Математический анализ

«Формула Грина»

Ибрагимов Д.Н., доцент каф. 804

московский авиационный институт
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Москва 2020

Формула Грина

- $S \subset \mathbb{R}^2$ – связанная область;
- $C = \partial S$ – кусочно-гладкая кривая;
- $P(x, y), Q(x, y)$ – гладкие по каждой переменной в S и в C функции.

$S: x^2 + y^2 \leq 1$

$C: x^2 + y^2 = 1$

Тогда

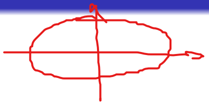
$$\oint\limits_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

где направление обхода выбрано против часовой стрелки. Также площадь области S может быть вычислена по следующей формуле:

$$\mu(S) = \oint\limits_C xdy = -\oint\limits_C ydx = \frac{1}{2} \oint\limits_C xdy - ydx.$$

4252. $\oint\limits_C (x+y)dx + (x-y)dy$, $C\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решим задачу двумя способами.



$$C\colon \begin{cases} x(t) = a\cos t, \\ y(t) = b\sin t, \\ t \in [0; 2\pi), \end{cases} \qquad \oint\limits_C \underbrace{(x+y)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(x-y)}_{Q(x,y)}dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \Big[\underbrace{(a\cos t + b\sin t)}_{x+y}\underbrace{(-a\sin t)}_{x'(t)} + \underbrace{(a\cos t - b\sin t)}_{x-y}\underbrace{b\cos t}_{y'(t)}\Big] dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[-a^2\cos t\sin t - ab\sin^2 t + ab\cos^2 t - b^2\sin t\cos t\right] dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[-\frac{a^2+b^2}{2}\sin(2t) + ab\cos(2t)\right] dt = 0.$$

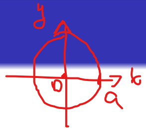
4252. $\oint\limits_C (x+y)dx + (x-y)dy$, $C\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

$$S\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1.$$

$$\oint\limits_C \underbrace{(x+y)}_{dP}dx + \underbrace{(x-y)}_{dQ}dy = \iint\limits_S (\underbrace{1}_{\frac{\partial Q}{\partial x}} - \underbrace{1}_{\frac{\partial P}{\partial y}})dxdy =$$

$$= \iint\limits_S 0 dxdy = 0.$$

4298. $\oint\limits_C \underbrace{xy^2}_{Q(x,y)}dy - \underbrace{x^2y}_{P(x,y)}dx$, $C: \underbrace{x^2+y^2=a^2}_{\text{окружность}}$.



$x = r\cdot\cos\varphi$
$y = r\cdot\sin\varphi$
$r \in [0; a]$
$\varphi \in [0; 2\pi)$

$$P(x,y) = -x^2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2,$$

$$Q(x,y) = xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2,$$

$$S: x^2+y^2 \leqslant a^2.$$

$$\oint\limits_C xy^2dy - x^2ydx = \iint\limits_S (y^2 - (-x^2))dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2 \cdot rdr = 2\pi\frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

4308. Вычислить площадь, ограниченную кривой $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, $t \in [0; 2\pi)$.

$$S = \int_0^{2\pi} a \cdot \cos t \, d(b \cdot \sin t) = \int_0^{2\pi} a \cdot \cos t \cdot b \cos t \, dt =$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = ab \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = ab\pi$$

$$S = \oint\limits_C x dy = \int\limits_0^{2\pi} a\cos t b\cos t dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} ab\cos^2 t dt = \int\limits_0^{2\pi} ab\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\right) dt = ab\pi.$$

4452. Вычислить работу вектора $\vec{a} = \vec{r}$ вдоль кривой $\vec{r} = \vec{i}a\cos t + \vec{j}a\sin t + \vec{k}bt$, $t \in [0; 2\pi)$.

$A = \vec{F} \cdot \vec{S}$ (из шк)

$A = \int\limits_C (\vec{F}, d\vec{S}) = \int a_x(x,y,z)dx + a_y(x,y,z)dy + a_z(x,y,z)dz$

$d\vec{S} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

$x = a \cdot \cos t$

$y = a\sin t$

$z = bt$

$$A = \int\limits_C \underbrace{(\vec{a}, d\vec{s})}_{2\pi} = \int\limits_C xdx + ydy + zdz =$$

$$= \int\limits_0 a\cos t\, d(a\cos t) + a\sin t\, d(a\sin t) + bt\, d(bt) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} [a\cos t(-a\sin t) + a\sin t a\cos t + b^2 t]\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} b^2 t dt = \frac{b^2t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2b^2\pi^2.$$

4452.2. Вычислить работу поля $\vec{a} = \vec{i}e^{y-z} + \vec{j}e^{z-x} + \vec{k}e^{x-y}$ вдоль отрезка, соединяющего точки $O(0;0;0)$ и $M(1;3;5)$.

$X = e^{y-z}$
$Y = e^{z-x}$
$Z = e^{x-y}$
$\Big\}$ F ?

$$C: \begin{cases} x(t) = a_x t + b_x, \\ y(t) = a_y t + b_y, \\ z(t) = a_z t + b_z, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \vec{r}(0) = O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \vec{r}(1) = M = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

5

$$C: \vec{r} = \vec{i}t + \vec{j}3t + \vec{k}5t.$$ $x = t,\ y = 3t,\ z = 5t$

$$A = \int\limits_C e^{y-z}dx + e^{z-x}dy + e^{x-y}dz = \int\limits_0^1 \left[e^{3t-5t}\cdot 1 + e^{5t-t}\cdot 3 + e^{t-3t}\cdot 5\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[6e^{-2t} + 3e^{4t}\right]dt = \left(-3e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{4t}\right)\Big|_0^1 = \frac{9}{4} - 3e^{-2} + \frac{3}{4}e^4.$$

Домашнее задание

Формула Грина: 4300, 4301, 4310, 4452.1, 4452.3.