По условию, $\mu(X \setminus A) = 0$. Функция $f(x)$ измерима на A, а так как на множестве меры нуль, очевидно, вообще всякая функция измерима, то $f(x)$ измерима на $X \setminus A$, следовательно, она измерима и на множестве X.

Упражнение. Пусть последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится почти всюду к некоторой предельной функции $f(x)$. Доказать, что последовательность $f_n(x)$ сходится почти всюду к $g(x)$ в том и только том случае, если $g(x)$ эквивалентна $f(x)$.

5. Теорема Егорова. В 1911 г. Д. Ф. Егоровым была доказана следующая важная теорема, устанавливающая связь между понятиями сходимости почти всюду и равномерной сходимости.

Теорема 6. *Пусть E — множество конечной меры и последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится на E почти всюду к $f(x)$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое измеримое множество $E_\delta \subset E$, что*

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

2) *на множестве E_δ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно.*

Доказательство. Согласно теореме 4′ функция $f(x)$ измерима. Положим

$$E_n^m = \bigcap_{i \geqslant n} \{x \colon |f_i(x) - f(x)| < 1/m\}.$$

Таким образом, E_n^m при фиксированных m и n означает множество всех тех точек x, для которых

$$|f_i(x) - f(x)| < 1/m$$

при всех $i \geqslant n$. Пусть

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m.$$

Из определения множеств E_n^m ясно, что при фиксированном m

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \ldots \subset E_n^m \subset \ldots$$

В силу того, что σ-аддитивная мера непрерывна, для любого m и любого $\delta > 0$ найдется такое $n_0(m)$, что

$$\mu\left(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m\right) < \delta/2^m.$$

Положим

$$E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m,$$

и покажем, что так построенное E_δ удовлетворяет требованиям теоремы.

Докажем сначала, что на E_δ последовательность $\{f_i(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$. Это сразу вытекает из того, что если $x \in E_\delta$, то для любого m

$$|f_i(x) - f(x)| < 1/m \text{ при } i > n_0(m).$$

Оценим теперь меру множества $E \setminus E_\delta$. Для этого заметим, что при всяком m имеем $\mu(E \setminus E^m) = 0$. Действительно, если $x_0 \in E \setminus E^m$, то существуют сколь угодно большие значения i, при которых

$$|f_i(x_0) - f(x_0)| \geqslant 1/m,$$

т. е. последовательность $\{f_n(x)\}$ в точке x_0 не сходится к $f(x)$. Так как, по условию, $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду, то

$$\mu(E \setminus E^m) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\mu\left(E \setminus E^m_{n_0(m)}\right) = \mu\left(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}\right) < \delta/2^m.$$

Поэтому

$$\mu(E \setminus E_\delta) = \mu\left(E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \left(E \setminus E^m_{n_0(m)}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(E \setminus E^m_{n_0(m)}\right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta.$$

Теорема доказана.

6. Сходимость по мере.

Определение 4. Говорят, что последовательность измеримых функций $f_n(x)$ *сходится по мере* к функции $f(x)$, если для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\} = 0.$$

Нижеследующие теоремы 7 и 8 устанавливают связь между понятиями сходимости почти всюду и сходимости по мере. Как и в предыдущем пункте рассматриваемая мера предполагается конечной.

Теорема 7. *Если последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду к некоторой функции $f(x)$, то она сходится к той же самой предельной функции $f(x)$ по мере.*

Доказательство. Из теоремы 4' следует, что предельная функция $f(x)$ измерима. Пусть A — то множество (меры нуль), на котором $f_n(x)$ не стремятся к $f(x)$. Пусть, далее,

$$E_k(\sigma) = \{x : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \sigma\},$$

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma), \qquad M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma).$$