1. 次の数ベクトルの組は線形独立か線形従属か．(15点)

$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\0\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\6\\0\\8\end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\0\\2\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\6\\0\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$ とする．

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&6\\2&2&0\\1&3&8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-6&6\\0&-2&0\\0&1&8\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&-2&0\\0&1&8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&-2\\0&0&9\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&1\\0&0&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$a=0,\ b=0,\ c=0$

したがって，線形独立

2. ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ が線形独立であるとき，次のベクトルの組は線形独立か線形従属か．(15点)

$3\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$，$2\boldsymbol{x}_2+3\boldsymbol{x}_3$，$2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_3$

$a(3\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)+b(2\boldsymbol{x}_2+3\boldsymbol{x}_3)+c(2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{0}$

とする．

$(3a+2c)\boldsymbol{x}_1+(-a+2b)\boldsymbol{x}_2+(3b+c)\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ は線形独立だから

$3a+2c=0$，$-a+2b=0$，$3b+c=0$

$$\begin{pmatrix}3&0&2\\-1&2&0\\0&3&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&0\\3&0&2\\0&3&1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&6&2\\0&3&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&3&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$a=2t$，$b=t$，$c=-3t$ （t は任意）

例えば $t=1$ とすると $a=2$，$b=1$，$c=-3$

$2(3\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)+(2\boldsymbol{x}_2+3\boldsymbol{x}_3)-3(2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{0}$

したがって，線形従属

3. $\boldsymbol{R}^3$ の次の基底 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ と次のベクトル $\boldsymbol{x}$ について，次の問いに答えよ．(10点×2)

$$\boldsymbol{a}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$\boldsymbol{b}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ への基底の変換行列を求めよ．

求める行列を P とすると

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

左の行列の逆行列を求める．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&-1&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&1\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\-1&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{x}$ の基底 $\boldsymbol{a}$ および基底 $\boldsymbol{b}$ に関する成分を求めよ．

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$$ 基底 $\boldsymbol{a}$ に関する成分は $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}_{\boldsymbol{a}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&2&3\\1&-1&0&4\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&2&3\\0&-1&-1&3\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&6\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-5\\0&1&0&-9\\0&0&1&6\end{array}\right)$$

基底 $\boldsymbol{b}$ に関する成分は $\begin{pmatrix}-5\\-9\\6\end{pmatrix}_{\boldsymbol{b}}$

3. $\boldsymbol{R}^2$ において，基底 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ をとる．線形変換 f が $f(\boldsymbol{p}_1) = 3\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$，$f(\boldsymbol{p}_2) = 2\boldsymbol{p}_1 + 2\boldsymbol{p}_2$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(10点× 3)

(1) f の基底 $\boldsymbol{p} = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ に関する表現行列 A を求めよ．

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{p}_1) & f(\boldsymbol{p}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{p}}$$

より $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) f の固有値，および固有ベクトルの基底 $\boldsymbol{p}$ に関する成分を求めよ．

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

$= (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0 \qquad \lambda = 1,\ 4$

$\lambda = 1$ のとき $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ より

固有値 1，求める成分 $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{p}}$ $(c_1 \neq 0)$

$\lambda = 4$ のとき $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ より

固有値 4，求める成分 $c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{p}}$ $(c_2 \neq 0)$

(3) f の標準基底 $\boldsymbol{e}$ に関する表現行列 B および固有ベクトルの $\boldsymbol{e}$ に関する成分を求めよ．

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと

$B = PAP^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$ のとき

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}}$ より

固有値 1 の求める成分 $c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}}$ $(c_1 \neq 0)$

$\lambda = 4$ のとき

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}}$ より

固有値 4 の求める成分 $c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}}$ $(c_2 \neq 0)$

4. $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への次の線形写像 f について，以下の問いに答えよ．

(10点× 2)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

(1) f の $\boldsymbol{R}^2$ の標準基底と $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底に関する表現行列 A を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{より}$$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$，

$\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ に関する

f の表現行列 B を求めよ．

$\boldsymbol{R}^2$ の基底を $\boldsymbol{p}$ とし

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ とおく

$$A \left(P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{p}} \right) = QB \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{p}}$$

Q の逆行列を求める．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$B = Q^{-1}AP$

$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -16 \\ 1 & 15 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$P_2(\boldsymbol{R})$ は，実数を係数とする x の 2 次以下の多項式全体からなるベクトル空間，$M_2(\boldsymbol{R})$ は，実数を成分とする 2 次正方行列全体からなるベクトル空間である．

1. ベクトル空間 V の線形変換 $f : V \to V$ について。次の V の部分集合は V の部分空間になるか．ただし，$\boldsymbol{0}$ は V の零元（零ベクトル），$\boldsymbol{b} \in V$ で $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とする． (13 点 ×2)

(1) $W_1 = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$

(i) $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in W_1$ とすると

$$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

だから

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in W_1$$

(ii) $\boldsymbol{x} \in W_1,\ c \in \boldsymbol{R}$ とすると

$f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x}) = c \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ だから

$$c\boldsymbol{x} \in W_1$$

(i), (ii) より，W_1 は V の部分空間になる．

(2) $W_2 = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\}$

$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in W_2$ とすると

$$f(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1)+f\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}$$

だから

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \notin W_2$$

したがって，W_2 は V の部分空間ではない．

2. $V = \{f(x) \in P_2(\boldsymbol{R}) \mid f(1) = 0\}$ とする．$\{1 - x,\ x - x^2\}$ は V の基底であることを証明せよ． (14 点)

(I) 線形独立であること

$a(1 - x) + b(x - x^2) = 0$ とする．

$a + (-a + b)x - bx^2 = 0$

$a = 0,\ -a + b = 0,\ -b = 0$

これから $a = 0,\ b = 0$

したがって，$\{1 - x,\ x - x^2\}$ は線形独立．

(II) V の任意のベクトルが $1 - x$ と $x - x^2$ の線形結合でかけること

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V$ とする．

$f(1) = a_0 + a_1 + a_2$ より $a_2 = -a_0 - a_1$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + (-a_0 - a_1)x^2 \\ &= a_0(1 - x) + (a_0 + a_1)(x - x^2) \end{aligned}$$

(I), (II) より，$\{1 - x,\ x - x^2\}$ は V の基底である．

3. $P_2(\boldsymbol{R})$ において，$x + 1$ をかけて $x^3 - 2x - 1$ で割った余りをとるという線形変換 f を考える． (12 点 ×3)

(1) 基底 $\boldsymbol{p} = \{1,\ x,\ x^2\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

$$\begin{aligned} &(a + bx + cx^2)(x + 1) \\ &= a + (a + b)x + (b + c)x^2 + cx^3 \\ &= c(x^3 - 2x - 1) + a + c + (a + b + 2c)x + (b + c)x^2 \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} &f(a + bx + cx^2) \\ &= a + c + (a + b + 2c)x + (b + c)x^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + c \\ a + b + 2c \\ b + c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a + c \\ a + b + 2c \\ b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

したがって　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Ker f とその次元を求めよ．

$\boldsymbol{R}^3$ の線形変換 g を $g(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ で定める．

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, g$ とする．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_1 + u_3 = 0,\ u_2 + u_3 = 0$ だから

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_3 \\ -u_3 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}\, g = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in \boldsymbol{R} \right\}$$

$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ c_1(-1 - x + x^2) \middle| c_1 \in \boldsymbol{R} \right\}$

次元は $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$

裏面に続く

(3) Im f とその次元を求めよ.

(2) の変形から $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\mathrm{Im}\, g \ni \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

$$= a_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$= (a_1+a_3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(a_2+a_3)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}\, g = \left\{ c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \middle| c_2,\ c_3 \in \boldsymbol{R}\right\}$$

$$\mathrm{Im}\, f = \left\{ c_2(1+x)+c_3(x+x^2) \middle| c_3,\ c_4 \in \boldsymbol{R}\right\}$$

次元は $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$

4. $A = \begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$ とおき, $M_2(\boldsymbol{R})$ の線形変換 f を $f(X) = AX$ で定める.

$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{p} = \{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3,\ \boldsymbol{p}_4\}$

は $M_2(\boldsymbol{R})$ の基底になる. (12 点 ×2)

(1) 基底 $\boldsymbol{p}$ に関する f の表現行列 B を求めよ.

$X = \begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ とすると

$$X = \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$$

$$f(X) = AX = \begin{pmatrix}x+2z & y+2w\\4x+3z & 4y+3w\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+2z\\y+2w\\4x+3z\\4y+3w\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x+2z\\y+2w\\4x+3z\\4y+3w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\4&0&3&0\\0&4&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$$

したがって $B = \begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\4&0&3&0\\0&4&0&3\end{pmatrix}$

(2) f の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$|B-\lambda E| = \begin{vmatrix}1-\lambda&0&2&0\\0&1-\lambda&0&2\\4&0&3-\lambda&0\\0&4&0&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}5-\lambda&0&5-\lambda&0\\0&5-\lambda&0&5-\lambda\\4&0&3-\lambda&0\\0&4&0&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)^2\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\4&0&3-\lambda&0\\0&4&0&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)^2\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&-1-\lambda&0\\0&0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-5)^2(\lambda+1)^2$$

$\lambda = -1$ のとき

$$\begin{pmatrix}1-(-1)&0&2&0\\0&1-(-1)&0&2\\4&0&3-(-1)&0\\0&4&0&3-(-1)\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

B の固有ベクトルは $c_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

固有値 -1, 固有ベクトルは

$c_1\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}$ $((c_1,\ c_2)\neq(0,\ 0))$

$\lambda = 5$ のとき

$$\begin{pmatrix}1-5&0&2&0\\0&1-5&0&2\\4&0&3-5&0\\0&4&0&3-5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-2&0&1&0\\0&-2&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

B の固有ベクトルは $c_3\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$

固有値 5, 固有ベクトルは

$c_3\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$ $((c_3,\ c_4)\neq(0,\ 0))$