Математический анализ

«Формула Остроградского-Гаусса»

Ибрагимов Д.Н., доцент каф. 804

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Москва 2020

Основные теоретические сведения

Теорема (Стокса)

$$\oint\limits_C \vec{a}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S}.$$

Теорема (Остроградского Гаусса)

$$\iint\limits_{\partial V} \vec{a}\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz.$$

4376. Преобразовать по формуле Остроградского $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}x^3 + \frac{\partial}{\partial y}y^3 + \frac{\partial}{\partial z}z^3 = 3(x^2+y^2+z^2).$$

$$\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \iiint\limits_V 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$

4362. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, $S\colon x^2+y^2+z^2=a^2$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 3.$$

$$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_V 3dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^a 3r^2\cos\theta dr = 4\pi a^3.$$

4387. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, $S = \partial\{(x,y,z)^T : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a,\ 0 \leqslant z \leqslant a\}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial y} y^2 + \frac{\partial}{\partial z} z^2 = 2(x+y+z).$$

$$\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \iiint\limits_V 2(x+y+z) dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a dy \int\limits_0^a 2(x+y+z) dz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a [2ax + 2ay + a^2] dy =$$

$$= \int\limits_0^a [2a^2 x + a^3 + a^3] dx = 3a^4.$$

4442. Вычислить поток вектора $\vec{a} = \vec{i}yz + \vec{j}xz + \vec{k}xy$ через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ и через его полную поверхность.

$$\operatorname{div} \vec{a} = 0.$$

$$\Phi_{\text{полный}} = \iint\limits_{S} yzdydz + xzdzdx + xydxdy = \iiint\limits_{V} 0dxdydz = 0.$$

$$\Phi_{\text{верхний}} = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2 \\ z=h}} = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} xydxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^3 \cos\varphi \sin\varphi dxdy = 0.$$

$$\Phi_{\text{нижний}} = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2 \\ z=0}} = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} xydydx = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^3 \cos\varphi \sin\varphi dxdy = 0.$$

$$\Phi_{\text{боковой}} = \Phi_{\text{полный}} - \Phi_{\text{верхний}} - \Phi_{\text{нижний}} = 0.$$

4370. Вычислить интеграл $\oint\limits_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, где C – эллипс: $x=a\sin^2 t$, $y=2a\sin t\cos t$, $z=a\cos^2 t$, $t\in[0;\pi]$.

$$x+z=a,$$

$$x=\frac{a}{2}(1-\cos(2t)),\quad y(t)=a\sin(2t),\quad (a-2x)^2+y^2=a^2,$$

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

$$\vec{a}=(y+z,z+x,x+y)^T,$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y+z & z+x & x+y\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}1-1\\ -(1-1)\\ 1-1\end{pmatrix}=0$$

$$\oint\limits_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=$$

$$=\iint\limits_S 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}dydz+0\cdot 0dzdx+0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}dxdy=0.$$

Домашнее задание

4377, 4364, 4366, 4388, 4445.1, 4454.