Presek dveh implicitno danih ploskev

Ploskev v $\mathbb{R}^3$ lahko opišemo kot rešitev enačbe $f(\mathbf{x}) = C$, kjer je $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$, f pa funkcija treh spremenljivk. Recimo, da imamo dve ploskvi, opisani z enačbama $f_1(\mathbf{x}) = C_1$ in $f_2(\mathbf{x}) = C_2$. Presek ploskev je množica rešitev nelinearnega sistema enačb

$$
\begin{aligned}
f_1(\mathbf{x}) &= C_1,\\
f_2(\mathbf{x}) &= C_2.
\end{aligned}
$$

Če sta f_1 in f_2 gladki funkciji in so izpolnjeni še nekateri pogoji, je presek teh dveh ploskev gladka krivulja K. Namen naloge poiskati to krivuljo.

Opis parametrizacije krivulje K kot rešitev sistema diferencialnih enačb

Enačbi $f_1(\mathbf{x}) = C_1$ in $f_2(\mathbf{x}) = C_2$ lahko gledamo tudi kot enačbi nivojnic funkcij f_1 in f_2, krivulja K pa je presek teh nivojnic. Gradienta funkcij f_1 in f_2 sta v vsaki točki krivulje K torej pravokotna na K. To pomeni, da je $(\operatorname{grad} f_1) \times (\operatorname{grad} f_2)$ vektor, ki je tangenten na K. Pišimo

$$
\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{(\operatorname{grad} f_1(\mathbf{x})) \times (\operatorname{grad} f_2(\mathbf{x}))}{\|(\operatorname{grad} f_1(\mathbf{x})) \times (\operatorname{grad} f_2(\mathbf{x}))\|}
$$

in označimo z $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ naravno parametrizacijo krivulje K. Ta $\mathbf{x}$ je rešitev avtonomnega sistema diferencialnih enačb

$$
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).
$$

Če za začetni pogoj vzamemo $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, kjer je $\mathbf{x}_0$ na K, je rešitev ravno naravna parametrizacija za krivuljo K.

Reševanje sistema diferencialnih enačb na ploskvi

Pri reševanju sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ s katerokoli od metod za numerično reševanje diferencialnih enačb (Eulerjevo ali Runge–Kutta) bomo na vsakem koraku dobili le približek rešitve. Ta približek moramo popraviti tako, da bo ležal na obeh ploskvah, preden izvedemo naslednji korak metode za reševanje DE.

Vzemimo $\mathbf{y}$, ki ga dobimo iz $\mathbf{x}_0$ po prvem koraku metode za reševanje DE. Ta $\mathbf{y}$ ne leži nujno na krivulji K, leži pa zelo blizu K. Če označimo $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{y})$, potem je $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{y}$ enačba ravnine, ki je zelo blizu normalni ravnini na krivuljo K. Da iz $\mathbf{y}$ dobimo $\mathbf{x}_1$, ki leži na krivulji K, sedaj rešimo sistem nelinearnih enačb (z neznanko $\mathbf{x}$)

$$
\begin{aligned}
f_1(\mathbf{x}) &= C_1,\\
f_2(\mathbf{x}) &= C_2,\\
\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{y}.
\end{aligned}
$$

Rešitev $\mathbf{x}_1$ tega sistema lahko poiščemo z Newtonovo metodo z začetnim približkom $\mathbf{y}$. Pričakujemo seveda, da je $\mathbf{x}_1$ blizu $\mathbf{y}$. V primeru, da ni, se vrnemo v $\mathbf{x}_0$ in ponovno poiščemo $\mathbf{y}$, tokrat z manjšo dolžino koraka metode za reševanje DE.

Strnimo konstrukcijo zaporednih točk na krivulji K. Iz $\mathbf{x}_0$ na K z enim korakom metode za reševanje $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ dobimo vmesni približek $\mathbf{y}$, nato pa iz tega novo točko $\mathbf{x}_1$ na K. Preverimo, da je razdalja med $\mathbf{x}_1$ in $\mathbf{y}$ dovolj majhna, sicer se vrnemo v $\mathbf{x}_0$ in popravimo dolžino koraka. V primeru, da je razdalja med $\mathbf{x}_1$ in $\mathbf{y}$ premajhna, pa dolžino koraka povečamo. Postopek ponavljamo. Dobimo zaporedje krajevnih vektorjev točk

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n,$$

ki opisujejo krivuljo K.

Naloga

Za poljubni dve implicitno dani ploskvi in začetni približek $\mathbf{x}_0$ morate znati poiskati krivuljo K, ki je presek teh dveh ploskev.

1. Natančno razmislite, kako deluje opisana metoda. Razložite, kako metoda deluje, če za reševanje sistema DE uporabite Eulerjevo metodo. V tem primeru opišite postopek reševanja z izrazi iz geometrične intuicije, brez omembe diferencialnih enačb.

2. Privzemimo, da sta f_1 in f_2 gladki (vsaj enkrat zvezno odvedljivi) funkciji. Kateri dodaten pogoj za f_1 in f_2 mora biti izpolnjen, da opisana metoda deluje?

3. Za Newtonovo iteracijo bo treba poiskati Jacobijevo matriko leve strani sistema nelinearnih enačb na dnu prejšnje strani. Zapišite to Jacobijevo matriko!

4. Implementirajte opisano metodo za iskanje krivulje K na 4 načine: z uporabo Eulerjeve in z uporabo Runge–Kutta metode za reševanje DE, s fiksno dolžino koraka in z adaptivno izbiro dolžine koraka. (Postopek za adaptivno izbiro koraka določite empirično.)

5. Testirajte in primerjajte vse 4 implementirane metode na čimveč različnih primerih parov ploskev. Kaj so prednosti, kaj slabosti? (Primerjajte potrebno dolžino koraka pri uporabi Eulerjeve oz. Runge–Kutta metode, hitrost izvajanja, ...)