**Exercice 1**

On se place dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
On note $(2, X) := 2\mathbb{Z}[X] + X\mathbb{Z}[X]$ l'idéal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par 2 et $X$.

1. Montrer que $(2, X)$ n'est pas principal.
2. Montrer que l'application $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $f(P) = \overline{P(0)}$ est un morphisme d'anneaux surjectif.
3. Montrer que $ker(f) = (2, X)$.
4. En déduire que $\mathbb{Z}[X]/(2, X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. Que peut-on dire de l'idéal $(2, X)$.

**Exercice 2**

Soit l'application $f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ définie par $f(a + ib) = \overline{a + 7b}$.

1. Montrer que $f$ est un morphisme d'anneaux surjectif.
2. Soit $(3 + i)$ l'idéal principal de $\mathbb{Z}[i]$ engendré par $3 + i$.
   Montrer que $10 \in (3 + i)$ et que $ker(f) = (3 + i)$.
3. En déduire que $\mathbb{Z}[i]/(3 + i) \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
4. $3 + i$ est-il premier dans $\mathbb{Z}[i]$ ? Justifier.

**Exercice 3**

En utilisant la définition d'un idéal maximal, montrer que l'idéal $(X)$ est un idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 4**

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère l'idéal $(X^2 + 1)$ (l'idéal principal engendré par $X^2 + 1$).

1. Montrer que $(X^2 + 1)$ est un idéal premier de $\mathbb{R}[X]$.
2. L'idéal $(X^2 + 1)$ est-il maximal ? Justifier.

**Exercice 5 (Examen normal 2021-2022)**

On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ l'ensemble des complexes suivant : $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + ib\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[i\sqrt{5}], +, .)$ est un anneau commutatif et unitaire.
2. On considère l'application $N : \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $N(a + ib\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$.
   Vérifier que $\forall z, z' \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, on a $N(zz') = N(z)N(z')$.
3. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
4. Montrer que les éléments $2; 3; 1 + i\sqrt{5}$ et $1 - i\sqrt{5}$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
5. En déduire que l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel.

**Exercice 6**

On considère l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$.
On désigne par $Fr(\mathbb{Z}[i]) := \{\frac{u}{v} : u, v \in \mathbb{Z}[i], v \neq 0\}$ le corps des fractions de $\mathbb{Z}[i]$.

1. Montrer que $Fr(\mathbb{Z}[i]) = \mathbb{Q}[i] = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{Q}\}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe $a \in \mathbb{Z}$, tel que $|x - a| \leq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{Q}[i]$ il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$, tel que $|u - z|^2 < 1$.
4. En déduire que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.

**Exercice 7**

Dans l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ on considère les éléments :

$$z_1 = 2(1 + i\sqrt{5}) \ \text{ et } \ z_2 = 6 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}).$$

1. Montrer que $z_1$ et $z_2$ n'ont pas de pgcd.
2. En déduire que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas principal.