№ 7

Отображение $A: P_1 \to P_2$ пространства P_1 многочленов не выше первой степени с действительными коэффициентами в пространство P_2 многочленов не выше второй степени. Для отображения A:

а) выяснить, является ли оно инъективным, сюръективным, биективным, обратимым;

б) доказать линейность;

в) найти ядро, образ, дефект, ранг;

г) составить матрицу отображения стандартных базисов.

$A(p(x)) = 4\int_0^x t p'(t)dt + xp'(x)$

Решение:

Выполним п. б) задания. Отображение A является линейным по свойствам операций интегрирования и дифференцирования.

Выполним п. г) задания. Стандартные базисы в пространствах P_1 и P_2 — это многочлены $1, x$ и $1, x, x^2$ соответственно. Находим образ базисного многочлена из P_1, раскладываем его по базису P_2 и записываем координаты в столбец. Для первого элемента базиса (т.е. для 1) имеем $A(1) = 4\int_0^x t(1)'dt + x(1)' = 0+0=0$. Раскладываем по базису $0 = 0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2$ и записываем координаты в столбец $(0\ 0\ 0)^T$. Для второго элемента базиса (т.е. для x) аналогично находим образ. $A(x) = 4\int_0^x t\cdot 1dt + x\cdot 1 = 4\cdot\frac{1}{2}x^2+x = 2x^2+x$, раскладываем по базису $2x^2+x = 0\cdot 1+1\cdot x+2\cdot x^2$ и записываем координаты в столбец $(0\ 1\ 2)^T$. Из найденных координатных столбцов составляем матрицу отображения $A = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&2\end{pmatrix}$

Выполним п. в) задания. Находим все многочлены, отображающиеся в нулевой многочлен $0(x)$. Для этого получаем образ произвольного многочлена $p(x)=ax+b$ не выше первой степени. $A(ax+b) = 4\int_0^x t(ax+b)'dt + x(ax+b)' = 4\int_0^x t\cdot a\,dt + x\cdot a = 4\cdot\frac{ax^2}{2}+xa = 2ax^2+xa+0\cdot 1$. Этот многочлен совпадает с нулевым многочленом, если все его коэффициенты равны нулю, т.е. $a=0$. Отсюда следует, что $a=0$, $b\in\mathbb{R}$. Значит, в нулевой многочлен отображаются только многочлены нулевой степени. Поэтому ядро состоит из многочлена нулевой степени $Ker A = \{b\in\mathbb{R}\}$, дефект $d=\dim(Ker A)=1$.

Теперь находим образ $Im A$. Из равенства $A(ax+b) = 4\int t a dt + xa = 2ax^2+xa = a(2x^2+x)+b\cdot 0$ следует, что образ любого многочлена является линейной комбинацией многочленов $2x^2+x$ и $0(x)$. Значит, образ отображения есть линейная оболочка многочлена $2x^2+x$, т.е. $Im A = Lin(2x^2+x)$, $r=\dim(Im A)=1$. Ранг отображения равен рангу его матрицы, т.е. $\dim(Im A) = 1 = rg A$, а сумма размерностей ядра и образа равна размерности пространства прообразов: $\dim(Ker A)+\dim(Im A) = 1+1=2=\dim P_1$.

Выполним п. а) задания. Отображение не является инъективным, так как $\dim(Ker A)=1$. Отображение не является сюръективным, так как $\dim(Im A)=1\neq \dim P_2=3$. Поскольку отображение не является сюръективным, то оно не является биективным и обратимым.

Ответ: Отображение A: а) не является инъективным, сюръективным, биективным, обратимым; в) $Ker A=\{b\in\mathbb{R}\}$, $d=1$; $Im A = Lin(2x^2+x)$, $1=r$; г) $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&2\end{pmatrix}$.

№8

Преобразование $A: V_3 \to V_3$ пространства геометрических векторов. Для этого преобразования:

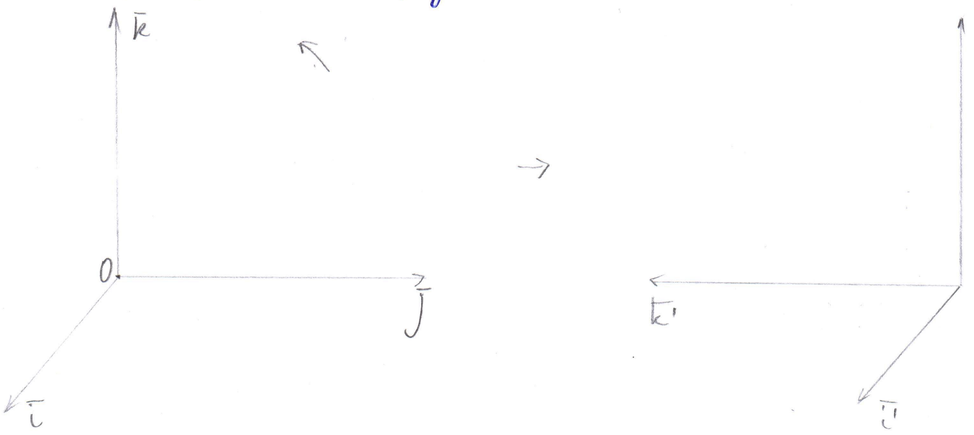
а) выяснить, является ли оно инъективным, сюръективным, биективным, обратимым;

б) доказать линейность;

в) найти ядро, образ, дефект, ранг;

г) составить матрицу A преобразования относительно стандартного базиса.

Поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси, содержащей вектор $\bar{i}$, в направлении от вектора $\bar{j}$ к вектору $\bar{k}$.



Найдем матрицу поворота в стандартном ортонормированном базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Раскладывая образы $\bar{i}' = A(\bar{i})$, $\bar{j}' = A(\bar{k})$, $\bar{k}' = A(\bar{j})$ базисных векторов по базису, получаем

$$\begin{aligned} \bar{i}' &= \bar{i} \\ \bar{j}' &= \cos\frac{\pi}{2}\cdot\bar{j} + \sin\frac{\pi}{2}\,\bar{k} \\ \bar{k}' &= -\sin\frac{\pi}{2}\,\bar{j} + \cos\frac{\pi}{2}\cdot\bar{k} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \bar{i}' &= \bar{i} \\ \bar{j}' &= \bar{k} \\ \bar{k}' &= -\bar{j} \end{aligned}$$

Составляем матрицу преобразования, записывая найденные координаты образов по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Ядро преобразования $\operatorname{Ker} A = \{\bar{0}\}$, образ преобразования $\operatorname{Im} A = V_3$, дефект $d=0$, ранг $r=3$.

Это преобразование линейное, инъективное, сюръективное, биективное, обратимое.