Exercice 1

Soit A un anneau unitaire tel que pour tout $x \in A$, on a $x^2 = x$.

1. Montrer que $\forall x \in A$, on a $x + x = 0$ et que A est commutatif.
2. Soit $(x, y) \in A^2$. Calculer $xy(x + y)$.

   En déduire que si A contient plus de deux éléments alors A n'est pas intègre.

Exercice 2

Soit $A = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

1. Déterminer les éléments inversibles de A.
2. Déterminer les éléments nilpotents de A.
3. Déterminer les diviseurs de zéro dans A.

Exercice 3

Soient A un anneau commutatif et I et J deux idéaux de A. On considère l'ensemble

$$I : J = \{x \in A : xJ \subset I\}.$$

1. Montrer que $I : J$ est un idéal.
2. Calculer dans $\mathbb{Z}$, les idéaux suivants : $12\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z}$, $12\mathbb{Z} : 4\mathbb{Z}$, $12\mathbb{Z} : 8\mathbb{Z}$ et $12\mathbb{Z} : 5\mathbb{Z}$.

Exercice 4

Soit $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, .)$ est un anneau.
2. i) Montrer que $U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] : a^2 - 2b^2 = \pm 1\}$.

   ii) Est ce que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un corps ?

Exercice 5

On considère l'ensemble des matrices suivant : $\mathcal{A} = \{\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C}\}$.

Montrer que $(\mathcal{A}, +, .)$ est corps non commutatif.

Exercice 6

Soit A un anneau commutatif unitaire.

1. On suppose que A est intègre et qu'il n'admet qu'un nombre fini d'idéaux. Démontrer que A est un corps.
2. En déduire que tout anneau commutatif unitaire intègre fini est un corps.

Exercice 7

On considère l'anneau $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(P) = P(i)$ est un morphisme d'anneaux surjectif.
2. Montrer que $ker(\varphi) = (X^2 + 1)$ (l'idéal principal engendré par $X^2 + 1$).
3. En déduire que $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$.
4. Que peut-on dire de l'idéal $(X^2 + 1)$.

Exercice 8 (Examen normal 2020-2021)

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
Soit $I = (\sqrt{2})$ l'idéal principal de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ engendré par $\sqrt{2}$.

1. Vérifier que $I = \{a + b\sqrt{2} \mid a \in 2\mathbb{Z} \; et \; b \in \mathbb{Z}\}$.
2. Montrer que l'application $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $f(a+b\sqrt{2}) = \bar{a}$ est un morphisme d'anneaux surjectif.
3. Montrer que $ker(f) = I$.
4. En déduire que I est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Exercice 9 (Facultatif)

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ et l'ensemble $I = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z} \; et \; a \equiv b[2]\}$.

1. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $\varphi(a+ib) = \overline{a - b}$ est un morphisme d'anneaux surjectif.
2. Montrer que $ker(\varphi) = I$.
3. En déduire que I est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 10 (Extrait du rattrapage 2022-2023)

1. Déterminer $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[X])$ et $\mathcal{U}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X])$. ($\mathcal{U}$ désigne l'ensemble des éléments inversibles).
2. On considère le morphisme d'anneaux surjectif

$$\varphi : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X] \\ P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i & \longmapsto & \varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} X^i, \end{array}$$

   où $\bar{a}_i$ désigne la classe de a_i modulo 2.
   (a) Montrer que $\ker(\varphi) = (2) = 2\mathbb{Z}[X]$ (l'idéal principal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par 2).
   (b) Que peut-on dire de (2) dans $\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 11 (Extrait de l'examen normal 2022-2023)

Soit l'ensemble $\mathcal{B} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ et b est impair$\}$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est un anneau intègre.
2. Vérifier que $\mathcal{U}(\mathcal{B}) = \{\frac{a}{b} \in \mathcal{B} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*,\ a$ et b impairs$\}$. $\mathcal{B}$ est-il un corps ?
3. On considère l'application $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $\varphi(\frac{a}{b}) = \overline{a}$.
   a) Vérifier que φ est bien définie et qu'elle est un morphisme d'anneaux surjectif.
   b) Montrer que $\mathcal{B}/(2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   c) Que peut-on dire de l'idéal (2) dans $\mathcal{B}$?

Exercice 12 (Facultatif)

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ et l'ensemble $I = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\ et\ a \equiv b[2]\}$.

1. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $\varphi(a+ib) = \overline{a-b}$ est un morphisme d'anneaux surjectif.
2. Montrer que $ker(\varphi) = I$.
3. En déduire que I est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[i]$.