

# Oblig TMA 4106 Varmelikningen

Heidi Falang, Lina Emilie Bakkemyr, Ingrid Schiøtz

Mars 2025



Figur 1: Forsøk med varmelikningen

# 1 Introduksjon

Vi bestemte oss for å se nærmere på varmelikningen ved å smelte sjokolade på en aluminiumsflate og se hvor lang tid varmen brukte på å forflytte seg bortover.

## 2 Teori

Varmelikningen er gitt som følgende:

$$\dot{T} = \alpha \Delta T$$

hvor  $\alpha$  er en samling av alle fysiske konstanter og  $T$  er en funksjon av  $x$  og  $t$ .

### 2.1 Utledning varmelikningen

Varmelikningen utledes fra uttrykket for en varmestrøm:

$$q = -k \nabla T(x, t)$$

En bits endring i indre energi kan dermed uttrykkes som varmestrømmen inn og ut av biten. Dette kommer fra termodynamikkens første lov, med en antakelse om at det ikke utføres noe arbeid på biten, og dermed ingen endring i volum.

$$\rho c A h \dot{T}(x, t) = -k A \nabla T(x, t) + k A \nabla T(x + h, t)$$

$A$  er arealet av tversnittet,  $h$  bredden,  $\rho$  tettheten,  $c$  den spesifikke varmekapasiteten og  $k$  termisk konduktivitet.

Ved å dele på  $h$ , flytte over konstantene og la  $h$  gå mot 0 sitter vi igjen med uttrykket for varmelikningen.

$$\dot{T}(x, t) = \frac{k}{\rho c} \Delta T(x, t)$$

Her er det mulig å gange opp  $c$  og få uttrykket gitt for endringen i indre energi heller enn temperatur, men temperatur har enklere fysisk tolkning i vårt tilfelle.

### 2.2 Verdier

Smeltepunktet til melkesjokolade ligger ifølge Kjetil Klepper [1], overingeniør ved institutt for klinisk og molekylær medisin, som forøvrig har en Ph.D i bioinformatikk, rundt  $40^\circ\text{C} - 45^\circ\text{C}$ . Etter litt leting i diverse kilder etter de fysiske konstantene for aluminium, ble wikipedia den beste kilden for å finne verdier rundt romtemperatur [3].

$$k = 237 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\rho = 2700 \text{ kg m}^{-3}$$

$$c = 900 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

### 3 Oppsett og gjennomføring

Vi klippte opp og brukte en redbullboks som varmeleder. Denne er laget av aluminium som har ganske god varmeledningsevne. På denne hadde vi fem punkter med to centimeter mellom hver hvor vi la en liten sjokoladebit. Hele aluminiumsplatens var 12 cm. Som varmekilde benyttet vi et stearinlys plassert under den ene enden av platen.



Figur 2: Oppsett

Vi gjorde to forsøk. I det første hadde vi ganske stor avstand fra toppen av flammen til bunnen av metallet. Dette gjorde at varmen kunne spre seg mer under platen og derfor tilføre varme flere steder langs undersiden. Vi gjentok derfor forsøket og plasserte varmekilden nærmere for å unngå denne feilkilden.

Vi kjørte totalt forsøkene i 90 og 60 minutter, og konkluderte med at vi etter dette ikke ville få videre endring. På noen av punktene så vi ingen smelting.

#### 3.1 Resultater

Punkt	Forsøk 1	Forsøk 2
1	22 sek	20 sek
2	35 sek	39 sek
3	1.45 min	52 sek
4	6.40 min	-
5	-	-

Vi tar utgangspunkt i forsøk 2 i videre beregninger. I forsøk 1 var det som sagt stor avstand mellom telyset og aluminiumsplatens, noe som gjorde at varmen fra telyset spredte seg og varmet opp platen fra flere posisjoner enn  $x = 0$ .

## 4 Utregninger

### 4.1 Initialkrav og randkrav

Vi begynner med å sette initialkrav og randkrav for problemet vårt. Starttemperaturen for alle posisjoner,  $x$ , på platen vil være lik romtemperatur, altså 22 grader:

$$T(x, 0) = 22$$

Under forsøket observerte vi at sjokoladebitene lengst unna telyset ikke smeltet, og konkluderte derfor med at varmen aldri nådde frem til den ytterste delen av platen. Vi setter derfor temperaturen ved posisjon  $x = 12$  konstant og lik romtemperatur.

$$T(12, t) = 22$$

For å gjøre det mulig å løse problemet for hånd, har vi gjort en forenkling og satt temperaturen ved posisjon  $x = 0$ , altså rett over telyset, konstant og lik 800 grader [2]:

$$T(0, t) = 800$$

Siden vi har satt temperaturen konstant ved posisjon 0 og 12, blir Neumannkravene at endringen i temperatur ved disse posisjonene er 0:

$$T'(0, t) = T'(12, t) = 0$$

### 4.2 Håndberegninger

Vi har prøvd å løse likningen for hånd. Vi begynte med separasjon av tids- og posisjonsvariablene. Vi finner da at uttrykkene våre må være konstante, og kaller denne konstanten  $k$ .

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{y''(x)}{y(x)} = k$$

Vi begynner med å løse  $y(x)$ , og finner at den må være:

$$y(x) = e^{\pm\sqrt{k}x}$$

Med våre randkrav finner vi da at  $k$  ikke kan være positiv, ettersom vi ikke får noen ikke trivielle løsninger. For  $k = 0$  finner vi at

$$y(x) = C_1$$

og for  $k < 0$ :

$$\begin{aligned}
y'(0) &= C_2 \sqrt{-k} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\
y'(12) &= -C_1 \sqrt{-k} \sin(\sqrt{-k} \cdot 12) = 0 \\
&\Rightarrow \sqrt{-k} \cdot 12 = n\pi \\
&\Rightarrow k = -\frac{n^2 \pi^2}{144}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= C_0 \\
y_n(x) &= C_n \cos\left(\frac{n\pi}{12}x\right)
\end{aligned}$$

Videre bruker vi denne verdien for  $k$  til å finne  $z(t)$  og får da:

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) - \alpha \frac{n^2 \pi^2}{144} z(t) &= 0 \\
z_n(t) &= d_n e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{144} t}
\end{aligned}$$

Vi finner  $z_0$  ved å sette  $k = 0$  i beregningen over og får da at

$$z_0(t) = b_0$$

Vi slår sammen konstantene  $C_n$  og  $b_n$  til  $A_n$  og  $A_0$  får da følgende løsning for  $T$ :

$$T(x, t) = A_n e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{144} t} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{12}x\right)$$

Vi har funnet  $T_n(x, t) = A_n e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{144} t} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{12}x\right)$ , og vi vil nå finne  $T(x, t)$ : Vi finner først  $z_0$ : For varmelikningen har vi at

$$\begin{aligned}
k &= \frac{1}{\alpha} \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} \\
\dot{z}(t) - \alpha k z(t) &= 0
\end{aligned}$$

vi får at  $\alpha k z(t) = 0$ , som fører til at

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= 0 / \int \\
z_0(t) &= z_0
\end{aligned}$$

$$T(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{144} t} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{12}x\right)$$

der  $a_0 = y_0 \cdot z_0$  Vi løser for randkravet  $T(x, 0) = e^{-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{144} \cdot 0} = 1$ , og får til slutt at vi må løse for

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{12}x\right) = 22$$

siden vi har at  $f(x) = 22$ .

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{12}x\right) = 22 / \int_0^{12} \cos\left(\frac{m\pi}{12}x\right) dx$$

Vi prøver først for  $m = n$ :

$$\int_0^{12} a_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{12}x\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{12} \cos^2\left(\frac{m\pi}{12}x\right)dx = \int_0^{12} 22 \cdot \left(\frac{m\pi}{12}x\right)dx$$

Det første og det siste integralet blir 0 for alle heltall  $m$ , og vi må derfor løse:

$$\begin{aligned} \int_0^{12} \cos^2\left(\frac{m\pi}{12}x\right)dx &= \int_0^{12} \frac{12\cos^2(t)}{\pi m} dt = \frac{12}{\pi m} \int_0^{12} \cos^2(t)dt \\ &= \frac{12}{\pi m} \int_0^{12} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{6}{\pi m} \int_0^{12} 1 + \cos(2t)dt \\ &= \frac{6}{\pi m} \left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{12} = \left[\frac{\pi m}{12}x + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi m}{6}x\right)\right]_0^{12} \\ &= \frac{6\pi m + 3\sin(2\pi m)}{\pi m} \end{aligned}$$

for  $m$  heltall :

$$\frac{6\pi m + 3\sin(2\pi m)}{\pi m} = \frac{6\pi m}{\pi m} = 6$$

Vi får da at

$$0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot 6 = 0 \Rightarrow 6 \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 0 \Rightarrow A_n = 0$$

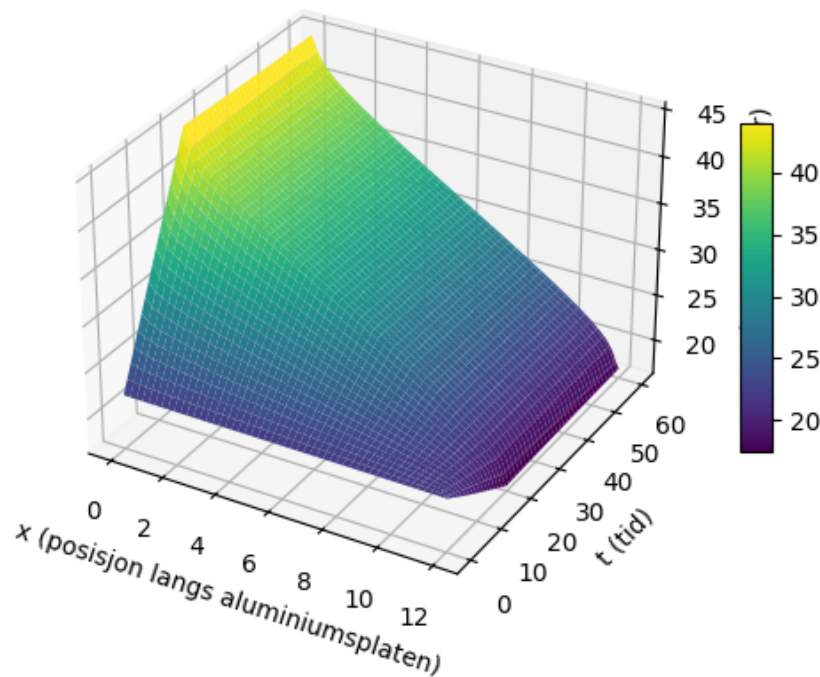
Uff da. Vi kan prøve for  $m \neq n$ , men da får vi samme resultat bare med mer regning som er et herk å skrive inn i LaTeX.

### 4.3 Simulering

Vi har forsøkt å simulere temperaturfordelingen  $T(x, t)$  langs aluminiumsplatene. For å gjøre dette brukte vi initial- og randkravene vi introduserte tidligere. Antakelsen om at posisjon 0 er 800 grader gjennom hele forsøket,  $T(0, t) = 800$ , stemmer ikke så godt med virkeligheten, siden varmen fra telyset vil overføres gradvis til aluminiumsplatene. Vi bruker derfor resultater fra forsøket til å simulere hvordan varmen gradvis overføres. Vi vet for eksempel at temperaturen i posisjon  $x = 0$  øker gradvis fra 22 til 40 grader i løpet av de første 20 sekundene.

I Figure 3 ser vi hvordan temperaturen endrer seg med tiden ved alle posisjonene på platen. Modellen stemmer ganske godt med forsøksverdiene. Vi ser at posisjon 0 blir 40 grader etter rundt 20 sekunder og posisjon 2 etter omtrent 40 sekunder. Simuleringen passer litt dårligere ved posisjon 4, siden det ikke ser ut til at temperaturen her blir mer enn 35 grader. Modellen viser også at ytterste del av platen ikke varmes opp i det hele tatt, noe som stemmer bra med resultatene fra forsøket.

### 3D-plot av temperaturfordeling med gradvis oppvarming



Figur 3: Simulering av temperaturfordelingen

## 5 Konklusjon

Vi gikk inn i denne oppgaven med godt mot og et ønske om å løse varmelikningen, noe som vi sletters ikke gjorde. Likevel lærte vi mye, blant annet at Kjetil Klepper, overingeniør ved Institutt for klinisk og molekylær medisin ved NTNU er sykt glad i sjokolade, siden vi har funnet minst åtte av hans artikler om sjokolade på sin folk.ntnu-side. Vi tipser om mange gode oppskrifter på kake og fremgangsmåter for å bli en ekte sjokolademester. Vi sier oss derfor fornøyde med dette prosjektet.

## References

- [1] Kjetil Klepper. *Lekre kaker, sjokoladetemperering*. u.d. URL: [https://kjetikl.folk.ntnu.no/kaker/sjokolade\\_temperering.shtml](https://kjetikl.folk.ntnu.no/kaker/sjokolade_temperering.shtml).
- [2] Elin Nyberg. *Dette skjer når du tenner et stearinlys*. 2017. URL: <https://www.forskning.no/julekalender-kjemi-partner/julekalender-luke-3-dette-skjer-nar-du-tenner-et-stearinlys/305694>.
- [3] wikipedia. *Aluminium*. u.d. URL: <https://no.wikipedia.org/wiki/Aluminium>.