Математический анализ

«Определённый интеграл»

Ибрагимов Д.Н., доцент каф. 804

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Москва 2020

2211. Вычислить $\int\limits_0^2 |1-x|dx$

$$\int\limits_0^2 |1-x|dx = \int\limits_0^1 |1-x|dx + \int\limits_1^2 |1-x|dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (1-x)dx + \int\limits_1^2 (x-1)dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

2220. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$

Пусть $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $x\in[0;1]$. Построим разбиение $[0;1]$ на n частей $[x_i;x_{i+1}]$, $x_i=\frac{i}{n}$, $i=\overline{0,n-1}$. В качестве $\xi_i\in[x_i;x_{i+1}]$ выберем $\xi_i=x_{i+1}=\frac{i+1}{n}$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{i+1}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n+i+1}=$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2.$$

2233. а) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x \cos x^2\,dx}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos x^2 dx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \left(1-\frac{(x^2)^2}{2!}x+O(x^8)\right)dx}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^5}{10}+O(x^9)}{x} = 1.$$

2241. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$

$$\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \int\limits_0^{2\pi} x^2 d \sin x = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \sin(x) 2x dx =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 2x d \cos x = 2x \cos x \Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} 2 \cos x dx = 4\pi - 2 \sin x \Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

2247. Вычислить $\int\limits_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

$$\int\limits_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \begin{bmatrix} x+1=y \\ x=y-1 \end{bmatrix} = \int\limits_1^{1.75} \frac{dy}{y\sqrt{y^2-2y+2}} =$$

$$= \begin{bmatrix} y=\dfrac{1}{z} \\ z=\dfrac{1}{y} \end{bmatrix} = \int\limits_1^{\frac{4}{7}} \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+2}} = \int\limits_{\frac{4}{7}}^{1} \frac{dz}{\sqrt{2z^2-2z+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\frac{4}{7}}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(z-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln\left|(z-\frac{1}{2}) + \sqrt{(z-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}\right| \right)\Bigg|_{\frac{4}{7}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{14}+\frac{\sqrt{50}}{14}\right)\right).$$

2271. Вычислить $\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$

$$\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{1-x}=y \\ x=1-y^3 \end{bmatrix} = \int\limits_0^{-2}(1-y^3)y\,d(1-y^3) =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} 3y^3(1-y^3)dy = 3\int\limits_{-2}^{0}(y^3-y^6)dy = 3\left(\frac{y^4}{4}-\frac{y^7}{7}\right)\Bigg|_{-2}^{0} =$$

$$= 3\left(\frac{16}{4}+\frac{-128}{7}\right) = -\frac{468}{7}.$$

2309. Вычислить $\int\limits_0^3 \operatorname{sign}(x - x^3)dx$

$$x - x^3 = x(1-x)(1+x) \begin{cases} \geqslant 0, & x \in [0;1], \\ < 0, & x \in (1;3]. \end{cases}$$

$$\operatorname{sign}(x - x^3) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1], \\ -1, & x \in (1;3]. \end{cases}$$

$$\int\limits_0^3 \operatorname{sign}(x - x^3)dx = \int\limits_0^1 1dx + \int\limits_1^3 (-1)dx = 1 + (-1)\cdot 2 = -1.$$

Домашнее задание

2211, 2219-2222, 2233, 2234, 2239-2249, 2268, 2271, 2273, 2309, 2312.