

## Planification de la production d'une ligne d'assemblage de smartphones

Groupe 15

Pierre-Alexandre Louis, Simon Boigelot et Xavier Lambein

### 1 Modélisation et implémentation de la ligne d'assemblage simple

**Question 1.** Donnez une formulation linéaire (continue, sans variables entières) du problème de la planification de la ligne d'assemblage à personnel constant. Décrivez successivement variables, contraintes et fonction objectif. A ce stade, le fait de ne pas imposer l'intégralité des variables vous paraît-il problématique ?

#### Les variables et données du problème

Avant toutes choses, nous allons commencer par nommer et détailler les différentes données du problème. Celles-ci sont reprises dans la liste suivante :

- $T$  le nombre de semaines sur lesquelles on effectue la planification
- $D^t$  la demande de smartphones pour la semaine  $t$
- $D_a$  la durée d'assemblage d'un smartphone, en heures
- $N_o$  le nombre d'ouvriers
- $N_h$  le nombre d'heures normales disponibles pour assembler des smartphones, par semaine et par ouvrier
- $N_{hs}$  le nombre d'heures supplémentaires disponibles pour assembler des smartphones, par semaine et par ouvrier
- $N_{st}$  le nombre maximal de smartphones sous-traitables, par semaine
- $C_m$  le coût des matériaux
- $C_s$  le coût du stockage d'un smartphone
- $C_h$  le coût horaire d'un ouvrier
- $C_{hs}$  le coût d'une heure supplémentaire de la part d'un ouvrier
- $C_{st}$  le coût de la sous-traitance pour l'assemblage d'un smartphone
- $C_r$  le coût supplémentaire associé au retard de livraison d'un smartphone
- $C_e$  le coût d'embauche d'un ouvrier
- $C_l$  le coût de licenciement d'un ouvrier
- $S_i$  le stock initial (et final) de smartphones

Viennent ensuite les variables, pour  $t \in \{1, \dots, T\}$  :

- $n^t$  le nombre de smartphones produits en conditions normales
- $n_{\text{hs}}^t$  le nombre de smartphones produits en heures supplémentaires
- $n_{\text{st}}^t$  le nombre de smartphones produits en sous-traitance
- $s^0$  le stock initial de smartphones
- $s^t$  le stock de smartphones à la fin de la semaine  $t$ , disponible en semaine  $t+1$ , pour lequel on paye le stockage en semaine  $t$
- $r^t$  les smartphones retardés lors de la semaine  $t-1$ , à produire et livrer en semaine  $t$

## Les contraintes

Ceci fait, nous pouvons maintenant lister les contraintes selon lesquelles nous allons optimiser :

1. égalité entre
  - les smartphones produits et disponible en stock en début de semaine et
  - la demande, le stock disponible en fin de semaine et le retard de la semaine passé, moins le retard que l'on décide de prendre cette semaine :

$$n^t + n_{\text{hs}}^t + n_{\text{st}}^t + s^{t-1} = D^t + s^t + r^t - r^{t+1} \quad \forall t \in \{1, \dots, T-1\};$$

2. afin d'éviter un retard de deux semaines (possible avec la contrainte précédente), le retard doit être inférieur à la demande de la semaine précédente :

$$D^t \geq r^{t+1} \quad \forall t \in \{1, \dots, T-1\};$$

3. limite sur la capacité en heures normales, supplémentaires et en sous-traitance :

$$n^t \leq \frac{N_{\text{h}} N_{\text{o}}}{D_{\text{a}}}, \quad n_{\text{hs}}^t \leq \frac{N_{\text{hs}} N_{\text{o}}}{D_{\text{a}}} \quad \text{et} \quad n_{\text{st}}^t \leq N_{\text{st}} \quad \forall t \in \{1, \dots, T\};$$

4. stock initial et final fixé à  $S_{\text{i}}$  :

$$s^0 = S_{\text{i}} \quad \text{et} \quad s^T = S_{\text{i}};$$

5. pas de retard à rattrapper en semaine 1 :

$$r^1 = 0;$$

6. enfin, toutes les variables positives :

$$n^t, n_{\text{hs}}^t, n_{\text{st}}^t, s^t, s^T, r^t, r^T \geq 0 \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}.$$

## La fonction objectif

Terminons par la fonction objectif. Soit  $f(x) : \mathbb{R}^{5T+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $x$  un vecteur de  $\mathbb{R}^{5T+1}$  :

$$x = (n^1, \dots, n^T, n_{\text{hs}}^1, \dots, n_{\text{hs}}^T, n_{\text{st}}^1, \dots, n_{\text{st}}^T, s^0, \dots, s^T, r^1, \dots, r^T).$$

Par simplicité, nous allons décomposer  $f(x)$  en une somme de fonctions  $f^t$  définies pour chaque semaine  $t \in \{1, \dots, T\}$  :

$$f(x) = \sum_{t=1}^T f^t(n^t, n_{\text{hs}}^t, n_{\text{st}}^t, s^t, r^t)$$

et

$$\begin{aligned} f^t(n^t, n_{\text{hs}}^t, n_{\text{st}}^t, s^t, r^t) = & (n^t + n_{\text{hs}}^t) C_{\text{m}} && \text{prix des matériaux} \\ & + n_{\text{hs}}^t D_{\text{a}} C_{\text{hs}} && \text{production en heures supplémentaires} \\ & + n_{\text{st}}^t C_{\text{st}} && \text{production sous-traitée} \\ & + s^t C_{\text{s}} && \text{stockage des smartphones} \\ & + r^t C_{\text{r}} && \text{retard de livraison.} \end{aligned}$$

Il est à noter que le salaire en heure normale des ouvriers n'apparaît pas dans cette fonction : nous ne sommes plus au XIXe siècle, un ouvrier est donc toujours payé pour sa semaine, peu importe le travail qu'il a réellement effectué. Il s'agit donc d'un coût fixe que l'on ne peut pas optimiser sans licencier des ouvriers.

## Le modèle complet

En résumé, le problème se modélise de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_x f(x) = & \sum_{t=1}^T (n^t + n_{\text{hs}}^t) C_{\text{m}} + n_{\text{hs}}^t D_{\text{a}} C_{\text{hs}} \\ & + n_{\text{st}}^t C_{\text{st}} + s^t C_{\text{s}} + r^t C_{\text{r}} \\ \text{s.c.q.} \quad & n^t + n_{\text{hs}}^t + n_{\text{st}}^t + s^{t-1} = D^t + s^t + r^t - r^{t+1} && \forall t \in \{1, \dots, T-1\} \\ & D^t \geq r^{t+1} && \forall t \in \{1, \dots, T-1\} \\ & n^t \leq N_{\text{h}} N_{\text{o}} / D_{\text{a}} && \forall t \in \{1, \dots, T\} \\ & n_{\text{hs}}^t \leq N_{\text{hs}} N_{\text{o}} / D_{\text{a}} && \forall t \in \{1, \dots, T\} \\ & n_{\text{st}}^t \leq N_{\text{st}} && \forall t \in \{1, \dots, T\} \\ & s^0 = S_{\text{i}} \\ & s^T = S_{\text{i}} \\ & r^1 = 0 \\ & n^t, n_{\text{hs}}^t, n_{\text{st}}^t, s^0, s^t, r^t \geq 0 && \forall t \in \{1, \dots, T\} \end{aligned}$$

À ce stade-ci, on peut se demander si l'hypothèse des variables non-entières n'entraînera pas des résultats aberrants, tel qu'un nombre de smartphones produits non-entier.

**Question 2.** Démontrez que, sous certaines hypothèses raisonnables, il est possible de garantir que votre modèle linéaire continu admette toujours une solution entière, c'est-à-dire ne comportant que des quantités produites entières chaque semaine. L'une de ces hypothèses est l'intégralité de la demande chaque semaine ; quelles sont les autres ?

Afin de montrer que le problème relaxé donne une solution entière, nous allons montrer que le problème peut être reformulé sous la forme d'un flot de coût minimal, dont les capacités et les entrées/sorties sont entières.

Voici comment nous avons reformulé le problème : nous avons défini un graphe orienté dont les deux noeuds d'entrée ont pour valeur  $D = \sum_{i=0}^{T-1} D^t$ , c'est-à-dire la quantité de smartphones à produire au total, et  $s^0 = S_i$ , c'est-à-dire le stock initial de smartphones.

Le graphe possède  $T + 1$  sorties, qui sont les demandes de chaque semaine  $D^t$ , et le stock de la dernière semaine  $s^T = S_i$ . On note que la somme des entrées est égale à la somme des sorties, ce qui doit être le cas dans un problème de flot.

Le flot d'entrée  $D$  va parcourir le graphe à travers  $3T$  arrêtes sortantes de « production », correspondantes aux variables  $n^t$ ,  $n_{hs}^t$ ,  $n_{st}^t$  pour chaque semaine  $t \in \{1, \dots, T\}$ . Celles-ci ont des coûts et des capacités correspondant à la variable associée, c'est-à-dire :

Variable	Coût	Capacité
$n^t$	$C_m$	$N_h N_o / D_a$
$n_{hs}^t$	$C_m + C_{hs} / D_a$	$N_{hs} N_o / D_a$
$n_{st}^t$	$C_{st}$	$N_{st}$

Par simplicité, nous regroupons toute la production d'une semaine dans un noeud  $P^t$ . À partir de celui-ci, la production est redistribuée par des arêtes sortantes dans trois autres noeuds : la demande de cette semaine  $D^t$ , le stock de cette semaine  $s^t$  et la demande de la semaine passée  $D^{t-1}$ .

La première arête correspond simplement à remplir la demande de la semaine actuelle avec la production de cette même semaine, et a donc un coup nul et une capacité infinie : en effet, le prix de fabrication a déjà été payé avant d'arriver au noeud  $P^t$ , et la capacité est implicite, car le noeud de demande va être rempli jusqu'à-ce-que son entrée soit égale à sa sortie, qui vaut  $D^t$ .

La seconde arête correspond à la production étant mise de côté dans le stock  $s^t$ . Celle-ci possède un coût, qui est celui de stockage  $C_s$ , et une capacité infinie, car il n'y a pas de contrainte sur la taille du stock.

Enfin, la troisième arrête correspond à la production en retard, qui est envoyée à la demande de la semaine précédente. Elle a donc un coût  $C_r$  et une capacité infinie.

Pour terminer, les noeuds de stock  $s^t$  possèdent chacun deux arêtes sortantes. La première est connectée à la demande de la semaine suivante  $D^{t+1}$ , sans coût car celui-ci a déjà été payé, et possède avec une capacité infinie. La seconde est connectée au stock de la semaine suivante  $s^{t+1}$ , avec un coût qui est celui de stockage  $C_s$  et une capacité infinie.

Les différentes arêtes sont reprises dans le tableau suivant :

De	À	Variable	Coût	Capacité	$\forall t \in$
$D$	$P^t$	$n^t$	$C_m$	$N_h N_o / D_a$	$1, \dots, T$
$D$	$P^t$	$n_{hs}^t$	$C_m + C_{hs} / D_a$	$N_{hs} N_o / D_a$	$1, \dots, T$
$D$	$P^t$	$n_{st}^t$	$C_{st}$	$N_{st}$	$1, \dots, T$
$P^t$	$D^t$	—	0	$\infty$	$1, \dots, T$
$P^t$	$s^t$	$s^t \_*$	$C_s$	$\infty$	$1, \dots, T$
$P^t$	$D^{t-1}$	$r^t$	$C_r$	$\infty$	$2, \dots, T$
$s^t$	$D^{t+1}$	—	0	$\infty$	$1, \dots, T-1$
$s^t$	$s^{t+1}$	$s^t \_*$	$C_s$	$\infty$	$1, \dots, T-1$

Il est à noter que  $s^t$  ne correspond pas directement à une arête ; au lieu de cela, la variable correspond à la somme des entrées sur le noeud  $s^t$ , c'est-à-dire à la somme des deux arêtes dont la variable est intitulée «  $s^t \_*$  » dans le tableau.

Un schéma de ce graphe est représenté dans la figure 1.

Maintenant que le graphe a été construit, le théorème sur les flots de coût minimum nous indique que si les demandes et les capacités du graphe sont entières, alors il existe une solution optimale entière au flot de coût minimum, et donc au problème de la question 1, les deux étant équivalents.

Imposer que les demandes et capacités soient entières revient à imposer que les grandeurs suivantes soient entières :

- $D^t \forall t \in 1, \dots, T$ , ce qui est le cas : il s'agit d'un nombre de smartphones ;
- $s^0$  et  $s^T$ , ce qui est également le cas, pour la même raison ;
- $N_{st}$ , qui, de nouveau, est un nombre de smartphones ;
- $N_h N_o / D_a$  et  $N_{hs} N_o / D_a$ , qui sont entiers si le numérateur est multiple du dénominateur, ou bien si l'on impose l'hypothèse tout à fait raisonnable d'arrondir cette valeur à l'entier inférieur.

Les conditions sont donc bien vérifiées pour avoir un problème relaxé avec une solution entière, à condition de remplacer  $N_h N_o / D_a$  par  $\lfloor N_h N_o / D_a \rfloor$ , et similairement pour  $N_{hs}$ .

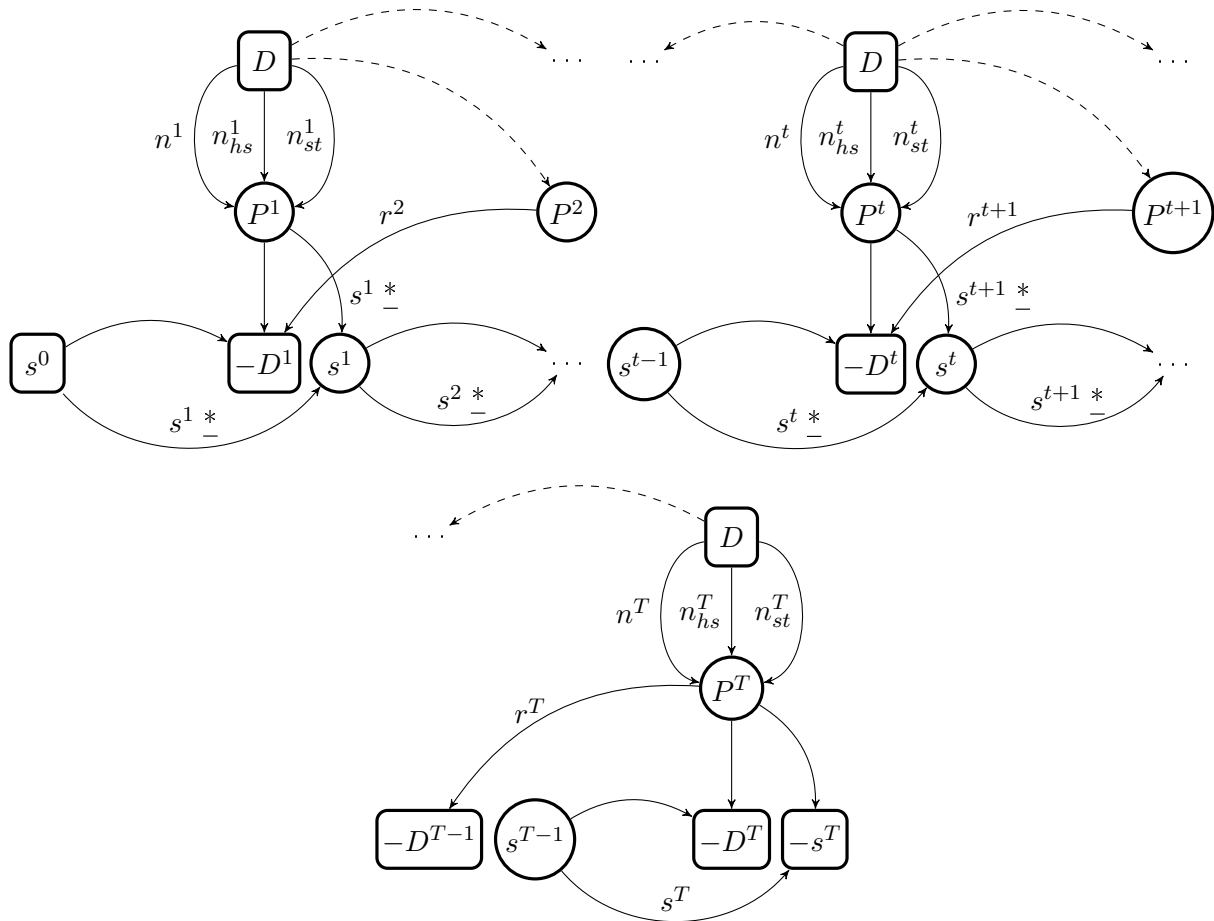


FIGURE 1 – Graphes orientés représentant la première, la  $t$ -ème et la dernière semaine. Les entrées et sorties sont en rectangle, et les autres noeuds sont en cercle. Dans chaque noeud est indiqué la variable correspondante, avec un signe négatif dans le cas des sorties. Dans le cas des noeuds normaux, la variable correspond à la somme des flots des arêtes entrantes. Les variables indiquées à côté de certaines arêtes correspondent au flot qui passe dans ces arêtes. Les arrêtes en pointillés indiquent un plus grand nombre d'arrêtes, qui n'ont pas été représentées par simplicité. De même, les points de suspension indiquent qu'il manque le reste du graphe (c'est-à-dire, les autres semaines).

**Question 3.** Implémentez sous MATLAB ce modèle linéaire continu, et calculez la solution correspondant aux données fournies sur icampus (utilisez la fonction `linprog`). Commentez l'allure de la solution obtenue.

**Question 4.** Décrivez une procédure permettant, avec le moins de nouveaux calculs possibles, d'évaluer les conséquences sur la fonction objectif d'une petite variation de la demande prévue. Plus précisément, analysez l'effet du remplacement du vecteur `demande` par le vecteur `demande + epsilon * delta_demande` où `delta_demande` est un vecteur de perturbation sur la demande, et `epsilon` est un paramètre scalaire dont la valeur est faible.

**Question 5.** Testez sous MATLAB la procédure du point précédent avec les données fournies. Comparez ensuite la prédiction obtenue par cette procédure avec la valeur obtenue en résolvant à nouveau complètement le modèle, et ce pour un échantillon de valeurs du paramètre **epsilon** comprises entre 0 et 1 (par exemple `0:.1:1`). Commentez (éventuellement en vous aidant d'un graphique).

**Question 6.** Décrivez (sans l'implémenter) l'adaptation qu'il serait nécessaire à apporter au modèle si le coût de l'heure supplémentaire pris en compte était variable. Plus concrètement, considérez qu'après la première heure supplémentaire (facturée au coût horaire `cout_heure_sup` standard), chaque heure supplémentaire (éventuellement) est facturée à un coût horaire supérieur de 5% à celui de l'heure supplémentaire précédente. Est-il toujours possible de formuler (ou reformuler) le problème sous forme linéaire ? Expliquez. Et que se passerait-il si le coût horaire des supplémentaires *diminuait* lorsque le nombre d'heure prestées augmente ? Justifiez.

Pour introduire un coût variable des heures supplémentaires, il nous faut ajouter  $N_{\text{hs}}$  variables par semaine  $t$  :  $\xi_0^t, \xi_1^t, \dots, \xi_{N_{\text{hs}}-1}^t$ . Celles-ci sont toutes comprises entre 0 et 1, et elles représentent quelle proportion de chaque heure supplémentaire a été effectuée, pour tous les ouvriers. Par exemple, si les 10 ouvriers ont effectué ensemble 17 heures supplémentaires à la semaine  $t$ , on aura  $\xi_0^t = 1$ ,  $\xi_1^t = 0.7$  et  $\xi_i^t = 0$  pour  $i \geq 2$ .

Une seule contrainte est nécessaire pour ces variables, il s'agit des bornes supérieures et inférieures :

$$\xi_i^t \in [0, 1] \quad \forall i.$$

Enfin, il est nécessaire de modifier la partie « production en heures supplémentaires » de la fonction-objectif pour prendre en compte le coût variable :

$$f^t(\dots, \xi_0^t, \xi_1^t, \dots, \xi_{N_{\text{hs}}-1}^t) = \dots + C_{\text{hs}} N_o (\xi_0^t + \xi_1^t \alpha^1 + \dots + \xi_{N_{\text{hs}}-1}^t \alpha^{N_{\text{hs}}-1}),$$

avec  $\alpha$  le coefficient d'augmentation du coût des heures supplémentaire. Dans l'exemple de l'énoncé,  $\alpha = 1.05$ .

Étant donné que le coût de l'heure  $i$  est plus important que celui de l'heure  $i - 1$  d'un facteur  $\alpha$ , l'optimisation mettra toujours les variables  $\xi$  à 1 dans l'ordre. Ceci explique qu'il n'est pas nécessaire d'imposer une contrainte sur l'ordre des  $\xi$ .

Cependant, cela n'est le cas que pour  $\alpha \geq 1$  : en effet, si le coût diminuait, il serait plus profitable de mettre d'abord les derniers  $\xi$  à 1, car ceux-ci correspondent aux dernières heures supplémentaires, qui sont les moins chères. Cela reviendrait à travailler d'abord les dernières heures, puis éventuellement de travailler les plus récentes, ce qui n'a pas de sens.

Pour résoudre ce problème, on serait tenté d'ajouter une contrainte du type :

$$\xi_{i-1}^t \geq \xi_i^t \quad \forall i \in \{1, \dots, N_{\text{hs}} - 1\},$$

mais les variables  $\xi$  n'étant pas entières, cela n'empêcherait pas d'avoir un résultat où tout  $\xi_i^t$  a une certaine valeur inférieure à 1 pour tout  $i$ . Par exemple, si l'on veut effectuer 10 heures supplémentaires par ouvrier et que  $N_{\text{hs}} = 5$ , on obtiendrait un optimum pour  $\xi_i^t = 0.2 \forall i$ .

En fait, il n'est pas possible de trouver une contrainte linéaire qui permette d'imposer l'ordre des variables  $\xi$ , pour la simple raison que l'ensemble  $\{(\xi_i, \xi_{i+1}) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \xi_{i+1} = 0 \text{ si } \xi_i \neq 0\}$  est l'union de deux segments de droite, et un tel ensemble n'est pas convexe (voir fig. 2).

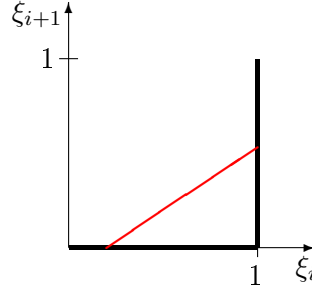


FIGURE 2 – Il n'est pas possible de lier un point du segment du dessous à un point du segment de droite, tout en restant dans l'ensemble formé par ces deux segments. Cet ensemble n'est donc pas convexe.

## 2 Modélisation et implémentation de la ligne d'assemblage avec gestion du personnel

**Question 7.** Donnez à présent une formulation linéaire (continue, sans variables entières) du problème de la planification de la ligne d'assemblage incluant le gestion du personnel, en vous basant sur le modèle déjà construit à la Question 1. Décrivez successivement variables, contraintes et fonction objectif.

Afin d'inclure la variation du nombre d'employés, nous introduisons trois nouvelles variables pour chaque semaine  $t$  :

- $n_o^t$  le nombre d'ouvriers après embauche et licenciement
- $n_e^t$  le nombre d'embauches
- $n_l^t$  le nombre de licenciements.

De nouvelles contraintes sur ces variables sont ajoutées :

- nouvelles variables positives :

$$n_o^t, n_e^t, n_l^t \geq 0;$$

- la variation du nombre d'ouvrier doit dépendre du nombre d'embauche et de licenciement :

$$n_o^t - n_o^{t-1} = n_e^t - n_l^t;$$

- les limites sur la capacité en heures normales et supplémentaires changent pour dépendre du nombre d'ouvriers :

$$n^t \leq N_h n_o^t / D_a \quad \text{et} \quad n_{hs}^t \leq N_{hs} n_o^t / D_a.$$

Enfin, la fonction-objectif est modifiée pour inclure :



— le salaire des ouvriers, qui n'est plus constant :

$$f^t(\dots, n_o^t) = \dots + n_o^t C_h;$$

— le prix d'embauche et de licenciement :

$$f^t(\dots, n_e^t, n_l^t) = \dots + n_e^t C_e + n_l^t C_l.$$

**Question 8.** Implémentez sous MATLAB ce modèle linéaire continu, et calculez la solution correspondant aux données fournies sur icampus. Commentez l'allure de la solution obtenue, et comparez à la solution du modèle simplifié. Commentez également l'intégralité des variables de la solution ; celle-ci présente-t-elle un aspect problématique ?

**Question 9.** Résolvez à nouveau ce modèle en imposant à présent l'intégralité des variables pour lesquelles c'est absolument indispensable (utilisez la fonction `intlinprog`). Commentez l'allure de la solution obtenue, et comparez aux solutions obtenues précédemment.

### 3 Critique

**Question 10.** Critiquez les modèles proposés dans ce projet. Sont-ils réalistes ? Des approximations ont-elles été faites et, si oui sont-elles justifiées ? Quelles améliorations pourriez-vous proposer (sans rentrer dans les détails), avec quel impact potentiel sur la résolution du problème.