

Математическая
экономика
Курсовая работа
№ 4.1

Хренникова А.С.
М80-4085-19

Известна ковариационная матрица эффективности 2 ценных бумаг V. Найти все допустимые значения k, при которых инвестиционный капитал следует вкладывать в ценные бумаги обоих видов одновременно. (Короткие продажи запрещены)

$$V = \begin{pmatrix} 9 & k \\ k & 7 \end{pmatrix}$$

$$V_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j) = a_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad |a_{ij}| \leq 1$$

← коэф. корреляц. двух бумаг

$$V_{11} = a_{11} \sigma_1^2 = 9$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{9}{a_{11}}} = 3$$

$$V_{12} = a_{12} \sigma_1 \sigma_2 = k$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{\frac{7}{a_{22}}} = \sqrt{7}$$

$$V_{21} = a_{21} \sigma_2 \sigma_1 = k$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{k}{\sigma_1 \sigma_2}$$

$$V_{22} = a_{22} \sigma_2^2 = 7$$

$$-1 < \frac{k}{\sigma_1 \sigma_2} < 1$$

$$-1 < \frac{k}{3\sqrt{7}} < 1$$

$$-3\sqrt{7} < k < 3\sqrt{7}$$

$$a_{11} = a_{22} = 1$$

$$-1 < a_{12} < 1$$

При $a_{12} = 1$ инвестиционный капитал следует вкладывать в ценную бумагу одного вида, имеющую меньший риск (или максимальную доходность), что противоречит условию.

$$x^T V x \rightarrow \min_x$$

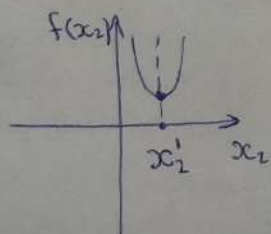
$$x_1 + x_2 = 1$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (т.к. короткие продажи запрещены)

$$(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 9 & k \\ k & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (9x_1 + kx_2 \quad kx_1 + 7x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 9x_1^2 + 2kx_1x_2 + 7x_2^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 = 1 - x_2$$

$$9(1-x_2)^2 + 2k(1-x_2)x_2 + 7x_2^2 = 9(1-2x_2+x_2^2) + 2kx_2 - 2kx_2^2 + 7x_2^2 = 9 - 18x_2 + 9x_2^2 + 2kx_2 - 2kx_2^2 + 7x_2^2 = x_2^2(16-2k) + x_2(2k-18) + 9 = f(x_2) \rightarrow \min$$



$f(x_2)$ - график - парабола

$$x_2' = \frac{-b}{2a} \text{ - точка минимума, при } a > 0$$

$$0 < x_2 < 1 \Rightarrow 0 < x_2' < 1$$

$$\begin{cases} 0 < \frac{-b}{2a} < 1 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < \frac{18-2k}{2(16-2k)} < 1 \\ 16-2k > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < \frac{9-k}{16-2k} < 1 \\ 8 > k \end{cases}$$

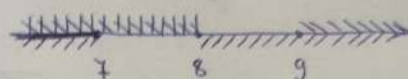
$$\begin{cases} 0 < \frac{9-k}{16-2k} \\ \frac{9-k}{16-2k} < 1 \\ k < 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9-k > 0 \\ 16-2k > 0 \\ 9-k < 0 \\ 16-2k > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9-k < 16-2k \\ 16-2k > 0 \\ 9-k > 16-2k \\ 16-2k < 0 \\ k < 8 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k < 9 \\ k < 8 \\ k > 9 \\ k > 8 \\ k < 7 \\ k < 8 \\ k > 7 \\ k > 8 \\ k < 8 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k < 8 \\ k > 9 \\ k < 7 \\ k > 8 \\ k < 8 \end{cases}$$



$$\rightarrow k < 7$$

$$\begin{cases} -7,937 < k < 7,937 \\ k < 7 \end{cases} \rightarrow k \in (-7,937; 7)$$

№ 4.2

Эффективности трех ценных бумаг некоррелированы и имеют доходности M и дисперсии D соответственно. Вычислить риск оптимального портфеля, ожидаемая доходность которого равна m_p , в случае когда

- 1) короткие продажи разрешены
- 2) короткие продажи запрещены

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \quad m_p = 19$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = m_p$$

$$d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + d_3 x_3^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3$$

$$1(1 - x_2 - x_3) + 2x_2 + 8x_3 = 19$$

$$1 - x_2 - x_3 + 2x_2 + 8x_3 = 19$$

$$x_2 = 18 - 7x_3$$

$$x_1 = 1 - (18 - 7x_3) - x_3 = 6x_3 - 17$$

$$f(x_3) = 9 \cdot (6x_3 - 17)^2 + 3(18 - 7x_3)^2 + 10x_3^2 = 9(36x_3^2 - 204x_3 + 289) + 3(324 - 252x_3 + 49x_3^2) + 10x_3^2 = 324x_3^2 - 1836x_3 + 2601 + 972 - 756x_3 + 147x_3^2 + 10x_3^2 = \underbrace{481x_3^2}_a - \underbrace{2592x_3}_b + 3573$$

$f(x_3)$ - график - парабола

$$x_3' = \frac{-b}{2a} \text{ - точка минимума}$$

$$x_3' = \frac{2592}{2 \cdot 481} = \frac{1296}{481} \approx 2,69$$

$$x_2' = 18 - 7 \cdot x_3' = 18 - \frac{7 \cdot 1296}{481} = \frac{18 \cdot 481 - 7 \cdot 1296}{481} = \frac{8658 - 9072}{481} = \frac{-414}{481} \approx -0,86$$

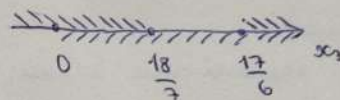
$$x_1' = 6 \cdot x_3' - 17 = \frac{6 \cdot 1296 - 481 \cdot 17}{481} = \frac{7776 - 8177}{481} = \frac{-401}{481} \approx -0,83$$

$$f(x_3') = 481 \cdot \frac{1296 \cdot 1296}{481 \cdot 481} - \frac{2592 \cdot 1296}{481} + 3573 = \frac{1679616 - 3359232 + 1718613}{481} = \frac{38997}{481} \approx 81,075$$

$$\approx 81,075$$

Если короткие продажи запрещены, то $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

$$\text{П.е.} \begin{cases} 6x_3 - 17 \geq 0 \\ 18 - 7x_3 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ f(x_3) \rightarrow \min \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_3 \geq \frac{17}{6} \\ x_3 \leq \frac{18}{7} \\ x_3 \geq 0 \\ f(x_3) \rightarrow \min \end{cases}$$



Задача не имеет решения.

Когда короткие продажи запрещены, то если $0 \leq x_i \leq 1$, условие $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = m_p$ или $1 \cdot x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 19$ не выполняется.

1) $(-0,83 \quad -0,86 \quad 2,69) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 81,075$

2) Решения нет

Эссе

Депозитарная расписка

Депозитарная расписка - ценная бумага, которая подтверждает владение акциями или облигациями иностранной компании. По сути, она позволяет покупать иностранные бумаги через брокера, оставаясь на своей бирже.

Депозитарные расписки придумали, чтобы местные инвесторы могли вкладывать в акции зарубежных фирм, не сходя с родной биржевой бумаги. Изначально депозитарные расписки выпускались лишь на территории первоисточника - США, но со временем распространились повсеместно.

Крупный банк, работающий на местном рынке, приобретает за свой счет и хранит у себя в депозитарии определенное количество акций той или иной зарубежной компании. А для клиентов выпускает расписки на поставку того или иного количества данных акций.

Выгода для компаний:

- Привлечение сторонних источников для запуска и поддержания инвестиционных программ
- Повышение цены акции на местном рынке за счет зарубежного спроса на них

Преимущества для инвесторов:

- Доступ к ценным бумагам иностранных организаций
- Получение прибыли на повышении курсовой цены акций фирм из развитых государств.

Депозитарные расписки имеют номинал равный количеству ценных активов, на которое они выписаны. Держатели бумаг получают право на дивиденды. При необходимости депозитарные расписки можно конвертировать в акции.

Существуют несколько видов депозитарных документов:

1. ADR (Американские)

ADR используются при расположении банка-депозитария в США. Торги проходят на Нью-Йоркской Фондовой Бирже. Валюта обращения - \$ и €. Основной выпуск ADR сосредоточен между 3 крупными банками: Morgan Stanley, Citigroup, Bank of New-York.

2. EDR (Европейские)

EDR выпускают европейские банки, а площадки для обращения - рынки Европы. Валюта - \$ и €

3. GDR (Глобальные)

Торговля проводится на мировых биржевых платформах, за исключением США. Валюта - \$ и €

4. RDR (Российские)

Торгуется на российском фондовом рынке. Валюта - Р

Разница между депозитарной распиской и акцией:

- 1) За каждой акцией закреплена ее фактический владелец. В то время как депозитарная расписка - это лишь сертификат, который дает право собственности на эту акцию
- 2) Разное налогообложение
- 3) Депозитарная расписка дает инвестору возможность разместить капитал в разных странах, не имея при этом доступа к зарубежным фирмам.