Вариант-23 Хренниковой А

№11 М80-108Б-19

Найти степень A^{20} матрицы двумя способами:

а) приведя матрицу к нормальной жордановой форме

б) используя характеристический многочлен матрицы как аннулирующий.

$$A=\begin{pmatrix}-1&1\\-4&3\end{pmatrix}$$

Решение:

а) Находим многочлен $p(\lambda)=\lambda^{20}$ от матрицы A первым способом:

1. Приводим матрицу A к жордановой форме. Для этого составляем характеристический многочлен

$$\Delta_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1\\-4&3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)+4=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$$

Характеристическое уравнение $(\lambda-1)^2=0$ имеет один двойной корень $\lambda_1=1$. Для собственного значения $\lambda_1=1$ (алгебраической кратности $n_1=2$) находим собственные векторы. Составляем расширенную матрицу однородной системы уравнений $(A-\lambda_1E)x=0$ и приводим ее к ступенчатому виду

$$(A-\lambda_1E|0)=\left(\begin{array}{cc|c}-2&1&0\\-4&2&0\end{array}\right)\sim(-2\ \ 1\,|\,0)$$

Выражаем базисную переменную через свободную $x_2=2x_1$. При $x_1=1$ получаем собственный вектор $s_1=(1\ \ 2)^T$. Так как геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1=1$ равна единице ($n_1-rg(A-\lambda_1E)=2-1=1$), то используем частный случай нахождения жорданова базиса. Собственному значению $\lambda_1=1$ соответствует жорданова клетка второго порядка $J_2(1)$. Так как других собственных значений нет, то искомая матрица J_A совпадает с этой клеткой $J_A=J_2(1)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. Находим столбцы матрицы S перехода к жорданову базису.

Первый столбец этой матрицы – собственный вектор $s_1=(1\ \ 2)^T$. Второй столбец – присоединенный вектор $s_1^{(1)}$. Находим присоединенный вектор. Составляем расширенную матрицу неоднородной системы $(A-\lambda_1E)s_1^{(1)}=s_1$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(A-\lambda_1E|s_1)=\left(\begin{array}{cc|c}-2&1&1\\-4&2&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}-2&1&1\\0&0&0\end{array}\right).$$

Выражаем базисную переменную через свободную $x_2=2x_1+1$. При $x_1=0$ получаем $s_1^{(1)}=(0\ \ 1)^T$ – присоединенный вектор первого порядка. Из полученных столбцов составляем искомую матрицу $S=(s_1\ s_1^{(1)})=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$.

2. Составляем матрицу $p(J_A)$. Для многочлена $p(\lambda)=\lambda^{20}$ составляем многочлен $p(J_2(1))$ от жордановой клетки $J_2(1)$. Учитывая, что $p(1)=1^{20}$, $p'(1)=20\cdot1^{19}=20\cdot1^{20}$, получаем

$$p(J_A)=p(J_2(1))=\begin{pmatrix}p(1)&p'(1)\\0&p(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^{20}&20\cdot1^{20}\\0&1^{20}\end{pmatrix}=1^{20}\begin{pmatrix}1&20\\0&1\end{pmatrix}$$

3. Находим искомый многочлен от матрицы A по формуле $p(A)=S\,p(J_A)\,S^{-1}$:

$$p(A)=S\,p(J_A)\,S^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}1^{20}\begin{pmatrix}1&20\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=1^{20}\begin{pmatrix}1&20\\2&41\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=1^{20}\begin{pmatrix}-39&20\\-80&41\end{pmatrix}$$

Следовательно, $A^{20}=\begin{pmatrix}-39&20\\-80&41\end{pmatrix}1^{20}=\begin{pmatrix}-39&20\\-80&41\end{pmatrix}$

б) Находим многочлен $p(\lambda)=\lambda^{20}$ от матрицы A вторым способом

1. Составляем характеристический многочлен матрицы A: $\Delta_A(\lambda)=(\lambda-1)^2$.

2. Характеристическое уравнение $(\lambda-1)^2=0$ имеет один корень $\lambda_1=1$ (алгебраической кратности $n_1=2$).

3. Для корня $\lambda_1 = 1$ кратности $n_1 = 2$ составляем два уравнения $1^{20} = r_1 + r_0$, $20 \cdot 1^{19} = r_1$, где r_0, r_1 - неопределенные коэффициенты многочлена $r(\lambda) = r_1\lambda + r_0$.

Эту систему можно получить иначе. Запишем тождество $\lambda^{20} = r_1\lambda + r_0$. Подставляя в него $\lambda_1 = 1$, получаем $1^{20} = r_1 + r_0$. Дифференцируя тождество по λ, приходим к равенству $20\lambda^{19} \equiv r_1$. Подставляем $\lambda_1 = 1$ (этот корень кратности 2): $20 \cdot 1^{19} = r_1$. В результате получаем ту же систему двух уравнений с двумя неизвестными.

4. Решаем полученную систему уравнений: $r_1 = 20 \cdot 1^{20}$, $r_0 = -19 \cdot 1^{20}$.

5. Находим искомый многочлен от матрицы:

$$p(A) = 20 \cdot 1^{20} A - 19 \cdot 1^{20} E = 1^{20}(20A - 19E) = 1^{20}\left(20\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - 19\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1^{20}\begin{pmatrix} -39 & 20 \\ -80 & 41 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{20} = 1^{20}\begin{pmatrix} -39 & 20 \\ -80 & 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & 20 \\ -80 & 41 \end{pmatrix}$

Вариант-23 (3) Хренниковой А. С.
№16 М80-108Б-19

Найти линейную невырожденную замену переменных, приводящую одну из пары квадратичных форм $f(x)=-25x_1^2+40x_1x_2-16x_2^2$ и $g(x)=17x_1^2-26x_1x_2+10x_2^2$ к каноническому виду, а другую - к нормальному. В ответе указать канонический вид и замену переменных.

Решение: Сначала составим матрицы данных квадратичных форм. Квадратичная форма $f(x)=-25x_1^2+40x_1x_2-16x_2^2$ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}-25 & 20\\ 20 & -16\end{pmatrix}$, а квадратичная форма $g(x)=17x_1^2-26x_1x_2+10x_2^2$ - матрицу $B=\begin{pmatrix}17 & -13\\ -13 & 10\end{pmatrix}$. Применим критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм. Второй угловой минор матрицы A равен нулю. Значит, матрица A не является знакоопределенной. Знаки угловых миноров матрицы B не чередуются: $\Delta_1=17>0$, $\Delta_2=1>0$. Следовательно, квадратичная форма $g(x)$ положительно определен . Применяем алгоритм для пары форм $f(x)$ и $g(x)$.

1. Составляем характеристическое уравнение пары квадратичных форм $\det(A-\lambda B)=0$:

$$\left|\begin{pmatrix}-25 & 20\\ 20 & -16\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}17 & -13\\ -13 & 10\end{pmatrix}\right|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-25-\lambda\cdot 17 & 20+13\lambda\\ 20+13\lambda & -16-10\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (25+17\lambda)(16+10\lambda)-(20+13\lambda)^2=0 \Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda=0$. Находим его корни $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=0$. Корни простые, т.е. $n_1=n_2=1$.

2^1. Для простого корня $\lambda_1=-2$ составляем расширенную матрицу однородной системы $(A-\lambda_1 B)x=0$ и упрощаем ее

$$\left(\begin{matrix}-25+2\cdot 17 & 20-2\cdot 13\\ 20-2\cdot 13 & -16+2\cdot 10\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.\right)\sim\left(\begin{matrix}9 & -6\\ -6 & 4\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.\right)\sim\left(\begin{matrix}3 & -2\\ 0 & 0\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.\right)$$

Выражаем базисную переменную через свободную $x_2=1{,}5x_1$. При $x_1=2$ имеем $x_2=3$. Следовательно, $\varphi_1=(2\ \ 3)^T$ - главный вектор пары форм.

3^1. Простому корню $\lambda_1=-2$ соответствует один главный вектор, поэтому процесс ортогонализации заканчивается на первом шаге: $s_1=\varphi_1=(2\ \ 3)^T$. Нормируем этот вектор относительно скалярного произведения $(x,y)=x^TBy$. Находим скалярный квадрат

$(s_1,s_1)=s_1^TBs_1=(2\ \ 3)\begin{pmatrix}17 & -13\\ -13 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=(2\ \ 3)\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}=2$. Следовательно, длина вектора s_1 равна корню из двух: $|s_1|=\sqrt{2}$. Тогда $\bar{s}_1=\frac{1}{|s_1|}s_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

4^1. Записываем полученный вектор в первый столбец искомой матрицы $S=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \vdots\\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \vdots\end{pmatrix}$

Выполняем п. 2-4 для второго корня.

2^2. Для простого корня $\lambda_2=0$ составляем расширенную матрицу однородной системы $(A-\lambda_2 B)x=0$ и упрощаем ее

$\left(\begin{matrix}-25 & 20\\ 20 & -16\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.\right)\sim\left(\begin{matrix}5 & -4\\ 0 & 0\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.\right)$ Выражаем базисную переменную через свободную $x_2=1{,}25x_1$. При $x_1=4$ имеем $x_2=5$. Следовательно, $\varphi_2=(4\ \ 5)^T$ - главный вектор пары форм

3^2. Простому корню $\lambda_2=0$ соответствует один главный вектор, поэтому процесс ортогонализации заканчивается на первом шаге: $s_2=\varphi_2=(4\ \ 5)^T$. Нормируем этот вектор относительно скалярного произведения $(x,y)=x^TBy$. Находим скалярный квадрат

$(s_2,s_2)=s_2^TBs_2=(4\ \ 5)\begin{pmatrix}17 & -13\\ -13 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=(4\ \ 5)\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=2$. Следовательно, $|s_2|=\sqrt{2}$.

Тогда $\bar{s}_2=\frac{1}{|s_2|}s_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

4°. Записываем полученный вектор во второй столбец искомой матрицы $S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Замена переменных $x = Sy$, соответствующая найденной матрице S, имеет вид $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot y_2 \\ x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{5\sqrt{2}}{2} y_2 \end{cases}$

При такой замене квадратичная форма $f(x)$ приводится к каноническому виду $f(Sy) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = -2y_1^2 + 0 \cdot y_2^2 = -2y_1^2$, а форма $g(x)$ — к нормальному $g(Sy) = y_1^2 + y_2^2$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} y_1 + 2\sqrt{2}\, y_2 \\ x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{5\sqrt{2}}{2} y_2 \end{cases}$

$f(Sy) = -2y_1^2$