Вопрос 1

Множество $\mathbb{R}$ называется **множеством действительных чисел,** а его элементы действительными числами, если выполнены следующие условия:

1. Аксиомы сложения. Определено отображение (операция сложения) $+: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такое что

а) существует нейтральный элемент 0 (нуль) такой, что $0+x=x+0=x$ для любого элемента $x\in\mathbb{R}$;

б) для любого $x\in\mathbb{R}$ существует $-x\in\mathbb{R}$, такой что $x+(-x)=(-x)+x=0$;

в) ассоциативность $x+(y+z)=(x+y)+z$, для любых $x,y,z\in\mathbb{R}$;

г) коммутативность $x+y=y+x$ для любых $x,y\in\mathbb{R}$;

2. Аксиомы умножения. Определено отображение (операция умножения) $\bullet: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такое что

а) существует нейтральный элемент (единица) $1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ такой, что для любого $x\in\mathbb{R}$ выполняется $x\cdot 1=1\cdot x=x$;

б) для любого $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ существует $x^{-1}\in\mathbb{R}$ (обратный) такой, что $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$;

в) ассоциативность $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ для любых $x,y,z\in\mathbb{R}$;

в) коммутативность $x\cdot y=y\cdot x$ для любых $x,y\in\mathbb{R}$;

3. Связь сложения и умножения. $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$, для любых $x,y,z\in\mathbb{R}$;

4. Аксиомы порядка. Между элементами $\mathbb{R}$ имеется отношение $\le$ (отношение неравенства) так, что

а) $x\le x,\ \forall x\in\mathbb{R}$; б) $x\le y,\ y\le x\Rightarrow x=y$;

в) $x\le y,\ y\le z\Rightarrow x\le z$; г) $\forall x,\ \forall y$ или $x\le y$ или $y\le x$.

5. Связь сложения и порядка. $x\le y\Rightarrow x+z\le y+z$.

6. Связь умножения и порядка. Если $0\le x,\ 0\le y$, то $0\le x\cdot y$.

7. Аксиома полноты (непрерывности). Пусть X,Y непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для любых элементов $x\in X$ и $y\in Y$ выполнено $x\le y$, то существует такое $c\in\mathbb{R}$, что $x\le c\le y$ для любых элементов $x\in X$ и $y\in Y$.

Теорема (о существовании верхней грани). Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества действительных чисел имеет и притом единственную верхнюю грань.

Доказательство. Пусть $X \neq \varnothing$ и $Y = \{y \in \mathbb{R} : x \leq y, \forall x \in X\}$. По условию $Y \neq \varnothing$. В силу аксиомы полноты существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leq c \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$. Очевидно, что $c = \sup X$. Если предположить, что существует еще одна нижняя грань c', то должно выполняться $c \leq c'$ и $c' \leq c$. Поэтому $c' = c$. **Теорема доказана**.

Аналогичная теорема имеет место для нижней грани. Для удобства полагают, если множество не ограничено сверху, то $\sup X = +\infty$, если множество не ограничено снизу, то $\inf X = -\infty$.

Теорема (принцип Архимеда). Каково бы ни было действительное число a, существует такое натуральное число n, что $n > a$.

Доказательство. Предположим обратное: $\exists a : \forall n \in \mathbb{N} : n \leq a$. Это значит, что число a ограничивает сверху множество натуральных чисел. Поэтому множество натуральных чисел должно иметь верхнюю грань $\beta = \sup \mathbb{N}$. По определению верхней грани для числа

$\beta - 1$ должно найтись натуральное число n такое, что $n > \beta - 1$. Следовательно, $n + 1 > \beta$. Причем, по определению натуральных чисел, $n + 1 \in \mathbb{N}$. Но это является противоречием того, что β является верхней гранью множества натуральных чисел.

Вопрос 2

Лемма (Коши – Кантор, лемма о вложенных отрезках) Для любой последовательности $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$ вложенных отрезков найдется точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам. Более того, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует отрезок I_n, длина которого $|I_n| < \varepsilon$, то c единственная общая точка всех отрезков.

Доказательство. Пусть $I_n = [a_n; b_n] = \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\}$. Обозначим $X = \{a_n\}$, $Y = \{b_n\}$. Проверим, что $a_m \leq b_n, \forall m, n \in \mathbb{N}$. Действительно, предположим, что существуют такие $m, n \in \mathbb{N}$, что $a_m > b_n$. Тогда $b_m \geq a_m > b_n \geq a_n$. И мы получаем, что отрезки I_m и I_n не пересекаются, что не может быть по условию. Таким образом, в силу аксиомы полноты, существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $a_m \leq c \leq b_n, \forall m, n \in \mathbb{N}$. В частности $a_n \leq c \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Итак, $c \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Предположим теперь, что существуют $c_1, c_2 \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ и $c_1 < c_2$. Тогда имеем $a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n \Rightarrow 0 < c_2 - c_1 \leq b_n - a_n, \forall n$. Т.е. длина каждого отрезка не может быть меньше положительной величины $c_2 - c_1$. Но это не может быть, если в системе отрезков есть отрезки сколь угодно малой длины. **Лемма доказана**.

Лемма (Борель-Лебег). В любом семействе интервалов, покрывающем отрезок, есть подсемейство, покрывающая этот отрезок.

Доказательство. Пусть S произвольное семейство интервалов, покрывающее данный отрезок $[a;b]$. Введем обозначение:

$M = \{x \in [a;b] : [a;x]$ *покрывается конечной подсистемой системы* $S\}$.

Очевидно, что $M \neq \varnothing$ поскольку точка $a \in M$. Пусть $\xi = \sup M$. Так как $M \subset [a;b]$, то $a \le \xi \le b$. Покажем, что $\xi = b$. В самом деле, точка $\xi \in (x';x'') \in S$. По определению верхней грани, существует точка $x \in M$, такая что $x > x'$. Следовательно, отрезок $[a;x]$ покрыт конечной подсистемой $S_x = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_p\}$ системы S. Тогда семейство интервалов $S_\xi = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_p, \Delta\}$ покрывает отрезок $[a;\xi']$, где ξ' любая точка из интервала (ξ, x''). Таким образом, $\xi' > \xi$ является точкой множества M, если только $\xi' \in [a;b]$. Но это лишь в том случае совместимо с определением точки ξ, если $\xi = b$. **Теорема доказана**.

Лемма (Больцано-Вейерштрасса). Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет, по крайней мере, одну предельную точку.

Доказательство. Пусть M бесконечное ограниченное множество. Так как оно ограничено, то оно ограничено снизу некоторым числом a и сверху некоторым числом b. Следовательно, $M \subset [a;b]$. Докажем, что на отрезке $[a;b]$ найдется предельная точка множества M. Предположим, что это не так. Тогда для любого $x \in [a;b]$ существует окрестность U_x содержащая не более конечного числа точек множества M. Семейство окрестностей $\{U_x\}_{x \in [a,b]}$ образует покрытие отрезка $[a;b]$. По лемме Бореля-Лебега существует конечное подсемейство $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ также покрывающая отрезок $[a;b]$. Следовательно, это подсемейство покрывает и множество M. Но так как каждая из окрестностей семейства содержит не более конечного числа точек из M и таких окрестностей конечное число, то и множество M должно быть конечным. Полученное противоречие доказывает теорему. **Теорема доказана**.

Вопрос 3

Мóщность мнóжества, **кардинáльное числó мнóжества** (лат. *cardinalis* ← *cardo* «главное обстоятельство; основа; сердце») — характеристика множеств (в том числе бесконечных), обобщающая понятие количества (числа) элементов конечного множества.

В основе этого понятия лежат естественные представления о сравнении множеств:

1.Любые два множества, между элементами которых может быть установлено взаимно-однозначное соответствие (биекция), содержат одинаковое количество элементов (имеют одинаковую мощность, равномощны).
2.Обратно: равномощные множества должны допускать такое взаимно-однозначное соответствие.
3.Часть множества не превосходит полного множества по мощности (то есть по количеству элементов).

Множество X называется **равномощным** (пишем $X \sim Y$) множеству Y, если существует взаимно однозначное отображение $f : X \to Y$. Так как обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$, очевидно, также взаимно однозначно и композиция двух взаимно однозначных отображений также взаимно однозначно, то введенное отношение $X \sim Y$ является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности, которому принадлежит данное множество называется **мощностью** этого множества. Если $X \sim \mathbb{N}$, то оно называется счетным.

Теорема. Множество рациональных чисел является счетным.

Доказательство. Всякое рациональное число можно записать в виде $r = \frac{p}{q}$, $q > 0$ и дробь будем считать несократимой. Число 0 будем считать записанным одним способом $0 = \frac{0}{1}$. Назовем число $h = |p| + q$ высотой рационального числа $\frac{p}{q}$. Очевидно, что рациональных чисел, имеющих данную высоту только конечное число. Будем нумеровать натуральными числами рациональные числа по возрастанию высоты, т.е. сперва занумеруем рациональные числа высоты 1. Такое число только одно: 0. Затем занумеруем рациональные числа высоты 2. Таких чисел два: $1 = \frac{1}{1}$, $-1 = \frac{-1}{1}$. Затем занумеруем числа высоты 3 и т.д. Ясно, что при этом мы установим между всеми рациональными числами и всеми натуральными числами взаимно однозначное соответствие, т.е. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. Следующая таблица иллюстрирует устанавливаемое взаимно однозначное соответствие. **Теорема доказана**

Множество равномощное множеству точек отрезка [0;1] называется множеством **мощности континуума**[1].

Лемма. Интервал (0;1) имеет мощность континуума.

Доказательство. Установим взаимно однозначное отображение [0;1]→(0;1). Выберем на отрезке [0;1] подмножество точек {1/2, 1/3,..., 1/n,...}. Поставим в соответствие: f(0)=1/2; f(1)=1/3; f(1/2)=1/4;...;f(1/n)=1/(n+2);.... Если $x \notin M$, то положим f(x)=x. В результате мы установим взаимно однозначное отображение f: [0;1]→(0;1). **Лемма доказана**.

Следствие. Множество $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума.

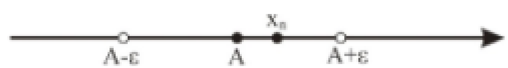
Доказательство. $f(x) = tg(-\frac{\pi}{2} + x\pi)$ - это взаимно однозначное отображение интервала (0;1) на $\mathbb{R}$. **Следствие доказано**.

Вопрос 4

Число A будем называть **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $n > n_\varepsilon$ имеем $|x_n - A| < \varepsilon$. В этом случае будем писать $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и говорить, что последовательность **сходится** (**стремится**) к A. Можно также писать $x_n \to A$ при $n \to \infty$. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**, а последовательность, не имеющая предела, называется **расходящейся**.

Итак,

$$A = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n - A| < \varepsilon,\ \forall n > n_\varepsilon$$



Так как $|x_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$, то из определения следует, что любая окрестность предела последовательности содержит все члены этой последовательности, за исключением конечного их числа.

Последовательность, принимающую только постоянное значение, будем называть постоянной. Очевидно, что, если $x_n = A,\ \forall n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Теорема. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Доказательство. Предположим, что их два, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$, $A \neq B$. Допустим, что $A < B$. Пусть $r = \frac{A+B}{2}$. Тогда

$$\text{для } \varepsilon_1 = r - A = \frac{B-A}{2} > 0\ \exists n_1 : |x_n - A| < \varepsilon_1,\ \forall n > n_1 \Rightarrow x_n < r,\ \forall n > n_1.;$$

$$\text{для } \varepsilon_1 = B - r = \frac{B-A}{2} > 0\ \exists n_2 : |x_n - B| < \varepsilon_2,\ \forall n > n_2 \Rightarrow x_n > r,\ \forall n > n_2.$$

Следовательно, если мы возьмем любое $n > \max(n_1, n_2)$, то должны одновременно выполняться неравенства $x_n < r,\ x_n > r$, что не возможно. **Теорема доказана**.

Теорема. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. Тогда

1. Существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = A + B$;

2. Существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$;

3. Если $y_n \neq 0,\ \forall n,\ B \neq 0$, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$.

Доказательство. Докажем пункт 3, как наиболее сложный. Так как $B \neq 0$, то для $\varepsilon = \dfrac{|B|}{2} > 0$ существует $n_1 \in \mathbb{N} : |y_n - B| < \dfrac{|B|}{2},\ n > n_1$. Следовательно,

$$|y_n| = |(y_n - B) + B| \geq |B| - |y_n - B| \geq \frac{|B|}{2} > 0,\ \ \forall n > n_1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то для числа $\dfrac{\varepsilon}{|A|+|B|}\cdot\dfrac{|B|^2}{2}$ существуют $n_2 \in \mathbb{N}$ и $n_3 \in \mathbb{N}$ такие, что при $\forall n > n_2 \Rightarrow |x_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{|A|+|B|}\cdot\dfrac{|B|^2}{2}$ и при $\forall n > n_3 \Rightarrow |y_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{|A|+|B|}\cdot\dfrac{|B|^2}{2}$. Следовательно, при любом $n > n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ будет выполнено неравенство:

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{x_n}{y_n}\right| = \frac{|A(y_n - B) - B(x_n - A)|}{|B||y_n|} \leq \frac{|A||y_n - B| + |B||x_n - A|}{|B||y_n|} < \frac{|A|+|B|}{\left(\dfrac{|B|^2}{2}\right)}\cdot\frac{\varepsilon}{|A|+|B|}\cdot\frac{|B|^2}{2} = \varepsilon.$$

Итак, **Теорема доказана**.

Теорема (переход к пределу в неравенствах). Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ две сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. Если $A < B$, то найдется номер n_0 такой, что при любом $n > n_0$ выполнено неравенство $x_n < y_n$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{B - A}{2}$. Тогда

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \Rightarrow |x_n - A| < \frac{B - A}{2} \Rightarrow x_n < \frac{B + A}{2};$$
$$\exists n_2 : \forall n > n_2 \Rightarrow |x_n - B| < \frac{B - A}{2} \Rightarrow y_n > \frac{B + A}{2}.$$

Следовательно, если $n_0 = \max(n_1, n_2)$, то при $n > n_0$ выполнено неравенство:

$$x_n < \frac{A + B}{2} < y_n.$$

Теорема доказана.

Теорема (о промежуточной последовательности). Пусть последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ таковы, что $x_n \le y_n \le z_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Если последовательности $\{x_n\}, \{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то последовательность $\{y_n\}$ сходится к тому же пределу.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\exists n_1 : \forall n > n_1 \Rightarrow \left|x_n - A\right| < \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < x_n < \varepsilon + A; \\
&\exists n_2 : \forall n > n_2 \Rightarrow \left|z_n - B\right| < \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < z_n < A + \varepsilon; \ \Rightarrow \\
&\Rightarrow \forall n > \max(n_1, n_2) \Rightarrow A - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < \varepsilon + A \Rightarrow \left|y_n - A\right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема (критерий Коши существования предела). Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\varepsilon \Rightarrow \left|x_m - x_n\right| < \varepsilon \qquad (*)$$

(последовательность, удовлетворяющая условию (*), называется фундаментальной).

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда существует n_ε, что при всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\left|x_n - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть $n, m > n_\varepsilon$. Тогда

$$\left|x_n - A\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \left|x_m - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|x_m - x_n\right| < \varepsilon.$$

Т.о. последовательность фундаментальна.

Последовательность $\{x_n\}$ будем называть **бесконечно малой** последовательностью, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Если для любого числа $\mathrm{E} > 0$ существует натуральное число n_{E} такое, что при всех $n > n_{\mathrm{E}}$ выполняется неравенство $|x_n| > \mathrm{E}$, то последовательность x_n называется **бесконечно большой**. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность стремится к бесконечности. Аналогично,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n > \varepsilon;\\
&\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n < -\varepsilon.
\end{aligned}
$$

(в первом случае говорят, что последовательность стремится к плюс бесконечности, а во втором к минус бесконечности). Последовательности, стремящиеся к бесконечности, мы не считаем сходящимися.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty,\ |a| > 1$.

Действительно, возьмем произвольное число $\mathrm{E} > 0$ и рассмотрим неравенство $|a^n| > E \Leftrightarrow |a|^n > E \Leftrightarrow n\ln|a| > \ln E \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln E}{\ln|a|}$. Здесь использовано, то, что $|a| > 1$ поэтому $\ln|a| > 0$. По принципу Архимеда $\exists n_E \in \mathbb{N} : n_E > \dfrac{\ln E}{\ln|a|}$. Отсюда при любом $n > n_E \Rightarrow n > \dfrac{\ln E}{\ln|a|} \Leftrightarrow |a^n| > E$.

Теорема. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая последовательность, а $\{y_n\}$ ограниченная последовательность, то $\{x_n \cdot y_n\}$ является бесконечно малой.

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\exists M > 0 : |y_n| \le M,\ \ n = 1, 2, \dots\\
&\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}.
\end{aligned}
$$

Отсюда $\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. **Теорема доказана**.

Теорема. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая последовательность, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ является бесконечно малой.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow\ \left|\frac{1}{x_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда следует, что $|x_n| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. **Теорема доказана**.

Аналогично доказывается

Теорема. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая последовательность и $x_n \neq 0,\ n = 1, 2, \dots$, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ является бесконечно большой.

Теорема.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.
2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.
3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$.

Доказательство. Докажем, например 3. Возьмем любое число $\mathrm{E} > 0$. Тогда существует натуральное число n_1 такое, что при любом $n > n_1$ имеет место $|x_n| > \frac{2\cdot \mathrm{E}}{|A|}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \neq 0$, то существует натуральное число n_2:

$$\left|y_n - A\right| < \frac{A}{2},\ \forall n > n_2 \Rightarrow |y_n| \geq |A| - \left|y_n - A\right| > \frac{|A|}{2}.$$

Следовательно, при $\forall n > \max(n_1, n_2)$ имеет место $|x_n y_n| > \frac{2\cdot \mathrm{E}}{|A|}\frac{|A|}{2} = \mathrm{E}$. **Теорема доказана**.

Вопрос 5

Последовательность $\{x_n\}$ называется **неубывающей** (**невозрастающей, убывающей, возрастающей**), если для всех номеров $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство $x_n \le x_{n+1}$ $(x_n \ge x_{n+1},\ x_n > x_{n+1},\ x_n < x_{n+1})$. Последовательность называется **монотонной**, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей, либо убывающая, либо возрастающая.

Теорема (Вейерштрасс). Для того чтобы неубывающая последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху.

Доказательство. По свойству сходящихся последовательностей, если последовательность имеет предел, то она ограничена, следовательно, ограничена и сверху. Обратно, пусть неубывающая последовательность ограничена сверху. Тогда множество $\{x_n\}$ имеет верхнюю грань $\alpha = \sup\{x_n\}$ Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. По определению верхней грани, существует натуральное число n_ε такое, что $x_{n_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon$. Отсюда, в силу неубывания последовательности, имеем $\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \alpha + \varepsilon > \alpha \ge x_n \ge x_{n_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon$. Таким образом, $\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon$. Следовательно, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. **Теорема доказана**.

Вопрос 6

Пусть $\{x_n\}$ произвольная последовательность и $n_1 < n_2 < \dots$ возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ называется **подпоследовательностью** данной последовательности $\{x_n\}$.

Лемма (Больцано-Вейерштрасс). Каждая ограниченная последовательность действительных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ данная последовательность, а E множество значений данной последовательности.

1. E бесконечно. Тогда у этого множество есть предельная точка x. Рассмотрим последовательность $1/n$, $n = 1, 2, \dots$. По определению предельной точки окрестность $(x-1; x+1)$ содержит бесконечно много точек множества E. Выберем одну из них, пусть это будет x_{n_1}. Аналогично окрестность $\left(x - \frac{1}{2}; x + \frac{1}{2}\right)$ содержит бесконечное множество точек множества E, поэтому всегда можно найти точку x_{n_2}, $n_2 > n_1$, принадлежащую этой окрестности. Предположим, что найдены члены последовательности $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$, удовлетворяющие условию $\left|x - x_{n_j}\right| < \frac{1}{j},\ j = 1, 2, \dots, k,\ n_j < n_{j+1},\ j = 1, 2, \dots, k-1$. Тогда окрестность $\left(x - \frac{1}{k+1}; x + \frac{1}{k+1}\right)$ содержит бесконечное множество точек множества E, поэтому всегда можно выбрать $x_{n_{k+1}}$, $n_{k+1} > n_k$. Итак, продолжая построение, мы найдем подпоследовательность исходной

последовательности такую, что $0 \le \left| x - x_{n_k} \right| < \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$. По теореме о промежуточной последовательности $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

2. E конечное множество. Тогда (для бесконечного множества индексов выполняется $x_n = x$) существует ходя бы один элемент $x \in E$ такой, что $x_{n_k} = x$, $k = 1, 2, \dots, n_k < n_{k+1}$. В этом случае $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. **Лемма доказана** .

Теорема. Нижний и верхний пределы ограниченной последовательности являются соответственно ее наименьшим и наибольшим из ее частичных пределов.

Доказательство. Пусть $\alpha_n = \inf_{k\ge n}\{x_k\}$. Тогда $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ и $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \Rightarrow \alpha_n \le \alpha$. Отметим следующие свойства числа α .

(1) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon : \; \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n > \alpha - \varepsilon$.

Действительно, так как $\alpha_n \le \alpha$, $n = 1, 2, \dots$ и $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$, то существует n_ε , что при $\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \alpha - \varepsilon < \alpha_n \le \alpha$. Отсюда, по определению нижней грани, $\forall k \ge n \Rightarrow x_k \ge \alpha_n > \alpha - \varepsilon$. Таким образом, действительно $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon : \; \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n > \alpha - \varepsilon$.

(2) $\forall \varepsilon > 0, \;\; \forall m \;\; \exists n > m : \; x_n < \alpha + \varepsilon$

Действительно, так как $\alpha_m \le \alpha_{m+1} \le \alpha$, то, по определению нижней грани, существует $n \ge m + 1$ такой, что $x_n < \alpha + \varepsilon$.

Теперь построим подпоследовательность, сходящуюся к α . Положим $n_1 = 1$ и допусти, что номера $n_1 = 1 < n_2 < \dots < n_k$ уже выбраны так, что $\left| x_{n_m} - \alpha \right| < \frac{1}{m}$, $m = 1, 2, \dots, k$. По свойству (1) для числа $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ выберем номер $n_{1/(k+1)}$ такой что $\forall n > n_{1/(k+1)} \Rightarrow x_n > \alpha - \frac{1}{k+1}$. По свойству (2) для числа $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ и $\max(n_k, n_{1/(k+1)})$ выберем $n_{k+1} > \max(n_k, n_{1/(k+1)})$ так, чтобы $x_{n_{k+1}} < \alpha + \frac{1}{k+1}$. Таким образом, $\left| x_{n_{k+1}} - \alpha \right| < \frac{1}{k+1}$. Следовательно, мы получаем подпоследовательность, удовлетворяющую условию $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$. Т.е. α является частичным пределом последовательности. Более того, это будет наименьший из частичных пределов. Так как в силу свойства (1) ни один из частичных пределов не может быть меньше чем $\alpha - \varepsilon$ для произвольного числа ε. Но это означает, что ни один из частичных пределов не может быть меньше α . **Теорема доказана** .

Следствие. Последовательность имеет предел или стремится к минус или плюс бесконечности тогда и только тогда, когда нижний и верхний пределы последовательности совпадают.

Это очевидное следствие неравенства $\alpha_n = \inf_{k\ge n} x_k \le x_n \le \sup_{k\ge n} x_k = \beta_n$ и теоремы о промежуточной последовательности.

Вопрос 7

Из определения сходимости последовательности $\{x_n\}$ к точке а вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ интервалом длиной 2ε можно накрыть всю эту последовательность, исключением может быть конечное число ее элементов, если середину интервала поместить в точке a. Справедливо и обратное : если последовательность $\{x_n\}$ такова, что для любого $\varepsilon > 0$ можно накрыть всю эту последовательность, исключая может быть конечное число ее элементов, поместив центр интервала в некоторую точку, то она сходится.

Определение. *Последовательность x_n называется* ***последовательностью Коши или фундаментальной***, *если* $\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n, m > N(\varepsilon) : | x_n - x_m | < \varepsilon$

Теорема (Критерий Коши). Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно чтобы она была фундаментальной.

Доказательство:

Необходимость. Пусть $\{x_n\}$ сходится. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)\forall n, m > N(\varepsilon) :| x_n - x_m |< \varepsilon$

$\forall p \in N \mid x_{n+p} - x_n \mid\leq\mid x_{n+p} - x \mid< 2\varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность. Докажем, что она ограничена и $\bar{x} = \underline{x}$.

Так как последовательность фундаментальна, то $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists x_N$, в ε-окрестности которой существуют все элементы после $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{N-1}$.

Предположим, $A = max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_n - \varepsilon|, |x_n + \varepsilon|\}$.

В отрезке [A, -A] содержатся все элементы последовательности, т.е. $\{x_n\}$ - ограничена.

Вследствие теоремы Больцано-Вейерштрасса $(\bar{x}; \underline{x}) < (x_n - \varepsilon; x_n + \varepsilon)$.

$0 \leq \bar{x} - \underline{x} < 2\varepsilon$ в силу произвольности ε

$\bar{x} - \underline{x} = 0$

$\bar{x} = \underline{x}$

Вопрос 8

Определение (Коши). Число A называется пределом функции f при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in E$, $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае говорят также, что функция стремится к A при x, стремящемся к a и пишут $f(x) \to A$ при $x \to a$, $x \in E$ или $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x)$. Если функция f определена на всей окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$, то пишут кратко $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Это же определение можно переписать в терминах окрестностей:

$$A = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) \Leftrightarrow \forall U(A)\ \exists \overset{\circ}{U}(a)\ :\ f(\overset{\circ}{U}(a) \cap E) \subset U(A).$$

Теорема (эквивалентность определений по Коши и по Гейне). Число A является пределом функции f при x, стремящемся к a, тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n \in E \setminus \{a\}$, сходящейся к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x)$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset E \setminus \{a\}$: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Для $U_\varepsilon(A)$ существует $\delta > 0$ такое, что $f(\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap E) \subset U_\varepsilon(A)$. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, то для найденного δ существует $n_{\delta(\varepsilon)}$: $\forall n > n_{\delta(\varepsilon)} \Rightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap E$. Тогда $f(x_n) \in U_\varepsilon(A) \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$.

Обратно, пусть для любой последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n \in E \setminus \{a\}$, сходящейся к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A. Предположим, что $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x)$. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap E \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon .$$

Положим $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ и для каждого n найдем точку $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\frac{1}{n}}(a) \cap E$: $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, но $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq A$. Противоречие. **Теорема доказана**.

Теорема. Если существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$, то существует окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ такая, что функция f ограничена на $\overset{\circ}{U}(a)\cap E$, т.е. существует число M>0, что $\forall x\in \overset{\circ}{U}(a)\cap E \Rightarrow |f(x)|\le M$.

Доказательство. Для $\varepsilon=1\ \exists \overset{\circ}{U}(a): \forall x\in \overset{\circ}{U}(a)\cap E \Rightarrow |f(x)-A|<1$. Отсюда при этих же x, получаем $|f(x)|\le |A|+|f(x)-A|<|A|+1=M$. **Теорема доказана**.

В силу теоремы об эквивалентности определений по Коши и по Гейне и свойств пределов последовательностей, получаем.

Теорема. Пусть функции f и g определены на множестве E и a предельная точка этого множества. Если существуют пределы $A=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$, $B=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} g(x)$, то

(1) существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\big(f(x)+g(x)\big)=A+B$;

(2) существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=A\cdot B$;

(3) Если $B\ne 0$ и $g(x)\ne 0$ на множестве E, то существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

Вопрос 9

Предельный переход в неравенствах

Теорема

Пусть заданы две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$ и, начиная с некоторого номера, $x_n\le y_n$, то выполняется неравенство: $a\le b$

Теорема

(Принцип двустороннего ограничения, теорема о двух милиционерах, теорема сжатия, правило сэндвича, теорема о трех струнах).

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$ и существует номер $n_0\in N$, что для любого $n\ge n_0$ выполняется неравенство $x_n\le z_n\le y_n$, то последовательность $\{z_n\}$ сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$

Предел сложной функции

Теорема

Если *функция* $y = f(x)$ имеет в точке a *конечный предел* b и не принимает значения b в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a)$ этой точки, а функция $g(y)$ имеет в точке b конечный предел c, то сложная функция $g\big(f(x)\big)$ имеет предел в точке a, равный c.

Эту теорему нетрудно распространить на суперпозицию более двух функций. Она позволяет использовать замену переменных при вычислении пределов сложных функций по формуле

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to b} g(y).$$

При этом говорят, что под знаком предела в левой части сделана замена $f(x) = y$. Данная теорема и возможность замены переменных остаются в силе, если хотя бы одна из точек a, b, c будет соответствовать одной из бесконечных точек $+\infty$ или $-\infty$ (или их объединению ∞) на расширенной числовой прямой.

Пример

Для нахождения предела функции $\arctan(1/(1-x))$ при $x \to 1-0$ сделаем замену $y = 1/(1-x)$. Тогда при $x \to 1-0$ $y \to +\infty$ получим

$$\lim_{x\to 1-0} \arctan\frac{1}{1-x} = \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}.$$

Вопрос 10

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ и точка a является предельной для множества $E \cap \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$. Тогда предел $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E \cap \{x \in \mathbb{R}:\, x > a\}}} f(x)$ называется **правым пределом** функции в точке a и обозначается $\lim\limits_{\substack{x \to a+0 \\ x \in E}} f(x)$. Как обычно, если $E = \overset{\circ}{U}(a)$, то правый предел обозначается $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

Итак, например, по Коши: $A = \lim\limits_{\substack{x \to a+0 \\ x \in E}} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in E,\ a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично, если точка a является предельной для множества $E \cap \{x \in \mathbb{R}: x < a\}$. Тогда предел $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E \cap \{x \in \mathbb{R}:\, x < a\}}} f(x)$ называется **левым пределом** функции в точке a и обозначается $\lim\limits_{\substack{x \to a-0 \\ x \in E}} f(x)$. Как обычно, если $E = \overset{\circ}{U}(a)$, то правый предел обозначается $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

Итак, например, по Коши: $A = \lim\limits_{\substack{x \to a-0 \\ x \in E}} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in E,\ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Пределы справа и слева называются односторонними пределами. Имеет место следующий очевидный факт:

Теорема. Если точка a является предельной для множеств $E \cap \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$ и $E \cap \{x \in \mathbb{R}: x < a\}$. Тогда предел $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних и они равны.

Определение (по Коши)

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in E}} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0:\ \forall x \in E, |x| > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0:\ \forall x \in E, x > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \in E}} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0:\ \forall x \in E, x < -\Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$. Функцию будем называть

1. Возрастающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

2. Неубывающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2);$$

3. Убывающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

4. Невозрастающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2).$$

Такие функции будем называть монотонными. Предположим, что $\alpha = \inf E,\ \beta = \sup E$ являются предельными точками множества E.

Теорема (о существовании предела монотонной функции). Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ неубывающая на множестве E. Если функция ограничена сверху $f(x) \le M,\ \forall x \in E$, то существует предел $\lim\limits_{\substack{x \to \beta \\ x \in E}} f(x)$; в противном случае $\lim\limits_{\substack{x \to \beta \\ x \in E}} f(x) = +\infty$.

Замечание. Аналогичный результат имеет место для невозрастающей функции.

Доказательство теоремы. Пусть функция ограничена сверху. Тогда у множества $\{f(x) : x \in E\}$ существует верхняя грань A. Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x' \in E : f(x') > A - \varepsilon$. Ввиду монотонности функции f, для $x > x'$ имеем $f(x) > A - \varepsilon$. Но с другой стороны $f(x) \le A < A + \varepsilon$. Итак, $\forall x > x' \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно, при $\beta < +\infty$ положим $U_\delta(\beta) = (\beta - \delta; \beta + \delta),\ \delta = \beta - x'$, а, если $\beta = +\infty$, то положим $\Delta = x'$.

Пусть теперь функция не ограничена сверху. Тогда

$$\forall \mathrm{E} > 0\ \exists x' \in E : f(x') > \mathrm{E} \Rightarrow \forall x > x' \Rightarrow f(x) > \mathrm{E}.$$

Поэтому $\lim\limits_{\substack{x \to \beta \\ x \in E}} f(x) = +\infty$. **Теорема доказана**.

Теорема (критерий Коши существования предела функции)

Пусть a предельна точка множества E. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ имеет конечный предел при $x \to a$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in E,\ 0 < |x - a| < \delta,\ \ 0 < |x' - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x \to \beta \\ x \in E}} f(x) = A$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x,x'\in E,\ 0<|x-a|<\delta,\ 0<|x'-a|<\delta$$
$$\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon/2;\ \ |f(x')-A|<\varepsilon/2\ \Rightarrow$$
$$|f(x')-f(x)|<\varepsilon$$

Пусть выполняется условие в теореме. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\},\ x_n\in E/\{a\},\ x_n\to a,\ n\to\infty$. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и найдем по нему число $\delta>0$ в соответствии с условием теоремы.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\ x_n\in E/\{a\}\Rightarrow\exists N\in\mathbb{N}:\forall n>N\Rightarrow 0<|x_n-a|<\delta.$$

Поэтому для $\forall n,m>N\Rightarrow |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна, значит, имеет предел. Остается доказать, что для разных последовательностей такой предел будет одним и тем же.

Предположим, что

$$\{x_n\},\ x_n\in E/\{a\},\ x_n\to a,\ n\to\infty,\ \ \lim_{n\to\infty}f(x_n)=A;$$

$$\{x'_n\},\ x'_n\in E/\{a\},\ x'_n\to a,\ n\to\infty,\ \lim_{n\to\infty}f(x'_n)=A'.$$

Составим новую последовательность $x_1,x'_1,x_2,x'_2,\dots,x_n,x'_n,\dots$. Она сходится к a и, по доказанному, последовательность $f(x_1),f(x'_1),f(x_2),f(x'_2),\dots,f(x_n),f(x'_n),\dots$ должна сходится, скажем, к числу A''. Но тогда и любая ее подпоследовательность должна сходится к этому же пределу. Таким образом, $A=A'=A''$. **Теорема доказана**.

Замечание. Аналогично формулируется и доказывается теорема для случаев односторонних пределов и случаев $x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$. Условие в теореме для случая

правого предела имеет вид: $\forall x,x'\in E,\ a<x<a+\delta,\ a<x'<\delta+a$;

для левого предела имеет вид: $\forall x,x'\in E,\ a-\delta<x<a,\ a-\delta<x'<\delta$;

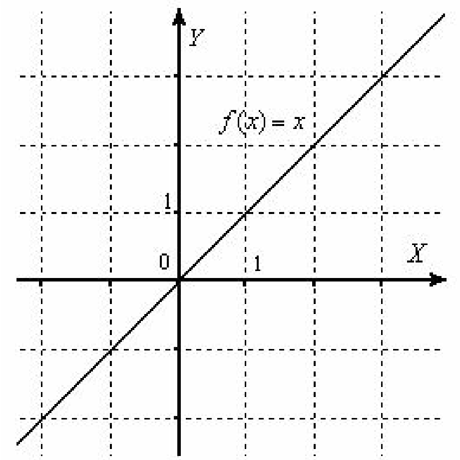
для случая $x\to\infty$ имеет вид: $|x|>\delta,\ |x'|>\delta$.

Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых

Что тут сказать… Если существует предел $\lim\limits_{x \to k} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется **бесконечно малой в точке** k.

Существенным моментом утверждения является тот факт, что **функция может быть бесконечно малой <u>лишь в конкретной точке</u>**.

Начертим знакомую линию $f(x) = x$:



Данная функция *бесконечно малА* в единственной точке: $\lim\limits_{x \to 0} (x) = 0$

Следует отметить что, в точках «плюс бесконечность» и «минус бесконечность» эта же функция будет уже *бесконечно большой*: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x) = -\infty$. Или в более компактной записи: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x) = \pm\infty$

Во всех других точках, предел функции будет равен конечному числу, отличному от нуля.

Таким образом, **не существует такого понятия** как «просто бесконечно малая функция» или «просто бесконечно большая функция». **Функция может быть бесконечно малой или бесконечно большой <u>только в конкретной точке</u>**.

Первый замечательный предел

Рассмотрим следующий предел: $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha}$ (вместо родной буквы «хэ» я буду использовать греческую букву «альфа», это удобнее с точки зрения подачи материала).

Согласно нашему правилу нахождения пределов (см. статью **Пределы. Примеры решений**) пробуем подставить ноль в функцию: в числителе у нас получается ноль (синус нуля равен нулю), в знаменателе, очевидно, тоже ноль. Таким образом, мы сталкиваемся с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$, которую, к счастью, раскрывать не нужно. В курсе математического анализа, доказывается, что:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

Данный математический факт носит название **Первого замечательного предела**. Аналитическое доказательство предела приводить не буду, а вот его геометрический смысл рассмотрим на уроке о **бесконечно малых функциях**.

Нередко в практических заданиях функции могут быть расположены по-другому, это ничего не меняет:

$\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$ – тот же самый первый замечательный предел.

! Но самостоятельно переставлять числитель и знаменатель нельзя! Если дан предел в виде $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\alpha}{\sin \alpha}$, то и решать его нужно в таком же виде, ничего не переставляя.

Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$$

Данный факт носит название **второго замечательного предела**.

Справка: $e = 2{,}718281828...$ *– это иррациональное число.*

В качестве параметра α может выступать не только переменная x, но и сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

Вопрос 11

Определение. Функция $f:E\to\mathbb{R}$ есть бесконечно малая по сравнению с функцией $g:E\to\mathbb{R}$ при $x\to a$, если существует такая функция $\varepsilon:E\to\mathbb{R}$ и окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ такая, что

$$\forall x\in\overset{\circ}{U}(a)\cap E\Rightarrow f(x)=\varepsilon(x)\cdot g(x) \text{ и } \lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\varepsilon(x)=0.$$

В этом случае пишут $f=o(g),\ x\to a$ и говорят f есть o - малое от g при $x\to a$.

Определение. Функции $f:E\to\mathbb{R},\ g:E\to\mathbb{R}$ называют эквивалентными при $x\to a$, если существует такая функция $\varphi:E\to\mathbb{R}$, что в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется равенство $f(x)=\varphi(x)\cdot g(x)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\varphi(x)=1$. В этом случае пишут $f\sim g,\ x\to a$.

По свойству пределов функций, $\varphi(x)\neq 0$ в некоторой $\overset{\circ}{U}(a)\cap E$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\dfrac{1}{\varphi(x)}=1$. Поэтому, если $f\sim g,\ x\to a$, то $g\sim f,\ x\to a$. Кроме того, очевидно, если $f\sim g,\ x\to a$, $g\sim h,\ x\to a$, то $f\sim h,\ x\to a$.

Лемма. Имеет место цепочка эквивалентностей:

$$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim arctgx\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim tgx,\ x\to 0.$$

Лемма. Если $f\sim g,\ x\to a$, то $f=g+o(g),\ x\to a$. В этом случае функция g называется главной частью функции f.

Доказательство. Пусть $f\sim g,\ x\to a$. Тогда $f(x)=\varphi(x)\cdot g(x)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\varphi(x)=1$. Отсюда

$f(x)=g(x)+(1-\varphi(x))g(x),\ \ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\varphi(x)=0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}}\varphi(x)=1$. Поэтому $f=g+o(g),\ x\to a$. Обратно очевидно. **Лемма доказана**.

Под ***асимптотическим поведением*** (или ***асимптотикой***) *функции* в *окрестности* некоторой *точки* a (*конечной* или *бесконечной*) понимают характер изменения функции при стремлении ее *аргумента* x к этой точке. Это поведение обычно стараются представить с помощью другой, более простой и изученной функции, которая в окрестности точки a с достаточной точностью описывает изменение интересующей нас функции или оценивает ее поведение с той или иной стороны. В связи с этим возникает задача сравнения характера изменения двух функций в окрестности точки a, связанная с рассмотрением их *частного.* Особый интерес представляют случаи, когда при $x \to a$ обе функции являются либо *бесконечно малыми* (б.м.), либо *бесконечно большими* (б.б.).

10.1. Сравнение бесконечно малых функций

Основная цель сравнения *б.м. функций* состоит в сопоставлении характера их приближения к нулю при $x \to a$, или скорости их стремления к нулю. Пусть б.м. при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ отличны от нуля в некоторой *проколотой окрестности* $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a)$ *точки* a, а в точке a они равны нулю или не определены.

Определение 10.1. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют ***б.м. одного порядка*** при $x \to a$ и записывают $\alpha(x) \underset{x\to a}{=} O\big(\beta(x)\big)$ (символ O читают „O большое“), если при $x \to a$ существует отличный от нуля *конечный предел* отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, т.е.

$$\alpha(x) \underset{x\to a}{=} O\big(\beta(x)\big) \;:\Leftrightarrow\; \exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \qquad (10.1)$$

23*

Очевидно, что тогда, согласно (7.24), $\exists \lim\limits_{x\to a} \beta(x)/\alpha(x) = 1/c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, и правомерна запись $\beta(x) \underset{x\to a}{=} O\big(\alpha(x)\big)$. Символ O обладает свойством *транзитивности*, т.е. если $\alpha(x) \underset{x\to a}{=} O\big(\beta(x)\big)$ и $\beta(x) \underset{x\to a}{=} O\big(\gamma(x)\big)$, то $\alpha(x) \underset{x\to a}{=} O\big(\gamma(x)\big)$. В самом деле, с учетом определения 10.1 и свойства *произведения* функций (см. (7.23)), имеющих конечные (в данном случае не равные нулю) пределы, получим

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)\beta(x)}{\gamma(x)\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \qquad (10.2)$$

Определение 10.2. Функцию $\alpha(x)$ называют ***б.м. более высокого порядка*** малости по сравнению с $\beta(x)$ (или относительно $\beta(x)$) при $x \to a$ и записывают $\alpha(x) \underset{x\to a}{=} o\big(\beta(x)\big)$ (символ o читают “o малое“), если существует и равен нулю предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, т.е.

$$\alpha(x) \underset{x\to a}{=} o\big(\beta(x)\big) \;:\Leftrightarrow\; \exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0. \qquad (10.3)$$

Вопрос 12

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$ предельная точка этого множества. Функция называется **непрерывной** в точке a, если для любой окрестности $V\left(f\left(a\right)\right)$ существует окрестность $U\left(a\right)$ такая, что $f\left(U(a) \cap E\right) \subset V\left(f\left(a\right)\right)$.

Можно дать определение на языке $\varepsilon - \delta$: $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in E,\ \left|x - a\right| < \delta \Rightarrow \left|f\left(x\right) - f\left(a\right)\right| < \varepsilon .$$

Если a предельная точка множества E, то непрерывность функции в точке a означает, что $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f\left(x\right) = f\left(a\right)$. Если функция не является непрерывной в точке a, в том числе, если в точке a функция не определена (т.е. $a \notin E$), то точка a называется **точкой разрыва** функции f. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной на множестве** E, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Обозначим C(E) множество функций непрерывных на множестве E. Функция f называется непрерывной в точке $a \in E$ **справа (слева),** если

$$f\left(a\right) = f\left(a+0\right) = \lim_{\substack{x \to a+0 \\ x \in E}} f\left(x\right)$$

$$\left(f\left(a\right) = f\left(a-0\right) = \lim_{\substack{x \to a-0 \\ x \in E}} f\left(x\right) \right)$$

Если оба предела $f\left(a+0\right) = \lim\limits_{\substack{x \to a+0 \\ x \in E}} f\left(x\right)$, $f\left(a-0\right) = \lim\limits_{\substack{x \to a-0 \\ x \in E}} f\left(x\right)$ существуют, но хотя бы один из них не совпадает с $f\left(a\right)$, то точка a называется **точкой разрыва первого рода**. При этом, если $f\left(a+0\right) = f\left(a-0\right) \neq f\left(a\right)$, то точка a называется **точкой устранимого разрыва**. Если точка a - точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, то она называется **точкой разрыва второго рода**.

Вопрос 13

Теорема о непрерывности сложной функций

Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна в точке t_0 и функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда функция $f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Для доказательства этой теоремы воспользуемся формальным преобразованием двух строчек кванторов. Имеем:

$f(x)$ непрерывна в x_0 $\forall \varepsilon > 0$, $\quad \exists \delta \quad \forall x \quad |x - x_0| < \delta \; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\psi(e)$ непрерывна в t_0 $\forall \delta > 0 \quad \exists \eta \quad \forall t \quad |t - t_0| < \eta \quad |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta$

Выписывая кванторы, получим, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \quad \forall t \quad |t - t_0| < \eta \quad \left| f\left(\varphi(t)\right) - f\left((\varphi t_0)\right) \right| < \varepsilon$$

что и говорит о том, что $f\left(\varphi(t)\right)$ непрерывна в точке t_0.

Вопрос 14

Теорема. Если функции $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке a, то функции $f + g$, $f \cdot g$ непрерывны в точке a, если $g(a) \neq 0$, то функция $\dfrac{f}{g}$ определена на некотором множестве $U(a) \cap E$ и непрерывна в точке a.

Доказательство. Доказательство имеет смысл дать только для последней части, поскольку все остальное очевидное следствие свойств пределов. Так как $g(a) \neq 0$, то для $\varepsilon = \dfrac{|g(a)|}{2}$ существует

$U(a)$ такая, что $g\left(U(a)\cap E\right)\subset\left(g(a)-\left|\frac{g(a)}{2}\right|,\ g(a)+\left|\frac{g(a)}{2}\right|\right)$ и, следовательно, на $U(a)\cap E$ функция $g(x)\neq 0$. **Теорема доказана**

Теорема (о непрерывности композиции). Если функция $g: F\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке $b\in F$, функция $f: E\to F$ такова, что $f(a)=b$ и f непрерывна в точке a, то композиция $g\circ f$ определена на E и непрерывна в точке a.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\forall V\left(g(b)\right)\Rightarrow\\
&\exists U(b):\ g\left(U(b)\cap F\right)\subset V\left(g(b)\right)\\
&\exists W(a):\ f\left(W(a)\cap E\right)\subset U(b)\cap F\Rightarrow\\
&g\circ f\left(W(a)\cap E\right)\subset V\left(g(b)\right)=V\left(g\circ f(a)\right)
\end{aligned}$$

Теорема доказана

Теорема. Пусть $f\in C[a;b]$ и строго возрастает (убывает) на $[a;b]$. Тогда обратная функция определена на отрезке с концами $f(a)$, $f(b)$ и непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Пусть f строго возрастает.

$\forall x,\ a\le x\le b\Rightarrow f(a)\le f(x)\le f(b)\Rightarrow f(x)\in\left[f(a);f(b)\right]$. С другой стороны, для $\forall y\in[f(a);f(b)]$ по теореме Больцано-Коши $\exists x\in[a;b]: f(x)=y$. Таким образом, $f\left([a;b]\right)=[f(a);f(b)]$. Следовательно, обратная функция определена на $\left[f(a);f(b)\right]$ и строго возрастает на нем.

Докажем, что $f^{-1}\in C\left[f(a);f(b)\right]$.

А) $y_0\in\left(f(a);f(b)\right)$ и $x_0\in(a;b)$: $f(x_0)=y_0$.

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon>0\ \exists\varepsilon_1:(x_0-\varepsilon_1;x_0+\varepsilon_1)\subset(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)\cap(a;b);\\
&y_1=f(x_0-\varepsilon_1);\ y_2=f(x_0+\varepsilon_1)\\
&\forall y\in(y_1;y_2)\Rightarrow y=f(x),\ x_0-\varepsilon_1<x<x_0+\varepsilon_1\Rightarrow\\
&f^{-1}(y_1;y_2)\subset(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)
\end{aligned}$$

Б) $y_0=f(a)\Rightarrow x_0=a$

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon>0\ \exists\varepsilon_1:(x_0-\varepsilon_1;x_0+\varepsilon_1)\subset(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)\cap[a;b];\\
&y_1=f(x_0+\varepsilon_1)\\
&\forall y\in[y_0;y_2)\Rightarrow y=f(x),\ x_0-\varepsilon_1<x<x_0+\varepsilon_1\Rightarrow\\
&f^{-1}[y_0;y_2)\subset(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)
\end{aligned}$$

В) $y_0=f(b)\Rightarrow x_0=b$ аналогично Б). **Теорема доказана**

Теорема (Вторая теорема Вейерштрасса). Пусть $f \in C[a;b]$. Тогда, функция достигает на отрезке своих верхней и нижней граней, т.е.

$$\exists x_1,\, x_2 \in [a;b]:\ f(x_1) = \sup\{f(x): x \in [a;b]\} = \sup_{[a;b]} f(x);$$
$$f(x_2) = \inf\{f(x): x \in [a;b]\} = \inf_{[a;b]} f(x)$$

Доказательство. Докажем для верхней грани. По первой теореме Вейерштрасса, функция ограничена на отрезке, поэтому имеет верхнюю и нижнюю грани. Пусть $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$ и предположим, что это значение функцией не достигается. Тогда $\forall x \in [a;b] \Rightarrow f(x) < M \Rightarrow M - f(x) > 0$. Следовательно, функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а, значит, ограничена на этом отрезке, т.е. $\exists A > 0 : \dfrac{1}{M - f(x)} \le A \Rightarrow f(x) \le M - \dfrac{1}{A},\ \forall x \in [a;b]$. Это противоречит тому, что M – это верхняя грань функции на отрезке. **Теорема доказана**.

Теорема. Каждая строго монотонная функция $f : X \to Y,\ X \subset \mathbb{R},\ Y = f(X) \subset \mathbb{R}$ обладает обратной функцией $f^{-1} : Y \to X$, которая имеет на Y тот же характер монотонности, какой имеет на X функция f.

Доказательство. Пусть для определенности функция f строго возрастает.

1. Функция f отображает множество X на множество $Y = f(X)$.
2. $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Следовательно, f инъективно.

Таким образом, существует обратная функция $f^{-1} : Y \to X$, определенная равенством

$$f^{-1}(y) = x,\ \text{если}\ f(x) = y.$$

Имеем

$$y_1 < y_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2).$$

Следовательно, функция $f^{-1} : Y \to X$ строго возрастает на Y. **Теорема доказана**.

Вопрос 15

Определение. Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ и каждая точка множества E является его предельной точкой. Функцию будем называть равномерно непрерывной на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in E,\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Заметим, что если функция равномерно непрерывна на множестве E, то она непрерывна в любой точке этого множества, т.к., если зафиксировать точку x'' в определении равномерной непрерывности, то получится определение непрерывности в точке x''. Обратное неверно. Если функция непрерывна в каждой точке множества E, то она не обязательно является равномерно непрерывной. Рассмотрим пример. $y = \sin\dfrac{1}{x},\ x \in (0;1)$. Для $\varepsilon = 1/2$ возьмем любое число $\delta > 0$

Пусть $x_n' = \dfrac{1}{2\pi n},\ x_n'' = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Имеем $|x_n' - x_n''| = \left|\dfrac{1}{2\pi n} - \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n}\right| = \dfrac{\pi/2}{2\pi n \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}$. Очевидно, выбором n можно добиться выполнения неравенства $|x_n' - x_n''| < \delta$, но $|f(x_n') - f(x_n'')| = 1 > 1/2$.

Таким образом, данная функция, будучи непрерывной на интервале (0;1), не является равномерно непрерывной.

Теорема (Кантор). Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Предположим, что функция не является равномерно непрерывной на отрезке $[a;b]$, но принадлежит $C[a;b]$. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x', x'' \in [a;b],\quad |x' - x''| < \delta,\ |f(x') - f(x'')| > \varepsilon .$$

Положим $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ и найдем указанные точки $x'_n, x''_n \in [a;b]$, для которых $|x'_n - x''_n| < \dfrac{1}{n},\ |f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon$. По теореме Больцано – Вейерштрасса, из ограниченной последовательности $\{x'_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{n_k}\},\ \xi = \lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} \in [a;b]$. Далее $|x''_{n_k} - \xi| \le |x'_{n_k} - \xi| + |x'_{n_k} - x''_{n_k}| \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x''_{n_k} = \xi$.

Тогда, в силу непрерывности функции, имеем

$$\lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(\xi) \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left(f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right) = 0 .$$

Это является противоречием неравенству $|f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon,\ \forall n$. **Теорема доказана**.

Вопрос 16

Определение. Модуль непрерывности функции f на множестве E называется следующая верхняя грань:

$$\omega(f,\delta) = \sup\left\{|f(x') - f(x'')| : |x' - x''| \le \delta,\ x', x'' \in E\right\}.$$

Отметим следующие очевидные свойства модуля непрерывности:

1. $\omega(f,\delta) \ge 0$;
2. $\omega(f,\delta) \le \omega(f,\delta'),\ \forall \delta,\delta',\ \delta < \delta'$. Действительно, неравенство следует из включения:

$$\left\{|f(x') - f(x'')| : |x' - x''| \le \delta,\ x', x'' \in E\right\} \subset \left\{|f(x') - f(x'')| : |x' - x''| \le \delta',\ x', x'' \in E\right\}.$$

Пример.

$$\omega\left(\sin\frac{1}{x}, \delta\right) = \sup_{\substack{|x'-x''|\le\delta,\\ x',x''\in(0;1)}} \left|\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''}\right| \le 2.$$

С другой стороны

$$\left|\sin\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right)} - \sin\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}\right)}\right| = 2,\ n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому $\omega\left(\sin\dfrac{1}{x}, \delta\right) = 2$.

Теорема. Функция равномерно непрерывна на множестве E тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega(f,\delta) = 0$.

Доказательство. Пусть функция равномерно непрерывна на множестве E. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x', x'' \in E, \left| x' - x'' \right| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| f\left(x'\right) - f\left(x''\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\omega\left(f, \delta_\varepsilon\right) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Поэтому $\forall \delta < \delta_\varepsilon \Rightarrow \omega\left(f, \delta\right) < \varepsilon$. Итак, $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega\left(f, \delta\right) = 0$.

Обратно, пусть $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega\left(f, \delta\right) = 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall \delta < \delta_\varepsilon \Rightarrow \omega\left(f, \delta\right) < \varepsilon.$$

Тогда

$$\forall x', x'' \in E, \left| x' - x'' \right| < \delta \le \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| f\left(x'\right) - f\left(x''\right) \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, функция равномерно непрерывна на множестве E. **Теорема доказана**.

Вопрос 17

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ и $x\in(a;b)$. Пусть Δx произвольное число такое, что $x+\Delta x\in(a;b)$. Число $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ называется приращением функции $y=f(x)$ в точке x.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется **производной** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$ или y'.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется правой **производной** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x+0)$.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется левой **производной** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x-0)$.

По свойству пределов, производная в точке существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют правая и левая производные и они равны.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если ее приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$, A не зависит от Δx.

По опрделению о-малое, получаем $\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0$. В самой точке $\Delta x=0$ функция $\alpha(\Delta x)$ может быть и не определена. Ей можно приписать любое значение. Для дальнейшего удобно считать, что $\alpha(0)=0$. При такой договоренности эта функция будет непрерывной в точке 0.

Теорема. Если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Имеем

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+(x-x_0))-f(x_0)=A\cdot(x-x_0)+\alpha((x-x_0))\cdot(x-x_0).$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x-x_0)=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. **Теорема доказана**.

Теорема. Для того чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную.

Доказательство. Пусть функция дифференцируема, тогда $\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\alpha(\Delta x)\right)=A.$$

Следовательно, производная в точке x существует и равна A. Обратно, пусть существует производная в точке x. Тогда $\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$. Следовательно, если обозначить

$\alpha(\Delta x) = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x)$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$ и $\Delta y = f'(x)\cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot \Delta x$. **Теорема доказана.**

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда, по доказанной теореме, имеем $\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$. Следовательно, линейная функция $f'(x)\Delta x$ переменной Δx является главной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке x. Эта линейная функция называется **дифференциалом** функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $dy = f'(x)\Delta x$. Обозначим Δx как dx и назовем **дифференциалом независимой переменной**.

Инвариантность формы дифференциала

Формула дифференциала функции имеет вид

$$dy = f'(x)\,dx,$$

где dx - дифференциал независимой переменной.

Пусть теперь дана сложная (дифференцируемая) функция $y = f(\varphi(x))$, где $u = \varphi(x)$, $y = f(u)$. Тогда по формуле производной сложной функции находим

$$dy = f'(x)dx = f'(u)\cdot \varphi'(x)dx = f'(u)\cdot du,$$

так как $\varphi'(x)dx = du$.

Итак, $dy = f'(u)du$, т.е. формула дифференциала имеет один и тот же вид для независимой переменной x и для промежуточного аргумента u, представляющего собой дифференцируемую функцию от x.

Это свойство принято называть свойством *инвариантности формулы или формы дифференциала*. Заметим, что производная этим свойством не обладает.

Вопрос 18

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ и определна сложная функция $f \circ \varphi$. Тогда для дифференциала этой сложной функции получим.

$$dy = d(f \circ \varphi) = (f \circ \varphi)' dt = f'(x)\varphi'(t)dt = f'(x)dx.$$

Таким образом, представление $dy = f'(x)dx$ не нарушается даже, если x не является независимой переменной, а является некотрой функцией. Указанное свойство называется инвариантностью формы первого дифференциала.

Теорема (о дифференцировании обратной функции).

Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна в некотрой окрестности точки x_0. Пусть функция дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, причем в точке y_0 эта функция дифференцирума и для ее производной справедлива формула $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. Обратная определна и непрерывна и возрастает (убывает) в некотрой окрестности точки y_0. В силу возрастания (убывания) функции ее приращение отлично от нуля. Следовательно, если $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$, то можно написать $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$. В силу непрерывности обратной функции, если $\Delta y \to 0$, то $\Delta x \to 0$. Так как $x_0 = f^{-1}(y_0)$, то $y_0 + \Delta y = f(\Delta x + x_0)$ и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)} = \frac{1}{\left(\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)}.$$

Следовательно, при $\Delta y \to 0$ будет $\Delta x \to 0$ и, по определению производной, знаменатель последней дроби стремится к $f'(x_0) \neq 0$. Таким образом, **теорема доказана**[3].

Теорема 1

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их сумма имеет производную в точке x, причём производная суммы равна сумме производных:

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Теорема 2

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция $y = kf(x)$ имеет производную в точке x, причём:

$(kf(x))' = kf'(x)$.

Теорема 3

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причём:

$(f(x)g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Теорема. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное (при условии $g(x) \neq 0$) также дифференцируемы в точке x, причем имеют место формулы

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;
2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Доказательство. Докажем для частного. Имеем

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta f + f(x)}{\Delta g + g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta f\, g(x) - \Delta g\, f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\right) =$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta f}{\Delta x} g(x) - \dfrac{\Delta g}{\Delta x} f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

Отсюда получаем утверждение теоремы. **Теорема доказана**.

Следствие. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, то

$$d(f \pm g) = df \pm dg;$$
$$d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg;$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}.$$

Рассмотрим теперь производные основных элементарных функций.

$$(C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0;$$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(e^{\Delta x \ln a} - 1\right)a^x \ln a}{\Delta x \ln a} = a^x \ln a;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}, \quad y = \ln x;$$

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = x^\alpha (\alpha \ln x)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \ x>0;$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

Вопрос 19

Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(a;b)$, тогда на этом интервале определена функция $y = f'(x)$. Если эта функция имеет производную в точке $x_0 \in (a;b)$, то такая производная называется второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $y = f''(x_0)$. Аналогично определяется производная любого порядка k:

$$y^{(k)} = f^{(k)}(x_0) = \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0).$$

Теорема (Лейбниц).

---

[3] $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall \Delta x,\ |\Delta x| < \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{1}{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$. Так как $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$, то $\exists \delta > 0 : \forall \Delta y,\ |\Delta y| < \delta \Rightarrow |\Delta x| < \delta_1$. Отсюда $\forall \Delta y,\ |\Delta y| < \delta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall \Delta x,\ |\Delta x| < \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$.

$$(y_1 \cdot y_2)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot y_1^{(j)} \cdot y_2^{(k-j)}.$$

Доказательство.

$$(y_1 \cdot y_2)' = \sum_{j=0}^{1} C_1^j \cdot y_1^{(j)} \cdot y_2^{(1-j)} = y_1' \cdot y_2 + y_1 \cdot y_2';$$

$$(y_1 \cdot y_2)^{(k+1)} = \left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot y_1^{(j)} \cdot y_2^{(k-j)}\right)' = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot (y_1^{(j+1)} \cdot y_2^{(k-j)} + y_1^{(j)} \cdot y_2^{(k-j+1)}) =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot y_1^{(j+1)} \cdot y_2^{(k-j)} + \sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot y_1^{(j)} \cdot y_2^{(k-j+1)} = \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \cdot y_1^{(j+1)} \cdot y_2^{(k-j)} + \sum_{j=1}^{k} C_k^j \cdot y_1^{(j)} \cdot y_2^{(k-j+1)} +$$
$$+ y_1^{(k+1)} \cdot y_2 + y_1 \cdot y_2^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{k} C_k^{j-1} \cdot y_1^{(j)} \cdot y_2^{(k-j+1)} + \sum_{j=1}^{k} C_k^j \cdot y_1^{(j)} \cdot y_2^{(k-j+1)} + y_1^{(k+1)} \cdot y_2 + y_1 \cdot y_2^{(k+1)} =$$
$$= \sum_{j=0}^{k-1} (C_k^{j-1} + C_k^j) \cdot y_1^{(j)} \cdot y_2^{(k-j+1)} + y_1^{(k+1)} \cdot y_2 + y_1 \cdot y_2^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j \cdot y_1^{(j)} \cdot y_2^{(k+1-j)}$$

Поскольку

$$C_k^{j-1} + C_k^j = \frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!} + \frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\left(\frac{1}{k-j+1} + \frac{1}{j}\right) = \frac{(k+1)!}{j!(k-j+1)!} = C_{k+1}^j$$

Теорема доказана.

Определение. Дифференциал n+1-го порядка: $d^{n+1} f = d(d^n f)$.

Пусть $y = f(x)$. Тогда

$$d^2 y = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d^2 x$$

Если x является независимой переменной, то $d^2 x = d(dx) = 0$ поскольку dx - это число. Следовательно, $d^2 y = d(f'(x))dx = f''(x)dx^2$. Аналогично показывается, что $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$. Отсюда получаем другое обозначение производной: $\dfrac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$.

Если $x = \varphi(t)$ не является независимой переменной, то $d^2 y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x$. В то время как для независимой переменной $d^2 y = f''(x)dx^2$. Таким образом, в отличие от первого дифференциала, второй дифференциал не обладает свойством инвариантностью формы.

Определение. Пусть заданы функции $y = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$, причем функция $x = \psi(t)$ имеет обратную $t = \psi^{-1}(x)$. Тогда определена композиция функций $y = \varphi(\psi^{-1}(x))$, про которую говорят, что она задана параметрически.

Если функции $x = \psi(t)$ монотонна на некотром интервале и имеет отличную от нуля производную, то обратная функция также имеет производную и $(\psi^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\psi'(t)}$. Таким образом,

$$y_x' = \varphi'(t) \cdot (\psi^{-1})'(x) = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

Аналогично можно найти производную второго порядка.

Вопрос 20

Определение. Дифференциал n+1-го порядка: $d^{n+1} f = d(d^n f)$.

Пусть $y = f(x)$. Тогда

$$d^2 y = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d^2 x$$

Если x является независимой переменной, то $d^2 x = d(dx) = 0$ поскольку dx - это число. Следовательно, $d^2 y = d(f'(x))dx = f''(x)dx^2$. Аналогично показывается, что $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$. Отсюда получаем другое обозначение производной: $\dfrac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$.

Если $x = \varphi(t)$ не является независимой переменной, то $d^2 y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x$. В то время как для независимой переменной $d^2 y = f''(x)dx^2$. Таким образом, в отличие от первого дифференциала, второй дифференциал не обладает свойством инвариантностью формы.

Определение. Пусть заданы функции $y = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$, причем функция $x = \psi(t)$ имеет обратную $t = \psi^{-1}(x)$. Тогда определена композиция функций $y = \varphi(\psi^{-1}(x))$, про которую говорят, что она задана параметрически.

Если функции $x = \psi(t)$ монотонна на некотром интервале и имеет отличную от нуля производную, то обратная функция также имеет производную и $(\psi^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\psi'(t)}$. Таким образом,

$$y'_x = \varphi'(t) \cdot (\psi^{-1})'(x) = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

Аналогично можно найти производную второго порядка.

Определение дифференциала высшего порядка

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая является дифференцируемой на интервале (a, b). Дифференциал первого порядка данной функции в точке $x \in (a, b)$ определяется формулой

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Видно, что дифференциал dy зависит от двух величин − от переменной x (через производную $y = f'(x)$) и от дифференциала независимой переменной dx.

Зафиксируем приращение dx, т.е. будем считать, что dx является постоянной величиной. Тогда дифференциал dy представляет собой функцию только переменной x, для которой можно также определить дифференциал, причем в качестве приращения Δx возьмем тот же самый дифференциал dx. В результате мы получим *второй дифференциал* или *дифференциал второго порядка*, который обозначается как $d^2 y$ или $d^2 f(x)$. Итак, по определению,

$$d^2 y = d(dy) = d\left[f'(x)\, dx\right] = df'(x)\, dx = f''(x)\, dx dx = f''(x)\, (dx)^2.$$

Обычно обозначают $(dx)^2 = dx^2$. Поэтому получаем:

$$d^2 y = f''(x)\, dx^2.$$

120. Нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков. Вспоминая, что (первый) дифференциал функции обладает свойством *инвариантности формы*, естественно поставить вопрос, обладают ли подобным свойством дифференциалы высших порядков. Покажем, например, что уже второй дифференциал этим свойством не *обладает*.

Итак, пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(t)$, так что y можно рассматривать как сложную функцию от t: $y=f(\varphi(t))$. Ее (первый) дифференциал по t можно написать в форме $dy=y'_x\cdot dx$, где $dx=x'_t\cdot dt$ есть функция от t. Вычисляем второй дифференциал по t: $d^2y=d(y'_x\cdot dx)=dy'_x\cdot dx+y'_x\cdot d(dx)$. Дифференциал dy'_x можно, снова пользуясь инвариантностью формы (первого) дифференциала, взять в форме $dy'_x=y''_{x^2}\cdot dx$, так что окончательно

$$d^2y=y''_{x^2}\cdot dx^2+y'_x\cdot d^2x, \tag{3}$$

в то время как при независимой переменной x второй дифференциал имел вид $d^2y=y''_{x^2}\cdot dx^2$. Конечно, выражение (3) для d^2y является *более общим*: если, в частности, x есть независимая переменная, то $d^2x=0$ – и остается один лишь первый член.

Возьмем пример. Пусть $y=x^2$, так что, покуда x – независимая переменная:

$$dy=2x\,dx,\qquad d^2y=2dx^2.$$

Положим теперь $x=t^2$; тогда $y=t^4$, и

$$dy=4t^3dt,\qquad d^2y=12t^2dt^2.$$

Новое выражение для dy может быть получено и из старого, если туда подставить $x=t^2$, $dx=2t\,dt$. Иначе обстоит дело с d^2y: сделав такую же подстановку, мы получим $8t^2\,dt^2$ вместо $12t^2\,dt^2$. Если же продифференцировать равенство $dy=2xdx$ по t, считая x функцией от t, то, наподобие (3), придем к формуле

$$d^2y=2dx^2+2xd^2x.$$

Подставив сюда $x=t^2$, $dx=2t\,dt$, $d^2x=2dt^2$, получим уже правильный результат: $12t^2dt^2$.

Вопрос 21

Лемма. Пусть $f(x)$ имеет производную в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$ (или $f'(x_0) < 0$). Тогда найдется окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ такая, что $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$ (или $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$).

Доказательство. Имеем

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Для $\varepsilon = \frac{|f'(x_0)|}{2}$ найдем $\delta > 0$, что $\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| < \frac{|f'(x_0)|}{2}$. Следовательно,

$$f'(x_0) - \frac{|f'(x_0)|}{2} < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < \frac{|f'(x_0)|}{2} + f'(x_0), \ \forall h, |h| < \delta.$$

Пусть $f'(x_0) > 0$. Тогда $0 < f'(x_0) - \frac{|f'(x_0)|}{2} < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Отсюда, если $h > 0$, то $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0 + h) > f(x_0)$. Если $h < 0$, то $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0 + h) < f(x_0)$.

Лемма доказана.

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум (максимум), если существует окрестность этой точки $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ такая, что в этой окрестности значение $f(x_0)$ является наименьшим (наибольшим). Локальный максимум или минимум называется локальным экстремумом.

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Замечание. Геометрический смысл: касательная в этой точке параллельна оси Ox.

Доказательство. Если предположить, что производная не равна нулю, то это приводит к противоречию с леммой, доказанной выше. **Теорема доказана**.

Теорема (Ролль). Пусть $f \in C[a;b]$ и f имеет производную на $(a;b)$. Если $f(a) = f(b)$, то существует точка ξ, в которой производная равна нулю.

Доказательство. Так как $f \in C[a;b]$, то функция ограничена на отрезке. Пусть $m \le f(x) \le M$. Если $m = M$, то функция постоянна и в качестве точки ξ можно взять любую. Пусть $m < M$, тогда, в силу равенства $f(a) = f(b)$, получаем, что хотя бы одно из значений m или M достигается в некоторой точке $x_0 \in (a;b)$. Следовательно, это будет точка локального экстремума, а, значит, в этой точке производная равна нулю. **Теорема доказана**.

Теорема (Лагранж). Пусть $f \in C[a;b]$ и имеет производную на $(a;b)$. Тогда существует точка $\xi \in (a;b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Она, очевидно, удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Поэтому существует точка $\xi \in (a;b)$ такая, что $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. **Теорема доказана**.

Теорема (Коши). Пусть $f, g \in C[a;b]$ и имеют производные на $(a;b)$, причем $g'(x) \neq 0$. Тогда существует точка $\xi \in (a;b)$ такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Доказательство. По теореме Ролля $g(b) \neq g(a)$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

По теореме Ролля,

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi).$$

Теорема доказана.

Вопрос 22

Теорема (первое правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены и дифференцируемы на проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ и функция $g'(x)$ не обращается в нуль на этой окрестности. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ и существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Тогда сущесвует предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и выполняется равенство $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ произвольная последовательность, элементы которой принадлежат $\overset{\circ}{U}(a)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Доопределим функции $f(x)$, $g(x)$ в точке a положив их равными нулю. Тогда получим функции непрерывные на всей окрестности $U(a)$. На отрезке $[a; x_n]$ или $[x_n; a]$ функции удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Поэтому найдется точка ξ_n, лежащая между a и x_n такая, что

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Следовательно, если $n \to \infty$, то $x_n \to a$, а, значит, $\xi_n \to a$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = A$.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема остается справедливой в следующих случаях:

1. $\overset{\circ}{U}(a) = (a; a+\delta)$ или $\overset{\circ}{U}(a) = (a-\delta; a)$. Для доказательства достаточно брать последовательность справа или слева от точки a.

2. В качестве окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ берется множество $(-\infty; -\delta) \cup (\delta; +\infty)$ и все пределы берутся при $x \to \infty$. Действительно, сделаем замену $t = \dfrac{1}{x}$ и положим $G(t) = g(\dfrac{1}{t})$, $F(t) = f(\dfrac{1}{t})$. Тогда функции $G(t)$, $F(t)$ будут удовлетворять услвиям доказанной теоремы для $\overset{\circ}{U}(a) = (a - \dfrac{1}{\delta}; a + \dfrac{1}{\delta}) \setminus \{a\}$.

Причем $G'(t) = g'(\dfrac{1}{t})(-\dfrac{1}{t^2})$; $F'(t) = f'(\dfrac{1}{t})(-\dfrac{1}{t^2})$ и существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{t \to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда существует равный ему предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

3. В качестве окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ берется множество $(-\infty;-\delta)$ или $(\delta;+\infty)$. Действительно, замена $t=\dfrac{1}{x}$ приводит к случаю 1.

Теорема (второе правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены и дифференцируемы на проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ и функция $g'(x)$ не обращается в нуль на этой окрестности. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ и существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$. Тогда сущесвует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и выполняется равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Пусть сначала A конечный предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ x_n>a$ или $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ x_n<a$. По теореме Коши для отрезка $[x_n;x_m]$ имеем

$$\frac{f(x_n)-f(x_m)}{g(x_n)-g(x_m)}=\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\frac{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}=\frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})}.$$

Отсюда

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})}\frac{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}.$$

Пусть $\varepsilon>0$ произвольное число.

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\Rightarrow\exists\delta>0:\ \forall x,\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Rightarrow\exists m:\ \forall n\ge m\Rightarrow|x_n-a|<\delta$$

Так как $\xi_{nm}\in[x_n;x_m]$, то $|\xi_{nm}-a|<\delta$. Следовательно, для $\alpha_{nm}=\dfrac{f'(\xi_{nm})}{g'(\xi_{nm})}-A$ выполняется $|\alpha_{nm}|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Так как, по условию, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=\infty$, то поскольку номер m фиксирован, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}=1$. Отсюда, если обозначить $\beta_{nm}=\dfrac{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}-1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\beta_{nm}=0\Rightarrow\exists n_0>m:\forall n\ge n_0\Rightarrow|\beta_{nm}|<\frac{\varepsilon/2}{|A|+\varepsilon/2}.$$

Итак,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})}\frac{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}=(A+\alpha_{nm})(1+\beta_{nm})=A+\alpha_{nm}+(A+\alpha_{nm})\beta_{nm}.$$

Поэтому при всех $n\ge n_0$

$$\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}-A\right|\le|\alpha_{nm}|+(|A|+|\alpha_{nm}|)\beta_{nm}|<\frac{\varepsilon}{2}+(|A|+\frac{\varepsilon}{2})\frac{\varepsilon/2}{|A|+\varepsilon/2}=\varepsilon.$$

Если A бесконечный, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$ и, по доказанному, $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$. **Теорема доказана**.

Замечание. Теорема остается в силе, при замене окрестности, представленной в теореме, на окрестности, описанные в предыдущем замечании.

Вопрос 23

Теорема. Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ не убывала (не возрастала) на этом интервале необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции была неотрицательной (неположительной) всюду на этом интервале.

Доказательство. Пусть $f'(x) \geq 0$ на $(a;b)$. Возьмем $x_1 < x_2$ точки интервала. Тогда по теореме Лагранжа для отрезка $[x_1; x_2]$, находим $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$. Отсюда $f(x_2) \geq f(x_1)$. Следовательно, функция не убывает.

Обратно, пусть функция не убывает, тогда для $\Delta x > 0$ получаем $f(x + \Delta x) \geq f(x)$. Отсюда $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$. **Теорема доказана**.

Замечание. Отметим, что, если на интервале $(a;b)$ имеет место строгое неравенство $f'(x) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$. Отсюда функция возрастает на интервале. Аналогично для убывания.

Локальный минимум и локальный максимум будем называть локальным экстремумом функции.

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, в которой она непрерывна. Если в пределах указанной окрестности производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки a и отрицательна (положительна) справа от точки a, то функция имеет в точке a локальный максимум (минимум). Если же производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки a, то экстремума в точке a нет.

Доказательство. Пусть $x \neq a$. Тогда для отрезка с концами в точках a и x выполнены условия теоремы Лагранжа, поэтому имеет место равенство:

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a),$$

Где точка ξ лежит между точками x, a.

Таким образом, для первого случая (слева «+» справа «-»):

$$\begin{aligned} &x < a,\ f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \Rightarrow f(x) < f(a); \\ &x > a,\ f'(\xi) < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \Rightarrow f(x) < f(a). \end{aligned}$$

Значит, в точке a локальный максимум. **Теорема доказана**.

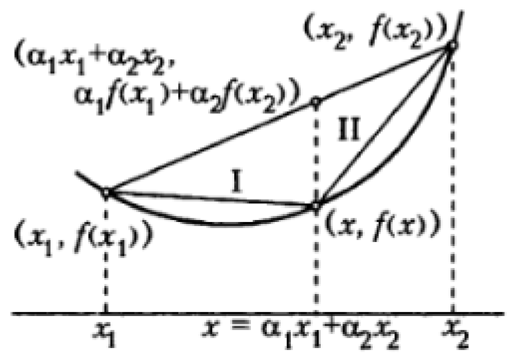
Теорема (без доказательства). Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a конечную вторую производную и $f'(a)=0$. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке a локальный максимум, если $f''(a)<0$ и локальный минимум, если $f''(a)>0$.

Определение. Функция $f:(a;b)\to \mathbf{R}$ называется выпуклой вниз (вверх) на интервале $(a;b)$, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in (a;b)$ и любых чисел $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$ таких, что $q_1+q_2=1$ имеет место неравенство $f(q_1x_1+q_2x_2)\leq(\geq)q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$.

Выясним геометрический смысл донного определения. Пусть $x_1<x_2$. Тогда, очевидно, что $x=q_1x_1+q_2x_2\in[x_1;x_2]$. Поэтому указанное неравенство означает, что точки любой дуги графика функции лежат под хорой, стягивающей эту дугу.

В дальнейшем будем рассматривать выпуклые вниз функции, поскольку для выпуклых вверх все рассуждения аналогичны.

$$\begin{cases} x=q_1x_1+q_2x_2; \\ 1=q_1+q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}; \\ q_2=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} \end{cases}$$



Неравенство в определении перепишется в виде:

$$f(x)\leq\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

Пусть $x_1<x_2$. Тогда $(x_2-x)f(x_1)+(x_1-x_2)f(x)+(x-x_1)f(x_2)\geq 0$.

Так как $x_2-x_1=(x_2-x)+(x-x_1)$, то при $x_1<x<x_2$ находим

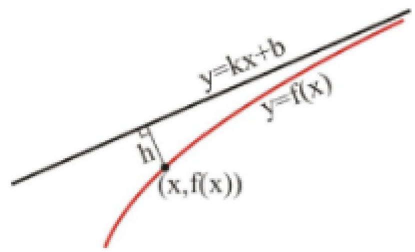
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \qquad (*)$$

Данное неравенство является иной формой записи выпуклости функции.

Теорема. Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f:(a;b)\to\mathbf{R}$ была выпуклой вниз (вверх) на $(a;b)$ необходимо и достаточно, чтобы ее производная не убывала (не возрастала) на $(a;b)$. При этом строгому возрастанию (убыванию) производной соответствует строгая выпуклость вниз (вверх).

Доказательство. Пусть $x_1<x_2$. В неравенстве (*) перейдем к пределу при $x\to x_1$, получим $f'(x_1)\leq\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Теперь в неравенстве (*) перейдем к пределу при $x\to x_2$, получим $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f'(x_2)$. Следовательно, $f'(x_1)\leq f'(x_2)$. Таким образом, производная не убывает.

Если теперь функция строго выпукла вниз, тогда $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. По теореме Лагранжа, имеем $f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2)$, где $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Так как производная не убывает, то $f'(x_1) \le f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \le f'(x_2)$. Следовательно, производная возрастает. Обратно, пусть производная не убывает. Тогда для $a < x_1 < x < x_2 < b$ по теореме Лагранжа $f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$; $\quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. При этом $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Поэтому в силу не убывания (возрастания), получаем $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$. Следовательно, $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. **Теорема доказана**.



Следствие. Для того чтобы функция $f:(a;b)\to \mathbf{R}$, имеющая на интервале $(a;b)$ вторую производную, была выпуклой вниз (вверх) необходимо и достаточно, чтобы на $(a;b)$ было $f''(x) \ge (\le) 0$. Если $f''(x) > (<) 0$, то этого достаточно, чтобы функция была строго выпукла вниз (вверх) на интервале $(a;b)$.

Отметим без доказательства следующий дополнительный результат.

Теорема. Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f:(a;b)\to \mathbf{R}$ была выпуклой вниз (вверх) на $(a;b)$ необходимо и достаточно, чтобы график этой функции всеми своими точками лежал не ниже (не выше) любой проведенной к нему касательной.

Определение. Пусть $f:U(a)\to \mathbf{R}$ дифференцируема на $U(a)$. Если на множестве $\{x\in U(a):\ x<a\}$ функция выпукла вниз (вверх), а на множестве $\{x\in U(a): x>a\}$ функция выпукла вверх (вниз), то точка $(a, f(a))$ графика называется его точкой перегиба.

Таким образом, при переходе через точку перегиба меняется направление выпуклости графика. Если на $U(a)$ определена вторая производная $f''(x)$ и всюду на $\{x\in U(a):\ x<a\}$ она имеет один знак, а всюду на $\{x\in U(a): x>a\}$ - противоположный, то этого достаточно, чтобы точка $(a, f(a))$ была точкой перегиба графика функции.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x\to-\infty$ (при $x\to+\infty$), если $f(x) = kx + b + o(1),\ x\to-\infty\ (x\to+\infty)$. Если при $x \to a-0\ (a+0)$ имеем $|f(x)|\to\infty$, то прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика.

Имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{o(1)}{x}\right) = k; \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}(b+o(1)) = b.$$

Заметим, что расстояние h от точки $(x, f(x))$ графика функции до прямой $y = kx + b$ равно

$$h = \frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}} = o(1),\quad x\to-(+)\infty.$$

Вопрос 24

Теорема. Если на отрезке $[a,x]$ или $[x,a]$ функция f непрерывна вместе с первыми n своими производными, а на интервале (a,x) или (x,a) функция имеет производную порядка n+1, то при любой функции φ, непрерывной на этом отрезке и имеющей отличную от нуля производную на соответствующем интервале, найдется точка ξ, лежащая между x и a, такая, что

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)\cdot n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Замечание. Данная формула называется формулой Тейлора, многочлен в левой части называется многочленом Тейлора, последнее слагаемое называется остаточным членом формулы Тейлора. При $a=0$ формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

Доказательство. На отрезке $I=[a,x]$ или $I=[x,a]$ рассмотрим функцию

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

По условию теоремы $F \in C(I)$ и имеет производную на интервале, причем

$$\begin{aligned}F'(t) &= -f'(t) - (f''(t)(x-t) - f'(t)) - (\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - f''(t)(x-t)) - \ldots - \\ &- (\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n-2)}(t)}{(n-3)!}(x-t)^{n-3}) - (\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2}) - \\ &- (\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.\end{aligned}$$

По теореме Коши для функций F и φ найдем точку ξ между a и x такую, что

$$\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Замечая, что $F(x)=0$, получаем

$$\frac{-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{\varphi'(\xi)\cdot n!}.$$

Отсюда получается утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Положим $\varphi(t) = x-t$ получим остаточный член в форме Коши:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{x-a}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Положим $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ получим остаточный член в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{-(x-a)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n;$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Теорема (локальная формула Тейлора). Пусть $U(a)$ окрестность точки a. Если функция $f: U(a) \to \mathbf{R}$ имеет в точке a все производные $f'(a),\ f''(a), \dots, f^{(n)}(a)$ до порядка n включительно, то справедливо следующее представление:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),\ x \to a$$

(локальная формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).

Доказательство. Обозначим

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Имеем $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a),\ k = 0,1,\dots,n$. Пусть $r(x) = f(x) - P(x)$. Тогда $r^{(k)}(a) = 0,\ k = 0,1,\dots,n$. Достаточно доказать, что $r(x) = o((x-a)^n),\ x \to a$. Это утверждение следует из следующей леммы. **Теорема доказана**.

Лемма. Если функция $r: U(a) \to \mathbf{R}$ имеет в точке a производные $r^{(k)}(a) = 0,\ k = 0,1,\dots,n$, то $r(x) = o((x-a)^n),\ x \to a$.

Доказательство. Докажем это индукцией по n. При n=1, по определению дифференцируемости функции в точке $r(x) - r(a) = r'(a)(x-a) + o(x-a),\ x \to a$. Следовательно, $r(x) = o(x-a),\ x \to a$. Предположим, что утверждение доказано для $n = k-1 \geq 1$. Докажем его для $n = k$. По определению производной старшего порядка, существование производной $r^{(k)}(a)$ означает, что функция $r^{(k-1)}(x)$ определена в некоторой окрестности $W(a)$ точки a. Можно считать, что в этой окрестности определены все функции $r(x), r'(x), \dots, r^{(k-1)}(x)$. При этом

$$(r')'(a) = 0,\ (r')''(a) = 0, \dots, (r')^{(k-1)}(a) = 0.$$

Следовательно, для функции $r'(x)$ справедливо предположение индукции, поэтому

$$r'(x) = o((x-a)^{k-1}),\ x \to a.$$

Отсюда, по теореме Лагранжа, получаем

$$r(x) = r(x) - r(a) = r'(\xi)(x-a) = \alpha(\xi)(\xi - a)^{k-1}(x-a),$$

где ξ лежит между x и a, $\lim\limits_{\xi\to a}\alpha(\xi)=0$. Так как $|\xi-a|\le|x-a|$ и при $x\to a$ будет $\xi\to a$, то из неравенства $|r(x)|\le|\alpha(\xi)||x-a|^k$ следует, что $r(x)=o(x-a)^k$, $x\to a$. **Лемма доказана**.

Рассмотрим теперь разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена.

1. $f(x)=e^x$. Поскольку $f^{(k)}(0)=e^x\big|_{x=0}=1$. Следовательно,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad x\to 0.$$

2. $f(x)=\sin(x)$. Имеем $f^{(2k)}(0)=(-1)^k\sin(x)\big|_{x=0}=0$, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\cos(x)\big|_{x=0}=(-1)^k$. Поэтому

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2k+2}),\ x\to 0.$$

3. Аналогично

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2k+1}),\ x\to 0.$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$. Имеем $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$; $f''(x)=\dfrac{(-1)}{(x+1)^2}$; $f'''(x)=\dfrac{(-1)^2 2}{(x+1)^3}$; $f^{(4)}(x)=\dfrac{(-1)^3 2\cdot 3}{(x+1)^4}$;... . Таким образом, можно написать общее выражение

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+1)^k}.$$

Следовательно, $\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}=\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ и

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n),\ x\to 0.$$

5. Аналогично

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),\quad x\to 0.$$

Примеры.

1. Написать разложение функции $f(x)=\ln(\cos x)$ до члена x^4.

Решение. Имеем, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+o(x^7)$, $x\to 0$, $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$, $x\to 0$.

Отсюда

$$\ln(\cos x)=\ln(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^7))=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^7)-$$
$$-\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^7))^2+\frac{1}{3}(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^7))^3+o(x^6)=$$
$$=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}-\frac{1}{2}(\frac{x^4}{4}-2\frac{x^6}{2\cdot 4!})+\frac{1}{3}(-\frac{x^6}{8})+o(x^6)=$$
$$=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6),\ x\to 0.$$

2. Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4))-x(1+x)}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3!}-x-x^2+o(x^4)}{x^3}=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+o(x))=1/3$$

Остаточный член формулы Тейлора.

Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$. Тогда в некоторой окрестности $U(x_0)$ можно написать равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(f,x)=P_n(f,x)+r_n(f,x)\quad(1),$$

которое называется *формулой Тейлора* функции f в точке x_0, где $P_n(f,x)$ называется *многочленом Тейлора*, а $r_n(f,x)$ - *остаточным членом* Тейлора (после n-го члена).

Если существует

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0,$$

то согласно определению сходимости ряда (1) сходится к функции $f(x)$ в точке x.

Лемма Править

Пусть $\exists f^{(n)}(x_0), f'$ в $\dot{U}(x_0)$. Тогда в $\dot{U}(x_0)$

$$(r_n(f,x))' = r_{n-1}(f',x)$$

Доказательство:

$$(r_n(f,x))'=(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k)'==f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{(k-1)}=r_{n-1}(f',x)$$

Теорема. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Править

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\exists f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула (1), в которой $r_n(f,x) \;=\; o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Доказательство: будем проводить по индукции:

При $n = 1$ утверждение теоремы верно. В самом деле, в этом случае f дифференцируема в точке x_0. Следовательно,

$$f(x) - f(x_0) \;=\; f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0).$$

Что совпадает с условием теоремы.

Предположим, что утверждение теоремы верно при $n-1 (n \geqslant 1)$ и покажем, что это верно и для n.

Использую теорему Лагранжа о конечных приращениях и лемму, имеем (считая для

определенности $x > x_0$):

$$r_n(f,x) \;=\; r_n(f,x) - r_n(f,x_0) \;=\; r_{n-1}(f',\xi)(x-x_0),$$

где $x_0 < \xi < x$.

По предположению индукции $r_{n-1}(f',\xi) \;=\; o((\xi - x_0)^{n-1})$ при $x \to x_0$. Следовательно,

$$r_n(f,x) \;=\; o((x-x_0)^n) \text{ при } x \to x_0.$$

что и требовалось показать.

Теорема. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Править

Пусть $x > x_0 (x < x_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{(n)}$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]([x, x_0])$, $\exists f^{(n+1)}$ на интервале $(x_0, x)((x, x_0))$. Тогда справедлива формула (1), в которой

$$r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$$

где $0 < \theta < 1$.

Доказательство: будем проводить по индукции, считая $x > x_0$. При $n = 0$ теорема утверждает, что при некотором $\theta \in (0,1)$

$$f(x) \;=\; f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x-x_0))(x-x_0).$$

Это утверждение верно, так как оно совпадает с доказанной ранее формулой конечных приращений Лагранжа.

Предположим, что утверждение верно при $n-1 (n \geqslant 0)$ и установим, что оно верно и при n. Использую теорему Коши о среднем и лемму, имеем (для определенности $x > x_0$)

$$\frac{r_n(f,x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{r_n(f,x) - r_n(f,x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0-x_0)^{n+1}} =$$

где $x_0 < \eta < \xi < x$,а предпоследнее равенство написано в силу предположения индукции.

Теорема доказана.