Konstrukcija implicitne krivulje

Krivuljo v prostoru lahko podamo implicitno kot rešitev dveh enačb. Naj bo $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Množica rešitev nelinearnega sistema dveh enačb $f_1(\mathbf{x}) = 0$, $f_2(\mathbf{x}) = 0$ v splošnem predstavlja krivuljo. Tako podana krivulja je presečišče dveh ploskev podanih implicitno z enačbama $f_1(\mathbf{x}) = 0$ in $f_2(\mathbf{x}) = 0$.

Privzemimo, da sta funkciji f_1 in f_2 parcialno odvedljivi in da ima *Jacobijeva matrika* parcialnih odvodov

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}$$

poln rang. Potem velja:

Izrek o implicitni funkciji: Če sta funkciji f_1 in f_2 parcialno odvedljivi in ima Jacobijeva matrika rang 2, potem množica rešitev sistema $f_1(\mathbf{x}) = 0$, $f_2(\mathbf{x}) = 0$ tvori gladko krivuljo v $\mathbb{R}^3$.

Naloga

Napišite funkcijo za konstrukcijo približka za gladko krivuljo, podano implicitno z enačbama $f_1(\mathbf{x}) = 0$ in $f_2(\mathbf{x}) = 0$ oziroma z vektorsko enačbo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = 0. \tag{1}$$

Klic funkcije naj bo oblike `P = implicit(F,JF,x0,h,n)`, kjer je

- `F` kazalec na funkcijo, ki izračuna desne strani vektorske enačbe (1),
- `JF` kazalec na funkcijo, ki izračuna Jacobijevo matriko funkcije $\mathbf{F}$,
- `x0` začetna točka v $\mathbb{R}^3$, ki je blizu presečišča obeh ploskev,
- `h` dolžina koraka in
- `n` število korakov.

Rezultat `P` naj bo $3 \times (n+1)$ matrika, katere stolpci so koordinate točk na krivulji.

Opis algoritma

1. Začetna točka $\mathbf{x}_0$ leži na krivulji $f_1(\mathbf{x}) = \varepsilon_1$ in $f_2(\mathbf{x}) = \varepsilon_2$. Izračunajte tangentni vektor $\mathbf{v}_0$ na to krivuljo v točki $\mathbf{x}_0$.

2. Poiščite točko $\mathbf{x}_0'$ na iskani krivulji $f_1(\mathbf{x}) = 0$, $f_2(\mathbf{x}) = 0$ v smeri pravokotno na vektor $\mathbf{v}_0$. Drugače povedano, točka $\mathbf{x}_0'$ naj bo rešitev sistema enačb

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= 0, \\ f_2(\mathbf{x}) &= 0, \\ \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) &= 0, \end{aligned}$$

   ki jo izračunate z Newtonovo metodo.

3. Izračunajte tangenti vektor $\mathbf{v}_0'$ v točki $\mathbf{x}_0'$ in novo točko $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0' + h\mathbf{v}_0'$. Korak h naj bo dovolj majhen, da bo točka $\mathbf{x}_1$ blizu iskane krivulje.

4. Poiščite novo točko $\mathbf{x}_1'$ na krivulji na enak način kot $\mathbf{x}_0'$.

5. Postopek ponavljajte dokler ne dobite vseh točk $\mathbf{x}_0', \mathbf{x}_1', \ldots \mathbf{x}_n'$.

Pazite: na vsakem koraku mora tangenti vektor $\mathbf{v}_i'$ kazati v isto smer vzdolž krivulje, da ne boste skakali med dvema točkama na krivulji tja in nazaj.

Testiranje

Svoj program stestirajte vsaj na naslednjih dveh primerih:

- $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$, $f_2(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 - 1$,
- f_1 in f_2 izberete na podlagi zadnjih dveh števk svoje vpisne številke:

  0: $\frac{1}{x^2+y^2+(z-1)^2} + \frac{1}{x^2+(y-1)^2+z^2} + \frac{1}{(x-1)^2+y^2+z^2} - 3$
  1: $x^2 + \cos(y)z^2 - 1$
  2: $y^4 + \log(x^2+1)z^2 - 4$
  3: $e^{-x^2+1} + y^2 + z^2 - 3$
  4: $-x^2 + \cos(y)\sin(z) + 1/2$
  5: $e^{xyz} + x^2 + y^2 + z^2 - 10$
  6: $e^{yz} + x^2 + \cos(zx) - 5$
  7: $2(y^2 - 3x^2)(1 - z^2) + (x^2 + y^2)^2 - (9z^2 - 1)(1 - z^2)$
  8: $x^2 + y^2 + z^2 + \sin(3x) + \sin(3y) + \sin(3z) - 1$
  9: $z - 4xe^{-x^2-y^2}$.

  Če sta zadnji števki vaše vpisne številke enaki, si f_2 izberete poljubno. Prav tako lahko f_2 zamenjate z drugo funkcijo, če slučajno ploskvi določeni z f_1 in f_2 nimata preseka.

Oddaja naloge

Na spletno učilnico oddajte naslednje:

- funkcijo `implicit` z vsemi pripadajočimi pomožnimi funkcijami,
- funkciji F ter JF za vaš primer in začetno točko blizu krivulje
- kratko izpeljavo formul, ki jih uporabite v funkciji `implicit` (1-2 strani, lahko je napisana na roke in poskenirana).

S kolegi se lahko posvetujete in lahko tudi skupaj rešujete nalogo, vendar morate program in poročilo izdelati sami. Uporabljate lahko funkcije, ki smo jih izdelali na vajah.