Presek dveh implicitno danih ploskev

Aljaž Verlič, Blažka Blatnik, Lina Lumburovska, Luka Tavčer
Mentor: Damir Franetič

5. junij 2017

Opis problema

V $\mathbb{R}^3$ imamo podani dve poljubni implicitno dani ploskvi, opisanimi z enačbama $f_1(x) = C_1$ in $f_2(x) = C_2$.
Naša naloga je poiskati krivuljo K, ki predstavlja presek teh dveh ploskev.

Presek ploskev je množica rešitev nelinearnega sistema enačb:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= C_1 \\ f_2(x) &= C_2 \end{aligned}$$

Opis modela

Sistem lahko gledamo tudi, kot enačbe nivojnic funkcij f_1 in f_2, krivulja K pa je presek teh nivojnic. Gradienta funkcij sta tako v vsaki točki krivulje preseka, pravokotna nanjo. To opišemo:

$$F(x) = \frac{(gradf_1(x))x(gradf_2(x))}{\|gradf_1(x))x(gradf_2(x))\|}$$

in označimo $x = x(t)$ naravno parametrizacijo krivulje K. Ta x je rešitev avtonomnega sistema diferencialnih enačb:

$$\dot{x} = F(x)$$

Opis metod

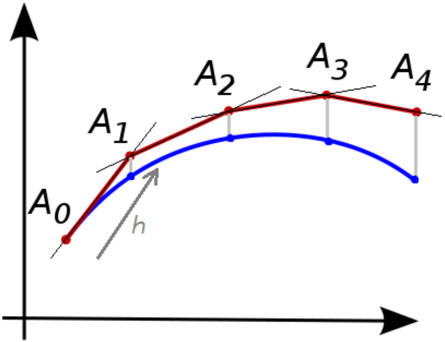
Za reševanje sistema $\dot{x} = F(x)$ lahko uporabimo katero izmed numeričnih metod za reševanje diferencialnih enačb:

- Eulerjeva metoda
  - Bolj logična in preprosta
  - Komulativna napaka z vsakim korakom narašča
- Runge-Kutta 4. reda
  - Bolj natančna
  - Napaka precej manjša, kot pri Eulerjevi metodi

Eulerjeva metoda

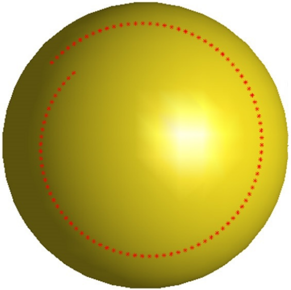
- Na vsakem koraku naslednjo točko (x_{i+1}, y_{i+1}) dobimo tako, da se za h (korak) premaknemo vzdolž tangente na rešitev (x_i, y_i).
- Točka (x_{i+1}, y_{i+1}) leži na drugi partikularni rešitvi kot (x_i, y_i).
- Napaka na vsakem koraku je reda $O(h^2)$.

Geometrijsko:



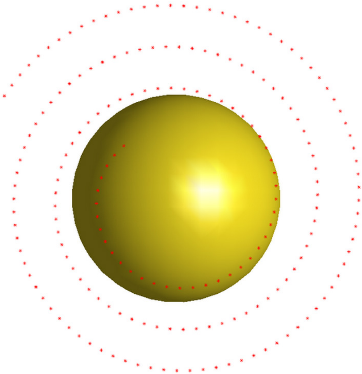
Eulerjeva metoda brez popravljanja

Opazimo, da je Eulerjeva metoda brez popravljanja približka "blizu" pravilni rešitvi, vendar se napaka z iteracijami povečuje.



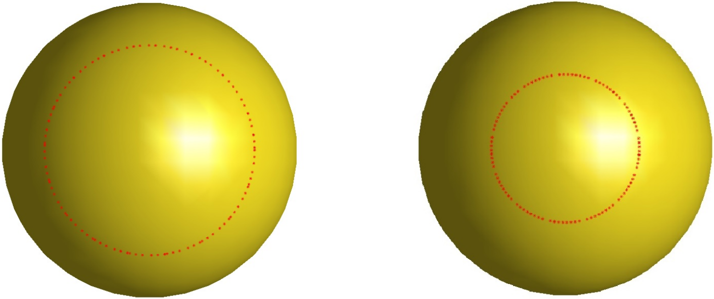
Eulerjeva metoda brez popravljanja

Napake, ki se seštevajo, so na večjem intervalu bolj opazne.



RK4 metoda

Natančnost se izboljša, če za izračun začetnih približkov uporabimo Runge-Kutta reda 4, a še vedno ne dovolj, zato moramo tudi tu za popravljanje uporabiti Newtonovo metodo.



Newtonova metoda za popravljanje približka

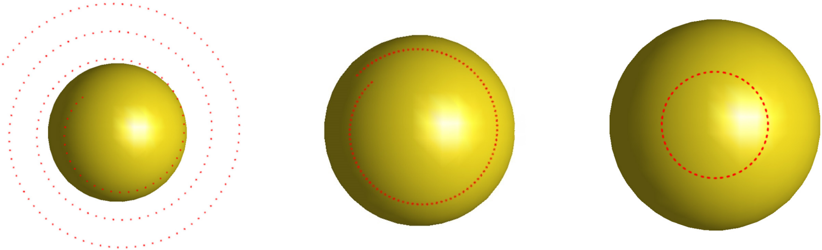
- Z opisanima metodama za reševanje DE enačb, dobimo na vsakem koraku le približek (Posebej razvidno iz Eulerjeve metode).
- Približek želimo popraviti tako, da bo spet ležal na krivulji preseka.

Dobljeni približek y, želimo popraviti na nek x, ki bo ležal na preseku. Če zapišemo $F(y) \cdot x = F(y) \cdot y$, nam to predstavlja enačbo ravnine, ki je zelo blizu normalni ravnini na krivuljo K. Z Newtonovo metodo z začetnim približkom y rešimo sistem enačb:

$$
\begin{gathered}
f_1(x) = C_1 \\
f_2(x) = C_2 \\
F(y) \cdot x = F(y) \cdot y
\end{gathered}
$$

Eulerjeva metoda s popravljanjem z Newtonovo metodo

Ko za popravljanje napake uporabimo Newtonovo metodo, dobimo pravilno rešitev.



Potrebni pogoji in Jacobijeva matrika

Potreben pogoj za delovanje metod je, da sta funkciji f_1 in f_2 parcialno odvedljivi in da ima Jacobijeva matrika parcialnih odvodov poln rang 2. Za uspešno delovanje Newtonove metode moramo poiskati Jacobijevo matriko leve strani sistema nelinearnih enačb.

$$\mathrm{JG} = \begin{bmatrix} grad(f_1) \\ grad(f_2) \\ grad(\vec{v} \cdot \vec{x}) \end{bmatrix} \text{ oziroma } \mathrm{JG} = \begin{bmatrix} grad(f_1) \\ grad(f_2) \\ grad(\vec{v}^{\mathsf{T}}) \end{bmatrix}$$

Razlaga adaptivnega koraka? (utemeljitev implementacije in zakaj je potrebna)

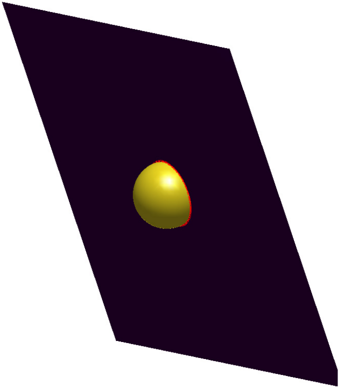
Končna analiza parov ploskev za vsak primer + slike

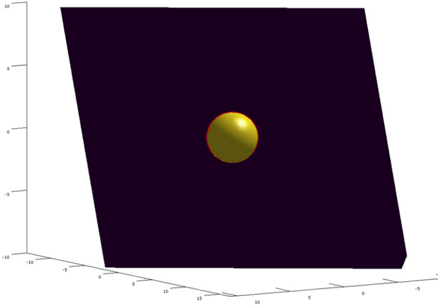
Delovanje našega programa lahko preverimo s programom, ki smo ga napisali v Octave-u. Kot vhodne parametre mu podamo obe implicitno podani funkciji f_1, f_2, $C1$, $C2$, $grad(f_1)$, $grad(f_2)$. Določimo tudi začetni približek x_0, začetno dolžino koraka in pa parameter, ki določa metodo delovanja (Euler/Runge-Kutta).

Primer 1

Začnemo z preprostim primerom sfere in ravnine, podane z enačbama:

- $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- $f_2(x, y, z) = 3x + 2y + z = 1$

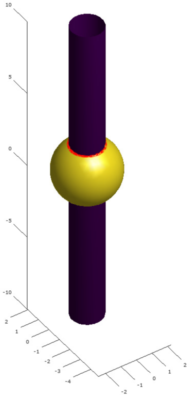


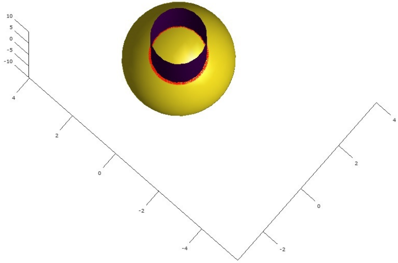


Primer 2

Tudi primer sfere in valja je relativno "lep"

- $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$

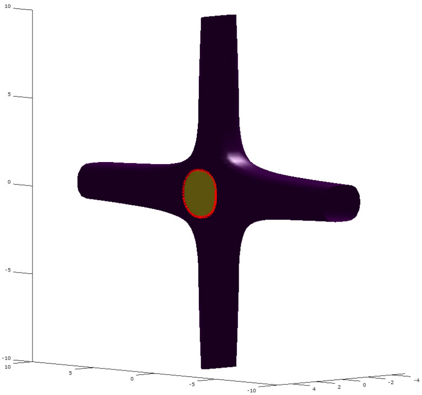


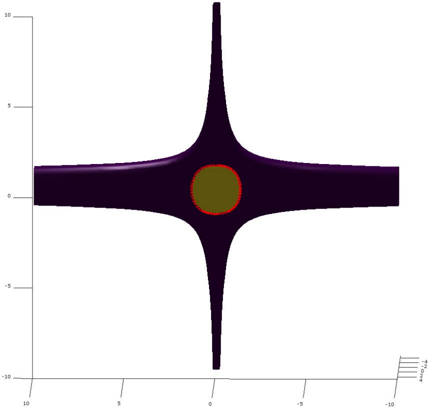


Primer 3

Stvari malce otežimo s sfero in f_2

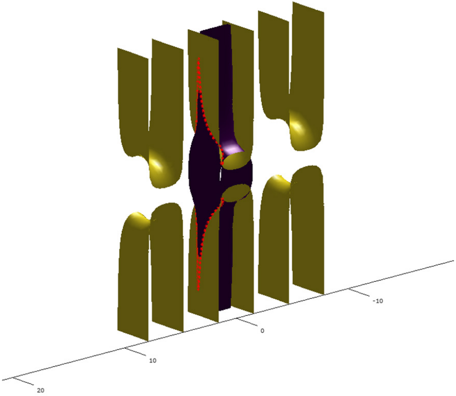
- $f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- $f_2(x,y,z) = y^4 + log(x^2+1)z^2 - 4 = 1$

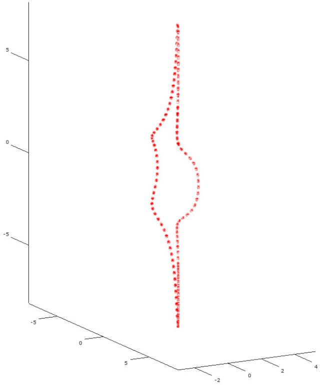




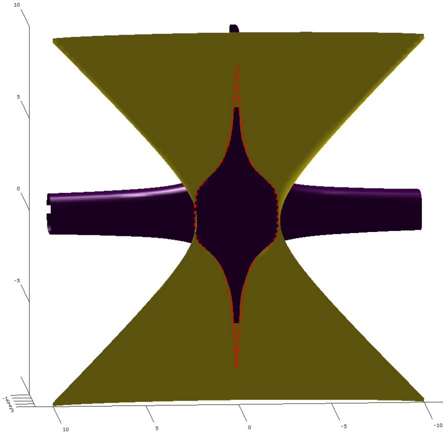
Primer 4

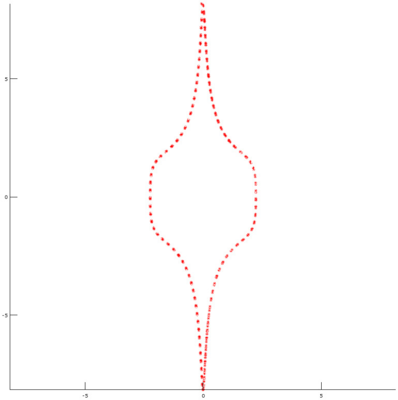
- $f_1(x, y, z) = x^2 + cos(y)z^2 - 12 = 4$
- $f_2(x, y, z) = y^4 + log(x^2 + 1)z^2 - 4 = 1$





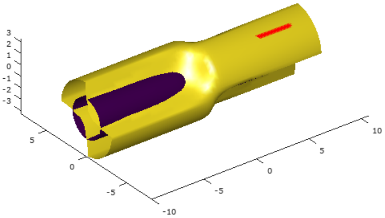
Primer 4

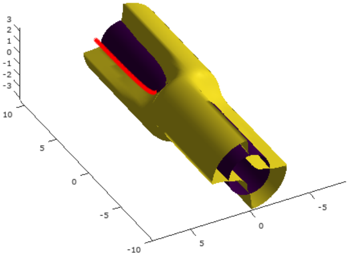




Primer 5

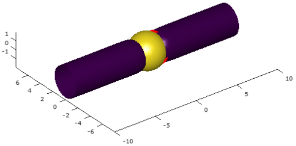
- $f_1(x, y, z) = e^{(-x^2+1)} + y^2 + z^2 = 3$
- $f_2(x, y, z) = e^{(xyz)} + y^2 + z^2 = 10$

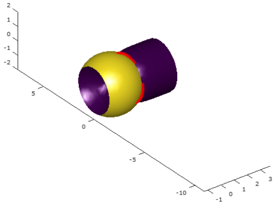


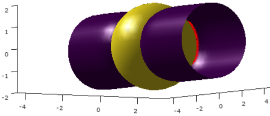


Primer 6

- $f_1(x, y, z) = e^{(-x^2+1)} + y^2 + z^2 = 3$
- $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$

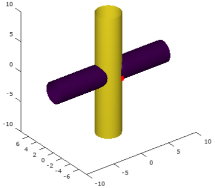


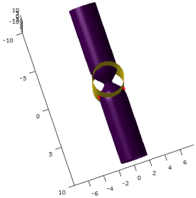


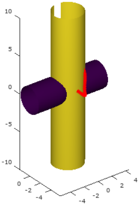


Primer 7

- $f_1(x, y, z) = e^{(-x^2+1)} + y^2 + z^2 = 3$
- $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$







Primer 8

- $f_2(x, y, z) = e^{(xyz)} + y^2 + z^2 = 10$
- $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$