S=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Вычисляем

$$Z=S\underset{(e)}{Z}S^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -4\\ 4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем матрицу $Z^*$ в стандартном базисе $Z^*=Z^T=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$.

Чтобы уточнить геометрический смысл сопряженного преобразования, находим собственные векторы, которые определяют одномерные инвариантные подпространства. Собственные значения сопряженного преобразования такие же, как у исходного $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=-1$. Для собственного значения $\lambda_1=1$ составляем расширенную матрицу однородной системы $(Z^*-\lambda_1 E)x=o$ и приводим ее к упрощенному виду

$$\left(\begin{array}{cc|c}\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0\\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Выражаем базисную переменную через свободную $x_1=-2x_2$. При $x_2=-1$ получаем решение $\varphi_1=(2\quad -1)^T$, которому соответствует собственный вектор $\overline{s}_1=2\overline{i}-\overline{j}$. Аналогично находим собственный вектор $\overline{s}_2=\overline{i}-2\overline{j}$, соответствующий $\lambda_2=-1$. Учитывая, что $\mathcal{Z}^*(\overline{s}_1)=\overline{s}_1$, $\mathcal{Z}^*(\overline{s}_2)=-\overline{s}_2$, заключаем, что сопряженное преобразование является отражением в подпространстве $Lin(2\overline{i}-\overline{j})$ параллельно подпространству $Lin(\overline{i}-2\overline{j})$.

*Ответ*: сопряженное преобразование является отражением в подпространстве $Lin(2\overline{i}-\overline{j})$ параллельно подпространству $Lin(\overline{i}-2\overline{j})$; указанные подпространства (вместе с нулевым $\{\overline{o}\}$ и всем пространством $V_2$) являются инвариантными; $Z^*=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$.

**Пример 14.** Преобразование $\mathcal{A}:V_2\to V_2$ пространства $V_2$ – геометрических векторов в стандартном базисе $\overline{i}\,,\overline{j}$ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}-15 & 5\\ 13 & 9\end{pmatrix}$. Представить эту матрицу в виде произведения $A=SQ$ неотрицательной симметрической матрицы $S$ и ортогональной матрицы $Q$. Выяснить геометрический смысл преобразования $\mathcal{A}$, рассматривая его как композицию $\mathcal{A}=\mathcal{S}\mathcal{Q}$ неотрицательного самосопряженного преобразования $\mathcal{S}$ (с матрицей $S$) и ортогонального преобразования $\mathcal{Q}$ (с матрицей $Q$).

*Решение*. Нужно найти полярное разложение $A=SQ$ матрицы преобразования $\mathcal{A}$. Действуем согласно алгоритму.

1. Вычисляем симметрическую матрицу

$$C=AA^T=\begin{pmatrix}-15 & 5\\ 13 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15 & 13\\ 5 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}250 & -150\\ -150 & 250\end{pmatrix}.$$

2. Находим собственные значения и собственные векторы матрицы $C$. Решаем характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}250-\lambda & -150\\ -150 & 250-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2-500\lambda+40000=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda_1=400$, $\lambda_2=100$. Для собственного значения $\lambda_1=400$ составляем расширенную матрицу системы $(C-\lambda_1 E)x=o$ и приводим ее к упрощенному виду $(C-\lambda_1 E\mid o)=\left(\begin{array}{cc|c}-150 & -150 & 0\\ -150 & -150 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$. Находим ненулевое решение, например, $\varphi_1=(1\quad -1)^T$. Для собственного значения $\lambda_2=100$ аналогично получаем $\varphi_2=(1\quad 1)^T$. Собственные векторы $\varphi_1,\varphi_2$ матрицы $C$ нормируем:

$$d_1=\frac{1}{|\varphi_1|}\varphi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix};\quad d_2=\frac{1}{|\varphi_2|}\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Составляем преобразующую матрицу $D=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, приводящую матрицу $C$ к диагональному виду $\Lambda=D^{-1}CD=\begin{pmatrix}400 & 0\\ 0 & 100\end{pmatrix}$.

3. Вычисляем неотрицательную симметрическую матрицу

$$S=D\sqrt{\Lambda}\,D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{20}{\sqrt{2}} & \frac{10}{\sqrt{2}}\\ \frac{-20}{\sqrt{2}} & \frac{10}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -5\\ -5 & 15\end{pmatrix}.$$

4. Находим ортогональную матрицу

$$Q=S^{-1}A=\begin{pmatrix}15 & -5\\ -5 & 15\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-15 & 5\\ 13 & 9\end{pmatrix}=\frac{1}{200}\begin{pmatrix}15 & 5\\ 5 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15 & 5\\ 13 & 9\end{pmatrix}=\frac{1}{200}\begin{pmatrix}-160 & 120\\ 120 & 160\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}8 & 0{,}6\\ 0{,}6 & 0{,}8\end{pmatrix}.$$

5. Записываем полярное разложение $A = SQ$ матрицы $A$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -15 & 5 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}}_{Q}.$$

Этому разложению соответствует представление $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{Q}$ преобразования $\mathcal{A}$ в виде композиции самосопряженного преобразования $\mathcal{S}$ и ортогонального преобразования $\mathcal{Q}$, которые имеют в стандартном базисе $\bar{i}, \bar{j}$ найденные матрицы $S$ и $Q$ соответственно.

Выясняем геометрический смысл преобразования $\mathcal{A}$. Самосопряженное преобразование $\mathcal{S}$ представляет собой растяжения вдоль взаимно перпендикулярных направлений, которые определяются собственными векторами. Учитывая связь $\sqrt{\Lambda} = D^{-1} S\, D$, заключаем, что собственные значения матрицы $S$ равны $k_1 = \sqrt{\lambda_1} = 20$ и $k_2 = \sqrt{\lambda_2} = 10$, а собственными векторами матрицы $S$ служат столбцы $d_1$, $d_2$ или коллинеарные им столбцы $\varphi_1 = (1 \quad -1)^T$ и $\varphi_2 = (1 \quad 1)^T$. Значит, преобразование $\mathcal{S}$ есть композиция растяжения с коэффициентом $k_1 = 20$ вдоль направления $\overline{\varphi}_1 = \bar{i} - \bar{j}$ и растяжения с коэффициентом $k_2 = 10$ вдоль направления $\overline{\varphi}_2 = \bar{i} + \bar{j}$.

Осталось определить геометрический смысл ортогонального преобразования $\mathcal{Q}$. Для этого находим собственные векторы и собственные значения матрицы $Q$. Решая характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -0{,}8-\mu & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8-\mu \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - 1 = 0,$$

получаем $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$. Для собственного значения $\mu_1 = 1$ находим собственный вектор матрицы $Q$, например $\psi_1 = (1 \quad 3)^T$, а для $\mu_2 = -1$ аналогично получаем вектор $\psi_2 = (3 \quad -1)^T$. Этим столбцам $\psi_1$ и $\psi_2$ соответствуют собственные векторы $\overline{\psi}_1 = \bar{i} + 3\bar{j}$ и $\overline{\psi}_2 = 3\bar{i} - \bar{j}$ преобразования $\mathcal{Q}$. Следовательно, ортогональное преобразование $\mathcal{Q}$ представляет собой зеркальное отражение в подпространстве $Lin(\bar{i} + 3\bar{j})$.

*Ответ*: $\underbrace{\begin{pmatrix} -15 & 5 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}}_{Q}$; преобразование $\mathcal{A}$ является композицией зеркального отражения в подпространстве $Lin(\bar{i} + 3\bar{j})$ и растяжений вдоль направлений $\bar{i} - \bar{j}$ (с коэффициентом $k_1 = 20$) и $\bar{i} + \bar{j}$ (с коэффициентом $k_2 = 10$).

## 9. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ К ГЛАВНЫМ ОСЯМ

В разд. 7 в [7] была рассмотрена задача приведения вещественной квадратичной формы

$$q(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^TAx \qquad (9.1)$$

$n$ переменных $x_1,\dots,x_n$ к каноническому виду

$$\widetilde{q}(y)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_ny_n^2 \qquad (9.2)$$

при помощи невырожденной линейной замены переменных $x=Sy$. Для решения этой задачи использовался метод Лагранжа.

Рассмотрим другой подход к решению. Линейную невырожденную замену переменных $x=Sy$ с ортогональной матрицей $S$ ($S^{-1}=S^T$) будем называть ***ортогональной заменой переменных*** (или ***ортогональным преобразованием переменных***).

Сформулируем задачу ***приведения квадратичной формы к главным осям***: найти ортогональную замену переменных $x=Sy$ ($S^{-1}=S^T$), приводящую квадратичную форму (9.1) к каноническому виду (9.2).

При линейной невырожденной замене переменных $x=Sy$ получаем квадратичную форму $q(Sy)=y^TA'y$, матрица которой связана с матрицей квадратичной формы $q(x)=x^TAx$ равенством

$$A'=S^TAS.$$

Такое преобразование матриц называется ***конгруэнтным***. Для ортогональной матрицы $S$ конгруэнтное преобразование превращается в преобразование ***подобия***

$$A'=S^{-1}AS,$$

так как по определению ортогональной матрицы $S^T=S^{-1}$. Напомним, что матрица квадратичной формы симметрическая. Поэтому задача приведения квадратичной формы к главным осям эквивалентна задаче приведения симметрической матрицы $A$ к диагональному виду $\Lambda=diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$ при помощи преобразования подобия

$$\Lambda=S^{-1}AS \qquad (9.3)$$

с ортогональной преобразующей матрицей.

Геометрический смысл решения заключается в следующем. Если считать переменные $x_1,\dots,x_n$ координатами вектора $x$ пространства $\mathbb{R}^n$ в стандартном базисе $(e)=(e_1,...,e_n)$, а ортогональную матрицу $S$ – матрицей перехода от стандартного (ортонормированного) базиса к новому ортонормированному базису $(s)=(s_1,...,s_n)$, то формула $x=Sy$ замены переменных будет выражать связь координат вектора в разных базисах. Как известно из разд.8, чтобы привести симметрическую матрицу $A$ к диагональному виду (9.3), нужно выбрать ортонормированный базис $(s)=(s_1,...,s_n)$ из собственных векторов матрицы $A$.

Отметим, что квадратичная форма (9.2) не изменяется при замене знака одной или нескольких переменных, т.е. при замене $y_i \to -y_i$. Поэтому координатные оси нового базиса являются осями симметрии. Напомним, что в задаче приведения линии второго порядка к каноническому виду (см. разд. 5,6 в [8]) оси канонической системы координат являлись осями симметрии, например, эллипса или гиперболы, и назывались их ***главными осями***. Поэтому оси (канонической) системы координат, в которой квадратичная форма имеет канонический вид называют ее ***главными осями***.

**Теорема (о приведении квадратичной формы к главным осям).** *Вещественная квадратичная форма* (9.1) *при помощи ортогонального преобразования переменных* $x=Sy$ *может быть приведена к каноническому виду* (9.2), *где* $\lambda_1,...,\lambda_n$ *– собственные значения матрицы* $A$.

Для решения этой задачи можно использовать алгоритм приведения матрицы самосопряженного преобразования к каноническому виду (см. разд.8).

### Алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям

Чтобы привести квадратичную форму (9.1) нужно найди ортогональную замену $x=Sy$ переменных и канонический вид (9.2) квадратичной формы. Для этого нужно выполнить следующие действия.

1. Составить матрицу $A$ квадратичной формы.

2. Записать характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$, найти его корни $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ и их алгебраические кратности $n_1,\ldots,n_k$ ($n_1+...+n_k=n$).

3. Для корня $\lambda_1$ кратности $n_1$ найти фундаментальную систему $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n_1}$ решений однородной системы $(A-\lambda_1 E)x=o$. Столбцы $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n_1}$ ортогонализировать и нормировать. Получим $n_1$ столбцов $s_1,\ldots,s_{n_1}$.

4. Выполнить п.3 для остальных собственных значений $\lambda_2,\ldots,\lambda_k$. Получаемые в результате группы столбцов последовательно записать в искомую матрицу $S$

$$S = (\underbrace{s_1 \dots s_{n_1}}_{n_1} \mid \underbrace{s_{n_1+1} \dots s_{n_1+n_2}}_{n_2} \mid \dots \mid \underbrace{s_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \dots s_{n_1+\ldots+n_k}}_{n_k})$$

ортогональной замены переменных $x = Sy$, которая приводит квадратичную форму к искомому каноническому виду

$$q(Sy) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_1 y_{n_1}^2 + \lambda_2 y_{n_1+1}^2 + \ldots + \lambda_2 y_{n_1+n_2}^2 + \ldots + \lambda_k y_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}^2 + \ldots + \lambda_k y_n^2 .$$

Матрица этой квадратичной формы диагональная $\Lambda = diag(\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{n_1}, \underbrace{\lambda_2,\ldots,\lambda_2}_{n_2},\ldots, \underbrace{\lambda_k,\ldots,\lambda_k}_{n_k})$.

**Пример 15.** Найти ортогональную замену переменных $x = Sy$, приводящую квадратичную форму $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ к главным осям. В ответе указать канонический вид и матрицу $S$.

*Решение*. Составляем матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. В примере 12 (см. преобразование $\mathscr{B}$) были найдены канонический вид $diag(0, 0, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ этой матрицы и ортогональная преобразующая матрица

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \tag{9.4}$$

приводящая матрицу $A$ к диагональному виду (9.3). Следовательно, искомый канонический вид квадратичной формы: $\tilde{q}(Sy) = 3y_3^2$.

*Ответ*: канонический вид квадратичной формы $3y_3^2$; матрица ортогональной замены переменных (9.4).

### Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду

Сформулируем задачу приведения пары квадратичных форм к каноническому виду. Пусть заданы две квадратичные формы

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = x^T Ax \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j = x^T Bx .$$

Требуется найти линейную невырожденную замену переменных $x = Sy$, которая одновременно приводит обе формы к каноническому виду.

Достаточным условие существования решения является определенность (положительная или отрицательная) одной формы из заданной пары. Напомним, что квадратичная форма $g(x)$ называется положительно (отрицательно) определенной, если $g(x) > 0$ (соответственно, $g(x) < 0$) для всех $x \neq o$ (см. разд. 7 в [7]).

**Теорема (о паре квадратичных форм).** *Пусть задана пара квадратичных форм* $f(x) = x^T Ax$ *и* $g(x) = x^T Bx$, *причем форма* $g(x)$ *положительно* (*отрицательно*) *определенная. Тогда существует невырожденная замена* $x = Sy$ *переменных, которая одновременно приводит форму* $f(x)$ *к каноническому виду* $f(Sy) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, *а форму* $g(x)$ *к нормальному виду* $g(Sy) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$ (*соответственно* $g(Sy) = -y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2$).

### Алгоритм приведения пары квадратичных форм к каноническому виду

Рассмотрим решение задачи в случае положительной определенности квадратичной формы $g(x) = x^T Bx$.

1. Составить ***характеристическое уравнение пары форм*** $\det(A - \lambda B) = 0$, найти его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и их алгебраические кратности $n_1, \ldots, n_k$ ($n_1 + \ldots + n_k = n$).

2. Для корня $\lambda_1$ кратности $n_1$ составить однородную систему $(A - \lambda_1 B)x = o$ и найти для нее фундаментальную систему $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_1}$ решений (***главные векторы пары форм***).

3. Систему главных векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_1}$ ортогонализировать (применяя процесс Грама – Шмидта), а затем найденную систему $s_1, \ldots, s_{n_1}$ ортогональных векторов нормировать. При ортогонализации и нормировке использовать скалярное произведение $(x, y) = x^T By$. В результате получим систему ортонормированных векторов $\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_{n_1}$.

4. Записать полученные столбцы $\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_{n_1}$ в первые $n_1$ столбцов матрицы $S$.

Выполнить п.2–4 для остальных собственных значений $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$, добавляя полученные столбцы в матрицу $S$. В результате получим искомую матрицу

$$S = (\underbrace{\hat{s}_1 \ldots \hat{s}_{n_1}}_{n_1} \mid \underbrace{\hat{s}_{n_1+1} \ldots \hat{s}_{n_1+n_2}}_{n_2} \mid \ldots \mid \underbrace{\hat{s}_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \ldots \hat{s}_{n_1+\ldots+n_k}}_{n_k})$$

замены переменных $x = Sy$, которая приводит квадратичную форму $f(x)$ к каноническому виду

$$f(Sy) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_1 y_{n_1}^2 + \lambda_2 y_{n_1+1}^2 + \ldots + \lambda_2 y_{n_1+n_2}^2 + \ldots + \lambda_k y_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}^2 + \ldots + \lambda_k y_n^2,$$

а квадратичную форму $g(x)$ к нормальному виду

$$g(Sy) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 .$$

Если квадратичная форма $g(x) = x^T Bx$ отрицательно определенная, то все шаги алгоритма нужно выполнить для положительно определенной квадратичной формы $\widetilde{g}(x) = x^T \widetilde{B}x$ с матрицей $\widetilde{B} = -B$, и в ответе вместо нормального вида $\widetilde{g}(Sy) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$ указать $g(Sy) = -y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2$.

**Пример 16.** Найти линейную невырожденную замену переменных, приводящую одну из пары квадратичных форм $f(x) = -4x_1x_2$ и $g(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$ к каноническому виду, а другую – к нормальному. В ответе указать канонический вид и замену переменных.

*Решение*. Сначала составляем матрицы данных квадратичных форм. Квадратичная форма $f(x) = -4x_1x_2$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, а квадратичная форма $g(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$ – матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Применяем критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм. Первый угловой минор матрицы $A$ равен нулю. Значит, матрица $A$ не является знакоопределенной. Знаки угловых миноров матрицы $B$ чередуются: $\Delta_1 = -1 < 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$, начиная с отрицательного. Следовательно, квадратичная форма $g(x)$ отрицательно определенная. Обозначим через $\widetilde{g}(x) = x^T \widetilde{B}x$ квадратичную форму с противоположной матрицей $\widetilde{B} = -B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Эта квадратичная форма положительно определенная. Применяем алгоритм для пары форм $f(x)$ и $\widetilde{g}(x)$.

1. Составляем характеристическое уравнение пары квадратичных форм $\det(A - \lambda\widetilde{B}) = 0$:

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right| = 0 \iff \begin{vmatrix} -\lambda & -2+\lambda \\ -2+\lambda & -4\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff 3\lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0 .$$

Находим его корни $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\frac{2}{3}$. Корни простые, т.е. $n_1=n_2=1$.

$2^1$. Для простого корня $\lambda_1=-2$ составляем расширенную матрицу однородной системы $(A-\lambda_1\widetilde{B})x=o$ и упрощаем ее

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{2} & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисную переменную через свободную $x_1=2x_2$. При $x_2=1$ имеем $x_1=2$. Следовательно, $\varphi_1=(2 \quad 1)^T$ – главный вектор пары форм.

$3^1$. Простому корню $\lambda_1=-2$ соответствует один главный вектор, поэтому процесс ортогонализации заканчивается на первом шаге: $s_1=\varphi_1=(2 \quad 1)^T$. Нормируем этот вектор относительно скалярного произведения $(x,y)=x^T\widetilde{B}y$. Находим скалярный квадрат

$$(s_1,s_1)=s_1^T\widetilde{B}s_1=(2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=(2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=4.$$

Следовательно, длина вектора $s_1$ равна двум: $|s_1|=2$. Тогда

$$\hat{s}_1=\frac{1}{|s_1|}s_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

$4^1$. Записываем полученный вектор в первый столбец искомой матрицы

$$S=\begin{pmatrix} 1 & \vdots \\ 0{,}5 & \vdots \end{pmatrix}.$$

Выполняем п. 2–4 для второго корня.

$2^2$. Для простого корня $\lambda_2=\frac{2}{3}$ составляем расширенную матрицу однородной системы $(A-\lambda_2\widetilde{B})x=o$ и упрощаем ее

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{2}{3} & -2+\frac{2}{3} & 0 \\ -2+\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Находим ненулевое решение $\varphi_2=(2 \quad -1)^T$ – главный вектор пары форм.

$3^2$. Простому корню $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ соответствует один главный вектор, поэтому процесс ортогонализации заканчивается на первом шаге: $s_2 = \varphi_2 = (2 \quad -1)^T$. Нормируем этот вектор относительно скалярного произведения $(x, y) = x^T \widetilde{B} y$. Находим скалярный квадрат

$$(s_2, s_2) = s_2^T \widetilde{B} s_2 = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 12 .$$

Следовательно, $|s_2| = 2\sqrt{3}$. Тогда

$$\hat{s}_2 = \frac{1}{|s_2|} s_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$4^2$. Записываем полученный вектор во второй столбец искомой матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0{,}5 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Замена переменных $x = Sy$, соответствующая найденной матрице $S$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2, \\ x_1 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} y_2. \end{cases}$$

При такой замене квадратичная форма $f(x)$ приводится к каноническому виду

$$f(Sy) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = -2 y_1^2 + \tfrac{2}{3} y_2^2 ,$$

а форма $g(x)$ – к нормальному $g(Sy) = -y_1^2 - y_2^2$.

*Ответ*: $x_1 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2$, $x_1 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} y_2$; $f(Sy) = -2 y_1^2 + \frac{2}{3} y_2^2$.

## ВАРИАНТЫ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. В таблице 1 приведены определения трех множеств: $U$ – множество геометрических векторов, $V$ – множество действительных матриц (в частности, строк); $W$ – множество действительных функций одной переменной (в частности, многочленов). Является ли каждое из этих множеств векторным пространством над полем действительных чисел относительно обычных операций сложения элементов и умножения элемента на число? Если нет, то указать, какие именно свойства векторного пространства не выполнены. Если образует, то найти его размерность и базис.

Таблица 1.

| Вар. | Мн-во | Определение множества |
|---|---|---|
| **1** | $U$ | Множество всех геометрических векторов, являющихся линейными комбинациями данных ненулевых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$. |
| | $V$ | Множество всех строк из 4 чисел, сумма крайних элементов каждой из которых равна 1. |
| | $W$ | Множество всех нечетных многочленов не выше третьей степени. |
| **2** | $U$ | Множество всех единичных геометрических векторов пространства. |
| | $V$ | Множество всех строк из 4 чисел. |
| | $W$ | Множество всех четных многочленов не выше третьей степени. |
| **3** | $U$ | Множество всех приложенных к точке $O$ геометрических радиус-векторов, концы которых принадлежат плоскости, проходящей через точку $O$. |
| | $V$ | Множество всех строк из 4 чисел, сумма элементов каждой из которых равна 1. |
| | $W$ | Множество всех линейных комбинаций функций: 1, $\sin^2 t$, $\cos^2 t$, $\sin 2t$, $\cos 2t$. |
| **4** | $U$ | Множество всех приложенных к точке $O$ геометрических радиус-векторов, концы которых принадлежат прямой, не проходящей через точку $O$. |
| | $V$ | Множество всех строк из 4 чисел, сумма элементов каждой из которых равна 0. |
| | $W$ | Множество всех линейных комбинаций функций: 1, $e^t$, $e^{t+1}$, $e^{t-1}$, $t\,e^t$. |
| **5** | $U$ | Множество всех геометрических векторов, векторное произведение каждого из которых с данным вектором $\overline{a}$ равно $\overline{0}$. |
| | $V$ | Множество всех верхних треугольных матриц третьего порядка. |
| | $W$ | Множество функций, монотонных на $[-1;1]$. |
| **6** | $U$ | Множество всех приложенных к точке $O$ геометрических радиус-векторов, концы которых принадлежат прямой, проходящей через точку $O$. |
| | $V$ | Множество всех невырожденных квадратных матриц второго порядка. |
| | $W$ | Множество многочленов $p(x)$ не выше второй степени, удовлетворяющих условию $p'(1)=0$. |

| | | |
|---|---|---|
| **7** | $U$ | Множество всех геометрических векторов, скалярное произведение каждого из которых с данным вектором $\overline{a}$ равно 1. |
| | $V$ | Множество всех квадратных матриц третьего порядка с нулевыми элементами на главной диагонали. |
| | $W$ | Множество многочленов $p(x)$ не выше второй степени, удовлетворяющих условию $p(1)=0$. |
| **8** | $U$ | Множество всех геометрических векторов пространства, перпендикулярных данной плоскости. |
| | $V$ | Множество всех квадратных матриц второго порядка, сумма элементов каждой из которых равна 1. |
| | $W$ | Множество многочленов $p(x)$ не выше второй степени, удовлетворяющих условию $p(0)+p'(0)=0$. |
| **9** | $U$ | Множество всех геометрических векторов пространства, перпендикулярных данной прямой. |
| | $V$ | Множество всех вырожденных квадратных матриц второго порядка. |
| | $W$ | Множество многочленов $p(x)$ не выше второй степени, удовлетворяющих условию $p(0)+p(1)=0$. |
| **10** | $U$ | Множество всех геометрических векторов пространства, принадлежащих данной прямой или параллельных ей. |
| | $V$ | Множество всех строк из 4 чисел, произведение двух крайних элементов каждой из которых равно 0. |
| | $W$ | Множество многочленов $p(x)$ не выше второй степени, удовлетворяющих условию $p(0)+p'(0)=0$. |
| **11** | $U$ | Множество всех геометрических векторов пространства, принадлежащих данной плоскости или параллельных ей. |
| | $V$ | Множество всех квадратных матриц второго порядка, для каждой из которых столбец $(1 \quad 2)^T$ является собственным вектором, соответствующим нулевому собственному значению. |
| | $W$ | Множество многочленов $p(x)$ не выше второй степени, удовлетворяющих условию $p'(1)=1$. |
| **12** | $U$ | Множество всех приложенных к точке $O$ геометрических радиус-векторов, являющихся аффинными комбинациями данных некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. |
| | $V$ | Множество всех строк из 5 чисел, два крайних элемента каждой из которых равны. |
| | $W$ | Множество всех линейных комбинаций функций: $e^t$, $e^{t-1}\sin t$, $e^{t+1}\cos t$. |
| **13** | $U$ | Множество всех приложенных к точке $O$ геометрических радиус-векторов, являющихся неотрицательными линейными комбинациями данных некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. |
| | $V$ | Множество всех нижних треугольных матриц третьего порядка. |
| | $W$ | Множество многочленов степени не выше второй, сумма коэффициентов каждого из которых равна нулю. |
| **14** | $U$ | Множество всех геометрических векторов пространства, каждый из которых имеет равную нулю абсциссу. |
| | $V$ | Множество всех диагональных матриц третьего порядка. |
| | $W$ | Множество многочленов степени не выше второй, сумма коэффициентов каждого из которых равна 1. |

| | | |
|---|---|---|
| **15** | $U$ | Множество всех геометрических векторов пространства, каждый из которых имеет хотя бы одну нулевую координату. |
| | $V$ | Множество всех матриц размеров $2\times 3$. |
| | $W$ | Множество многочленов третьей степени. |
| **16** | $U$ | Множество всех геометрических векторов пространства, все координаты каждого из которых равны. |
| | $V$ | Множество всех кососимметрических матриц третьего порядка. |
| | $W$ | Множество функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $f(0)=1$. |
| **17** | $U$ | Множество всех геометрических векторов пространства, сумма координат каждого из которых равна 1. |
| | $V$ | Множество всех симметрических матриц второго порядка. |
| | $W$ | Множество многочленов $p(x)$ не выше третьей степени, удовлетворяющих условию $p''(1)=0$. |
| **18** | $U$ | Множество всех геометрических векторов пространства, сумма координат каждого из которых равна 0. |
| | $V$ | Множество всех квадратных матриц второго порядка, для каждой из которых столбец $(1 \quad 2)^T$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda=1$. |
| | $W$ | Множество многочленов $p(x)$ не выше второй степени, удовлетворяющих условию $p(1)=p'(1)$. |
| **19** | $U$ | Множество всех геометрических векторов пространства, каждый из которых образует с данной прямой угол $\alpha$ ($0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$). |
| | $V$ | Множество всех строк из 4 чисел, произведение крайних элементов каждой из которых равно 1. |
| | $W$ | Множество многочленов $p(x)$ не выше второй степени, удовлетворяющих условию $p(-1)=p(1)$. |
| **20** | $U$ | Множество всех геометрических векторов пространства, каждый из которых образует с данной плоскостью угол $\alpha$ ($0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$). |
| | $V$ | Множество всех строк из 4 чисел, сумма крайних элементов каждой из которых равна 1. |
| | $W$ | Множество многочленов $p(x)$ не выше третьей степени, удовлетворяющих условию $p'(-1)=p'(1)$. |

**2.** Доказать, что каждая из систем векторов $(a) = (a_1, a_2, a_3)$ и $(b) = (b_1, b_2, b_3)$, приведенных в таблице 2, образует базис в пространстве $\mathbb{R}^3$. Найти матрицу перехода от базиса $(a)$ к базису $(b)$ и координаты вектора $x$ в базисе $(a)$ и $(b)$, если известны его координаты в стандартном базисе $(e) = (e_1, e_2, e_3)$, где $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_1 = (0, 0, 1)^T$.

Таблица 2.

| **Вар.** | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ |
| **2** | $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-5\\12\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ |
| **3** | $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\3\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\-3\\10\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ |
| **4** | $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}5\\6\\11\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\7\\6\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ |
| **5** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-5\\-6\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-8\\-8\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ |
| **6** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-5\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-1\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-7\\-10\\14\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ |
| **7** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-5\\-5\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-5\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\-6\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ |
| **8** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-6\\-8\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-8\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-7\\-18\\9\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ |
| **9** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\-7\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **10** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\-7\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-3\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-5\\-9\\7\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ |
| **11** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\-7\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-5\\-9\\-5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\1\\-7\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ |
| **12** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-5\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-7\\-6\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\-2\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ |
| **13** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-5\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\7\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\-11\\6\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ |
| **14** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\-7\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\1\\6\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ |
| **15** | $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}5\\-7\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-5\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-4\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ |
| **16** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-5\\-9\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-3\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ |
| **17** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\-9\\-5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-3\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ |
| **18** | $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-6\\-8\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\-1\\8\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\1\\-12\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ |
| **19** | $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\-7\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ |
| **20** | $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\5\\-5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-5\\-11\\15\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\-4\\8\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ |

**3.** Найти размерность и базис каждого из подпространств $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, их алгебраической суммы $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ и пересечения $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$, если подпространство $\boldsymbol{A}$ задано линейной оболочкой своих образующих $\boldsymbol{A}=Lin(a_1,a_2,a_3,a_4)$, а подпространство $\boldsymbol{B}$ – системой уравнений $Bx=0$. Образующие $a_1, a_2, a_3, a_4$ и матрица $B$ системы уравнений приведены в таблице 3.

Таблица 3.

| **Вар.** | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}5\\9\\0\\-7\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\9\\-6\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\6\\1\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&-1&-2&-1\\3&-3&-3&-2\\2&-2&-1&-1\end{pmatrix}$ |
| **2** | $\begin{pmatrix}-2\\9\\7\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\1\\1\\5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\8\\6\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\5\\6\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\3&2&-5&-4\\5&6&-9&2\end{pmatrix}$ |
| **3** | $\begin{pmatrix}1\\-5\\-3\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\8\\6\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\3&-1&0&-2\\5&-1&-1&-3\end{pmatrix}$ |
| **4** | $\begin{pmatrix}-1\\7\\-6\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}5\\-8\\6\\-5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\6\\-6\\-9\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-7\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&-2&-3&0\\-4&-1&1&1\\3&3&2&-1\end{pmatrix}$ |
| **5** | $\begin{pmatrix}-1\\6\\4\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}5\\-6\\7\\7\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\-4\\1\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\-2\\4\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1&2&1&3\\3&2&-4&2\\1&6&-2&8\end{pmatrix}$ |
| **6** | $\begin{pmatrix}-1\\5\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\8\\1\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-3\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\-3\\1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&1&1\\3&1&-2&2\\-2&1&3&-1\end{pmatrix}$ |
| **7** | $\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\9\\7\\-7\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\\2&1&-2&-3\\3&2&-3&-4\end{pmatrix}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **8** | $\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\8\\-5\\5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\5\\-3\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&4&1\\3&5&6&7\\-1&-1&2&-5\end{pmatrix}$ |
| **9** | $\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\7\\-2\\9\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\3\\4\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\2&3&-1&1\\3&4&-1&2\end{pmatrix}$ |
| **10** | $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-5\\7\\7\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\6\\4\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1&0&-1&1\\-3&1&-4&1\\5&-2&7&-1\end{pmatrix}$ |
| **11** | $\begin{pmatrix}3\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}7\\-4\\-8\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-4\\-4\\-5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\4\\2\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\-3&0&-4&3\\2&1&4&-5\end{pmatrix}$ |
| **12** | $\begin{pmatrix}2\\9\\1\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}11\\3\\-8\\7\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&1&-1&-2\\-2&-3&7&1\\3&4&-8&-3\end{pmatrix}$ |
| **13** | $\begin{pmatrix}2\\8\\1\\7\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\6\\-2\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\4\\-5\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\-3&1&1&-1\\2&-2&-1&2\end{pmatrix}$ |
| **14** | $\begin{pmatrix}3\\7\\-2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\9\\-1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-1\\5\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&-1&5&4\\4&-5&3&-3\\3&-4&-2&-7\end{pmatrix}$ |
| **15** | $\begin{pmatrix}2\\6\\-1\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-2\\3\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&1&1&-4\\3&-4&2&3\\4&-3&3&-1\end{pmatrix}$ |
| **16** | $\begin{pmatrix}2\\5\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\8\\-1\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\\5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\3&-1&4&-2\\4&-2&5&-3\end{pmatrix}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **17** | $\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\9\\-4\\5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}5\\7\\0\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\3\\1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\5 & -4 & -1 & -6\\3 & -2 & -1 & -4\end{pmatrix}$ |
| **18** | $\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\2\\8\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\5\\-2\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1 & -6 & -1 & 2\\2 & 5 & 1 & 1\\1 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ |
| **19** | $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-4\\5\\5\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\3\\2\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1\\3 & -1 & 6 & -4\\2 & 1 & 7 & -3\end{pmatrix}$ |
| **20** | $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}5\\2\\-4\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1 & 0 & -4 & 5\\3 & 1 & 2 & 1\\2 & 1 & -2 & 6\end{pmatrix}$ |

**4.** Можно ли в векторных пространствах $\mathbb{R}^2$ (столбцов из двух действительных чисел) и $P_2$ (многочленов степени не выше второй) задать скалярное произведение формулами (1) или (2), приведенными в таблице 4? Если можно, то найти угол между первыми двумя векторами стандартного базиса.

Таблица 4.

| **Вар.** | **Пр-во** | **Формула (1)** | **Формула (2)** |
|---|---|---|---|
| **1** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$ | $(x,y)=2x_1y_1+x_2y_2+1$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(0)q(0)+p(1)q(1)$ | $(p,q)=\int\limits_{-1}^{1}p(x)q(x)dx+p'(0)q'(0)$ |
| **2** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$ | $(x,y)=2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(0)q(0)+p^2(1)q^2(1)$ | $(p,q)=\int\limits_{0}^{1}[p(x)q(x)+p'(x)q'(x)]dx$ |
| **3** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2$ | $(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+2p(2)q(2)$ | $(p,q)=\int\limits_{0}^{1}[p(x)q(x)-p'(x)q'(x)]dx$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **4** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=2x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+3x_2y_2$ | $(x,y)=2x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(0)q(0)+p'(1)q'(1)$ | $(p,q)=\int\limits_{-1}^{1}[p(x)q(x)+p''(x)q''(x)]dx$ |
| **5** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=x_1y_1+x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$ | $(x,y)=2x_1y_1+x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(1)q(1)+p'(1)q'(1)+p''(1)q''(1)$ | $(p,q)=\int\limits_{0}^{1}[p'(x)q'(x)+p''(x)q''(x)]dx$ |
| **6** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=-x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$ | $(x,y)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(1)q(1)-p'(1)q'(1)+p''(1)q''(1)$ | $(p,q)=\int\limits_{0}^{1}[p(x)q(x)+2p'(x)q'(x)]dx$ |
| **7** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+5x_2y_2$ | $(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+p'(2)q'(2)$ | $(p,q)=\int\limits_{-1}^{1}p(x)q'(x)dx$ |
| **8** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$ | $(x,y)=x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+5x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+p''(1)q''(1)$ | $(p,q)=\int\limits_{-1}^{1}p'(x)q''(x)dx$ |
| **9** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=5x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+x_2y_2$ | $(x,y)=2x_1y_1+x_2y_1+x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p'(0)q'(0)+p'(1)q'(1)+p(1)q(1)$ | $(p,q)=\int\limits_{-1}^{1}p''(x)q''(x)dx$ |
| **10** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+2x_2y_2$ | $(x,y)=5x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(0)q(0)+p''(1)q''(1)$ | $(p,q)=\int\limits_{-1}^{1}p(x)q(x)dx+p(0)q(0)$ |
| **11** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=\lvert x_1\rvert+\lvert y_1\rvert+x_2y_2$ | $(x,y)=3x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(0)q(0)+2p(1)q(1)+p(2)q(2)$ | $(p,q)=\int\limits_{-1}^{1}p'(x)q'(x)dx$ |
| **12** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=4x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2$ | $(x,y)=\lvert x_1\rvert+\lvert y_1\rvert+\lvert x_2y_2\rvert$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p'(0)q'(0)+p(1)q(1)-p(2)q(2)$ | $(p,q)=\int\limits_{-1}^{1}p'(x)q'(x)dx+p(0)q(0)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **13** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2$ | $(x,y)=4x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p'(0)q'(0)+p(1)q(1)+p'(2)q'(2)$ | $(p,q)=\int_{-1}^{1}p''(x)q''(x)dx+p(0)q(0)$ |
| **14** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=4x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+2x_2y_2$ | $(x,y)=x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p'(0)q'(0)+p''(1)q''(1)$ | $(p,q)=\int_{0}^{1}p'(x)q'(x)dx+2p(0)q(0)$ |
| **15** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=x_1^2y_1^2+x_2y_2$ | $(x,y)=4x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p''(0)q''(0)+p''(1)q''(1)$ | $(p,q)=\int_{0}^{1}p(x)q(x)dx+2p(0)q(0)$ |
| **16** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+5x_2y_2$ | $(x,y)=x_1y_1+2x_2y_2+1$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(1)q'(1)+p'(1)q(1)$ | $(p,q)=\int_{0}^{1}p(x)q(x)dx+p'(0)q'(0)$ |
| **17** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=\lvert x_1\rvert\cdot\lvert y_1\rvert+x_2y_2$ | $(x,y)=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+5x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(1)q(1)+p(1)q'(1)+p'(1)q(1)$ | $(p,q)=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx+p''(0)q''(0)$ |
| **18** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=2x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+3x_2y_2$ | $(x,y)=x_1y_2-x_2y_1$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(0)q(0)+2p(1)q(1)+3p(2)q(2)$ | $(p,q)=\int_{-1}^{1}p'(x)q'(x)dx+p''(0)q''(0)$ |
| **19** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1-x_2y_2$ | $(x,y)=2x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+3x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p(1)q(1)+2p(2)q(2)+3p(3)q(3)$ | $(p,q)=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx+p(-1)q(1)$ |
| **20** | $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=3x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+2x_2y_2$ | $(x,y)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1-x_2y_2$ |
| | $P_2$ | $(p,q)=p'(1)q'(1)+p(1)q'(1)+p'(1)q(1)$ | $(p,q)=\int_{0}^{1}p(x)q(x)dx+2p(0)q(0)$ |

**5.** Элементы $a_1, a_2, a_3, a_4$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением $(x, y) = x^T y$ приведены в таблице 5. Применяя процесс ортогонализации к системе элементов $a_1, a_2, a_3, a_4$, найти ортогональный базис подпространства $\boldsymbol{A} = Lin(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Дополнить этот базис до ортогонального базиса всего пространства $\mathbb{R}^4$.

Таблица 5.

| **Вар.** | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | **Вар.** | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-1\\6\\7\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-4\\3\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\6\end{pmatrix}$ | **2** | $\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\4\\5\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\1\end{pmatrix}$ |
| **3** | $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\2\\0\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}8\\3\\3\\4\end{pmatrix}$ | **4** | $\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\5\\4\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\\3\end{pmatrix}$ |
| **5** | $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ | **6** | $\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}5\\4\\-4\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\2\\-4\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\-2\\0\\2\end{pmatrix}$ |
| **7** | $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\5\\0\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\3\\4\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\5\\0\\4\end{pmatrix}$ | **8** | $\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}7\\-2\\1\\-6\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\4\\3\\-8\end{pmatrix}$ |
| **9** | $\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\2\\-3\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\6\\-1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\6\\1\\-2\end{pmatrix}$ | **10** | $\begin{pmatrix}0\\2\\2\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\5\\5\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\0\end{pmatrix}$ |
| **11** | $\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\3\\-6\\-9\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-7\\0\\3\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\1\\3\\7\end{pmatrix}$ | **12** | $\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-5\\5\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-5\\5\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\-7\end{pmatrix}$ |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **13** | $\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}5\\-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ | **14** | $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$ |
| **15** | $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\0\\-5\\0\end{pmatrix}$ | **16** | $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ |
| **17** | $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-1\\3\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\4\\-3\\1\end{pmatrix}$ | **18** | $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\0\\5\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\2\\1\\4\end{pmatrix}$ |
| **19** | $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}$ | **20** | $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\2\\8\\-7\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\2\\-4\\0\end{pmatrix}$ |

**6.** В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением $(x,y)=x^T y$ заданы столбцы $a_1, a_2, a_3$ и подпространство $\boldsymbol{B}$ – множество решений однородной системы $Bx=0$. Столбцы $a_1, a_2, a_3$ и матрица $B$ приведены в таблице 6. Найти:

а) величину угла между вектором $x$ (см. табл. 6) и подпространством $Lin(a_1, a_2, a_3)$;

б) ортогональную проекцию $b \in \boldsymbol{B}$ вектора $y$ (см. табл. 6) на подпространство $\boldsymbol{B}$ и его ортогональную составляющую (перпендикуляр) $h \in \boldsymbol{B}^{\perp}$ относительно подпространства $\boldsymbol{B}$.

Таблица 6.

| **Вар.** | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $x$ | $B$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\-1 & -4 & -2 & -6\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$ |
| **2** | $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\-3 & -2 & -1 & -4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-3\\0\\-1\end{pmatrix}$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **3** | $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\1\\5\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\2&2&1&-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-5\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ |
| **4** | $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\2\\0\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\4\\-4\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2&1&1&0\\1&1&-2&-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\1\\5\\3\end{pmatrix}$ |
| **5** | $\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&-2&0&-2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\\3\end{pmatrix}$ |
| **6** | $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}6\\-2\\1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\5\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2&1&2&1\\-2&-1&0&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$ |
| **7** | $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\3\\3\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\1&0&2&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ |
| **8** | $\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\2\\2\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2&-1&-1&1\\2&0&1&-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ |
| **9** | $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\1&2&-2&2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-2\end{pmatrix}$ |
| **10** | $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\3\\4\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\1&0&-1&-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-3\\0\\3\end{pmatrix}$ |
| **11** | $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\-1&2&1&-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **12** | $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\5\\2\\-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\2&0&1&0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$ |
| **13** | $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\1&-1&2&2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$ |
| **14** | $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-5\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\2&-1&-1&-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$ |
| **15** | $\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-2\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&2&1\\1&-2&2&-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ |
| **16** | $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\5\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&0&2\\-1&-1&-1&-3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\4\end{pmatrix}$ |
| **17** | $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-3\\1\\-3\\3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\1&3&0&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\4\\1\\2\end{pmatrix}$ |
| **18** | $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\3\\2\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&0&1&-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\1\\3\\3\end{pmatrix}$ |
| **19** | $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\4\\1\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&-1&2&0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\1\\5\\-1\end{pmatrix}$ |
| **20** | $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\3\\4\\1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\2&-1&3&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1\\-4\\0\\-2\end{pmatrix}$ |

**7.** Отображение $\mathcal{A}: P_1 \to P_2$ пространства $P_1$ многочленов не выше первой степени с действительными коэффициентами в пространство $P_2$ многочленов не выше второй степени задано в таблице 7. Для отображения $\mathcal{A}$ :

а) выяснить является ли оно инъективным, сюръективным, биективным, обратимым;

б) доказать линейность;

в) найти ядро, образ, дефект, ранг;

г) составить матрицу отображения относительно стандартных базисов.

Таблица 7.

| **Вар.** | **Отображение** | **Вар.** | **Отображение** |
|---|---|---|---|
| **1** | $\mathcal{A}(p(x)) = 2\int_0^x tp'(t)dt + 3p(x)$ | **2** | $\mathcal{A}(p(x)) = 4\int_0^x p(t)dt - xp'(x)$ |
| **3** | $\mathcal{A}(p(x)) = 4\int_0^x tp'(t)dt + xp'(x)$ | **4** | $\mathcal{A}(p(x)) = 2\int_0^x p(t)dt + 5xp(x)$ |
| **5** | $\mathcal{A}(p(x)) = 6\int_0^x tp'(t)dt - 2p(x)$ | **6** | $\mathcal{A}(p(x)) = 6\int_0^x p(t)dt - x^2 p'(x)$ |
| **7** | $\mathcal{A}(p(x)) = \int_0^x tp'(t)dt - x^2 p'(x)$ | **8** | $\mathcal{A}(p(x)) = 2\int_0^x p(t)dt + 3xp(x)$ |
| **9** | $\mathcal{A}(p(x)) = 4\int_0^x tp'(t)dt + p'(x)$ | **10** | $\mathcal{A}(p(x)) = 4\int_0^x p(t)dt - xp'(x)$ |
| **11** | $\mathcal{A}(p(x)) = 6\int_0^x tp'(t)dt + x^2 p'(x)$ | **12** | $\mathcal{A}(p(x)) = 2\int_0^x p(t)dt + xp(x)$ |
| **13** | $\mathcal{A}(p(x)) = 4\int_0^x tp'(t)dt - 3xp(x)$ | **14** | $\mathcal{A}(p(x)) = 4\int_0^x p(t)dt - x^2 p'(x)$ |
| **15** | $\mathcal{A}(p(x)) = 2\int_0^x tp'(t)dt + x^2 p'(x)$ | **16** | $\mathcal{A}(p(x)) = 6\int_0^x p(t)dt - xp(x)$ |
| **17** | $\mathcal{A}(p(x)) = 6\int_0^x tp'(t)dt + 2xp(x)$ | **18** | $\mathcal{A}(p(x)) = 4\int_0^x p(t)dt + x^2 p'(x)$ |
| **19** | $\mathcal{A}(p(x)) = 4\int_0^x tp'(t)dt + 3p'(x)$ | **20** | $\mathcal{A}(p(x)) = 2\int_0^x p(t)dt - 3xp(x)$ |

**8.** Преобразование $\mathcal{A}: V_3 \to V_3$ пространства $V_3$ геометрических векторов задано в таблице 8. Для этого преобразования:

а) выяснить, является ли оно инъективным, сюръективным, биективным, обратимым;

б) доказать линейность;

в) найти ядро, образ, дефект, ранг;

г) составить матрицу $A$ преобразования относительно стандартного базиса.

Таблица 8.

| **Вар.** | **Преобразование** |
|---|---|
| **1** | Ортогональное проектирование на плоскость, содержащую векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$. |
| **2** | Зеркальное отражение в плоскости, содержащей векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$. |
| **3** | Поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси, содержащей вектор $\bar{i}$ в направлении от вектора $\bar{j}$ к вектору $\bar{k}$. |
| **4** | Ортогональное проектирование на ось, содержащую вектор $\bar{i}+\bar{k}$. |
| **5** | Зеркальное отражение в оси, содержащей вектор $\bar{i}+\bar{k}$. |
| **6** | Ортогональное проектирование на плоскость, содержащую векторы $\bar{i}+\bar{k}$ и $\bar{j}$. |
| **7** | Зеркальное отражение в плоскости, содержащей векторы $\bar{i}+\bar{k}$ и $\bar{j}$. |
| **8** | Поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси, содержащей вектор $\bar{i}$ в направлении от вектора $\bar{k}$ к вектору $\bar{j}$. |
| **9** | Ортогональное проектирование на ось, содержащую вектор $\bar{i}+\bar{j}$. |
| **10** | Зеркальное отражение в оси, содержащей вектор $\bar{j}-\bar{k}$. |
| **11** | Ортогональное проектирование на плоскость, содержащую векторы $\bar{i}-\bar{k}$ и $\bar{j}$. |
| **12** | Зеркальное отражение в плоскости, содержащей векторы $\bar{i}-\bar{k}$ и $\bar{j}$. |
| **13** | Поворот на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси, содержащей вектор $\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ в направлении от вектора $\bar{i}$ к вектору $\bar{j}$. |
| **14** | Ортогональное проектирование на ось, содержащую вектор $\bar{k}-\bar{j}$. |
| **15** | Зеркальное отражение в оси, содержащей вектор $\bar{k}-\bar{j}$. |
| **16** | Ортогональное проектирование на плоскость, содержащую векторы $\bar{i}+\bar{j}$ и $\bar{k}$. |
| **17** | Зеркальное отражение в плоскости, содержащей векторы $\bar{i}+\bar{j}$ и $\bar{k}$. |
| **18** | Поворот на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси, содержащей вектор $\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ в направлении от вектора $\bar{j}$ к вектору $\bar{i}$. |
| **19** | Ортогональное проектирование на ось, содержащую вектор $\bar{i}-\bar{j}$. |
| **20** | Зеркальное отражение в оси, содержащей вектор $\bar{i}-\bar{j}$. |

**9.** Преобразование $\mathcal{A}: V_3 \to V_3$ пространства $V_3$ геометрических векторов задано в таблице 8. Для этого преобразования:

а) найти собственные векторы и собственные значения;

б) определить алгебраическую и геометрическую кратности собственных значений;

в) указать одномерные и двумерные инвариантные подпространства.

**10.** Линейные преобразования $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в некотором базисе имеют соответственно матрицы $A$, $B$, приведенные в таблице 9. Найти жордановы нормальные формы $J_A$ и $J_B$ матриц этих преобразований, а также матрицы перехода $S_A$ и $S_B$ к жорданову базису. Выполнить проверку, используя равенства $S_A J_A = A S_A$ и $S_B J_B = B S_B$.

Таблица 9.

| Вар. | $A$ | $B$ | Вар. | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 7 & -4 & 7 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ | **2** | $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **3** | $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ | **4** | $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 7 & -9 & 7 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ |
| **5** | $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ | **6** | $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ |
| **7** | $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 1 & -7 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ | **8** | $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 7 \\ -3 & 7 & 3 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ |
| **9** | $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | **10** | $\begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **11** | $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ | **12** | $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 7 \\ -3 & 8 & 3 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ |
| **13** | $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -8 & 5 & 9 \\ -3 & 1 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ | **14** | $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **15** | $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & 9 & 5 \\ -4 & 9 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ | **16** | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 7 & 7 & -9 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ |
| **17** | $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 9 & -8 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ | **18** | $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & -7 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 9 \\ -3 & 4 & 4 \\ -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ |
| **19** | $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | **20** | $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ 4 & 8 & -4 \\ 7 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ |

**11.** Найти степень $A^{20}$ матрицы, заданной в таблице 10, двумя способами:

а) приводя матрицу к жордановой нормальной форме;

б) используя характеристический многочлен матрицы как аннулирующий.

Таблица 10.

| **Вар.** | $A$ | **Вар.** | $A$ | **Вар.** | $A$ | **Вар.** | $A$ | **Вар.** | $A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$ | **2** | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$ | **3** | $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ | **4** | $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ | **5** | $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ |
| **6** | $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ | **7** | $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ | **8** | $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 12 & -10 \end{pmatrix}$ | **9** | $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ | **10** | $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ |
| **11** | $\begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$ | **12** | $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ | **13** | $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ | **14** | $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ | **15** | $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$ |
| **16** | $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ | **17** | $\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ | **18** | $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ | **19** | $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ | **20** | $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ |

**12.** Ортогональное преобразование $\mathcal{A}$ и самосопряженное преобразование $\mathcal{B}$ пространства геометрических векторов $V_3$ в ортонормированном базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеют соответственно матрицы $A$ и $B$, приведенные в таблице 11. Каждое преобразование привести к каноническому виду, т.е. найти ортонормированный базис $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$, в котором матрица преобразования имеет канонический вид (8.1) или (8.2), и найти эту матрицу. Выяснить геометрический смысл каждого преобразования.

Таблица 11.

| Вар. | *A* | *B* | Вар. | *A* | *B* |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | **2** | $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 2 & 25 & 10 \\ 10 & -10 & 23 \\ 25 & 2 & -10 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **3** | $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | **4** | $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 \\ -6 & 9 & 2 \\ 7 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **5** | $\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 6 & -6 & 17 \\ 18 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ | **6** | $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **7** | $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 25 & 2 & 10 \\ -10 & 10 & 23 \\ 2 & 25 & -10 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ | **8** | $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **9** | $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 9 & -6 & 2 \\ 6 & 7 & -6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ | **10** | $\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 18 & 1 & 6 \\ -6 & 6 & 17 \\ 1 & 18 & -6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **11** | $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ | **12** | $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 10 & 25 & 2 \\ 23 & -10 & 10 \\ -10 & 2 & 25 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **13** | $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ | **14** | $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 \\ 2 & 9 & -6 \\ -6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ |
| **15** | $\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 6 & 18 & 1 \\ 17 & -6 & 6 \\ -6 & 1 & 18 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ | **16** | $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 10 & 2 & 25 \\ 23 & 10 & -10 \\ -10 & 25 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **17** | $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ | **18** | $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 9 & -6 \\ -6 & 6 & 7 \\ 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **19** | $\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 18 \\ 17 & 6 & -6 \\ -6 & 18 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ | **20** | $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ |

**13.** Преобразование пространства геометрических векторов $V_2$ задано в таблице 12. Выяснить геометрический смысл сопряженного преобразования, найти его инвариантные подпространства и матрицу в стандартном базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$.

Таблица 12.

| **Вар.** | **Преобразование** |
|---|---|
| **1** | Проектирование на $L_1 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} - 2\bar{j})$. |
| **2** | Отражение в $L_1 = Lin(\bar{i} - \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} + 2\bar{j})$. |
| **3** | Проектирование на $L_1 = Lin(\bar{i} - \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(2\bar{i} + \bar{j})$. |
| **4** | Отражение в $L_1 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(2\bar{i} - \bar{j})$. |
| **5** | Проектирование на $L_1 = Lin(\bar{i} + 2\bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} - \bar{j})$. |
| **6** | Отражение в $L_1 = Lin(\bar{i} - 2\bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$. |
| **7** | Проектирование на $L_1 = Lin(2\bar{i} + \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} - \bar{j})$. |
| **8** | Отражение в $L_1 = Lin(2\bar{i} + \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$. |
| **9** | Проектирование на $L_1 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} - 2\bar{j})$. |
| **10** | Отражение в $L_1 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} - 2\bar{j})$. |
| **11** | Проектирование на $L_1 = Lin(\bar{i} + 2\bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$. |
| **12** | Отражение в $L_1 = Lin(\bar{i} - 2\bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$. |
| **13** | Проектирование на $L_1 = Lin(3\bar{i} + \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} - \bar{j})$. |
| **14** | Отражение в $L_1 = Lin(3\bar{i} - \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$. |
| **15** | Проектирование на $L_1 = Lin(\bar{i} + 3\bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} - \bar{j})$. |
| **16** | Отражение в $L_1 = Lin(\bar{i} - 3\bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$. |
| **17** | Проектирование на $L_1 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} - 3\bar{j})$. |
| **18** | Отражение в $L_1 = Lin(\bar{i} - \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} + 3\bar{j})$. |
| **19** | Проектирование на $L_1 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(3\bar{i} - \bar{j})$. |
| **20** | Отражение в $L_1 = Lin(\bar{i} - \bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(3\bar{i} + \bar{j})$. |

**14.** Преобразование $\mathcal{A}: V_2 \to V_2$ пространства $V_2$ – геометрических векторов в стандартном базисе $\bar{i}, \bar{j}$ имеет матрицу $A$, приведенную в таблице 13. Представить эту матрицу в виде произведения $A = SQ$ неотрицательной симметрической матрицы $S$ и ортогональной матрицы $Q$. Выяснить геометрический смысл преобразования $\mathcal{A}$, рассматривая его как композицию $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{Q}$ неотрицательного самосопряженного преобразования $\mathcal{S}$ (с матрицей $S$) и ортогонального преобразования $\mathcal{Q}$ (с матрицей $Q$).

Таблица 13.

| **Вар.** | $A$ | **Вар.** | $A$ | **Вар.** | $A$ | **Вар.** | $A$ | **Вар.** | $A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | **2** | $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ | **3** | $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ | **4** | $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ | **5** | $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **6** | $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ | **7** | $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ | **8** | $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ | **9** | $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ | **10** | $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ |
| **11** | $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ | **12** | $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ | **13** | $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ | **14** | $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ | **15** | $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ |
| **16** | $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ | **17** | $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ | **18** | $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ | **19** | $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ | **20** | $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ |

**15.** Найти ортогональную замену переменных $x = Sy$, приводящую квадратичную форму, заданную в таблице 14, к главным осям. В ответе указать канонический вид и матрицу $S$.

Таблица 14.

| **Вар.** | Квадратичная форма | **Вар.** | Квадратичная форма |
|---|---|---|---|
| **1** | $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ | **2** | $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ |
| **3** | $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ | **4** | $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ |
| **5** | $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ | **6** | $-4x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ |
| **7** | $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ | **8** | $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ |
| **9** | $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ | **10** | $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ |
| **11** | $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ | **12** | $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ |
| **13** | $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ | **14** | $2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ |
| **15** | $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ | **16** | $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ |
| **17** | $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ | **18** | $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **19** | $5x_1^2+5x_2^2+8x_3^2-8x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ | **20** | $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ |

**16.** Найти линейную невырожденную замену переменных, приводящую одну из пары квадратичных форм, указанных в таблице 15, к каноническому виду, а другую – к нормальному. В ответе указать канонический вид и замену переменных.

Таблица 15.

| **Вар.** | Квадратичные формы | |
|---|---|---|
| **1** | $14x^2-22xy+8.5y^2$ | $10x^2-14xy+5y^2$ |
| **2** | $36x^2-40xy+11y^2$ | $-13x^2+16xy-5y^2$ |
| **3** | $-25x^2+40xy-16y^2$ | $17x^2-26xy+10y^2$ |
| **4** | $-5.2x^2+2xy$ | $-34x^2+26xy-5y^2$ |
| **5** | $-9.8x^2+28xy-20y^2$ | $2x^2-6xy+5y^2$ |
| **6** | $24x^2-20xy+4y^2$ | $-13x^2+10xy-2y^2$ |
| **7** | $-4x^2+8xy-3y^2$ | $5x^2-16xy+13y^2$ |
| **8** | $49x^2-28xy+4y^2$ | $-25x^2+14xy-2y^2$ |
| **9** | $-29x^2+34xy-10y^2$ | $29x^2-34xy+10y^2$ |
| **10** | $5x^2-2xy+0.2y^2$ | $-5x^2+6xy-2y^2$ |
| **11** | $-12x^2-20xy-8y^2$ | $10x^2+14xy+5y^2$ |
| **12** | $-51x^2-64xy-20y^2$ | $-13x^2-16xy-5y^2$ |
| **13** | $25x^2+40xy+16y^2$ | $17x^2+26xy+10y^2$ |
| **14** | $-26x^2-10xy$ | $-34x^2-26xy-5y^2$ |
| **15** | $-0.2x^2+0.8xy-0.8y^2$ | $2x^2+6xy+5y^2$ |
| **16** | $-24x^2+20xy-4y^2$ | $-13x^2+10xy-2y^2$ |
| **17** | $-5x^2+16xy-12y^2$ | $5x^2-16xy+13y^2$ |
| **18** | $-49x^2+28xy-4y^2$ | $-25x^2+14xy-2y^2$ |
| **19** | $-24x^2+38xy-14y^2$ | $29x^2-34xy+10y^2$ |
| **20** | $0.8x^2+0.8xy+0.2y^2$ | $-5x^2+6xy-2y^2$ |

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984.

2. *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре/ Под ред. Д.В. Беклемишева. – М.: Наука, 1987.

3. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Линейная алгебра в примерах и задачах. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 2010.

4. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 2005.

5. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии// Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2007.

6. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Практический курс линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб. пособ. с мультимедиа-сопровождением. – М.: Университетская книга; Логос, 2008.

7. *Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.* Типовые задачи по линейной алгебре. Часть 1: Учебное пособие. – М.: Доброе слово, 2013.

8. *Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.* Типовые задачи по аналитической геометрии: Учебное пособие. – М.: Доброе слово, 2014.

9. *Икрамов Х.Д.* Задачник по линейной алгебре. – М.: Наука, 1975.

10. *Ильин В.А., Ким Г.Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.

11. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* – Математический анализ. М.: Наука, 1979.

12. *Ким Г.Д., Крицков Л.В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Часть 1.

13. *Ким Г.Д., Крицков Л.В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 2. – М.: ИКД «Зеркало-М», 2003.

14. *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. – М.: Наука, 1996.

15. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1978.

16. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа/ Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981.

---

**Учебное издание**

*Бортаковский Александр Сергеевич*

*Пегачкова Елена Александровна*

**ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ. Часть 2**

Корректура: Яковлева С.Ю.

Издательство «Доброе слово»

www.dobroeslovo.info

Подписано в печать: 7.11.2017

П.л. 17,5. Формат 60x90/8

Тираж 100 экз.