Вариант - 3 Хренникова А.С.
М80-108Б-19

Можно ли в векторных пространствах $\mathbb{R}^2$ (столбцов из двух действительных чисел) и P_2 (многочлена степени не выше второй) задать скалярное произведение формулами (1) или (2), приведенными в таблице? Если можно, то найти угол между первыми двумя векторами стандартного базиса.

$\mathbb{R}^2$	$(x,y)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2$	$(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$
P_2	$(p,q)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+2(p(2)q(2))$	$(p,q)=\int_0^1[p(x)q(x)-p'(x)q'(x)]dx$

Решение:

Рассмотрим формулу (1) для пространства $\mathbb{R}^2$. Эта формула ставит в соответствие элементам $x=(x_1\ x_2)^T$, $y=(y_1\ y_2)^T$ пространства $\mathbb{R}^2$ действительное число. Проверим, удовлетворяет ли эта формула аксиомам 1-4 скалярного произведения. Сначала проверим выполнение аксиомы 1. Поменяем местами множители x и y:

$(y,x)=y_1x_1-y_1x_2-y_2x_1+2y_2x_2=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2.$

Получили выражение в правой части формулы (1), т.е. $(y,x)=(x,y)$. Значит, аксиома 1 выполняется. Заметим, что выражение в правой части (1) симметрическое относительно x и y. Оно не меняется при одновременной замене буквы x на букву y, а буквы y на букву x. Это и обеспечивает коммутативность.

Вместо аксиом 2 и 3 проверим линейность по первому множителю. Для произвольных $x,y,z\in\mathbb{R}^2$ и любых чисел $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ получаем

$(\alpha x+\beta y,z)=(\alpha x_1+\beta y_1)z_1-(\alpha x_1+\beta y_1)z_2-(\alpha x_2+\beta y_2)z_1+2(\alpha x_2+\beta y_2)z_2=\alpha(x_1z_1-x_1z_2-x_2z_1+2x_2z_2)+\beta(y_1z_1-y_1z_2-y_2z_1+2y_2z_2)=\alpha(x,z)+\beta(y,z).$

Линейность доказана, следовательно, аксиомы 2 и 3 выполняются. Вместо приведенного доказательства достаточно заметить, что выражение в правой части (1) линейно по переменным x_1,x_2: $x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2=x_1(y_1-y_2)+x_2(-y_1+2y_2)$.

Проверим выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат и представим полученную квадратичную форму в матричном виде:

$(x,x)=x_1^2-x_1x_2-x_2x_1+2x_2^2=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$

Угловые миноры матрицы этой квадратичной формы положительные $\Delta_1=1>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}=3>0$. Значит, по критерию Сильвестра, квадратичная форма положительно определена, т.е. $(x,x)>0$ для всех $x\neq 0$. Значит, аксиома 4 для формулы (1) выполняется, поскольку $(x,x)\geq 0$ для всех $x\in\mathbb{R}^2$ и $(x,x)=0$ только при $x=0$. Таким образом, формула (1) задает скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Находим угол φ между первыми двумя векторами стандартного базиса $\mathbb{R}^2$, т.е. между векторами $e_1=(1\ 0)^T$ и $e_2=(0\ 1)^T$. Вычислим косинус угла по формуле

$\cos\varphi=\frac{(e_1,e_2)}{\sqrt{(e_1,e_1)}\sqrt{(e_2,e_2)}}=\frac{1\cdot 1\cdot 0-1\cdot 1\cdot 1-1\cdot 0\cdot 0+2\cdot 0\cdot 1}{\sqrt{1\cdot 1^2-1\cdot 1\cdot 0+2\cdot 0^2}\sqrt{1\cdot 0^2-1\cdot 0\cdot 1+2\cdot 1^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$\varphi=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$. Значит, угол между векторами $\varphi=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Рассмотрим формулу (2) для пространства $\mathbb{R}^2$. Выражение в правой части формулы (2) симметрическое относительно x и y $(x,y)=x_1y_1-x_2y_2=y_1x_1-y_2x_2=(y,x)$, а также линейно по переменным x_1 и x_2 $(x_1y_1-x_2y_2=x_1\cdot(y_1)+x_2(-y_2))$. Значит, аксиомы 1-3 выполняются.

Проверим выполнение аксиомы 4.

Записываем скалярный квадрат и представляем полученную квадратичную форму в матричном виде: $(x,x)x_1^2-x_2^2=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$. Вычисляем угловые миноры матрицы квадратичной формы $\Delta_1=1>0, \Delta_2=-1<0$. По критерию Сильвестра, эта квадратичная форма не является положительно определенной. Значит, аксиома 4 не выполняется. Чтобы в этом убедиться, не обязательно использовать критерий Сильвестра. Достаточно привести пример ненулевого вектора x, для которого $(x,x)\leq 0$. Например, для $x=(0\ 1)^T$ имеем $(x,x)=-1$. Значит, аксиома 4 не выполняется. Поэтому формулой (2) нельзя задать скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим формулу (1) для пространства P_2. Эта формула ставит в соответствие элементам $p(x)=ax^2+bx+c$ и $q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ пространства P_2 действительное число. Проверяем, удовлетворяет ли эта формула аксиомам 1-4 скалярного произведения. Сначала проверим выполнение аксиом 1. Выражение в правой части (1) симметрическое относительно p и q. Действительно, при одновременной замене буквы p на букву q, а буквы q - на букву p, выражение не изменяется.

$p(0)q(0)+p(1)q(1)+2p(2)q(2)=q(0)p(0)+q(1)p(1)+2q(2)p(2)$.

Значит, формула (1) удовлетворяет аксиоме 1. Выражение в правой части (1) линейно по многочлену p. Значит, формула (1) линейна по первому многочлену (аксиомы 2-3 выполняются). Проверим выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат $(p,p)=[p(0)]^2+[p(1)]^2+2[p(2)]^2$. Это выражение не может быть отрицательным. Сумма квадратов функции имеет неотрицательное значение. Поэтому $(p,p)\geq 0$. Положим, что $(p,p)=0$, тогда $(p,p)=[p(0)]^2+[p(1)]^2+2[p(2)]^2=0$. Следовательно, каждое слагаемое равно нулю. Так как многочлен является непрерывной функцией, равенство выполняется $[p(0)]^2+[p(1)]^2+2[p(2)]^2=0 \Longrightarrow p(0)=p(1)=p(2)=0$. Следовательно, $p(x)=0$, поэтому аксиома 4 выполняется. Таким образом, формула (1) задает скалярное произведение в P_1. Находим угол φ между многочленами $p(x)=1$ и $q(x)=x$.

$(p,q)=1\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 1\cdot 2=5$

$(p,p)=1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 2=4$

$(q,q)=0\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 4=9$

Тогда $\cos\varphi=\dfrac{(p,q)}{\sqrt{(p,p)}\sqrt{(q,q)}}=\dfrac{5}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{4}}=\dfrac{5}{3\cdot 2}=\dfrac{5}{6}$

$\varphi=\arccos\dfrac{5}{6}$

Рассмотрим формулу (2) для пространства P_2. Правая часть формулы симметрическая относительно p и q, а также линейна по p (из-за линейности интеграла). Поэтому аксиомы 1-3 выполняются. Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат $(p,p)=\int_0^1\{[p(x)]^2-[p'(x)]^2\}dx$. Это выражение может быть отрицательным. Например, для многочлена $p(x)=4x^2+4x+1$ имеем $(p,p)=\int((4x^2+4x+1)^2-(8x+4)^2)dx=\int_0^1((16x^2+32x^3+24x^2+8x+1)-(64x^2+64x+16))dx=\int(16x^4+32x^3-40x^2-56x-15)dx=\left(\frac{16x^5}{5}+8x^4+2\left(\frac{4x^3}{3}+2x^2\right)-16x^3-32x^2-15x\right)\Big|_0^1=-\frac{677}{15}<0$. Значит, аксиома 4 не выполняется. Поэтому формулой (2) нельзя задать скалярное произведение в P_2.

Ответ: в пространстве $\mathbb{R}^2$ формула (1) задает скалярное произведение, а формула (2) нет; в пространстве P_2 формула (1) задает скалярное произведение, а формула (2) нет. Углы между первыми двумя векторами стандартного базиса в $\mathbb{R}^2$ и P_2 равны $\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(=\frac{3\pi}{4}\right)$ и $\arccos\frac{5}{6}$, соответственно.