Вариант – 23 Хренникова А. С.

М80-108Б-19

Линейные преобразования $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в некотором базисе имеют соответственно матрицы A, B. Найти жордановы нормальные формы J_A и J_B матриц этих преобразований, а также матрицы перехода S_A и S_B к жорданову базису. Выполнить проверку, используя равенства $S_A J_A = A S_A$ и $S_B J_B = B S_B$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Преобразование $\mathcal{A}$. Первый этап. Находим жорданову форму J_A матрицы A преобразования $\mathcal{A}$. Первый шаг алгоритма не нужен, так как матрица преобразования задана.

2. Составляем характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}$.

$$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & -3 \\ -1 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda)(8-\lambda) + 6 + 6 + 3(3-\lambda) + 6(4-\lambda) - 2(8-\lambda) =$$
$$= -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 75\lambda + 125 = -(\lambda-5)(\lambda-5)(\lambda-5) = -(\lambda-5)^3$$

3. Находим корни характеристического уравнения $(\lambda-5)^3=0$. Уравнение имеет один корень $\lambda_1 = 5$ алгебраической кратности $n_1 = 3$. Этот действительный корень является собственным значением преобразования.

4. Для корня $\lambda_1 = 5$ кратности $n_1 = 3$ находим ранги матриц $B = A - \lambda_1 E, B^2, B^3$. Выполняя элементарные преобразования над строками, приводим матрицы B, B^2, B^3 к ступенчатому виду

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0; \quad B^3 = 0$$

Матрицы B^2 и B^3 – нулевые (к ступенчатому виду не приводятся).

Находим ранги: $r_1 = rg B = 1$, $r_2 = rg B^2 = 0$, $r_3 = rg B^3 = 0$. Значит, $m_1 = 2$, так как $r_2 = r_3$.

5. Определяем количество $k_1 = r_0 - 2r_1 + r_2 = 3 - 2\cdot 1 + 0 = 1$ – жордановых клеток 1-го порядка, количество $k_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 = 1 - 2\cdot 0 + 0 = 1$ – жордановых клеток 2-го порядка. Следовательно, жорданова форма имеет жордановы клетки $J_2(5)$ и $J_1(5)$.

6. Составляем искомую матрицу J_A блочно-диагонального вида, располагая найденные жордановы клетки на главной диагонали

$$J_A = \left(\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad (*)$$

Жорданова форма матрицы получена.

Второй этап. Находим матрицу перехода к жорданову базису.

1. Для собственного значения $\lambda_1 = 5$ алгебраической кратности $n_1 = 3$ по жордановой форме J_A определяем наибольший порядок $m_1 = 2$ жордановых клеток, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 5$. Составляем матрицу $B = A - \lambda_1 E$.

2. Матрица B была приведена к ступенчатому виду. Модифицированный ступенчатый вид $(B)_{ст} = (-1 \;\; 2 \;\; 3)$ получается удалением нулевых строк.

3. Так как B^2 – нулевая матрица, то $S^{(1)} = (B)_{ст}^T = (-1 \;\; 2 \;\; 3)^T$.

Вычисляем матрицу $BS^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -14 \\ 14 \end{pmatrix}$, составляем расширенную матрицу однородной системы уравнений $\begin{pmatrix} (B)_{ст} \\ \hline (BS^{(1)})^T \end{pmatrix} x = 0$ и приводим ее к упрощенному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 14 & -14 & 14 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Выражаем базисные переменные через свободную: $x_1 = -5x_3$, $x_2 = -4x_3$. Полагая $x_3 = -1$, получаем ненулевое решение $\varphi_1 = (5 \;\; 4 \;\; -1)^T$, которое образует фундаментальную систему. Значит, фундаментальная матрица состоит из одного столбца $\Phi_1 = (5 \;\; 4 \;\; -1)^T$.

Составляем матрицу $S^{(0)} = (BS^{(1)} \mid \Phi_1) =$

$S^{(0)} = (BS^{(1)} \mid \Phi_1) = \left(\begin{array}{c|c}14&5\\-14&4\\14&-1\end{array}\right)$. Из столбцов матриц $S^{(0)}$ и $S^{(1)}$ составляем искомую матрицу S: $S^{(0)} = \left(\begin{array}{c|c}14&5\\-14&4\\14&-1\end{array}\right)$, $S^{(1)} = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix}14&-1&5\\-14&2&4\\14&3&-1\end{pmatrix}$, записывая сначала первые столбцы матриц $S^{(0)}, S^{(1)}$, а затем второй столбец матрицы $S^{(0)}$.

Матрица перехода к жорданову базису найдена. Выполним проверку. Вычислим $J_A = S^{-1}AS = \frac{1}{42}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&6&9\\5&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&3\\1&3&-3\\-1&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&-1&5\\-14&2&4\\14&3&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix}2&1&14\\-15&30&45\\25&20&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&-1&5\\-14&2&4\\14&3&-1\end{pmatrix} =$

$= \left(\begin{array}{cc|c}5&1&0\\0&5&0\\ \hline 0&0&5\end{array}\right)$

Как видим, полученная жорданова форма отличается от (*) только перестановкой жордановых клеток.

Преобразование B. Первый этап. Находим жорданову форму J_B матрицы B преобразования B. Первый шаг алгоритма не нужен, так как матрица преобразования задана.

2. Составляем характеристический многочлен преобразования B:

$\Delta_B(\lambda) = \det(B-\lambda E) = \begin{vmatrix}1-\lambda&3&-1\\-1&-2-\lambda&1\\-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(2+\lambda)-3-1+(2+\lambda)+(1-\lambda)+3(1-\lambda) = -\lambda^3$

3. Находим корни характеристического уравнения $\lambda^3=0$. Уравнение имеет корень $\lambda_1=0$ алгебраической кратности $n_1=3$. Этот действительный корень является собственным значением преобразования.

4. Для корня $\lambda_1=0$ кратности $n_1=3$ находим ранг матрицы $C=B-\lambda_1E$. Выполняя элементарные преобразования над строками, приводим матрицу C к ступенчатому виду

$C = B-\lambda_1E = \begin{pmatrix}1&3&-1\\-1&-2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&-1\\0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$

Следовательно, $r_1 = rg(B-\lambda_1E) = 2$. Тогда геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1=0$ равна единице $(n_1-r_1=1)$. Это крайнее (наименьшее) значение геометрической кратности. Поэтому можем воспользоваться упрощенной процедурой приведения к каноническому виду. Собственному значению $\lambda_1=0$ соответствует жорданова клетка третьего порядка $J_3(0)$. Так как других собственных значений нет, то искомая матрица J_B совпадает с этой клеткой $J_B = J_3(0) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ (**).

Находим столбцы матрицы S перехода к жорданову базису. Составляем расширенную матрицу однородной системы $(B-\lambda E)s_1=0$ и приводим ее к упрощенному виду.

$(B-\lambda_1E \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\-1&-2&1&0\\-1&-1&1&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&0\\0&1&0&0\\0&2&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_1=x_3$, $x_2=0$. При $x_3=1$ получаем ненулевое решение $s_1=(1\ 0\ 1)^T$ — собственный вектор матрицы B. Составляем расширенную матрицу неоднородной системы $(B-\lambda_1E)s_1^{(1)}=s_1$ и приводим ее к упрощенному виду.

$(B-\lambda_1E \mid s_1) = \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&1\\-1&-2&1&0\\-1&-1&1&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&1\\0&1&0&1\\0&2&0&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&1\\0&2&0&2\\0&2&0&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-2\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

Выражаем базисные переменные через свободную: $x_1=-2+x_3$, $x_2=1$. При $x_3=0$ получаем ненулевое решение $s_1^{(1)}=(-2\ 1\ 0)^T$ — присоединенный вектор первого порядка. Составляем расширенную матрицу неоднородной системы $(B-\lambda_1E)s_1^{(2)}=s_1^{(1)}$ и приводим ее к упрощенному виду.

$(B-\lambda_1E \mid s_1^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&-2\\-1&-2&1&1\\-1&-1&1&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&-2\\0&1&0&-1\\0&2&0&-2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&-2\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_1=1+x_3$, $x_2=-1$. При $x_3=0$ получаем $s_1^{(2)}=(1\ -1\ 0)^T$ — присоединенный вектор второго порядка. Из полученных столбцов составляем искомую матрицу

$$S = (s_1 \;\; s_1^{(1)} \;\; s_1^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку жорданова форма (**) данной матрицы B определяется однозначно (она состоит из одной жордановой клетки), то можно проверить равенство $SJ_B = BS$, равносильное преобразованию $J_B = S^{-1}BS$ подобия. Вычислим

$$SJ_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad BS = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: а) для преобразования A: $J_A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 \\ -14 & 2 & 4 \\ 14 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

б) для преобразования B: $J_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$