Математический анализ

«Частные производные явной функции нескольких переменных»

Ибрагимов Д.Н., доцент каф. 804

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Москва 2020

3219. Вычислить частные производные 1-го и 2-го порядка функции $u = \operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)'_x = \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}}\cdot\frac{2x}{y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)'_y = \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}}\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x}{y}\cdot\left[-\frac{2}{\cos^3\frac{x^2}{y}}\cdot\left(-\sin\frac{x^2}{y}\right)\cdot\frac{2x}{y}\right] + \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}}\cdot\frac{2}{y}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x^2}{y^2}\cdot\left[-\frac{2}{\cos^3\frac{x^2}{y}}\cdot\left(-\sin\frac{x^2}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\right] + \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}}\cdot\frac{2x^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{2x}{y}\cdot\left[-\frac{2}{\cos^3\frac{x^2}{y}}\cdot\left(-\sin\frac{x^2}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\right] + \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}}\cdot\left(-\frac{2x}{y^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\left[-\frac{2}{\cos^3\frac{x^2}{y}}\cdot\left(-\sin\frac{x^2}{y}\right)\cdot\frac{2x}{y}\right] + \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}}\cdot\left(-\frac{2x}{y^2}\right).$$

3257. Вычислить $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = x\ln(xy)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ln(xy) + \frac{x}{xy} = \ln(xy) + \frac{1}{y}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y}{xy} + 0 = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

3284. Вычислить производные первого и второго порядка сложной функции $u = f(x, \frac{x}{y})$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' \cdot 1 + f_2' \cdot \frac{1}{y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_1' \cdot 0 + f_2' \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -f_2' \frac{x}{y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2} \cdot \left[f_{12}'' \cdot 1 + f_{22}'' \cdot \frac{1}{y}\right] - f_2' \frac{1}{y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[f_{11}'' \cdot 1 + f_{12}'' \cdot \frac{1}{y}\right] \cdot 1 + \left[f_{12}'' \cdot 1 + f_{22}'' \cdot \frac{1}{y}\right] \cdot \frac{1}{y} = f_{11}'' + 2 f_{12}'' \frac{1}{y} + f_{22}'' \frac{1}{y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2} \cdot \left[f_{12}'' \cdot 0 + f_{22}'' \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)\right] - f_2' \cdot \left(-\frac{2x}{y^3}\right) = f_{22}'' \frac{x^2}{y^4} + f_2' \frac{2x}{y^3}.$$

3291. Вычислить полные дифференциалы первого и второго порядков от сложной функции $u = f(t)$, если $t = xyz$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = f' \cdot yzdx + f' \cdot xzdy + f' \cdot xydz.$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz =$$

$$= f''y^2z^2dx^2 + f''x^2z^2dy^2 + f''x^2y^2dz^2 +$$

$$+2([f'' \cdot xz]yz + f'z)dxdy + 2([f'' \cdot xy]xz + f'x)dydz + 2([f'' \cdot xy]yz + f')dxdz.$$

3296. Вычислить полные дифференциалы первого и второго порядков от сложной функции $u = f(x+y, z)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz =$$

$$= (f_1' \cdot 1 + f_2' \cdot 0)dx + (f_1' \cdot 1 + f_2' \cdot 0)dy + (f_1' \cdot 0 + f_2' \cdot 1)dz =$$

$$= f_1' dx + f_1' dy + f_2' dz.$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz =$$

$$= f_{11}'' dx^2 + f_{11}'' dy^2 + f_{22}'' dz^2 +$$

$$+2f_{11}'' dxdy + 2f_{12}'' dydz + 2f_{12}'' dxdz.$$

3299. Вычислить полные дифференциалы первого и второго порядков от сложной функции $u = f(x, y, z)$, если $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$

$$du = \frac{df}{dt} \cdot dt = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \right) dt = (f'_x + 2t f'_y + 3t^2 f'_z) dt.$$

$$d^2u = \frac{d^2 f}{dt^2} \cdot dt^2 = \frac{d}{dt}(f'_x + 2t f'_y + 3t^2 f'_z) \cdot dt^2 =$$

$$= \big[(f''_{xx} + 2t f''_{xy} + 3t^2 f''_{xz}) +$$

$$2t(f''_{yx} + 2t f''_{yy} + 3t^2 f''_{yz}) + 2 f'_y +$$

$$3t^2(f''_{zx} + 2t f''_{zy} + 3t^2 f''_{zz}) + 6t f'_z \big] dt^2 =$$

$$= (f''_{xx} + 4t^2 f''_{yy} + 9t^4 f''_{zz} + 4t f''_{xy} + 6t^2 f''_{xz} + 6t^3 f''_{yz} + 2 f'_y + 6t f'_z) dt^2.$$

3347. Определить угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точках $A(\varepsilon, 0, 0)$ и $B(0, \varepsilon, 0)$

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad} u\Big|_A = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} u\Big|_B = \begin{pmatrix} 0\varepsilon \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\cos\varphi = \frac{\left(\operatorname{grad} u\Big|_A, \operatorname{grad} u\Big|_B\right)}{\left\|\operatorname{grad} u\Big|_A\right\| \cdot \left\|\operatorname{grad} u\Big|_B\right\|} = 0.$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

3341. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1,1)$ в направлении l, составляющем угол $\frac{\pi}{3}$ с положительным направление оси Ox

Найдем вектор l:

$$l = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Важно, чтобы длина вектора l равнялась 1. Проверим данный факт (если он не выполняется, то вектор l необходимо пронормировать, т.е. разделить на его длину):

$$\|l\| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3}} = 1.$$

Вычислим градиент функции $z(x,y)$:

$$\operatorname{grad} z = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}.$$

Тогда производная в направлении l имеет вид

$$(\operatorname{grad} z, l) = x - \sqrt{3}y, \quad (\operatorname{grad} z, l)\Big|_M = 1 - \sqrt{3}.$$