По условию, $\mu(X\backslash A) = 0$. Функция $f(x)$ измерима на A, а так как на множестве меры нуль, очевидно, вообще всякая функция измерима, то $f(x)$ измерима на $X\backslash A$, следовательно, она измерима и на множестве X.

Упражнение. Пусть последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится почти всюду к некоторой предельной функии $f(x)$. Доказать, что последовательность $f_n(x)$ сходится почти всюду к $g(x)$ в том и только том случае, если $g(x)$ эквивалентна $f(x)$.

5. Теорема Егорова. В 1911 г. Д. Ф. Егоровым была доказана следующая важная теорма, устанавливающая связь между понятиями сходимости почти всюду и равномерной сходимости.

Теорема 6. *Пусть E — множество конечной меры и последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится на E почти всюду к $f(x)$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое измеримое множество $E_\delta \subset E$, что*

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

2) *На множестве E_δ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно.*

Доказательство. Согласно теореме 4' функция $f(x)$ изизмерима. Положим

$$E_n^m = \bigcap_{i\geqslant n} \{x : |f_i(x) - f(x)| < 1/m\}.$$

Таким образом, E_n^m при фиксированных m и n означает множество всех тех точек x, для которых

$$f_i(x) - f(x)| < 1/m$$

при всех $i \geqslant n$. Пусть

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m.$$

Из определения множеств E_n^m ясно, что при фиксированном m

$$E_1^m \subset E_2^m \subset ... \subset E_n^m \subset ...$$

В силу того, что σ-аддитивная мера непрерывна, для любого m и любого $\delta > 0$ найдется такое $n_0(m)$, что

$$\mu(E^m \backslash E_{n_0(m)}^m) < \delta\backslash 2^m$$

Положим

$$E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m,$$

и покажем, что такое построение E_δ удовлетворяет требованиям теоремы.

Докажем сначала, что на E_δ последовательность $f_i(x)$ сходится равномерно к функции $f(x)$. Это сразу вытекает из того, что если $x \in E_\delta$, то для любого m

$$|f_i(x) - f(x)| < 1/m \text{ при } i > n_0(m).$$

Оценим теперь меру множества $E \backslash E_\delta$. Для этого заметим, что при всяком m имеем $\mu(E \backslash E^m) = 0$. Действительно, если $x_0 \in \in E \backslash E^m$, то существует сколь угодно большие значения i, при которых

$$|f_i(x_0) - f(x_0)| \geqslant 1/m,$$

т. е. последовательность $f_n(x)$ в точке x_0 не сходится к $f(x)$. Так как, по условию, $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду, то

$$\mu(E \backslash E^m) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\mu(E \backslash E^m_{n_0(m)}) = \mu(E^m \backslash E^m_{n_0(m)}) < \delta \backslash 2^m.$$

Поэтому

$$\mu(E \backslash E_\delta) = \mu(E \backslash \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}) = \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \backslash E^m_{n_0(m)}) \leqslant$$

$$\leqslant E^m_{n_0(m)}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta$$

Теорема доказана.

6. Сходимость по мере.

Определение 4. Говорят, что последовательность измеримых функций $f_n(x)$ *сходится по мере* к функции $f(x)$, если для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mu\{x : f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\} = 0.$$

Нижеследующие теоремы 7 и 8 устанавливают связь между понятиями сходимости почти всюду и сходимости по мере. Как и в предыдущем пункте рассматриваемая мера предполагается конечной.

Теорема 7. *Если последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится почти всюду к некоторой функции $f(x)$, то она сходится к той же самой предельной функции $f(x)$ по мере.*

Доказательство. Из теоремы 4' следует, что предельная функция $f(x)$ измерима. Пусть A — то множество (меры нуль), на котором $f_n(x)$ не стремится к $f(x)$. Пусть, далее,

$$E_k(\sigma) = x : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \sigma,$$

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma), \qquad M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma).$$