

Presek dveh implicitno danih ploskev

Aljaž Verlič, Blažka Blatnik, Lina Lumburovska, Luka Tavčer
Mentor: Damir Franetič

5. junij 2017

Opis problema

V \mathbb{R}^3 imamo podani dve poljubni implicitno dani ploskvi, opisanimi z enačbama $f_1(x) = C_1$ in $f_2(x) = C_2$.

Naša naloga je poiskati krivuljo K , ki predstavlja presek teh dveh ploskev.

Presek ploskev je množica rešitev nelinearnega sistema enačb:

$$f_1(x) = C_1$$

$$f_2(x) = C_2$$

Opis modela

Sistem lahko gledamo tudi, kot enačbe nivojnic funkcij f_1 in f_2 , krivulja K pa je presek teh nivojnic. Gradienta funkcij sta tako v vsaki točki krivulje preseka, pravokotna nanjo. To opišemo:

$$F(x) = \frac{(\text{grad}f_1(x)) \times (\text{grad}f_2(x))}{\|(\text{grad}f_1(x)) \times (\text{grad}f_2(x))\|}$$

in označimo $x = x(t)$ naravno parametrizacijo krivulje K . Ta x je rešitev avtonomnega sistema diferencialnih enačb:

$$\dot{x} = F(x)$$

Opis metod

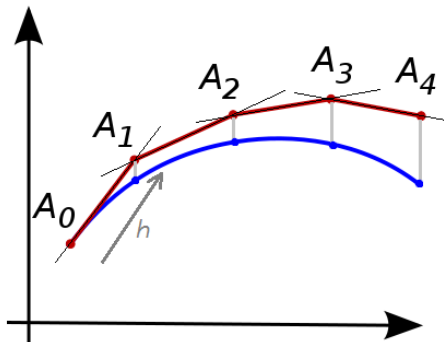
Za reševanje sistema $\dot{x} = F(x)$ lahko uporabimo katero izmed numeričnih metod za reševanje diferencialnih enačb:

- ▶ Eulerjeva metoda
 - ▶ Bolj logična in preprosta
 - ▶ Komulativna napaka z vsakim korakom narašča
- ▶ Runge-Kutta 4. reda
 - ▶ Bolj natančna
 - ▶ Napaka precej manjša, kot pri Eulerjevi metodi

Eulerjeva metoda

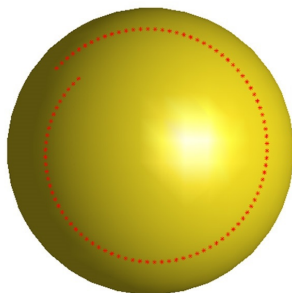
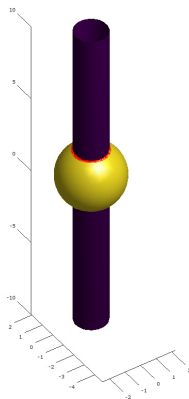
- ▶ Na vsakem koraku naslednjo točko (x_{i+1}, y_{i+1}) dobimo tako, da se za h (korak) premaknemo vzdolž tangente na rešitev (x_i, y_i) .
- ▶ Točka (x_{i+1}, y_{i+1}) leži na drugi partikularni rešitvi kot (x_i, y_i) .
- ▶ Napaka na vsakem koraku je reda $O(h^2)$.

Geometrijsko:



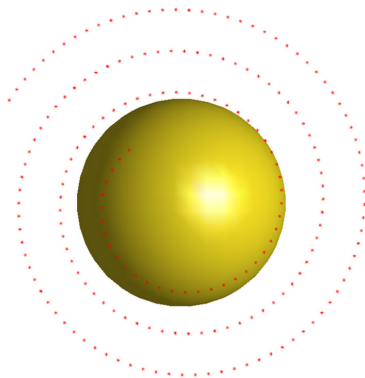
Eulerjeva metoda brez popravljanja

Opazimo, da je Eulerjeva metoda brez popravljanja približka "blizu" pravilni rešitvi, vendar se napaka z iteracijami povečuje.



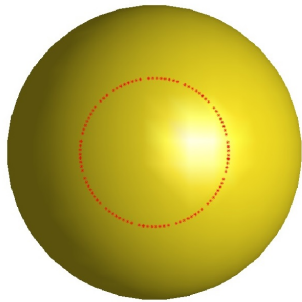
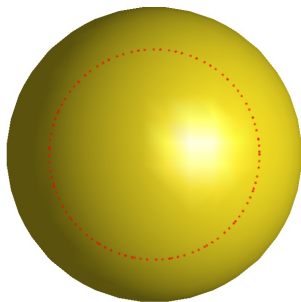
Eulerjeva metoda brez popravljanja

Napake, ki se seštevajo, so na večjem intervalu bolj opazne.



RK4 metoda

Natančnost se izboljša, če za izračun začetnih približkov uporabimo Runge-Kutta reda 4, a še vedno ne dovolj, zato moramo tudi tu za popraviljanje uporabiti Newtonovo metodo.



Newtonova metoda za popravljanje približka

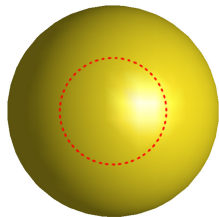
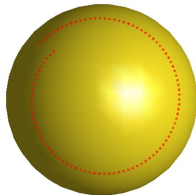
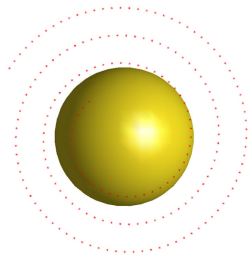
- ▶ Z opisanimi metodama za reševanje DE enačb, dobimo na vsakem koraku le približek (Posebej razvidno iz Eulerjeve metode).
- ▶ Približek želimo popraviti tako, da bo spet ležal na krivulji preseka.

Dobljeni približek y , želimo popraviti na nek x , ki bo ležal na preseku. Če zapišemo $F(y) \cdot x = F(y) \cdot y$, nam to predstavlja enačbo ravnine, ki je zelo blizu normalni ravnini na krivuljo K . Z Newtonovo metodo z začetnim približkom y rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= C_1 \\f_2(x) &= C_2 \\F(y) \cdot x &= F(y) \cdot y\end{aligned}$$

Eulerjeva metoda s popravljanjem z Newtonovo metodo

Ko za popravljanje napake uporabimo Newtonovo metodo, dobimo pravilno rešitev.



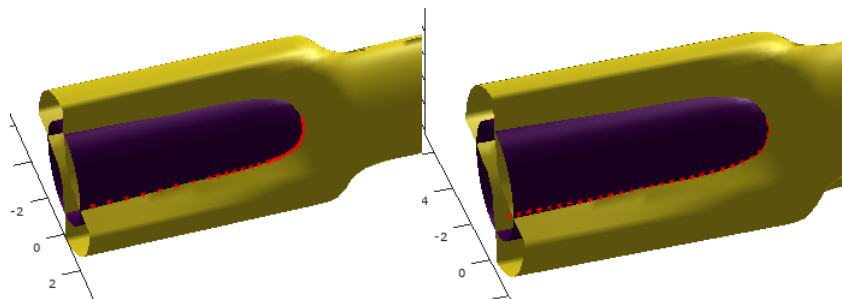
Potrebni pogoji in Jacobijeva matrika

Potreben pogoj za delovanje metod je, da sta funkciji f_1 in f_2 parcialno odvedljivi in da ima Jacobijeva matrika parcialnih odvodov poln rang 2. Za uspešno delovanje Newtonove metode moramo poiskati Jacobijevo matriko leve strani sistema nelinearnih enačb.

$$JG = \begin{bmatrix} \text{grad}(f_1) \\ \text{grad}(f_2) \\ \text{grad}(\vec{v} \cdot \vec{x}) \end{bmatrix} \text{ oziroma } JG = \begin{bmatrix} \text{grad}(f_1) \\ \text{grad}(f_2) \\ \text{grad}(\vec{v}^\top) \end{bmatrix}$$

Adaptivni korak

Adaptivni korak nam omogoča bolj natančno rešitev problema. Deluje tako, da na vsakem koraku preveri čas, ki ga porabi za popravljanje napake z Newtonovo metodo in s tem podatkom ustrezno prilagodi velikost koraka.



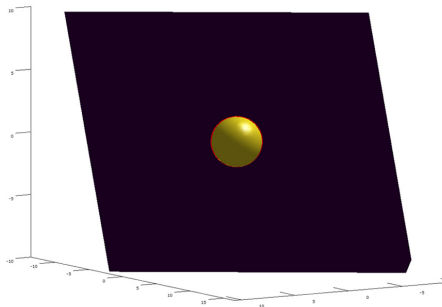
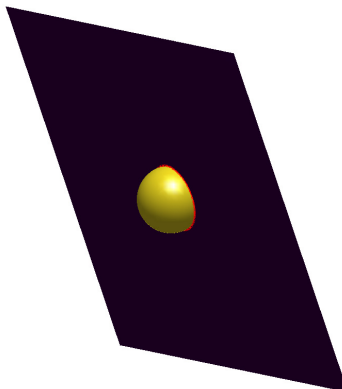
Končna analiza parov ploskev za vsak primer + slike

Delovanje našega programa lahko preverimo s programom, ki smo ga napisali v Octave-u. Kot vhodne parametre mu podamo obe implicitno podani funkciji f_1 , f_2 , $C1$, $C2$, $grad(f_1)$, $grad(f_2)$. Določimo tudi začetni približek x_0 , začetno dolžino koraka in pa parameter, ki določa metodo delovanja (Euler/Runge-Kutta).

Primer 1

Začnemo z preprostim primerom sfere in ravnine, podane z enačbama:

- ▶ $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- ▶ $f_2(x, y, z) = 3x + 2y + z = 1$

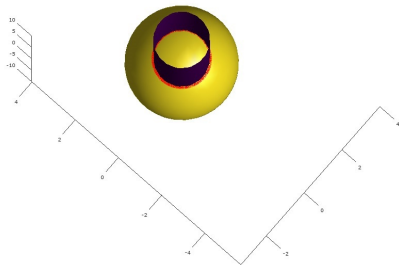
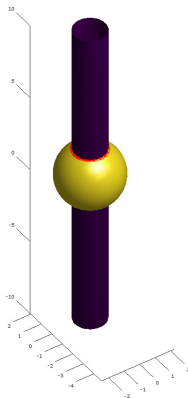


Primer 2

Tudi primer sfere in valja je relativno "lep"

► $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$

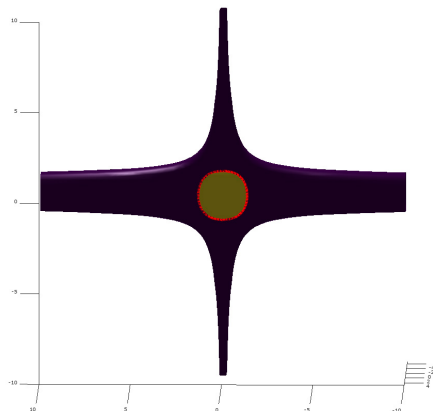
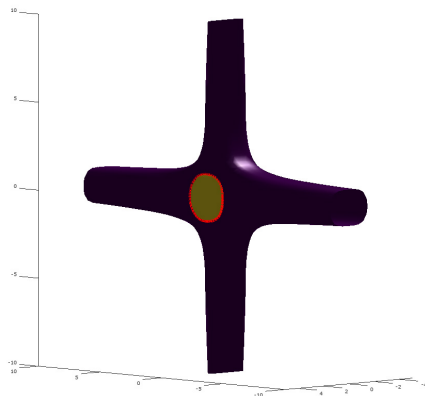
► $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$



Primer 3

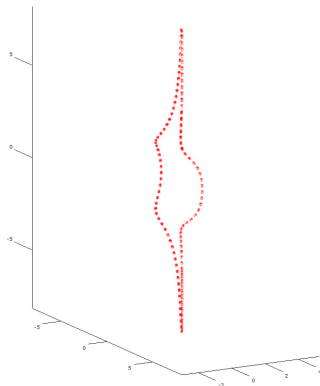
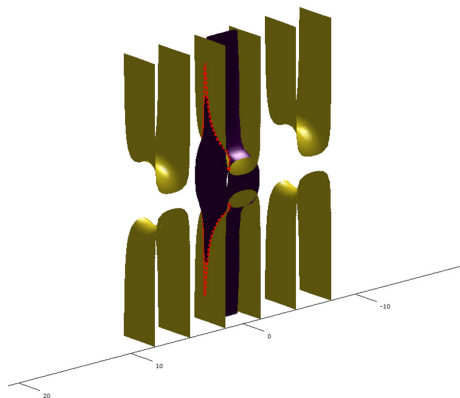
Stvari malce otežimo s sfero in f_2

- ▶ $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- ▶ $f_2(x, y, z) = y^4 + \log(x^2 + 1)z^2 - 4 = 1$

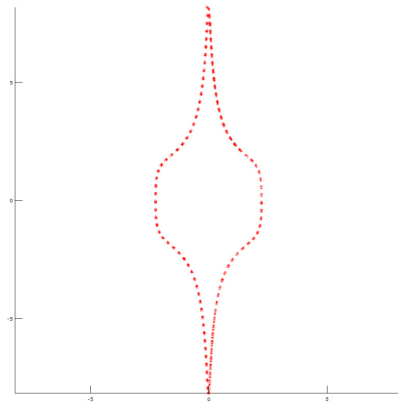
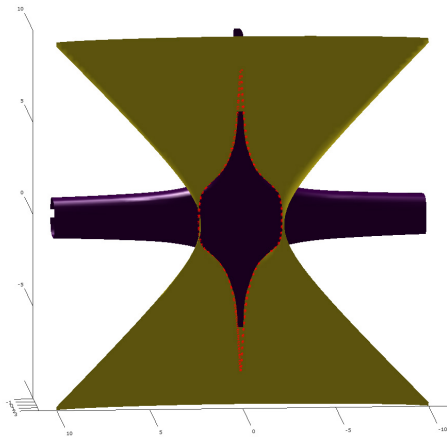


Primer 4

- ▶ $f_1(x, y, z) = x^2 + \cos(y)z^2 - 12 = 4$
- ▶ $f_2(x, y, z) = y^4 + \log(x^2 + 1)z^2 - 4 = 1$

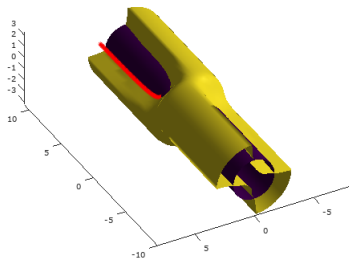
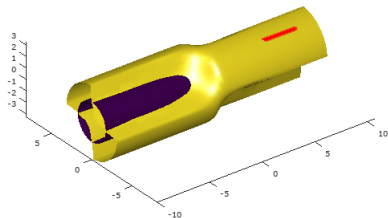


Primer 4



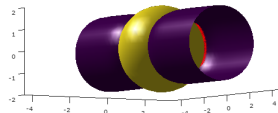
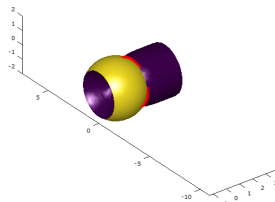
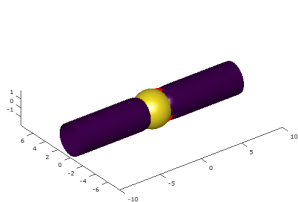
Primer 5

- ▶ $f_1(x, y, z) = e^{(-x^2+1)} + y^2 + z^2 = 3$
- ▶ $f_2(x, y, z) = e^{(xyz)} + y^2 + z^2 = 10$



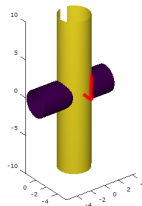
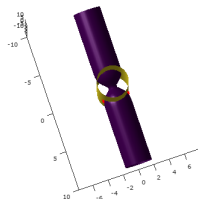
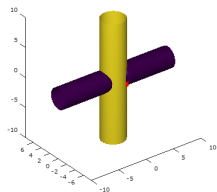
Primer 6

- ▶ $f_1(x, y, z) = e^{(-x^2+1)} + y^2 + z^2 = 3$
- ▶ $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$



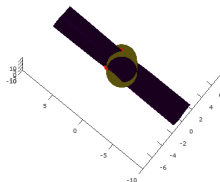
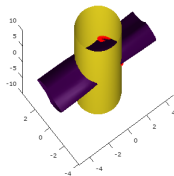
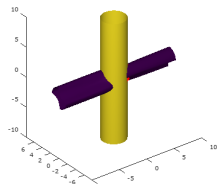
Primer 7

- ▶ $f_1(x, y, z) = e^{(-x^2+1)} + y^2 + z^2 = 3$
- ▶ $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$



Primer 8

- ▶ $f_2(x, y, z) = e^{(xyz)} + y^2 + z^2 = 10$
- ▶ $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$



Analiza

Za vseh osem primerov smo naredili analizo, tako da smo izmerili povprečno število korakov Newtonove metode za obe metodi na dva načina: z adaptivnim in fiksnim korakom.

Funkcije	Euler		RK4	
	adaptivno	fiksno	adaptivno	fiksno
$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$	3	5	3	3.222
$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $f_2(x, y, z) = 3x + 2y + z = 1$	3	4.222	3	3.333
$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $f_2(x, y, z) = y^4 + \log(x^2 + 1)z^2 - 4 = 1$	3	5	3	3.222
$f_1(x, y, z) = x^2 + \cos(y)z^2 - 12 = 4$ $f_2(x, y, z) = y^4 + \log(x^2 + 1)z^2 - 4 = 1$	3	4.111	2.222	2.556
$f_1(x, y, z) = e^{(-x^2+1)} + y^2 + z^2 = 3$ $f_2(x, y, z) = e^{(xyz)} + y^2 + z^2 = 10$	3	4.667	2.222	2.667
$f_1(x, y, z) = e^{(-x^2+1)} + y^2 + z^2 = 3$ $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$	3	5	3	3.222
$f_1(x, y, z) = e^{(-x^2+1)} + y^2 + z^2 = 3$ $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$	3	5	3	3.333
$f_1(x, y, z) = e^{(xyz)} + y^2 + z^2 = 10$ $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$	3	5	3	3.556