Хренникова А.С.
М8О-108Б-19

14. Преобразование $\mathcal{A}: V_2 \to V_2$ пространства V_2 - геометрических векторов в стандартном базисе $\bar{i}, \bar{j}$ имеет матрицу A.
Представить эту матрицу в виде произведения $A=SQ$ неотрицательной симметрической матрицы S и ортогональной матрицы Q. Выяснить геометрический смысл преобразования $\mathcal{A}$, рассматривая его как композицию $\mathcal{A}=\mathcal{S}\mathcal{Q}$ неотрицательного самосопряженного преобразования $\mathcal{S}$ (с матрицей S) и ортогонального преобразования $\mathcal{Q}$ (с матрицей Q)

$$A=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -4 & 6\end{pmatrix}$$

Решение: Нужно найти полярное разложение $A=SQ$ матрицы преобразования $\mathcal{A}$. Действуем согласно алгоритму.

1. Вычисляем симметрическую матрицу:

$$C=AA^T=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -4\\ 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}61 & 6\\ 6 & 52\end{pmatrix}$$

2. Находим собственные значения и собственные векторы матрицы C. Решаем характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}61-\lambda & 6\\ 6 & 52-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (61-\lambda)(52-\lambda)-36=0 \Leftrightarrow \lambda^2-113\lambda+3136=0 \Leftrightarrow (\lambda-49)(\lambda-64)=0$

$\lambda_1=64,\ \lambda_2=49.$

Для собственного значения $\lambda_1=64$ составляем расширенную матрицу системы $(C-\lambda_1 E)x=0$ и приводим её к упрощенному виду $(C-\lambda_1 E\,|\,o)=$
$=\left(\begin{array}{cc|c}-3 & 6 & 0\\ 6 & -12 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right).$

Находим ненулевое решение, например, $\varphi_1=(2\ \ 1)^T$. Для собственного значения $\lambda_2=49$ аналогично получаем $\varphi_2=(1\ \ -2)^T$. Собственные векторы φ_1, φ_2 матрицы C нормируем:

$$d_1=\frac{1}{|\varphi_1|}\varphi_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix};\quad d_2=\frac{1}{|\varphi_2|}\varphi_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

Составляем преобразующую матрицу $D=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$, приводящую матрицу C к диагональному виду $\Lambda=D^{-1}CD=$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}61 & 6\\ 6 & 52\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{128}{\sqrt5} & \frac{64}{\sqrt5}\\ \frac{49}{\sqrt5} & -\frac{98}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64 & 0\\ 0 & 49\end{pmatrix}$$

3. Вычисляем неотрицательную симметрическую матрицу:

$$S=D\sqrt{\Lambda}D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{16}{\sqrt5} & \frac{7}{\sqrt5}\\ \frac{8}{\sqrt5} & -\frac{14}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{39}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{36}{5}\end{pmatrix}$$

4. Находим ортогональную матрицу:

$$Q=S^{-1}A=\begin{pmatrix}\frac{39}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{36}{5}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}6 & 5\\ -4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{70} & -\frac{1}{140}\\ -\frac{1}{140} & \frac{39}{280}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 5\\ -4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

5. Записываем полярное разложение $A=SQ$ матрицы A:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}6 & 5\\ -4 & 6\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{39}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{36}{5}\end{pmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}}_{Q}$$

Этому разложению соответствует представление $\mathcal{A}=\mathcal{S}\mathcal{Q}$ преобразования $\mathcal{A}$ в виде композиции самосопряженного преобразования $\mathcal{S}$ и ортогонального преобразования $\mathcal{Q}$, которые имеют в стандартном базисе $\bar{i}, \bar{j}$ найденные матрицы S и Q соответственно.

Выясняем геометрический смысл преобразования $\mathcal{A}$. Самосопряженное преобразование $\mathcal{S}$ представляет собой растяжение вдоль взаимно перпендикулярных направлений, которые определяются собственными векторами. Учитывая связь $\sqrt{\Lambda}=D^{-1}SD$, заключаем, что собственные значения матрицы S равны $k_1=\sqrt{\lambda_1}=8$ и $k_2=\sqrt{\lambda_2}=7$, а собственными векторами матрицы S служат столбцы d_1, d_2 или коллинеарные им столбцы $\varphi_1=(2\ \ 1)^T$ и $\varphi_2=(1\ \ -2)^T$. Значит, преобразование $\mathcal{S}$ есть композиция растяжения с коэффициентом $k_1=8$ вдоль направления

$\vec{\psi}_1 = 2\vec{i}+\vec{j}$ и растяжения с коэффициентом $k_2 = 7$ вдоль направления $\vec{\psi}_2 = \vec{i}-2\vec{j}$.
Осталось определить геометрический смысл ортогонального преобразования Q. Для этого находим собственные векторы и собственные значения матрицы Q. Решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 0{,}8-\mu & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8-\mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (0{,}8-\mu)^2 + 0{,}36 = 0 \Leftrightarrow 0{,}64 - 1{,}6\mu + \mu^2 + 0{,}36 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 1{,}6\mu + 1 = 0 \Rightarrow D = 2{,}56 - 4 =$$

$= -1{,}44$, $\mu_{1,2} = \dfrac{1{,}6 \pm 1{,}2i}{2} = 0{,}8 \pm 0{,}6i$ получаем $\mu_1 = 0{,}8+0{,}6i$, $\mu_2 = 0{,}8-0{,}6i$. Для собственного значения $\mu_1 = 0{,}8+0{,}6i$ находим собственный вектор матрицы Q, например, $\psi_1 = (-i \;\; 1)^T$, а для $\mu_2 = 0{,}8-0{,}6i$ аналогично получаем вектор $\psi_2 = (i \;\; 1)^T$. Этим столбцам ψ_1 и ψ_2 соответствуют собственные векторы $\vec{\psi}_1 = -i\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{\psi}_2 = i\vec{i}+\vec{j}$. У рассматриваемого преобразования нет действительных собственных векторов.

$\cos\alpha = 0{,}8$; $\sin\alpha = -0{,}6 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-0{,}6}{0{,}8} = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow \alpha = -\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$

Следовательно, ортогональное преобразование Q представляет собой поворот вокруг начала системы координат на угол $\alpha = -\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$

Ответ: $$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 7{,}2 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}}_{Q}$$

Преобразование A является композицией поворота вокруг начала системы координат на угол $\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ и растяжения вдоль направлений $2\vec{i}+\vec{j}$ (с коэффициентом $k_1 = 8$) и $\vec{i}-2\vec{j}$ (с коэффициентом $k_1 = 7$)

Вариант-3 Хренникова А. С.

МВО-108Б-19

6. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением $(x,y)=x^Ty$ заданы столбцы a_1, a_2, a_3 и подпространство B - множество решений однородной системы $Bx=0$.

Найти:

а) величину угла между вектором x и подпространством $Lin(a_1, a_2, a_3)$;

б) ортогональную проекцию $b\in B$ вектора y на подпространство B и его ортогональную составляющую (перпендикуляр) $h\in B^\perp$ относительно подпространства B.

$$a_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\quad a_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\quad a_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\1\end{pmatrix}\quad x=\begin{pmatrix}-1\\1\\5\\1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\2&2&1&-1\end{pmatrix}\quad y=\begin{pmatrix}-5\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Решение:

а) Находим базис подпространства $A=Lin(a_1,a_2,a_3)$. Составляем из заданных столбцов матрицу $A=(a_1\ a_2\ a_3)$ и приводим ее к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix}2&2&2\\1&-1&-3\\-1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&2&2\\1&-1&-3\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-3\\2&2&2\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&4&8\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&4&8\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Следовательно $rg A=2$, а столбцы a_1, a_2 образуют базис A.

Угол между вектором x и подпространством $A=Lin(a_1,a_2)$ можно искать двумя способами: используя геометрический смысл определителя Грама (первый способ), либо решая задачу о перпендикуляре (второй способ).

Первый способ: Длину $|h|$ ортогональной составляющей вектора x относительно подпространства A находим по формуле: $|h|=\sqrt{\frac{\det G(a_1,a_2,x)}{\det G(a_1,a_2)}}$

По скалярным произведениям

$(a_1,a_1)=2\cdot2+1\cdot1+(-1)(-1)+(-1)=4+3=7$

$(a_1,a_2)=2\cdot2+1\cdot(-1)-1\cdot0-1\cdot0=4-1=3$

$(a_2,a_2)=2\cdot2+(-1)(-1)+0\cdot0+0\cdot0=4+1=5$

$(a_1,x)=2\cdot(-1)+1\cdot1-1\cdot5-1\cdot1=-2+1-5-1=-7$

$(a_2,x)=2\cdot(-1)-1\cdot1+5\cdot0+1\cdot0=-2-1=-3$

$(x,x)=(-1)(-1)+1\cdot1+5\cdot5+1\cdot1=1+1+25+1=28$

составляем и вычисляем определители Грама

$$\det G(a_1,a_2,x)=\begin{vmatrix}(a_1,a_1)&(a_1,a_2)&(a_1,x)\\(a_1,a_2)&(a_2,a_2)&(a_2,x)\\(a_1,x)&(a_2,x)&(x,x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&3&-7\\3&5&-3\\-7&-3&28\end{vmatrix}=546$$

$$\det G(a_1,a_2)=\begin{vmatrix}(a_1,a_1)&(a_1,a_2)\\(a_1,a_2)&(a_2,a_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&3\\3&5\end{vmatrix}=35-9=26$$

Значит $|h|=\sqrt{\frac{546}{26}}=\sqrt{21}$, тогда $\sin\varphi=\frac{|h|}{|x|}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{28}}=\frac{\sqrt3}{2}$. Следовательно, $\varphi=\frac{\pi}{3}$ - искомый угол между вектором x и подпространством $Lin(a_1,a_2,a_3)$.

Второй способ: Составляем неоднородную систему уравнений с матрицей Грама $G(a_1,a_2)$

$$G(a_1,a_2)\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a_1,x)\\(a_2,x)\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}7l_1+3l_2=-7\\3l_1+5l_2=-3\end{cases}$$

Решая ее, получаем $l_1=-1$, $l_2=0$. Находим ортогональную проекцию вектора x относительно на подпространство A.

$$l=l_1\cdot a+l_2\cdot a_2=-\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Вычисляем длины векторов

$|l|=\sqrt{4+1+1+1}=\sqrt7$ $\quad |x|=\sqrt{1+1+25+1}=\sqrt{28}$

и косинус угла между ними $\cos\varphi=\frac{|l|}{|x|}=\frac{\sqrt7}{\sqrt{28}}=\frac12$. Следовательно, искомый угол $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

б) Определим базис подпространства B решений однородной системы. Для этого находим фундаментальную систему решений. Составляем расширенную матрицу системы и приводим ее к упрощенному виду:

$$(B|0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Выражаем базисные переменные через свободные: $x_1=-3x_2-2x_3$, $x_4=-4x_2-3x_3$

По этим формулам для $x_2=1, x_3=0$ получаем $x_1=-3, x_4=-4$; а для $x_2=0, x_3=1$ имеем $x_1=-2, x_4=-3$. Таким образом, фундаментальная система состоит из двух решений $\varphi_1=(-3\ \ 1\ \ 0\ -4)^T$, $\varphi_2=(-2\ \ 0\ \ 1\ -3)^T$. Эти решения образуют базис подпространства $B=Lin(\varphi_1,\varphi_2)$, т.е. $\dim B=2$.

Вычислим скалярные произведения

$(\varphi_1,\varphi_1)=(-3)(-3)+1\cdot1+0\cdot0+(-4)(-4)=9+1+16=26$

$(\varphi_1,\varphi_2)=(-3)(-2)+1\cdot0+0\cdot1-3(-4)=12+6=18$

$(\varphi_2,\varphi_2)=(-2)(-2)\cdot0\cdot0+1\cdot1+(-3)(-3)=9+4+1=14$

$(\varphi_2,y)=(-2)(-5)+0\cdot(-1)\cdot1\cdot1+(-3)\cdot(-1)=10+1+3=14$

$(\varphi_1,y)=(-3)\cdot(-5)+1\cdot(-1)+1\cdot0+(-1)(-4)=18$

и составляем неоднородную систему $G(\varphi_1,\varphi_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\varphi_1,y) \\ (\varphi_2,y) \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 26b_1+18b_2=18 \\ 18b_1+14b_2=14 \end{cases}$$

Решаем ее по правилу Крамера:

$\Delta=\begin{vmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 14 \end{vmatrix}=40$, $\Delta_1=\begin{vmatrix} 18 & 18 \\ 14 & 14 \end{vmatrix}=0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 14 \end{vmatrix}=40$, $b_1=0$, $b_2=1$

Находим ортогональную проекцию b вектора y на подпространство B и ортогональную составляющую (перпендикуляр) $h\in B^{\perp}$ вектора y относительно подпространства B

$$b=b_1\cdot\varphi_1+b_2\varphi_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$h=y-b=\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Можно выполнить проверку ортогональности найденных векторов, вычисляя скалярное произведение $(b,h)=6-6=0$. Действительно, найденные векторы ортогональны.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}$

б) $b=(-2\ \ 0\ \ 1\ -3)^T$, $h=(-3\ -1\ \ 0\ \ 2)^T$